Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»

Кафедра «Автоматизация производственных процессов и электротехника»

И.А. Реброва

ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Омск ◈ 2016

УДК 681.5
ББК 32.965.5
Р31

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. Н.С. Галдин (СибАДИ);
канд. техн. наук, доц. Е.Ю. Андиева (ОмГТУ)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебного пособия.

Реброва, Ирина Анатолиевна.
Р31 Теория планирования эксперимента [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.А. Реброва. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа:…………………………..…………………….……, свободный после авторизации. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-93204-895-5.

Рассмотрены основные понятия теории эксперимента, задачи дисперсионного, корреляционного, регрессионного анализа и методы их решения, планирование и обработка результатов многофакторного эксперимента, планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.
Имеет интерактивное оглавление в виде закладок.
Предназначено для изучения дисциплин «Планирование эксперимента» и «Теория планирования эксперимента» магистрами и аспирантами всех направлений подготовки всех форм обучения.

Текстовое (символьное) издание (1,5 МБ)
Системные требования : Intel, 3,4 GHz ; 150 МБ ; Windows XP/Vista/7 ; DVD-ROM ;
1 ГБ свободного места на жестком диске ; программа для чтения pdf-файлов Adobe Acrobat Reader

Редактор Н.И. Косенкова
Техническая подготовка – Т.И. Кукина
Издание первое. Дата подписания к использованию 18.03.2016

Издательско-полиграфический центр СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира, 5
РИО ИПЦ СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

ВВЕДЕНИЕ

Теория планирования эксперимента формулирует приемы и способы оптимальной организации исследовательской работы. Изучение основ теории эксперимента и овладение практическими приемами ее использования повышают эффективность работы исследователя, позволяют с наименьшими затратами решать многие практически важные исследовательские задачи: построение по опытным данным математической модели объектов, оптимизацию процессов, проверку различных предположений.

В настоящее время обработка результатов инженерных экспериментов проводится с использованием специализированных пакетов компьютерных прикладных программ. Исследователю важно правильно понимать область применения статистических методов решения того или иного класса задач. Однако никакие возможности современного пользовательского интерфейса не освобождают исследователя от необходимости изучения и понимания сути статистических методов, реализованных в таких системах.

В учебном пособии изложены элементы теории планирования эксперимента, рассмотрены примеры решения типовых задач исследования.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ КАК ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Понятие эксперимента

Экспериментом называют целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения о нем достоверной информации.

В науке эксперимент играет важную роль, являясь источником познания и критерием истинности теорий и гипотез. Объекты исследования разнообразны, но методы экспериментальных исследований имеют много общего. Организация и проведение исследований обычно содержат следующие этапы:

– выбор плана проведения эксперимента;
– сокращение числа рассматриваемых переменных с целью уменьшения объема проводимых экспериментов;
– контроль хода эксперимента;
– исключение влияния случайных внешних воздействий;
– оценка точности средств измерений и точности результатов эксперимента;
– анализ и интерпретация полученных результатов.

Работа экспериментатора зачастую бывает настолько непродуманной и неорганизованной, что полученные результаты не оправдывают затраченных на неё средств, поэтому вопросы организации эксперимента, снижения затрат на его проведение и обработку результатов являются весьма актуальными.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планированием эксперимента называется выбор плана эксперимента, удовлетворяющего поставленным требованиям.

Современные методы планирования эксперимента и обработки его результатов, разработанные на основе математической статистики и теории вероятностей, позволяют существенно сократить число необходимых для проведения опытов. Знание и использование этих методов делает работу экспериментатора целенаправленной и повышает надёжность получаемых им результатов.

1.2. Виды экспериментальных исследований

Любой эксперимент предполагает проведение тех или иных опытов.

Опыт – воспроизведение исследуемого явления в определённых условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.

По цели проведения и форме представления полученных результатов различают качественные и количественные эксперименты.

Качественный эксперимент устанавливает только сам факт существования какого-либо явления, но при этом не даёт никаких количественных характеристик объекта исследования. Результатом такого эксперимента является словесное описание объекта. Это не самый эффективный и информативный способ представления результатов эксперимента, поскольку не позволяет дать количественных рекомендаций, проанализировать свойства объекта в различных условиях.

Количественный эксперимент не только фиксирует факт существования того или иного явления, но и позволяет установить соотношения между количественными характеристиками явления и количественными характеристиками способов внешнего воздействия на объект исследования.

По способу проведения различают пассивные и активные эксперименты.

Пассивный эксперимент основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования, без вмешательства в эксперимент в процессе его проведения. Обработка экспериментальных данных осуществляется только после окончания эксперимента.

При использовании методов *активного эксперимента* математическое описание строится в виде совокупности статических и динамических выходных характеристик объекта, которые регистрируются при подаче на его входы специальных возмущающих воздействий по заранее спланированной программе.

К требованиям, предъявляемым при планировании активного эксперимента, относят степень точности и надёжности результатов, полученных после проведения эксперимента, сроки и средства, имеющиеся в распоряжении исследователя и др.

По условиям проведения эксперименты делят на лабораторные и промышленные.

В *лабораторном эксперименте* меньше влияние случайных погрешностей, проще обеспечить запланированные условия проведения опытов, большая возможность варьировать входные переменные.

В *промышленных условиях* усложняются измерения и сбор информации, значительно большее влияние на объект исследования и средства измерений оказывают различного рода помехи, поэтому в промышленном эксперименте необходимо использовать специальные статистические методы обработки результатов. Кроме того, на производстве всегда желательно по возможно меньшему числу измерений получить наиболее достоверные результаты.

1.3. Математическая модель объекта исследования

В общем виде объект исследования можно представить структурной схемой, приведенной на рис. 1.1. Состояние объекта исследования можно представить зависимостью

$$Y = f(X;U;Z), \qquad (1.1)$$

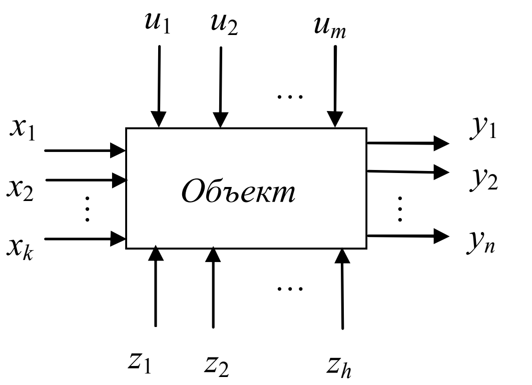


Рис.1.1. Структурная схема объекта исследования

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – независимые управляющие (входные) переменные, которые в процессе эксперимента можно целенаправленно изменять (питающее напряжение, технологические режимы и т. п.); $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – контролируемые возмущающие воздействия, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования (температура окружающей среды, освещение и т.п.); $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_h)$ – неконтролируемые и неуправляемые возмущения, неизвестные исследователю, медленно изменяющиеся во времени случайным образом; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – контролируемые или вычисляемые параметры, характеризующие состояние объекта.

Такое представление объекта (см. рис. 1.1) основано на широко используемом в технике принципе «черного ящика», т.е. системы, структура которой скрыта от наблюдателя, а суждение об ее функционировании создается только на основании внешних воздействий и ответствующих им реакциях системы. Следовательно, одной из основных задач эксперимента является выявление взаимосвязей между входными и выходными параметрами объекта и представление их в количественной форме в виде **математической модели**. Такая модель является математическим отображением наиболее существенных взаимосвязей между параметрами объекта. Она представляет собой совокупность уравнений, условий и алгоритмических правил и позволяет получить информацию о процессах, протекающих в объекте, которая может быть использована для управления моделируемым объектом с целью поиска оптимальных условий, а также анализировать и проектировать системы.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают физические (аналитические) и статистические (эмпирические) модели.

Физические модели представляют в виде сложных систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных или дифференциально-интегральных), позволяющих очень точно описать процессы, протекающие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственное наблюдение этих процессов.

Статистические модели получают в результате статистической обработки экспериментальной информации, собранной об исследуемом объекте. Эти модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводятся эксперименты. Во многих случаях построение таких моделей можно выполнить при сравнительно небольших затратах времени и средств.

Принято также различать стационарные и динамические модели. Первые из них представляют не изменяющиеся во времени соотношения, вторые описывают переходные процессы, т.е. нестационарные состояния.

1.4. Факторы

Входные параметры, которые оказывают влияние на объект и могут быть измерены, называют **факторами**. Так, например, при исследовании измерительного преобразователя с целью получения его математической модели в качестве факторов могут выступать измеряемая величина, температура окружающей среды, напряжение питания и т.п. Очевидно, что при планировании активного эксперимента факторы должны быть управляемыми и независимыми.

Каждый фактор имеет область определения, которая должна быть установлена до проведения эксперимента. Она может быть непрерывной или дискретной, причем при непрерывной области обычно производят ее искусственную дискретизацию. Считают, что каждый из параметров может изменяться в некоторых пределах:

$$
\begin{aligned}
&x_{iH} \le x_i \le x_{iB} \quad (i = 1,2,\ldots,k);\\
&u_{jH} \le u_j \le u_{jB} \quad (j = 1,2,\ldots,m); \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

$$z_{gH} \le z_g \le z_{gB} \quad (g = 1, 2, \ldots, h).$$

Выход хотя бы одного параметра за эти пределы приводит к нарушению нормальной работы устройства (или нормального протекания процесса). Задача исследователя заключается в том, чтобы при фиксированных параметрах $z_g = \text{const}$ и $u_j = \text{const}$ выбрать такие значения $x_i = \text{var}$ (такую рабочую точку в области работоспособности), при которых выходной (или оптимизируемый) параметр объекта y достигает оптимальной величины. Другими словами, необходимо оптимизировать функцию $y = f(x_i = \text{var}; u_j = \text{const}; z_g = \text{const})$ в области определения x_i.

Фактор считается заданным, если вместе с его названием указывается область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор. Область определения может быть непрерывной и дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Различают качественные и количественные факторы. Качественные факторы рекомендуется учитывать на первой стадии эксперимента (марка материала, тип оборудования и т.д.). К количественным относятся те факторы, которые можно измерять.

При выборе факторов необходимо учитывать следующие требования:

– управляемость. Под управляемостью понимается возможность придавать фактору любой уровень в области его определения и поддерживать этот уровень постоянным в течение всего опыта;

– однозначность. Фактор не должен быть функцией других факторов.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. Поэтому существуют требования, предъявляемые к совокупности факторов:

- совместность. Каждый фактор может быть установлен на любом уровне вне зависимости от значений уровней других факторов;
- независимость. Отсутствие корреляции между факторами (т.е. связь между факторами не должна быть линейной);
- точность. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов.

При выборе области определения необходимо учитывать следующие ограничения:

- o принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах (например, минимальное температурное значение – абсолютный ноль);
- o технико-экономические ограничения (например, стоимость сырья);
- o ограничения, определяемые конкретными условиями проведения процесса (например, возможности средств измерения).

Процедура выбора области эксперимента включает два этапа:

- – выбор основного (нулевого) уровня;
- – выбор интервала варьирования.

Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора называются **уровнями фактора.**

В качестве нулевой точки выбирают такое состояние объекта исследований, которое принимается за исходное при поиске оптимума. Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с его состоянием в нулевой точке. Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования в этой же области, то за нулевую принимается точка, в которой параметр оптимизации имеет наилучшее значение, установленное в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями или между основным и нижним уровнями.

На выбор интервала варьирования накладываются ограничения:

- – снизу он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора;
- – сверху верхний или нижний уровень не должен выходить за область определения.

Кроме того, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, т.к. это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. Очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации.

Зависимость числа опытов от числа уровней факторов имеет вид

$$N = p^k, \tag{1.3}$$

где N – число опытов; p – число уровней факторов; k – число факторов.

В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента. Геометрической интерпретацией области определения факторов является **поверхность отклика**. В случае двух факторов имеем двухмерное пространство (рис. 1.2). Если факторы совместны, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник. Для числа факторов более двух пространство многомерное и геометрическая наглядность теряется.

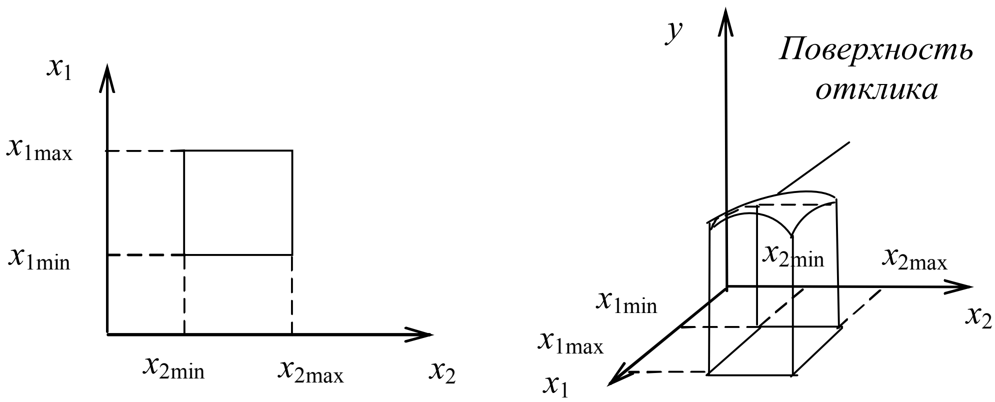


Рис. 1.2. Область определения факторов. Поверхность отклика:
—— границы совместимости факторов;
– – – границы определения факторов

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется **факторным пространством**. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметров оптимизации.

Каждую конкретную комбинацию факторов можно рассматривать как точку в многомерном факторном пространстве. Область возможных комбинаций факторов, построенную в многомерном факторном пространстве, называют **областью планов эксперимента**.

При планировании эксперимента с целью нахождения оптимальных условий в качестве единственной выходной величины рассматривается критерий оптимальности (параметр оптимизации), зависящий от выходных параметров объекта. Эту функцию рассматривают как отклик объекта на указанную комбинацию факторов и называют **функцией отклика**.

1.5. Параметр оптимизации

Выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации) является одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования.

Под **параметром оптимизации** понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является откликом на воздействие факторов, которые определяют поведение исследуемой системы. Каждый реальный объект может характеризоваться несколькими или одним параметром оптимизации.

Параметр оптимизации необходимо выбирать с учетом комплекса требований. Он должен:

– быть количественным, т.е. иметь числовую оценку;

– обладать однозначностью в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, при этом обратное утверждение неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов;

– быть универсальным и всесторонне отражать характеристики объекта, процесса, явления. Универсальными обычно являются экономические и технико-экономические параметры (себестоимость, надежность и др.);

– быть эффективным как с точки зрения достижения цели, так и в статистическом смысле. Если, например, за параметр оптимизации принять себестоимость восстановления детали, то он не будет характеризовать надежность ее работы. Поэтому в качестве параметра оптимизации целесообразно выбирать себестоимость при допустимой износостойкости или износостойкость при допустимой себестоимости. Статистически эффективным параметром оптимизации является тот, который имеет наименьшие ошибки измерений;

– иметь ясный физический смысл. Это требование не только определяет цель исследования, но и облегчает интерпретацию полученных результатов эксперимента.

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, из множества выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Используя корреляционный анализ, исследуется также возможность уменьшения числа выходных параметров. Кроме того, для выбора единого параметра оптимизации применяются математические преобразования, переход от нескольких параметров оптимизации к обобщенному.

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов y_u $(u = 1,2,\ldots,n)$, каждый из этих откликов имеет свой физический смысл и чаще всего разную размерность и измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u-го отклика в i-м опыте $(i = 1,2,\ldots,N)$. Чтобы объединить отклики, необходимо ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу, которая должна быть однотипной для всех объединяемых откликов. Если каждому y_{ui} присвоить только два значения: 0 – неудовлетворительный результат, 1 – удовлетворительный результат, то таким образом можно стандартизовать шкалу частных откликов. Обобщенный отклик в этом случае также должен принимать одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если все частные отклики в этом опыте приняли значение 1 и 0, если хотя бы один из откликов обратился в 0. Тогда для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}}\,, \qquad (1.4)$$

где Y_i – обобщенный отклик в i-м опыте; П – произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$.

Если для каждого из частных откликов известен «идеал» y_{u0} – наилучшее значение u-го отклика, тогда модуль разности $\left|y_{ui} - y_{u0}\right|$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно модуль разности разделить на желаемое значение $|y_{ui} - y_{u0}| / y_{u0}$. При совпадении с идеалом всех частных откликов в некотором опыте Y_i равно нулю. Это и есть то значение, к которому необходимо стремиться.

Недостатком такой оценки является то, что все частные отклики входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u.

$$Y_i = \sqrt{\sum_{u=1}^{n} a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2}, \tag{1.5}$$

причем $\sum_{u=1}^{n} a_u = 1$ и $a_u > 0$. Чтобы проранжировать отклики по степени важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками.

Вместо шкалы с двумя классами 0 и 1 можно, используя отношения предпочтения, получить более содержательную шкалу желательности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта, а под психологическими параметрами понимаются субъективные оценки экспериментатора желательности того или иного значения отклика. Чтобы получить шкалу желательности, можно воспользоваться готовыми таблицами соответствия между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 1.1). В таблице представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 1.3), которая задается уравнением $d = \exp[-\exp(-y)]$, где exp – принятое обозначение экспоненты. На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. Кривую желательности обычно используют как номограмму. Границы допустимых значений для частных откликов могут быть односторонними в виде $y_{ui} > y_{\min}$ и двусторонними в виде $y_{\min} < y_{ui} < y_{\max}$, причем $y_{\min}$ соответствует отметке на шкале желательности $d_u = 0{,}37$, значение $y_{\max}$ устанавливается на основании сложившейся ситуации и опыта исследователя.

Таблица 1.1

Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80
Хорошо	0,80-0,63
Удовлетворительно	0,63-0,37
Плохо	0,37-0,20
Очень плохо	0,20-0,00

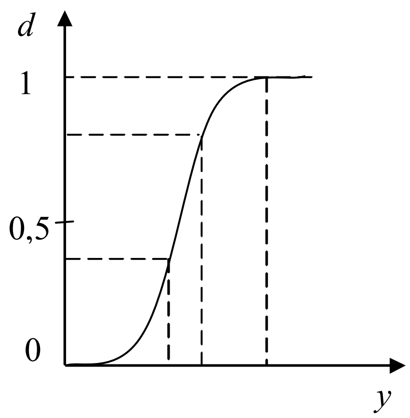


Рис.1.3. Кривая желательности

Преобразовав частные отклики в частные функции желательности, приступают к построению обобщенной функции желательности. Обобщают по формуле

$$D_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} d_{ui}}\ , \qquad (1.6)$$

где D_i – обобщенная желательность; d_{ui} – частные желательности.

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна желательность $d_{ui} = 0$, то обобщенная функция будет равна нулю. С другой стороны, D_i = 1 только тогда, когда все $d_{ui} = 1$.

Например, при установлении пригодности материала с данным набором свойств и в заданных условиях использования, если хотя бы один частный отклик не удовлетворяет требованиям, то материал считается непригодным. Если при определенных температурах материал становится хрупким и разрушается, то, как бы ни были хороши другие свойства, этот материал не может быть применим по назначению.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта и обладает такими свойствами, как адекватность, эффективность, статистическая чувствительность, и поэтому может использоваться в качестве критерия оптимизации.

Вопросы и задания для самоподготовки

1. Дайте определение эксперимента.
2. Какие вопросы решает планирование эксперимента?
3. Перечислите виды экспериментов по способу и условиям проведения, форме представления полученных результатов.
4. Дайте определение математической модели объекта исследования.
5. Что называют факторами, областью определения факторов?
6. Что называют функцией отклика и поверхностью отклика?
7. Какие виды математических моделей используются при проведении экспериментальных исследований?
8. Перечислите этапы проведения экспериментальных исследований.
9. Перечислите основные задачи эксперимента.
10. Дайте определение параметра оптимизации.
11. Перечислите требования, предъявляемые к параметру оптимизации.
12. Что называют обобщенным параметром оптимизации?
13. В каких случаях применяют шкалу желательности?
14. Изобразите кривую желательности. Возможно ли применение кривой для определения обобщенного параметра оптимизации?
15. Требования, предъявляемые к факторам.
16. Что называют уровнями факторов и интервалом варьирования факторов?
17. Какие ограничения необходимо учитывать при выборе интервала варьирования?
18. Как зависит количество опытов в эксперименте от числа уровней факторов?
19. Дайте определение факторного пространства.

2. ПРОСТЫЕ СРАВНИВАЮЩИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

2.1. Предварительная обработка экспериментальных данных

Предварительная обработка результатов измерений необходима для того, чтобы при построении эмпирических зависимостей с наибольшей эффективностью использовать статистические методы и корректно анализировать полученные результаты.

Предварительная обработка результатов измерений включает:

- отсеивание грубых погрешностей (промахов);
- оценку достоверности результатов измерений;
- проверку соответствия результатов измерения нормальному закону и определение параметров этого распределения.

Полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная величина в ходе эксперимента, называется **генеральной совокупностью**. Она может быть конечной и реально существующей или бесконечной, гипотетической. Генеральная совокупность обладает некоторыми неслучайными свойствами, которые могут быть выявлены в результате эксперимента.

Поведение генеральной совокупности описывают функции распределения плотности вероятности $p(x)$ случайной величины (результатов измерений). Однако реальное число n наблюдений физической величины всегда ограничено, поэтому результаты наблюдений допустимо считать величинами дискретными. Некоторый набор значений случайной величины $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называют **выборкой**. Число полученных экспериментальных результатов n называется **объемом выборки**. Основная задача математической статистики заключается в том, чтобы по результатам эксперимента (по данным выборки) высказать обоснованное суждение о свойствах генеральной совокупности.

Выборка должна достаточно полно характеризовать генеральную совокупность, т.е. она должна быть представительной. Чтобы обеспечить представительность выборки, необходимо выполнить два важных условия: во-первых, все элементы генеральной совокупности должны появляться в выборке с одинаковой вероятностью; во-вторых, наблюдения должны быть независимыми, т.е. появление каждого из элементов выборки не должно влиять на вероятность появления других элементов. Так как элементы выборки случайные, все заключения и результаты, полученные на основе выборочных данных, носят вероятностный характер.

Выборка содержит лишь часть генеральной совокупности, по которой можно попытаться оценить числовые характеристики всей генеральной совокупности. Существует два типа оценок – точечные и интервальные.

Под **точечной оценкой** понимается отдельное число, которое используется в качестве оценки параметра генеральной совокупности. Например, выборочное среднее

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.1}$$

есть точечная оценка математического ожидания m_1, точечная оценка дисперсии σ^2 при известном математическом ожидании:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_1\right)^2}{n}; \tag{2.2}$$

при неизвестном математическом ожидании:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 . \tag{2.3}$$

Возможны различные оценки одной и той же числовой характеристики, например, для математического ожидания оценками могут служить выборочное среднее, выборочная медиана и т.п. Чтобы оценить качество оценки в статистическом анализе, рассматриваются четыре критерия:

– несмещенность. Оценка называется несмещенной, если все выборочные значения располагаются симметрично относительно истинного значения оцениваемого параметра. Согласно центральной предельной теореме распределение выборочных средних является нормальным, а значит, симметричным;

– эффективность. Эффективная оценка обладает наименьшей дисперсией по сравнению с другими оценками данной числовой характеристики. Относительно выборочного среднего дисперсия обладает свойством минимальности;

– состоятельность. Говорят, что оценка истинного значения параметра является состоятельной, если по мере увеличения объема выборки ее значение приближается к истинному значению параметра;

– достаточность. Оценка является достаточной, если при ее вычислении используется вся содержащаяся в выборке информация.

Таким образом, выборочное среднее является наилучшей оценкой математического ожидания, так как она удовлетворяет всем четырем критериям.

В качестве **интервальной оценки** используют доверительный интервал. **Доверительный интервал** – это отрезок, центром которого является точечная оценка числовой характеристики, включающий истинное значение данной числовой характеристики с заданной вероятностью. Эта вероятность называется **доверительной вероятностью**. Таким образом, интервал является мерой точности оценки, а доверительная вероятность характеризует достоверность оценки. Размер доверительного интервала зависит от того, каким значением доверительной вероятности задался экспериментатор. Чем выше доверительная вероятность, тем шире должен быть интервал, чтобы с заданной вероятностью включать в себя истинное значение числовой характеристики. Часто выбирают значение доверительной вероятности P=0,95, только иногда, в случае ответственных и очень ответственных исследований, полагают P=0,99 и 0,999 соответственно.

Процедура построения доверительного интервала включает два этапа:

– записывается вероятностное утверждение относительно некоторой случайной функции, включающей в себя разность или отношение оценки числовой характеристики и ее истинного значения. Такая функция несет информацию о степени близости этих величин. Необходимо, чтобы закон распределения этой функции был известен;

– вероятностное утверждение преобразуется к виду, при котором границы доверительного интервала числовой характеристики представлены в явном виде.

Построим доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Вероятностная функция в этом случае имеет вид

$$t = \frac{\bar{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (2.4)$$

и распределена нормально. При построении доверительного интервала можно использовать соответствующую таблицу нормального распределения либо таблицу распределения Стьюдента для определения значения t_α, такого, что за пределами $-t_\alpha$ и $+t_\alpha$ остается часть площади, равная α, тогда как в пределах $[-t_\alpha, +t_\alpha]$ заключена часть площади, равная $1-\alpha$ (рис. 2.1).

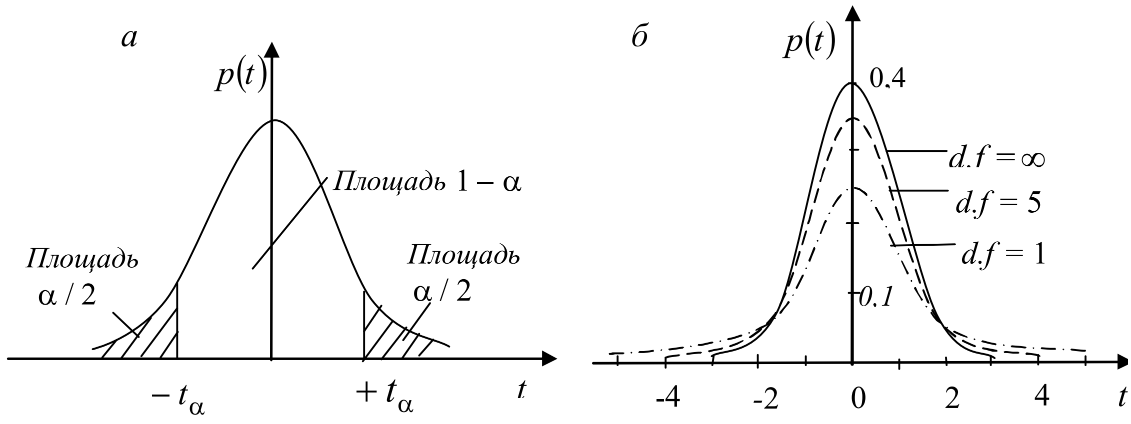


Рис. 2.1. Кривые плотности вероятности:
а – нормального распределения; *б* – *t*-распределения

Следовательно, можно записать следующее вероятностное утверждение:

$$P\left\{-t_\alpha \le \frac{\bar{x}-m_1}{\sigma/\sqrt{n}} \le t_\alpha\right\} = 1-\alpha. \qquad (2.5)$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$P\left\{\bar{x}-t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m_1 \le \bar{x}+t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha. \qquad (2.6)$$

Величина $1-\alpha = P_Д$ – доверительная вероятность. При этой доверительной вероятности доверительный интервал для математического ожидания m_1 задается пределами $\left[\bar{x}-t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}+t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Величина $\Delta_{\bar{x}} = t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = t_\alpha S_{\bar{x}}$ представляет случайную ошибку наблюдения.

На практике, как правило, число измерений не превышает 10…30. При таком числе наблюдений фактическая дисперсия σ^2 неизвестна, поэтому при построении доверительного интервала для математического ожидания используют выборочную дисперсию S_x^2. При этом *t*-критерий имеет распределение Стьюдента и зависит от числа степеней свободы *d.f.*

Число степеней свободы – это понятие, которое учитывает в статистических ситуациях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Поэтому число степеней свободы вычисляется как разность между числом экспериментальных точек n и числом связей, ограничивающих свободу изменения случайной величины.

Так, при вычислении выборочно дисперсии по формуле (2.3) наблюдается одна связь, определяемая уровнем выборочного среднего, поэтому число степеней свободы выборочной дисперсии $d.f = n-1$, а для дисперсии, найденной из соотношения (2.2), число степеней свободы равно числу испытаний, так как m_1 определено независимым способом.

2.2. Статистические гипотезы

Статистической гипотезой H называется предположение о свойстве генеральной совокупности, которое можно проверить, опираясь на данные выборки. Гипотезы о параметрах генеральной совокупности называются параметрическими, о распределениях – непараметрическими.

Любая гипотеза формулируется до опыта и проверяется на основе последующего эксперимента. Основная гипотеза H_0 обычно высказывается в форме, отрицающей наличие каких-либо видимых отличий, поэтому гипотеза H_0 называется **нулевой**. Одновременно формулируется альтернативная гипотеза H_1.

Проверка гипотезы осуществляется на основе выявления согласованности эмпирических (экспериментальных) данных с гипотетическими (теоретическими). Если расхождение между сравниваемыми величинами не выходит за пределы случайных ошибок, гипотезу принимают. При этом не делается никаких заключений о правильности самой гипотезы, речь идет лишь о согласованности сравниваемых данных. Нулевая гипотеза отвергается тогда, когда по выборке получается результат, который при истинности выдвинутой нулевой гипотезы маловероятен. Границей невозможного или маловероятного обычно считают $\alpha = 0{,}05$, или 0,01, или 0,001 и называют **уровнем значимости**.

Процедура проверки гипотезы производится при помощи **статистического критерия** – правила, определяющего условия, при котором проверяемую нулевую гипотезу следует либо принять, либо отклонить. Критерий представляет собой случайную функцию результатов наблюдения с известным законом распределения (t-, F-, χ^2-критерий). В соответствии с характером распределения одни значения критерия являются более вероятными, другие – менее. Таким образом, область возможных значений делится на две части. Одна называется **областью принятия гипотезы**, другая (где гипотеза должна быть отвергнута) – **критической областью**. Чтобы проверить гипотезу, необходимо вычислить критерий и посмотреть, в какую область попадает вычисленное значение.

Проверка статистических гипотез складывается из следующих этапов:

– формулируется в виде статистической гипотезы задача исследования;

– выбирается статистическая характеристика гипотезы;

– выбираются нулевая и альтернативная гипотезы на основе анализа возможных ошибочных решений и их последствий;

– выбирается приемлемый уровень значимости;

– выбирается критерий проверки гипотезы;

– вычисляется фактическое значение статистического критерия;

– определяется критическое значение статистического критерия по соответствующей таблице;

– проверяется нулевая гипотеза на основе сравнения фактического и критического значений критерия, в зависимости от результатов проверки гипотеза либо отклоняется, либо не отклоняется.

При проверке гипотез по одному из критериев возможны два ошибочных решения:

- неправильное отклонение нулевой гипотезы – ошибка первого рода;
- неправильное принятие нулевой гипотезы – ошибка второго рода.

Возможные решения приведены в табл. 2.1. Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости α. Вероятность не совершить ошибку второго рода $(1-\beta)$ называют мощностью критерия. Обычно задают α и пытаются сделать β возможно малым.

Таблица 2.1

Возможные выводы при проверке гипотез

Решение по критерию	Фактически	
	H_0 верна	H_0 не верна
H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильное решение
H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка второго рода

2.3. Определение необходимого количества опытов при построении интервальной оценки для математического ожидания

Увеличение количества измерений даже при неизменной их точности ($\sigma = \text{const}$) может увеличить доверительную вероятность P или сузить доверительный интервал $\pm\delta$ для определения действительного значения измеряемой величины (математического ожидания).

Необходимое количество измерений n для достижения требуемой точности δ при заданной доверительной вероятности P можно определить заранее в том случае, когда известно действительное значение среднеквадратического отклонения (СКО) σ, а экспериментальные данные подчиняются нормальному закону распределения.

Действительно, при этих допущениях число измерений можно определить

$$n \geq \left(\frac{t \cdot \sigma}{\delta}\right)^2 = t^2 \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2, \qquad (2.7)$$

где t – критерий для нормального закона распределения вероятностей.

Таким образом, число измерений n определяется требуемой доверительной вероятностью (уровнем значимости) и относительным (по отношению к среднеквадратичному отклонению) значением половины ширины доверительного интервала δ, т.е. требуемой точностью определения измеряемой величины. Так при t=1,96 для P=0,95 или $\alpha = 0{,}05$, $\delta = \sigma$ число измерений n = 4; при t=3 для P=0,9973, $\delta = \sigma$, n = 9.

При увеличении необходимой точности измерений в 2 раза, т.е. сужении доверительного интервала до величины $\delta = \sigma / 2$, необходимое число измерений составит n =16. Нетрудно заметить, что необходимое число измерений с увеличением точности возрастает в квадратичной зависимости.

Как правило, действительное значение среднеквадратической ошибки неизвестно, а имеется только её оценка S_x. Тогда

$$n \geq \left(\frac{t \cdot S_x}{\delta}\right)^2 = t^2 \left(\frac{S_x}{\delta}\right)^2, \qquad (2.8)$$

где t-критерий Стьюдента.

Значение критерия Стьюдента зависит не только от выбранного уровня значимости α, но и от числа степеней свободы *d.f*, которое определяется числом измерений. В связи с этим последнее уравнение следует решать методом последовательных приближений. В качестве начального приближения можно задать, в частности, число измерений, рассчитанных по формуле для нормального закона распределения. Далее решая уравнения методом последовательных приближений при $\alpha = 0{,}05$, $\delta = S_x$, для определения доверительного интервала требуется 7 измерений, при $\delta = 0{,}5S_x$ n = 19. С повышением необходимой точности различие в числе измерений, рассчитанных при нормальном законе распределения и распределении Стьюдента, уменьшается и при $\delta \le 0{,}2S_x$ практически совпадает.

Необходимое количество измерений при построении доверительного интервала для математического ожидания приведено в табл. 2.2. В скобках приведены данные для нормального закона распределения.

Таблица 2.2

Количество измерений, необходимое для построения доверительного интервала для математического ожидания

δ / S_x	$P = 0{,}90$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
1	5	7 (4)	11
0,5	13	19 (16)	31
0,4	19	27 (24)	46
0,3	32	46 (48)	78
0,1	273	387 (384)	668

2.4. Исключение грубых погрешностей

Даже тщательно поставленные эксперименты могут давать неоднородные данные, поскольку в процессе эксперимента могут измениться условия проведения опытов. Если в полученной группе результатов наблюдений одно или два существенно отличаются от остальных, а наличия ошибки в снятии показаний, описки и других промахов не обнаружено, то необходимо проверить, не являются ли они грубыми погрешностями, подлежащими исключению. Решение этой задачи выполняется общими методами проверки статистических гипотез в предположении нормального распределения результатов наблюдений. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат i-го наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдения рассматривают как грубую погрешность и его исключают.

Критерий оценки анормальности результатов наблюдений при неизвестном СКО (критерий Н.В. Смирнова). При исключении по этому критерию грубых погрешностей из результатов наблюдений проводят следующие операции:

– результаты группы из n наблюдений упорядочивают по возрастанию $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Выделяют предполагаемые промахи, обычно ими могут оказаться результаты x_1 и x_n;

– вычисляют оценки математического ожидания $\bar{x}$ и СКО S. Значения $\bar{x}$ и S вычисляют без учета экстремальных значений x_i;

– для предполагаемых промахов проводят расчет коэффициентов

$$t_1 = \frac{|x_1 - \bar{x}|}{S}; \ t_n = \frac{|x_n - \bar{x}|}{S}; \qquad (2.9)$$

– задаются уровнем значимости критерия ошибки α. Очевидно, этот уровень должен быть достаточно малым, чтобы вероятность ошибки была невелика;

– по заданным параметрам α, n находят критическое значение t_T из таблиц для распределения Стьюдента (n<20) (прил. 4) либо нормального распределения (n>20) (прил. 3);

– выполняют сравнение коэффициентов, определенных по формулам (2.9), с критическими значениями. Если выполняются условия $t_1 > t_T$ и $t_n > t_T$, то результаты x_1 и x_n относят к промахам и исключают из результатов наблюдений. Процедуру проверки повторяют для x_2, x_{n-1} и т.д., пока все промахи не будут исключены из выборки.

Критерий «трех сигм». Данный критерий применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону, одним из граничных параметров служит оценка СКО измерений S. По этому критерию считается, что результат, полученный с вероятностью $\alpha < 0{,}003$, маловероятен, и его можно считать промахом, если $|x_i - \bar{x}| > 3S$. Данный критерий достаточно хорошо работает при числе измерений $n \ge 20 \ldots 50$.

2.5. Сравнение двух рядов наблюдений

При анализе результатов экспериментальных исследований часто приходится сравнивать две партии изделий, показания двух или нескольких приборов, анализировать результаты работы однотипных агрегатов, сравнивать результаты исследований двух проб материалов и т.д. Решение подобных задач осуществляется также с использованием аппарата проверки статистических гипотез.

Гипотеза о равенстве средних выдвигается, когда необходимо определить, существенно ли расхождение между двумя выборочными средними. Для проверки этой гипотезы определяют среднюю (стандартную) случайную ошибку разности двух выборочных средних S_δ. Для двух независимых выборок она определяется по формуле

$$S_\delta = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \tag{2.10}$$

где S_1^2 и S_2^2 – выборочные дисперсии соответственно в первой и второй выборках.

Фактическое значение критерия

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_\delta}. \tag{2.11}$$

Критическое значение t_T определяют по таблице распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $d.f = n_1 + n_2 - 2$. Если $t < t_T$, нулевая гипотеза принимается. Следовательно, можно считать, что математические ожидания в двух подгруппах одинаковы, эти подгруппы можно объединить в одну группу и характеризовать последнюю общим средним.

2.6. Сравнение двух дисперсий

При выполнении измерений в различных условиях часто возникает задача сравнения степени разброса (дисперсий) исследуемых параметров (случайных величин).

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий имеет большое значение, так как измеряемая дисперсией величина рассеяния характеризует такие важные показатели, как точность машин, приборов, стабильность технологических процессов, качество готовой продукции и т.д. Поэтому, например, о преимуществах той или иной технологии или о качестве выпускаемой продукции вывод можно сделать в результате сравнения дисперсий тех параметров, которые их характеризуют.

Таким образом, требуется установить, являются ли выборочные дисперсии $S_1^2 \neq S_2^2$ со степенями свободы $d.f_1$ и $d.f_2$ значимо отличающимися или же они характеризуют выборки, взятые из одной и той же генеральной совокупности или из генеральных совокупностей с равными дисперсиями $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2\right)$. В этом случае нулевая гипотеза формулируется в виде H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, т.е. при заданном уровне значимости α между двумя генеральными дисперсиями нет различия.

Для проверки этой гипотезы используется критерий, основанный на распределении Фишера, зависящий только от числа степеней свободы $d.f_1$ и $d.f_2$. Аналитическое выражение критерия Фишера имеет вид

$$F = \left(S_1^2 / \sigma_1^2\right) / \left(S_2^2 / \sigma_2^2\right) = \left(S_1^2 / S_2^2\right) / \left(\sigma_2^2 / \sigma_1^2\right). \tag{2.12}$$

Плотность распределения вероятностей *p(F)* представлена на рис. 2.2. Значения *F* всегда больше единицы.

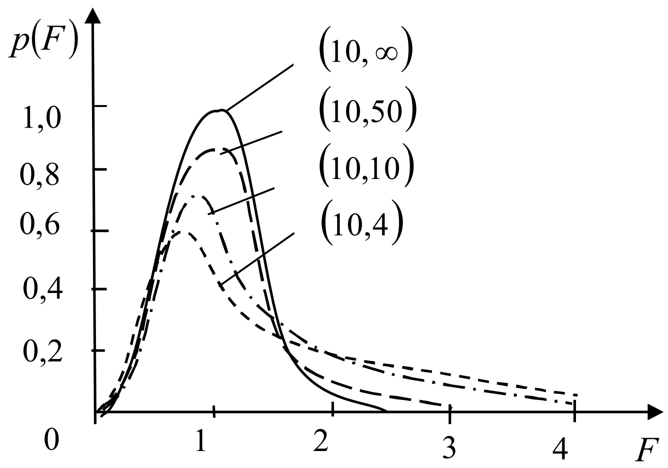


Рис. 2.2. F-распределение для различных d. f_1 и d. f_2

Поскольку по условию основной гипотезы $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, то выражение для F-критерия имеет вид

$$F = S_1^2 / S_2^2 , \tag{2.13}$$

где $S_1^2 > S_2^2$.

При проверке расчётное значение сравнивают с табличным, если $F < F_T$, то нулевая гипотеза принимается.

Следовательно, по двум выборочным дисперсиям можно найти оценку общей генеральной дисперсии

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{2.14}$$

2.7. Проверка гипотезы о законе распределения

2.7.1. Общие сведения

Гипотезы о распределениях заключаются в том, что выдвигается предположение о том, что распределение в генеральной совокупности подчиняется какому-то определенному закону. При планировании эксперимента важно, чтобы наблюдаемые значения физических величин подчинялись нормальному закону распределения. Поэтому нулевая гипотеза H_0: результаты наблюдений подчиняются нормальному закону распределения; альтернативная H_1: результаты наблюдений не подчиняются нормальному закону распределения.

В качестве статистических характеристик гипотезы о законе распределения принимаются оценки параметров распределения.

Если число наблюдений $n > 20$, строится интервальный вариационный ряд. При его построении в первой графе отдельные значения признака указываются в интервалах «от – до», во второй графе – численность единиц, входящих в интервал. Величина интервала определяется по формуле

$$i = R/m, \tag{2.15}$$

где R –размах варьирования признака, $R = x_{\max} - x_{\min}$; m – число групп, которое приближенно определяется по формуле Стерджесса

$$m = 1 + 3{,}32 \lg n. \tag{2.16}$$

Полученную по этой формуле величину округляют до целого большего числа. Нижнюю границу первого интервала определяют, вычитая из $x_{\min}$ половину последнего разряда.

Оценка математического ожидания в этом случае вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x'_j f_j^*}{\sum_{j}^{m} f_j^*}, \tag{2.17}$$

где x'_j – середина интервала; f_j^* – частота попадания результатов наблюдения x_i в заданный интервал; j – номер интервала.

Оценка СКО

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(x'_j - \bar{x}\right)^2 f_j^*}{\sum_{j=1}^{m} f_j^*}}. \quad (2.18)$$

Выбирается приемлемый уровень значимости, обычно $\alpha = 0{,}05$. Проверка гипотезы состоит в том, чтобы на основании сравнения эмпирических (фактических) частот с предполагаемыми (теоретическими) сделать вывод о соответствии эмпирического распределения гипотетическому. Для проверки близости теоретического и эмпирического распределений используются специальные показатели, называемые критериями согласия. Наиболее распространенным является критерий Пирсона χ^2, вычисляемый по формуле

$$\chi^2 = \sum_j \frac{\left(f_j^* - f_j\right)^2}{f_j}, \quad (2.19)$$

где f_j^* – эмпирические частоты в интервале; f_j – теоретические частоты в интервале.

Если все эмпирические частоты равны соответствующим теоретическим частотам, то χ^2 равно нулю. Очевидно, что чем больше отличаются эмпирические и теоретические частоты, тем χ^2 больше; если расхождение несущественно, то χ^2 должно быть малым.

Теоретическая частота в данной группе вычисляется как произведение объема совокупности (числа наблюдений) на вероятность попадания в данный интервал. Теоретические частоты нормального распределения определяются по формуле

$$f_j = \frac{n \cdot i}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left(-t_j^2/2\right), \quad (2.20)$$

где t_j – нормированное отклонение

$$t_j = \frac{x'_j - \bar{x}}{S}. \quad (2.21)$$

Величина $p(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2/2\right)$ – табличное значение (прил. 1), поэтому формулу (2.20) можно переписать в виде

$$f_j = \frac{n \cdot i}{S} p(t_j) . \qquad (2.22)$$

При расчете критерия Пирсона необходимо соблюдать условия:

– число наблюдений должно быть достаточно велико $(n \geq 50)$;

– теоретические частоты в интервале должны быть больше 5. Если теоретические частоты в некоторых интервалах меньше 5, то соседние интервалы объединяют.

Критическое значение χ^2_T определяется по таблице распределения Пирсона (прил. 2) в соответствии с числом степеней свободы $d.f$ и уровнем значимости α. Число степеней свободы рассчитывается так: если эмпирический ряд распределения имеет k категорий (число интервалов с учетом объединения), то k эмпирических частот $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*$ должны быть связаны следующим соотношением: $\sum_{j=1}^{k} f_j^* = n$. Если параметры теоретического распределения известны, то только $(k-1)$ частот могут принимать произвольные значения, а последняя частота может быть найдена из указанного соотношения. Поэтому говорят, что система из k частот благодаря наличию одной связи теряет одну степень свободы и имеет только $(k-1)$ степеней свободы. Кроме того, если при нахождении теоретических частот p параметров теоретического распределения неизвестны, то они должны быть найдены по данным эмпирического ряда. Это накладывает на эмпирические частоты еще p связей, благодаря чему система теряет еще p степеней свободы. Таким образом, число свободно варьируемых частот (а значит, и число степеней свободы) становится равным

$$d.f = k - (p+1). \qquad (2.23)$$

Если $\chi^2 < \chi^2_T$, то гипотеза H_0 о нормальном законе распределения эмпирических данных принимается.

2.7.2. Пример проверки гипотезы о нормальном законе распределения экспериментальных данных

В табл. 2.3 приведены данные о затратах времени на производство единицы продукции. Установить, можно ли с вероятностью $P = 0{,}95$ считать закон распределения экспериментальных данных нормальным.

Таблица 2.3

Затраты времени на производство единицы продукции

Номер изделия	Операционное время, мин									
1-10	9	9	11	9	9	11	9	7	9	6
11-20	9	6	9	11	9	7	9	7	10	7
21-30	9	10	6	10	8	6	9	8	8	8
31-40	8	7	8	7	9	8	9	11	9	9
41-50	8	10	9	8	10	8	8	9	11	9

Основная гипотеза H_0: результаты наблюдений подчиняются нормальному закону распределения.

Определим числовые оценки параметров нормального распределения $\bar{x}$, S. Обобщим данные в виде вариационного ряда (табл. 2.4).

Размах $R = x_{\max} - x_{\min} = 11 - 6 = 5$ (мин).

Число интервалов $m = 1 + 3{,}32\lg n = 1 + 3{,}32\lg 50 \approx 6$.

Величина интервала $i = R/m = 5/6 = 0{,}8$ мин. Примем $i = 1$ мин.

Среднее значение определяем по формуле (2.17): $\bar{x} = 8{,}6$ мин.

Оценку СКО вычисляем по формуле (2.18): $S = 1{,}3$ мин.

Таблица 2.4

Ряд эмпирического распределения

Интервал группировки	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5
Середина интервала x'_j	6	7	8	9	10	11
Частота f_j^*	4	6	11	19	5	5

Определяем теоретические частоты распределения (табл. 2.5) по формуле (2.22): $\dfrac{n \cdot i}{S} = \dfrac{50 \cdot 1}{1{,}3} = 38{,}5$; $t_j = \dfrac{x'_j - 8{,}6}{1{,}3}$; $f_j = 38{,}5 \cdot p(t_j)$; величину $p(t_j)$ определяем по прил. 1.

Так как для использования критерия Пирсона теоретическая частота должна быть больше 5, объединяем первый и второй, пятый и шестой интервалы (табл. 2.6).

Таблица 2.5

Вспомогательная таблица для расчета теоретических частот нормального распределения

Интервал группировки	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5
Середина интервала x'_j	6	7	8	9	10	11
Нормированное отклонение t_j	-2,00	-1,23	-0,46	0,31	1,08	1,85
$p(t_j)$	0,0540	0,1874	0,3588	0,3802	0,2227	0,0721
Частота теоретическая f_j	2,08	7,21	13,81	14,64	8,57	2,78
Частота эмпирическая f_j^*	4	6	11	19	5	5

Таблица 2.6

Вариационный ряд с учетом объединения интервалов

Интервал группировки	5,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 11,5
Частота теоретическая f_j	9,29	13,81	14,64	11,35
Частота эмпирическая f_j^*	10	11	19	10

Рассчитываем χ^2-критерий (2.19): $\chi^2 = 2{,}08$.

Определяем число степеней свободы по формуле (2.23): $k = 4$ – число интервалов, оставшихся после объединения; $p = 2$, т.к. среднее значение и СКО найдены по данным эмпирического ряда; $d.f = 4–(1+2)=1$.

Табличное значение критерия для $d.f = 1$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}05$; $\chi^2_T = 3{,}841$. $\chi^2 < \chi^2_T$. Следовательно, гипотеза о нормальном законе распределения эмпирических данных принимается.

Вопросы и задания для самоподготовки

1. Что называют функцией и плотностью распределения случайной величины?
2. Дайте определение математического ожидания и дисперсии случайной величины.

3. Основные законы распределения случайной величины, применяемые при планировании эксперимента. Числовые характеристики этих законов.

4. Дайте определения генеральной совокупности, выборки.

5. Характеристики точечной оценки и критерии ее качества.

6. Интервальная оценка и доверительный интервал.

7. Что называют статистической гипотезой? Параметрические и непараметрические гипотезы.

8. Почему основную гипотезу называют нулевой?

9. Что называют уровнем значимости и областью принятия гипотезы?

10. Дайте определение статистического критерия. Что называют мощностью критерия?

11. Перечислите этапы проверки гипотезы.

12. Что относят к ошибкам первого и второго рода и какова вероятность их совершить?

13. Задача, решаемая при проверке гипотезы о законе распределения.

14. Роль критерия Пирсона при проверке гипотезы о законе распределения.

15. Какие статистические критерии применяются при проверке параметрических гипотез?

16. Основные гипотезы о выборочных средних, порядок их проверки.

17. Выявление грубых погрешностей с использованием параметрических гипотез.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПАССИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Элементы дисперсионного анализа

3.1.1. Общие сведения

Дисперсионный анализ является одним из методов изучения влияния одного или нескольких факторов на результат наблюдений (отклик). Если результаты наблюдения зависят от некоторых независимых факторов, то возможно разделить вклады этих факторов, анализируя соотношения между их дисперсиями. Таким образом, общая дисперсия отклика раскладывается на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов, и остаточную дисперсию, связанную с ошибками эксперимента. Решение о существенности влияния некоторого фактора на исход эксперимента зависит от того, насколько значимой является составляющая дисперсии, обусловленная этим фактором, по сравнению с дисперсией, обусловленной ошибкой эксперимента. В зависимости от количества факторов выделяют однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Наиболее простым является случай, когда проверяется действие только одного фактора. Для подтверждения наличия связи между признаком, положенным в основу группировки, и результативным признаком необходимо проверить гипотезу о существенности расхождения нескольких средних величин.

Пусть все n наблюдений разбиты на k групп. Вариацию, обусловленную влиянием фактора, положенного в основу группировки, характеризует **межгрупповая дисперсия** δ^2. Она является мерой вариации частных средних по группам $\bar{x}_j$ вокруг общего среднего $\bar{x}_0$. Оценка межгрупповой дисперсии определяется по формуле

$$S_\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(\bar{x}_j - \bar{x}_0\right)^2 f_j}{k-1}, \tag{3.1}$$

где f_j – число единиц в j-й группе; $\bar{x}_j$ – частное среднее по j-й группе; $\bar{x}_0$ – общее среднее по совокупности единиц.

Вариацию, обусловленную влиянием прочих факторов, характеризует в каждой группе **внутригрупповая дисперсия** σ_j^2, ее оценка

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{f_j}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right)^2}{f_j - 1}. \qquad (3.2)$$

Оценка средней из внутригрупповых дисперсий $\overline{\sigma}^2$ – среднее СКО.

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{f_j}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right)^2}{n - k}. \qquad (3.3)$$

Между общей дисперсией σ_0^2, средней из внутригрупповых дисперсий $\overline{\sigma}^2$ и межгрупповой дисперсией δ^2 существует соотношение

$$\sigma_0^2 = \overline{\sigma}_j^2 + \delta^2. \qquad (3.4)$$

Если фактор, положенный в основу группировки, не оказывает влияния на вариацию изучаемого признака, то дисперсия групповых средних будет отражать влияние прочих факторов, которые определяют вариацию внутри групп, а поэтому отношение дисперсий будет близко к единице или отличаться от нее в силу присутствия случайных колебаний.

Дисперсионное отношение имеет вид

$$F = \frac{\delta^2}{\overline{\sigma}^2} \qquad (3.5)$$

или

$$F = \frac{S_\delta^2}{\overline{S}^2}. \qquad (3.6)$$

Если верна нулевая гипотеза (равенство средних в двух выборках), то можно ожидать сравнительно небольшое различие выборочных средних из-за чисто случайной изменчивости. Поэтому при нулевой гипотезе внутригрупповая дисперсия будет практически совпадать с общей дисперсией, подсчитанной без учета групповой принадлежности.

Для проверки значимости результата (т.е. случайности или неслучайности отклонения двух дисперсий) учитывается число степеней свободы. Для расчета межгрупповой дисперсии число степеней свободы равно $d.f_1 = k - 1$, а для расчета внутригрупповой дисперсии $d.f_2 = n - k$. Предельный размер отклонений внутригрупповой дисперсии от общей устанавливают по таблицам F-распределения Фишера (прил. 5). Числа в таблице Фишера больше 1, поэтому критическая область всегда правосторонняя, и при вычислении экспериментального значения F большую дисперсию делят на меньшую, чтобы получить значение больше 1.

Если $F > F_T$, то с заданной вероятностью можно утверждать, что между факторным и результативным признаком существует взаимосвязь.

3.1.2. Пример применения однофакторного дисперсионного анализа

Известны результаты выборочного обследования пробега автомобильных шин нового типа в различных условиях эксплуатации (табл. 3.1). Установить, существует ли зависимость между условиями эксплуатации и величиной пробега шин, гарантируя результат с вероятностью 0,95.

Таблица 3.1

Пробег шин в различных условиях эксплуатации

Условия эксплуатации	Пробег шин, тыс. км	f_j
Городские	70,5; 71,8; 69,8; 58,9; 68,7; 72,1; 70,3; 69,1; 72,0; 58,7; 66,2	11
Смешанные	58.9; 59,1; 60,1; 62,2; 60,5; 58,4; 59,0; 61,8	8
Загородные	54,2; 58,8; 56,6; 55,0; 56,4	5

Факторный признак – условия эксплуатации.

Результативный признак – величина пробега шин.

Для каждой группы определяем средний пробег шин:

городские условия $\quad \bar{x}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_{i1}}{11} = 68{,}0$ тыс. км;

смешанные условия $\quad \bar{x}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_{i2}}{8} = 60{,}0$ тыс. км;

загородные условия $\quad \bar{x}_3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_{i3}}{5} = 56{,}2$ тыс. км.

Общее среднее $\quad \bar{x}_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{24} x_{i}}{24} = 62{,}9$ тыс. км.

Полученные средние величины пробега шин для разных условий эксплуатации отличаются друг от друга. Для того чтобы установить, является ли это различие существенным и вызвано различными условиями эксплуатации, определяется дисперсионное отношение (3.6).

$$S_\delta^2 = \frac{(68{,}0 - 62{,}9)^2 \cdot 11 + (60{,}0 - 62{,}9)^2 \cdot 8 + (56{,}2 - 62{,}9)^2 \cdot 5}{3 - 1} =$$

$$= 288{,}92\,\text{тыс км}^2;$$

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11}(x_{i1} - \overline{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{8}(x_{i2} - \overline{x}_2)^2 + \sum_{i=1}^{5}(x_{i3} - \overline{x}_3)^2}{24 - 3} = 12{,}5\ \text{тыс км}^2;$$

$$F = \frac{288{,}92}{12{,}5} = 23{,}11.$$

При вероятности 0,95 и числе степеней свободы $d.f_1 = 2$; $d.f_2 = 21$ по таблице F-распределения (прил. 5) $F_T = 3{,}467$. $F > F_T$, следовательно, условия эксплуатации оказывают существенное влияние на величину пробега шин.

3.2. Характеристика видов связей между рядами наблюдений

Целью проведения эксперимента является установление вида функциональной связи $\tilde{y} = f(x_1, x_2, x_{3\ldots})$. Связи в общем случае являются достаточно многообразными и сложными. Обычно выделяют следующие виды связей: функциональную и статистическую.

Если с изменением значения одной из переменных вторая изменяется строго определенным образом, т.е. значению одной переменной обязательно соответствует одно или несколько точно заданных значений другой переменной, связь между ними является **функциональной**.

Если с изменением значения одной из переменных вторая может в определенных пределах принимать любые значения с некоторыми вероятностями, но ее среднее значение или иные статистические характеристики изменяются по определенному закону, связь является **статистической**.

Корреляционной связью называют частный случай статистической связи, состоящий в том, что разным значениям одной переменной соответствуют различные средние значения другой. С изменением значения признака *x* закономерным образом изменяется среднее значение признака $\bar{y}$; в то время как в каждом отдельном случае значение признака y (с различными вероятностями) может принимать множество значений.

Причинами возникновения корреляционной связи между признаками могут быть:

– зависимость результативного признака (отклика) или его вариации от вариации факторного признака;

– связь между двумя следствиями общей причины;

– взаимосвязь признаков, каждый из которых и причина и следствие.

По характеру корреляционные связи могут быть прямолинейными и криволинейными. Прямолинейной называется такая корреляционная связь, когда равным изменениям одной переменной соответствуют равные изменения другой переменной (рис. 3.1, *а, б)*. В случае криволинейной корреляции равным изменениям одной переменной могут соответствовать любые изменения другой переменной (рис. 3.1, *в)*. На рис. 3.1, *г* представлен случай, когда между переменными отсутствует связь (нет корреляции).

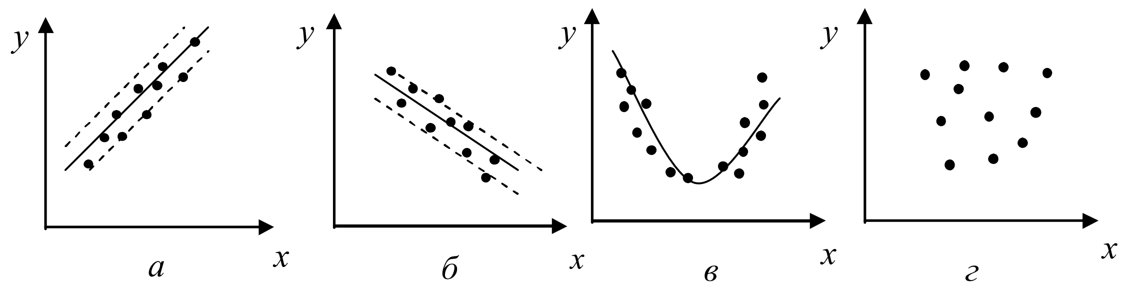


Рис. 5.1. Корреляционные зависимости

Форма связи устанавливает вид функциональной зависимости $\tilde{y} = f(x_1, x_2, x_{3\ldots})$ и характеризуется уравнением регрессии. Если уравнение связи линейное, то получаем линейную многомерную регрессию, уравнение которой имеет вид

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j , \tag{3.7}$$

где b_0, b_1, b_k – коэффициенты уравнения.

В общем случае виды функциональных зависимостей в технике достаточно многообразны: показательные $\tilde{y} = b_0 x^{b_1}$, логарифмические $\tilde{y} = b_0 \lg(x)$ и т.д.

Задача выбора функциональной зависимости неформализуемая, т.к. одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями. Принятие решения о выборе той или иной математической модели остаётся за исследователем. Желательно при обработке результатов эксперимента вид функции $\tilde{y} = f(x_1, x_2, x_{3...})$ выбирать, исходя из условия соответствия физической природе изучаемых явлений или представлений об особенностях поведения исследуемой величины.

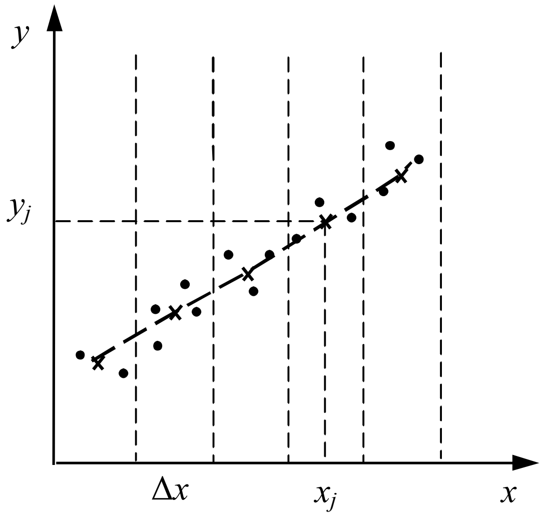


Рис. 3.2. Эмпирическая линия регрессии

При изучении зависимости от одного фактора при заранее неизвестном виде функции отклика полезно предварительно построить эмпирическую линию регрессии (рис. 3.2). Для этого весь диапазон *x* разбивают на равные интервалы Δx, находят середину интервала, подсчитывают частные средние *y* для каждого интервала, полученные точки соединяют отрезками прямой.

3.3. Определение коэффициентов уравнения регрессии

Существует два основных подхода к нахождению b_j.

Первый подход – *интерполирование*. Базируется на удовлетворении условию, чтобы функция $\tilde{y} = f(\mathrm{X}, \mathrm{b})$ совпадала с экспериментальными значениями в некоторых точках, выбранных в качестве опорных. В этом случае для определения $к$+1 неизвестных значений параметров b_j используется система уравнений

$$\tilde{y}_i = f(x_i, b_0, ..., b_j, ... b_k), \quad 1 \le i \le n. \tag{3.8}$$

Число независимых уравнений системы равно числу опорных точек, в пределе – *n* поставленных опытов. С другой стороны, для определения $к$+1 коэффициентов требуется $к$+1 независимых уравнений. В предельном случае, когда число коэффициентов уравнения равно числу экспериментальных точек $n=k+1$, все экспериментальные точки будут совпадать с их расчётными значениями. Добиваться такого точного совпадения путём значительного увеличения числа коэффициентов уравнения регрессии неразумно, поскольку экспериментальные результаты получены с большей или меньшей погрешностью, и такая функция может просто не отражать действительного характера изменения исследуемой величины в силу влияния помех.

При $n > k+1$ число независимых уравнений системы избыточно. Из этих уравнений в разных комбинациях можно составить несколько систем уравнений, каждая из которых в отдельности даст своё решение. Но между собой они будут несовместимыми. Каждое решение будет соответствовать своим значениям коэффициентов b_j. Если все их построить на графике, то получим целый пучок аппроксимирующих кривых, форма и ширина которого показывает область неопределённости проведённого эксперимента. Может быть произведено усреднение всех найденных кривых и полученная усреднённая кривая будет точнее и достовернее описывать исследуемое явление, так как она в значительной степени освобождена от случайных погрешностей, приводивших к разбросу отдельных экспериментальных точек.

Второй подход – *метод наименьших квадратов*. Основан на выполнении требования, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от соответствующих значений уравнения регрессии была минимальна.

$$\sum_{i=1}^{b}\left[f\left(x_i,b_0,b_1,\ldots,b_j,\ldots,b_k\right)-y_i\right]^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{b}\left[f\left(x_i,b_0,b_1,\ldots,b_j,\ldots,b_k\right)-y_i\right]\frac{\partial f\left(x_i\right)}{\partial b_j}=0, \quad 0\le j\le k, \qquad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^{b}f\left(x_i,b_0,b_1,\ldots,b_j,\ldots,b_k\right)\frac{\partial f\left(x_i\right)}{\partial b_j}-\sum_{i=1}^{n}y_i\,\frac{\partial f\left(x_i\right)}{\partial b_j}=0.$$

Последняя система содержит столько же уравнений, сколько неизвестных коэффициентов.

Расчёт коэффициентов уравнения регрессии методом наименьших квадратов можно применять при любых статистических данных, распределённых по любому закону.

3.4. Определение тесноты связи между случайными величинами

Определив уравнение теоретической линии регрессии, необходимо дать количественную оценку тесноты связи между двумя рядами наблюдений. При корреляционном анализе предполагается, что факторы и отклики носят случайный характер и подчиняются нормальному закону распределения. Тесноту связи между случайными величинами характеризуют корреляционным отношением

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{S_y^2 - S_{y\,ост}^2}{S_y^2}}, \tag{3.10}$$

где S_y^2 – дисперсия выходного параметра, определяет разброс экспериментально наблюдаемых точек относительно среднего значения,

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2; \tag{3.11}$$

$S_{y\,ост}^2$ – остаточная дисперсия, характеризует разброс экспериментально наблюдаемых точек относительно линии регрессии и представляет собой показатель ошибки предсказания параметра по уравнению регрессии,

$$S_{y\,ост}^2 = \frac{1}{n-1-k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{y}\right)^2. \tag{3.12}$$

В случае, если $\eta_{xy} = 1$, связь является функциональной, $S_{y\,ост}^2 = 0$, все точки корреляционного поля оказываются на линии регрессии, $\eta_{xy} = 0$ означает отсутствие какой-либо тесноты связи между x и y для данного уравнения регрессии, $S_y^2 = S_{y\,ост}^2$, разброс экспериментальных точек относительно среднего значения линии регрессии одинаков.

Чем ближе расположены экспериментальные точки к линии регрессии, тем теснее связь, тем меньше остаточная дисперсия и тем больше корреляционное отношение.

3.5. Парная линейная корреляция

Простейшей системой корреляционной связи является линейная связь между двумя признаками – парная линейная корреляция. Практическое ее значение состоит в том, что существуют системы, в которых среди всех факторов, влияющих на результативный признак, выделяется один важнейший фактор, который в основном определяет вариацию результативного признака. Измерение парных корреляций составляет необходимый этап в изучении сложных многофакторных связей. Рассмотрение линейных связей объясняется ограниченной вариацией переменных и тем, что в большинстве случаев нелинейные формы связей для выполнения расчетов преобразуются в линейную форму.

По общему направлению связи могут быть прямые и обратные. При прямых связях с увеличением признака x увеличивается и признак y, при обратных с увеличением признака x признак y уменьшается. Изучение парной корреляции осуществляется при совместном измерении двух физических величин.

Уравнение парной линейной корреляционной связи называется уравнением парной регрессии и имеет вид

$$\tilde{y} = a + bx, \tag{3.13}$$

где $\tilde{y}$ – среднее значение результативного признака y при определенном значении факторного признака x; a – свободный член уравнения; b – **коэффициент регрессии**, измеряющий среднее отношение отклонения результативного признака от его средней величины к отклонению факторного признака от его средней величины на одну единицу его измерения (вариация y, приходящаяся на единицу вариации x).

Показателем тесноты парной линейной корреляционной связи является **коэффициент корреляции** r_{xy}. Этот показатель представляет собой стандартизованный коэффициент регрессии, т.е. коэффициент, выраженный не в абсолютных единицах измерения признаков, а в долях СКО результативного признака:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{3.14}$$

Интерпретация коэффициента корреляции такова: отклонение признака-фактора от его среднего значения на величину СКО в среднем по совокупности приводит к отклонению результативного признака от своего среднего значения на r_{xy} его СКО. В отличие от коэффициента регрессии b коэффициент корреляции не зависит от принятых единиц измерения признаков и сравним для любых признаков.

3.6. Статистическое изучение корреляционной связи

Целью статистического исследования является получение модели зависимости результативного признака от признака-фактора для ее практического использования. Решение этой задачи осуществляется следующим образом.

3.6.1. Сбор первичной информации, проверка ее на однородность и нормальность распределения

Устанавливаются результативный показатель y и влияющий на его изменение фактор x.

Для оценки однородности совокупности используется коэффициент вариации по факторному признаку

$$V = \frac{S_x}{\bar{x}} \cdot 100\,\%, \qquad (3.15)$$

где $\bar{x}$, S_x –выборочное среднее и оценка СКО факторного признака соответственно, определяемые по формулам (2.1), (2.17), (2.3), (2.18) в зависимости от объема выборки.

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации V не превышает 33 %.

Проверка нормальности распределения исследуемых факторных признаков проводится по методике, изложенной в подразд. 2.7. Для упрощения процедуры проверки можно воспользоваться табл. 3.2.

Таблица 3.2

Проверка признака-фактора на нормальность

Интервалы значений фактора	Число единиц, входящих в интервал	Удельный вес единиц, входящих в интервал, %	Удельный вес единиц, входящих в интервал, при нормальном распределении, %
1	2	3	4
$(\bar{x} - S_x) - (\bar{x} + S_x)$			68,3
$(\bar{x} - 2S_x) - (\bar{x} + 2S_x)$			95,4
$(\bar{x} - 3S_x) - (\bar{x} + 3S_x)$			99,7

Сопоставление данных граф 3 и 4 позволяет судить о наличии или отсутствии нормальности распределения. На практике часто встречаются случаи отклонения закона распределения факторов от нормального, однако это не означает, что следует отказаться от применения корреляционного анализа.

3.6.2. Исключение из массива первичной информации промахов

Определяются и исключаются промахи в соответствии с методикой, изложенной в подразд. 2.4. Для упрощения анализа применяется критерий «трех сигм»: определяются значения фактора *x*, не попавшие в последнюю строку табл. 3.2, они являются промахами и исключаются из выборки. Для последующего анализа формируется новый массив.

3.6.3. Установление факта наличия и направления корреляционной зависимости между результативным и факторным признаками

Для установления наличия корреляционной связи используются методы параллельного сопоставления рядов результативного и факторного признаков, графического изображения фактических данных с помощью поля корреляции, построения корреляционной таблицы.

Основным методом выявления наличия корреляционной связи является метод аналитической группировки и определения групповых средних. Он заключается в том, что все единицы совокупности разбиваются на группы по величине признака-фактора и для каждой группы определяется средняя величина результативного признака. На основе данных аналитической группировки строится график эмпирической линии связи (линия регрессии), вид которой не только позволяет судить о возможном наличии связи, но и дает некоторое представление о форме корреляционной связи. Если эмпирическая линия связи по своему виду приближается к прямой линии, то можно предположить наличие прямолинейной корреляционной связи; если эмпирическая линия приближается к какой-либо кривой, то это связано с наличием криволинейной связи.

3.6.4. Измерение степени тесноты связи, оценка ее существенности

Для определения степени тесноты парной линейной зависимости служит линейный коэффициент корреляции r. Степень тесноты связи при любой форме зависимости (линейной, криволинейной) оценивают с помощью эмпирического корреляционного отношения η.

Расчет линейного коэффициента корреляции по несгруппированным данным осуществляется по формуле

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\right) \cdot \left(\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}\right)}}. \tag{3.16}$$

Линейный коэффициент корреляции может принимать значения в пределах от –1 до +1. Чем ближе он по абсолютной величине к 1, тем теснее связь. Знак при коэффициенте указывает направление связи: знак «+» соответствует прямой зависимости, знак «–» – обратной. Если коэффициент корреляции равен нулю, то связи между признаками нет; если он равен единице, то между признаками существует функциональная связь.

Оценка существенности линейного коэффициента корреляции проводится с использованием t-критерия Стьюдента по формуле

$$t = \frac{|r|}{S_r}, \tag{3.17}$$

где S_r – средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции.

При большом объеме выборки (свыше 50)

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n-1}}. \tag{3.18}$$

При недостаточно большом объеме выборки

$$S_r = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n-2}}. \tag{3.19}$$

Критическое значение t_T определяется по таблице распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $d.f = n - 1$ или $d.f = n - 2$ (в зависимости от объема выборки). Если $t > t_T$, то следует говорить о существенности коэффициента корреляции.

Корреляционное отношение определяется по формуле

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{\delta y}^2}{S_y^2}}, \tag{3.20}$$

где $S_{\delta y}^2$ – межгрупповая дисперсия результативного признака, вызванная влиянием признака-фактора; S_y^2 – общая дисперсия результативного признака.

$$S_{\delta y}^2 = \frac{\sum \left(\bar{y}_j - \bar{y}_0\right)^2 f_j}{\sum f_j}; \qquad (3.21)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}_0\right)^2}{n}, \qquad (3.22)$$

где $\bar{y}_j$ – среднее значение результативного признака в соответствующих группах, выделенных по величине признака-фактора; $\bar{y}_0$ – общая средняя для всей совокупности; f_j – число единиц в соответствующих группах.

Вычисление корреляционного отношения требует достаточно большого объема информации, которая должна быть представлена в форме групповой таблицы или в форме корреляционной таблицы, т.е. обязательным условием является группировка данных по признаку-фактору.

3.6.5. Построение модели связи

Тип модели выбирается на основе сочетания теоретического анализа и исследования эмпирических данных посредством построения эмпирической линии регрессии. Чаще всего используются следующие типы функций:

линейная $\tilde{y}_x = a + bx$;

гиперболическая $\tilde{y}_x = a + b\frac{1}{x}$;

параболическая $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2$;

показательная $\tilde{y}_x = ab^x$.

Для проверки возможности использования линейной функции определяется модуль разности $\left|\eta^2 - r^2\right|$; если она менее 0,1, то считается возможным применение линейной функции.

Система уравнений для определения параметров *a* и *b* уравнения прямолинейной корреляционной связи (для несгруппированных данных) имеет вид

$$\begin{cases} \sum y = an + b\sum x; \\ \sum yx = a\sum x + b\sum x^2. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Параметры *a* и *b* можно найти по формулам

$$a = \bar{y} - b\bar{x}\,;\; b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \qquad (3.24)$$

В качестве меры достоверности уравнения корреляционной зависимости используется процентное отношение средней квадратической ошибки уравнения S_e к среднему уровню результативного признака $\bar{y}$:

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\,\%; \quad S_e = \sqrt{\frac{\sum\left(y - \tilde{y}\right)^2}{n - g}}, \qquad (3.25)$$

где y – фактические значения результативного признака; $\tilde{y}$ – значения результативного признака, рассчитанные по уравнению регрессии; g – число параметров уравнения регрессии.

Если это отношение не превышает 10 – 15 %, то следует считать, что уравнение регрессии достаточно хорошо отображает изучаемую взаимосвязь.

Для результативного признака определяются доверительные границы, в пределах которых с заданной доверительной вероятностью будет находиться теоретическое значение y. Доверительные границы результативного признака y при значении факторного признака x_0 вычисляются следующим образом:

$$\tilde{y}_{x_0} - t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{\left(x_0 - \bar{x}\right)^2}{S_x{}^2}} \le y \le \tilde{y}_{x_0} + t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{\left(x_0 - \bar{x}\right)^2}{S_x{}^2}}, \qquad (3.26)$$

где t_α определяется в соответствии с уровнем значимости по распределению Стьюдента для числа степеней свободы $d.f = n - 1$.

3.7. Пример применения корреляционно-регрессионного анализа

В табл. 3.3 приведены данные исследования зависимости объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий. Провести на основе приведенных данных исследование взаимосвязи объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий. Результативный признак – объем продукции y. Факторный признак – уровень автоматизации поточной линии x.

Первичная информация проверяется на однородность по признаку-фактору с помощью коэффициента вариации.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 73{,}5\ \%; \qquad S_x = \sqrt{\frac{\sum\left(x - \bar{x}\right)^2}{n}} = 4{,}1\ \%; \qquad V = \frac{4{,}1}{73{,}5} \cdot 100 = 5{,}4\ \%.$$

$V < 33\%$, следовательно, совокупность можно считать однородной.

Таблица 3.3

Данные для анализа

Номер линии	Уровень автоматизации, %	Объем продукции, млн руб.	Номер линии	Уровень автоматизации, %	Объем продукции, млн руб.
1	77,8	18,5	11	69,6	17,5
2	69,0	18,2	12	79,2	21,8
3	76,5	20,4	13	70,8	16,5
4	80,7	21,8	14	72,3	16,8
5	72,0	16,8	15	79,2	21,0
6	77,1	20,8	16	73,5	16,8
7	64,0	14,2	17	71,1	16,5
8	72,0	17,0	18	69,9	17,0
9	75,9	18,4	19	70,5	17,5
10	73,2	19,5	20	75,0	20,9

Проверка первичной информации на нормальность распределения проводится с помощью правила «трех сигм» (табл. 3.4). Можно считать, что значения фактора подчиняются закону нормального распределения.

Таблица 3.4

Проверка признака-фактора на нормальность

Интервалы значений фактора	Число единиц, входящих в интервал	Удельный вес единиц, входящих в интервал, в общем их числе, %	Удельный вес единиц, входящих в интервал, при нормальном распределении, %
69,4 – 77,6	14	70,0	68,3
65,3 – 81,7	19	95,0	95,4
61,2 – 85,8	20	100	99,7

Все значения факторного признака попадают в интервал «трех сигм» $61{,}2 \le x_i \le 85{,}8$, следовательно, грубых ошибок (промахов) в первичной информации нет.

Для установления наличия связи $y(x)$ производится аналитическая группировка по факторному признаку. Группировка выполняется при равных интервалах и числе групп m=5. Величина интервала

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} = \frac{80{,}7 - 64{,}0}{5} = 3{,}4\ \%.$$

Расчеты приведены в табл. 3.5, 3.6. Как видно из данных групповой таблицы, с увеличением уровня автоматизации поточных линий объем выпускаемой на них продукции растет. На рис. 3.3 представлен график связи. Эмпирическая линия связи приближается к прямой линии. Следовательно, можно предполагать наличие прямолинейной корреляции.

Таблица 3.5

Вспомогательная таблица для заполнения групповой таблицы

x, %	64,0 – 67,4	67,4 – 70,8	70,8 – 74,2	74,2 – 77,6	77,6 – 81,0
Номер линии	7	2; 11; 18; 19	5; 8; 10; 13; 14; 16; 17	3; 6; 9; 20	1; 4; 12; 15
y, млн руб.	14,2	18,2; 17,5; 17,0; 17,5	16,8;17,0; 19,5; 16,5; 16,8; 16,8; 16,5	20,4; 20,8; 18,4; 20,9	18,5; 21,8; 21,8; 21,0

Таблица 3.6

Групповая таблица

x, %	x', %	f_j	$\sum_i y_{ij}$	$\bar{y}_j$, млн руб.
64,0 – 67,4	65,7	1	14,2	14,2
67,4 – 70,8	69,1	4	70,2	17,6
70,8 – 74,2	72,5	7	119,9	17,1
74,2 – 77,6	75,9	4	80,5	20,1
77,6 – 81,0	79,3	4	83,1	20,8

Для измерения степени тесноты связи вычисляем линейный коэффициент корреляции (3.16).

Для расчета r использована вспомогательная табл. 3.7.

$$r = \frac{27173{,}1 - \dfrac{1469{,}3 \cdot 367{,}9}{20}}{\sqrt{\left(108274{,}1 - \dfrac{1469{,}3^2}{20}\right) \cdot \left(6852{,}8 - \dfrac{367{,}9^2}{20}\right)}} = \frac{145{,}3}{168{,}2} = 0{,}86\,.$$

Значение линейного коэффициента корреляции свидетельствует о наличии прямой и достаточно тесной связи.

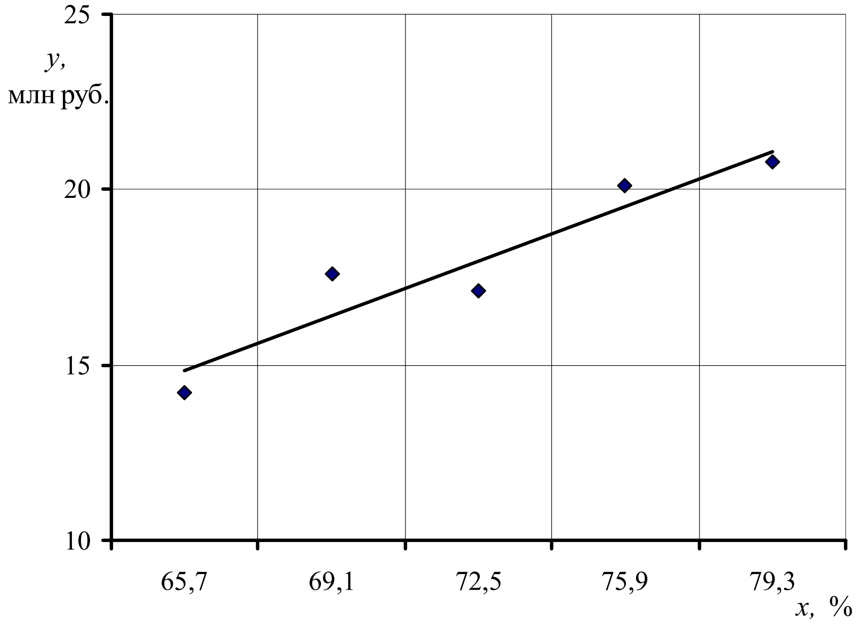


Рис.3.3. Зависимость объема выпускаемой продукции от уровня автоматизации поточных линий

Таблица 3.7

Данные для расчета коэффициента корреляции и уравнения связи

Номер линии	x, %	y, млн руб.	x^2	y^2	xy	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$	$(y-\tilde{y})^2$
1	77,8	18,5	6052,8	342,3	1439,3	20,3	-1,8	3,21
2	69,0	18,2	4761,0	331,2	1255,8	16,4	1,8	3,17
3	76,5	20,4	5852,3	416,2	1560,6	19,7	0,7	0,46
4	80,7	21,8	6512,5	475,2	1759,3	21,6	0,2	0,05
5	72,0	16,8	5184,0	282,2	1209,6	17,7	-0,9	0,88
6	77,1	20,8	5944,4	432,6	1603,7	20,0	0,8	0,67
7	64,0	14,2	4096,0	201,6	908,8	14,2	0,0	0,00
8	72,0	17,0	5184,0	289,0	1224,0	17,7	-0,7	0,55
9	75,9	18,4	5760,8	338,6	1396,6	19,5	-1,1	1,12
10	73,2	19,5	5358,2	380,3	1427,4	18,3	1,2	1,52
11	69,6	17,5	4844,2	306,3	1218,0	16,7	0,8	0,67
12	79,2	21,8	6272,6	475,2	1726,6	20,9	0,9	0,80
13	70,8	16,5	5012,6	272,3	1168,2	17,2	-0,7	0,51
14	72,3	16,8	5227,3	282,2	1214,6	17,9	-1,1	1,15
15	79,2	21,0	6272,6	441,0	1663,2	20,9	0,1	0,01
16	73,5	16,8	5402,3	282,2	1234,8	18,4	-1,6	2,56
17	71,1	16,5	5055,2	272,3	1173,2	17,3	-0,8	0,71
18	69,9	17,0	4886,0	289,0	1188,3	16,8	0,2	0,03
19	70,5	17,5	4970,3	306,3	1233,8	17,1	0,4	0,18
20	75,0	20,9	5625,0	436,8	1567,5	19,1	1,8	3,39
$\sum$	1469,3	367,9	108274,1	6852,8	27173,1	–	–	21,62

Средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{1-0{,}86^2}}{\sqrt{20-2}} = 0{,}12\,; \; t = \frac{|r|}{S_r} = \frac{0{,}86}{0{,}12} = 7{,}167\,.$$

Критическое значение t определяем по таблице распределения Стьюдента для $\alpha = 0{,}05$ и $d.f = 18$ $t_T = 1{,}734$. Так как $t > t_T$, можно утверждать существенность коэффициента корреляции.

Определение модели линейной связи. Проверяем возможность использования линейной функции.

$$\bar{y}_0 = \frac{367{,}9}{20} = 18{,}4 \text{ млн руб.}; \; S^2_{\delta y} = 3{,}32 \text{ млн руб.}^2; \; S_y{}^2 = 4{,}26 \text{ млн руб.}^2;$$

$$\eta = \sqrt{\frac{3{,}32}{4{,}26}} = 0{,}88; \quad \left|\eta^2 - r^2\right| = \left|0{,}88^2 - 0{,}86^2\right| = 0{,}04.$$

Так как $\left|\eta^2 - r^2\right| < 0{,}1$, применение линейной функции считается возможным. Модель линейной связи $\tilde{y} = a + bx$. Коэффициенты уравнения регрессии определяем, используя данные табл. 3.7.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = 0{,}44\,; \qquad a = \bar{y} - b\bar{x} = 18{,}4 - 0{,}44 \cdot 73{,}5 = -13{,}94\,.$$

Получили следующую модель связи (уравнение регрессии):

$$\tilde{y} = -13{,}94 + 0{,}44x\,.$$

Средняя квадратическая ошибка уравнения

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum\left(y - \tilde{y}\right)^2}{n-g}} = \sqrt{\frac{21{,}62}{20-2}} = 1{,}10 \text{ млн руб.}$$

Значения $\tilde{y}$, рассчитанные по уравнению регрессии, представлены в табл. 3.7.

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\,\% = \frac{1{,}10}{18{,}4} \cdot 100\,\% = 6\,\%.$$

Полученное отношение меньше 10 %, поэтому полученная модель достаточно хорошо отображает взаимосвязь двух признаков и может быть использована в практической работе.

3.8. Линейная множественная регрессия

При изучении множественной регрессии не существует графической интерпретации многофакторного пространства. При проведении экспериментов в такой ситуации исследователь записывает показания приборов о состоянии функции отклика y и всех факторов x_i, от которых она зависит. Результат исследований – это матрица наблюдений.

$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1k} \\ y_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_i & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}, \qquad (3.27)$$

где n – число опытов; k – число факторов; x_{ij} – значение j-го фактора в i-м опыте; y_i – значение выходного параметра для i-го опыта.

Задача линейной множественной регрессии состоит в построении гиперплоскости в (k+1)-мерном пространстве, отклонения результатов наблюдений y_i от которой были бы минимальными при использовании метода наименьших квадратов. Т.е. следует определить значения коэффициентов b_j (j=0,1,2,3…) в линейном полиноме

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j . \qquad (3.28)$$

Процедура определения коэффициентов не отличается от одномерного случая. Для оценки тесноты связи между функцией отклика $\tilde{y}$ и несколькими факторами $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_k$ используют коэффициент множественной корреляции R, который всегда положителен и изменяется в пределах от 0 до 1. Чем больше R, тем качественнее предсказания данной моделью опытных данных с точки зрения близости ее к функциональной.

Расчёты обычно начинают с вычисления парных коэффициентов корреляции:

1) r_{yx_j} – коэффициенты, определяющие тесноту связи между функцией отклика $\tilde{y}$ и одним из факторов x_j;

2) $r_{x_j x_u}$ – коэффициенты, показывающие тесноту связи между одним из факторов x_j и фактором x_u.

Если один из коэффициентов $r_{x_j x_u}$ окажется равным 1, то это означает, что факторы x_j и x_u функционально связаны между собой. Тогда целесообразно один из них исключить из рассмотрения, причём оставляют тот фактор, у которого коэффициент r_{yx_j} больше.

После вычисления всех парных коэффициентов корреляции можно построить матрицу коэффициентов следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \cdots & r_{yx_j} & \cdots & r_{yx_k} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_j} & \cdots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 & \cdots & r_{x_2x_j} & \cdots & r_{x_2x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_jy} & r_{x_jx_1} & r_{x_jx_2} & \cdots & 1 & \cdots & r_{x_jx_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_ky} & r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & \cdots & r_{x_kx_j} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.29)$$

Однако парные коэффициенты корреляции не характеризуют тесноту связи, так как они вычисляются при случайно изменяющихся значениях других факторов. Действительно, рассмотрение трёх и более случайных величин может не дать правильного представления о степени связи между всеми случайными величинами. Это объясняется тем, что на закон распределения вероятностей исследуемой пары случайных величин могут оказывать влияние и другие рассматриваемые случайные величины.

Используя матрицу коэффициентов, можно вычислить частные коэффициенты корреляции, которые показывают степень влияния одного из факторов x_j на функцию отклика $\tilde{y}$ при условии, что остальные факторы остаются на постоянном уровне.

Формула для вычисления частных коэффициентов корреляции имеет вид

$$r_{yx1,x2,\ldots,xj,\ldots,xk} = D_{1j} \Big/ \sqrt{D_{11} \cdot D_{jj}}\,, \qquad (3.30)$$

где D_{1j} – определитель матрицы, образованной из матрицы (3.29) вычёркиванием 1-й строки и j-го столбца. Определители D_{11} и D_{jj} вычисляют аналогично. Как и парные коэффициенты, частные коэффициенты корреляции изменяются от -1 до +1.

Значимость и доверительный интервал для коэффициентов частой корреляции определяются так же, как для коэффициентов парной корреляции, только число степеней свободы вычисляют по формуле

$$d.f = n - (k-1) - 2\,, \qquad (3.31)$$

где (k-1) – порядок частного коэффициента парной корреляции.

Для вычисления коэффициента множественной корреляции используют матрицу (3.29)

$$R_{yx1,x2,\ldots,xj,\ldots,xk} = \sqrt{1 - D/D_{11}}\,, \qquad (3.32)$$

где D – определитель матрицы (3.29).

Если число опытов n сравнимо с числом коэффициентов $l=k+1$, связи оказываются преувеличенными. Поэтому следует исключить систематическую погрешность, физический смысл которой состоит в следующем. Если разность n и l будет уменьшаться, то коэффициент множественной корреляции R будет возрастать и при n-l=0 окажется равным R=1, а уравнение регрессии превратится в функциональное уравнение гиперплоскости, которая пройдёт через все n экспериментальных точек.

Значимость коэффициента множественной корреляции проверяется по критерию Стьюдента

$$t = \frac{R}{S_R} \geq t_{\alpha,d.f}\,;\ d.f = n - k - 1, \qquad (3.33)$$

где S_R – СКО коэффициента множественной корреляции,

$$S_R = \left(1 - R^2\right)\sqrt{n - k - 1}, \qquad (3.34)$$

или по критерию Фишера

$$F = \frac{R^2(n - k - 1)}{\left(1 - R^2\right)k} \geq F_{\alpha,d.f1,d.f2}\,;\ d.f_1 = n - k - 1,\ d.f_2 = k\,. \qquad (3.35)$$

Если коэффициент множественной корреляции оказался неожиданно малым, хотя априорно известно, что между выходом y и входами $x_1,\ldots,x_к$ должна существовать довольно тесная корреляционная связь, то возможными причинами такого явления могут быть следующие:

1) ряд существенных факторов не учтён, и следует включить в рассмотрение дополнительно эти существенные входные параметры;

2) линейное уравнение плохо аппроксимирует в действительности нелинейную зависимость $\widetilde{y} = f(x_1,\ldots.,x_k)$, и следует определить коэффициенты уже нелинейного уравнения регрессии методами регрессионного анализа;

3) рабочий диапазон рассматриваемых факторов находится в районе экстремума функции отклика – в этом случае следует расширить диапазон изменения входных переменных, а также перейти к нелинейной математической модели объекта.

Вопросы и задания для самоподготовки

1. Задачи, решаемые в дисперсионном анализе.
2. Дайте характеристику межгрупповой и внутригрупповой дисперсии.
3. Чем обусловлена вариация групповых средних вокруг общего среднего?
4. Какая параметрическая гипотеза принимается в качестве нулевой при дисперсионном анализе? Порядок проверки этой гипотезы.
5. Что называют дисперсионным отношением?
6. Какое вероятностное распределение применяют для проверки гипотезы в дисперсионном анализе? Перечислите его числовые характеристики.
7. Дайте определение статистической и функциональной связи.
8. Что называют корреляционной связью?
9. Перечислите причины возникновения корреляционной связи между признаками.
10. Какие задачи решает корреляционно-регрессионный анализ?
11. В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
12. Практическое значение парной линейной корреляции.
13. Что называют уравнением регрессии?
14. Дайте определение коэффициента корреляции.
15. Перечислите основные этапы изучения корреляционной зависимости. Какие задачи решаются на каждом этапе?
16. Задача линейной множественной регрессии.
17. Определение коэффициентов множественной корреляции.
18. Подход к задаче регрессии с позиций матричной алгебры. Матрицы планирования, наблюдений, коэффициентов.
19. Характеристики и область применения информационной матрицы.

4. МНОГОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

4.1. Общие сведения

В практике научных исследований параметр оптимизации обычно зависит от нескольких факторов. Многофакторные эксперименты проводятся для построения линейных полиномиальных моделей. Вид полинома задается заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным. Широкое распространение полиномиальных моделей объясняется тем, что исследуемую функцию многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в ограниченной области эксперимента обычно можно разложить в ряд Тейлора.

Для математического описания поверхности отклика используют уравнение

$$y = \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{u \neq j \neq q}^{k} \beta_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + \beta_{uj\ldots k} x_u x_j \ldots x_k, \quad (4.1)$$

где β_0 – свободный член; $\beta_u, \beta_{uj}, \beta_{ujq}$ – коэффициенты, учитывающие линейное влияние на отклик, взаимодействия факторов первого, второго и т.д. порядков. Последнее слагаемое учитывает влияние на отклик произведения всех факторов.

В практических задачах всегда можно ограничиться полиномами, включающими первые степени переменных x_u и их различные произведения или первые и вторые степени переменных и крайне редко – более высокие степени. Если переменная в модели имеет степень $p-1$, то в эксперименте она должна принимать не менее p значений или уровней.

По результатам эксперимента производится обработка данных по методу наименьших квадратов. Этот метод позволяет найти оценку b коэффициентов β, тогда математическая модель примет вид

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{u=1}^{k} b_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} b_{uj} x_u x_j + \sum_{u \neq j \neq q}^{k} b_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + b_{uj\ldots k} x_u x_j \ldots x_k. \quad (4.2)$$

Последовательность активного эксперимента:

1) разрабатывается схема проведения исследований, т.е. выполняется планирование эксперимента. При планировании экспериментов обычно требуется с наименьшими затратами и с необходимой точностью либо построить регрессионную модель процесса, либо определить его оптимальные условия;

2) осуществляется реализация опытов по заранее составленному исследователем плану, т.е. осуществляется сам эксперимент;

3) выполняется обработка результатов измерений, их анализ и принятие решений.

Использование теории планирования эксперимента обеспечивает:

1) минимизацию, т.е. предельное сокращение необходимого числа опытов;

2) одновременное варьирование всех факторов;

3) выбор чёткой стратегии, что позволяет принимать обоснованные решения после каждой серии опытов;

4) минимизацию ошибок эксперимента за счёт использования специальных проверок.

Рассмотрим **пример планирования** – хороший и плохой эксперимент (В.В Налимов, Т.И. Голикова. Логические основы планирования эксперимента.– М.: Металлургия, 1980.– 152 с.). Взвешивание трёх объектов А, В, С на аналитических весах.

Первый – традиционный – подход предусматривает последовательное взвешивание каждого из образцов. Исследователь вначале делает холостое взвешивание для определения нулевой точки весов, а затем по очереди взвешивает каждый из образцов. Это пример традиционного использования однофакторного эксперимента, т.е. здесь исследователь изучает реакцию на поведение каждого из факторов в отдельности. Традиционная схема взвешивания трёх объектов представлена в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Первая схема взвешивания

Номер опыта	A	B	C	Результат взвешивания
1	-1	-1	-1	y_0
2	+1	-1	-1	y_1
3	-1	+1	-1	y_2
4	-1	-1	+1	y_3

Масса каждого объекта оценивается только по результатам двух опытов: того опыта, в котором на весы был положен изучаемый объект, и холостого опыта. Например, масса объекта А: $m_A = y_1 - y_0$.

Ошибка измерения предполагается независимой от измеряемой величины, аддитивной и имеющей одно и то же распределение. Тогда дисперсия измерения веса образца

$$\sigma_A^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_0}^2 = 2\sigma^2,$$

где σ^2 – дисперсия любого взвешивания. Такими же будут и дисперсии весов образцов В и С.

Проведём теперь тот же эксперимент по несколько иной схеме: в первых трёх опытах последовательно взвешивают объекты А, В, С, в последнем опыте взвешивают все три объекта вместе, а «холостое» взвешивание не проводится (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Вторая схема взвешивания

Номер опыта	A	B	C	Результат взвешивания
1	+1	-1	-1	y_1
2	-1	+1	-1	y_2
3	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

В этом случае масса каждого объекта будет задаваться формулами

$$m_A = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4);\ m_B = \frac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3 + y_4);$$

$$m_C = \frac{1}{2}(y_3 - y_1 - y_2 + y_4).$$

Масса объекта А, вычисленная по приведённой выше формуле, оказывается не искажённой массами весов объектов В и С, так масса каждого из них входит в формулу для массы объекта А дважды с разными знаками.

Дисперсия, связанная с ошибкой взвешивания по новой схеме,

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2 + \sigma_{y3}^2 + \sigma_{y4}^2\right) = \sigma^2.$$

Аналогичным образом находим: $\sigma_B^2 = \sigma^2$, $\sigma_C^2 = \sigma^2$.

Таким образом, по второй схеме взвешивания дисперсия получается вдвое меньшей, чем при первой, традиционной, хотя в обоих случаях на взвешивание трёх объектов затрачивалось четыре опыта. В результате чего происходит увеличение точности эксперимента в два раза? В первом случае эксперимент поставлен так, что каждую массу получают в результате двух взвешиваний. При новой схеме каждая масса вычисляется по результатам всех четырёх взвешиваний. Вторую схему можно назвать многофакторной, поскольку здесь оперируют всеми факторами так, что каждая масса вычисляется по результатам сразу всех опытов, – вот главная причина уменьшения дисперсии.

4.2. Полный факторный эксперимент

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов.

Число опытов в ПФЭ определяется в соответствии с (1.3). Обычно встречаются планы эксперимента типа 2^k (два уровня варьирования факторов), реже 3^k и очень редко при $p > 3$ в связи с резким ростом числа независимых опытов (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Число опытов $N = p^k$

p	k		
	2	3	4
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

- выбор параметров оптимизации и уровней их варьирования;
- кодирование факторов;
- составление матрицы планирования эксперимента;
- рандомизация опытов;
- реализация плана эксперимента;
- проверка однородности дисперсий параллельных опытов, воспроизводимости результатов;
- расчет коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;
- проверка адекватности модели.

4.2.1. Кодирование факторов

Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины с целью построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_u = \frac{x_u - x_{u0}}{\Delta x_u}, \qquad (4.3)$$

где X_u – кодовое значение u-го фактора; x_u – натуральное текущее значение u-го фактора; x_{u0} – начальный (нулевой) уровень фактора; Δx_u – интервал варьирования u-го фактора.

$$\Delta x_u = \frac{x_{u\max} - x_{u\min}}{2}. \quad (4.4)$$

После кодирования уровни факторов принимают значения: +1 – верхний уровень; –1 – нижний уровень; 0 – нулевой уровень. В качестве нулевого уровня принимают центр интервала, в котором предполагается проводить эксперимент. Например, результат кодирования двух факторов x_1 и x_2 можно представить табл. 4.4.

Таблица 4.4

Кодирование факторов

Факторы	x_1	X_1	x_2	X_2
Интервал варьирования	0,75	1	1	1
Верхний уровень	2,5	+1	3	+1
Нижний уровень	1	–1	1	–1
Основной уровень	1,75	0	2	0

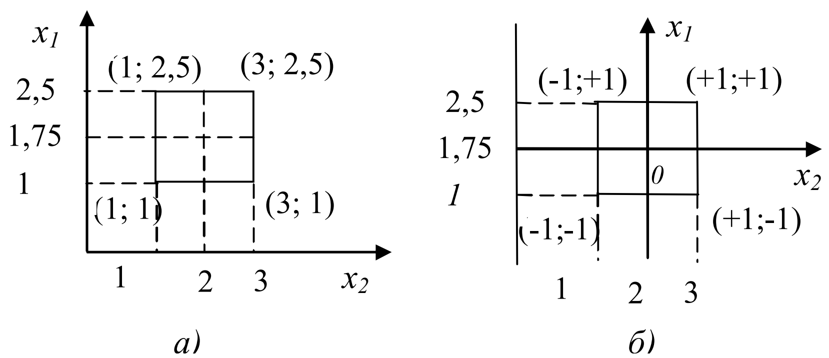


Рис. 4.1. Кодирование факторов

На рис. 4.1 представлено факторное пространство и уровни факторов до кодирования (*а*) и после кодирования (*б*).

4.2.2. Матрицы планирования эксперимента

Условия эксперимента обычно записывают в виде матриц планирования эксперимента (табл. 4.5), где строки соответствуют различным независимым опытам, а столбцы – значениям (уровням) факторов. На рис. 4.2 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

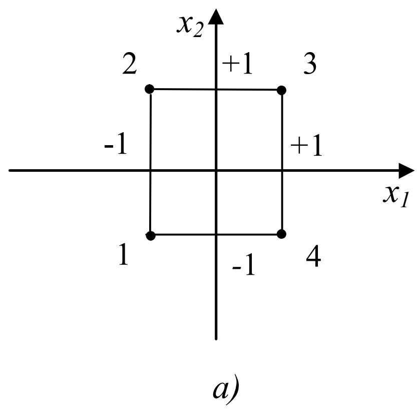
Таблица 4.5

Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	X_1	X_2	y
1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

В общем случае планы типа 2^k геометрически представляют собой совокупность точек, расположенных в вершинах гиперкуба, размещенного в многомерном пространстве. Пространство, заключенное внутри гиперкуба, является областью планирования эксперимента.

Существует несколько способов построения матрицы планирования большой размерности. Один из них основан на чередовании знаков: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором – через два, в третьем – через четыре и т.д.



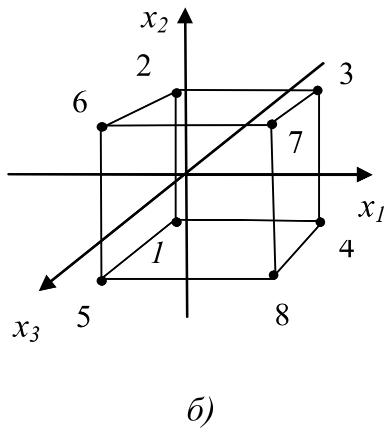


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация ПФЭ:
а – в двухмерном пространстве ($N=2^2$); *б* – в трехмерном пространстве ($N=2^3$)

В табл. 4.6 представлены матрицы ПФЭ ($2^2; 2^3; 2^4$), построенные по данному способу. Вместо единиц с соответствующими знаками указаны только знаки. Такое обозначение возможно для ПФЭ, построенного на двух уровнях факторов.

Таблица 4.6

Матрица планирования ПФЭ

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–	–	–	–
2	+	–	–	–
3	–	+	–	–
4	+	+	–	–
5	–	–	+	–
6	+	–	+	–
7	–	+	+	–
8	+	+	+	–
9	–	–	–	+
10	+	–	–	+
11	–	+	–	+
12	+	+	–	+
13	–	–	+	+
14	+	–	+	+
15	–	+	+	+
16	+	+	+	+

ПФЭ относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность достигается за счет следующих свойств:

– симметричности относительно центра эксперимента. Алгебраическая сумма значений каждого из столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui} = 0, \tag{4.5}$$

где u=1,2,3, …,k – номер фактора; i – номер опыта; N – число опытов;

– условия нормировки. Сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы равна числу опытов:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui}{}^{2} = N\,. \tag{4.6}$$

Это является следствием того, что значения факторов в матрице задаются равными +1 и –1;

– ортогональности. Сумма почленных произведений двух столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ui} X_{qi} = 0, \quad u \neq q\,; \tag{4.7}$$

– ротатабельности. Экспериментальные точки в матрице планирования располагаются так, что точность предсказания параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра плана и не зависит от направления.

4.2.3. Рандомизация опытов

Чтобы исключить влияние систематических погрешностей, вызванных внешними условиями, применяется метод рандомизации (*random* – случайный), который основан на принципе перевода систематических погрешностей в случайные. Уменьшение систематической погрешности достигается при изменении случайным образом методики и условий проведения опытов.

Например, если в плане эксперимента 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации y определить по двум параллельным опытам, то всего необходимо 16 опытов. Для определения порядка проведения опытов можно воспользоваться таблицей случайных чисел (прил. 7). Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

4.2.4. Проведение эксперимента

При проведении эксперимента для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизации. Следует учитывать, что результаты каждого опыта являются случайными величинами из-за погрешности измерений значений факторов, самого параметра оптимизации, влияния неучтенных факторов. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизации будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов (в каждой точке) провести несколько повторных опытов, которые называются параллельными (дублированными). Дублирование позволяет проверить воспроизводимость эксперимента.

4.2.5. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов, воспроизводимости эксперимента

Проверка однородности дисперсии параллельных опытов проводится с целью подтверждения нормального закона распределения ошибок отдельных опытов. В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчету коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных.

Проверку однородности при одинаковом числе параллельных опытов проводят с помощью критерия Кохрена (G-критерий). Проверка состоит в следующем:

– определяют дисперсию параллельных опытов

$$S_i^2 = \frac{1}{r-1}\sum_{l=1}^{r}\left(y_{il} - \bar{y}_i\right)^2 , \qquad (4.8)$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$; r – число параллельных опытов, при однократных измерениях принимают $r = 2$;

– вычисляют отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий (критерий Кохрена):

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} ; \qquad (4.9)$$

– определяют числа степеней свободы $d.f_1 = r - 1$ и $d.f_2 = N$;

– выбирают уровень значимости;

– находят по таблицам критическое отклонение G_T (прил. 6);

– сравнивают величины G и G_T. Если $G \le G_T$, то дисперсия однородна.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта. В случае однородности дисперсий параллельных опытов рассчитывают дисперсию воспроизводимости и ошибку всего эксперимента.

Дисперсию всего эксперимента [дисперсию параметра оптимизации $S^2(y)$] получают в результате усреднения дисперсий всех опытов. Эта же дисперсия характеризует и воспроизводимость эксперимента, $S^2(y) = S^2_{воспр}$.

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{r}\left(y_{il} - \bar{y}_i\right)^2}{N(r-1)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, N; l = 1, 2, \ldots, r). \qquad (4.10)$$

Формулой (4.10) можно пользоваться в случаях, когда число параллельных опытов одинаково во всей матрице. На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда число повторных опытов различно. Это происходит вследствие отброса грубых наблюдений, неуверенности экспериментатора в правильности некоторых результатов. Тогда пользуются средневзвешенным значением дисперсии, взятым с учетом числа степеней свободы:

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{N} f_i}, \tag{4.11}$$

где f_i – число степеней свободы в i-м опыте, $f_i = r_i - 1$.

Ошибка всего эксперимента

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)}. \tag{4.12}$$

4.2.6. Расчет коэффициентов регрессии, проверка их значимости

Значения коэффициентов регрессии b_u и b_{uj} позволяют оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «–» – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе значения фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Иногда оценивают линейный (главный) эффект фактора при переходе его значения с нижнего на верхний уровень. Численно он равен удвоенному коэффициенту полиномиальной модели $2b_u$.

$$b_u = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{ui} y_i}{N} \quad (u = 0,1,2,\ldots,k). \tag{4.13}$$

Если уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2, \tag{4.14}$$

для подсчета коэффициента b_1 используют столбец X_1, а для b_2 – X_2 табл. 4.5.

Если уравнение (4.14) справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$. В силу свойства симметрии $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0 \to \bar{y} = b_0$, b_0 – среднее арифметическое значение параметра оптимизации. Чтобы привести процедуру расчета коэффициентов в соответствие с формулой (4.13), в матрицу планирования (табл. 4.7) вводят столбец фиктивной переменной X_0, которая принимает во всех опытах значение +1.

Таблица 4.7

Матрица планирования ПФЭ 2^2

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	y
1	+	–	–	y_1
2	+	+	–	y_2
3	+	–	+	y_3
4	+	+	+	y_4

$$
\begin{aligned}
b_1 &= [(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4]/4;\\
b_2 &= [(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4]/4;\\
b_0 &= [(+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4]/4.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Если есть основания считать, что модель нелинейна, то ее следует усложнить. Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае говорят, что существует эффект взаимодействия двух факторов. ПФЭ позволяет количественно оценить эффект взаимодействия. Для этого необходимо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов (табл. 4.8).

Модель для такого плана имеет вид

$$
\begin{aligned}
\tilde{y} &= b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2;\\
b_{12} &= [(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4]/4.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Таблица 4.8

Матрица планирования ПФЭ 2^2 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

В ПФЭ встречаются различные уровни взаимодействия факторов. В табл. 4.9 представлены такие взаимодействия. Произведения X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3 представляют эффект взаимодействия первого порядка, $X_1X_2X_3$ – второго.

Таблица 4.9

Матрица планирования ПФЭ 2^3 с учетом взаимодействия факторов

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y
1	+	–	–	–	+	+	+	–	y_1
2	+	+	–	–	–	–	+	+	y_2
3	+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
4	+	+	+	–	+	–	–	–	y_4
5	+	–	–	+	+	–	–	+	y_5
6	+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
7	+	–	+	+	–	–	+	–	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \qquad (4.17)$$

где k – число факторов; m – число элементов во взаимодействии. Так, для плана 2^4 число взаимодействий первого порядка равно 6: $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится с целью упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначимых коэффициентов. Проверку можно осуществлять двумя способами: по t-критерию Стьюдента или путем построения доверительного интервала. Для ПФЭ ошибки всех коэффициентов уравнения регрессии одинаковы $S_{b_0} = S_{b_u} = S_{b_{uj}}$, доверительные интервалы для всех коэффициентов равны.

Расчет ошибок коэффициентов производится по формуле

$$S_b = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}}. \qquad (4.18)$$

Коэффициент регрессий считается значимым, если он по абсолютной величине больше величины доверительного интервала $|b_u| > 2\Delta b$.

Величина доверительного интервала рассчитывается, как правило, при помощи критерия Стьюдента

$$\Delta b = \pm t_T \cdot S_b. \qquad (4.19)$$

Кроме того, проверять значимость коэффициентов можно по t-критерию следующим образом:

– находят ошибки определения коэффициентов по формуле (4.18);

– определяют отношения

$$t_u = \frac{|b_u|}{S(b)}; \qquad (4.20)$$

– находят число степеней свободы $d.f = N(r-1)$, выбирают уровень значимости α;

– по таблице находят критическое значение t_T;

– если рассчитанное значение отношения больше критического $t_u > t_T$, то коэффициент b_u признается статистически значимым, в противном случае – незначимым.

Незначимость коэффициентов может быть обусловлена рядом причин:

– фактор, соответствующий незначимому коэффициенту, не влияет на функцию отклика;

– имеет место большая ошибка;

– выбран малый шаг варьирования независимой переменной;

– экстремум функции по переменной находится вблизи центра планирования $b_u \approx \dfrac{df(0,0,0,\ldots,0)}{dX_u}$.

Если какой-либо коэффициент незначим, он отбрасывается без пересчета всех остальных коэффициентов. Прежде чем исключить коэффициент, необходимо проанализировать причины, вызвавшие незначимость коэффициента.

4.2.7. Проверка адекватности модели

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции оптимизации $\tilde{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$. Для оценки отклонений используют F-критерий Фишера.

Проверку адекватности математической модели выполняют в несколько этапов:

– находят дисперсию адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N-g}\sum_{i=1}^{N} r_i\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2, \tag{4.21}$$

где r_i – число параллельных опытов в i-й строчке матрицы планирования; $\bar{y}_i$ – среднее арифметическое функции отклика из r_i параллельных опытов; $\tilde{y}_i$ – значение функции отклика, предсказанное по уравнению в i-м опыте; g – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии; N – число независимых опытов. Если все опыты повторяются r раз, то формула (4.21) будет иметь вид

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N-g}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2; \tag{4.22}$$

– находят значения F-критерия Фишера (дисперсионное отношение):

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{восп}^2} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)}; \tag{4.23}$$

– определяют числа степеней свободы: $d.f_1 = N - g$ и $d.f_2 = N(r-1)$; выбирают уровень значимости α;

– по значениям $d.f_1$; $d.f_2$; α находят критическое значение F_T. Если $F \le F_T$, то математическое описание функции отклика уравнением регрессии считается адекватным.

Если математическая модель неадекватна данным эксперимента, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии или уменьшить интервал варьирования факторов в эксперименте. Например, если неадекватна линейная модель, то следует ее дополнить, введя коэффициенты, соответствующие эффектам взаимодействия.

4.2.8. Пример применения планов первого порядка полного факторного эксперимента

Пусть необходимо исследовать влияние параметров процесса сушки керамического порошка (шликера) на его влажность. Остаточная влажность шликера после сушки должна находиться в определенных пределах, отклонение от которых приводит к ухудшению качества керамических изделий. На основании результатов предыдущих исследований оказалось, что наиболее тесную связь с влажностью имеет температура отходящих при сушке газов, причем при увеличении влажности температура снижается, а при уменьшении влажности температура повышается. Поэтому в качестве результативного признака выбрана температура отходящих при сушке газов. Варьируемыми факторами приняты: расход шликера m, расход газа v, давление в сушилке p (табл. 4.10).

Таблица 4.10

Выбор уровней факторов, кодирование факторов

Уровень варьируемых факторов	Кодовое обозначение	m, т/ч	v, м^3/ч	p, МПа
		X_1	X_2	X_3
Нижний уровень	–1	1,25	0,76	0,13
Верхний уровень	+1	1,79	1,24	0,15
Основной уровень	0	1,52	1,00	0,14
Интервал варьирования	Δx_i	0,27	0,24	0,01

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса используем модель первого порядка

$$\tilde{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + \\ + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3\,. \qquad (4.24)$$

Матрица планирования ПФЭ 2^3 с учетом взаимодействия факторов представлена табл. 4.9. Для определения температуры отходящих при сушке газов планируется провести три параллельных опыта в каждой строке матрицы ПФЭ, всего 24. Рандомизацию опытов проводим с помощью таблицы случайных чисел (см. прил. 7). Например, начиная со второго столбца таблицы, записываем числа с 1 до 24, отбрасывая больше 24 и повторяющиеся, тогда таблица проведения опытов имеет вид (табл. 4.11).

Таблица 4.11

Порядок проведения опытов

Номер опыта по матрице планирования	1	2	3	4	5	6	7	8
Случайный порядок реализации опытов	24	19	4	9	5	21	7	8
	10	15	2	23	12	14	13	16
	22	20	1	3	17	6	11	18

Результаты испытаний, проведенных в соответствии с матрицей планирования и данными табл. 4.10, представлены в табл. 4.12.

Дисперсию параллельных опытов определяем по формуле (4.8). Однородность дисперсии проверяем с помощью критерия Кохрена (4.9)

$$G=\frac{S^2_{max}}{\sum\limits_{i=1}^{n}S_i^2}=\frac{2863{,}0}{7535{,}3}=0{,}38.$$

При уровне значимости $\alpha=0{,}05$ и числах степеней свободы $d.f_1=2$; $d.f_2=8$ табличное значение критерия $G_T=0{,}5157$ (см. прил. 6).

Расчетное значение критерия меньше табличного, следовательно, дисперсии параллельных опытов однородны, что является подтверждением нормального закона распределения ошибок отдельных опытов.

Таблица 4.12

Результаты испытаний

Номер опыта	Температура, °C					S_i^2	$(\bar{y}_i-\tilde{y}_i)^2$
	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	$\bar{y}_i$	$\tilde{y}_i$		
1	332	327	366	341,7	357,6	450,3	253,3
2	665	674	693	677,3	661,4	204,3	253,3
3	825	886	895	868,7	872,3	1450,3	13,4
4	777	725	832	778,0	774,3	2863,0	13,4
5	1076	1088	1029	1064,3	1068,0	972,3	13,4
6	1190	1183	1136	1169,7	1166,0	862,3	13,4
7	1289	1236	1271	1265,3	1281,3	726,3	253,3
8	993	991	996	993,3	977,4	6,3	253,3

Дисперсия всего эксперимента (4.10)

$$S^2(y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S_i^2=941{,}9.$$

Вычисляем коэффициенты уравнения (4.13)

$$b_0=\bar{y}_0=\frac{\sum\bar{y}_i}{N}=895;$$

$$b_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}X_{1i}\bar{y}_i}{N}=$$

$$=\frac{-341{,}7+677{,}3-868{,}7+778{,}0-1064{,}3+1169{,}7-1265{,}3+993{,}3}{8}=10$$

и т.д.

После расчета всех коэффициентов уравнение (4.24) принимает вид

$$\tilde{y}=895+10X_1+82X_2+228X_3-100X_1X_2-51X_1X_3-$$
$$-75X_2X_3+6X_1X_2X_3.$$

Ошибка определения коэффициентов

$$S_b = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{30{,}7}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 6{,}3 .$$

Для выявления значимости коэффициентов уравнения регрессии строим доверительный интервал шириной

$$\Delta b = t_T S_b = 1{,}746 \cdot 6{,}3 = 11; \; 2\Delta b = 22 .$$

Табличное значение *t*-критерия Стьюдента определяем для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $d.f = N(r-1) = 8 \cdot 2 = 16$.

Коэффициенты b_1 и b_{123} оказались статистически незначимыми, поэтому уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = 895 + 82X_2 + 228X_3 - 100X_1X_2 - 51X_1X_3 - 75X_2X_3 . \qquad (4.25)$$

Расчетные значения $\tilde{y}$ приведены в табл. 4.10. Адекватность полученной модели определяем с помощью критерия Фишера (4.23).

Дисперсия адекватности (4.22)

$$S^2_{ад} = \frac{3}{8-6}\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \tilde{y}_i)^2 = 1600{,}7 ; \; F = \frac{S^2_{ад}}{S^2(y)} = \frac{1600{,}7}{941{,}9} = 1{,}70 .$$

Для $d.f_1 = 8 - 6 = 2$; $d.f_2 = 8(3-1) = 16$ и $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $F_T = 3{,}64$. Так как $F \le F_T$, то уравнение (4.25) адекватно описывает функцию отклика.

На основании полученных результатов и анализа уравнения (4.25) можно сделать следующие выводы:

– расход шликера в указанных пределах сам по себе не влияет на температуру отходящих при сушке газов, следовательно, и на влажность шликера;

– с увеличением расхода газа и давления в сушилке температура отходящих газов повышается, влажность – уменьшается (т.к. $b_2 > 0$ и $b_3 > 0$), причем наибольшее влияние оказывает величина давления в сушилке;

– наряду с линейными эффектами значимыми оказались также эффекты взаимодействия X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, которые приводят к уменьшению температуры отходящих газов.

4.3. Дробный факторный эксперимент

В случае двухуровневого *k*-факторного эксперимента на основе опытов в *N* точках факторного пространства можно найти $N = 2^k$ коэффициентов уравнения регрессии. Если число факторов $k \geq 4$, эффекты взаимодействия высокого порядка становятся статистически незначимыми, т.е. влияние сомножителей $X_1 X_2 \ldots X_k$ на отклик *y* взаимно компенсируется. Практика эксперимента позволяет априорно считать, что в уравнении регрессии с большим числом факторов коэффициенты высоких порядков взаимодействия равны нулю. Следовательно, при большом числе факторов можно строить такие планы эксперимента, которые позволяют определять линейные эффекты факторов, эффекты их парных и иногда тройных взаимодействий. Уменьшение количества определяемых коэффициентов регрессии позволяет сократить затраты времени и средств на проведение эксперимента и обработку его данных. Количество опытных точек в таких экспериментах должно быть чуть больше или равно количеству подлежащих определению коэффициентов регрессии *b*. Этому положению удовлетворяют части (реплики) ПФЭ 2^k, кратные 2^p, где *p* – целое положительное число.

Такие эксперименты называются **дробными факторными экспериментами** (ДФЭ) 2^{k-p}. Количество опытных точек в ДФЭ 2^{k-p} в 2^p раз меньше, чем в ПФЭ 2^k. Так как ДФЭ 2^{k-p} – часть ПФЭ 2^k, то ДФЭ называют также **дробными репликами** полного факторного эксперимента. Например, ДФЭ, образующий половину ПФЭ 2^k, обозначается 2^{k-1} и называется полурепликой ПФЭ 2^k; ДФЭ 2^{k-2} содержит $2^k/2^2 = 2^k/4$ опытных точек и называется 1/4 репликой ПФЭ 2^k.

Рассмотрим построение плана ДФЭ 2^{3-1}. В ДФЭ 2^{3-1} план состоит из четырех опытных точек $N = 2^{3-1} = 2^2 = 4$. Ядром плана является ПФЭ 2^2, на основе которого можно построить уравнение регрессии $\tilde{y} = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2$.

Если взаимодействие факторов $X_1 X_2$ статистически незначимо, то нет необходимости определять коэффициент b_{12} и в матрице ПФЭ 2^2 столбец произведения $X_1 X_2$ окажется лишним. Этот столбец используют для построения плана ДФЭ 2^{3-1}, заменяя $X_3 = X_1 X_2$, т.е. в процессе эксперимента варьируют X_3 по закону изменения произведения $X_1 X_2$ (табл. 4.13).

Таблица 4.13

Матрица планирования ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3=X_1X_2$	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	–	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Другой план ДФЭ 2^{3-1} можно получить, если фактор X_3 ввести с помощью того же произведения, взятого с обратным знаком (табл. 4.14).

Таблица 4.14

Матрица планирования ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3=-X_1X_2$	y
1	+	–	–	–	y_1
2	+	+	–	+	y_2
3	+	–	+	+	y_3
4	+	+	+	–	y_4

Планы, представленные табл. 4.13 и 4.14, обладают свойствами симметрии, нормировки и ортогональности. В зависимости от условий испытаний выбирают один из этих планов, так как каждый из них соответствует различным точкам факторного пространства, в которых должны проводиться независимые опыты. Оба плана позволяют построить линейное уравнение регрессии

$$y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \quad (4.26)$$

которое содержит четыре неизвестных b-коэффициента. Рассмотренные планы характерны тем, что в них содержится наибольшее возможное количество факторов. На основе плана, содержащего четыре строки, нельзя определить больше четырех коэффициентов – свободный член b_0 и три линейных коэффициента регрессии b_1, b_2, b_3.

План, в котором количество переменных на единицу меньше количества строк или опытных точек, называется **насыщенным**.

Рассмотрим построение дробных реплик на основе ПФЭ 2^3. Планы, ядром которых является ПФЭ 2^3, содержат восемь строк или восемь наборов переменных, при которых определяются значения отклика. На основе ПФЭ 2^3 могут быть построены следующие дробные реплики: ДФЭ 2^{4-1} – полуреплика ПФЭ 2^4; ДФЭ 2^{5-2} – 1/4 реплика

ПФЭ 2^5; ДФЭ 2^{6-3} – 1/8 реплика ПФЭ 2^6; ДФЭ 2^{7-4} – 1/16 реплика ПФЭ 2^7. План ДФЭ 2^{7-4} является насыщенным, так как число факторов на единицу меньше числа строк.

На основе плана ПФЭ 2^3 можно построить уравнение регрессии

$$\widetilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + \\ + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3, \qquad (4.27)$$

которое содержит три парных (первого порядка) и одно тройное (второго порядка) взаимодействий. Если какое-либо взаимодействие является статистически незначимым, можно построить полуреплику ДФЭ 2^{4-1}. Если незначимы два взаимодействия, можно построить 1/4 реплику ПФЭ 2^5 или ДФЭ 2^{5-2} и т.д.

Построим, например, 1/4 реплику для случая, когда незначимыми являются коэффициенты b_{13} и b_{123}. Два дополнительных фактора X_4, X_5 можно ввести с помощью соотношений

$$X_4 = X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3, \qquad (4.28)$$

или

$$X_4 = -X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3, \qquad (4.29)$$

или

$$X_4 = X_1 X_3, X_5 = -X_1 X_2 X_3, \qquad (4.30)$$

или

$$X_4 = -X_1 X_3, X_5 = -X_1 X_2 X_3, \qquad (4.31)$$

которые называются **генерирующими соотношениями** или **генераторами**. Составим план ДФЭ 2^{5-2}, когда генераторами являются $X_4 = -X_1 X_3, X_5 = X_1 X_2 X_3$ (табл. 4.15). Такой план в пятифакторном пространстве выделяет восемь точек, в которых должен измеряться отклик.

Дробные факторные эксперименты позволяют экономить время, но при таком планировании имеет место нежелательный эффект смешивания оценок β-коэффициентов.

При вычислении b-коэффициентов по данным многофакторного эксперимента иногда получают не оценки отдельных коэффициентов, а оценки различных их комбинаций. Например, величина b_0 является оценкой не только β_0 модели (4.1), но и коэффициентов при квадратах факторов $\beta_{11}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{kk}$, которые в уравнение (4.1) не входят, но в действительности могут иметь место. Если все коэффициенты

β_{uu} $(u = 1, 2, \ldots, k)$ равны нулю, то b_0 является оценкой β_0. Это положение записывается символом $b_0 \to \beta_0$.

Таблица 4.15

Матрица планирования ДФЭ 2^{5-2}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_4 = -X_1X_3$	$X_5 = X_1X_2X_3$	y
1	+	–	–	–	–	–	y_1
2	+	+	–	–	+	+	y_2
3	+	–	+	–	–	+	y_3
4	+	+	+	–	+	–	y_4
5	+	–	–	+	+	+	y_5
6	+	+	–	+	–	–	y_6
7	+	–	+	+	+	–	y_7
8	+	+	+	+	–	+	y_8

Если некоторые значения β_{uu} отличны от нуля, то b_0 оценивает β_0 и все отличные от нуля β_{uu}:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_{uu}. \tag{4.32}$$

Рассмотрим явление смешивания оценок в ДФЭ 2^{3-1}. Для анализа явления смешивания оценок составим структурную матрицу, в которой учитываются все взаимодействия (табл. 4.16).

Из табл. 4.16 видно, что $X_0 = -X_1X_2X_3$; $X_1 = -X_2X_3$; $X_2 = -X_1X_3$; $X_3 = -X_1X_2$. Следовательно, b-коэффициенты уравнения (4.26) представляют оценки разности коэффициентов регрессии:

$$b_0 \to \beta_0 - \beta_{123};\quad b_1 \to \beta_1 - \beta_{23};\quad b_2 \to \beta_2 - \beta_{13};\quad b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}. \tag{4.33}$$

Таблица 4.16

Структурная матрица для плана ДФЭ 2^{3-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	–	–	–	+	+	+	–
2	+	+	–	+	–	+	–	–
3	+	–	+	+	–	–	+	–
4	+	+	+	–	+	–	–	–

Рассмотренная процедура анализа смешивания оценок при большом числе факторов $(k > 3)$ оказывается слишком громоздкой.

Анализ смешивания значительно облегчается, если использовать генерирующее соотношение и ввести понятие **определяющего контраста**.

Для плана ДФЭ 2^{3-1} генератор $X_3 = -X_1X_2$ дает определяющий контраст (ОК)

$$1 = X_3^2 = -X_1X_2X_3. \tag{4.34}$$

Умножая последовательно обе части ОК $1 = -X_1X_2X_3$ на X_0, X_1, X_2, X_3, находим эквивалентности $X_0 = -X_1X_2X_3$; $X_1 = -X_2X_3$; $X_2 = -X_1X_3$; $X_3 = -X_1X_2$, из которых следуют символические выражения (4.32). Аналогично проводится анализ смешивания оценок и в общих случаях. Рассмотрим смешивание оценок в ДФЭ 2^{5-2}, где используются генераторы $X_4 = -X_1X_3$; $X_5 = X_1X_2X_3$.

При наличии двух и более генераторов определяют **обобщающий определяющий контраст** (ООК).

$$1 = 1_1 = 1_2 = 1_11_2;\ 1_1 = X_4^2 = -X_1X_3X_4;\ 1_2 = X_5^2 = X_1X_2X_3X_5.$$

Обобщающий ОК в данном случае имеет вид

$$1 = -X_1X_3X_4 = X_1X_2X_3X_5 = -X_2X_4X_5. \tag{4.35}$$

Далее анализ смешивания оценок ведется на основе ООК (4.35). Рассмотрим, например, какие эффекты смешиваются в коэффициенте b_1. Для этого все части (4.35) умножим на X_1, получим

$$X_1 = -X_3X_4 = X_2X_3X_5 = -X_1X_2X_4X_5.$$

Следовательно, коэффициент b_1 является оценкой суммы

$$b_1 \to \beta_1 - \beta_{34} + \beta_{235} - \beta_{1245}.$$

Рассмотренный анализ проводится для того, чтобы не допустить нежелательных смешиваний. В частности, к большим искажениям может привести смешивание линейных эффектов и парных взаимодействий, так как эти коэффициенты во многих случаях имеют один и тот же порядок. Желательно выбирать такие генераторы, в которых линейные эффекты смешиваются со взаимодействиями высоких порядков. Задача выбора подходящих генераторов не формализована и обычно решается перебором различных вариантов.

Обработка результатов ДФЭ аналогична обработке результатов ПФЭ.

4.4. Применение плана первого порядка дробного факторного эксперимента для исследования технических устройств

Исследование технических объектов обычно связано с их математическим описанием, которое позволяет выбрать структуру и параметры устройства на стадии разработки, а также организовать наиболее эффективные режимы функционирования в процессе эксплуатации.

Для ряда устройств построению эмпирической модели предшествует получение теоретической модели. Сравнение результатов эксперимента с теоретической зависимостью позволяет объяснить смысл изучаемого явления и показать преимущества эксперимента.

В качестве примера рассмотрим усилитель с положительной и отрицательной обратными связями. Схема усилителя собрана на интегральной микросхеме серии К140УД6 (рис. 4.3). Входной сигнал U_{BX} подается на инвертирующий вход. Отрицательная обратная связь создается с помощью сопротивлений R_1 и R_2. Сопротивления R_3, R_4 образуют положительную обратную связь, которая при определенных соотношениях между сопротивлениями повышает коэффициент усиления по напряжению схемы

$$K_U = U_{BЫX} / U_{BX} . \qquad (4.36)$$

Задача исследования состоит в получении и анализе коэффициента усиления K_U как функции сопротивлений отрицательной и положительной обратных связей. Необходимо также сравнить теоретическую и эмпирическую зависимости K_U от сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4.

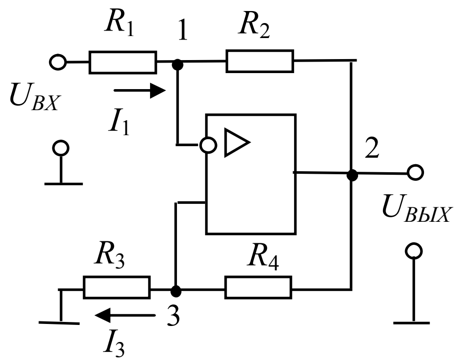


Рис. 4.3. Усилитель
с отрицательной и положительной
обратными связями

При исследовании подобного устройства следует учитывать, что в зависимости от параметров отрицательной и положительной обратных связей коэффициент усиления K_U изменяется в широких пределах, а при некоторых значениях сопротивлений схема может оказаться неработоспособной.

Для решения поставленной задачи исследования получим теоретическую и эмпирическую модели усилителя, а затем сравним их.

4.4.1. Теоретическая модель усилителя

Для схемы, собранной на операционном усилителе, при выводе зависимости $K_U = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$ принимаются следующие допущения: коэффициент усиления в разомкнутом состоянии и его входное сопротивление бесконечно велики. Следовательно, потенциалы в точках 1, 3 (см. рис. 4.3) одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_3, \tag{4.37}$$

а входной ток усилителя равен нулю.

На основании закона Ома можем записать уравнения

$$\varphi_1 = U_{BX} - I_1 R_1; \tag{4.38}$$

$$\varphi_3 = I_3 R_3. \tag{4.39}$$

Токи I_1, I_3 также определяются на основе закона Ома:

$$I_1 = (U_{BX} - U_{ВЫХ})/(R_1 + R_2); \tag{4.40}$$

$$I_3 = U_{ВЫХ}/(R_3 + R_4). \tag{4.41}$$

Подставляя в уравнения (4.38), (4.39) выражения для токов (4.40), (4.41) с учетом соотношения (4.37), получаем уравнение, связывающее выходное и входное напряжения:

$$U_{ВЫХ} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}(U_{BX} - U_{ВЫХ}) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{ВЫХ}. \tag{4.42}$$

После преобразования соотношения (4.42) получим формулу для коэффициента усиления

$$K_U = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = \frac{1 + R_3/R_4}{(R_3/R_4) - (R_1/R_2)}. \tag{4.43}$$

Выражение (4.43) является общим, так как из него могут быть получены известные соотношения коэффициентов усиления по напряжению для инвертирующего и неинвертирующего усилителей. При $R_4 = \infty$ (разомкнута положительная обратная связь) находим коэффициент усиления для инвертирующего усилителя:

$$K_U^- = -R_2/R_1; \tag{4.44}$$

при $R_2 = \infty$ (разомкнута отрицательная обратная связь) получаем коэффициент усиления для неинвертирующего усилителя:

$$K_U^+ = 1 + R_4/R_3. \tag{4.45}$$

Усилитель устойчиво работает при отрицательных значениях K_U, т.е. условие устойчивой работы определяется неравенством

$$R_1/R_2 > R_3/R_4. \tag{4.46}$$

Для повышения коэффициента усиления K_U желательны малые значения знаменателя формулы (4.43), но при этом необходимо учитывать, что под действием дестабилизирующих факторов или стандартных отклонений параметров сопротивлений может нарушиться неравенство (4.46). На рис. 4.4 показана зависимость K_U от отношений R_3/R_4 при $R_1/R_2 = \text{const}$.

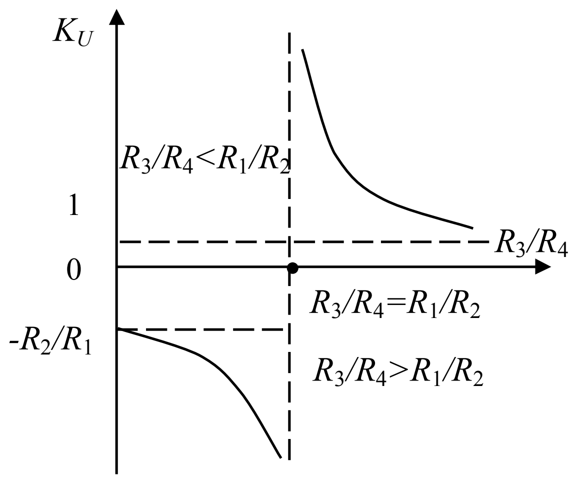


Рис.4.4. Зависимость коэффициента усиления по напряжению от параметров схемы

Коэффициент усиления при

$$R_1/R_2 = R_3/R_4 \qquad (4.47)$$

принимает неопределенное значение $(\pm\infty)$, т.е. имеет место разрыв функции. В области, где $K_U < 0$, с уменьшением отношения R_3/R_4 абсолютная величина K_U уменьшается и при $R_3/R_4 = 0$ модуль достигает наименьшего значения, определяемого выражением (4.44). При $R_3/R_4 > R_1/R_2$ усилитель неработоспособен. Поэтому область исследования задается неравенством (4.46).

4.4.2. Эмпирическая модель усилителя

В качестве выходной величины (отклика) примем коэффициент усиления по напряжению, в качестве факторов – сопротивления отрицательной и положительной обратных связей R_1, R_2, R_3, R_4. Из других возможных факторов на коэффициент усиления K_U может оказывать влияние напряжение питания $E = \pm 15$ *В*. Предварительный однофакторный эксперимент показал, что при отклонениях напряжения питания на $\pm 10\%$ от номинального значения коэффициент усиления практически не изменяется.

Целью эксперимента является построение экспериментальной зависимости $K_U = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$. Получение такой зависимости диктуется тем, что при построении теоретической зависимости (4.43) принималось допущение об идеальности операционного усилителя К140УД6, на котором собран усилитель напряжения.

По результатам экспериментального исследования можно оценить, насколько реальный коэффициент усиления K_U отличается от теоретического и в каких пределах он будет изменяться при отклонении факторов R_1, R_2, R_3, R_4 от их номинальных значений.

В процессе эксперимента коэффициент усиления определяется как отношение выходного и входного напряжений по формуле (4.37). Оба напряжения измеряются комбинированным цифровым прибором Щ4310. Согласно паспортным данным основная относительная погрешность δ_0 измерения постоянного напряжения определяется в процентах выражением

$$\delta_0 = \pm\left[0{,}5 + 0{,}5\left(\frac{U_N}{U_X} - 1\right)\right], \tag{4.48}$$

где U_N – предел измерения; U_X – измеренное значение.

Кроме основной, имеет место дополнительная погрешность, обусловленная отклонениями температуры и напряжения питания от номинальных значений. Дополнительная погрешность используемого прибора согласно паспортным данным может составлять

$$\delta_Д = 1{,}5\delta_0. \tag{4.49}$$

Таким образом, общая погрешность средства измерения

$$\delta = \delta_0 + \delta_Д. \tag{4.50}$$

Входное сопротивление R_{BX} прибора при измеряемых напряжениях 2 мВ – 20 В $R_{BX} \geq 100$ МОм. Входное напряжение постоянного тока $U_{BX} = 13$ мВ снимается с источника ВСП-50. Величины варьируемых сопротивлений устанавливаются с помощью измерительных магазинов сопротивления Р33 с погрешностью (%)

$$\delta_R = \pm\left[0{,}2 + 6 \cdot 10^{-6}\left(\frac{R_N}{R_X} - 1\right)\right], \tag{4.51}$$

где R_N – наибольшее значение сопротивления магазина (100 кОм); R_X – номинальное значение включенного сопротивления.

Выбор интервалов варьирования и кодирование факторов. Интервалы варьирования факторов определяются в предварительном эксперименте из условия существенного (на 30 – 40 %) изменения отклика – коэффициента усиления. Заданное изменение отклика имеет место при изменении сопротивлений примерно на 10 % от номинального значения. В качестве номиналов сопротивлений приняты их значения, соответствующие $K_U = -92{,}5$. Номинальные значения (основные уровни) факторов и интервалы их варьирования представлены в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Условия эксперимента

Уровень варьируемых факторов	Кодовое обозначение	R_1, кОм	R_2, кОм	R_3, кОм	R_4, кОм
		X_1	X_2	X_3	X_4
Нижний уровень	–1	9,5	470	9	1000
Верхний уровень	+1	10,5	530	11	1200
Основной уровень	0	10	500	10	1100
Интервал варьирования	ΔX_u	0,5	30	1	100

План и результаты эксперимента. В предварительном эксперименте выяснено, что взаимодействие факторов $X_1 X_3 X_4$, т.е. коэффициент b_{134}, является статистически незначимым. Поэтому в качестве плана эксперимента можно принять план ДФЭ 2^{4-1} с генерирующим соотношением $X_2 = -X_1 X_3 X_4$. При этом определяющий контраст имеет вид $1 = -X_1 X_2 X_3 X_4$. Такой контраст обеспечивает смешивание линейных эффектов с эффектами тройных взаимодействий и парных взаимодействий между собой. Так как тройные взаимодействия обычно статистически незначимы, то принимаемый ДФЭ 2^{4-1} следует считать допустимым. План и результаты измерения отклика $|K_u| = y = U_{ВЫХ}/U_{ВХ}$ представлены в табл. 4.18.

Обработка результатов ДФЭ 2^{4-1}. Результаты эксперимента, т.е. значения коэффициента усиления, получены делением выходного напряжения (показания вольтметра) на входное напряжение $U_{ВХ} = 13$ мВ. Повторные измерения дают тот же результат, поэтому в каждой строке плана проводится одно измерение отклика. Дисперсию воспроизводимости в таком случае следует определять по метрологическим характеристикам средства измерения. Основную и дополнительную погрешности измерения вольтметра Щ4310 определяем по формулам (4.48) – (4.50). В эксперименте выходное напряжение измерялось на пределе $U_N = 2$ В и составляло $U_{ВЫХ} \approx 1 \ldots 1{,}5$ В. Следовательно, основная относительная погрешность прибора $\delta_0 = \pm 1\%$, дополнительная $\delta_Д = 1{,}5\delta_0 = \pm 1{,}5\%$, общая погрешность $\delta = 2{,}5\%$.

Таблица 4.18

План и результаты ДФЭ 2^{4-1}

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_3	X_2X_3	X_3X_4	y	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$
1	+	–	+	–	–	+	–	+	110,0	110,7	-0,7
2	+	+	–	–	–	–	+	+	73,8	74,1	-0,3
3	+	–	–	+	–	–	–	–	107,6	107,7	-0,1
4	+	+	+	+	–	+	+	–	112,3	11,5	0,8
5	+	–	–	–	+	+	+	–	77,7	76,5	1,2
6	+	+	+	–	+	–	–	–	80,0	80,3	-0,3
7	+	–	+	+	+	–	+	+	113,8	113,9	-0,1
8	+	+	–	+	+	+	–	+	76,5	77,3	-0,8
9	–	0	0	0	0	0	0	0	91,5	94,0	-2,5

Абсолютная погрешность измерения $\Delta U = \delta U_X / 100\%$, где U_X – максимальное значение выходного напряжения. В нашем случае $\Delta U = \pm 0{,}04$ В. Для доверительной вероятности $P_Д = 0{,}95$ величина доверительного интервала $|\Delta U| = 2S_U$, где S_U – ошибка воспроизводимости результата измерения выходного напряжения. Отсюда $S_U = 0{,}02$ В.

Коэффициент усиления определяется косвенным методом, поэтому среднее квадратическое отклонение результата измерения – ошибка эксперимента $S(y)$ – вычисляется по формуле

$$S(y) = K_U^0 \frac{S_U}{U_{ВЫХ}^0} = \frac{S_U}{U_{ВХ}} \tag{4.52}$$

и составляет $S(y) \approx 1{,}5$.

Значения коэффициентов уравнения регрессии

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + \\ + b_{13} X_1 X_3 + +b_{23} X_2 X_3 + b_{34} X_3 X_4 \tag{4.53}$$

вычисляются по формуле (4.13).

Расчеты дают следующие результаты:

$b_0 = 94;\quad b_1 = -8{,}2;\quad b_2 = 10{,}1;\quad b_3 = 8{,}6;\quad b_4 = -7{,}0;$

$b_{13} = 0{,}15;\quad b_{23} = 0{,}44;\quad b_{34} = -0{,}44.$

Ошибка определения коэффициентов b_u вычисляется по формуле (4.18) и составляет

$$S_b = S(y)\big/\sqrt{N} = 1{,}5\big/\sqrt{8} \approx 0{,}5.$$

Для выявления значимости коэффициентов уравнения регрессии строим доверительный интервал шириной

$$2\Delta b = 2t_T S_b = 2 \cdot 1{,}86 \cdot 0{,}5 = 1{,}86.$$

Табличное значение t-критерия Стьюдента определяем для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $d.f = N = 8$.

Коэффициенты, характеризующие взаимодействие факторов, оказались статистически незначимыми, поэтому уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2X_1 + 10{,}1X_2 + 8{,}6X_3 - 7X_4. \qquad (4.54)$$

Из уравнения (4.54) видно, что коэффициент усиления убывает с увеличением сопротивлений R_1, R_4 и возрастает с увеличением R_2, R_3, что согласуется с теоретической формулой (4.43).

Проверим адекватность полученной математической модели (4.54) экспериментальным данным. Расчетные значения $\tilde{y}$ и разности $y - \tilde{y}$ приведены в табл. 4.16. Дисперсия адекватности (4.22)

$$S^2_{ад} = \frac{1}{8-4}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \tilde{y}_i\right)^2 = 0{,}85;$$

дисперсия воспроизводимости

$$S^2(y) = 1{,}5^2 = 2{,}25;$$

т.к. числовое значение дисперсии воспроизводимости больше числового значения дисперсии адекватности, расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле

$$F = \frac{S^2(y)}{S^2_{ад}} = \frac{2{,}25}{0{,}85} = 2{,}647.$$

Для $d.f_1 = 8 - 4 = 4$; $d.f_2 = 8$ и $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $F_T = 3{,}838$. Так как $F \le F_T$, то уравнение (4.54) адекватно описывает функцию отклика.

По полученной модели могут быть вычислены коэффициенты влияния (чувствительности) факторов на коэффициент усиления и определены числовые характеристики K_U как случайной величины в зависимости от разброса сопротивлений резисторов. Для этого в уравнении (4.54) необходимо перейти от кодированных факторов к физическим переменным. Тогда

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2\frac{R_1 - R_1^0}{\Delta R_1} + 10{,}1\frac{R_2 - R_2^0}{\Delta R_2} + 8{,}6\frac{R_3 - R_3^0}{\Delta R_3} - 7\frac{R_4 - R_4^0}{\Delta R_4}, \qquad (4.55)$$

где R_u^0 – основные уровни (номиналы) сопротивлений; ΔR_u – их интервалы варьирования.

Подставляя числовые значения R_u^0 и ΔR_u в уравнение (4.55), получим

$$\tilde{y} = 80{,}7 - 1640 \cdot 10^{-5} R_1 + 33{,}7 \cdot 10^{-5} R_2 + 860 \cdot 10^{-5} R_3 - 7 \cdot 10^{-5} R_4, \qquad (4.56)$$

или в общем виде

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 + a_4 R_4. \qquad (4.57)$$

В последнем уравнении *a*-коэффициенты в отличие от *b*-коэффициентов уравнения (4.54) являются размерными величинами (Ом$^{-1}$).

Из уравнения (4.57) видно, что наибольшее влияние на коэффициент усиления оказывают сопротивления R_1, R_3. Практический интерес представляют относительные коэффициенты влияния или чувствительности коэффициента усиления к изменению сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4, которые вычисляются по формуле

$$B_u = \left(\frac{\Delta\tilde{y}}{\bar{y}_0}\right) \Bigg/ \left(\frac{\Delta R_u}{R_u^0}\right) = \frac{a_u}{\tilde{y}_0} R_u^0 \quad (u = 1, 2, 3, 4). \qquad (4.58)$$

Для рассматриваемого примера $|B_1| \approx |B_2| = 2$; $|B_3| \approx |B_4| = 1$. По уравнению модели можно исследовать параметрическую надежность и строить допуск на выходной параметр – коэффициент усиления по напряжению. Эмпирическая модель больше соответствует реальной действительности, но выводы на основе такой модели справедливы только в области эксперимента, задаваемой интервалами варьирования факторов.

4.5. Планы второго порядка

В этом случае требуется, чтобы каждый фактор варьировался не менее чем на трёх уровнях. В этом случае полный факторный эксперимент содержит слишком большое количество опытов, равное $3^к$. В связи с этим осуществление ПФЭ для планов второго порядка не только сложно, но и нецелесообразно.

Сократить число опытов можно, воспользовавшись так называемым композиционным или последовательным планом, разработанным Боксом и Уилсоном. Так, при двух факторах модель функции отклика второго порядка представляет собой поверхность в виде цилиндра, конуса, эллипса и т.д., описываемую в общем виде уравнением

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + b_{12} X_1 X_2 . \qquad (4.59)$$

Для определения такой поверхности необходимо располагать координатами не менее трёх её точек, т.е. факторы X_1 и X_2 должны варьироваться не менее чем на трёх уровнях. Поэтому план эксперимента не может состоять из 4 опытов ПФЭ 2^2, располагающихся в вершинах квадрата, как для модели первого порядка. К ним должны быть добавлены опыты 5-8, расположенные на осях x_1 и x_2 с координатами ;α ±(0(,)0)α±; и обязательно опыт 9 в центре квадрата, чтобы по любому направлению располагались три точки, определяющие кривизну поверхности в этом направлении (рис. 4.5).

Таким образом, в общем случае ядро композиционного плана составляет при k<5 ПФЭ $2^к$, а при $k \geq 5$ - дробную реплику от него. Если линейное уравнение регрессии оказалось неадекватным, необходимо:

1) добавить $2k$ звёздных точек, расположенных на координатных осях факторного пространства;

2) провести n_0 опытов при значениях факторов в центре плана.

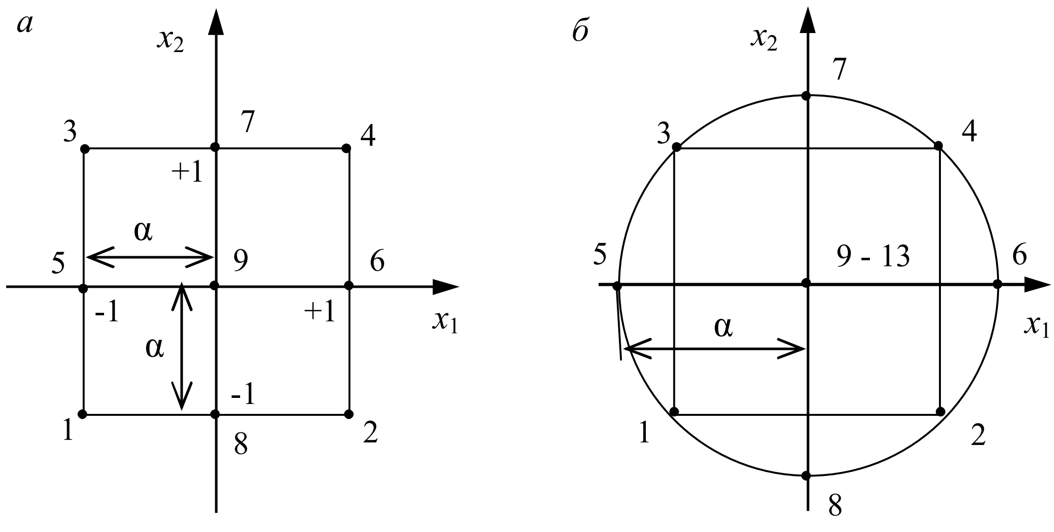


Рис. 4.5. Планы второго порядка при k=2:
а – ортогональный; *б* – ротатабельный

При k факторах общее число опытов в матрице композиционного плана составит

$$n = 2^k + 2k + n_0 \text{ при } k < 5,$$

$$n = 2^{k-1} + 2k + n_0 \text{ при } k \geq 5.$$

При этом величина звёздного плеча α и число опытов в центре плана n_0 зависит от выбранного вида композиционного плана (табл. 4.19).

Таблица 4.19

Композиционный план для k=2 и n_0=1

Номер опыта		X_0	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	y_i
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
Звёздные точки	5	+1	+α	0	0	α^2	0	y_5
	6	+1	-α	0	0	α^2	0	y_6
	7	+1	0	+α	0	0	α^2	y_7
	8	+1	0	-α	0	0	α^2	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9

4.5.1. Ортогональные планы

В общем виде план, представленный в таблице, неортогонален, т.к.

$$\sum_{i=1}^{n} X_{0i} X_{ji}^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2 X_{ui}^2 \neq 0, \quad j \neq u. \tag{4.60}$$

Привести этот план к ортогональному можно, вводя новые переменные (преобразуя квадратичные эффекты)

$$X_{ji}^{/} = X_{ji}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2}{n} = X_{ji}^2 - \overline{X}_j^2, \tag{4.61}$$

при этом

$$\sum_{i=1}^{n} X_{0i} X_{ji}^{/} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_{ji}^2 - \overline{X}_j^2 \right) = 0. \tag{4.62}$$

Тогда уравнение регрессии будет записано как

$$\widetilde{y} = b_0^{/} + \sum_{j=1}^{k} b_j X_j + \sum_{j,u=1}^{k} b_{ju} X_j X_u + \sum_{j=1}^{k} b_{jj}^{/} x_j^{/}. \tag{4.63}$$

Значения звёздных плеч в ортогональных планах второго порядка и число опытов в центре плана приведены в табл. 4.20.

Таблица 4.20

Значения звёздных плеч в ортогональных планах второго порядка

Число опытов в центре плана n_0	Звёздное плечо α при различном числе факторов k		
	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
1	1,000	1,215	1,414
2	1,077	1,285	1,471
3	1,148	1,353	1,546
4	1,214	1,414	1,606
5	1,267	1,471	1,664
6	1,320	1,525	1,718
7	1,369	1,575	1,772
8	1,414	1,623	1,819
9	1,454	1,668	1,868
10	1,498	1,711	1,913

Матрица планирования для ортогонального плана второго порядка представлена табл. 4.21.

Таблица 4.21

Ортогональный план второго порядка

Номер опыта		Факторы						Результат
		X_0	X_1	X_2	X_1X_2	$X_1^/$	$X_2^/$	y_i
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y_4
Звёздные точки	5	+1	α =+1	0	0	+1/3	-2/3	y_5
	6	+1	α =-1	0	0	+1/3	-2/3	y_6
	7	+1	0	α =+1	0	-2/3	+1/3	y_7
	8	+1	0	α =-1	0	-2/3	+1/3	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

Коэффициенты уравнения (4.63) определяют по формулам

$$b_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{ji} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2}, \qquad b_{jj}^/ = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^/ y_i}{\sum_{i=1}^{n} x^{/2}_{ji}},$$

$$b_{ju} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (x_{ji} x_{ui}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_{ji} x_{ui})^2}, \qquad b_0 = b_0^/ - \sum_{j=1}^{k} b_{jj}^/ \bar{x}_j^2, \tag{4.64}$$

где j – номер столбца в матрице планирования; i – номер строки.

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии следующие:

$$S_{bj}^2 = S_{восп}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2, \qquad S_{bjj}^{/2} = S_{восп}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_{ji}^{/2},$$

$$S_{bju}^2 = S_{восп}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ji} x_{ui}\right)^2, \qquad S_{b0}^2 = S_{b^/ 0}^2 - \sum_{j=1}^{k} \bar{x}_{jj}^2 S_{b^/ jj}^2. \qquad (4.67)$$

Коэффициенты уравнения регрессии, получаемые с помощью ортогональных планов второго порядка, определяются с разной точностью, ортогональные планы первого порядка обеспечивают одинаковую точность коэффициентов. Проверяют значимость коэффициентов по t –критерию и адекватность уравнения по критерию Фишера.

4.5.2. Ротатабельные планы второго порядка

Ротатабельным называют планирование, для которого дисперсия параметра оптимизации $\tilde{y}$, предсказанного уравнением регрессии, постоянна для всех точек, находящихся на равном расстоянии от центра эксперимента. Экспериментатору заранее неизвестно, где находится та часть поверхности отклика, которая представляет для него особый интерес, поэтому следует стремиться к тому, чтобы количество информации, содержащееся в уравнении регрессии, было одинаково для всех равноотстоящих от центра эксперимента точек. Действительно, удаление от центра точек 5-8 в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем удаление точек 1-4 и, следовательно, коэффициенты уравнения регрессии определяются с различной дисперсией. Бокс и Хантер предложили ротатабельные планы 2-го порядка. Для того чтобы композиционный план был ротатабельным, величину звёздного плеча α выбирают из условия

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}} \text{ при } k < 5 \text{ и } \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}} \text{ при } k \geq 5. \qquad (4.68)$$

Значения звёздных плеч и числа точек в центре ротатабельных планов приведены в табл. 4.22.

Матрица планирования для ротатабельного плана представлена табл. 4.23.

Таблица 4.22

Значения звёздных плеч в ротатабельных планах второго порядка

Параметр плана	Значения параметров при числе независимых факторов								
	2	3	4	5	5	6	6	7	7
Ядро плана	2^2	2^3	2^4	2^5	2^{5-1}	2^6	2^{6-1}	2^7	2^{7-1}
Звёздное плечо	1,414	1,682	2,000	2,378	2,000	2,828	2,378	3,333	2,828
Число точек в центре плана n_0	5	6	7	10	6	15	9	21	14

Таблица 4.23

Ротатабельный план второго порядка

Номер опыта		Факторы						Результат
		X_0	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	y_i
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
Звёздные точки	5	+1	+1,414	0	0	+2	0	y_5
	6	+1	-1,414	0	0	+2	0	y_6
	7	+1	0	+1,414	0	0	+2	y_7
	8	+1	0	-1,414	0	0	+2	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9
	10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	+1	0	0	0	0	0	y_{12}
	13	+1	0	0	0	0	0	y_{13}

Учитывая специфический характер ротатабельного плана в общем виде, можно получить формулы для расчёта коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий:

$$b_0 = \frac{A}{n}\left[2\lambda^2(k+2)(0y) - 2\lambda c\sum_{j=1}^{k}(jjy)\right]; \qquad (4.69)$$

$$b_j = (c/n)(jy); \qquad (4.70)$$

$$b_{jj} = \frac{A}{n}\left[c^2[(k+2)\lambda - k](jjy) + c^2(1-\lambda)\sum_{j=1}^{k}(jjy) - 2\lambda c(0y)\right]; \qquad (4.71)$$

$$b_{ju} = \frac{c^2}{n\lambda}(juy); \qquad (4.72)$$

$$S_{b0}^2 = \frac{2A\lambda^2(k+2)}{n} S_{восп}^2; \qquad (4.73)$$

$$S_{bjj}^2 = \frac{A\left[(k+1)\lambda - (k-1)c^2\right]}{n} S_{восп}^2; \qquad (4.74)$$

$$S_{bju}^2 = \frac{c^2}{\lambda n} S_{восп}^2, \qquad (4.75)$$

где $(0y) = \sum_{i=1}^{n} X_{0i} y_i$; $\quad (juy) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji} X_{ui} y_i$; $\quad (jy) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji} y_i$;

$(jjy) = \sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2 y_i$; $\qquad c = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2}$; $\qquad A = \dfrac{1}{2\lambda\left[(k+2)\lambda - k\right]}$;

$\lambda = \dfrac{nk}{(k+2)n_1}$; $\qquad n_1 = n - n_0$.

Матрица ротатабельного планирования оказывается неортогональной, так как

$$\sum_{i=1}^{n} X_{0i} X_{ui}^2 \neq 0; \quad \sum_{i=1}^{n} X_{ji}^2 X_{ui}^2 \neq 0; \quad j \neq u. \qquad (4.76)$$

Следовательно, если какой-либо из квадратичных эффектов оказался незначимым, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

При использовании ротатабельных планов второго порядка дисперсию воспроизводимости можно определить по опытам в центре плана. В связи с этим при проверке адекватности уравнения регрессии, полученного по ротатабельному плану второго порядка, поступают следующим образом:

- находят остаточную сумму квадратов

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 \qquad (4.77)$$

с числом степеней свободы $d.f_1 = n - \dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$;

- по опытам в центре плана определяют дисперсию воспроизводимости

$$S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_0} (y_{0i} - \tilde{y}_{0i})^2 \qquad (4.78)$$

с числом степеней свободы $d.f_2 = n_0 - 1$;

- находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность

$$S_3^2 = S_1^2 - S_2^2 \quad (4.79)$$

с числом степеней свободы $d.f_3 = d.f_1 - d.f_2$;

– проверяют адекватность по F-критерию:

$$F = \frac{S_3^2 / d.f_3}{S_2^2 / d.f_2}, \quad (4.80)$$

уравнение адекватно, если $F < F_T$.

Если модель неадекватна, следует повторить эксперименты на меньшем интервале варьирования факторов или перенести центр плана в другую точку факторного пространства. В тех случаях, когда адекватность модели по-прежнему не достигается, рекомендуется перейти к планам третьего порядка.

Вопросы и задания для самоподготовки

1. Как зависит число опытов от вида принимаемой математической модели?
2. Чем можно объяснить широкое распространение полиномиальных моделей?
3. Дайте определение полного факторного эксперимента.
4. Что характеризуют β-коэффициенты?
5. Перечислите этапы планирования и реализации полного факторного эксперимента.
6. Что называют кодированием факторов? Зачем его проводят?
7. Геометрическое представление планов типа 2^k. Постройте область варьирования факторов для плана 2^2.
8. Как происходит формирования матрицы планирования экспериментов? Постройте матрицу планирования для планов $2^2; 2^3; 2^4$.
9. Перечислите свойства матрицы планирования полного факторного эксперимента.
10. Что называют рандомизацией опытов? Зачем ее проводят?
11. Какие опыты называют параллельными?
12. Как и для чего проводится проверка однородности дисперсии параллельных опытов?
13. Что означает понятие воспроизводимости эксперимента?
14. Как оценить ошибку эксперимента?
15. Какой метод применяется при расчете коэффициентов уравнения регрессии? Запишите формулу расчета *b*-коэффициентов.

16. Что называют взаимодействием факторов и как оно учитывается при планировании полного факторного эксперимента?

17. Что называют взаимодействием первого, второго, третьего и т.д. порядка? Как определяется число возможных взаимодействий факторов?

18. Какие существуют способы проверки значимости b-коэффициентов?

19. Чем может быть обусловлена незначимость коэффициентов уравнения регрессии?

20. Как и для чего проводится проверка адекватности уравнения регрессии?

21. Что называют дробным факторным экспериментом?

22. Дайте определение дробной реплики полного факторного эксперимента.

23. Порядок планирования дробного факторного эксперимента.

24. Какие планы называют насыщенными?

25. Явление смешивания оценок β-коэффициентов в дробном факторном эксперименте.

26. Что называют генерирующим соотношением и определяющим контрастом?

27. Ортогональные и ротатабельные планы второго порядка.

28. Определение звёздных плеч и количества опытов в центре планов второго порядка.

29. Определение коэффициентов уравнения регрессии и проверка их значимости в ортогональных и ротатабельных планах.

30. Оценка адекватности модели, построенной с помощью планов второго порядка.

5. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Во многих случаях инженерной практики перед исследователем возникает задача не только выявления характера связи между двумя или несколькими рядами наблюдений, но и нахождения таких численных значений факторов, при которых отклик достигает своего экстремального значения (максимума или минимума). Эксперимент, решающий эту задачу, называется экстремальным. В этом случае задача сводится к оптимизационной и формулируется следующим образом: требуется определить такие координаты экстремальной точки

$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_к^*)$ поверхности отклика $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$, в которой она максимальна (минимальна).

Графическая интерпретация задачи оптимизации объекта $y = f(x_1, x_2)$ представлена на рис. 5.1. Здесь точка А соответствует оптимальным значениям факторов x_1^* и x_2^*, обеспечивающих максимум функции отклика y_{max}. Замкнутые линии на рис. 5.1 характеризуют линии постоянного уровня и описываются уравнением $y = f(x_1, x_2) = B = \text{const}$.

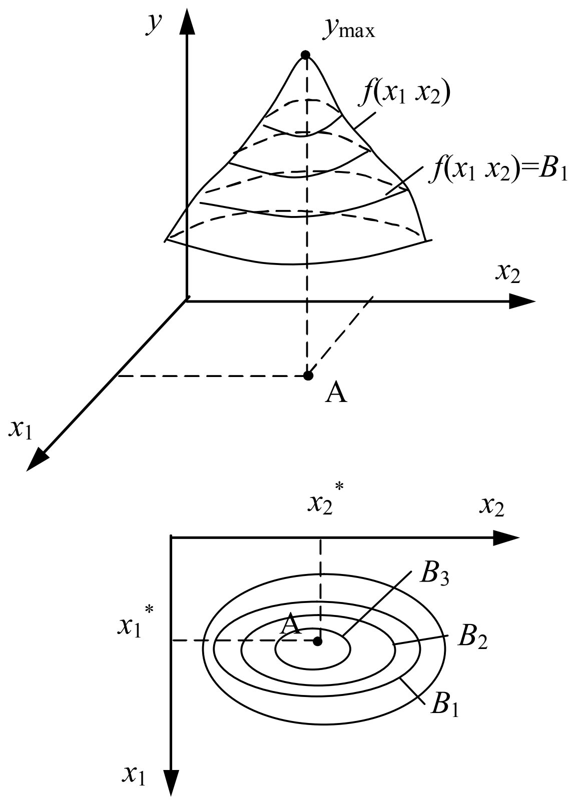


Рис. 5.1. Графическая интерпретация задачи оптимизации

Поисковые методы оптимальных значений относятся к классу итерационных процедур, при этом весь процесс разбивается на шаги, на каждом шаге проводится ряд опытов и определяется, каким образом нужно изменить факторы, влияющие на процесс, чтобы получить улучшение результата. При этом на каждом очередном шаге получаемая информация используется для выбора последующего шага.

Разработано множество методов пошаговой оптимизации, которые подробно рассматриваются в разделе вычислительной математики – «Численные методы оптимизации». Рассмотрим некоторые из них, эффективность использования которых в эксперименте подтверждена практикой.

5.1. Метод покоординатной оптимизации

Иллюстрация метода покоординатной оптимизации приведена на рис. 5.2. Выбирается произвольная точка M_0 и определяются её координаты. Поиск оптимума осуществляется поочерёдным варьированием каждого из факторов. При этом сначала изменяют один фактор

x_1 при фиксированных остальных (x_2=const) до тех пор, пока не прекращается прирост функции отклика (точка M_1). В дальнейшем изменяется другой фактор x_2 при фиксированных остальных (x_1=const), и далее процедура повторяется.

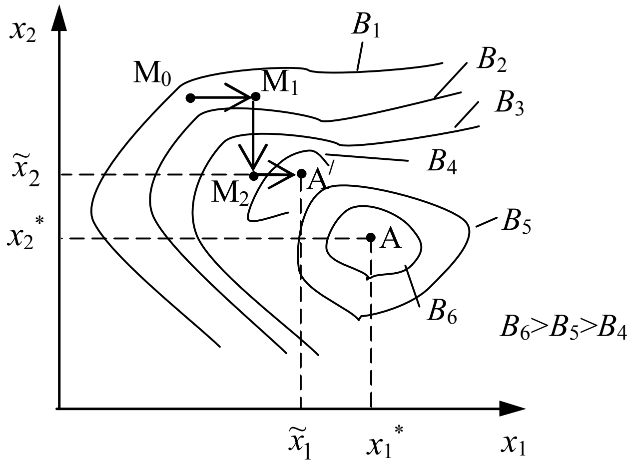


Рис. 5.2. Метод покоординатной оптимизации

Данный метод весьма прост, однако при большом числе факторов требуется значительное число опытов, чтобы достичь координат оптимума. Более того, при некоторых зависимостях $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ этот метод может привести к ложному результату. На рис. 5.2 показан один из таких частных случаев, когда поочерёдное изменение каждого из факторов в любую сторону вдоль координатных осей x_1 и x_2 вызывает появление ложного экстремума в точке A', в то время как действительное значение экстремума находится в точке А.

5.2. Метод крутого восхождения

Кратчайший путь – это движение по градиенту, т.е. перпендикулярно линиям равного уровня. В связи с этим при оптимизации процесса рабочее движение целесообразно совершать в направлении наиболее быстрого возрастания функции отклика, т.е. в направлении градиента функции y.

Существуют различные модификации градиентного метода, одним из них является метод крутого восхождения. Сущность этого метода рассмотрим на примере двухфакторной задачи.

В этом случае шаговое движение осуществляется в направлении наискорейшего возрастания функции отклика, т.е. $grad\ y(x_1, x_2)$. Однако направление корректируют не после каждого следующего шага, а при достижении в некоторой точке на данном направлении частного экстремума функции отклика.

Пусть в окрестности точки M_0 как центра плана поставлен ПФЭ 2^2. Координаты отдельных опытов соответствуют точкам 1-4.

По результатам ПФЭ можно рассчитать коэффициенты линейного уравнения регрессии $\tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Градиент функции отклика в этой точке определяется как

$$grad\ y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\vec{j}\,. \qquad (5.1)$$

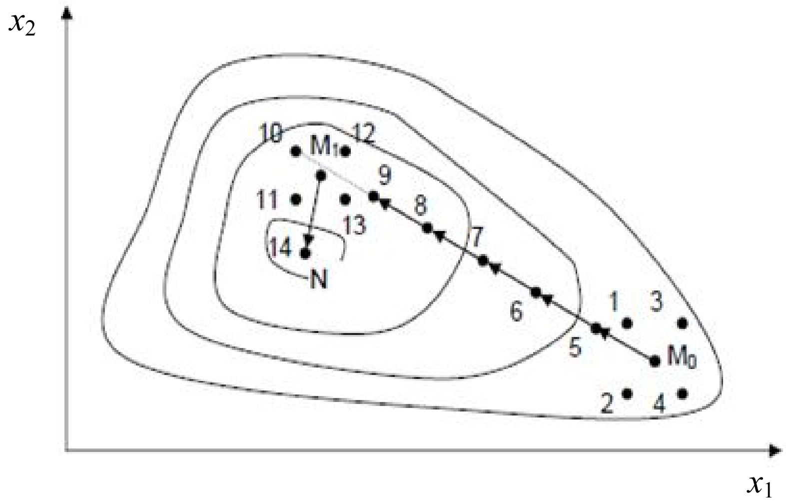


Рис. 5.3. Метод крутого восхождения

Следовательно, для движения по градиенту необходимо изменять факторы пропорционально их коэффициентам регрессии и в сторону, соответствующую знаку коэффициента. В процессе поиска движутся в этом направлении до тех пор, пока не будет обнаружен локальный максимум M_1. В точке последнего находят новое направление градиента M_1N, осуществляя опять ПФЭ, и далее процедура повторяется. Стрелками на рис. 5.3 показана траектория движения к оптимуму.

Практически алгоритм сводится к следующей последовательности операций.

1. Планирование и постановка ПФЭ (или ДФЭ) в окрестности точки начального состояния. Расчёт коэффициентов b_j линейной математической модели с целью определения направления градиента.

2. Расчёт произведений $b_j \Delta x_j$, где Δx_j – интервалы варьирования факторов при ПФЭ (ДФЭ).

3. Выбор базового фактора $x_j = x_{j0}$, у которого $\left| b_j \Delta x_j \right| = a = \max$.

4. Выбор шага крутого восхождения для базового фактора h_a. Этот выбор производится на основании имеющейся априорной ин-

формации или с учётом опыта исследователя, технологических соображений или других критериев. Относительно выбора шага заметим, что слишком малый шаг потребует значительного числа опытов при движении к оптимуму, а большой шаг создаёт опасность проскочить область оптимума.

5. Расчёт шагов изменения других факторов по формуле

$$h_j = \left(b_j \Delta x_j\right) h_a / a \,. \tag{5.2}$$

Это соотношение между величинами шагов изменения отдельных факторов обеспечивает движение по градиенту в факторном пространстве.

6. Составление плана движения по градиенту. Для этого в соответствии с определёнными значениями шагов изменения факторов и их последовательным алгебраическим суммированием с основным уровнем в точке

$$x_{jk} = x_{j0} + kh_j, \quad k = 1,2,\ldots$$

находят координаты опытов 5-10. Часть этих опытов полагают «мысленными». «Мысленный» опыт заключается в получении предсказанных (расчётных) значений функции отклика по линейному уравнению регрессии, что позволяет сократить объём реальных опытов, т.е. увеличить скорость продвижения к экстремуму. При «мысленном» эксперименте перевод координат в кодированную форму и подстановка их в уравнение модели объекта должны подтвердить действительное возрастание y. Обычно реальные опыты в начале движения из базовой точки вдоль направления градиента ставятся через 2-4 мысленных опыта. Другие опыты реализуют на практике, определяя последовательность значений y в направлении градиента. Из опытных данных находят положение локального экстремума M_1.

7. В окрестности локального экстремума ставят нулевую серию опытов (ПФЭ или ДФЭ) для определения новых значений коэффициентов уравнения регрессии и нового направления градиента M_1N. В дальнейшем процедура повторяется до достижения следующего локального экстремума и так далее вплоть до определения окрестности координат максимума функции отклика, которая называется почти стационарной областью.

Признаком достижения этой области является статистическая незначимость коэффициентов b_j. В почти стационарной области становятся значимы эффекты взаимодействия и квадратичные эффекты. Здесь требуется переходить от ДФЭ (если он проводился ранее) к

ПФЭ, а если этого окажется недостаточно, перейти от планов эксперимента первого порядка к планам второго порядка.

В задачах, где требуется определить координаты не максимума, а минимума функции отклика, знаки коэффициентов b_j следует поменять на обратные. В этом случае движение в факторном пространстве осуществляется по направлению, противоположному вектору градиента.

5.3. Симплексный метод планирования

Метод симплексного планирования позволяет без предварительного изучения влияния факторов найти область оптимума. В данном методе не требуется вычисления градиента функции отклика, поэтому он относится к безградиентным методам поиска оптимума. Для этого используется специальный план эксперимента в виде симплекса.

Симплекс – простейший выпуклый многогранник, образованный k+1 вершинами в k-мерном пространстве, которые соединены между собой прямыми линиями. При этом координаты вершин симплекса являются значениями факторов в отдельных опытах, в двухфакторном пространстве – это любой треугольник, в трёхфакторном – тетраэдр.

Симплекс называется правильным или регулярным, если все расстояния между образующими его вершинами равны.

После построения исходного симплекса и проведения опытов при значениях факторов, соответствующих координатам его вершин, анализируют результаты и выбирают вершину симплекса, в которой получено наименьшее (наихудшее) значение функции отклика. Для движения к оптимуму необходимо поставить опыт в новой точке, являющейся зеркальным отражением точки с наихудшим результатом относительно противоположной грани симплекса. На рис. 5.4 представлено геометрическое изображение симплекса для двумерного случая.

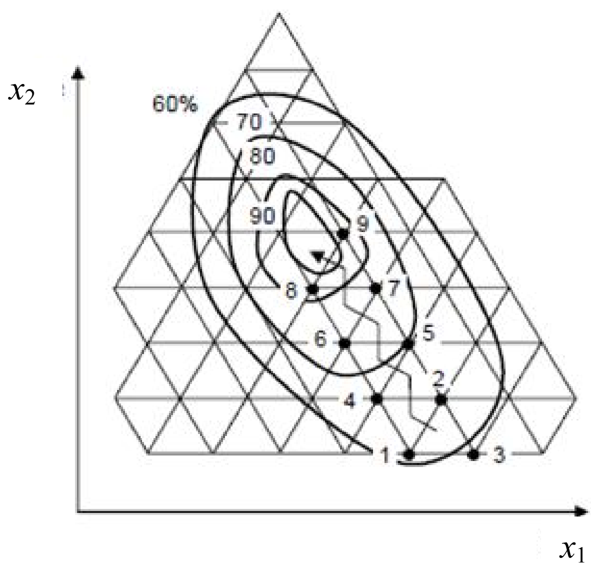


Рис. 5.4. Движение к оптимальнои области симплексным методом

Например, по итогам опытов 1,2,3 худшим оказался опыт 3. Следующий опыт ставится в точке 4, которая образует с точками 1 и 2 новый правильный симплекс. Далее сравниваются результаты опытов 1,2,4. Наихудший результат получен в точке 1, поэтому она в новом симплексе заменяется зеркальным отражением (точка 5) и т.д., пока не будет достигнута почти стационарная область. Получается зигзагообразный путь, общее число опытов, необходимых для достижения области оптимума, может быть небольшим за счёт того, что проводить k+1 опыт приходится лишь в начале, а в дальнейшем каждый шаг сопровождается проведением только одного дополнительного опыта, условия которого выбираются на основе предшествующих результатов.

Выбор размеров симплекса и его начального положения в известной степени произволен. Для построения начального симплекса значения в каждом опыте определяются по формуле

$$x_{ji} = x_{j0} + C_{ji}\Delta x_j, \tag{5.3}$$

где x_{j0} – координаты начального симплекса; Δx_j – интервал варьирования j-го фактора; C_{ji} – кодированное значение j-го фактора в i-м опыте.

Для определения условий проведения опыта в отражённой точке (координат новой вершины симплекса) используется формула

$$x_{jн} = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k+1} x_{ji} - x_{jз}, \quad j \neq jз, \tag{5.4}$$

где $x_{jн}$ – координата новой вершины симплекса для j-й переменной; $x_{jз}$ – координата заменяемой точки; $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k+1} x_{ji}$ – среднее значение из координат всех вершин симплекса, кроме заменяемой.

Критерии окончания процесса последовательного отражения наихудших вершин и постановки очередных опытов в новых вершинах:

1. Разность значений функции отклика в вершинах симплекса меньше ранее заданной величины. Это означает либо выход в почти стационарную область вблизи оптимума, либо достижение поверхности $\tilde{y} = f(x_1, x_2, ..., x_k) = \text{const}$ в виде «плато». В этом случае дополнительными опытами в стороне от симплекса следует удостовериться в отсутствии других участков с более существенной кривизной поверх-

ности $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ и принять величину с экстремальным значением функции отклика за точку оптимума.

2. Отражение любой из вершин симплекса после однократного качания приводит к его возврату в прежнее положение. При этом есть основания утверждать «накрытие симплексом точки оптимума.

3. Циклическое движение симплекса вокруг одной из его вершин на протяжении более чем нескольких шагов. Подобная ситуация имеет место, когда искомый оптимум располагается внутри области, охватываемой циркулирующим симплексом.

В случаях 2 и 3 рекомендуется уменьшить размеры симплекса, т.е. расстояния между вершинами, и продолжить поиск до желаемого уточнения координат искомого оптимума.

Вопросы и задания для самоподготовки

1. Какие задачи решает экстремальный эксперимент?
2. Какая задача называется оптимизационной?
3. Метод покоординатной оптимизации. Преимущества и недостатки данного метода при решении оптимизационных задач.
4. Алгоритм решения оптимизационной задачи методом крутого восхождения.
5. Особенности поиска минимального значения функции отклика методом крутого восхождения.
6. Дайте определение симплекса.
7. Симплексный метод поиска оптимального значения функции отклика. Сущность метода.
8. Перечислите критерии окончания процесса оптимизации симплексным методом.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Ординаты нормального распределения

$$p(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2/2\right)$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3988	0,3987	0,3986	0,3984	0,3982	0,3979	0,3976	0,3973
0,1	0,3969	0,3965	0,3960	0,3955	0,3950	0,3944	0,3938	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3189	0,3885	0,3876	0,3866	0,3856	0,3846	0,3836	0,3825
0,3	0,3813	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3711	0,3697
0,4	0,3682	0,3667	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3588	0,3572	0,3655	0,3538
0,5	0,3520	0,3502	0,3484	0,3466	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3371	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3291	0,3271	0,3250	0,3229	0,3208	0,3187	0,3165	0,3144
0,7	0,3122	0,3100	0,3078	0,3056	0,3033	0,3011	0,2988	0,2965	0,2943	0,2920
0,8	0,2896	0,2873	0,2850	0,2826	0,2803	0,2779	0,2756	0,2732	0,2708	0,2684
0,9	0,2660	0,2636	0,2612	0,2588	0,2564	0,2540	0,2516	0,2492	0,2468	0,2443
1,0	0,2419	0,2395	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2178	0,2154	0,2130	0,2106	0,2083	0,2059	0,2035	0,2012	0,1988	0,1965
1,2	0,1941	0,1918	0,1895	0,1874	0,1849	0,1826	0,1803	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1713	0,1691	0,1689	0,1647	0,1625	0,1603	0,1582	0,1560	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1455	0,1435	0,1414	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1314
1,5	0,1295	0,1275	0,1256	0,1237	0,1218	0,1200	0,1181	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1091	0,1074	0,1056	0,1036	0,1022	0,1005	0,0989	0,0972	0,0956
1,7	0,0940	0,0924	0,0908	0,0893	0,0878	0,0862	0,0847	0,0832	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0775	0,0761	0,0747	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0615	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0450
2,1	0,0439	0,0430	0,0421	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0370	0,0363
2,2	0,0365	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0296	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0271	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0240	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0188	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0135	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0059	0,0058	0,0056	0,0054	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,001	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Значения критерия Пирсона (χ^2- критерия)

Число степеней свободы *d.f*	Уровень значимости α					
	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	6,626	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299
13	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	31,528	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	77,577	85,527	90,531	95,023	104,43	104,22
80	88,130	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	98,650	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Интеграл вероятностей

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\cdot\int_{-t}^{t}\exp\left(-t^2/2\right)dt$$

Определяет вероятность попадания случайной величины t, подчиненной нормальному закону, в симметричный интервал $[-t;\ t]$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3900	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4908	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5468	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7539	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7994	0,8030
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8197	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8689	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9178	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9266
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9328	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9742	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9890	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9954	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9962
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980

Значения критерия Стьюдента (*t*-критерия)

Число степеней свободы *d.f*	Уровень значимости α					
	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01	0,001
1	0,727	1,376	3,078	6,314	31,82	318,3
2	0,617	1,061	1,886	2,920	6,965	22,33
3	0,584	0,978	1,638	2,353	4,541	10,22
4	0,569	0,941	1,533	2,132	3,747	7,173
5	0,559	0,920	1,476	2,015	3,365	5,894
6	0,553	0,906	1,440	1,943	3,143	5,208
7	0,549	0,896	1,415	1,895	2,998	4,785
8	0,546	0,889	1,397	1,860	2,896	4,501
9	0,543	0,883	1,383	1,833	2,821	4,297
10	0,542	0,879	1,372	1,812	2,764	4,144
11	0,540	0,876	1,363	1,796	2,718	4,025
12	0,539	0,873	1,356	1,782	2,681	3,930
13	0,538	0,870	1,350	1,771	2,650	3,852
14	0,537	0,868	1,345	1,761	2,624	3,787
15	0,536	0,866	1,341	1,753	2,602	3,733
16	0,535	0,865	1,337	1,746	2,583	3,686
17	0,534	0,863	1,333	1,740	2,567	3,646
18	0,534	0,862	1,330	1,734	2,552	3,610
19	0,533	0,861	1,328	1,729	2,539	3,579
20	0,533	0,860	1,325	1,725	2,528	3,552
21	0,532	0,859	1,323	1,721	2,518	3,527
22	0,532	0,858	1,321	1,717	2,508	3,505
23	0,532	0,858	1,319	1,714	2,500	3,485
24	0,531	0,857	1,318	1,711	2,492	3,467
25	0,531	0,856	1,316	1,708	2,485	3,450
26	0,531	0,856	1,315	1,706	2,479	3,435
27	0,531	0,855	1,314	1,703	2,473	3,421
28	0,530	0,855	1,313	1,701	2,467	3,408
29	0,530	0,854	1,311	1,699	2,462	3,396
30	0,530	0,854	1,310	1,697	2,457	3,385
40	0,529	0,851	1,303	1,984	2,423	3,307
50	0,528	0,849	1,299	1,676	2,403	3,261
60	0,527	0,848	1,296	1,671	2,390	3,232
80	0,527	0,846	1,292	1,664	2,374	3,195
100	0,526	0,845	1,290	1,660	2,365	3,174
200	0,525	0,843	1,286	1,653	2,345	3,131
500	0,525	0,842	1,283	1,648	2,334	3,107
∞	0,524	0,842	1,282	1,645	2,326	3,090

Приложение 5

Значения критерия Фишера (*F*- критерия)

Значения приведены для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$.

$d.f_2$	$d.f_1$									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,557	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,744	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,197	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	22,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,077	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,811
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Значение критерия Кохрена (G-критерия)

Значения приведены для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

$d.f_2$	$d.f_1$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7771	0,6771	0,6530	0,6333
4	0,9065	0,7679	0,7841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5665	0,4783	0,4564	0,4387
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3040
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187

Приложение 7

Фрагмент таблицы случайных чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	31	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	19	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	58	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	78	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	48	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	20	82	95	36	53	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	90
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	68	45	96	80	46	36	99	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	21	15	14	47	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	46	14	72	41	46	12	67	46	72	08	59	06	17	49	12	73	28	23	59	48
08	58	53	63	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17	45
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84