

В. Г. ТЕМНОВ ^{Т32}

Конструктивные системы в природе и строительной технике

за-
то-
ом
ить
н-

с

н-
б-
е-
в
ь
а
л
и
з,
н
я

61109
ПРОЦЕСС-ТЕХНИЧЕСКАЯ
ЕМЕЛЕТСКАЯ
НАЧЕРТЫ ЧАСТИ
ПРОМСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОЕКТА



Ленинград
Стройиздат
Ленинградское отделение
1987

Темнов В. Г. Конструктивные системы в природе и строительной технике.— Л. Стройиздат. Ленингр. отд-ние.— 1987. — 256 с.: ил.

В книге освещены вопросы организации конструктивных систем организмов живой природы в процессе эволюции. Рассмотрены бионические принципы оптимизации конструктивных систем. Впервые предложены алгоритмы синтеза оптимальных конструктивных систем на основе бионических принципов. Дан анализ современных методов математического программирования, используемых при оптимальном проектировании конструктивных систем. Приведены материалы исследований физико-механических характеристик биоаналогов с последующим математическим и физическим моделированием последних. Представлены строительные конструкции, созданные на основе бионических принципов, и освещен опыт их применения в практике строительства. Показаны широкие возможности алгоритмов, разработанных на основе сочетания методов математического программирования с бионическими принципами и реализованных на ЭВМ, для оптимального проектирования конструктивных систем.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников.

Рецензент — д-р техн. наук проф. А. П. Филин

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Владимир Григорьевич Темнов

**КОНСТРУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ
В ПРИРОДЕ И СТРОИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ**

Зав. редакцией Н. Н. Днепров. Редактор М. Е. Васильева. Художественно-технический редактор О. В. Сперанская. Корректоры Т. Б. Верникова, Ю. М. Зислин. Технический редактор Г. С. Томила. Макет С. Л. Шапиро. Внешнее оформление художника Н. Г. Всесветского.

ИБ № 4329

Сдано в набор 28.11.86. Подписано в печать 24.04.87. М-32076. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,75. Тираж 3350 экз. Заказ № 3018. Изд. № 2481Л. Цена 3 р. 00 к.

Стройиздат. Ленинградское отделение. Ленинград, пл. Островского, 6.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

Т 3202000000—053 93—87
047(01)—87

© Стройиздат, Ленинградское отделение, 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

Не в воображаемой независимости от законов природы заключается свобода, а в познании этих законов и в основанной на этом знании возможности планомерно заставлять законы природы действовать для определенных целей.

Ф. Энгельс

На XXVII съезде КПСС были поставлены задачи, связанные с ускорением темпов научно-технического прогресса в области строительства, что требует снижения стоимости, материалоёмкости, трудо- и энергозатрат, сокращения сроков возведения зданий и сооружений. Вследствие этого вопросы оптимального проектирования строительных конструкций на основе методов математического программирования с использованием принципов бионики и широким применением ЭВМ стали актуальными, особенно если учесть, что качественными показателями конструктивных систем живых организмов, также подверженных гравитационным, атмосферным, аэродинамическим и другим силовым воздействиям, являются масса и энергозатраты.

Главными направлениями научно-технического прогресса, по определению академика Г. И. Марчука, являются:

поиски и освоение новых видов энергии;

создание и внедрение в производство новых, более совершенных конструктивных материалов;

переход на безотходные, ресурсосберегающие технологии, обеспечивающие максимально полное и комплексное использование сырья, экономию трудовых, энергетических и материально-технических ресурсов;

комплексная механизация и автоматизация производства, включая создание и внедрение новых систем машин, автоматизированных производств и управление процессами;

реализация принципов научного управления на всех уровнях общественного производства.

К одному из этих направлений относится снижение стоимости, материалоёмкости, трудо- и энергозатрат, сокращение сроков возведения зданий и сооружений.

Широкий размах строительства требует постоянного поиска, создания и внедрения в производство более совершенных или новых материалов, конструкций и технологии производства. Причем новые решения должны, с одной стороны, способствовать снижению стоимости, материалоемкости, трудоемкости и энергозатрат, а с другой — обеспечивать надежность и долговечность инженерных сооружений. Принятие таких решений оказалось возможным лишь с появлением и развитием производства высокопрочных сталей, алюминиевых сплавов, полимерных листовых и профильных материалов и т. д. и с внедрением в практику проектирования электронной вычислительной техники.

Все расширяющееся использование новых конструкционных материалов в инженерной практике увеличивает потребность в современных средствах расчета, которые позволили бы полностью использовать физико-механические свойства этих новых материалов. Если в результате более усовершенствованного расчета конструкции или поиска оптимального варианта можно добиться удешевления ее хотя бы на несколько процентов, то в масштабе всей страны экономия достигнет миллиардов рублей.

В течение последних лет разработка надежных методов расчета конструкций совершенствовалась. Непрекращающийся стабильный рост мощности цифровых машин, сопровождающийся к тому же удешевлением вычислений (в расчете на одну операцию), создал предпосылки для разработки универсальных средств расчета конструкций, таких как различные машинные программы расчета методом конечных элементов (например, РАССУДОК, ЛИРА, ГАММА в СССР, NASTRAN, ASKA, SPAR за рубежом). По мере того как возрастала надежность расчетной оценки различных вариантов конструкции, росло естественное стремление перейти к настоятельно требующим решения задачам более широкого плана, связанным с процессом проектирования оптимальных конструкций.

Необходимость экономить энергию посредством уменьшения массы конструктивных систем, не поступаясь их прочностью, жесткостью и устойчивостью, исторически являлась мощным побудительным мотивом разработки методов оптимального проектирования конструкций. В 1960 г. был сформулирован новый общий подход к оптимизации конструкций, названный методом синтеза конструкций. И все же практические результаты в этой области пока еще незначительны. Такие методы, в общем случае, не обеспечивают оптимальных конструкций инженерных сооружений. Задачи оптимизации конструкций в силу их многоэкстремального характера и значительного числа параметров относятся к сложным задачам нелинейного программирования. Поиск глобального экстремума таких задач затрудняется нелинейностью и особенно не-

выпуклостью функций. Именно поэтому решение задач с несколькими десятками переменных может оказаться невозможным даже в условиях функционирования САПР.

С другой стороны, биологами накоплен огромный материал, хорошо отражающий ход эволюции оптимальных конструктивных систем живых организмов, подверженных тем же силовым воздействиям. Общее строение костей человека и позвоночных животных позволило биологам (В. Мейеру, П. Ф. Лесгафту, Н. Н. Боголюбову, Л. И. Хозацкому и др.) рассматривать их в ряде случаев как балочные системы, или своды, строение и форма которых определенным образом отвечают возникающим в них усилиям. Основной принцип архитектоники всей костной системы они увязывали с обеспечением высокой степени прочности и легкости элементов, отличающихся весьма экономичным распределением материала. Согласно утверждениям этих ученых живая природа сгущает материал в направлении наибольших усилий и в то же время выбирает его из других ненагруженных мест.

Череп и панцири различных позвоночных животных являются, по их мнению, своеобразными «сборными сооружениями», большая прочность которых обусловлена слоистым строением, гарантирующим наиболее рациональное восприятие и распределение нагрузок.

В основе создания конструкций технических систем, так же как и биологических, лежат энергозатраты, необходимые для производства материалов, отдельных конструктивных элементов. Причем энергозатраты определяются не только производством материалов, идущих на изготовление конструкций, но и массой изготавливаемых конструкций. Чем больше масса, тем больше энергозатраты. Именно поэтому живая природа стремится уменьшить массу своих конструктивных систем по отношению к массе всего живого организма. Примером рационального построения могут служить опорные системы живых организмов. Как показали исследования строения костей, черепов и панцирей животных, большой запас прочности достигается за счет особой структуры костной ткани. Вид структур как линейчатых (стержневых), так и плоских костей определяется в зависимости от условий закрепления конструкций живых организмов и типа внешних нагрузок общими энергетическими затратами, связанными с метаболизмом (обменом веществ). Оптимальные структуры требуют минимума материала для ее создания и, следовательно, минимума энергетических затрат на ее постоянное воссоздание.

Хотя непрерывный процесс обмена веществ в живых организмах и происходит с минимальными энергетическими затратами, но при этом обеспечивается достаточная прочность, жесткость и устойчивость конструктивных систем, противостоящих внешним воздействиям.

В такой области человеческой деятельности, как оптимальное проектирование конструктивных систем, необходимо учитывать комплекс требований, связанных с надежностью, материалоемкостью, изготовлением, монтажом, эксплуатацией и т. д.

Однако невозможно одновременно максимально удовлетворить каждое требование в отдельности в силу того, что они взаимно исключают друг друга. В то же время оптимальные решения, удовлетворяющие лишь одному из предъявляемых требований, позволяют получать такие конструкции, которые могут быть использованы лишь в частных случаях строительной практики и потому не всегда представляют интерес. Таким образом, при выборе рационального конструктивного решения из множества альтернатив необходимо использовать целый ряд критериев, т. е. оптимизировать решение в соответствии с несколькими целевыми функциями. Однако в этом случае приходится сталкиваться с проблемой многокритериальности, которая затрудняет успешное применение методов математического программирования в реальных задачах. В случаях использования двух критериев можно путем численных расчетов получить множество эффективных конструктивных решений, или множество Парето. После этого лицо, принимающее решение (ЛПР), путем последовательных переборов выявляет характерную точку на «кривой компромисса», отвечающей, по его мнению, в наибольшей степени искомому решению.

В общем случае, когда число критериев больше двух, затрудняется не только построение множества Парето, но и выбор предпочтительного решения, так как общепринятого подхода для реализации таких задач оптимизации еще нет, хотя решению их посвящено значительное количество работ.

Существуют различные подходы к решению многокритериальных задач оптимизации. Наиболее распространенным из них является агрегирование многих целевых функций в единую функцию полезности. Подобный подход широко применяют, когда целевые функции аддитивны; в этом случае проще привести оценки по каждому критерию к единой шкале. В противном случае возникают трудности в математическом плане, вызванные вычислительной сложностью алгоритмов оптимизации.

При решении практических задач также широко используется принцип последовательного выявления предпочтений относительно рассматриваемых критериев. При выборе рациональной конструктивной системы один из критериев принимается за наиболее важный из всех других и исследуется его влияние на агрегированную функцию полезности. И так поступают со всеми принятыми критериями. Однако, если оценки по рассматриваемым критериям окажутся одинаковыми либо превышающими минимально необходимый уровень, тогда подобные исследования оказываются неоправданными. Но это становится ясным только после проведения численного анализа.

При решении многокритериальных задач оптимизации используют также принцип доминирования: один из выявленных в процессе проектирования рациональных конструктивных систем (например, опытным путем) преобладающий критерий оптимальности (материалоемкость, трудозатраты или энергозатраты) принимается за целевую функцию. На остальные же критерии эффективности накладываются ограничения. При таком подходе поиск рациональной конструктивной системы сводится к решению задачи параметрической оптимизации.

К сожалению, многокритериальная задача оптимизации в общем виде является нелинейной, невыпуклой, что значительно затрудняет ее реализацию существующими методами математического программирования.

В области оптимизации конструктивных систем ведутся большие научно-исследовательские работы как в нашей стране (Н. И. Абрамов, А. И. Богатырев, Н. В. Баничук, А. В. Геммерлинг, В. А. Игнатьев, А. А. Калинин, В. П. Малков, Д. А. Мациюловичус, А. Н. Раевский, Н. Д. Сергеев, Н. Н. Складнев, В. Г. Темнов, А. В. Угодчиков, А. П. Филин, И. К. Цыпинас, А. А. Чирас, А. П. Чижас, А. Г. Юрьев, Л. И. Ярин и др.), так и за рубежом (В. Г. Прагер, Дж. Хейман, К. И. Мажидо, Л. А. Шмит, Ф. Г. Ходж, Д. А. Андерсон, Ф. И. Ниордсон, Дж. Тейлор, Ж. Л. П. Арман, Э. Д. Хог, Я. С. Арора, П. Ф. Сан, Р. К. Хуанг и др.).

В последние годы многие инженеры успешно применяют бионические принципы при проектировании конструкций. Строительная бионика открывает новые пути не только для совершенствования традиционных, но и создания новых типов конструкций.

Это позволяет видеть, в каком направлении следует осуществлять синтез оптимальных пластинчато-стержневых систем, минуя ненужный поиск или перебор вариантов с использованием ЭВМ, экономя при этом время и средства.

В данной монографии автором впервые предлагается осуществлять поиск оптимальных конструкций путем сочетания методов математического программирования с бионическими принципами, т. е. разработана теория синтеза оптимальных конструктивных систем на основе бионических принципов. Это позволяет сложные (в силу их многоэкстремального характера, значительного числа параметров) задачи оптимизации стержневых, пластинчатых и пластинчато-стержневых систем, представляющих собой нелинейные, невыпуклые задачи математического программирования, не только упростить, но и обобщить, преобразовав их в линейные или выпуклые задачи математического программирования. Последующие преобразования условных экстремальных задач на основе методов последовательной безусловной минимизации в эквивалентные безусловные позволяют реализовать последние как методами

классического анализа, так и современными численными методами прикладной математики с применением ЭВМ.

Книга состоит из семи глав. Материал изложен в такой последовательности: взаимообусловленность систем живой и неживой природы в процессе их развития, а также влияние гравитации на организацию конструктивных систем живых организмов (глава первая); концепция строительной бионики и энергетический критерий оценки оптимальности конструктивных систем (глава вторая); наиболее специфические задачи синтеза искусственных конструктивных систем (глава третья); бионические принципы оптимизации конструктивных систем (глава четвертая); математическое моделирование бионических конструктивных систем и методы оптимизации их (пятая и шестая главы); создание конструкций на основе бионических принципов и опыт применения их в практике строительства (глава седьмая).

Широкий круг вопросов, поднятых в книге при ее ограниченном объеме, не мог не сказаться на глубине проработки их, поэтому за все критические замечания и уточнения, направленные на улучшение содержания, автор будет признателен.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, специализирующихся в области оптимального проектирования конструктивных систем; однако, по мнению автора, она представит интерес для широкого круга подготовленных читателей, интересующихся проблемами бионики и оптимизации в технике.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А. П. Филину, взявшему на себя труд по рецензированию и своими ценными замечаниями и советами способствовавшему улучшению содержания книги, А. М. Брехову, эрудиция и интерес которого к задачам оптимизации в технике, экономике, управлении, оказали серьезное влияние на формирование книги в процессе прочтения им рукописи, В. С. Чувиковскому за ценные советы, предложения и постоянную поддержку позиций автора по архитектурно-строительной бионике.

Автор признателен лауреатам Государственных премий СССР, ведущим специалистам в области пространственных конструкций А. П. Морозову, Ю. А. Елисееву, О. А. Курбатову за содействие в развитии конструкций бионического типа.

Автор приносит свою благодарность коллегам: заслуженному архитектору РСФСР Ю. С. Лебедеву, заслуженному врачу РСФСР А. И. Смольскому, кандидату архитектуры А. И. Лазареву, кандидатам технических наук Г. В. Брандт, С. Б. Вознесенскому, В. В. Иванову, архитектору А. Д. Ярмоленко, математику С. А. Темновой, инженеру П. Н. Мурееву за поддержку и пропаганду нового научного направления — оптимизации конструкций на основе принципов бионики.

ВЗАИМОУСЛОВЛЕННОСТЬ СИСТЕМ ЖИВОЙ И НЕЖИВОЙ ПРИРОДЫ В ПРОЦЕССЕ ИХ ЭВОЛЮЦИИ

1

Мудрость заключается в том, чтобы познать все то, что сделано природой.

Гиппократ

Силы гравитации не только определяют структуру Вселенной, управляют движением галактик, звезд и планет, но и удерживают на поверхности Земли гидросферу, атмосферу и весь живой мир. Согласно научным данным геофизических, геохимических, а также космических исследований силы гравитации являются одним из мощных факторов внешней среды, воздействующих на эволюцию не только самой планеты Земля, но и живых организмов. Особенно наглядно прослеживается роль сил гравитации в эволюции конструктивных систем живых организмов при переходе их из одной внешней среды в другую и там, где эти силы проявляются неодинаково. Так, происходит усиление скелета животного после выхода его на сушу и, наоборот, он облегчается при переходе последнего к водному образу жизни. Отсутствие влияния сил гравитации, наблюдаемое в невесомости, сказывается в первую очередь на скелете живого организма. Происходит декальцинация скелета, т. е. выведение из него важнейшей составной части (кальция), что ведет к снижению прочности главной несущей конструктивной системы организма [13].

Экспериментальные данные взаимодействий позвоночных животных со средой в видовом (филогенез) и индивидуальном (онтогенез) развитии и существовании говорят о том, что эволюция животных и растений носит приспособленческий характер и в основном определяется силами гравитации, которые они постоянно преодолевают. Адаптация возможна лишь при выполнении принципа единства организма и среды. При этом следует добавить, что живые организмы адаптируются при длительном действии (миллионы лет) физического фактора на популяцию [14]. За это время путем естественного отбора происходят адаптивные морфофизиологические изменения кон-

структивных систем живых организмов (меняются структура, форма, размеры, обмен веществ, замедляются или наоборот усиливаются рост, развитие органов и т. д.). Однако существующая точка зрения, согласно которой все растения и животные обладают рациональными конструктивными системами, не совсем верна. Согласно эволюционной теории Чарльза Дарвина природа без всякого плана создает большое разнообразие конструктивных систем живых организмов и из этого разнообразия естественным путем отбираются лишь те конструктивные системы, которые позволяют организмам наилучшим образом приспособиться и противостоять воздействиям внешней среды.

Одной из древних областей деятельности человека является строительная техника. Первые образцы ее чаще всего были похожи на природные. И это не случайно, так как человек буквально с доисторических времен учился у природы, инстинктивно перенимая ее конструкции. Иногда у него получалось, а чаще нет. Это объясняется отсутствием знаний о прочности материала, о поведении конструкций под нагрузкой. Постепенно методом проб и ошибок человек постигал тайны несущей способности конструкций и строил только те из них, которые, по его мнению, были надежными. И хотя так же, как и в живой природе, происходил жесткий отбор строительных конструкций, человек не переставал экспериментировать и размышлять об их сущности. В дальнейшем эти размышления переросли в систему теоретических и экспериментальных исследований, на основе которых создавались оптимальные конструкции.

1.1. ГРАВИТАЦИЯ И ОРГАНИЗАЦИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ ЖИВЫХ ОРГАНИЗМОВ

Одним из главных физических факторов внешней среды, в которой развиваются живые организмы, являются силы гравитации [13]. Именно они в первую очередь определяют форму, структуру и размеры конструктивных систем (строение скелетов) живых организмов в соответствии с размерами планеты. На роль сил гравитации в процессе развития живых конструктивных систем впервые обратил внимание еще в 1882 г. русский ученый К. Э. Циолковский. Лишь спустя три с половиной десятилетия английский ученый Д' Арси Томпсон фактически развил идею К. Э. Циолковского. С позиции гравитации к строению конструктивных систем живых организмов подходил и морфолог В. Я. Бровар. В своей работе он отмечал, что «масса животного как механическая система не изолирована; она зависит от масс других тел и в первую очередь, конечно, от массы нашей планеты. Именно поэтому вес —

не только скаляр, но и векторная величина, и вес животного является силой тяготения относительно Земли. Это значит, что всякое живое существо взаимодействует с силовым полем. С момента возникновения и на всем протяжении своего онтогенетического развития, связанного с изменением внешней формы и положения частей внутри целого, организм находится под влиянием тяготения... Если представить животное перемещенным на другую планету с резко измененными условиями тяготения, то весьма вероятно, что оно не сможет жить в них, именно потому, что животные адаптированы к силам тяжести только данной планеты. Но и в пределах Земли изменение веса животного, например при переходе из водной среды в наземную, влечет существенные, вплоть до катастрофических, изменения в ряде функций животного. Даже перемена только направления сил тяжести относительно тела животного при неизменной величине силы веса, и та может оказаться роковой для животного, если оно не приспособлено к подобным изменениям»*.

Своей двухсторонней симметрией живые существа на планете Земля обязаны направленному действию сил гравитации. В условиях, где отсутствует (невесомость) или ослаблена (водная среда) преимущественная направленность силовых линий поля гравитации, структура конструктивных систем живых организмов имеет центрально-лучевую симметрию, что и наблюдается, например, у морских звезд, медуз и т. д.

Гравитационные поля, эволюция видов и борьба за выживаемость определяли внешний вид живых организмов и, следовательно, размеры их конструктивных систем, которые являлись оптимальными в сложившихся условиях. Жизнь на планете Земля проходила в гравитационном поле, интенсивность которого постоянно менялась в зависимости от ряда факторов, таких как изменение размера и осевой скорости вращения планеты во времени, дрейф континентов по поверхности планеты, возмущающее притяжение других планет и т. д. Изменение интенсивности гравитационного поля накладывало определенный отпечаток на образование видов живых организмов и, следовательно, их форм и структур в процессе эволюционного развития (см. приложение).

На протяжении всей истории Земли непрерывно шел процесс оптимизации (отбор) конструктивных решений живых систем, которые обеспечивали им лучшее приспособление к новым внешним условиям, чем существовавшие до них. Появление того или иного варианта конструктивного решения в природе тесно связано еще и с образом жизни живых систем. Так, автотрофные организмы (растения, бактерии и

* Бровар В. Я. Силы тяжести и морфология животных. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — С. 239.



Рис. 1. Каркасная конструкция тропического фикуса (рис. Ф. Патури, 1979)

Рис. 2. Конструктивная форма североамериканской черепахи (рис. Л. И. Хозацкого, 1948)

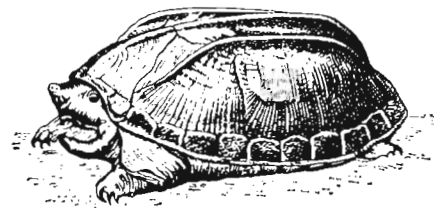


Рис. 3. Разветвленная структура гриба



сине-зеленые водоросли), которые могут синтезировать для питания органические соединения и прежде всего углеводы из неорганических веществ, находящихся вблизи их, ведут неподвижный образ жизни. Конструкция их тел обычно имеет разветвленную структуру, поскольку только такое решение позволяет им при неподвижном закреплении получать различные неорганические вещества из золы, почвы, атмосферы (рис. 1).

Гетеротрофные организмы (человек, животные, все грибы, многие бактерии) могут синтезировать органические соединения только из органических, поэтому они живут за счет автотрофных организмов. Большая часть гетеротрофных организмов (животных) в поисках пищи вынуждена вести подвижный образ жизни, поэтому их конструктивные формы и структуры компактны (рис. 2). Это способствует активной деятельности животных и обеспечивает значительное снижение энергетических затрат, связанных с передвижением в пространстве. Грибы, а также животные, ведущие сидячий образ жизни, могут иметь разветвленную структуру (рис. 3).

Хотя автотрофные и гетеротрофные организмы имеют существенные различия, у них есть одно общее: они формируются и перемещаются в гравитационном поле. И те и другие должны постоянно преодолевать его действие. Причем, если автотрофные организмы только растут (движение в биологическом смысле), то гетеротрофные организмы не только растут, но еще и перемещаются в пространстве, а также работают отдельными органами (движение в механическом смысле). На все это необходимо постоянно затрачивать энергию. Вот почему с конструктивной точки зрения у живых организмов в процессе эволюции под действием изменявшихся сил поля гравитации, интенсивность которого менялась в соответствии с геологическим

развитием планеты, отбирались такие формы, которые обеспечивали прочность и надежность конструкций при минимальном расходе вещества (материала), идущего на их воспроизводство.

Эти качества достигаются еще и тем, что конструктивные системы живых организмов вплоть до молекулярного уровня имеют гетерогенную структурную организацию (табл. 1), а поглощаемые в процессе развития из внешней среды элементы в основном обладают низкими атомными массами.

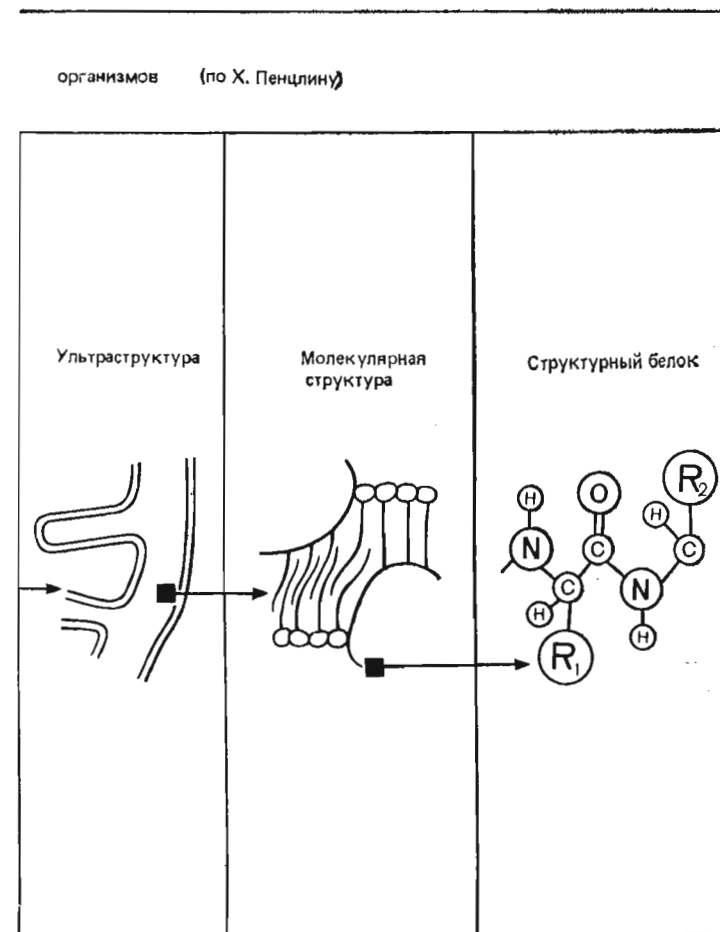
Следует сказать, что действию сил тяготения подвергаются организмы, развивающиеся на планетах других Галактик, так как природа этих сил одна и та же. Но предсказать конкретно, какие будут формы и структуры живых конструктивных систем, невозможно в силу отсутствия необходимой информации и, в первую очередь, о гравитационных полях этих планет. Однако всем живым организмам независимо от того, на какой планете они развиваются, из каких веществ и какие формы и структуры имеют конструктивные системы, присущи общие, так называемые функциональные свойства (А. Н. Колмогоров, Норберт Винер): способность извлекать из внешней среды вещества, богатые энергией; постоянное развитие, рост, движение; способность изменять химический состав при постоянстве форм и структур; наследственная передача форм и структур потомству; способность к самовоспроизводству, к самосохранению и обучению. Именно эти свойства, а также высокая структурная сложность живых систем, отличают их от неживых статических систем с фиксированными конструкциями.

Живые организмы со своими динамическими конструкциями представляют собой гетерогенные открытые системы

Таблица 1. Основные ступени структурирования

Род организмов	Структурная организация живых		
Автотрофные	Строение ткани листа	Строение клетки	Строение клеточной органеллы
Гетеротрофные	Строение кожи	Строение клетки	

[14, 24]. Постоянство конструктивных форм и структур в этих системах поддерживается только за счет непрерывных затрат энергии и обмена веществ (метаболизма). В процессе обмена веществ одновременно происходит синтез и разрушение составляющих элементов живых конструктивных систем. Энергия, необходимая для поддержания сложного состояния живых конструкций, а также для выполнения функций организма, доставляется прежде всего высокоэнергетическими соединениями в форме аденозинтрифосфата (АТФ). Эти соединения получают энергию в процессе расщепления органиче-



ских веществ (диссимиляции). В свою очередь, органические вещества, используемые для получения энергии и для образования живых конструкций в процессе роста организма, получают за счет ассимиляции. Таким образом, процессы обмена вещества и энергии определяются ассимиляцией и диссимиляцией.

Основное отличие живых конструктивных систем от неживых состоит в том, что первые строятся, ремонтируются, регулируют и поддерживают рабочее состояние сами. И во всех этих процессах участвуют всего четыре класса органиче-

ских веществ: белки, нуклеиновые кислоты, углеводы и липиды. И только в случае отсутствия подачи энергии, когда прекращается обмен веществ, конструктивные системы начинают разрушаться.

1.2. ДИНАМИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИВЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ

Первоначальная организация и последующее сохранение форм, структур живых конструктивных систем, в первую очередь, тесно связаны с основными функциями последних. Конечно, существующая зависимость между формой, структурой и функцией характерна и для искусственных конструкций. Глубокое исследование строения живых организмов позволило установить, что в них заложен принцип сохранения форм и структур через их функции. Вне функций они существовать не могут. Формы и структуры живых организмов нестабильны, они постоянно разрушаются и строятся заново. Такое динамическое состояние живых конструктивных систем определяется не только формами и структурами в фиксированный момент времени, а прежде всего протекающими в них процессами, исходя из их функций.

Следует отметить, что биологические конструктивные системы в отличие от искусственных за счет непрерывного обновления не изнашиваются. Искусственные системы обладают статическими формами и структурами, тогда как живые конструктивные системы даже на молекулярном уровне имеют динамическую структуру. Если форма, структура и масса искусственных конструктивных систем в определенных временных границах относительно постоянны, то о биологических конструктивных системах этого сказать нельзя. В последних происходит непрерывное разрушение и восстановление динамических форм и структур. Их относительно постоянная видимость определяется тем, что происходит точная компенсация процесса распада процессом обновления. При любом даже незначительном изменении процессов распада и обновления формы и структуры могут принимать другой вид или может произойти их разрушение.

Таким образом, динамические формы и структуры в отличие от статических обуславливаются синхронными процессами разрушения и восстановления, т. е. находятся в состоянии постоянного динамического равновесия [24]. Динамические формы равновесия проявляются на всех уровнях организации живых конструктивных систем и в течение всего времени их функционирования (см. табл. 1). Это позволяет живым конструктивным системам свободно перестраивать свои формы и структуры в соответствии с новыми сложившимися условиями

внешней среды, чего любые технические системы не в состоянии сделать.

Условия динамического равновесия отражают постоянно изменяющееся состояние, при котором уравниваются разрушение и восстановление (синтез). Эти противоположные потоки можно записать в следующем виде:

$$U_{(12)} = U_{(21)}, \quad (1.1)$$

где $U_{(12)}$ и $U_{(21)}$ — величины, отражающие соответственно распад (сток) и синтез (приток) вещества в единицу времени.

Индексы «12» и «21» характеризуют направление потоков соответственно от 1 к 2 и от 2 к 1 (см. рис. 4).

Пусть поток $U_{(12)}$, отражающий распад вещества, пропорционален массе конструкции живой системы, тогда математически это можно представить так:

$$U_{(12)} = \eta m_1, \quad (1.2)$$

здесь η — биологическая константа, или константа обмена веществ, равная $1/\theta$ (θ — средняя продолжительность жизни вещества); m_1 — масса конструктивной системы, кг.

Произведение биологической константы η на массу конструктивной системы m_1 характеризует скорость движения потока (обмена веществ — масса/время). Если переменная величина массы в первой степени, то уравнение (1.2) является линейным. При наступлении равновесия потоков, т. е. когда $U_{(12)} = U_{(21)}$, масса живой конструктивной системы, которая является функцией времени, может быть представлена следующим образом:

$$m_{\text{равн}} = U_{(21)}/\eta. \quad (1.3)$$

Из уравнения (1.3) видно, что равновесная масса конструктивной системы $m_{\text{равн}}$ полностью определяется скоростью синтеза $U_{(21)}$ и константой обмена веществ. Биологическая конструктивная система при ее развитии постоянно стремится к одному и тому же конечному положению независимо от величины массы в начальный момент времени. И даже в случае выведения из состояния динамического равновесия внешними кратковременными воздействиями она через определенный промежуток времени вновь возвращается к своему устойчивому состоянию, для которого характерны определенная форма и структура конструкции и величина ее равновесной массы.

На рис. 5 наглядно показано, как независимо от исходной геометрии форм, структур, а также массы живая конструктивная система (на примере конструкции головки бедренной кости человека) в своем развитии стремится к состоянию динамического равновесия. При достижении этого состояния масса и геометрия конструкции становятся постоянными. По формуле (1.3) можно определить лишь равновесную массу, соответствующую конечному состоянию системы, хотя, как

61109

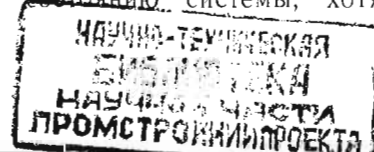
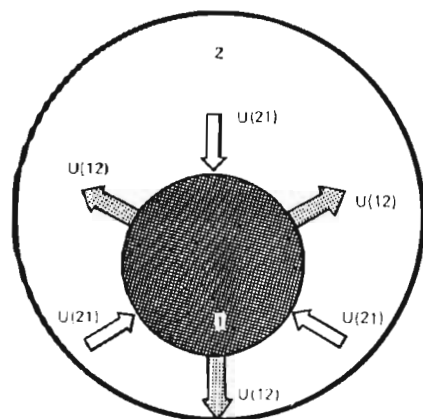
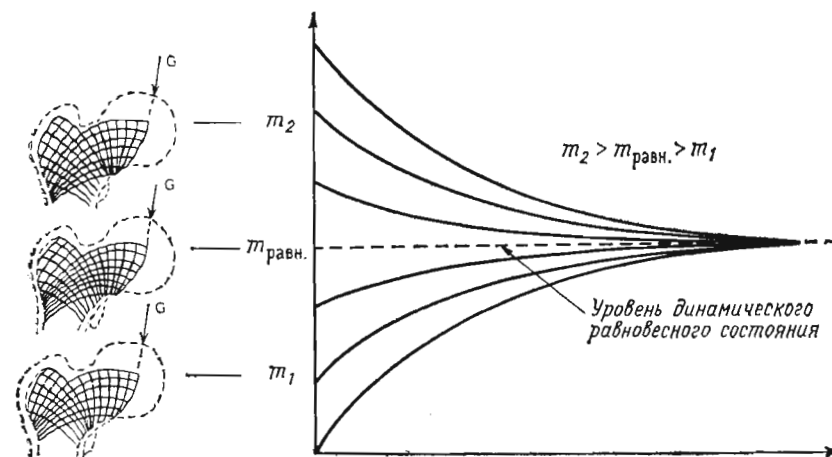


Рис. 4. Схема динамического равновесия (состояния) живой конструктивной системы



$U_{(12)}$ и $U_{(21)}$ — соответственно величины распада и синтеза вещества в единицу времени

Рис. 5. График движения к конечному динамическому равновесному состоянию живой конструктивной системы



видно из рис. 5, масса в зависимости от ее величины в начальный момент может меняться во времени (по оси абсцисс).

Обозначим бесконечно малую величину массы через dm , а бесконечно малый промежуток времени через dt и составим отношение дифференциалов dm/dt , которое будет отражать изменение массы во времени. Причем это изменение складывается, с одной стороны, из отрицательного изменения, связанного с распадом вещества $-\eta m$, а с другой стороны — из положительного, вызванного синтезом вещества. И тогда общее уравнение, описывающее изменение массы живой конструктивной системы во времени, будет иметь вид:

$$dm/dt = -\eta m + U_{(21)}. \quad (1.4)$$

При достижении конструктивной системой стационарного состояния динамического равновесия масса m принимает постоянное значение. В этом случае $dm/dt=0$, а уравнение (1.4) принимает вид:

$$-\eta m_{\text{равн}} + U_{(21)} = 0. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) вытекает зависимость, определяющая величину равновесной массы. Формула (1.4) представляет собой дифференциальное уравнение, а потому ее решение будет выражаться не числом, а функцией. Причем общее решение этого уравнения, получаемое при интегрировании, представляет собой бесконечное семейство независимых кривых тождественного вида. Они отражают характер развития живой конструктивной системы от заданного исходного состояния до стационарного динамического равновесия.

Представленные на рис. 5 кривые наглядно показывают возможные изменения массы в конструктивной системе в зависимости от начальных условий и представляют собой мно-

жество частных решений уравнения (1.3). И хотя кривизна их растет с увеличением массы m , в итоге все они стремятся к одному и тому же постоянному значению, к одной точке.

Такое стремление живых развивающихся конструктивных систем к одному конечному состоянию (к динамическому равновесию) и определяет их устойчивость. Состояние динамического равновесия есть не что иное, как процесс, мерой которого является период биологического полуобновления, т. е. время, в течение которого обновляется половина вещества. Если исходить из того, что количество вещества, заменяемого в единицу времени, пропорционально равновесной массе $m_{\text{равн}}$, то период биологического полуобновления может быть определен из дифференциального уравнения вида:

$$-dm/dt = \eta m. \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.6) является экспоненциальная функция:

$$m_t = m_{\text{равн}} e^{-\eta t}. \quad (1.7)$$

Здесь m_t — количество вещества (масса) в момент времени t .

Если теперь подставить в уравнение (1.7) вместо m_t соответственно $m_{\text{равн}}/2$, то получим алгебраическое выражение вида:

$$1/2 m_{\text{равн}} = m_{\text{равн}} e^{-\eta t_{1/2}}, \quad (1.8)$$

из которого можно определить период биологического полуобновления:

$$t_{1/2} = \ln 2 / \eta = 0,69310. \quad (1.9)$$

Скорость обновления определяется средней продолжительностью жизни вещества, из которого состоит живая конструкция.

Бионика — прямой продукт научно-технической революции, одно из самых типичных и ярких проявлений и следствий этой революции.

Академик Б. М. Кедров

Научно-технический прогресс способствует не только рождению новых инженерных систем, совершенно отличных от традиционных, но и появлению наук-«перекрестков» (астрофизики, геохимии, геофизики, биофизики и т. д.), которые возникают в результате синтеза, находящегося на стыке специальных наук: астрономии, физики, геологии, биологии, химии и т. д. Возникновение наук-перекрестков характерно для второй половины XX века.

Бионика также относится к наукам-перекресткам. Она возникла в результате синтеза такой науки, как БИОлогия, и практической отрасли научной деятельности человека — техники. Официальное рождение бионики состоялось на симпозиуме 13—15 сентября 1960 г. в г. Дайтоне, штат Огайо, США [61]. Эта наука занимается целенаправленным изучением организации и функционирования организмов живой природы с целью использования ее готовых решений при создании новых технических систем [3, 4]. Как всякая наука, бионика имеет свой предмет и метод.

В настоящее время бионика как многогранная наука подразделяется на ряд научных направлений: нейробионика, аэро- и гидробионика, биомеханика, биоэнергетика, молекулярная и химическая бионика и т. д. К одному из таких направлений относится и архитектурно-строительная бионика, основы которой впервые были сформулированы в СССР в 60—70-е годы в работах Ю. С. Лебедева, С. Б. Вознесенского, В. Г. Темнова, А. И. Лазарева и др.

Формирование архитектурно-строительной бионики происходит по двум неразрывно связанным между собой направлениям. Архитектурное направление (архитектурная бионика) широко представлено в работах архитектора Ю. С. Лебедева

и развито в работах А. И. Лазарева, Е. Д. Положай, А. М. Вартаняна, А. Д. Ярмоленко, Г. В. Брандт и др. [15].

Архитектурная бионика занимается проблемой систематического целенаправленного использования на научной основе законов и принципов формообразования, законов организации среды, архитектоники живых организмов и т. д., а также использования технических средств живой природы в архитектуре.

Строительное направление (строительная бионика) изучает строительное искусство природы, для которого характерно строение конструктивных систем организмов по принципу экономии материала, энергии и обеспечения надежности [43, 48]. Эти критериальные характеристики, определяющие глобальные условия устойчивого существования и развития организмов живой природы, начинают использоваться инженерами как в отечественной (Н. В. Никитин, С. Б. Вознесенский, В. Г. Темнов [36] и др.), так и в зарубежной практике проектирования и строительства (П. Нерви, С. Броун, Р. Риколле, Ф. Отто [25] и др.).

2.1. КОНЦЕПЦИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ БИОНИКИ

Предметом исследования строительной бионики являются как биологические системы, техническую сторону которых она рассматривает*, так и технические системы с присущими им природными характеристиками (прочность, легкость, способность накапливать максимальное количество упругой энергии не разрушаясь и т. д.).

Для научных исследований строительной бионики характерны два метода [43]:

непосредственное копирование решений природы, наблюдаемых на живых организмах в конкретный момент онтогенеза;

моделирование главных этапов развития и совершенствования конструкций, форм, структур организмов в филогенезе на основе открытых законов биологической эволюции научно-техническими средствами.

В строительной бионике выделяют три основных этапа научно-технических исследований, на каждом из которых решается своя задача. На первом этапе (биологическом) изучают организмы живой природы с целью выявления принципов, закономерностей, лежащих в основе строения и организа-

* Конструкции живых организмов и механизм приспособления их к изменениям внешней среды; строение биологического материала на всех уровнях организации, начиная с молекулярного и кончая организменным; технологию производства структур в процессе роста живых конструкций и т. д.

ции конструкций, форм, структур биологических материалов и т. д. На втором этапе (теоретическом) разрабатываются математические, физические модели бионических принципов на основе данных, полученных в результате исследований на первом этапе. На третьем этапе (техническом) осуществляется изготовление новых материалов, конструктивных систем, механизмов приспособления их к изменениям внешней среды и других технических устройств или совершенствование старых решений на основе бионических принципов, полученных в результате изучения биологических прототипов.

Следует отметить, что наибольшее развитие в строительной бионике получил пока конструктивный (вещественный) аспект. Это можно объяснить тем, что проблема создания материалов и проектирования конструкций тревожит умы инженеров начиная с античных времен. К настоящему времени эта проблема оказалась наиболее научно разработанной. Ей посвящены такие капитальные инженерные дисциплины, как сопротивление материалов, теория упругости, строительная механика, теория оптимального проектирования конструкций и др. [56, 58]. Фактически инженерно-математический аппарат, необходимый для анализа и выявления бионических принципов, лежащих в основе строения конструктивных систем живых организмов, во многом был уже подготовлен. Кроме того, производство современных материалов и элементов со сложными структурами [7, 30] с высокими физико-механическими показателями позволяет на основе бионических принципов, полученных в результате исследований биологических аналогов, создавать строительные конструкции нового типа [10, 40, 48].

До разработки теории оптимального проектирования конструкций инженерные поиски новых конструкций носили случайный характер, так как были основаны на опыте, интуиции и таланте инженеров. Теория оптимального проектирования конструкций позволила осуществлять направленный поиск [17, 38]. Однако следует сказать, что для каждого конкретного случая выбор оптимального варианта искомой конструкции и, соответственно, задача проектирования определяется необходимостью нахождения рационального решения, которое удовлетворяло бы, по крайней мере, таким основным, но при этом противоречивым требованиям, как эффективность, надежность, долговечность, технологичность, эстетическая выразительность, экономичность и ограничения на сроки проектирования и возведения, материальные ресурсы и т. д. Перечисленные требования определяют общность и целостность инженерного и архитектурного решений этой задачи проектирования. Однако стремление наиболее полно удовлетворить одному из этих требований приводит часто к невыполнению других. Обязательный комплексный учет всех основных требований обуславливает главную трудность проектирования, тем более, что

каждое из требований в своем конкретном выражении обнаруживает немалое число достаточно сложных деталей.

Даже в настоящее время проектировщики решают свои задачи, сводя их, как правило, к обеспечению двух основных требований — надежности и экономичности, что выражается в обеспечении минимальной массы, а соответственно, и стоимости несущих конструкций. Это связано прежде всего с тем, что каждый проектируемый объект имеет существенные индивидуальные особенности, в то время как методика проектирования должна быть достаточно общей. Кроме того, оптимизация конструкций в общем виде даже при выполнении отмеченных двух требований представляет собой многоэкстремальную задачу. Поиск глобального экстремума такой задачи затрудняется нелинейностью целевой функции, а главное, нелинейностью ограничений. Вот почему задача даже с несколькими десятками переменных может оказаться непосильной для мощных вычислительных машин.

В то же время бионические принципы, например такие, как траекториальное строение решеток конструкций, накопление упругой энергии в конструкциях (резильянс); плотная упаковка покрытий; гетерогенное размещение слоев материала в конструкциях и т. д., отражают закономерность развития конструктивных систем живых организмов во времени, исчисляемом миллионами лет эволюции и подверженных тем же гравитационным, атмосферным, магнитным воздействиям, что и конструкции, создаваемые человеком. Это позволяет видеть, в каком направлении следует искать оптимальные конструктивные решения технических систем, минуя ненужный поиск или перебор вариантов с использованием ЭВМ, экономя при этом время и средства.

2.2. ПРОЦЕСС ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕХНИКЕ И ЖИВОЙ ПРИРОДЕ

С каждым годом в строительной технике все большее применение получают пространственные конструкции типа куполов, сводов, оболочек, структурных плит, вантово-стержневых и мембранных покрытий и т. д. [20, 23]. Именно развитие производства высокопрочных сталей, дюралюминиевых и стеклопластиковых материалов, армоцемента, фибробетона, клееной древесины, многослойных панелей, гнутых металлических и пластмассовых профилей, а также внедрение в практику проектирования ЭВМ способствуют появлению и значительному распространению пространственных конструкций. Однако новые конструктивные решения зданий, использование новых материалов, углубление знаний о работе конструкций, использование ЭВМ требуют непрерывного совершенствования мето-

дов расчета строительных конструкций [6, 7, 33, 35]. Кроме того, с возникновением и развитием такой области прикладной математики, как математическое программирование, появилась возможность осуществлять на ЭВМ поиск оптимальных конструкций, т. е. решать задачи оптимизации, которые не всегда поддаются решению классическими методами дифференциального и вариационного исчисления [2, 5, 58].

Оптимизация конструктивных систем. По традиции конструкции, близкие к оптимальным, получали с помощью метода проб, основанного на опыте проектирования других подобных конструкций. Анализ нескольких проектов вблизи интуитивного оптимума приводил к ситуации, в которой можно было оценить их относительные достоинства и выбрать наилучший из них. Успех этого метода, очевидно, зависит от имеющегося опыта проектирования в отношении других подобных конструкций, он оправдывает себя в период постепенной эволюции конструкций, но не применим к революционным изменениям. Вот почему в последние годы резко увеличился интерес к более рациональным методам оптимального проектирования [32, 35, 58].

В теории оптимального проектирования рассматриваются комплексные ситуации, в которых скрещиваются отдельные критерии, выражающие требования к конструктивным системам. Причем эти требования противоречат друг другу, а потому при проектировании конструктивной системы необходимо учитывать каждое из них. В противном случае самая надежная конструктивная система может оказаться неэкономичной, а самая экономичная — ненадежной.

Как видно, для оценки эффективности конструктивной системы недостаточно выполнения одного из требований, предъявляемых к ней. Оптимизация технических систем состоит в том, чтобы найти такую конструкцию, которая, например, обеспечивая достаточно высокую надежность, требовала бы минимума затрат на ее изготовление и эксплуатацию, т. е. надо найти компромиссное решение [32]. Задачи, в которых надо оптимизировать, относятся к классу задач многокритериальной (векторной) оптимизации [17]. Их реализация в настоящее время сопряжена с большими математическими и вычислительными трудностями.

Однако следует отметить, что, хотя пространственные конструкции по сравнению с плоскостными имеют меньшую материалоемкость (на 12—15%), вместе с тем основная доля расходов приходится на материал и составляет 50—60 % от общей стоимости конструкции. Таким образом, одним из определяющих показателей качества оптимальных конструктивных систем типа плит, пластин, оболочек, куполов и т. д. остается минимум массы. Вот почему в этом направлении ведутся

большие экспериментально-теоретические исследования [11, 51].

Критерий минимума массы позволяет не только установить оптимальное количество материала, необходимого для изготовления конструкций, уменьшить массу, но и оценить, насколько близки или далеки от систем, оптимальных по массе, применяемые в настоящее время в практике строительства традиционные конструкции.

И все же задачи оптимизации конструктивных систем по массе, особенно при многих загрузениях, в силу их многоэкстремального характера и значительного числа параметров относятся к большим задачам нелинейного программирования. С ростом размерности задач возникают сложности математического характера, вызванные заполненностью, обусловленностью и обращением слабозаполненных матриц, с которыми приходится иметь дело в задачах оптимизации [28, 35]. Все это отрицательно сказывается на возможностях реализации, результатах вычислений, на времени счета конструктивных систем.

Оптимальность и изменчивость — основа биологического многообразия форм и структур. В живой природе возможности оптимизации конструкций несравненно шире, чем в технике. Она находит оптимальные формы, сечения элементов и структуры конструкций организмов через вариабельность и селекцию [13, 24]. При естественном отборе из большого количества различных конструктивных вариантов остаются только те организмы, которые выдержали борьбу за существование и отвечали сложившимся условиям. Особи, не приспособившиеся к изменившимся условиям, погибают. Изменения того или иного свойства у живого организма в том или ином направлении происходят постепенно в период его развития. Вот почему процесс оптимизации (структур, форм, конструкций) биологических систем в отличие от технических возможен лишь при медленном развитии живых организмов и при достаточно постоянных условиях окружающей среды, иначе оптимизация конструктивных систем организмов в живой природе просто немыслима. Следует также отметить, что постоянство форм и структур биологических систем обеспечивается за счет непрерывного их восстановления. В отличие от технических систем непрерывное функционирование является определяющим условием существования биологических систем.

Живая природа имеет дело с динамическими структурами конструктивных систем, которые в отличие от статических непрерывно разрушаются и снова восстанавливаются. Это позволяет живым организмам постоянно приспосабливаться, перестраивая свои конструкции в соответствии с изменившимися условиями. Постоянство таких структур заключается в том, что процессы распада и восстановления компенсируют

друг друга, т. е. система находится в динамическом равновесии. Достаточно лишь незначительно изменить граничные условия, направления и величину силовых воздействий, как биосистема начинает перестраиваться, принимая новую форму равновесия. При этом, как показали исследования [40, 46], формирование структур биологических конструкций происходит в соответствии с размещением их элементов по линиям (траекториям) силового поля с максимальными значениями напряжений (линии главных напряжений, линии скольжения, линии давления и т. д.). Элементы, расположенные по этим траекториям, получают большие воздействия от внешних сил и потому интенсивнее развиваются, а находящиеся на траекториях силового поля с минимальными значениями напряжений или вовсе не нагруженные получают слабые воздействия или совсем их не получают. В результате они приостанавливаются в росте и постепенно отмирают. Так происходит процесс материализации силового поля.

Этот основной принцип функционирования биологических систем реализуется на всех уровнях организации конструкций живых организмов [46, 49]. Масса этих конструкций определяется в зависимости от условий их закрепления, внешних нагрузок, предельных значений напряжений и модуля упругости биоматериала общими энергетическими затратами, связанными с метаболизмом. Чем меньше масса, тем меньше требуется энергетических затрат на ее постоянное обновление. В основе синтеза оптимальных биологических конструктивных систем лежат: с одной стороны, минимизация энергетических затрат, связанных с обменом веществ (метаболизмом), в непосредственной связи с которым находится минимум массы; с другой стороны — обеспечение устойчивого равновесного состояния, которое, как известно, определяется минимальным значением потенциальной энергии деформации.

Эти два фактора, выявленные при исследовании биологических конструктивных систем, становятся существенными, так как они позволяют перевести на математический язык процесс оптимизации их по массе [46].

2.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ

Конструкции живых организмов, исходя из условий их существования, так же как и строительные конструкции, являются достаточно прочными, жесткими и устойчивыми опорными системами, потому что они тоже противостоят гравитационным, атмосферным, гидродинамическим или другим воздействиям окружающей среды [36]. Однако в отличие от искусственных систем конструкции живых организмов по-

стоянно воссоздаются. Это связано с природой организации биологических систем, в которых заложен принцип постоянства структур, форм и конструкций через их функции.

В живых системах на всех уровнях биологической организации действует механизм обмена веществ, который определяется процессами разрушения и восстановления молекул. Эти процессы во времени точно компенсируют друг друга, в результате чего и обеспечивается неизменность конструктивных систем живых организмов.

Окончательные конструктивные решения (структуры, формы, конструкции) живые организмы приобрели в процессе эволюции в условиях борьбы за существование при непрерывной оптимизации массы конструктивных систем по отношению к внешним воздействиям и энергетическим затратам, связанных с обменом веществ. Таким образом, количественные показатели массы и энергозатрат являются основными критериями эффективности, которыми пользуется природа при создании оптимальных конструктивных систем живых организмов, причем энергозатраты находятся в непосредственной взаимосвязи с массой. Именно поэтому живая природа стремится строить свои конструктивные системы с наименьшей массой, обеспечивая достаточно высокую несущую способность. Принцип достижения максимального эффекта (статического, конструктивного, технологического и т. д.) при минимуме затрат материала и энергии прослеживается во всех конструктивных решениях биологических систем. Биологи оценивают эффективность конструктивных систем живых организмов по несущей способности — отношению веса скелета к весу тела (табл. 2). Это позволяет им также установить влияние сил гравитации на формирование структур, форм, конструкций живых организмов, находящихся в различных средах.

Воздействию тех же сил гравитации подвержены искусственные конструктивные системы, поэтому эффективность их по аналогии с конструкциями живых систем можно оценить следующим отношением:

$$\Phi = P/G, \quad (2.1)$$

где P — предельная нагрузка, выдерживаемая конструкцией; G — масса конструкции.

Такой критерий оценки конструкции позволяет наглядно видеть скрытые ее возможности и оценить, насколько она эффективна для восприятия нагрузок. Из формулы (2.1) также следует, что эффективность конструкции можно повысить либо за счет увеличения ее несущей способности, либо за счет уменьшения ее веса. Увеличить несущую способность можно, например, за счет использования высокопрочных материалов, а уменьшить вес — за счет применения оптимальных структур в конструктивных системах.

Таблица 2. Весовые характеристики скелета позвоночных животных

Виды среды обитания	Животные	Масса тела, кг	Отношение массы скелета к массе тела, %	Авторы
Вода	<i>Рыбы</i>			
	Форель севанская	0,3	7,1	Коржуев, 1956
	Сарган	0,4	6,4	Коржуев, Глазова, 1961
	Катран	5,0	6,9	Те же авторы
	Скат	0,9	7,0	» »
	Севрюга	6,0	7,7	» »
Вода и суша	<i>Амфибии</i>			
	Амблостома	0,015	10,3	Коржуев, Акато-ва, Зубина, 1959
	Аксолотль	0,025	5,6	Те же авторы
	Лягушка травяная	0,04	11,9	» »
Суша	<i>Рептилии</i>			
	Агама туркестанская	0,048	13,8	Коржуев, Круглова, Свиридова, 1957
	Степной удав	0,190	14,9	Те же авторы
	Черепашка степная	0,480	43,5	» » »
Суша, вода и воздух	<i>Птицы</i>			
	Цесарка	1,5	13,2	Коржуев, Корецкая, 1959
	Утка кряква	1,328	11,2	Те же авторы
	Утка пекинская	2,646	9,3	» »
	Крячка обыкновенная	0,102	17,9	» »
Суша	<i>Млекопитающие</i>			
	Человек	65,0	12,1	Коржуев, Корецкая, 1959
	Северный олень	70,5	13,4	Коржуев, Никольская, 1960
	Кролик	4,0	6,8	Кособутский, 1960
Воздух	Летучая мышь летопырь	0,006	17,2	Коржуев, Корецкая, 1959

Отто Фрей предлагает [25] оценивать эффективность конструкций с учетом связи между формой, усилием и массой по формулам:

$$bic = m/FS, \quad (2.2)$$

$$\lambda = S/\sqrt{F}, \quad (2.3)$$

где bic — отношение массы m конструкции к усилию F , действующему на расстоянии S ; λ — относительная стройность конструкции.

Массивные конструкции согласно формуле (2.2) имеют большие значения bic , а легкие конструкции — малые значения. Из формулы (2.3) следует, что с увеличением S растет стройность конструкции. Причем конструкции, подверженные сжатию и изгибу, при большой стройности λ имеют большую массу и, следовательно, большие значения bic . Предварительно определенные (теоретически и экспериментально) на ряде конструкций живой природы и созданных человеком на различных этапах развития техники в зависимости от изменения их формы, массы, применяемого материала, а также вида и места приложения нагрузок значения bic и λ позволили построить диаграмму, с помощью которой можно оценивать степень приближения конструкций к оптимальным по массе.

Примером рационального построения служат опорные системы живых организмов, о чем говорят процентные отношения массы скелета к массе тела, приведенные в табл. 2. Конкурировать по такому показателю с биологическими конструктивными системами в настоящее время могут лишь выполненные из металла стержневые структуры типа «МАрХИ», «Кисловодск», «Модуль», «Берлин» и т. д.

Исследования строения костей животных и человека [34, 40, 46] показали, что большой запас прочности достигается за счет особой структуры костной ткани, которая получена путем ее оптимизации в процессе эволюции. Структуры, обеспечивающие минимум массы конструкций, в настоящее время могут быть получены не только постепенным их совершенствованием в процессе проектирования, строительства и эксплуатации [51]. Современные методы математического программирования с использованием ЭВМ позволяют осуществлять направленный поиск (синтез) оптимальных структур [47, 58, 60].

Однако задача поиска оптимальной структуры для заданной конструктивной системы в силу невыпуклости функций, входящих в физические условия, относится к классу нелинейных многоэкстремальных задач математического программирования. Для решения этой задачи наиболее эффективным с точки зрения обнаружения глобального минимума среди многих локальных является предложенный в работе [47], в основе которого лежит пошаговое приближение к опти-

Таблица 3. Количество энергии, необходимое для производства 1 т материала (по Дж. Гордону, 1978)

Наименование материала	Энергозатраты, 10^4 Дж	Нефтяной эквивалент, т
Углеволокнистые композиты	4000	100
Титан	800	20
Алюминий	250	6
Сталь	60	1,5
Полиэтилен	45	1,1
Стекло	24	0,6
Кирпич	6	0,15
Бетон	4	0,1
Дерево (сосна, ель)	1	0,025

мальному значению теоретической массы и решение задач на каждом шаге методами безусловной минимизации.

В основе создания конструкций технических систем, так же как и биологических, лежат энергозатраты, необходимые для производства материалов, отдельных конструктивных элементов и самих конструкций в целом. Из таблиц можно видеть, как сильно разнятся значения энергозатрат, связанных с производством различных материалов, будь они представлены в абсолютных (табл. 3) или относительных величинах (табл. 4). Характеристики конструктивной эффективности материалов, выраженные в энергетических затратах, представлены в табл. 4.

Хотя данные, приведенные в табл. 3 и 4, в количественном отношении приближительны, так как подвержены постоянным изменениям, все же они достаточно наглядно отражают существующие соотношения между величинами энергозатрат, необходимых при производстве различных материалов. Именно эти соотношения показывают, что с точки зрения энергозатрат выгоднее изготавливать строительные конструкции из дерева, кирпича, бетона и даже стали, чем из таких материалов, поражающих своей легкостью и прочностью, как алюминий, титан или углеволокнистые композиты. Кроме того, из анализа данных табл. 3 и 4 следует, что энергозатраты могут быть использованы в качестве общего эквивалента (энергетического критерия), позволяющего оценить целесообразность конструкции. Последняя складывается из степени удовлетворения конструкции каждому из противоречащих друг другу требований: эффективности, надежности, материалоемкости, технологичности и даже эстетической выразительности, вызывающей необходимость в дополнительных затратах, и т. д.

Таблица 4. Конструктивная эффективность различных материалов (по Дж. Гордону, 1978)

Наименование материала	Энергия, необходимая для изготовления сжатой панели с заданной критической нагрузкой	Энергия, необходимая для обеспечения заданной жесткости конструкции в целом
Углеволокнистые композиты	17	17
Титан	9	13
Алюминий	2	4
Сталь	1	1
Кирпич	0,1	0,4
Бетон	0,05	0,3
Дерево	0,002	0,02

Использование энергетического критерия оценки целесообразности конструктивной системы позволяет агрегировать многие целевые функции, каждая из которых отражает свои критерии, в единую функцию и тем самым свести множество альтернатив к одной. Таким образом, задача многокритериальной (векторной) оптимизации конструктивной системы значительно упрощается в том случае, когда ее можно свести к задаче параметрической оптимизации по энергетическому критерию.

Итак, задана произвольная упругая пластинчато-стержневая система, имеющая k узлов, соединенных n элементами. Каждый конечный элемент представляет собой либо призматический стержень, либо прямоугольную пластину с заданными площадями поперечных сечений. Внешние силы, соответствующие различным случаям нагружений, приложены в узлах. Напряженно-деформированное состояние такой системы под действием произвольных внешних сил можно всегда установить, решив задачу статического расчета [35]. Зная параметры, характеризующие это исходное состояние, сформулируем в терминах математического программирования постановку задачи поиска оптимальной структуры пластинчато-стержневых систем:

$$\min(v, \lambda) \quad (2.4)$$

при ограничениях

$$0 + 0 + \tilde{m}\lambda \leq d^*; \quad (2.5)$$

$$0 + \{A\tilde{X}^{(i)}\} \eta^{(i)} + 0 = P^{(i)}; \quad (2.6)$$

$$0 + X^{(i)} \eta^{(i)} - [\sigma] \tilde{F}(\lambda) \leq 0; \quad (2.7)$$

$$0 - \eta^{(i)} + 0 \leq 0; \quad (2.8)$$

$$0 + 0 - \lambda \leq 0; \quad (2.9)$$

$$\{A^T \tilde{R}^{(j)}\} \mu^{(j)} - \{D \tilde{X}^{(j)}\} \eta^{(j)} / \lambda + 0 = 0; \quad (2.10)$$

$$\tilde{R}^{(j)} \mu^{(j)} + 0 + 0 \leq \Delta; \quad (2.11)$$

$$-\mu^{(j)} + 0 - 0 \leq 0. \quad (2.12)$$

Линейная форма (2.4) выражает энергозатраты, связанные с изготовлением пластинчато-стержневой конструкции. В ней $v = (v_1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_n)$ — n -мерный вектор коэффициентов энергозатрат для элементов с заданными площадями сечений. При этом

$$v_s = c_s \rho_s l_s \tilde{F}_s,$$

где c_s — суммарные энергозатраты, связанные с производством материала и изготовлением, на единицу массы элемента; ρ_s — плотность материала; l_s — длина; \tilde{F}_s — заданная площадь поперечного сечения элемента S ; λ — искомый n -мерный вектор параметров корректировки площадей поперечных сечений элементов.

Линейное неравенство (2.5) представляет собой ограничения на массу конструктивной системы, где $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_s, \dots, \tilde{m}_n)$ — n -мерный вектор коэффициентов массы для элементов с заданными площадями сечений, $\tilde{m}_s = \rho_s l_s \tilde{F}_s$, а d^* — фиксированное значение массы конструктивной системы. Линейные равенства (2.6) выражают условия статического равновесия конструктивной системы, где $\tilde{X}^{(j)}$ — вектор усилий в n конечных элементах от j -го нагружения, полученный в результате статического расчета; A — матрица условий статического равновесия; $\eta^{(j)}$ — вектор параметров корректировки усилий в n конечных элементах; $P^{(j)}$ — заданный вектор внешних сил. Линейные неравенства (2.7) представляют собой условия прочности и устойчивости, где $[\sigma]$ — матрица предельных значений напряжений; $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_s, \dots, \tilde{F}_n)$ — заданный n -мерный вектор площадей поперечных сечений элементов. Неравенства (2.8), (2.9) и (2.12) есть условия неотрицательности. Нелинейные равенства (2.10) выражают физические условия (закон Гука) и условия совместности деформаций, где $\tilde{R}^{(j)}$ — вектор узловых перемещений упругой системы от j -го нагружения, полученный в результате статического расчета; $\mu^{(j)}$ — вектор параметров корректировки узловых перемещений; D — квазидиагональная (диагональная) матрица податливости конечных элементов. Неравенства (2.11) представляют условия жесткости, где Δ — вектор допустимых значений узловых перемещений. Сформулированная задача оптимизации относится к нелинейным многоэкстремальным задачам математического программирования.

В результате решения задачи (2.4) — (2.12) можно будет всегда получить оптимальный компромисс в отношении следующих частных критериев: энергозатрат, материалоемкости, надежности, технологичности производства материала и изготовления элементов.

СИНТЕЗ ИСКУССТВЕННЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ



Стремление к оптимизации — врожденная человеческая склонность.

Я. Дидрих

Первоначально архитекторы и инженеры уделяли внимание решеткам стержневых конструкций лишь с точки зрения их геометрического построения. При дальнейшем варьировании рисунка решеток заметили, что при этом меняется не только характер структур стержневых конструкций, но также их прочность, жесткость и материалоемкость. Кроме того, выявилось, что одни и те же конструкции, например регулярно-стержневые плиты, могут иметь целый класс решеток. Это открыло неограниченные возможности выбора новых современных конструкций. Задача стала сводиться к поиску стержневых конструкций с такими решетками, которые бы наиболее полно отвечали технико-экономическим и эстетическим требованиям.

Вот почему в последние годы проявился большой интерес к регулярным структурам. Было построено большое количество пространственно-стержневых конструкций как у нас в стране, так и за рубежом [22, 51]. Распространению пространственно-стержневых систем в строительстве также способствовало создание новых высокопрочных материалов. Были разработаны новые конструкции типа регулярно-стержневых плит, структурных сводов, сетчатых оболочек, башенных мачт, опор, радиотелескопов и т. д. [10, 20]. Причем решетки этих конструкций имели самые различные очертания и были образованы тетраэдрами, октаэдрами, четырех- и шестиугольными пирамидами и другими многогранниками.

Развитие электронно-вычислительной техники дало толчок к еще большему распространению пространственно-стержневых конструкций, так как возникла возможность делать расчет, более полно отвечающий действительной работе конструкций [52], и осуществлять машинный перебор конструкций, набираемых из различных многогранников. Интерес к структурам стерж-

невых систем особенно усилился с появлением и развитием такой прикладной науки, как математическое программирование, методы которого разрешают вести направленный поиск оптимальных структур, а не заниматься бесконечным перебором вариантов. Методы математического программирования с помощью ЭВМ позволили успешно решить задачу синтеза оптимальной конфигурации упругих стержневых систем в случае одного нагружения на дискретизированном поле узлов [18, 35]. Эти методы дают возможность также находить оптимальную ориентировку стержней в структуре при одном нагружении. Оптимальными в этом случае, так же как и у живых организмов, являются траекториальные структуры.

Однако в общем случае при дискретизированном расположении узлов различным внешним нагрузкам соответствуют различные структуры минимального объема, и потому конструкция, оптимальная в отношении одной нагрузки, может оказаться неоптимальной в отношении другой [38]. Для проектирования же наибольший интерес представляют именно задачи синтеза оптимальной конфигурации упругих стержневых систем в случае многих нагружений.

3.1. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Задача синтеза оптимальной конфигурации шарнирно-стержневых систем в случае одного и многих нагружений в силу многоэкстремальности и значительного числа параметров относится к разряду больших и сложных задач. Ее математическая модель имеет вид:

$$f(F) = (\gamma l, F) \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

при следующих ограничениях.

$$AS^{(i)} = P^{(i)} \quad (3.2)$$

$$-\sigma^{(+)}F + S^{(i)} \leq 0; \quad (3.3)$$

$$-\sigma^{(-)}F - S^{(i)} \leq 0; \quad (3.4)$$

$$A^T N^{(i)} - DS^{(i)} = 0; \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} N^{(i)} &\leq \Delta^{(+)} \\ -N^{(i)} &\leq \Delta^{(-)} \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, h; \quad (3.6)$$

$$-F \leq 0. \quad (3.7)$$

Здесь целевая функция (3.1) выражает теоретическую массу конструкции; γ — объемный вес материала; l — вектор длин стержней; F — вектор площадей поперечных сечений стержней.

Равенство (3.2) представляет собой условия равновесия (A — матрица условий равновесия; S — вектор усилий, возникающих от нагружений $P^{(i)}$). Неравенства (3.3), (3.4) представ-

ляют условия прочности и устойчивости ($\sigma^{(+)}$, $\sigma^{(-)}$ — соответственно векторы предельных значений напряжений).

Условия совместности деформаций и физические условия представлены равенствами (3.5), где N — вектор перемещений узлов стержневой системы, вызванных нагружениями $P^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, h$; D — матрица податливости системы. Неравенства (3.6) есть ограничения на перемещения узлов. Неравенство (3.7) выражает условие неотрицательности. Целевая функция (3.1) и часть ограничений (3.2) — (3.7) линейны при заданной сетке и нелинейны при заданной области расположения узлов.

По своей постановке задача синтеза оптимальной конфигурации шарнирно-стержневых систем отвечает общей задаче нелинейного программирования [12, 28] вида

$$\min f(s) \quad (3.8)$$

при ограничениях:

$$\varphi_i(s) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 \leq k; \quad (3.9)$$

$$\Psi_i(s) \leq b_i, \quad i = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k; \quad (3.10)$$

$$s_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n. \quad (3.11)$$

Содержание метода поиска глобального решения этой задачи состоит в следующем [47]. Условная экстремальная задача вида (3.8) — (3.11) решается одним из методов вычислительной математики [27, 28]. Полученное решение в общем случае отвечает одному из локальных минимумов целевой функции (3.8), определенной на множестве (3.9) — (3.11). Далее значение функции (3.8) уменьшается, фиксируется некоторое d^* и после этого снова решается задача нелинейного программирования с прежней целевой функцией (3.8) на множестве (3.9) — (3.11) с дополнительным ограничением вида:

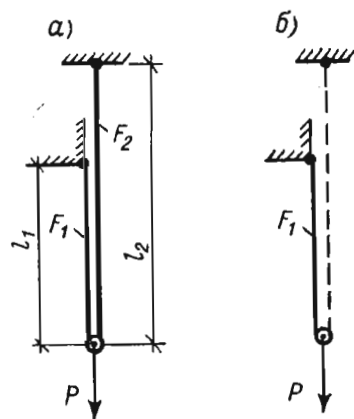
$$f_{j0}(s) \leq d^*. \quad (3.12)$$

Полученное решение отвечает одному из локальных минимумов функции (3.8), областью определения которой является уже множество (3.9) — (3.12). Новое значение функции (3.8) уменьшается, фиксируется d^{**} и подставляется в неравенство (3.12) вместо прежнего d^* . После этого снова решается задача (3.8) — (3.12).

Таким образом, на каждом этапе дополнительное ограничение вида (3.12) сужает область определения целевой функции, что уменьшает число локальных минимумов, и тем самым упрощается поиск глобального экстремума. Дополнительное ограничение (3.12) можно вводить в математическую модель (3.8) — (3.11) и на первом этапе. Решение заканчивается тогда, когда значение целевой функции совпадает со значением d^* ограничения (3.12). В случае сведения условной экстремальной задачи синтеза оптимальной конфигурации упругих шарнирно-стержневых систем вида (3.1) — (3.12) к безусловной для решения возможно использовать не только методы математиче-

Рис. 6. Шарнирно-стержневая система из двух стержней

а — конфигурация исходная;
б — то же, оптимальная



ского программирования (сопряженных градиентов, переменной метрики, метод Ньютона и т. д.), но и классические методы анализа.

Покажем на простейшей стержневой системе геометрический смысл задачи синтеза оптимальной конфигурации упругих шарнирно-стержневых систем. Имеем систему из двух стержней (рис. 6), которая загружена внешней силой $P=1$ кН. Под действием этой нагрузки в стержнях возникают только растягивающие усилия. F_1, F_2 — неизвестные площади сечений; N — неизвестное перемещение узла стержневой системы: $l_1=100$ см, $l_2=200$ см — длины стержней; $E_1=E_2=E=10^3$ МПа — модуль упругости материала; $\delta_1^{(+)}=2$ см, $\delta_2^{(+)}=4$ см — допустимые предельные деформации стержней; $R=20$ МПа — расчетное сопротивление материала растянутых стержней.

Если за критерий оптимальности принять массу (объем) материала, то задача синтеза оптимальной конфигурации (3.1) — (3.7) для двустержневой системы в случае одного нагружения примет вид

$$f(F) = 100F_1 + 200F_2 \rightarrow \min \quad (3.13)$$

при следующих ограничениях:

$$F_1 \cdot N + 0,5F_2 \cdot N = 1; \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot N &\leq 2; \\ 1 \cdot N &\leq 4; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

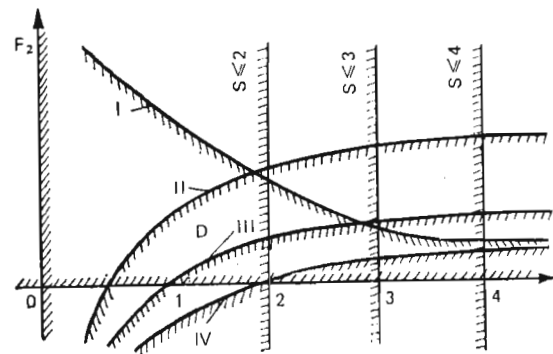
$$\left. \begin{aligned} N &\leq 3; \\ -N &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\geq 0; \\ F_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Рис. 7. Геометрическая интерпретация задачи синтеза оптимальной конфигурации двухстержневой системы

I — $(1/S - 1/2F_2 \geq 0)$;
II — $(100/S + 150F_2 \leq 200)$;
III — $(100/S + 150F_2 \leq 100)$;
IV — $(100/S + 150F_2 \leq 50)$.

Примечание. Здесь S соответствуют перемещениям N



Целевая функция (3.13) выражает объем материала, идущего на изготовление конструкции; равенство (3.14) представляет собой уравнение равновесия, выраженное через перемещение узла, — условие совместности деформаций и физическое условие входят в равенство (3.14); неравенства (3.15) выражают условия прочности и устойчивости; неравенства (3.16) есть ограничения на перемещение узла стержневой системы; неравенства (3.17) — ограничения на знак.

После введения дополнительного ограничения типа (3.12) $(100F_1 + 200F_2) \leq d$ и соответствующего преобразования задача принимает следующий вид:

$$\Psi(N, F) = 100/N + 150F_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot N &\leq 2; \\ 1 \cdot N &\leq 4; \\ N &\leq 3; \\ -N &\leq 0; \\ 100/N + 150F_2 &\leq d; \\ 1/N - 0,5F_2 &\geq 0; \\ F_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

С введением дополнительного ограничения область допустимых решений D уменьшилась (рис. 7). И чем меньше значение d , тем более сужается область определения целевой функции $\Psi(N, F)$. При $d=50$ см³ область вырождается в точку ($F_2=0$, $N=2$ см), которая является оптимальным решением. Значение целевой функции в этом случае совпадает со значением $d=50$ см³.

3.2. СТРУКТУРНЫЕ АНАЛОГИ КОНСТРУКЦИИ С УПРУГИМ ПОВЕДЕНИЕМ МАТЕРИАЛА

Вопросу расчета континуальных систем по дискретным схемам с использованием алгоритмов, разработанных для стержневых систем, посвящено много работ [16, 55]. Дискретизация осуществляется как математическими, так и механическими средствами. Однако в этих исследованиях модель стержневой системы рассматривается лишь с позиции соответствия ее континуальной по статической работе. Причем одному и тому же континуальному объекту может быть поставлен в соответствие не один, а множество дискретных вариантов. Отсюда вытекает, что такая дискретная модель представляет собой лишь статический эквивалент и никак не отражает физическую сторону континуального объекта. Однако на основе математических методов оптимизации континуальные системы можно моделировать как стержневые не только с позиции соответствия по статической работе, но и по равенству масс.

Такая аппроксимация континуальных систем позволяет отразить характер их структур. На основе дискретного аналога можно получить картину напряженно-деформированного состояния континуального объекта, а также осуществлять анализ и прогноз его жесткостных характеристик за счет варьирования решеткой структуры.

Математическая модель задачи строится в соответствии со схемой согласования континуального объекта с дискретной системой. Имеется некоторый континуальный объект (пластина, оболочка, массив), для которого заданы граничные условия, силовые воздействия и значение массы. Известны также перемещения узлов, вызванные действием внешних сил и определенные экспериментально или современными численными методами расчета [29, 33]. На основании методов математической оптимизации выявляется дискретный аналог, представляющий собой стержневую систему с той же массой и с теми же внешними силовыми воздействиями и граничными условиями, что и для континуума. При этом выполняются условия как статического равновесия, неразрывности деформаций, так и физические.

Следует отметить, что возможна дальнейшая оптимизация структуры полученного дискретного аналога методами математического программирования [27]. Это позволяет, пользуясь стержневой моделью, не только выявить скрытые возможности континуального объекта, такие как снижение массы его при сохранении прочности и жесткости, но и проследить, как зависят физические свойства материала (модуль упругости E , коэффициент Пуассона μ) от его структуры.

Согласно схеме согласования математическая модель задачи в векторно-матричной форме будет иметь вид

$$\min E^0 \quad (3.18)$$

при следующих ограничениях:

$$(\gamma l, F) \leq m^*; \quad (3.19)$$

$$AS^{(i)} = P^{(i)}; \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} -R^{(+)}F + S^{(i)} &\leq 0; \\ -R^{(-)}F - S^{(i)} &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$\Delta l^{(i)}F - \frac{l}{E} S^{(i)} = 0; \quad (3.22)$$

$$A^T N^{(i)} - \Delta l^{(i)} = 0; \quad (3.23)$$

$$N^{(i)} \leq \delta^{(+)}; \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} -N^{(i)} &\leq \delta^{(-)}; \\ E &\geq 0; \quad F \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Линейная форма (3.18) выражает значение модуля упругости материала элементов стержневой конструкции. Неравенство (3.19) показывает, что масса стержневой системы не превосходит заданной массы континуального объекта, где γ — объемная масса материала; l — вектор длин стержней; F — вектор площадей сечений стержней. Равенство (3.20) представляет собой условия статического равновесия, где A — матрица условий равновесия; S — вектор усилий, возникающих от нагрузок $P^{(i)}$. Неравенства (3.21) выражают условия прочности и устойчивости, где $R^{(+)}$, $R^{(-)}$ — соответственно векторы значений расчетных сопротивлений материала на растяжение и сжатие. Физические условия представлены равенством (3.22), где Δl — вектор деформаций элементов, который определяется из условий совместности деформаций (3.23). Неравенства (3.24) выражают условия жесткости, где N — вектор перемещений узловых точек. Неравенства (3.25) — ограничения на знак, i — число нагружений.

Данная задача в силу невыпуклости физических условий представляет собой нелинейную невыпуклую задачу математического программирования. Для ее решения можно использовать метод поиска глобального экстремума, предложенный в работе [47].

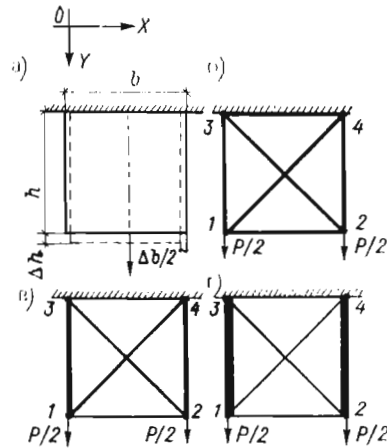
Математическая модель задачи (3.18) — (3.25) используется в следующих случаях:

когда необходимо найти дискретный аналог с такой структурой, при которой он отвечал бы заданному значению массы (объему материала) континуального объекта;

если надо получить структуру стержневого аналога с минимальным расходом материала.

Второй случай отличается от первого тем, что значение массы m является переменной величиной, которая подбирается итеративно. Для этого фиксируется некоторое m^* и решается задача (3.18) — (3.25). Если решение существует, то m следует уменьшить, если не существует, — увеличить. При этом реше-

Рис. 8. Моделирование континуальной системы дискретными аналогами
 a — исходная континуальная система (пластинка); b, σ , c — дискретные аналоги (стержневые системы)



ние очередной задачи используется как начальное приближение для следующей.

Проиллюстрируем моделирование континуальной системы дискретным аналогом на простом примере. Пластина постоянного сечения $F=1 \text{ см}^2$, заделанная верхним концом, испытывает растягивающее воздействие от нагрузки $P=21 \text{ кН}$ (рис. 8). Длина пластинки $h=1 \text{ см}$, ширина $b=1 \text{ см}$, модуль упругости материала $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Продольные и поперечные деформации составляют: $\Delta h=0,001 \text{ см}$, $\Delta b=0,0003 \text{ см}$. Расчетные сопротивления приняты соответственно: $R^{(+)}=310 \text{ МПа}$; $R^{(-)}=240 \text{ МПа}$.

Предварительно задается сетка узлов (рис. 8). Все узлы соединяются возможными стержнями ($l_{12}=1 \text{ см}$, $l_{14}=1,414 \text{ см}$, $l_{13}=1 \text{ см}$, $l_{23}=1,414 \text{ см}$, $l_{24}=1 \text{ см}$). К узлам 1, 2 прикладываются силы $P/2$. И далее из числа заданных стержней необходимо выбрать те, которые образуют статически допустимую конструкцию с объемом материала, равным объему исходной пластинки. При этом перемещения узлов 1 и 2 вдоль оси X составляют $N_{1,2}^x=\pm 0,00015 \text{ см}$, а вдоль оси Y — $N_{1,2}^y=0,001 \text{ см}$.

Математическая модель задачи (3.18) — (3.25) для принятой исходной стержневой системы в случае одного нагружения будет иметь вид

$$\min E^0 \quad (3.26)$$

при следующих ограничениях:

$$1 \cdot F_{12} + 1 \cdot F_{13} + 1,414 F_{14} + 1,414 F_{23} + 1 \cdot F_{24} = 1; \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot (-S_{12}) + 0 - 0,707 S_{14} + 0 + 0 &= 0; \\ 0 + 1 \cdot S_{13} + 0,707 S_{14} + 0 + 0 &= 10,50; \\ + 1 \cdot S_{12} + 0 + 0,707 S_{23} + 0 &= 0; \\ 0 + 0 + 0 + 0,707 S_{23} + 1 \cdot S_{24} &= 10,50; \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} -310,0 F_{12} + S_{12} &\leq 0; \\ -240,0 F_{12} - S_{12} &\leq 0; \\ \dots \dots \dots &\dots \\ -310,0 F_{24} + S_{24} &\leq 0; \\ -240,0 F_{24} - S_{24} &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_{12} \cdot F_{12} + 0 &+ 0 + 0 + 0 + 0 - (1/E^0) S_{12} + \\ 0 + \Delta l_{13} F_{13} &+ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \\ 0 + 0 &+ \Delta l_{14} F_{14} + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ 0 + 0 &+ 0 + \Delta l_{23} F_{23} + 0 + 0 + 0 + \\ 0 + 0 &+ 0 + 0 + \Delta l_{24} F_{24} + 0 + 0 + \\ + 0 &+ 0 + 0 + 0 + 0 = 0; \\ - (1/E^0) S_{13} &+ 0 + 0 + 0 + 0 = 0; \\ + 0 &- (1,414/E^0) S_{14} + 0 + 0 = 0; \\ + 0 &+ 0 - (1,414/E^0) S_{23} + 0 = 0; \\ + 0 &+ 0 + 0 - (1/E^0) S_{24} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \cdot N_1^x &+ 0 + 1 \cdot N_2^x + 0 = \Delta l_{12}; \\ 0 &+ 1 \cdot N_1^y + 0 + 0 = \Delta l_{13}; \\ -0,707 N_1^x &+ 0,707 N_1^y + 0 + 0 = \Delta l_{14}; \\ 0 &+ 0 + 0,707 N_2^x + 0,707 N_2^y = \Delta l_{23}; \\ 0 &+ 0 + 0 + 1 \cdot N_2^y = \Delta l_{24}; \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

$$\left\| \begin{matrix} N_1^x \\ N_1^y \\ N_2^x \\ N_2^y \end{matrix} \right\| \leq \left\| \begin{matrix} -1,5 \cdot 10^{-4} \\ -1 \cdot 10^{-3} \\ +1,5 \cdot 10^{-4} \\ -1 \cdot 10^{-3} \end{matrix} \right\| \quad (3.32)$$

$$E^0 \geq 0; \quad F_{12} \geq 0; \quad F_{13} \geq 0; \quad F_{14} \geq 0; \quad F_{23} \geq 0; \quad F_{24} \geq 0. \quad (3.33)$$

Покажем, как при перераспределении материала по элементам стержневой модели (рис. 8, б) меняется значение модуля упругости материала (E^0), идущего на ее изготовление. При этом величина объема остается постоянной.

Первоначально примем значения площадей сечений всех стержней одинаковыми, т. е. $F=V/(l_{12}+l_{13}+l_{14}+l_{23}+l_{24})=1/5,828=0,172 \text{ см}^2$. После этого, решив систему равенств и неравенств (3.28) — (3.33), получим $E^0=4,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Увеличим

площади сечений крайних стержней ($F_{13}=F_{24}=0,35 \text{ см}^2$) и уменьшив площади сечений остальных стержней ($F_{12}=F_{14}=F_{23}=0,076 \text{ см}^2$) при сохранении значения объема постоянным. Решив новую систему равенств и неравенств вида (3.28) — (3.33), получим $E^0=2,82 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Продолжим увеличение площадей сечений крайних стержней ($F_{13}=F_{14}=0,41 \text{ см}^2$) и уменьшение площадей сечений остальных ($F_{12}=F_{14}=F_{23}=0,047 \text{ см}^2$) при сохранении значения объема. В результате решения очередной системы равенств и неравенств вида (3.28) — (3.33) получим $E=2,47 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Как видим, значение модуля упругости материала стержней дискретного аналога уменьшается, но не бесконечно, а асимптотически приближается к значению модуля упругости материала пластинки. С уменьшением модуля упругости E корректируется структура стержневой модели и при E^0 , равном минимальному значению, получаем структуру, при которой устанавливается наибольшее соответствие между дискретным аналогом и непрерывным объектом при нагрузке $P=21 \text{ кН}$.

3.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО МАССЕ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ЗАМКНУТОГО ОБЪЕМА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОМБИНАЦИЯХ НАГРУЗОК

Широкое внедрение в практику строительства пластинчато-стержневых систем замкнутого объема, в частности блоков зданий контейнерного типа, требует непрерывного совершенствования методов их расчета и оптимизации. По характеру статической работы эти системы относятся к пространственным конструкциям, что делает их весьма перспективными с точки зрения минимального расхода материала. Использование методов математического программирования при их проектировании позволяет получать целый класс систем, оптимальных по массе. Но, как известно [32], наиболее эффективные методы оптимального проектирования конструкций разработаны лишь для случая одного нагружения.

Оптимизация конструкций по массе при многих нагружениях относится к числу проблем, требующих дальнейших исследований. Трудность реализации такой задачи заключена в ее многоэкстремальности и размерности, исчисляемой сотнями и тысячами неизвестных. Однако в процессе экспериментально-теоретических исследований объемных блоков зданий контейнерного типа установлено [42], что решающее воздействие на напряженно-деформированное состояние этих систем оказывают комбинация нагрузок преобладающего направления и наихудший тип опирания. Это позволяет заменить задачу оптимизации по массе пластинчато-стержневых систем замкнутого

объема на различные комбинации нагрузок задачей оптимизации на одну комбинацию нагрузок преобладающего направления при наихудшем типе опирания. Исходя из этих особенностей, можно осуществлять поиск оптимальных форм и оптимального распределения материала в пластинчато-стержневых системах замкнутого объема по нижеприведенной схеме.

На основе МКЭ (метода конечных элементов) проводятся теоретические исследования статической работы пластинчато-стержневых систем замкнутого объема на различные комбинации нагрузок при различных типах опирания и различных типах узловых сопряжений, после чего выявляется расчетная схема из числа рассмотренных, согласующаяся с действительной работой конструкции, установленной на основании экспериментальных исследований. Далее осуществляется декомпозиция конструкции или сложной системы на ряд подсистем с последующей заменой их стержневыми аналогами. Проводится анализ (оптимизация) стержневых подсистем по массе (расходу материала) методами оптимального проектирования. Используемая математическая модель и алгоритм оптимизации приведены в работах [37, 38]. После обратного перехода от стержневых аналогов с оптимальной конфигурацией решеток к пластинчато-стержневым подсистемам осуществляется синтез системы в целом.

Ниже представлены результаты поиска оптимальной формы и оптимального распределения материала по элементам конструкции объемного блока здания контейнерного типа.

Объемный блок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда ($9 \times 2,86 \times 2,63 \text{ м}$), представляет собой сложную пластинчато-стержневую систему, состоящую из внутреннего каркаса (деревянного), огражденного плоскими внешними слоями (тонкие неразрезные цементно-стружечные пластины). Исследования проводились по изложенной выше методике.

С помощью МКЭ был выполнен статический расчет заданной конструкции как пластинчато-стержневой системы (комбинированной) на ЭВМ по стандартной программе РАССУДОК. При этом рассматривалась статическая работа конструкции при действии снеговых, ветровых, эксплуатационных нагрузок и их комбинации при различных типах опирания и узловых сопряжений элементов.

Решающее воздействие на напряженно-деформированное состояние объемного блока оказали его опирание по четырем углам и следующая комбинация нагрузок: собственный вес, снеговая и эксплуатационная нагрузки. Было выявлено, что конструкция блока представляет собой ряд пластинчато-стержневых подсистем — верхняя, нижняя и боковые грани с шарнирным сопряжением между собой. Также установлено, что боковые и торцевые грани работают преимущественно в своей плоскости, а нижняя и верхняя грани — из плоскости, причем

работа последней не зависит от типов опирания объемного блока.

Согласно установленному характеру статической работы конструкции объемного блока как сложной системы была осуществлена корректная декомпозиция ее на ряд пластинчато-стержневых подсистем с последующей заменой их стержневыми аналогами (рис. 9). Декомпозиция системы позволила решить проблему размерности, сведя задачу оптимизации блока по массе в целом к задачам оптимизации отдельных подсистем.

Решались эти задачи методами безусловной минимизации в сочетании с методом сопряженных градиентов [35, 37] на комбинацию нагрузок преобладающего направления (случай одного нагружения) на ЭВМ по программе ПРОСС-1. На рис. 10 приведены результаты оптимизации стержневых аналогов. Зависимость показателей массы боковых панелей (W) от жесткостных характеристик перегородок EF/I показана на рис. 11.

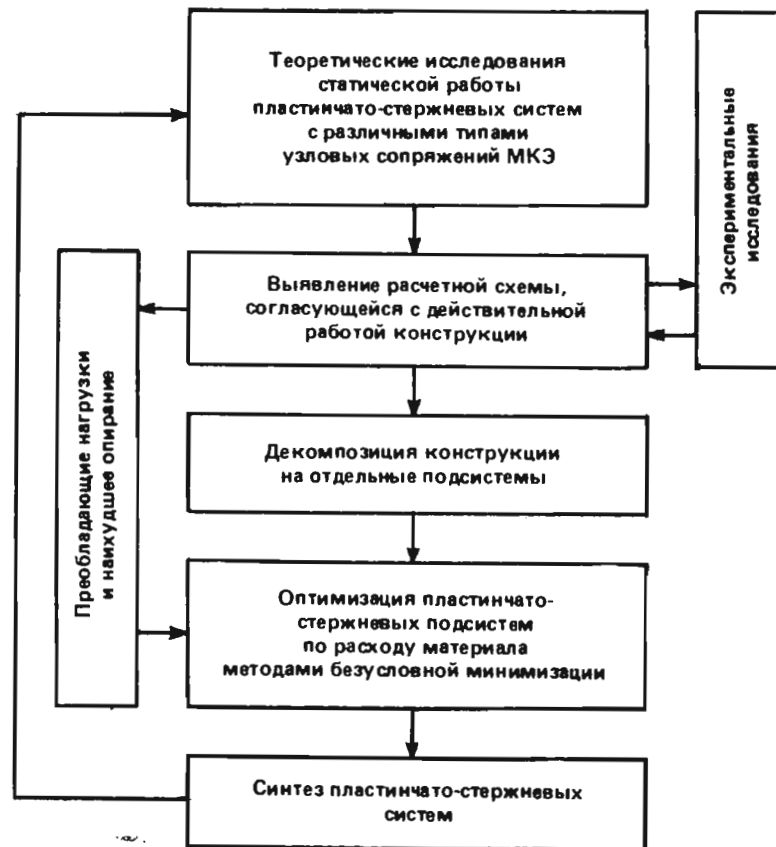
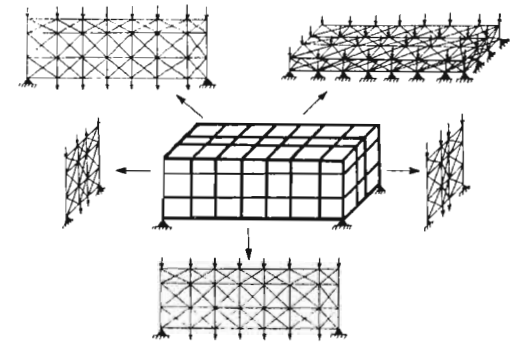


Рис. 9. Декомпозиция конструкции объемного блока на подсистемы



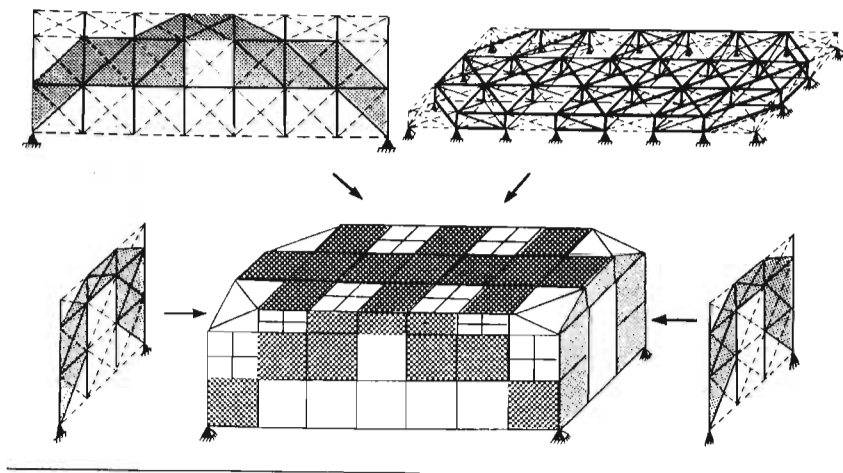
Блок-схема поиска оптимальных систем

Из графика видно, что перегородки, включаясь в работу, не только увеличивают жесткость объемного блока, но и способствуют уменьшению его массы.

Полученная в результате синтеза пластинчато-стержневая система новой формы с оптимальным распределением материала (см. рис. 10) была вновь просчитана методом конечных элементов в целях проверки напряженно-деформированного состояния и уточнения сечений элементов системы при различных комбинациях нагрузок и различных типах опирания. Результаты счета показали, что оптимальная пластинчато-стержневая система замкнутого объема для случая нагрузок преобладающего направления по прочностным и жесткостным параметрам удовлетворяла и другим комбинациям нагрузок.

3.4. ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГИХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ЗАМКНУТОГО ОБЪЕМА

Использование комбинированных (пластинчато-стержневых) систем замкнутого объема в практике современного строительства, несомненно, эффективно, так как они позволяют создавать оптимальные по массе конструкции, обладающие высокой прочностью и жесткостью. Однако решение большинства задач, связанных с оптимизацией упругих пластинчато-стержневых систем по массе, сводится в основном к поиску оптимального распределения толщин сплошных пластин [5] и почти совсем не затрагивает вопросы синтеза оптимальных структур пластинчатых элементов системы.



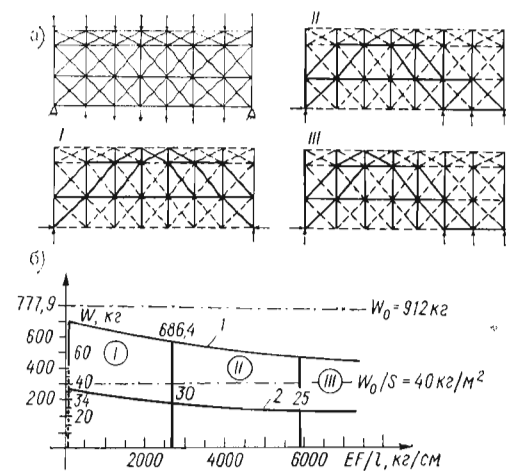
В исследовании задач минимизации упругих пластинчато-стержневых систем по массе с оптимальным распределением толщин сплошных пластин наметились два подхода [2].

При первом подходе используется математическое программирование. Для этого пластинчато-стержневую конструкцию, представляющую собой систему с распределенными параметрами, сначала разбивают на конечные элементы, а затем дискретный аналог подвергается оптимизации. Преимущество такого подхода состоит в том, что довольно сложные пластинчато-стержневые системы могут быть аппроксимированы с достаточной точностью дискретными аналогами и затем оптимизированы. Однако в этом случае, хотя и можно оптимизировать такие сложные конструкции, какими являются пластинчато-стержневые системы, все же число параметров обычно лимитируется из-за трудности решения задач большой размерности даже с использованием ЭВМ.

При другом подходе в задачах оптимального распределения толщин сплошных пластин поведение конструкций описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, непосредственное решение которых связано с большими трудностями. А потому чаще всего для реализации задач применяют численные методы, характерные для теории управления и требующие также дискретизации. Таким образом, и в этом случае приходится сталкиваться с проблемой реализации задач большой размерности. Упомянутые недостатки двух подходов ограничивают возможности поиска оптимального распределения толщин сплошных пластин в комбинированных системах замкнутого объема. С другой стороны, изготовление пластинчато-стержневых систем замкнутого объема с плавно изменяющейся поверхностью оптимального распределения толщин пластин возможно

Рис. 10. Оптимизация подсистем по расходу материала и синтез конструкции объемного блока — оптимальные конфигурации решеток верхней, торцевых и боковых граней

Рис. 11. Зависимость показателей массы боковых панелей от жесткостных характеристик перегородок
а — схема приложения нагрузок к боковой панели;
I—III — оптимальные конфигурации стержневого аналога боковой панели при заданных жесткостных характеристиках перегородок;
б — характеристика массы панели; I — оптимальное значение массы панели W (исходная масса панели $W_0=912$ кг); 2 — оптимальное значение массы 1 м^2 панели W/S (исходная масса 1 м^2 панели $W_0/S=40 \text{ кг/м}^2$)



лишь теоретически. Практически изготавливать такие системы можно лишь из определенного набора типоразмеров пластинчатых элементов, и тогда не избежать скачкообразного изменения толщин элементов, а следовательно, и резкой разницы деформаций в местах соединения элементов. Вот почему желательно количество типоразмеров пластинчатых элементов свести к минимуму. В результате этого пропадает смысл оптимального распределения толщин сплошных пластин, так как пластинчато-стержневая система будет набираться из пластинчатых элементов с толщиной, соответствующей наиболее напряженным местам. В этом случае наибольший интерес представляет поиск пластинчато-стержневых систем, минимальных по массе, за счет синтеза оптимальной структуры пластинчатых элементов, имеющих постоянную толщину.

В работах [11, 30] структуры с ячейками в виде треугольников, ромбов, шестиугольников, овалов и т. д. обычно задаются заранее, и только варьируются их геометрические параметры. По сути дела, ведется простой перебор вариантов, а не направленный поиск. Слабость такого подхода состоит в том, что выбор структуры с тем или иным типом ячейки зависит от имеющегося опыта проектировщика и носит случайный характер, так как неизвестно, насколько принятая структура пластинчатого элемента близка к оптимальной. Но, с другой стороны, сама структура пластинчатых элементов представляет собой большую стержневую систему, поэтому направленный поиск оптимальных вариантов из-за большого числа неизвестных параметров также представляет собой трудно реализуемую математическую задачу. Это ограничивает возможности направленного поиска оптимальных структур пластинчатых элементов.

В работе [42] синтез оптимальной структуры пластинчатых элементов комбинированных систем замкнутого объема осуществляется на основе МКЭ и метода безусловной минимизации в сочетании с методом сопряженных градиентов [35, 37]. Блок-схема синтеза оптимальной структуры пластинчатых элементов приведена ниже. Пластинчато-стержневую систему разбивают на конечные элементы, причем количество последних задают таким образом, чтобы, с одной стороны, получить приемлемые результаты, а с другой стороны — уменьшить вычислительные процессы. Для теоретического исследования статической работы пластинчато-стержневых систем предпочтительнее применять МКЭ в форме метода перемещений. В этом случае задача расчета сводится к решению уравнений равновесия вида:

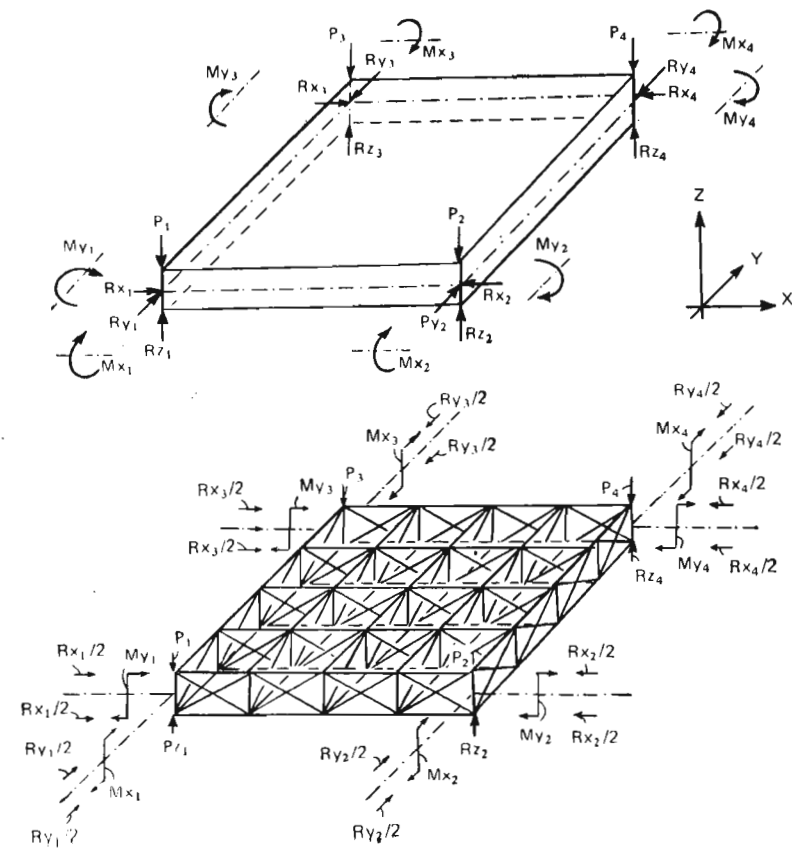
$$[B] \{N\} - \{P\} = 0, \quad (3.34)$$

где $[B]$ — матрица жесткости системы; $\{N\}$ — вектор перемещений; $\{P\}$ — вектор внешней нагрузки.



Это позволяет уменьшить размерность задачи, и, следовательно, сократить вычислительную работу. После получения картины напряженно-деформированного состояния пластинчато-стержневой системы в целом более напряженные конечные элементы (пластинчатые) аппроксимируются шарнирно-стержневыми аналогами с сохранением условий равновесия. Приложение сил к стержневому аналогу, которые эквивалентны внешним нагрузкам, действующим на элементы, и возникающим усилиям, показано на рис. 12.

Далее следует оптимизация по массе стержневого аналога (синтез структуры в случае одного нагружения). При формализации задачи синтеза оптимальной структуры упругой шарнирно-стержневой системы использовались в качестве ограничений равенства и неравенства, отражающие двойственный характер задачи математического программирования. Формализованная таким образом задача содержит дополнительную ин-



формацию (условие эквивалентности потенциальной энергии деформации работе внешних сил), которая позволяет получить устойчивое решение.

Запишем математическую модель задачи синтеза структуры стержневого аналога (m раз статически неопределимая шарнирно-стержневая система):

$$\min [(C(+), S(+)) + (C(-), S(-))] \quad (3.35)$$

при условиях:

$$0,5(W(+), S(+)) + 0,5(W(-), S(-)) - 0,5(P, N) = 0; \quad (3.36)$$

$$AS(+) - AS(-) = P; \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} A^T N &\leq W(+); \\ -A^T N &\leq W(-); \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$\left. \begin{aligned} N &\leq \Delta(+); \\ -N &\leq \Delta(-); \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} -S(+) &\leq 0; \\ -S(-) &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

где (3.35) — масса стержневого аналога; (3.36) — условие эквивалентности потенциальной энергии деформаций работе внешних сил; (3.37) — условие равновесия; (3.38) — условия совместности деформаций; (3.39) — условия жесткости; (3.40) — условия неотрицательности.

Здесь $S(+)$, $S(-)$ — искомые n -мерные векторы усилий соответственно в растянутых и сжатых стержнях; $C(+)$, $C(-)$ — заданные n -мерные векторы коэффициентов массы соответственно для растянутых и сжатых стержней; $W(+)$, $W(-)$ — n -мерные векторы продольных допускаемых деформаций соответственно при растяжении и сжатии; P — $(n-m)$ -мерный вектор внешних сил, эквивалентный внешним нагрузкам и усилиям, приходящимся на конечный элемент; N — искомый $(n-m)$ -мерный вектор перемещений узлов стержневого аналога; A — заданная $(n-m)n$ -мерная матрица условий статического равновесия стержневого аналога; $\Delta(+)$, $\Delta(-)$ — заданные $(n-m)$ -мерные векторы допустимых значений перемещений узлов стержневого аналога.

Задача (3.35) — (3.40) представляет собой задачу линейного программирования, которая в принципе может быть решена точными методами. К сожалению, основные трудности, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи синтеза структуры стержневого аналога этими методами, вызваны слабой заполненностью, обусловленностью и особенно — обращением слабозаполненных матриц. Все это ограничивает возможности решения задач большой размерности. Вследствие этого с целью исключения вышеуказанных причин, осложняющих реализацию задач большой размерности точными методами, условная задача синтеза оптимальной структуры пластинчатых элементов (3.35) — (3.40) по методике, изложенной в работе [37], сводится к эквивалентной безусловной экстремальной задаче вида:

$$\min [(C, X) + \lambda \|(DX - L)(+)\|^2] \quad (3.41)$$

и решается методом сопряженных градиентов [35].

Здесь

$$C = (C(+), C(-), 0); \quad X = \begin{pmatrix} S(+) \\ S(-) \\ N \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,5W(+) & 0,5W(-) & -0,5P \\ A & -A & 0 \\ 0 & 0 & A^T \\ 0 & 0 & -A^T \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ W(+) \\ W(-) \\ \Delta(+) \\ \Delta(-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

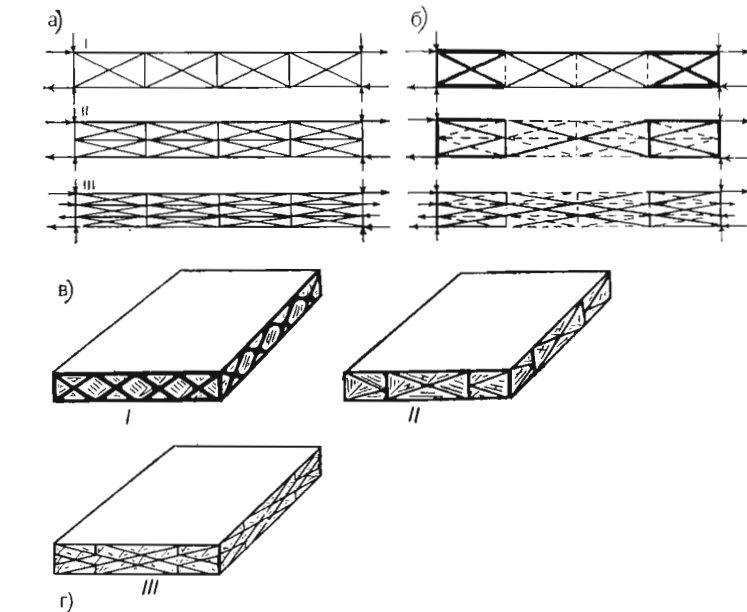


Рис. 13. Синтез оптимальной структуры наиболее напряженного элемента пластинчато-стержневой системы
а — исходные конфигурации стержневого аналога;
б — то же, оптимальные;
в — варианты конструктивных решений элементов; г — зависимость показателя массы элемента от частоты ячеек

Знак «+» означает, что $(DX - L) > 0$. При коэффициенте штрафа $\lambda \rightarrow \infty$ решение задачи (3.41) стремится к решению задачи (3.35) — (3.40). После синтеза оптимальной структуры проводится анализ результатов, корректируются модуль упругости и коэффициент Пуассона пластинчатых элементов. В целях проверки напряженно-деформированного состояния пластинчато-стержневой системы замкнутого объема с уточненными жесткостными характеристиками пластинчатых элементов она вновь просчитывается методом конечных элементов.

Выше представлены результаты синтеза оптимальной структуры наиболее напряженного элемента пластинчато-стержневой системы, рассмотренной в работе [42]. Оптимизация осуществлялась методом безусловной минимизации в сочетании с методом сопряженных градиентов по программе ПРОСС-1 на ЭВМ. Шарнирно-стержневой аналог имел постоянную высоту, но менялась частота разбивки решетки (рис. 13, а). Из поперечных разрезов видно, что с увеличением частоты разбивки решетки материал в основном концентрируется по периферии, а количество пустот растет к центру. Это вызвано тем, что при заданных условиях нагружения средняя часть стержневого аналога включается в работу незначительно. С увеличением частоты разбивки решетки масса стержневого аналога уменьшается, асимптотически приближаясь к предельному значению.

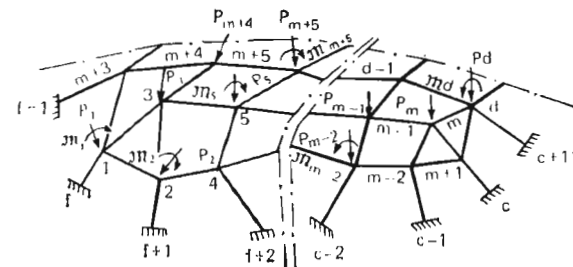
Оптимальные конфигурации поперечных разрезов приведены на рис. 13, б, зависимость весовых показателей от частоты разбивки элемента по высоте и варианты конструктивных решений — соответственно на рис. 13, г и 13, в.

3.5. ДИСКРЕТНЫЕ И ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО МАССЕ

Одним из определяющих показателей качества оптимальных конструкций типа сетчатых плит, оболочек, куполов пространственных рам и т. д. как больших стержневых систем является минимум массы. Он позволяет не только установить минимальное количество материала, необходимого для изготовления конструкций, снизить вес, но и оценить, насколько близки или далеки от оптимальных по массе стержневых систем применяемые в практике строительства традиционные конструкции.

Задачи оптимизации пространственных стержневых систем по массе при многих нагружениях в силу их многоэкстремального характера относятся к задачам нелинейного программирования. Поиск глобального экстремума затрудняется нелинейностью, невыпуклостью функций. Кроме того, с ростом размерности задач возникают сложности, вызванные заполненностью, обусловленностью, обращением слабозаполненных матриц,

Рис. 14. Упругая стержневая система, нагруженная произвольной системой сил



с которыми приходится иметь дело в задачах оптимизации. Все это отрицательно сказывается на возможностях реализации, на результатах вычислений, на времени счета стержневых систем. В связи с вышеуказанными трудностями, возникающими при решении задач оптимизации по массе дискретных и дискретизированных систем, предлагается осуществлять поиск оптимума исходной задачи на основе сочетания приемов декомпозиции методов безусловной минимизации и метода конечных элементов.

Оптимизация упругих стержневых систем. Пусть задана любая система узловых точек и произвольная система внешних сил. Необходимо из множества допустимых стержневых конструкций, т. е. конструкций, удовлетворяющих условиям состояния (равновесия, неразрывности деформаций, физическим условиям), условиям прочности, устойчивости и жесткости, выявить конструкцию с такой структурой и таким распределением материала по элементам, чтобы масса имела минимальное значение.

Задача 1. Рассмотрим произвольную упругую стержневую систему, имеющую k узлов, к t узлам которой приложена произвольная нагрузка (рис. 14). Разобьем стержневую систему на n элементов. И пусть каждый элемент представляет собой прямоугольный и призматический стержень. Заменим действие на него соседних частей соответствующими усилиями, т. е. к каждому концу приложим три составляющих внутренней силы и три составляющих внутреннего момента. Внешние силы приложены в узлах. Запишем математическую модель задачи оптимизации стержневой системы в общем виде:

$$\min (\omega, F) \quad (3.42)$$

при следующих ограничениях:

$$AX(i) = P(i); \quad (3.43)$$

$$X(i) - F[C] A^T W(i) = 0; \quad (3.44)$$

$$\left. \begin{aligned} X(i) - R\Psi(F) &\leq 0; \\ -X(i) - \varphi R\Psi(F) &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

$$\left. \begin{aligned} W(i) &\leq \Delta(+); \\ W(i) &\leq \Delta(-); \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

$$-F \leq d, \quad (3.47)$$

где (3.42) — теоретическая масса; (3.43) — условия равновесия; (3.44) — физические условия и условия совместности деформаций; (3.45) — приведенные условия прочности и устойчивости; (3.46) — условия жесткости; (3.47) — конструктивные ограничения.

Здесь X — искомый $(6n \times 1)$ -мерный вектор усилий; F — искомый n -мерный вектор площадей сечений; $\omega = (\gamma l)$ — заданный n -мерный вектор весовых коэффициентов (γ — объемный вес материала; l — длина элементов); P — заданный $(6k \times 1)$ -мерный вектор внешних нагрузок; A — $(6k \times 6n)$ -мерная матрица условий статического равновесия; $F[C] = (F_1[C]_1, F_2[C]_2, \dots, F_s[C]_s, \dots, F_n[C]_n)$ — квазидиагональная матрица жесткостей n элементов; матрица жесткостей s -го элемента:

$$F[C]_s = F_s \cdot \left(\begin{array}{cc} \frac{4E_s i_{xs}^2}{l_s} & -\frac{6E_s i_{xs}^2}{l_s^2} \\ -\frac{6E_s i_{xs}^2}{l_s^2} & \frac{12E_s i_{xs}^2}{l_s^3} \\ \frac{4E_s i_{ys}^2}{l_s} & -\frac{6E_s i_{ys}^2}{l_s^2} \\ -\frac{6E_s i_{ys}^2}{l_s^2} & \frac{12E_s i_{ys}^2}{l_s^3} \end{array} \right) \frac{E_s}{l_s} \frac{G_s}{l_s} (i_{xs}^2 + i_{ys}^2)$$

E — заданный n -мерный вектор значений модулей упругостей; G — заданный n -мерный вектор модулей сдвига; i — $2n$ -мерный вектор значений радиусов инерции поперечных сечений элементов; R — заданный n -мерный вектор расчетных сопротивлений материала элементов; φ — n -мерный вектор коэффициентов продольного изгиба; $j = 1, 2, \dots, h$ — число загрузок стержневой системы.

Функции $\Psi(F)$, входящие в неравенства (3.45), отражают зависимости моментов инерции, моментов сопротивления и статических моментов от искомых площадей сечений элементов.

Задача 2. Непосредственно из задачи 1 вытекает задача оптимизации стержневых систем (рам), подверженных лишь

изгибу, т. е. влияние сдвига и продольной деформации на перемещения не учитываются.

Математическая модель задачи в этом случае идентична (3.42) — (3.47). Но при этом уменьшается количество неизвестных усилий, перемещений и упрощаются равенства (3.44) и неравенства (3.45), а матрица жесткостей s -го элемента принимает более компактный вид:

$$F[C] = F_s \cdot \left(\begin{array}{cc} \frac{4E_s i_{xs}^2}{l_s} & -\frac{6E_s i_{xs}^2}{l_s^2} \\ -\frac{6E_s i_{xs}^2}{l_s^2} & \frac{12E_s i_{xs}^2}{l_s^3} \\ \frac{4E_s i_{ys}^2}{l_s} & -\frac{6E_s i_{ys}^2}{l_s^2} \\ -\frac{6E_s i_{ys}^2}{l_s^2} & \frac{12E_s i_{ys}^2}{l_s^3} \end{array} \right)$$

Задача 3. Рассмотрим влияние на перемещения лишь продольных деформаций элементов. В этом случае задача (3.42) — (3.47) вырождается в задачу оптимизации по массе пространственных ферм как больших шарнирно-стержневых систем.

Математические модели постановок таких задач и их реализация методами безусловной минимизации приведены в работах [27, 35, 37, 38]. Для решения сформулированных выше задач 1—3 можно успешно использовать подход, предложенный в работе [47], в основе которого лежит пошаговое приближение к оптимальному значению теоретической массы с решением задач на каждом шаге методами безусловной минимизации (комбинация методов штрафных функций и множителей Лагранжа).

Общий алгоритм решения. Модель решения задач 1—3 имеет следующий вид.

1. Условная экстремальная задача оптимизации стержневой системы вида (3.42) — (3.47) с помощью штрафных функций сводится к безусловной экстремальной задаче [37].

2. Приведенная задача оптимизации стержневой системы решается одним из методов безусловной минимизации, в частности методом сопряженных градиентов [35]. Полученное решение в общем случае отвечает одному из локальных минимумов целевой функции, определенной на множестве (3.43) — (3.47).

3. Значение целевой функции (3.42), полученное в результате решения задачи (3.42) — (3.47), уменьшается, фиксируется некоторое m^* .

4. Решается задача нелинейного программирования с прежней целевой функцией (3.42), но уже на множестве (3.43) — (3.47) с дополнительным ограничением вида

$$(\omega, F) \leq m^*. \quad (3.48)$$

5. Решение заканчивается после ряда шагов, когда значение целевой функции (3.42) совпадает со значением m^* ограничения (3.48). Этот алгоритм позволяет решать задачи 1—3 в самом общем виде, т. е. когда неизвестны усилия, узловые перемещения и площади сечения элементов стержневой системы.

Свернутый алгоритм решения. Если задаться значениями узловых перемещений стержневой системы, а усилия и площади сечений элементов считать неизвестными, то задачи 1—3 можно свести к задачам линейного или выпуклого программирования и, следовательно, упростить их реализацию. Модель решения этих задач в таком случае будет иметь следующий вид.

1. Предварительно задаются жесткостные характеристики элементов оптимизированной стержневой системы и выполняется статический расчет на принятое число загрузок.

2. Осуществляются математические преобразования задачи (3.42) — (3.47) в результате подстановки числовых значений узловых перемещений, полученных при статическом расчете стержневой системы.

3. Решается задача оптимизации по массе стержневой системы при заданных узловых перемещениях, которая после преобразования представляет собой задачу либо линейного, либо выпуклого программирования.

При таком подходе необходимо следить за тем, чтобы в преобразованной задаче количество неизвестных параметров было больше количества уравнений. Это вызвано тем, что с ростом числа загрузок стержневой системы число уравнений может быть больше числа неизвестных, т. е. уравнения становятся линейно зависимыми. И тогда задача оптимизации по массе стержневой системы для заданного числа загрузок теряет смысл. Чтобы этого избежать, необходимо увеличить количество элементов в исходной стержневой модели, т. е. расширить область допустимых решений задачи. Так, для шарнирно-стержневых систем минимальные соотношения элементов n в зависимости от количества узлов k и числа загрузок h определяются по формулам:

для плоских систем

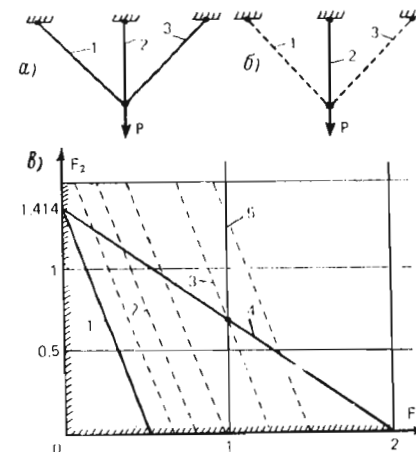
$$n = 2kh + 1, \quad (3.49)$$

для пространственных систем

$$n = 3kh + 1, \quad (3.50)$$

Рис. 15. Оптимизация по массе шарнирно-стержневой системы

а — исходная шарнирно-стержневая система из трех стержней;
б — оптимальная шарнирно-стержневая система, состоящая из одного стержня;
в — решение задачи оптимизации геометрическим методом;
1 — целевая функция $m = 3000$ г; 2 — то же, $m = 6000$ г; 3 — то же, $m = 7500$ г;
4 — ограничение $F_1 + 1,414F_2 = 2$;
5 — то же, $F_1 = 1$



Проиллюстрируем подход оптимизации по массе стержневых систем с использованием заданных перемещений на простом примере (рис. 15).

Задана шарнирно-стержневая система из трех стержней ($l_1 = l_3 = 300$ см, $l_2 = 212$ см). К узлу приложена сила $P = 21$ кН, под действием которой система испытывает растягивающее воздействие. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление материала $R = 210$ МПа. Необходимо найти оптимальную по массе стержневую систему.

Принимаем площади сечений исходной стержневой модели $\bar{F}_1 = \bar{F}_3 = 1$ см², $\bar{F}_2 = 0,707$ см². Масса m исходной стержневой системы при объемной массе $\gamma = 10$ г/см³ составляет 7500 г. Решаем задачу статического расчета и определяем вектор перемещений:

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,15 \end{pmatrix}.$$

Математическая модель задачи (3.42) — (3.47) для рассматриваемой стержневой системы в случае одного нагружения при заданных перемещениях узла примет вид

$$(\gamma, V) = \gamma(300F_1 + 212,1F_2 + 300F_3) \rightarrow \min \quad (3.51)$$

при следующих ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} -0,707X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,707X_3 &= 0; \\ -0,707X_1 - 1 \cdot X_2 - 0,707X_3 &= -21; \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0; \\ X_2 &= 0; \\ X_3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

$$\left. \begin{array}{lcl} X_1 & -210F_1 & \leq 0; \\ X_2 & -210F_2 & \leq 0; \\ X_3 & -210F_3 & \leq 0; \end{array} \right\} \quad (3.54)$$

$$\left. \begin{array}{lcl} & -F_1 & \leq 0; \\ & -F_2 & \leq 0; \\ & -F_3 & \leq 0. \end{array} \right\} \quad (3.55)$$

После соответствующего преобразования, учитывая, что $F_1 = F_3$ и $\gamma = 10$ г/см³, получим следующую математическую модель:

$$(6000F_1 + 2120F_2) \rightarrow \min \quad (3.56)$$

при ограничениях:

$$F_1 + 1,415F_2 = 2; \quad (3.57)$$

$$\left. \begin{array}{lcl} -F_1 & \leq 0; \\ & -F_2 \leq 0. \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

Задачу (3.51) — (3.58) решим графическим способом. На рис. 15, в показана область допустимых решений, представляющая собой прямую, ограниченную осями координат F_1 и F_2 . Целевая функция (3.56) принимает минимальное значение в точке с координатами $F_1 = 0$, $F_2 = 1,414$ см² и составляет $m = 3000$ г. Оптимальной является статически определимая система, состоящая из одного стержня (рис. 15, б).

Оптимизация упругих континуальных систем на основе стержневых аналогов. Минимизация по массе сплошных пластин, оболочек сложных форм и т. д. на основе дискретизации с применением методов математического программирования представляет собой один из основных подходов в исследовании задач оптимизации упругих континуальных систем [2]. Однако, хотя при таком подходе и можно оптимизировать практически любые континуальные системы, все же число параметров обычно лимитируется из-за трудности реализации задач большей размерности. Если же учесть, что задача оптимизации стержневого аналога в общем виде (3.42) — (3.47) представляет собой многоэкстремальную задачу, то возможности поиска оптимальных по массе континуальных систем при таком подходе еще более ограничиваются.

Чтобы решить задачу оптимизации по массе континуальных систем на основе стержневых аналогов, избежав вычислительных трудностей, возникающих при реализации, можно ее рассматривать не в общем виде, а как ряд задач, разных по постановкам, но с единой целью — минимизации массы. Рассмотрим три типа задач, наиболее распространенных в практике проектирования конструктивных систем.

Задача 1. Оптимальное распределение толщин континуальных систем на основе минимизации по массе стержневых аналогов с использованием приема декомпозиции, сочетающего минимизацию по массе стержневой системы в целом с последующей локальной минимизацией по массе отдельных ее подсистем.

Задача 2. Синтез оптимальных структур пластинчатых элементов континуальных систем при постоянных толщинах.

Задача 3. Оптимальное распределение толщин континуальных систем при фиксированных значениях узловых перемещений пластинчатых элементов.

Так как оптимизация по массе континуальных систем осуществляется на основе стержневых аналогов, то во всех трех задачах используется общая математическая модель (3.42) — (3.47) с соответствующими преобразованиями.

Алгоритмы решения задачи 1. Модель решения задачи имеет следующий вид:

1. Исходная континуальная система аппроксимируется стержневой системой (стержневым аналогом). При этом частота разбивки решетки стержневого аналога назначается таким образом, чтобы, с одной стороны, получить приемлемые результаты, а с другой — уменьшить вычислительные процессы.

2. Условная экстремальная задача оптимизации стержневой системы вида (3.42) — (3.47) с помощью штрафных функций сводится к безусловной экстремальной задаче [37].

3. Приведенная задача оптимизации стержневой системы решается методами безусловной минимизации [28, 35], проводится анализ и выявляются напряженные подсистемы.

4. После оптимизации стержневой системы в целом {1} осуществляется локальная минимизация по массе отдельных ее подсистем методами безусловной минимизации в последовательности {2, 3, 4, 5} (рис. 16).

5. Проводится анализ стержневых подсистем с оптимальной конфигурацией решеток и осуществляется синтез стержневой системы в целом.

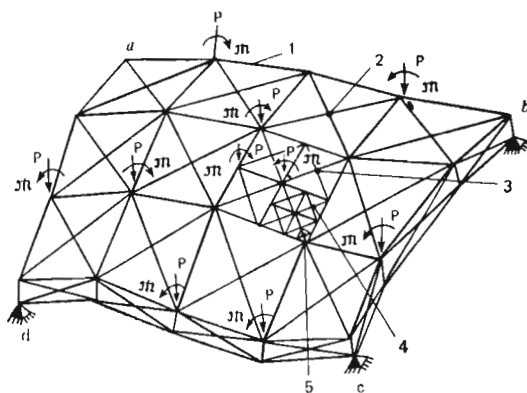
6. Осуществляется обратный переход от стержневого аналога с оптимальной конфигурацией решетки к континуальной системе с оптимальным распределением толщин. В целях проверки напряженно-деформированного состояния системы просчитывается МКЭ.

Предложенный в работе [42] подход для поиска минимума массы пластинчато-стержневых систем замкнутого объема является частным случаем разработанного алгоритма.

Алгоритм решения задачи 2. Модель решения задачи имеет следующий вид.

1. Исходная континуальная система разбивается на конечные элементы и на основе метода конечных элементов проводится статический расчет на заданное число загрузений.

Рис. 16. Аппроксимация
континуальной системы
стержневым аналогом



БИОНИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ



*Натура тем паче всего удивительна, что
в простоте своей многохитростна, и от малого
числа причин производит неисчислимые образы
свойств, перемен и явлений.*

М. В. Ломоносов

2. После анализа напряженно-деформированного состояния континуальной системы в целом более напряженные пластинчатые элементы аппроксимируются стержневыми аналогами с сохранением условий равновесия.

3. Осуществляется синтез оптимальной структуры стержневых аналогов с постоянной высотой на случай многих загрузок методами безусловной минимизации [28, 35, 37].

4. Анализируются оптимальные структуры стержневых аналогов, корректируются модули упругости и коэффициенты Пуассона соответствующих пластинчатых элементов.

5. Континуальная система с уточненными жесткостными характеристиками пластинчатых элементов в целях проверки напряженно-деформированного состояния вновь просчитывается методом конечных элементов.

Алгоритм решения задачи 3. Модель решения задачи имеет следующий вид.

1. Исходная континуальная система представляется стержневым аналогом с частотой разбивки решетки, позволяющей оценить действительный характер работы такой системы.

2. Делается статический расчет стержневого аналога на заданное число загрузок. Полученные значения узловых перемещений подставляются в математическую модель задачи (3.42) — (3.47).

3. Выполняются преобразования задачи (3.42) — (3.47) в задачи линейного или выпуклого программирования на основе подстановки значений узловых перемещений, полученных при статическом расчете.

4. Решается задача оптимизации стержневой системы по массе и осуществляется переход от стержневого аналога к континуальной системе с оптимальным распределением толщин.

В основе синтеза живых конструкций, как и искусственных, лежит оптимизация различного характера. В одних случаях осуществляется оптимизация универсальных конструкций, т. е. таких, которые бы удовлетворяли всевозможным силовым воздействиям. В других случаях при построении оптимальных структур предпочтение отдается одному из преобладающих силовых воздействий. Задача синтеза решается и в тех случаях, когда каждое силовое воздействие воспринимается соответствующей структурой. Например, в головке бедренной кости человека под каждую нагрузку подготавливается своя структура, так называемая ферма Митчелла [34, 46], причем все эти фермы связаны между собой и образуют в целом сложную траекториальную структуру (рис. 17). Оптимизация динамических структур в отличие от статических происходит непрерывно, когда за счет подвижности их элементов в процессе силовых воздействий конфигурация изменяется, подстраиваясь под новые виды нагрузок. Иными словами, осуществляется саморегулирование конфигураций структур.

Следует также напомнить, что конфигурации и структуры конструктивных систем в процессе эволюции живых организмов определились, с одной стороны, оптимизацией по отношению к внешним силовым воздействиям, а с другой — минимизацией энергетических затрат, необходимых для постоянного обмена веществ в организмах, определяемых в первую очередь величиной массы. Существующие численные методы оптимизации конструкций по массе охватывают значительное множество допустимых решений. Вследствие этого возникают трудности при реализации задач, особенно для конструкций со сложными структурой и конфигурацией. С другой стороны, структуры живых организмов представляют собой материали-

зованный образ силовых линий. Можно на ряде примеров конструкций животного и растительного мира (рис. 18—21) показать силовой характер построения структур и конфигураций.

Упорядоченность структур (ориентация элементов вдоль силовых линий) повышает прочностные и жесткостные свойства при минимальном объеме материала, идущего на их создание. При таком построении прочностные свойства клеток механических тканей используются самым рациональным образом. Закономерность траекториального построения структур и конфигураций распространяется на все конструкции опорных систем живых организмов, подверженных механическим воздействиям, поэтому ее надо принимать во внимание при поиске оптимальных конструктивных систем. Частично суть этой закономерности уже используется в способах повышения прочности конструкционных материалов. Одним из распространенных способов повышения прочности является придание структуре мате-

Рис. 17. Оптимальная ферма для передачи нагрузки на жесткое основание

а — ферма Мичелла;
б — распределение костной ткани по траекториям главных деформаций и образование ферм Мичелла в головке бедренной кости человека

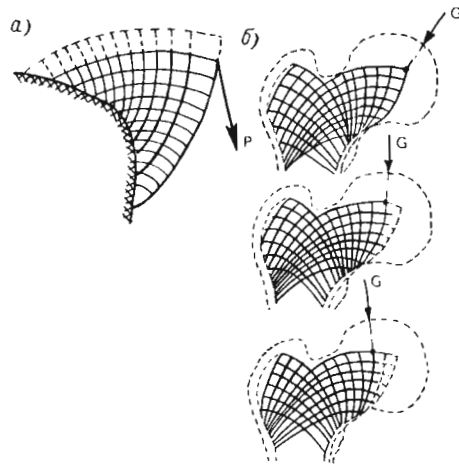


Рис. 18. Структура верхнего конца большеберцовой кости человека, образованная на основе материализации силовых линий (по О. Патцелю, 1972)

Рис. 19. Структура позвонка кита, образованная на основе материализации силовых линий
а — поперечный разрез;
б — продольный

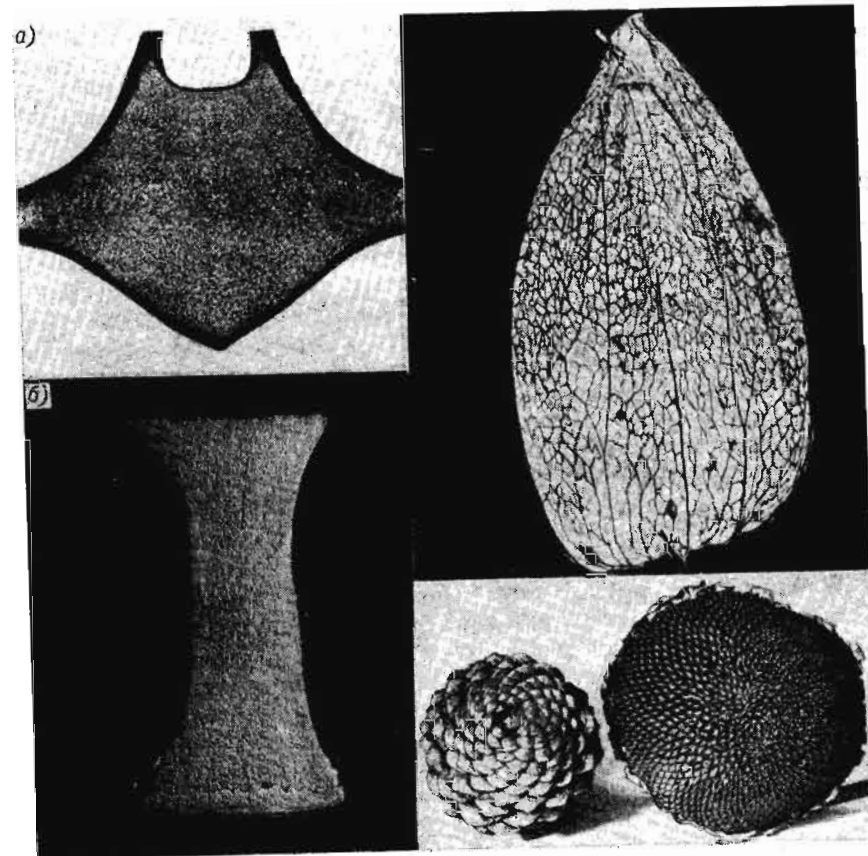


Рис. 20. Решетчатая структура плода физалиса (по Ф. Патури, 1979)

Рис. 21. Структуры с расположением элементов по пересекающимся логарифмическим спиралям: соцветие подсолнуха и кедровая шишка

риала упорядоченности. Другой способ состоит в армировании материала упрочняющими элементами. Например, в композициях армирующие компоненты обладают более высокими прочностными и жесткостными характеристиками по сравнению со связующими (матрицами). Направленность структур и армирование упрочняющими элементами — в принципе две стороны одной и той же идеи рационального использования прочностных свойств материала, которая позволяет использовать на максимум лучшие механические свойства и на минимум — худшие.

Проектирование структур и конфигураций конструктивных систем с учетом механических свойств материалов и траекторий силовых линий, возникающих при воздействии внешних нагрузок, еще находится на стадии развития. По-видимому, основной причиной является то, что проектировщики траекториальные системы (см. рис. 17—21) понимают как довольно-таки отвлеченные от реальных условий образования, вызывающие чисто теоретический интерес, а не представляющий собой закон естественного развития структур и конфигурации конструкций. Кроме того, отсутствуют общие методы построения траекторий силовых линий и требуются совершенно новые технологические приемы для изготовления подобных конструктивных систем.

У проектировщиков теоретический интерес вызывают и другие закономерности развития конструктивных систем живых организмов в процессе их эволюции, установленные строителем бионикой, такие как направленная форма потери устойчивости элементов, принципы гетерогенного размещения материала и плотной упаковки, накопления упругой энергии (резильянс) и т. д. Хотя следует отметить, что эти закономерности (принципы) для исследователей, понимающих их внутреннюю сущность, представляют собой надежные и эффективные средства при решении проблемы оптимального проектирования конструктивных систем.

4.1. ПРИНЦИП ТРАЕКТОРИАЛЬНОГО СТРОЕНИЯ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В настоящее время термин «структура» широко используется в физике, биологии, химии, геологии, архитектуре, инженерии и в других областях науки и техники. И это не случайно, так как понятие «структура» определяет основу строения, будь то кристаллы или живая клетка, химические соединения или горные породы, решетчатые конструкции, архитектурные формы и т. д. Кроме того, структура не только характеризует строение и взаиморасположение составных частей целого, но и определяет качественные стороны предмета. Так, графит и алмаз представляют собой кристаллические модификации чистого угле-

рода, но различие в их структурах (у графита гексагональная решетка, у алмаза — кубическая) ведет к резким различиям их физических свойств: графит — очень мягкое вещество, в то время как алмаз можно использовать для обработки самых твердых материалов. Или, например, различие в строении стволов деревьев хвойных пород обуславливает различные значения пределов прочности древесины на сжатие: сосна 25—62,5, ель — 31,8—56,5, кедр 39—45 МПа. Также хорошо известно [51], что от конкретного вида решетки структурных конструкций зависит расход стали на 1 м² покрытия. Так, расход стали для конструкций типа «Кисловодск» составляет 34,05 кг на 1 м²: «Модуль» — 44,3 кг, «Модуль с отверстиями» — 39,2 кг, «Берлин» — 35,4 кг и т. д. Можно привести еще ряд примеров из других областей человеческой деятельности и показать, как меняются свойства исследуемого предмета при изменении его структуры.

Рассмотрим живые структуры стержневых систем, подверженные гравитационным и атмосферным воздействиям.

Живые организмы, так же как и конструкции, созданные человеком, подвержены гравитационным, атмосферным или гидродинамическим воздействиям. Исходя из условий существования, они образуют достаточно прочные, жесткие и устойчивые опорные системы, чтобы противостоять этим воздействиям. Причем опорные системы живых организмов строятся рационально, т. е. с минимальным расходом материала (см. табл. 2). Каким же образом достигается большой выигрыш у опорных систем живых организмов? Как показали исследования строения костей человека [40, 49], — за счет повышенной прочности, которая обеспечивается особой структурой костной ткани. Эта структура образуется путем размещения материала по линиям силового поля; происходит своего рода конструирование костной ткани из элементов кальциевой соли и оссеина. Характер же силового поля, а следовательно, и структура каждой кости определяются видом внешнего воздействия и кинематическими граничными условиями.

Так, головка верхней части бедренной кости человека подвержена влиянию изгибающих моментов. В этом месте структура костной ткани представляет собой перекрестное сочетание двух пространственно-стержневых ферм Мичелла [34, 46, 67], стержни которых направлены по траекториям главных деформаций поля перемещений (эти деформации имеют постоянную величину $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ и $-\varepsilon_0$, где σ_0 — предельные осевые напряжения в каждом стержне, E — модуль упругости костного материала).

Такая структура, отвечая требованиям значительной прочности относительно заданных внешних сил, характеризуется предельно ограниченным объемом материала. Эти фермы по сравнению с традиционными обладают минимальной массой и могут воспринимать как статические, так и динамические воз-

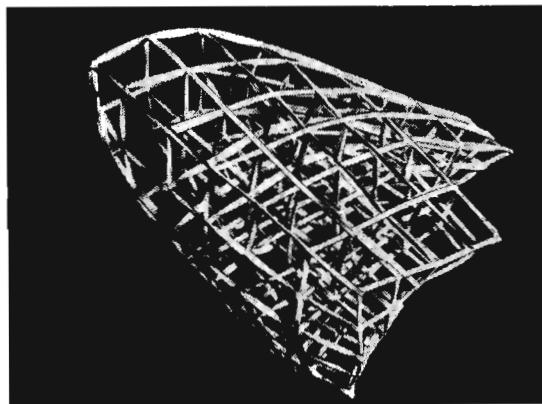


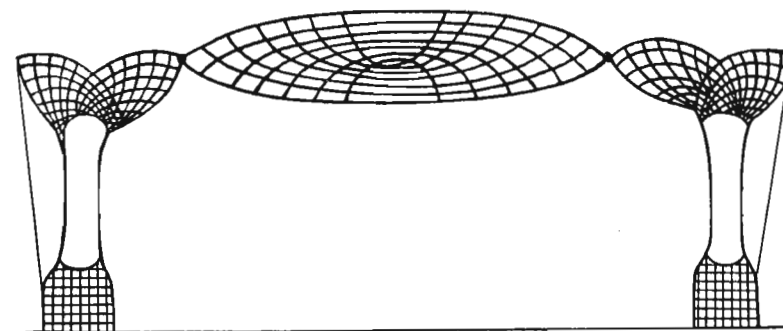
Рис. 22. Модель пространственной траекторной структуры (инж. В. Г. Темнов, архит. А. Д. Ярмоленко)

Рис. 23. Конструкция, спроектированная на основе принципа образования траекторных структур (инж. В. Г. Темнов)

действия. Модель такой структуры была выполнена инженером В. Г. Темновым совместно с архитектором А. Д. Ярмоленко в 1973 г. и названа в силу криволинейной ориентации стержней «траекторной структурой»; она наглядно раскрывает обусловленность расположения стержней по траекториям главных деформаций в кости. Последнее определяется не только их прочностью при минимальной затрате материала, но и необходимостью свободы роста (рис. 22).

Впервые в биологии название «функциональные структуры» ввел биолог Wilhelm Roux. Если проанализировать и далее строение бедренной кости, то можно заметить, что в нижней ее части структура выглядит иначе, хотя строится она также строго в соответствии с направлением линий главных деформаций. Кость в этом месте подвержена сжатию в продольном направлении, и поэтому линии главных деформаций представляют собой прямые. Структура, построенная из стержней, направленных по этим линиям, образует ортогональную решетку — частный случай траекторных структур (рис. 23). Аналогично увязываются траекторные структуры в берцовой, плечевой, локтевой, пяточной и других костях человека, а также в костях животных с силовыми воздействиями и граничными условиями. Этими же условиями определяются траекторные структуры и в растительном мире.

Рассмотрим структуру таких характерных аналогов в растительном мире, как деревья. В стволе дерева (например, сосны) в соответствии с закреплением (стержень, заделанный одним концом) и силовыми воздействиями (собственный вес, ветровые и снеговые нагрузки) возникают главным образом сжимающие и растягивающие напряжения. Структура ствола представляет собой центрированное поле траекторных



линий, образованное пучком лучей прямых и concentрических окружностей в соответствии с направлением продольных и поперечных деформаций. Это наглядно видно на радиальных, тангенциальных и поперечных распилах стволов деревьев.

Клетки механической ткани в структуре располагаются так, чтобы противостоять наибольшим усилиям, вот почему прочность древесины на сжатие и растяжение вдоль волокон в 10—15 раз выше, чем поперек волокон. Стволы деревьев с точки зрения их текстуры целесообразнее использовать либо в конструкциях, подверженных сжатию, растяжению (колонна, стойка, подкосы в фермах), либо в балках, подверженных равностороннему поперечному изгибу. В этих случаях стволы деревьев работают в конструкции так, как они созданы природой. При изгибе балки в одной плоскости использовать их нецелесообразно, так как для этого случая, как известно, оптимальным является не круглое, а двутавровое сечение.

Древесные листья (например, с перистым жилкованием) в отличие от ствола дерева находятся в условиях более сложного сопротивления. Структура их отличается от строения ствола, но выполняется она опять-таки в соответствии с траекторными линиями, которые представляют в этом случае семейство касательных к предельной кривой и семейство эволюент, ортогональных к ним.

Структура соцветия подсолнуха отличается от структуры листьев деревьев. В этом случае реализуется осесимметричное поле. Элементы траекторной структуры направлены по логарифмическим спиралям.

Интересно расположение перьев в крыльях птиц. Перья прикрепляются так, что имеют возможность раздвигаться. Это позволяет птице всегда располагать перья в крыле в соответ-

ствии с силовыми воздействиями. В полете крыло птицы за счет подвижности перьев подстраивается под меняющиеся нагрузки. Оно своего рода саморегулирующаяся структура.

Крылья насекомых, в частности стрекоз и комаров, совершают вибрационные движения, поэтому их структура отличается от структуры крыльев птиц, совершающих маховые движения. Строение крыльев насекомых ближе к строению листьев, также подверженных вибрации, вызываемой ветровыми потоками.

Можно было бы еще на ряде примеров животных и растений, насекомых и птиц показать, что траекториальные структуры являются не случайностью, а, как было установлено автором на основе проведенных исследований в течение ряда лет, закономерностью, основой строения живых систем, подверженных воздействиям гравитационного поля, атмосферным или гидродинамическим силовым воздействиям [40, 46, 49].

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТРАЕКТОРИАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Конфигурации траекториальных структур определяются линиями деформаций поля перемещений u, v с постоянными величинами $\epsilon_0 = \text{const}$. В свою очередь, траектории деформации зависят от вида загрузки и кинематических граничных условий. Если известны при заданных нагрузках перемещения точек тела, то по известным формулам теории упругости всегда можно найти компоненты деформаций

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

и среднее вращение

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.2)$$

С другой стороны, компоненты деформаций могут быть определены по формулам:

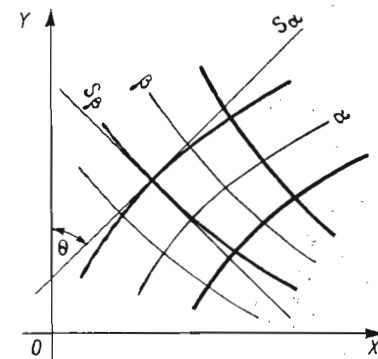
$$\epsilon_x = -\epsilon_0 \cos 2\theta; \quad \epsilon_y = \epsilon_0 \cos 2\theta; \quad \gamma = -\epsilon_0 \sin 2\theta. \quad (4.3)$$

Здесь θ — угол между отрицательным направлением оси ординат и положительным направлением вдоль линии, испытывающей однородное растяжение ϵ_0 (рис. 24).

Выразим компоненту деформации (угол сдвига) следующим образом:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \omega, \quad (4.4)$$

Рис. 24. Семейство характеристических (траекториальных) линий



или

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \omega. \quad (4.5)$$

Отсюда с учетом зависимостей $\gamma = -\epsilon_0 \sin 2\theta$ и $\omega = \epsilon_0 \varphi$ уравнения (4.4), (4.5) можно записать так:

$$-\epsilon_0 \sin 2\theta = \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_0 \varphi; \quad (4.6)$$

$$-\epsilon_0 \sin 2\theta = \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon_0 \varphi. \quad (4.7)$$

Окончательно уравнения (4.1) — (4.3) после проведения соответствующих преобразований принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\epsilon_0 \cos 2\theta; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\epsilon_0 (\varphi + \sin 2\theta);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon_0 (\varphi - \sin 2\theta); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_0 \cos 2\theta. \quad (4.8)$$

Если с помощью дифференцирования исключить перемещения u и v из уравнений (4.8), то получится система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $\varphi(x, y)$, $\theta(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta &= 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

В результате решения этих уравнений для каждого конкретного случая определяется геометрия сетки траекториальных линий, в соответствии с направлениями которых строится оптимальная структура живого организма.

Полученная система дифференциальных уравнений называется квазилинейной из-за частных производных первого порядка. Свойства, а также методы решения определяются ее типом. Так, для данной системы дифференциальных уравнений можно показать, что она относится к гиперболическому типу. Для этого достаточно принять, что известны функции φ и θ вдоль некоторой траекториальной линии в плоскости x и y , и составить уравнения вида:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy; \\ d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial x} dx + \frac{\partial\theta}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Совместно с уравнениями (4.9) эти уравнения относительно частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ представляют систему алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 1 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d\varphi \\ d\theta \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

Если определитель системы уравнений (4.11) не равен нулю, то частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ определяются единственным образом. В противном случае система уравнений (4.11) имеет множество решений. Траектории (линии), вдоль которых определитель равен нулю, являются характеристиками системы дифференциальных уравнений.

Характеристическое уравнение системы уравнений (4.11) в развернутой форме имеет вид:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2 \operatorname{ctg} 2\theta \frac{\partial y}{\partial x} - 1 = 0. \quad (4.12)$$

Корнями этого уравнения являются:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (4.13)$$

Если корни характеристического уравнения действительны и имеют различные значения, то система уравнений, как показано в работе [8], относится к гиперболическому типу. В случае, когда корни характеристического уравнения одинаковы, система уравнений является параболической; при комплексных корнях система уравнений эллиптическая.

Согласно приведенной классификации система уравнений (4.9) относится к гиперболическому типу.

В случае совпадения координатных осей s_α и s_β в каждой точке сетки с направлениями касательных к линиям деформаций ε_0 , т. е. когда $\theta = \pi/2$, дифференциальные уравнения (4.9) принимают более простую форму:

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (\varphi - \theta) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta} (\varphi + \theta) = 0, \quad (4.14)$$

где $\frac{\partial}{\partial s_\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial s_\beta}$ — производные вдоль траекториальных линий.

Уравнения (4.14) предусматривают дифференцирование в некотором единственном направлении, поэтому линии деформаций являются характеристиками гиперболической системы уравнений, т. е. характеристические линии совпадают с линиями деформаций.

Существуют два различных вещественных семейства характеристических (траекториальных) линий α и β , которые покрывают рассматриваемую область ортогональной сеткой (см. рис. 24). С одной стороны, она является искомой, а с другой — естественной криволинейной координатной сеткой определяемой структуры. Интегрирование дифференциальных уравнений (4.14) позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений

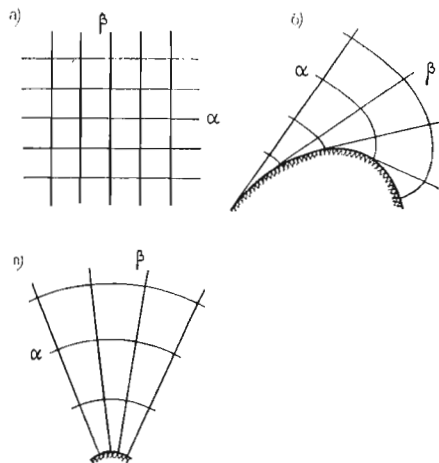
$$\begin{cases} \varphi - \theta = c_\alpha; \\ \varphi + \theta = c_\beta, \end{cases} \quad (4.15)$$

из которых легко определяются

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} (c_\beta + c_\alpha); \\ \theta = \frac{1}{2} (c_\beta - c_\alpha). \end{cases} \quad (4.16)$$

Здесь c_α и c_β есть постоянные величины вдоль траекториальных линий (соответственно α и β).

Рис. 25. Конфигурации траекториальных структур при простом напряженном состоянии
 а — поле напряжений; равномерное;
 б — то же, неравномерное;
 в — то же, центрированное



Если известны траекториальная структура и значения постоянных величин c_α и c_β , то, определив φ и θ из уравнений (4.16), далее можно получить компоненты деформации по формулам (4.3), и среднее вращение — из зависимости $\omega = \epsilon_0 \varphi$.

В случае равномерного поля напряжений траекториальная структура образуется двумя взаимно ортогональными семействами параллельных прямых, вдоль которых напряжения постоянны (рис. 25, а). При простом поле напряжений траекториальная структура представляет собой сетку, в которой одно семейство прямых пересекается ортогонально к ним прямыми или криволинейными линиями другого семейства (рис. 25, б). Центрированная же структура, представляющая собой разновидность предыдущей, образуется пучком прямых одного семейства, сходящихся в одной точке, и концентрическими окружностями другого семейства (рис. 25, в). При загрузке круговой части контура реализуется осесимметричное поле напряжений. В этом случае структура представляет собой сетку из пересекающихся логарифмических спиралей (рис. 26):

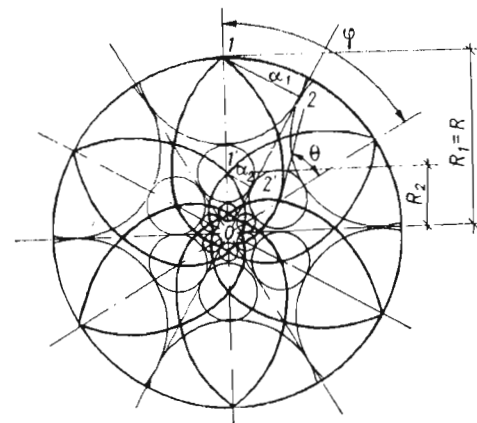
$$\varphi - \ln \frac{r}{a} = \beta; \quad \varphi + \ln \frac{r}{a} = \alpha, \quad (4.17)$$

где r, φ — полярные координаты; a — радиус центрального кольца.

Траектории структуры для случая пространственного напряженного состояния строятся аналогично плоскому (см. рис. 22).

Линеаризация уравнений и их решение. Установление сетки линий деформаций (линий напряжений) поля перемещений (силового поля), в соответствии с которой строятся траекториальные структуры конструктивных систем, трудоемкий процесс. Главная причина заключена в сложности реализации основной

Рис. 26. Конфигурация траекториальной структуры в случае осесимметричного поля напряжений



системы дифференциальных уравнений (4.9). В связи с этим требуется поиск новых эффективных приемов для их решения. Одним из таких приемов, предложенных М. Леви, является упрощение системы дифференциальных уравнений за счет их линеаризации. Для этого в уравнения (4.9) подставляются выражения (4.16), при этом за неизвестные функции принимаются параметры c_α и c_β . В результате система уравнений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_\beta}{\partial x} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} + \cos 2\theta \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial x} - \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial y} - \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial c_\beta}{\partial y} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} + \sin 2\theta \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial x} - \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} \right) - \sin 2\theta \left(\frac{\partial c_\beta}{\partial y} - \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

После преобразований системы уравнений (4.18), состоящих в последующих сложениях первого уравнения со вторым, предварительно умноженным сначала на $\tan \theta$, а затем на $\cot \theta$, получаем систему однородных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_\beta}{\partial x} + \tan \theta \frac{\partial c_\beta}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} - \cot \theta \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Приведем систему однородных дифференциальных уравнений (4.19) к линейной системе. Для этого вначале представим:

$$x = x(c_\beta, c_\alpha), \quad y = y(c_\beta, c_\alpha) \quad (4.20)$$

и, дифференцируя эти функции по x и y , получим систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial c_\beta} \frac{\partial c_\beta}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial y}{\partial c_\beta} \frac{\partial c_\beta}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial c_\beta} \frac{\partial c_\beta}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial y}{\partial c_\beta} \frac{\partial c_\beta}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Из решения этой системы уравнений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial c_\beta} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial c_\alpha}{\partial y}; & \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial c_\beta}{\partial y}; \\ \frac{\partial y}{\partial c_\beta} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial c_\alpha}{\partial x}; & \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial c_\beta}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial c_\beta}{\partial x} \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} - \frac{\partial c_\beta}{\partial y} \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} \neq 0 \quad (4.23)$$

является функциональным определителем (якобианом).

Если подставить найденные из системы уравнений (4.19)

значения $\frac{\partial c_\alpha}{\partial y} = \operatorname{tg} \theta \frac{\partial c_\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial c_\beta}{\partial y} = -\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial c_\beta}{\partial x}$ в выражение (4.23), то якобиан будет иметь следующий вид:

$$\Delta = \frac{2}{\sin 2\theta} \frac{\partial c_\beta}{\partial x} \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} = -\frac{2}{\sin 2\theta} \frac{\partial c_\beta}{\partial y} \frac{\partial c_\alpha}{\partial y}. \quad (4.24)$$

Из выражения (4.24) видно, что якобиан может принимать нулевые значения. Причем это может быть: при $c_\beta = \text{const}$, $c_\alpha = \text{const}$ — случай равномерного поля напряжений (см. рис. 25, а); при $c_\beta = \text{const}$ или $c_\alpha = \text{const}$ — случай простых полей (см. рис. 25, б, в). После подстановки частных производных (4.22) в дифференциальные уравнения (4.19) и последующего сокращения на Δ приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial c_\beta} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial x}{\partial c_\beta} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial c_\alpha} - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial x}{\partial c_\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Методы, разработанные для решения системы линейных дифференциальных уравнений вида (4.25), представлены в работе [8]. Для решения основной системы дифференциальных уравнений (4.9) могут быть также использованы методы, основанные на приведении дифференциальных уравнений к конечно-разностным соотношениям или на свойствах линий скольжения.

Экспериментальные возможности определения геометрии траекториальных структур. Решение уравнений (4.9) связано с вычислительными трудностями, поэтому чисто теоретический путь не всегда оказывается возможным, особенно при сложных конфигурациях конструкций. Учитывая тот факт, что траектории деформаций зависят от вида нагружений и типа закреплений конструкций, но не от физико-механических свойств материала и что лишь их величины зависят от последних, можно получить траекториальные структуры экспериментальным путем. В этом случае большую помощь могут оказать экспериментальные методы исследований деформаций и напряжений на моделях [29], такие как оптический метод, методы хрупких покрытий, муаровых полос, голографической интерферометрии и т. д. Эти методы позволяют наглядно получать картину силовых линий, в частности траекторий напряжений, на всей поверхности исследуемой модели. Они позволяют определять закон построения линий деформаций, а следовательно, траекториальную структуру, присущую рассматриваемому типу конструкций при заданном нагружении.

Картина траекторий деформаций дает возможность не только рационально проектировать конструкции, но и конструировать материал. Максимальная прочность и жесткость достигается тогда, когда волокна в материале или стержни в конструкции ориентированы по направлению линий деформаций. Следовательно, технико-экономическая эффективность конструктивных систем зависит от того, насколько согласованы механические свойства материалов с требуемой для данной конструкции траекториальной структурой. Поэтому проектировщику необходимо знать, как меняется деформативность и прочность материала, из которых изготавливается конструкция, в зависимости от изменения направления усилий, и иметь картину траекториальных линий деформаций для того, чтобы по ней можно было создавать оптимальную по массе конструкцию. Эти же вопросы должны интересовать и технологов, поскольку процесс создания материалов и изготовления конструкций — единый. Таким образом, оптимальное проектирование по массе структур конструктивных систем можно свести к двум этапам.

1. Определение конфигурации структуры экспериментальным путем.

2. Нахождение с помощью методов математического программирования оптимальных размеров ячеек, сечений элементов (стержней).

Геометрический метод построения траекториальных структур. Вид траекториальных структур конструктивных систем, как было показано выше, определяется характером сеток линий деформаций (линий напряжений) поля перемещений (силового поля). Можно использовать приемы построения сеток линий скольжения, которые были предложены еще Л. Прандтлем и

развиты В. В. Соколовским, Л. М. Качановым и др. Однако, например, при построении решеток стержневых систем на круглом плане (фермы, тросовые сетки, ребристые плиты и т. д.), когда элементы расположены по пересекающимся между собой логарифмическим спиральям, приходится сталкиваться с трудностями геометрического свойства. В этих случаях решетки строятся обычно итеративно, путем графического подбора их в зависимости от числа узлов, размеров и количества ячеек, величин углов пересечений логарифмических спиралей, числа спиралей (четное или нечетное) и т. д. Вот почему возникает необходимость применения точных методов построения решеток стержневых систем на круглом плане. Один из таких методов построения решеток (траекториальных структур) стержневых систем с расположением элементов по логарифмическим спиральям основан на упаковке покрытия неравными кругами. Этот метод был предложен автором.

Заполним круг заданного радиуса R меньшими кругами, вписанными в сектора m , на которые разбит большой круг (см. рис. 26). Обозначим радиусы малых кругов через a_i ($i=1, 2, \dots$). Из подобия треугольников $(0\ 1\ 2)$ и $(0\ 1'\ 2')$ можно получить отношение:

$$a_1/R = a_2/(R - a_1 - a_2), \quad (4.26)$$

из которого следует, что

$$a_2 = a_1(R - a_1)/(R + a_1). \quad (4.27)$$

Если подставить значение $a_1 = R \sin \alpha$ в выражение (4.27), то получим:

$$a_2 = R \sin \alpha (1 - \sin \alpha)/(1 + \sin \alpha) = R \sin \alpha [(1 - \sin \alpha)/(1 + \sin \alpha)] = R \sin \alpha \Psi = a_1 \Psi. \quad (4.28)$$

Аналогично определяются последующие радиусы кругов:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_2 \Psi = a_1 \Psi^2 = R \sin \alpha \Psi^2; \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} \Psi = a_{n-2} \Psi^2 = \dots = a_1 \Psi^{n-1} = R \sin \alpha \Psi^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Выражения $a_1 = R \sin \alpha \Psi^0$, $a_2 = R \sin \alpha \Psi^1$, ..., $a_n = R \sin \alpha \Psi^{n-1}$ являются членами ряда:

$$R \sin \alpha \Psi^0 + R \sin \alpha \Psi^1 + \dots + R \sin \alpha \Psi^{n-1} + \dots, \quad (4.30)$$

который при $|\Psi| < 1$ сходится, и его сумма (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии) равняется:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C = R \sin \alpha (1 - \Psi)^{-1}. \quad (4.31)$$

Пусть центры малых кругов находятся на некотором рас-

стоянии от центра «О» большого круга с радиусом R (см. рис. 26). Используя зависимость α от Ψ , т. е.

$$\sin \alpha = (1 - \Psi)/(1 + \Psi), \quad (4.32)$$

получим следующие выражения для радиусов:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R; \\ R_2 &= R - a_1 - a_2 = R - R \sin \alpha - R \sin \alpha \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right) = \\ &= R - R \left(\frac{1 - \Psi}{1 + \Psi} \right) - R \left(\frac{1 - \Psi}{1 + \Psi} \right) \Psi = R \Psi; \\ R_3 &= R - a_1 - 2a_2 - a_3 = \\ &= R - R \sin \alpha - 2R \sin \alpha \Psi - R \sin \alpha \Psi^2 = \\ &= R - R \left(\frac{1 - \Psi}{1 + \Psi} \right) - 2R \left(\frac{1 - \Psi}{1 + \Psi} \right) \Psi - R \left(\frac{1 - \Psi}{1 + \Psi} \right) \Psi^2 = R \Psi^2. \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Аналогично определяются и последующие радиусы. В общем виде эту последовательность можно представить в виде ряда $R\Psi^0 + R\Psi^1 + R\Psi^2 + \dots + R\Psi^{n-1} + \dots$. Этот ряд при $|\Psi| < 1$ сходится, и его сумма (сумма бесконечной геометрической прогрессии) равна:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S = R(1 - \Psi)^{-1}. \quad (4.34)$$

Последовательности $\{C_n\}$ и $\{S_n\}$ обладают тем свойством, что для каждого значения n выполняются равенства:

$$C_{n-1}/C_n = 1/\Psi \quad \text{и} \quad S_{n-1}/S_n = 1/\Psi, \quad (4.35)$$

где $\Psi = (1 - \sin \alpha)/(1 + \sin \alpha) \leq 1$.

Согласно равенствам (4.35) запишем отношения:

для последовательности $\{C_n\}$

$$a_1/a_2 = a_2/a_3 = \dots = a_k/a_{k+1} = \dots = a_{n-1}/a_n = 1/\Psi; \quad (4.36)$$

для последовательности $\{S_n\}$

$$R_1/R_2 = R_2/R_3 = \dots = R_k/R_{k+1} = \dots = R_{n-1}/R_n = 1/\Psi. \quad (4.37)$$

Пусть концы радиусов при последовательном повороте их относительно друг друга на угол φ лежат на логарифмической спирали. Тогда последовательность радиусов $R_1 > R_2 > \dots > R_k > \dots > R_n$ можно определить по формуле логарифмической спирали в полярных координатах

$$R = \rho e^{\text{ctg } \theta \varphi}, \quad (4.38)$$

где θ — угол пересечения радиуса с логарифмической спиралью; ρ — постоянный множитель.

Таблица 5. Значения геометрических характеристик в зависимости от количества m

Геометрические характеристики	Количество секторов (m)					
	6	12	13	14	18	180
φ	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{2\pi}{13}$ 27°41'38"	$\frac{2\pi}{14}$ 25°33'	$\frac{\pi}{9}$ 20°	$\frac{\pi}{9}$ 2°
$\frac{a_{k+1}}{a_k}$	0,333	0,588	0,61407	0,638	0,7041	0,9656
$\frac{1}{\Psi} = \frac{1 + \sin \varphi/2}{1 - \sin \varphi/2}$	3,00	1,709	1,62847	1,57198	1,4189	1,035
θ	43°38'	44°37'	44°48'	44°48'	44°50'	45°

Запишем последовательность (4.37) с учетом выражения (4.38)

$$\frac{\rho e^{\text{ctg } \theta_n \varphi}}{\rho e^{\text{ctg } \theta_{n-1} \varphi}} = \frac{\rho e^{\text{ctg } \theta_{n-1} \varphi}}{\rho e^{\text{ctg } \theta_{n-2} \varphi}} = \dots = \frac{\rho e^{\text{ctg } \theta_{k+1} \varphi}}{\rho e^{\text{ctg } \theta_k \varphi}} = \dots = \frac{\rho e^{\text{ctg } \theta_2 \varphi}}{\rho e^{\text{ctg } \theta_1 \varphi}} = 1/\Psi; \quad (4.39)$$

после преобразования получим

$$e^{\text{ctg } \theta \varphi} = 1/\Psi. \quad (4.40)$$

Выражение (4.40) характеризует вид логарифмической спирали, которая пересекает под углом θ лучи-радиусы, повернутые относительно друг друга на угол φ . Отношения (4.36), (4.37) и выражение (4.40) позволяют установить непосредственную зависимость вида логарифмической спирали от отношения радиусов меньших кругов, вписанных в сектора m , т. е.

$$a_1/a_2 = a_2/a_3 = \dots = a_k/a_{k+1} = \dots = a_{n-1}/a_n = e^{\text{ctg } \theta \varphi}, \quad (4.41)$$

и от отношения радиусов центров малых кругов:

$$R_1/R_2 = R_2/R_3 = \dots = R_k/R_{k+1} = \dots = R_{n-1}/R_n = e^{\text{ctg } \theta \varphi}. \quad (4.42)$$

Покажем, как меняется угол θ в зависимости от изменений отношений радиусов малых кругов. Для этого составим таблицу.

Из табл. 5 видно, что с увеличением числа секторов m отношение a_{k+1}/a_k радиусов кругов, вписанных в них, приближается к единице, а величина угла θ пересечения логарифмической спи-

рали с лучами-радиусами стремится к 45°. При $m=13$ отношение $a_{k+1}/a_k=0,61407$, что весьма близко к значению золотого сечения. Таким образом, если известен диаметр проектируемой конструкции ($2R$), количество секторов m , на которые она разбивается, угол $\varphi=2\pi/m$, то по формулам (4.29) или (4.33) можно точно определить положение точек логарифмических спиралей, образующих очертание решетки конструкции.

4.3. ТРАНСТРОПНО-ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

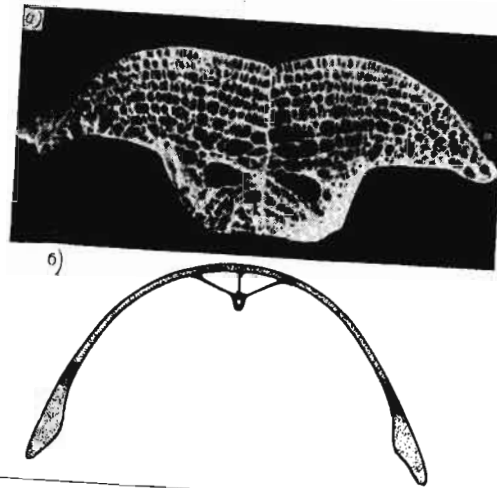
Подобные структуры образуются на основе сочетания принципов плотной упаковки типовых ячеек (кубическая, тетраэдрическая, гексагональная и т. д.) и гетерогенного размещения материала в их гранях. Это позволяет одновременно получить рациональную компоновку застройки из типовых ячеек и создать оптимальные по массе конструкции зданий и сооружений, обладающих высокими прочностными, жесткостными, теплофизическими и акустическими свойствами.

Принцип гетерогенного размещения материала в конструктивных системах. Наряду с отмеченным выше принципом траекториального строения решеток следует сказать и о гетерогенном характере размещения материала в конструктивных системах живых организмов. Так, плоские (пластинчатые) кости человека и позвоночных животных характеризуются трехслойным строением (см. рис. 18, 19, 27). Между наружными слоями компактной костной ткани располагается внутренний слой губчатой костной ткани, представляющей собой трехмерную структуру из костных балочек. Эти плоские кости (например, кости черепов, панцирей и т. д.) подвергаются действию изгибающих, сжимающих и растягивающих нагрузок. Сочетание слоев с различными свойствами позволяет получить конструкцию типа «сэндвич» с высокой прочностью, жесткостью и относительно малой массой [10, 26, 34, 40].

Общая устойчивость конструкций с гетерогенным размещением материала во много раз превышает устойчивость отдельных ее слоев, вследствие чего наружные слои из компактной костной ткани имеют значительно меньшую толщину по сравнению с внутренним слоем губчатой костной ткани. Последняя выполняет роль заполнителя, создающего практически непрерывную опору для наружных слоев, тем самым предохраняя их от потери устойчивости при нагружении. Это достигается определенным видом структуры внутреннего слоя, которая образно представляет собой материализацию силового поля, возникающего от действия внешних нагрузок, т. е. снова реализовался принцип траекториального строения решеток конструкций. А потому геометрия решетки внутреннего слоя для каждого кон-

Рис. 27. Гетерогенное размещение материала в конструктивных системах живых организмов

а — поперечный разрез черепа совы (по П. Бюллеру, 1972);
б — то же, карапакса греческой черепахи (по Л. И. Хозацкому, 1948)



кретного случая может быть найдена уже методами математического программирования.

Наибольший интерес представляет поиск оптимальных по массе структур пластинчатых элементов, имеющих постоянную толщину (см. главу 3.4).

Принцип плотной упаковки. В живой природе плотная упаковка проявляется при оптимизации биологических структур и форм в том случае, когда ячейки в структуре должны иметь по тем или иным причинам постоянные геометрические характеристики. Так, пчелы, осы, имеющие приблизительно одинаковые размеры, при постройке сотов образуют плотную упаковку из кругов, которые под действием капиллярных сил, превышающих давление изнутри от пчелиных тел, превращаются в описанные шестиугольники (рис. 28). Как установил еще итальянский ученый Маральди (1712 г.), подобная упаковка пчелиных сотов определяется экономичным использованием труда и воска. Так, при подобном разбиении плоскости на равновеликие части шестиугольная сетка имеет минимум длины.

Структуры с шестиугольным рисунком можно наблюдать также в паренхиме кукурузы, в кремнистых панцирях диатомовых водорослей, в сетчатой оболочке глаза человека и т. д.

Изучение процесса сооружения сот пчел показало, что возмозможно их возведение как сверху вниз, так и снизу вверх. Кроме того, проводились опыты, в которых пчел заставляли строить соты цилиндрические, шаровидные и других форм. При этом пчелы с поразительным успехом справлялись с поставленной перед ними задачей. Они безошибочно ориентировали ячейки сот, соответственно оттягивая расширенные ячейки в выпуклую сторону и сужающиеся — в вогнутую. Это наглядно показало, что плотная упаковка может быть осуществлена не только на

плоскости, на поверхностях, но и развита в пространстве (рис. 29).

Принцип плотной упаковки, позволяющий получать максимально возможный полезный объем при минимальной поверхности ограждения, представляет большой интерес с точки зрения формирования архитектурно-конструктивного пространства жилых и общественных зданий. Исходя из этого были исследованы и сопоставлены варианты различных конструктивных схем зданий с позиции напряженно-деформированного состояния и расхода материала. Схемы были получены на основе гексагональной и кубической упаковки одной и той же плоскости размерами $8,4 \times 8,4$ м (рис. 30). Причем элементы структур имели постоянное приведенное сечение на 1 м длины.

Модульные элементы исследуемых структур здания имели габаритные размеры $2,1 \times 2,1 \times 4,5$ м при толщине стенок $\delta = 80$ мм. Материал принимался со следующими физико-механическими характеристиками: модуль упругости $E = 25000$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$; изгибные и сдвиговые жесткости элементов стен и перекрытий соответственно $EI = 106,6$ т·м², $GF = 80$ т. Статический расчет многоэтажных зданий был выполнен на основе метода перемещений с использованием ЭВМ по программе СТРЕСС. Результаты теоретических исследований конструктивных систем с различными структурами приведены в табл. 6, где в числителе даны σ_r , а в знаменателе $\sigma_{сж}$.

Конструктивные схемы зданий на основе гексагональной упаковки. Автором были рассмотрены две конструктивные схемы зданий (см. рис. 30, а), набираемые из модульных элементов (из однотипных складок — вариант 1, из однотипных трилистников — вариант 2). Складки или трилистники устанавливались друг на друга и шарнирно соединялись между собой. Для восприятия распорных усилий, которые возникают в таких системах, вводились горизонтальные затяжки. С целью предварительной оценки напряженно-деформированного состояния конструкций многоэтажных систем с гексагональной решеткой был выполнен статический расчет. Величина снеговой нагрузки принималась согласно СНиП II-6—74. Нагрузки и воздействия. Для III территориального района СССР снеговые нагрузки составляют $q = 1$ КПа, а эксплуатационные нагрузки (сосредоточенные) принимались $P = 6$ кН.

Расчетные схемы здания представляли собой плоские статически неопределенные рамы с шарнирами в местах соединения однотипных элементов. Для восприятия распорных усилий в расчетную схему были введены горизонтальные связи. Рамы к основанию прикреплены шарнирно-неподвижно. Снеговые нагрузки сводились к узловым, а эксплуатационные фиксировались в местах непосредственного их действия.

Статический расчет плоских многоэтажных рам на действие заданных нагрузок был выполнен на основе метода перемеще-

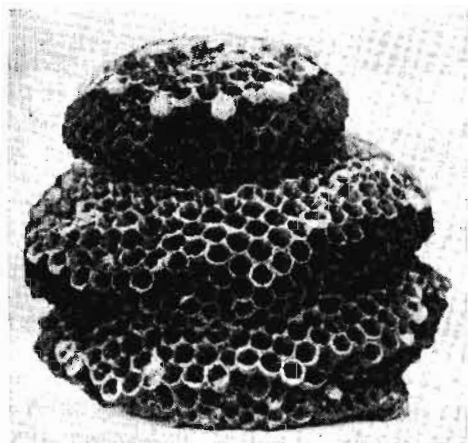


Рис. 28. Сотовая структура
осинового гнезда

Рис. 29. Пчелиные соты,
построенные снизу вверх
а — сот, построенный
в соломенном улье
Русси;
б — радиально
расходящиеся соты

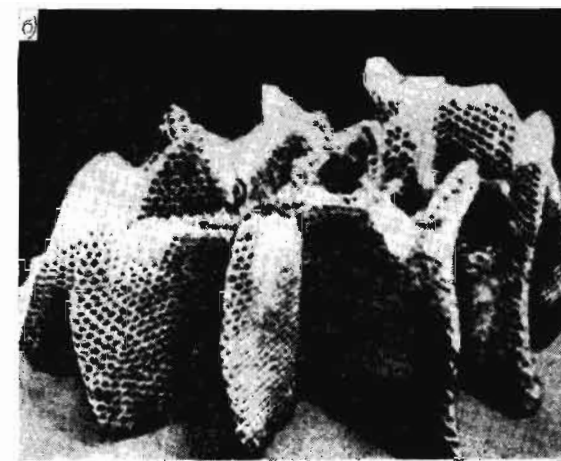
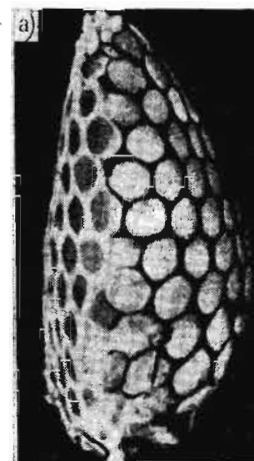
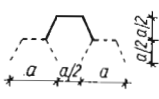
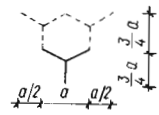
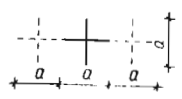
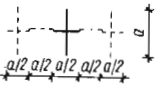


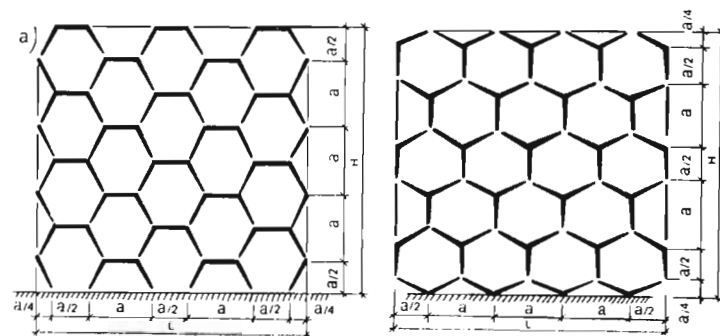
Таблица 6. Геометрические и физико-механические характеристики кон

№ варианта струк- туры	Модульный элемент структуры	Количе- ство ячеек в струк- туре	Суммарная длина элементов структуры ΣL , м	Объем мате- риала на струк- туру V , м ³
1		18	77,3489	6,1879
2		18	80,4989	6,4399
3		16	75,600	6,048
4		16	75,600	6,048

структивных систем

Приведен- ный объем материала $V/(LB)$, м ³ /м ²	Объем мате- риала на ячейку, м ³	Интенсив- ность нагруз- ки на 1 м ² площади, т/м ²	Максимальные напряжения в элементах, МПа	
			стенных σ_1	перекрытия σ_2
0,1637	0,34377	0,571	1,6345/2,399	1,7195/2,3118
0,1704	0,35777	0,571	17,364/18,036	17,35/18,05
0,16	0,378	0,507	1,41776/1,43226	3,4406/3,4261
0,16	0,378	0,507	1,65672/1,83297	2,9653/2,9446

Рис. 30. а. Конструктивные схемы зданий на основе гексагональной упаковки



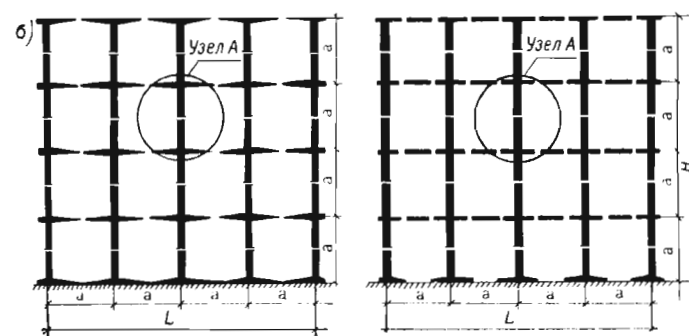
ний с использованием ЭВМ по программе СТРЕСС. Анализ теоретических исследований показал (см. табл. 6), что рама из модульных элементов-трилистников в статическом отношении работает в более тяжелом режиме по сравнению с рамой из модульных элементов-складок. Это объясняется значительными распорными усилиями, возникающими в первой системе в уровне потолка из-за отсутствия там горизонтальных затяжек, что было вызвано необходимостью сохранения полезного объема помещения.

Для этого случая наибольшие значения узловых перемещений составили 31,5 мм, а наибольшие значения напряжений $\sigma_p = 17,4$ МПа, $\sigma_{сж} = 18$ МПа. В то же время в раме из модульных элементов-складок при том же расходе материала узловые перемещения и напряжения в сечениях были значительно меньше. Так, максимальные значения перемещений составили 6,23 мм, а наибольшие напряжения $\sigma_p = 1,7$ МПа, $\sigma_{сж} = 2,4$ МПа.

Кроме того, в конструктивной схеме из модульных элементов-трилистников (вариант 2) здание в объемно-планировочном отношении уступает варианту 1: уменьшается полезная высота помещений за счет необходимости создания пола на наклонных сторонах шестиугольных ячеек.

Конструктивные схемы зданий на основе кубической упаковки. Автором были также рассмотрены две конструктивные схемы зданий (см. рис. 30, б), набираемые либо из модульных крестообразных рам (вариант 3), либо из модульных крестообразных рам с горизонтальными вставками (вариант 4). На основе строения коленного сустава человека (рис. 31, б) автором разработано конструктивное решение (рис. 31, а) стыкового соединения модульных крестообразных рам зданий в вертикальном направлении. Особенностью этого решения является то, что

Рис. 30. б. Конструктивные схемы зданий на основе кубической упаковки



у крестообразных рам концевые элементы имеют уширения. Причем уширение верхнего вертикального элемента рамы заканчивается выпуклой поверхностью, а нижнего — вогнутой поверхностью.

При сборке крестообразные рамы устанавливают друг на друга через упругие прокладки. При стягивании их вертикальными вантами, проходящими через отверстия в горизонтальных элементах и через уширения концевых частей вертикальных элементов, происходит плотное прижатие последних друг к другу. Такие узловые соединения крестообразных рам особенно эффективны в зданиях, строящихся в районах с неравномерными осадками основания.

Для предварительной оценки напряженно-деформированного состояния вариантов 3 и 4 был выполнен статический расчет многоэтажных систем с кубической решеткой.

Величины снеговых и эксплуатационных нагрузок имели те же значения, что и для вариантов 1 и 2. Расчетные схемы зданий представляли собой плоские статически неопределимые рамы с шарнирами в местах соединения однотипных крестообразных модулей либо между собой, либо со вставками. В основании рамы были жестко заземлены. Снеговые и эксплуатационные нагрузки учитывались так же, как и в вариантах 1 и 2. Геометрические характеристики модульных крестообразных рам и физико-механические характеристики материала приведены в табл. 6. Статический расчет плоских рам выполнялся по вышеприведенной методике.

Результаты статического расчета показали (см. табл. 6), что в раме, набираемой из крестообразных модулей (вариант 3), возникают несколько большие перемещения и напряжения по сравнению с рамой, набираемой из крестообразных модулей

горизонтальными панелями перекрытий двух смежных блоков. При установке блоков друг на друга за счет наличия ребер жесткости, окаймляющих горизонтальные и наклонные боковые грани оболочек, между ними образуются внутренние полости, которые заполняют теплоизоляционным материалом. В результате получают слоистые оболочки типа «сэндвич». Обеспечение зазора между оболочками путем опирания их только на торцевые диафрагмы в процессе монтажа конструкций многоэтажного здания позволяет устранить контакт между наклонными боковыми гранями и тем самым исключить распорные усилия (по длине каждого блока), неизбежные в таких системах. Одновременно вертикальные нагрузки распределяются как на горизонтальные, так и на наклонные боковые грани оболочек. Кроме того, за счет слоистости оболочек уменьшаются напряжения в наружных слоях. Использование поперечных затяжек, устанавливаемых в горизонтальных каналах и в выемках торцевых панелей (см. рис. 32, *г*), позволяет связать (заключить в «обойму») торцевые панели, симметрично расположенные относительно вертикальной оси, и тем самым снять неизбежный распор и обеспечить обжатие панелей. Все это в целом повышает несущую способность здания без увеличения расхода материала.

4.4. ПРИНЦИП НАКОПЛЕНИЯ УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ

В живых организмах в процессе эволюции их в соответствующих средах обитания масса опорных систем (скелетов) была доведена до оптимальных значений. Уменьшение массы конструктивных систем в первую очередь могло происходить за счет образования эффективных структур путем материализации силовых полей (принцип траекториального строения стержневых систем). При дальнейшем уменьшении массы, в случае если конструктивная система не разрушалась, последняя становилась достаточно гибкой.

В живой природе можно наблюдать большое количество разнообразных организмов с упругогибкими конструктивными системами (рис. 33, 34). Как правило, гибкость конструктивных систем таких организмов не отражается на их основных функциях (растения) или, наоборот, способствует выполнению основных функций (рыбы, морские животные). При этом следует отметить, что в конструкциях живых организмов с ростом величин внешних сил, прикладываемых к ним, растут значения упругой энергии деформации. Свойство конструктивных систем накапливать возможно большее количество упругой энергии деформации без разрушения носит название резильянса (*resilience* — упругость, эластичность, способность быстро восста-

навливать внутренние силы). Этим ценным качеством как раз и обладают конструкции живых организмов. Под действием нагрузок они демпфируют, испытывая при этом упругие отклонения, и после снятия нагрузок снова приходят в первоначальное состояние.

Способность поглощать энергию снижает возможность разрушения конструкции при приложении нагрузок. Таким образом, принцип накопления упругой энергии позволяет увеличить несущую способность конструкции и одновременно уменьшить массу. Свойством накопления (поглощения) упругой энергии естественные и искусственные материалы обладают в различной степени. Приведенные в табл. 7 значения способности различных материалов поглощать упругую энергию определялись автором для образцов, подверженных растяжению.

Из табл. 7 следует, что большей способностью к накоплению упругой энергии деформации обладают: из тканей растений —

Рис. 33. Упругогибкие стержневые системы
а — наружное строение паука-сенокосца;
б — модель трансформируемого купола из упругогибких стержней (инж. В. Г. Темнов, А. С. Васильев);
в — сочленения костей человека;
г — узловое соединение стержневых элементов, выполненное на основе строения коленного сустава человека

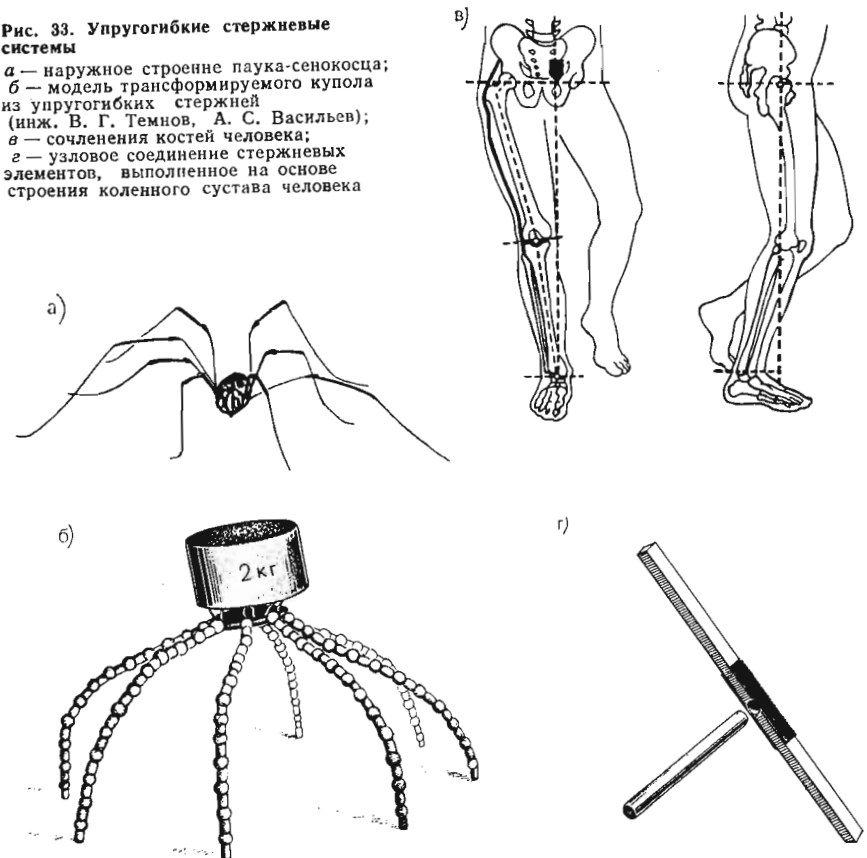


Рис. 34. Трансформируемая упругогибкая система на основе строения позвоночного столба рыб, земноводных и наземных животных

а — скелеты окуня, лягушки и кролика;
б — модель трансформируемой упругогибкой арки в разложенном виде;
в — то же, в собранном (няж. В. Г. Темнов, О. А. Фершуков, С. И. Писарева)

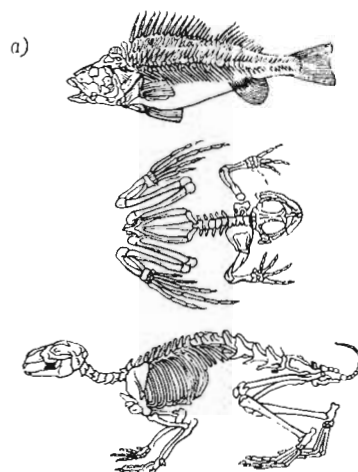
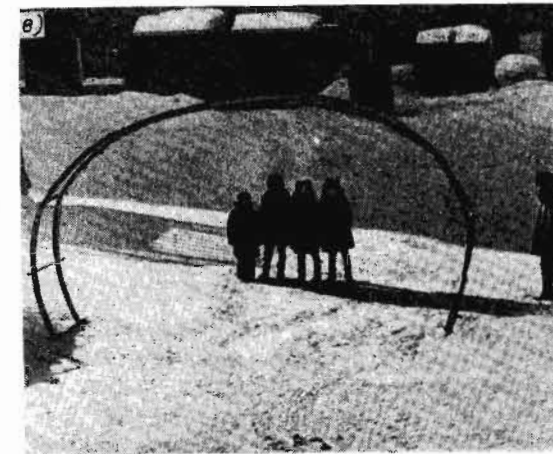


Таблица 7. Природная способность материалов накапливать упругую энергию

Наименование материала	Модуль упругости E , МПа	Предельное упругое напряжение σ , МПа	Предельная упругая деформация ϵ , %	Запасаемая упругая энергия на 1 м ³ $\epsilon/V = (1/2) \sigma \epsilon$, МДж	Плотность ρ , кг/м ³	Запасаемая упругая энергия на 1 кг массы $\epsilon/V = (1/2) (\sigma \epsilon / \rho)$, Дж
Ткани живой природы						
Древесина:						
пихты	13 000	60	0,46	0,14	470	298
тиса	13 300	120	0,90	0,54	600	900
бука	14 000	93	0,66	0,31	680	456
дуба	5 820	100	1,72	0,86	720	1194
ясени	16 095	144	0,89	0,64	670	955
ели	16 225	75	0,46	0,17	490	347
сосны	16 600	80	0,48	0,19	520	365
березы	16 660	120	0,72	0,43	680	632
Сухожилие человека	875	70	8,00	2,80	1100	2545
Роговая ткань	2 250	90	4,00	1,80	1200	1500
Костная ткань	21 000	120	0,57	0,34	1200	283
Свежая кожа	120	10	8,33	0,42	900	467
Естественные камни						
Песчаник	18 000	2,0	0,0111	0,000222	2100	0,106
Известняк	42 000	1,5	0,0036	0,000027	2000	0,014



Наименование материала	Модуль упругости E , МПа	Предельное упругое напряжение σ , МПа	Предельная упругая деформация ϵ , %	Запасаемая упругая энергия на 1 м ³ $\epsilon/V = (1/2) \sigma \epsilon$, МДж	Плотность ρ , кг/м ³	Запасаемая упругая энергия на 1 кг массы $\epsilon/V = (1/2) (\sigma \epsilon / \rho)$, Дж
Естественные камни						
Гранит	49 000	3,0	0,0061	0,000092	2500	0,037
Мрамор	57 000	2,0	0,0035	0,000035	2700	0,013
Искусственные материалы						
Сталь малоуглеродистая	210 000	250	0,119	0,149	7860	18,96
Сталь 30 незакаленная	210 000	330	0,157	0,259	7860	32,95
Сталь 45 незакаленная	210 000	370	0,176	0,326	7860	41,48
Титан технический	120 000	520	0,433	1,126	4500	250
Бронза	110 000	110	0,100	0,055	8800	6,25
Алюминий	70 000	50	0,071	0,018	2700	6,67
Чугун	115 000	28	0,024	0,0034	7000	0,49
Стеклопластик	22 000	260	1,180	1,53	1700	900
Гетинакс	10 000	70	0,700	0,25	1300	192
Текстолит	6 000	60	1,000	0,30	1300	231
Конвейерная лента	1 000	80	8,000	3,20	1100	2909
Капрон	1 400	35	2,50	0,438	1140	384
Резина	2,33	7	300,0	10,5	1200	8750
Бетон	20 000	0,7	0,0035	0,000012	2250	0,005
Кирпич	4 500	0,5	0,0111	0,000028	1500	0,019

древесина дуба, ясеня, тиса, из тканей животных — сухожилие, свежая кожа; из искусственных и естественных материалов — резина, конвейерная лента, стеклопластик, титан.

Данные исследования структур разнообразных материалов с позиции резильянса представляют интерес также с той точки зрения, что позволяют инженерам и проектировщикам использовать их при создании упругогибких конструкций с различной степенью способности накапливать упругую энергию деформации. Однако чтобы получить конструкции, обладающие резильянсом, необязательно выполнять их из какого-либо одного материала. Этого эффекта можно добиться путем изготовления конструктивных систем из гибких и жестких элементов, сочетая их в определенной последовательности.

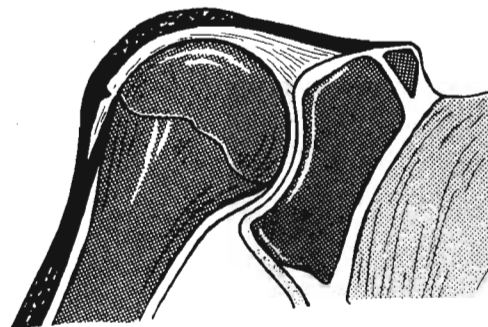
Такой конструктивной системой и является предложенное инженерами В. Г. Темновым, Е. Н. Митрофановым и архитектором Ю. С. Лебедевым сборное покрытие. Это покрытие представляет собой конструкцию, несущими элементами которой являются отдельные трехслойные арки со следующим порядком расположения слоев и распределения механических характеристик материала: наружные слои — гибкие, из материала с низким модулем упругости, но высоким пределом прочности на растяжение (например, из конвейерных лент); внутренний слой — жесткий, из материала (например, дерева) с более высоким модулем упругости и меньшим пределом прочности по сравнению с материалами наружных слоев. Между собой арки соединяются продольными ребрами (рис. 36).

Конвейерная лента и дерево по своим механическим характеристикам (модуль упругости E , предельное напряжение σ , предельная деформация ϵ) приближаются к природным материалам — соответственно к сухожилию и кости. Сочетание материалов с различными механическими характеристиками можно наблюдать в суставах животных и человека. В частности, конструкция покрытия и была разработана на основе строения плечевого сустава человека (см. рис. 35).

Займствованный из природы порядок расположения слоев в элементах бионических конструкций позволил сохранить высокую несущую способность, присущую трехслойным структурам, и одновременно обеспечить гибкость, которая позволяет осуществлять трансформацию конструкций из плоскости и получать различные формы покрытия (см. рис. 36, *в—е*).

Другая конструкция упругогибкой арки, разработанная в научно-исследовательском экспериментальном отделении ЛенЗНИИЭПа в г. Воркуте (инженеры В. Г. Темнов, О. А. Фершук, С. И. Писарева), отличается от предыдущей тем, что набирается из отдельных жестких элементов (кубов, шаров, цилиндров, призм и т. д.) с отверстиями для гибких вант, которыми они стягиваются (см. рис. 34). Использование в этой конструкции небольших элементов позволяет исключить потерю

Рис. 35. Строение плечевого сустава человека



(на стр. 94—95)

Рис. 36. Варианты форм упругогибкого сетчатого покрытия, получаемого в результате его трансформации из плоскости

а — покрытие, расположенное на плоскости;
б — то же, в момент трансформации;
в — покрытие в виде гипара;
г — то же, в виде коноида;
д, е — то же, в виде цилиндрических оболочек

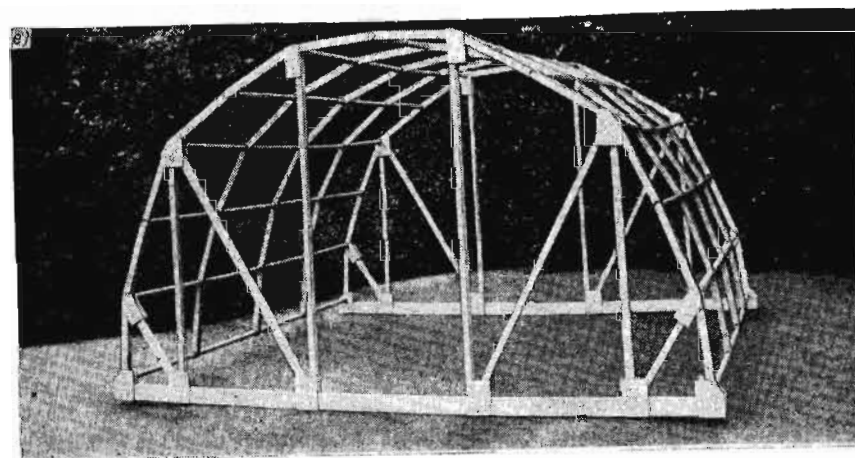
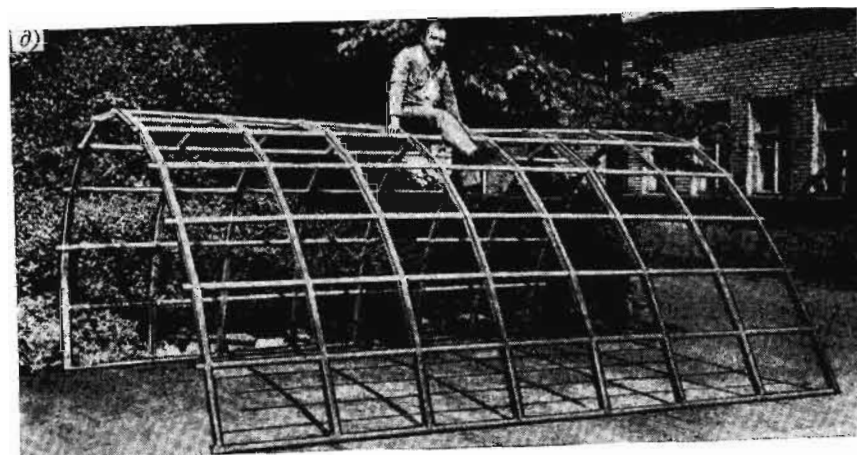
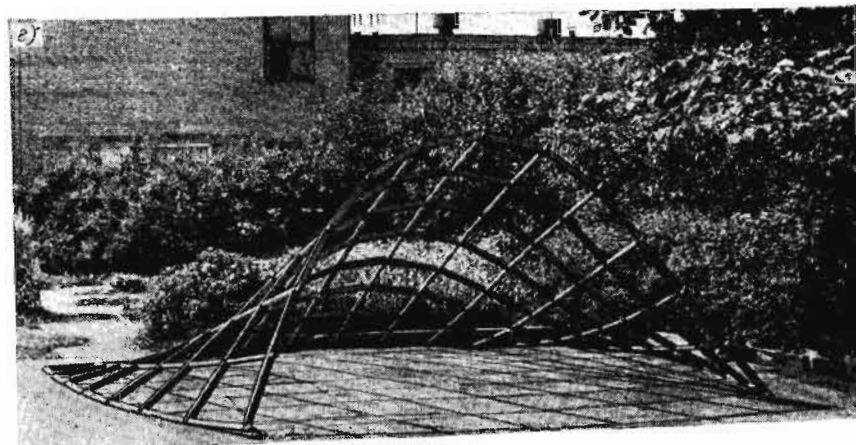
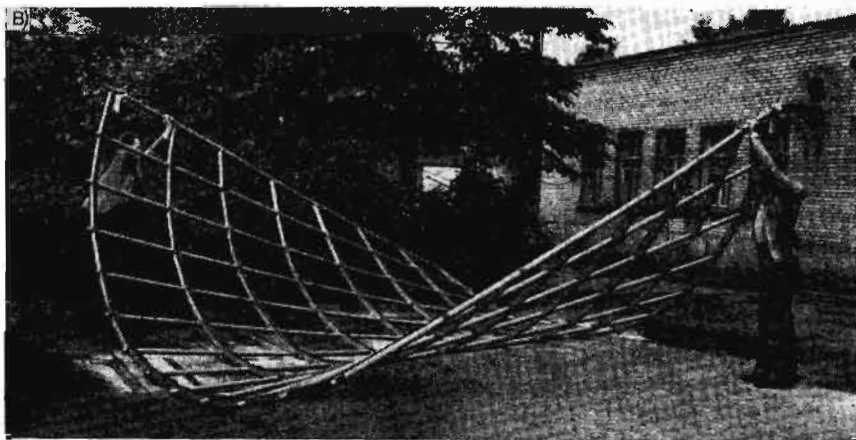
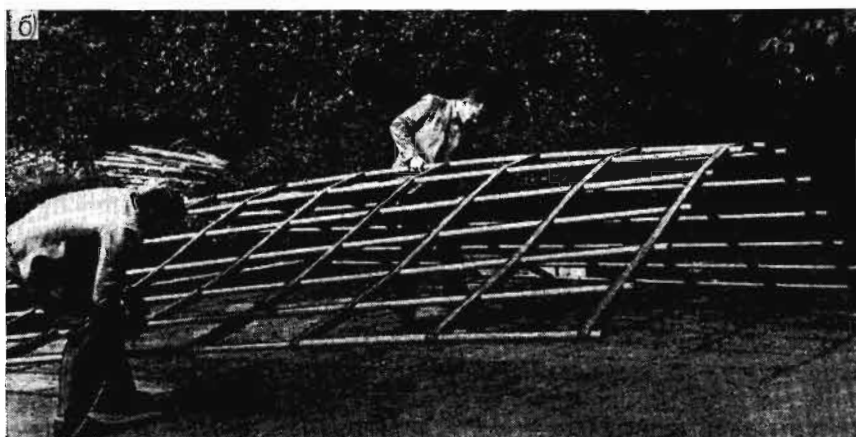
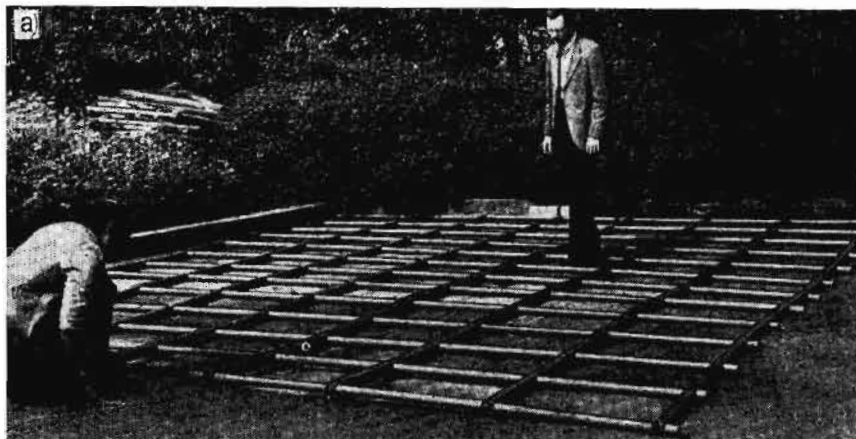
устойчивости и максимально использовать их несущую способность по прочности. Упругогибкой арке можно придать любую кривизну за счет определенного угла наклона граней элементов и соответствующего натяжения вант.

Конструктивное решение упругогибкой арки было заимствовано из живой природы. В качестве основных прототипов послужили конструкции ходильных ног паука (паук-крестовик) и позвоночника рыбы (окуня). Упругогибкая арка, получаемая путем соединения жестких элементов вантой, в отличие от трехслойной арки (см. рис. 36, *д*) более податлива под нагрузкой, следовательно, ее возможности в качестве основной несущей конструкции в покрытиях ограничены. Но то, что при изготовлении такой арки могут быть использованы элементы различной геометрии и размеров, позволяет получать из одного типа арок большое разнообразие формы трансформируемых из плоскости покрытий: сетчатые оболочки, своды, купола и т. д.

Таким образом, при создании упругогибких конструкций необходимо либо исходить из их функционального назначения, либо искать компромиссное решение между оптимальными соотношениями жесткости, прочности и массы, т. е. решать задачу оптимизации [46, 47].

4.5. ПРИНЦИПЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

С повышением и развитием производства высокопрочных сталей, алюминиевых и магниевых сплавов, титана, полимерных листовых и профильных материалов, армоцемента, клееной древесины и т. д. в практике строительства широкое применение



получили экономичные тонкостенные конструкции. Вследствие этого расчет на устойчивость таких систем стал определяющим в общем процессе расчета их по прочности, так как разрушение тонкостенных конструкций происходит в основном из-за общей или местной потери устойчивости.

Задачам расчета пластинчато-стержневых систем (рам, пластин, оболочек, подкрепленных ребрами, и т. д.), подверженных потере устойчивости, посвящено много работ [1, 7, 11, 51]. Реализация этих задач в основном сводится к определению критических нагрузок путем решения основных дифференциальных уравнений равновесных состояний пластинчато-стержневых систем. Однако при этом следует отметить, что для пластинчато-стержневых систем с произвольной геометрией, подверженных воздействию произвольных внешних сил, дифференциальные уравнения равновесного состояния не всегда удается получить, не говоря о том, что они являются сложными даже для таких простых систем, как упругосжатые стержни или пластины постоянной толщины, подверженные поперечному изгибу, эти уравнения соответственно имеют вид:

$$EI \frac{d^4 \omega_c}{dz^4} + P \frac{d^2 \omega_c}{dz^2} - q = 0; \quad (4.43)$$

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega_{пл}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega_{пл}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega_{пл}}{\partial y^4} \right) - P(x, y) = \\ = D \nabla^2 \nabla^2 \omega_{пл} - P(x, y) = 0, \quad (4.44)$$

где EI — изгибная жесткость стержня; ω_c — поперечный прогиб стержня; P — продольная сила; q — поперечная нагрузка; $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость (E — модуль упругости материала, μ — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины); $\omega_{пл}$ — поперечный прогиб пластины; $P(x, y)$ — нагрузка, нормально распределенная по пластине; $\nabla^2 \omega_{пл}$ — оператор Лапласа.

Основные дифференциальные уравнения равновесных состояний точно проинтегрировать удастся лишь в отдельных случаях, причем следует отметить, что и такой прием не всегда применим из-за трудностей вычислительного характера. Таким образом, расчет пластинчато-стержневых систем, подверженных потере устойчивости, путем определения критических нагрузок на основе решения дифференциальных уравнений равновесных состояний представляет собой трудную задачу. Хотя, по сути дела, расчет на устойчивость сводится к определению точек бифуркации (разветвления), т. е. к получению таких значений критических нагрузок, при превышении которых исходные неискривленные формы равновесия перестают быть устойчивыми. В этих случаях системы принимают другие, либо устойчивые, либо неустойчивые изгибные состояния (формы) равновесия.

Однако, если даже и будет установлена устойчивая форма равновесия, которую эта система приобретает в процессе перехода ее из исходного состояния в новое, последующее поведение конструкции остается неизвестным. Это связано с тем, что переход от исходного неискривленного состояния к новым изгибным устойчивым состояниям равновесия пластинчато-стержневых систем (даже при плавном увеличении внешних нагрузок) обычно происходит скачкообразно. Такая резкая смена форм равновесия может привести к разрушению конструкции в целом. Вследствие этого инженеры стараются проектировать пластинчато-стержневые конструкции так, чтобы избежать потери устойчивости первого рода, иными словами, — сохранить исходное состояние равновесия единственным и устойчивым. Однако такой прием ведет к перерасходу материала, и, кроме того, не исключается переход пластинчато-стержневых систем из исходного устойчивого равновесного состояния в другое, так как он всегда потенциально возможен. По этой причине в настоящее время увеличилось количество научных работ по исследованию устойчивости конструкций живых организмов [10, 41, 48], и это не случайно. В живой природе наблюдается большое разнообразие стержневых и тонкостенных конструктивных систем, причем одновременно с оптимальным распределением материала в конструкциях обеспечивается прочность и устойчивость их элементов. Принцип обеспечения устойчивости стержневых элементов, выработанный природой в процессе эволюции, можно проследить на примерах строения костей человека.

Случай шарнирного закрепления биостержня по концам. Подобный тип закрепления можно наблюдать в бедренной кости человека с медиальной стороны (рис. 37, а). В верхней части бедренная кость шарнирно с помощью шарового сустава прикрепляется к тазовой кости, а в нижней части через коленный сустав шарнирно опирается на большеберцовую кость. С латеральной стороны большеберцовая кость вместе с малоберцовой также представляют собой стержни с шарнирно закрепленными концами (см. рис. 37, а). Вверху они шарнирно соединяются через коленный состав с бедренной костью, а внизу через голеностопный сустав шарнирно опираются на блок таранной кости.

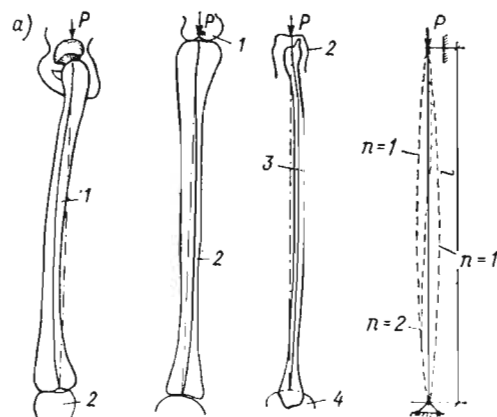
Под действием веса тела P стержни подвергаются сжатию и теоретически должны иметь устойчивую прямолинейную форму равновесия. Однако в действительности стержни несколько изогнуты. Случайно это или закономерно?

Рассмотрим поведение упругого стержня, сжатого силой P , в слегка искривленном равновесном состоянии (см. рис. 37). Тогда, как известно [1], критическую силу $P_{кр}$ и формы равновесия стержня можно определить из приближенного дифференциального уравнения упругой линии:

$$EJ \frac{d^2 x}{dz^2} = -M(z), \quad (4.45)$$

Рис. 37. Схемы закреплений биостержней

а — шарнирное по концам;
б — шарнирное на одном конце и жесткое на другом;
в — жесткое обоих концов; 1 — бедренная кость человека;
2 — большеберцовая кость;
3 — малоберцовая кость;
4 — таранная кость



где EJ — жесткость стержня (E — модуль упругости материала, J — момент инерции стержня); $M=Pz$ — изгибающий момент.

Подчиним решение уравнения (4.45) выполнению граничных условий для стержня с шарнирным закреплением концов:

$$x(z)|_{z=0} = 0; \quad x(z)|_{z=l} = 0. \quad (4.46)$$

Тогда получим выражение для определения сжимающих критических сил:

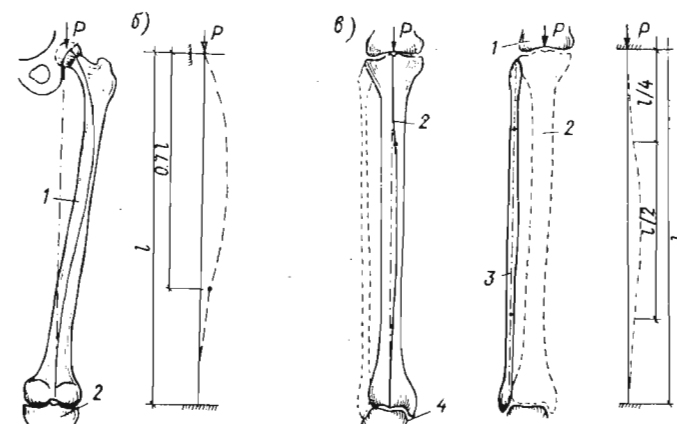
$$P_{кр} = n^2 \pi^2 EJ / l^2, \quad (4.47)$$

при которых возможны формы равновесия стержня, ось которого изогнута по синусоиде

$$x(z) = f \sin(n\pi z/l), \quad (4.48)$$

где f — наибольший прогиб стержня; n — число полувольт синусоиды, приходящихся на длину изогнутого стержня.

Из формул (4.47), (4.48), видно, что стержень может иметь не одну $P_{кр}$ и соответственно не одну форму равновесия. Последние определяются, в первую очередь, величиной сжимающей силы. Таким образом, при значениях силы P , меньших первой критической, единственная форма равновесия — прямолинейная, так как в основном происходит сжатие стержня. При достижении силой P значения, большего первой критической, характер деформаций стержня меняется — происходит сжатие с изгибом. А потому наряду с прямолинейной формой равновесия стержня возможна криволинейная, когда осевая линия изогнута по одной полувольте синусоиды. Если сила P превзойдет вторую критическую, то к упомянутым выше формам равновесия добавится еще одна возможная форма равновесия стержня, осевая линия которого изогнута по двум полувольтам синусоиды. При



каждом последующем увеличении силы P , вызывающем прева-лирование над соответствующей критической силой, добавля-ется новая возможная форма равновесия. Причем осевая линия стержня изогнута по синусоиде с числом полувольт, равным но-меру последней превышаемой критической силы.

Как показано в работе [1], для стержня с шарнирным зак-реплением концов при силе P , меньшей первой критической, ус-тойчивой является форма равновесия стержня с прямой осью, а при силе P , превосходящей первую критическую, из всех воз-можных форм равновесия устойчивой является лишь единствен-ная форма равновесия — с осевой линией стержня, изогнутой по полувольте синусоиды. Вот почему биостержни имеют не пря-молинейную форму, а искривлены по полувольте синусоиды.

Случаи шарнирного закрепления биостержней на одном конце и жесткого закрепления на другом. Такой вид закрепле-ния можно наблюдать в бедренной кости человека спереди (см. рис. 37, б). К тазовой кости бедренная кость прикрепляется шарнирно, а к голени — жестко. Под действием силы P стерж-ень сначала подвергается только сжатию. При дальнейшем росте P характер деформации стержня начинает меняться, про-исходит сжатие с изгибом. Стержень искривляется, и прямоли-нейная форма равновесия становится неустойчивой, так как в этом случае устойчивой становится уже искривленная форма равновесия. Как известно, для случая шарнирного закрепления стержня на одном конце и жесткого на другом из всех возмоз-ных форм равновесия стержня с искривленной осью устойчивой является только одна форма, соответствующая первой критиче-ской силе.

Для определения первой критической силы и устойчивой формы равновесия стержня с искривленной осью снова восполь-

зуемся приближенным дифференциальным уравнением упругой линии (4.45) и подчиним его решению выполнению следующих граничных условий:

$$y(z)|_{z=0} = 0; \quad y''(z)|_{z=0} = 0; \quad y(z)|_{z=l} = 0; \quad y'(z)|_{z=l} = 0. \quad (4.49)$$

Тогда получим выражение для критической силы:

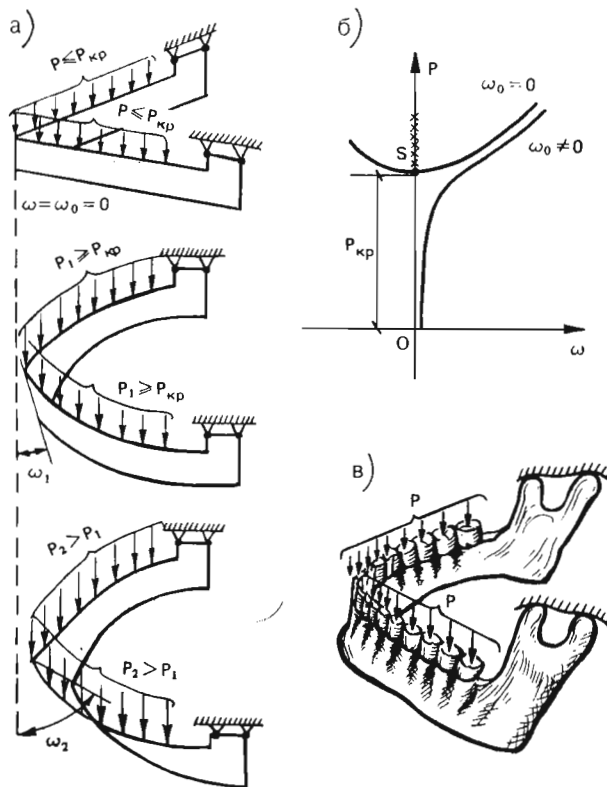
$$P_{кр} = 4,49^2 EJ/l^2 \approx \pi^2 EJ/(0,7l)^2 \quad (4.50)$$

и соответствующую формулу для определения равновесия стержня

$$y(z) = [\sin(4,49z/l) - (z/l) \sin 4,49]. \quad (4.51)$$

Согласно устойчивой форме равновесия и развивается биостержень; как видим, в этом случае он также имеет не прямо-

Рис. 38. Состояния устойчивого равновесия технической и биологической систем
а — формы потери устойчивости двухстержневой конструкции в процессе загрузки ее внешней нагрузкой;
б — характер поведения двухстержневой конструкции, подверженной потере устойчивости;
в — биологическая конструкция, материализованная в соответствии с ее формой потери устойчивости (нижняя челюсть человека)



линейную форму, а искривлен по синусоиде с длиной полу-волны $0,7l$.

Случай жесткого закрепления обоих концов биостержня. Такой характер закрепления можно наблюдать у голени, которая состоит из большеберцовой и малоберцовой костей спереди (рис. 37, в). Вверху с помощью латерального и медиального мышелок большеберцовая кость фиксируется относительно бедренной кости и совместно с боковыми связками образует неподвижное соединение. Внизу большеберцовая и малоберцовая кости вилкой охватывают блок таранной кости, что также создает неподвижное соединение. Под действием силы P (веса тела) стержень сначала испытывает только сжатие, потом с увеличением силы P подвергается сжатию с изгибом. Неустойчивая прямолinéйная форма равновесия стержня переходит в единственно устойчивую — криволинейную.

Для определения критической силы и устойчивости формы равновесия стержня с искривленной осью решим приближенное дифференциальное уравнение упругой линии (4.45) при следующих ограничениях:

$$y(z)|_{z=0} = 0; \quad y'(z)|_{z=0} = 0; \quad y(z)|_{z=l} = 0; \quad y'(z)|_{z=l} = 0. \quad (4.52)$$

Тогда получим выражение для критической силы:

$$P_{кр} = 4\pi^2 EJ/(0,5l)^2 \quad (4.53)$$

и соответствующую форму равновесия стержня:

$$y(z) = A_1 [\sin(2\pi z/l) - (2\pi z/l)] - A_1 [(\sin 2\pi - 2\pi)/(\cos 2\pi - 1)] \cos(2\pi z/l) + A_1 [(\sin 2\pi - 2\pi)/(\cos 2\pi - 1)]. \quad (4.54)$$

В этом случае устойчивой является форма равновесия стержня с осевой линией, которая изогнута по одной полуwave синусоиды в середине и двум половинкам полуwave синусоиды с краев. Вот почему биостержни с жестким закреплением концов в процессе роста приобретают искривленную форму, соответствующую именно данной изогнутой осевой линии.

Принцип направленной формы потери устойчивости. Природа, создавая свои конструктивные системы, заведомо старается избежать возможных переходов первоначальных деформаций в другие виды, т. е. исключает потерю устойчивости первого рода. И это происходит не путем усиления конструкции живых организмов за счет увеличения массы, а каждой конструкции придается очертание в соответствии с направленной формой потери устойчивости, принимаемой за предельную устойчивую из всех возможных форм равновесия. В результате этого при статической работе возникает постоянный вид деформаций.

После достижения предельных нагрузок значение деформаций может резко возрасти, но их вид останется неизменным (вплоть до разрушения). В таких конструкциях происходит потеря устойчивости второго рода вследствие потери несущей способности элементов по прочности, в результате она происходит постепенно.

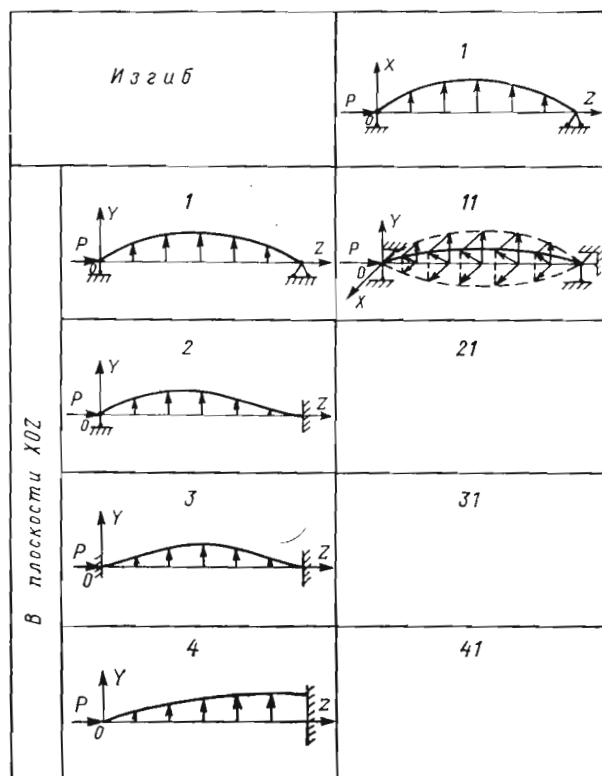
При создании пластинчато-стержневых конструкций живых организмов принцип направленной формы потери устойчивости позволяет избежать бифуркации устойчивых форм равновесных состояний. Это дает возможность повысить несущую способность конструкций, исключив неопределенность их дальнейшего поведения под нагрузками.

На рис. 38 приведены зависимости поворота ω двухстержневой конструкции, подверженной плоскому изгибу, от силы P в окрестности точки бифуркации S при различных значениях начального поворота. Вид кривых характеризует поведение си-

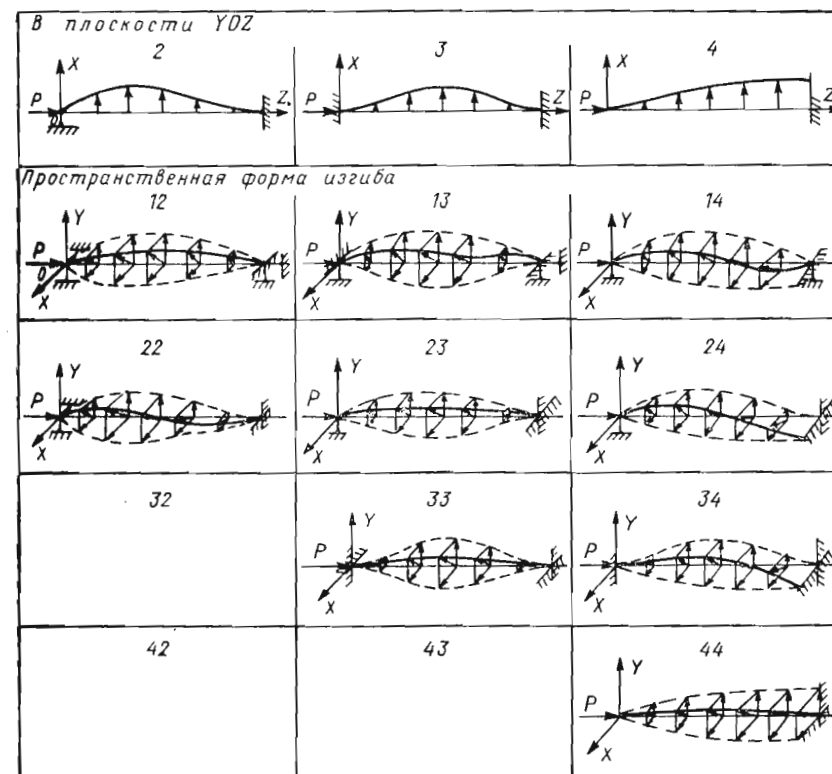
стемы, состоящей из двух стержней, а именно: точка бифуркации S существует лишь при предельной идеализации рассматриваемого стержня, т. е. когда $\omega = \omega_0 = 0$. При других (не нулевых) значениях поворота ω точка бифуркации отсутствует и понятие о критической силе теряет смысл. По этому же принципу формируются природные оболочки (черепа и т. д.).

Из приведенной на рис. 38, б зависимости также можно видеть, что с ростом нагрузки монотонно увеличиваются лишь значения поворота ω , но искривленная устойчивая форма равновесия качественно не меняется (рис. 38, а). Это позволяет несущую способность стержневой системы выбирать по прочности на максимум постепенно, не опасаясь скачкообразного перехода к другим формам равновесия, так как они исключены. Вот почему кости человека — стержневые элементы, выработанные природой в процессе эволюции, — имеют очертания в соответствии с предельной устойчивой формой равновесия.

Таблица 8. Формы изгиба биостержня при потере устойчивости для



различных случаев закрепления концов



Чтобы заранее обеспечить единственную устойчивую форму равновесия при деформациях одного типа (вплоть до разрушения), в живой природе стержни заранее несколько искривляются в соответствии с изогнутой осевой линией. Такой прием позволяет избежать опасного перехода под нагрузкой от одной формы равновесия к другой, который обычно наблюдается в случае сжатия (изгиба) прямолинейных стержней (пластин).

Распределение напряжений по поперечным сечениям вдоль оси стержня. Как было показано выше, одни и те же сжатые биостержни при различных закреплениях концов в двух главных плоскостях по-разному изгибаются и соответственно имеют разные значения критических сил и изгибающих моментов. Устойчивые формы равновесия стержней с изогнутыми осевыми линиями в главных плоскостях также различны и определяются по разным формулам. Эти особенности, связанные с потерей устойчивости в главных плоскостях в зависимости от способов закрепления, учитываются природой при формировании поперечных сечений вдоль оси стержня.

Так, в случае, когда закрепление концов биостержня обеспечивает одинаковую форму потери устойчивости в двух главных плоскостях, сечение развивается таким образом, что два главных момента инерции имеют одинаковые значения. В остальных случаях закрепления концов поперечные сечения биостержней развиваются из условия равенства между собой двух критических сил и соответственно выполнения условия равновесия:

$$J_1 v_2^2 = J_2 v_1^2, \quad (4.55)$$

где v_1, v_2 — коэффициенты свободной длины биостержня.

В действительности при рассмотренных способах закрепления концов криволинейных биостержней потеря устойчивости происходит с одновременным изгибом их в двух плоскостях. Следовательно, кроме продольных сжимающих сил $N = P_{кр}$, возникают изгибающие моменты M_x, M_y , и тогда расчет на устойчивость сводится к расчету на прочность. Нормальные напряжения можно определить из уравнения

$$\sigma = N/F + (|M_x|/2J_x)h + (|M_y|/2J_y)b \leq [\sigma], \quad (4.56)$$

где h — высота; b — ширина поперечного сечения.

Первый член этого уравнения остается постоянным, так как $N = P_{кр}$, а F определяется из условия равновесия (4.55). Второй и третий члены могут изменяться при изменениях M_x и M_y , а это может происходить лишь за счет поворота поперечного сечения по длине стержня. Выразим M_x и M_y через результирующий изгибающий момент, тогда уравнение (4.56) примет вид:

$$\sigma = |N|/F + (|M|/2) [(h/J_x) \cos \varphi + (b/J_y) \sin \varphi] \leq [\sigma], \quad (4.57)$$

где φ — угол между направлением вектора результирующего изгибающего момента M и главной осью сечения x .

В уравнении (4.57) неизвестной величиной является угол φ . Следовательно, варьируя этой величиной, можно уменьшить значения σ . Минимальные значения σ будут при $\varphi = 0$, когда $h/J_x < b/J_y$ и при $\varphi = \pi/2$, когда $h/J_x > b/J_y$.

Таким образом, чтобы в каждом поперечном сечении вдоль оси стержня нормальные сжимающие напряжения принимали минимальное значение, необходимо, чтобы направление одной из главных осей сечения совпадало с направлением вектора результирующего изгибающего момента (табл. 8).

Оптимизация по минимуму нормальных сжимающих напряжений в поперечных сечениях вдоль оси стержня приводит к их естественному закручиванию, что и наблюдается в костях человека и животных, а также в стеблях растений.

В природе прослеживаются и другие способы борьбы с потерей устойчивости. К ним можно отнести подкрепление пластинчатых и стержневых элементов продольными и поперечными ребрами (панцири черепах) или рядом перегородок, расположенных по длине стебля (травы, бамбук).

Одним из способов борьбы с потерей устойчивости является увеличение изгибной жесткости пластин и стержней за счет образования гофров по их длине или использования элементов, которые, пересекаясь между собой в процессе роста, образуют в плане спиралеобразные конструктивные системы (соцветие подсолнуха, раковины аммонитов и др.).

В живой природе для обеспечения устойчивости элементов конструкций также широко используется гетерогенность. Так, черепа и панцири различных позвоночных имеют слоистое строение, в частности трехслойное, — между наружным и внутренним компактными слоями располагается слой губчатой костной ткани. Слоистое строение позволяет создать систему из отдельных слоев, надежность которых существенно ниже надежности системы в целом. Слоистая структура придает материалу вязкость, в силу чего увеличивается его прочность. Это, в свою очередь, повышает устойчивость панциря, черепа или раковины. Гетерогенное строение элементов биологических конструкций не только тормозит развитие образовавшихся на поверхности трещин, но и гасит колебания, вызываемые динамическими воздействиями, являясь своего рода демпфером.

В современной технике многослойные конструкции находят все большее применение, и, как отмечается в работе В. В. Болотина, Ю. Н. Новичкова [7], этому способствовало появление и развитие новых композиционных материалов. Принцип гетерогенного строения широко используется в настоящее время в строительной практике при изготовлении трехслойных стеновых панелей.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОНИЧЕСКИХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ

От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности.

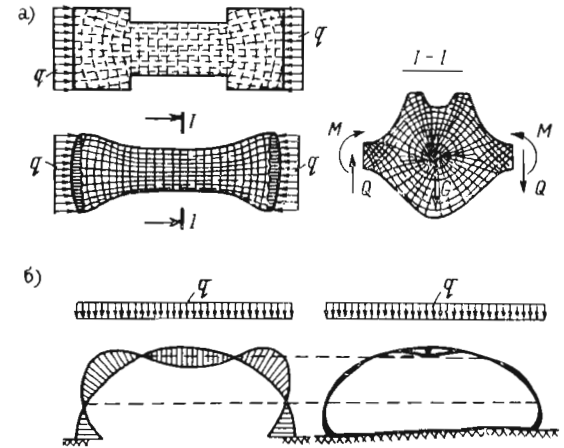
В. И. Ленин

Оптимизация форм и структур биологических конструктивных систем возможна только в тех случаях, когда при неизменных условиях окружающей среды развитие их совершается достаточно медленно, иначе оптимизация невозможна. Как известно, биологические конструктивные системы в отличие от технических при функционировании непрерывно восстанавливаются и поддерживаются, т. е. в них происходит непрерывный процесс обмена веществ. Вот почему масса этих систем определяется в первую очередь общими энергетическими затратами, связанными с «метаболической стоимостью». Кроме того, необходимо отметить, что биологические конструкции — опорные системы живых организмов — строятся подобно искусственным, также исходя из условий обеспечения прочности, жесткости, надежности. При этом они находятся в устойчивом равновесном состоянии. Последнее, как известно [56], определяется минимальным значением потенциальной энергии. Следовательно, для оценки напряженно-деформированного состояния биологических конструктивных систем можно воспользоваться экстремальными свойствами потенциальной энергии.

Согласно энергетическому экстремальному принципу [47, 59], при действии произвольной внешней нагрузки на упругое тело массой m из всех возможных равновесных состояний в нем устанавливается то, при котором потенциальная энергия (энергия деформации) имеет минимальное значение. Силовое поле, которое устанавливается в биологической конструктивной системе при заданных граничных условиях и внешних нагрузках в соответствии с минимальным значением потенциальной энергии, и определяет в данный момент ее напряженно-деформированное состояние. Полученная картина напряженно-деформированного состояния наглядно отражает в биологической конструк-

Рис. 39. Формирование структур биологических конструкций

а — распределение костной ткани в биостержнях, подверженных сжатию с изгибом (сетка силовых линий в образце, структура позвонка кита); б — то же, в панцирях наземных черепах (эпюра моментов в параболической арке, поперечное сечение спинного щита черепахи)



тивной системе зоны, где элементы получают большее (активные зоны) и меньшее (пассивные зоны) раздражение. В дальнейшем в процессе обмена веществ биологическая ткань в пассивных зонах не восстанавливается, постепенно исчезает, и в этих местах со временем образуются пустоты. В активных зонах идет процесс воспроизводства биологической ткани; совершается физическая минимизация массы (рис. 39).

С изменением условий закрепления биологической конструктивной системы, направления и места приложения внешних нагрузок к ней характер силового поля меняется; в соответствии с этим перестраивается и вся структура конструктивной системы за счет перераспределения материала. Происходит синтез оптимальных конструктивных систем в живых организмах.

Выявленный при исследовании биологических конструктивных систем энергетический критерий является тем основным фактором, на основе которого стало возможным не только оценить устойчивое равновесное состояние их, но и перевести на математический язык принципы оптимизации конструктивных систем (бионические принципы), отработанные живой природой за сотни и десятки сотен миллионов лет эволюции.

В процессе исследований американским биомехаником Ю. Ч. Фыном механического поведения биоматериала как упругого были установлены слабые изменения зависимости между напряжениями и деформациями по отношению к скорости деформации при загрузке или разгрузке. При таком определении биоматериала всегда есть возможность вычислить напряжения, если известны деформации. Конечно, правильнее было бы использовать термин «псевдоупругость», так как биоматериал ведет себя не как упругий, а скорее как особый вязкоупругий материал.

5.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ТРАЕКТОРИАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ И ОПТИМАЛЬНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ

Научные исследования по оптимизации конструктивных систем в живой природе и технике [40, 43] позволили автору [46] установить, что в основе конструкций биологических систем, как и в основе статического расчета, лежит одна и та же зависимость между внешними силами, граничными условиями и свойствами реальных материалов, выраженная в форме связи между напряжениями и деформациями. Это позволяет с помощью статического расчета не только математически осмыслить строение существующих биологических конструктивных систем, но и получить начальное приближение последующего формирования структуры будущей бионической конструкции для дальнейшей оптимизации ее по массе. Следовательно, математическое моделирование бионических конструктивных систем, оптимальных по массе, сводится к последовательному решению задач:

определение силового поля будущей бионической пластинчато-стержневой системы с помощью статического расчета (задача 1);

корректировка значений узловых перемещений и деформаций конечных элементов пластинчато-стержневой системы исходя из условий прочности, жесткости и устойчивости (задача 2);

минимизация по массе упругой пластинчато-стержневой системы при полученных в результате решения задачи 2 значениях узловых перемещений (задача 3).

Запишем задачу статического расчета для упругой конструктивной системы из n элементов в случае одного нагружения исходя из энергетического принципа сил (задача 1):

$$f(x) = (1/2) (F[C]x, x) \rightarrow \min \quad (5.1)$$

при ограничениях

$$AF[C]x = P. \quad (5.2)$$

Здесь A — матрица условий статического равновесия; $F[C] = (F_1[C], F_2[C], \dots, F_s[C], \dots, F_n[C])$ — квазидиагональная матрица жесткости n -конечных элементов; $F_s[C]$ — матрица жесткости s -го одномерного конечного элемента, аналогичная матрице, приведенной в 3.5;

$$F_s[C]_s = \frac{F_s^2 E_s}{1 - \nu^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{vmatrix}$$

— матрица жесткости s -го двумерного конечного элемента; $F = (F_1, F_2, \dots, F_s, \dots, F_n)$ — заданный единичный вектор площадей поперечных сечений n элементов; E — заданный вектор значений модулей упругости; i — вектор значений радиусов инерции поперечных сечений n конечных элементов; ν — коэффициент Пуассона; x — искомый вектор деформаций n конечных элементов; P — заданный вектор внешних сил и сосредоточенных моментов в узлах.

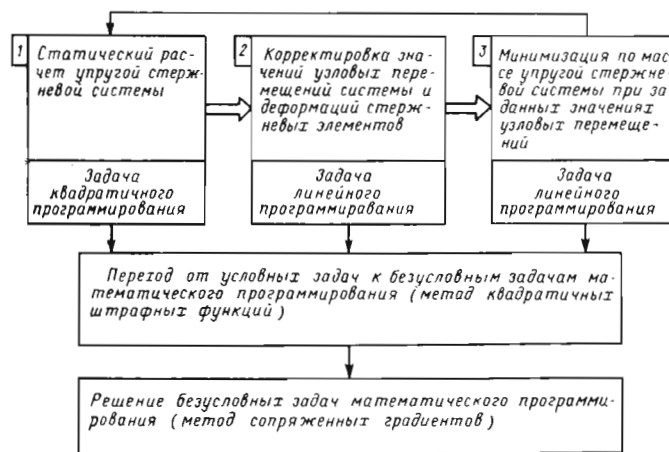
Квадратичная форма (5.1) представляет собой упругую энергию деформаций. Равенство (5.2) выражает условия равновесия. Математическая модель (5.1), (5.2) задачи расчета упругой пластинчато-стержневой системы представляет собой задачу квадратичного программирования.

Решение задачи (5.1), (5.2) позволяет теоретически установить напряженно-деформированное состояние пластинчато-стержневой системы под нагрузкой, а следовательно, выявить в ней напряженные (активные) и ненапряженные (пассивные) зоны.

В биологической конструктивной системе это будут соответственно зоны активного восстановления (роста) и зоны постепенного отмирания. Кроме того, статический расчет дает возможность определить соотношения между деформациями всех конечных элементов упругой конструкции для каждого вида нагружений. Зная эти соотношения, можно в дальнейшем прогнозировать изменение напряженно-деформированного состояния пластинчато-стержневой системы при последующем увеличении или уменьшении внешних сил, а также при изменении поперечных сечений конечных элементов. Для этого достаточно решить задачу корректировки значений узловых перемещений системы и деформаций конечных элементов [39].

В результате решения задачи (5.1), (5.2) определяется вектор деформации конечных элементов $x^{(j)}$ пластинчато-стержневой конструкции соответственно для каждого нагружения j , после чего решается задача 2:

$$\max \lambda \quad (5.3)$$



при ограничениях:

$$\{A^T \bar{N}^{(i)}\} \mu^{(i)} - \lambda \bar{x}^{(i)} = 0; \quad (5.4)$$

$$\lambda \bar{x}^{(i)} \leq [\kappa]; \quad (5.5)$$

$$\bar{N}^{(i)} \mu^{(i)} \leq \Delta; \quad (5.6)$$

$$-\mu^{(i)} \leq 0; \quad (5.7)$$

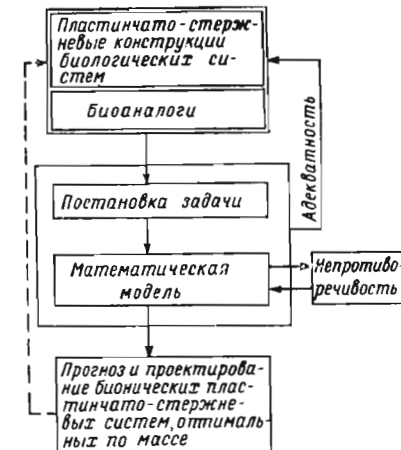
$$-\lambda \leq 0; j = 1, 2, \dots, h. \quad (5.8)$$

Здесь A^T — транспонированная матрица условий статического равновесия; \bar{N} — диагональная матрица узловых перемещений, полученных в результате расчета упругой пластинчато-стержневой системы; μ — искомый вектор параметров корректировки узловых перемещений; Δ — допустимые значения узловых перемещений; h — число внешних нагрузок.

В этой задаче определяется параметр λ , на который надо увеличить деформации в конечных элементах так, чтобы при этом выполнялись условия совместности деформаций (5.4), условия прочности и устойчивости (5.5), условия жесткости (5.6). Количество уравнений совместности деформаций (5.4) определяется произведением числа узловых перемещений упругой пластинчато-стержневой системы на число внешних нагрузок. Причем система уравнений может быть набрана в произвольной последовательности. Количество неравенств условий прочности и устойчивости (5.5) определяется произведением числа искомых деформаций в конечном элементе на число конечных элементов и число внешних нагрузок. Неравенства (5.7) и (5.8) выражают условия неотрицательности.

В результате решения задачи линейного программирования (5.3) — (5.8) получаются те соотношения между предельными значениями деформаций элементов и узловыми перемещениями стержневой системы, при которых удовлетворяются ус-

Блок-схема поиска оптимальных решений конструктивных систем



Блок-схема процесса идентификации системы

ловия жесткости, прочности и устойчивости. Теперь при полученных значениях деформаций и перемещений можно установить также сечения элементов, при которых масса пластинчато-стержневой системы в случае многих нагружений принимает минимальное значение, т. е. решить задачу 3:

$$f(\eta) = (\theta, \eta) \rightarrow \min \quad (5.9)$$

при ограничениях:

$$A \{\bar{F} [C] x_0^{(j)}\} \eta = P^{(j)}, \quad (5.10)$$

$$\bar{F} \eta \geq d. \quad (5.11)$$

Математическая модель (5.9) — (5.11) представляет собой задачу линейного программирования. Линейная форма (5.9) выражает теоретическую массу упругой пластинчато-стержневой системы. Здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s, \dots, \theta_n)$ — заданный n -мерный вектор коэффициентов массы для конечных элементов с заданными площадями сечений. При этом для одномерных конечных элементов

$$\theta_s = \gamma_s b_s \bar{F}_s,$$

где γ_s — объемная масса материала; b_s — заданная длина; \bar{F}_s — заданная площадь поперечного сечения элемента s .

Для двумерных конечных элементов

$$\theta_s = b_s^2 \bar{h}_s,$$

где b_s — заданная длина стороны; \bar{h}_s — заданная толщина конечного элемента s .

$$\eta = (F_1/\bar{F}_1, F_2/\bar{F}_2, \dots, F_s/\bar{F}_s, \dots, F_m/\bar{F}_m),$$

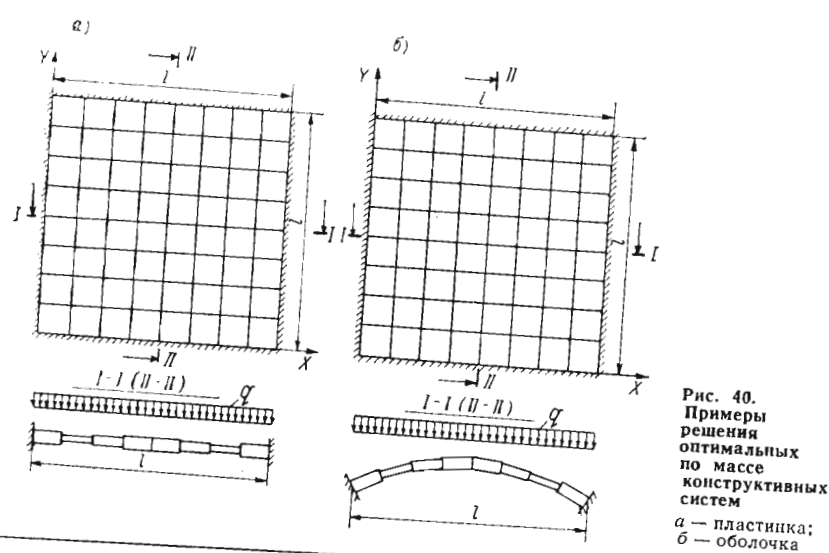


Рис. 40. Примеры решения оптимальных по массе конструктивных систем
а — пластинка;
б — оболочка

где η — m -мерный вектор соотношения площадей одномерных конечных элементов (F_s — искомая площадь поперечного сечения элемента s).

$$\eta = (h_{m+1}/\bar{h}_{m+1}, h_{m+2}/\bar{h}_{m+2}, \dots, h_{m+s}/\bar{h}_{m+s}, \dots, h_n/\bar{h}_n),$$

где η — $(n-m)$ -мерный вектор соотношений толщин двумерных конечных элементов (h_{m+s} — искомая толщина конечного элемента $m+s$).

Равенство (5.10) представляет собой линейные уравнения равновесия, выраженные через искомые площади сечений элементов, где $\chi_0^{(i)} = \lambda \bar{\chi}^{(i)}$ — вектор деформаций, полученный в результате решения задачи корректировки значений узловых перемещений и деформаций конечных элементов. Неравенство (5.11) есть ограничение на размеры поперечных сечений конечных элементов.

При записи математической модели задачи (5.9) — (5.11) необходимо следить, чтобы в равенстве (5.10) количество неизвестных параметров было больше количества уравнений.

Для шарнирно-стержневых систем минимальное количество неизвестных параметров может быть определено по формулам (3.49) и (3.50). Задачи 1—3 отражают структуру модели. Математическая основа этой модели непротиворечива, она подчиняется законам математической логики и способна адекватно описать развитие оптимальных по массе биологических конструктивных систем, в основе которого лежит материализация силовых полей при минимальных энергозатратах.

Процесс идентификации системы (установление тождественности математической модели и реального объекта) показан на вышеприведенной блок-схеме.

Полученная модель позволяет не только проектировать бионические пластинчато-стержневые системы, оптимальные по массе, но и прогнозировать возможное перераспределение материала в конструкциях (осуществлять структурный синтез)

при изменении силовых воздействий, а также граничных условий.

Для реализации задач 1—3 предлагается использовать методы безусловной минимизации. С этой целью перечисленные условные задачи при помощи квадратичных штрафных функций сводятся к безусловным задачам математического программирования [37] и решаются по единой схеме методами безусловной минимизации [39]. Выше приведена блок-схема поиска оптимальных конструктивных решений. При таком подходе становится возможным решать задачу минимизации по массе упругой пластинчато-стержневой системы в случае многих нагружений как методами классического анализа, так и современными методами вычислительной математики [27, 28].

На рис. 40 приведены примеры поиска оптимальных по массе конструктивных систем на основе полученной математической модели методами безусловной минимизации.

5.2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРУКТУР БИОНИЧЕСКИХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим упругую шарнирно-стержневую конструкцию, полученную путем объединения стержнями всех заданных k узлов, и произвольную систему внешних сил, приложенных к ней. Если соединить между собой все узлы стержнями, то образуется статически неопределимая конструкция, исключая треугольник на плоскости и тетраэдр в пространстве. Максимальное число стержней в такой конструкции может быть определено по формуле:

$$n = k(k-1)/2.$$

Сформулируем задачу синтеза оптимальных структур следующим образом: требуется выявить из множества допустимых вариантов шарнирно-стержневых конструкций, т. е. удовлетворяющих условиям состояния (уравнения равновесия, неразрывности деформаций, физические условия), прочности, устойчивости и жесткости, конструкцию с такой структурой, чтобы масса ее имела минимальное значение.

Определим сначала напряженно-деформированное состояние упругой шарнирно-стержневой системы с числом узловых точек k , соединенных n элементами для каждого вида нагружения ее внешними силами, т. е. решим задачу, сформулированную на основе энергетического принципа возможных изменений сил [38, 59].

Для m раз статически неопределимой системы, какой является рассматриваемая стержневая конструкция, эта задача будет иметь следующий вид:

$$f(x^{(i)}, S^{(i)}) = (1/2)(x^{(i)}, S^{(i)}) \rightarrow \min \quad (5.12)$$

при ограничениях

$$AS^{(j)} = P^{(j)}, \quad (5.13)$$

где $\kappa^{(j)} = (\kappa_1^{(j)}, \kappa_2^{(j)}, \dots, \kappa_n^{(j)})$ — n -мерный вектор деформаций; $S^{(j)} = (S_1^{(j)}, S_2^{(j)}, \dots, S_n^{(j)})$ — n -мерный вектор усилий; $P^{(j)} = P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, \dots, P_{(n-m)}^{(j)}$ — $(n-m)$ -мерный вектор внешних сил; $A = (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$ — $(n-m) \times n$ -мерная матрица условий статического равновесия; $j=1, 2, \dots, h$ — порядковый номер загрузки.

Целевая функция (5.12) представляет собой потенциальную энергию деформации. Равенство (5.13) выражает условия равновесия.

В такой постановке задача (5.12), (5.13) является неопределенной, так как она может решаться при любом векторе деформаций. Чтобы ее решить, нужно либо задать соотношения жесткостей элементов системы, либо наложить определенные ограничения на продольные деформации, представив их в виде зависимостей от жесткостей и усилий. Тогда в первом случае придем к задаче статического расчета, а во втором — к задаче синтеза по энергетическому критерию упругой шарнирно-стержневой системы при действии внешней силы $P^{(j)}$.

Задача статического расчета шарнирно-стержневой системы. Пусть заданы соотношения жесткостей элементов системы, т. е. известна диагональная матрица продольных жесткостей элементов $F_0[C]$ или диагональная матрица продольных податливостей элементов $F_0[D]$. Тогда физические условия можно представить в следующем виде:

$$S = F_0[C] \kappa, \quad \text{или} \quad \kappa = F_0[D] S. \quad (5.14)$$

Подставляя выражение (5.14) в соответствующей записи в математическую модель (5.12), (5.13), получим две интерпретации задачи упругого расчета шарнирно-стержневой системы:

$$f(S^{(j)}) = (1/2) (F_0[D] S^{(j)}, S^{(j)}) \rightarrow \min \quad (5.15)$$

при ограничениях

$$AS^{(j)} = P^{(j)} \quad (5.16)$$

$$\text{и} \quad f(\kappa^{(j)}) = (1/2) (F_0[C] \kappa^{(j)}, \kappa^{(j)}) \rightarrow \min \quad (5.17)$$

при ограничениях

$$AF_0[C] \kappa^{(j)} = P^{(j)}. \quad (5.18)$$

Как видим, задача упругого расчета шарнирно-стержневой системы в постановках (5.15)–(5.18) представляет собой задачу квадратичного программирования. Если необходимо определить усилия, то решается задача (5.15), (5.16); если необходимо определить деформации, то решается задача (5.17), (5.18).

Задача синтеза по энергетическому критерию шарнирно-стержневой системы. Запишем условия совместности деформаций, отражающие зависимость продольных деформаций от жесткостей и усилий в стержнях в развернутом виде:

$$\kappa^{(j)} = F_0[D]^{(j)} S^{(j)} = \begin{bmatrix} l_1 \\ EF_1^{(j)} \\ l_2 \\ EF_2^{(j)} \\ \vdots \\ l_i \\ EF_i^{(j)} \\ \vdots \\ l_n \\ EF_n^{(j)} \end{bmatrix} S^{(j)} = \begin{bmatrix} S_1^{(j)} \\ S_2^{(j)} \\ \vdots \\ S_i^{(j)} \\ \vdots \\ S_n^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

или

$$S^{(j)} = F_0[C]^{(j)} \kappa^{(j)} = \begin{bmatrix} EF_1^{(j)} \\ l_1 \\ EF_2^{(j)} \\ l_2 \\ \vdots \\ EF_i^{(j)} \\ l_i \\ \vdots \\ EF_n^{(j)} \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1^{(j)} \\ \kappa_2^{(j)} \\ \vdots \\ \kappa_i^{(j)} \\ \vdots \\ \kappa_n^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Подставляя последовательно выражения (5.19) и (5.20) в математическую модель (5.12), (5.13) и учитывая то обстоятельство, что площади поперечных сечений стержней по знаку не могут быть отрицательными, а по величине равняться бесконечности, получаем две постановки задачи синтеза по энер-

энергетическому критерию (упругой энергии деформации) шарнирно-стержневой системы:

$$f(S^{(i)}, F^{(i)}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{EF^{(i)}} \right) S^{(i)}, S^{(i)} \right] \rightarrow \min \quad (5.21)$$

при ограничениях

$$AS^{(i)} = P^{(i)}, \quad (5.22)$$

$$F^{(i)} \leq d, \quad (5.23)$$

$$-F^{(i)} \leq 0. \quad (5.24)$$

и

$$f(\kappa^{(i)}, F) = (1/2) \left[\left(\frac{EF^{(i)}}{l} \right) \kappa^{(i)}, \kappa^{(i)} \right] \rightarrow \min \quad (5.25)$$

при ограничениях:

$$A \left(\frac{EF^{(i)}}{l} \right) \kappa^{(i)} = P^{(i)}, \quad (5.26)$$

$$F^{(i)} \leq d, \quad (5.27)$$

$$-F^{(i)} \leq 0. \quad (5.28)$$

Здесь (5.23) и (5.27) — ограничения на площади поперечных сечений; (5.24), (5.28) — условия неотрицательности. Представленные две интерпретации (5.21)—(5.24) и (5.25)—(5.28) задач синтеза по энергетическому критерию шарнирно-стержневой системы при действии внешней силы $P^{(i)}$ представляют собой нелинейные задачи математического программирования.

Следует отметить, что структуры шарнирно-стержневых систем, полученные в результате решения задачи синтеза по энергетическому критерию, не всегда эквивалентны структурам шарнирно-стержневых систем, полученным при решении задачи синтеза по весовому критерию. Возможны случаи, когда масса конструкции с минимальным значением упругой энергии далека от ее оптимального значения [47].

Если внешняя нагрузка, действующая на шарнирно-стержневую конструкцию, постоянна, то на основании теоремы М. Леви следует, что конструкция (ферма) минимальной массы будет статически определимой. Таким образом, задача синтеза оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы в случае одного нагружения сводится к нахождению оптимальной по массе конструкции из всего множества допустимых статически определимых конструкций. Условия, определяющие «допустимые конструкции», могут быть различны: это требования прочности, жесткости, устойчивости и т. д.

Казалось бы, теперь дальнейшие поиски оптимальной конструкции можно осуществлять простым перебором статически

определимых конструкций с последующим сопоставлением их по массе. Однако такой подход к структурному синтезу возможен только в принципе, но не в практическом аспекте, так как легко убедиться, что множество допустимых статически определимых конструкций увеличивается с ростом числа узловых точек:

$$L = n! / t! (n - t)!,$$

где t — число стержней в статически определимой стержневой конструкции ($t=2k$ — для плоской шарнирно-стержневой системы; $t=3k$ — для пространственной).

Именно поэтому поиск оптимальных по массе стержневых конструкций с ростом их размерности простым перебором даже с использованием скоростных счетно-решающих устройств становится нереальным.

Известно, что в статически определимых шарнирно-стержневых конструкциях продольные деформации в стержнях достигают предельных значений. Однако по знаку они могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от того, растянут стержень или сжат. Поэтому заранее зададимся предельными значениями продольных деформаций стержней соответственно на растяжение κ_1 и на сжатие κ_2 . Подставим их в математические модели задачи синтеза шарнирно-стержневой системы по энергетическому критерию с учетом, что положительным (растягивающим) усилиям S_1 соответствуют положительные деформации κ_1 , а отрицательным (сжимающим) усилиям S_2 — отрицательные деформации κ_2 и что одновременно в стержне не могут возникать усилия обоих знаков. Вследствие этого математические модели (5.21)—(5.24) и (5.25)—(5.28) упростятся и примут вид

$$\xi(S^{(i)}) = (1/2)(\kappa_1 S_1^{(i)}) + (1/2)(\kappa_2, S_2^{(i)}) \rightarrow \min \quad (5.29)$$

при ограничениях:

$$AS_1^{(i)} - AS_2^{(i)} = P^{(i)}; \quad (5.30)$$

$$S_1^{(i)} \geq 0, \quad S_2^{(i)} \geq 0. \quad (5.31)$$

Задача синтеза оптимальных структур шарнирно-стержневых систем по энергетическому критерию в постановке (5.29)—(5.31) представляет собой прямую задачу линейного программирования. Ограничения (5.30), (5.31) выражают условия статического равновесия системы, а значит, любое опорное решение будет представлять собой статически определимую конструкцию. Следовательно, шарнирно-стержневая система, обладающая минимальной упругой энергией деформации и соответствующая оптимальному решению, также будет являться статически определимой.

С формализацией задачи в постановке (5.29)—(5.31) появилась возможность осуществлять синтез оптимальных

структур статически определимых шарнирно-стержневых систем по энергетическому критерию не путем бесконечного перебора, а направленно, за конечное число итераций, методами линейного программирования.

Двойственная задача синтеза оптимальных структур шарнирно-стержневых систем по энергетическому критерию. С прямой исходной задачей линейного программирования тесным образом связана другая линейная задача, называемая двойственной [12]. Связь прямой и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Применяя правила формального перехода от прямой задачи к двойственной, запишем ее постановку:

$$V(N^{(i)}) = (1/2)(P^{(i)}, N^{(i)}) \rightarrow \max \quad (5.32)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} A^T N^{(i)} &\leq \kappa_1; \\ -A^T N^{(i)} &\leq \kappa_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Линейная форма $V(N^{(i)})$ представляет собой работу внешних сил $P^{(i)}$ на перемещениях $N^{(i)}$, а система ограничений (5.33) выражает условие, что деформации в стержнях системы не должны превышать заданных предельных значений. Постановки прямой (5.29)—(5.31) и двойственной (5.32), (5.33) задач даны без учета условий жесткости стержневых систем. Это простейшие задачи оптимального проектирования стержневых систем. Двойственная задача позволяет без изменения ее линейного характера учитывать и условия жесткости систем. Запишем постановку задачи (5.32), (5.33) с учетом условий жесткости

$$V(N^{(i)}) = (1/2)(P^{(i)}, N^{(i)}) \rightarrow \max \quad (5.34)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} A^T N^{(i)} &\leq \kappa_1; \\ -A^T N^{(i)} &\leq \kappa_2; \\ N^{(i)} &\leq \Delta_1; \\ -N^{(i)} &\leq \Delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Впервые прямая и двойственная задачи синтеза оптимальных структур шарнирно-стержневых систем по энергетическому и весовому критериям в терминах линейного программирования были сформулированы Д. А. Мацюлявичюсом в работах [18, 19]. Прямая задача синтеза оптимальных структур шарнирно-стержневых систем по весовому критерию в линейной постановке имеет следующий вид:

$$\xi(S^{(i)}) = (C_1, S_1^{(i)}) + (C_2, S_2^{(i)}) \rightarrow \min \quad (5.36)$$

при ограничениях:

$$AS_1^{(i)} - AS_2^{(i)} = P^{(i)}; \quad (5.37)$$

$$S_1^{(i)} \geq 0; \quad S_2^{(i)} \geq 0. \quad (5.38)$$

Линейная форма (5.36) выражает теоретическую массу упругой шарнирно-стержневой системы. В выражении (5.36)

$$C_1 = (\rho_1 l_1 / R_1, \rho_2 l_2 / R_2, \dots, \rho_i l_i / R_i, \dots, \rho_n l_n / R_n),$$

$$C_2 = (\rho_1 l_1 / \varphi R_1, \rho_2 l_2 / \varphi R_2, \dots, \rho_i l_i / \varphi R_i, \dots, \rho_n l_n / \varphi R_n) -$$

заданные n -мерные векторы коэффициентов массы соответственно для растянутых и сжатых элементов; ρ_i — плотность материала; l_i — длина; R_i — расчетное сопротивление материала; φ_i — коэффициент продольного изгиба i -го элемента.

Сравнивая математические модели задач (5.29)—(5.31) и (5.36)—(5.38) между собой, можно видеть, что они отличаются лишь коэффициентами при целевых функциях. Следовательно, когда предельные деформации в целевой функции (5.29) равны или пропорциональны коэффициентам массы в целевой функции (5.36), то задачи (5.29)—(5.31) и (5.36)—(5.38) тождественны, а их оптимальные решения одинаковы. Это значит, что в результате решения задач синтеза оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы по энергетическому и весовому критериям будет получена конструкция с минимальной упругой энергией деформации, обладающая минимальной массой. В общем случае, когда плотность, модуль упругости и расчетное сопротивление материала элементов имеют различные значения и, следовательно, коэффициенты целевых функций не могут быть пропорциональны, задачи (5.29)—(5.31) и (5.36)—(5.38) не тождественны.

Оптимальное решение задачи (5.29)—(5.31) в общем случае соответствует шарнирно-стержневой системе с минимальной упругой энергией деформаций, не обладающей минимумом массы. При решении задачи (5.36)—(5.38) получается совершенно обратная картина: оптимальное решение соответствует шарнирно-стержневой системе с минимальной массой и с неминимальной упругой энергией деформации. Таким образом, оптимальные решения этих задач в общем случае соответствуют абсолютно разным шарнирно-стержневым системам.

Оптимальное проектирование структур шарнирно-стержневых систем. Проектирование оптимальных структур шарнирно-стержневых систем ведется на дискретизированном поле узлов, соединенных стержнями. Число узлов и стержней принимается заведомо завышенным. И хотя из них не все останутся в оптимальной стержневой системе, такой прием позволяет за счет лишних узлов и стержней расширить множество вариантов структур, проверяемых на оптимальность. В результате решения задачи синтеза оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы по энергетическому критерию в нелинейных

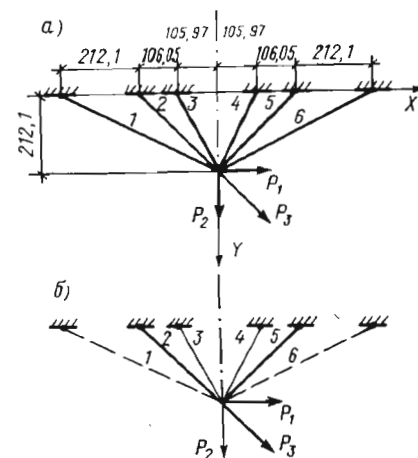
постановках (5.21)—(5.24) и (5.25)—(5.28), в линейных постановках (5.29)—(5.31) и (5.34), (5.35) и по весовому критерию в линейной постановке (5.36)—(5.38) получаем для каждого нагружения j свою конструкцию с минимальной упругой энергией деформации или минимальной массой. Причем получаемая оптимальная структура шарнирно-стержневой системы для одного вида нагружения не всегда совпадает с оптимальной структурой, отвечающей другому виду нагружения.

Следовательно, оптимизация на основе перечисленных математических моделей возможна лишь в случае одного нагружения или в случае преобладающего силового воздействия на конструкцию, а также при проектировании конструкции из независимых друг от друга стержневых подсистем с оптимальными структурами соответственно для каждого вида нагружений. Проектирование оптимальных шарнирно-стержневых систем с универсальными структурами, т. е. таких, которые бы

Таблица 9. Нагрузки и основные параметры исходной и оптимальной стержневой систем

Номера стержней	Длины стержней, см	Оптимальные поперечные сечения стержней, см ²	Место приложения нагрузок	Нагрузки, Н
1—2 1—3 1—4 1—5 1—6	50 121 131 87 57	1,98 8,81 0,00 0,00 4,02	Узел № 1	$P_1^x = 3,10;$ $P_1^y = -726;$ $P_1^z = 40,8$
1—7 2—3 2—4 2—5 2—6	144 131 121 129 79	0,00 0,02 9,98 2,54 3,90	Узел № 2	$P_2^x = -7,90;$ $P_2^y = -562;$ $P_2^z = -258$
2—8 3—4 3—5 3—7 3—8	140 50 144 87 57	0,00 0,29 0,99 0,00 4,75	Узел № 3	$P_3^x = -466;$ $P_3^y = 718;$ $P_3^z = 8,11$
4—6 4—7 4—8	140 129 79	0,00 3,43 3,99	Узел № 4	$P_4^x = -417;$ $P_4^y = 513;$ $P_4^z = -149$

Рис. 41. Синтез оптимальной структуры плоской шарнирно-стержневой системы
а — схема исходная;
б — то же, оптимальная



удовлетворяли различным силовым воздействиям путем решения задач в линейной и нелинейной постановках, не представляется возможным еще и потому, что такие системы могут быть статически неопределимы, в то время как оптимальные решения упомянутых задач соответствуют статически определенным конструкциям. Однако использование результатов решения этих задач как начальной информации для последующего поиска оптимальной шарнирно-стержневой системы с универсальной структурой по методике, изложенной в 5.1, является обоснованным. К тому же при таком подходе исключается необходимость решать задачу упругого расчета для каждого нагружения (задача 1) и задачу корректировки значений узловых перемещений и деформации элементов (задача 2). Непосредственно решая задачу 3, получаем оптимальные шарнирно-стержневые системы с универсальными структурами, удовлетворяющие различным силовым воздействиям.

Согласно предложенной методике по машинной программе ПРОСС-1 были реализованы примеры синтеза оптимальных структур шарнирно-стержневых систем по весовому критерию:

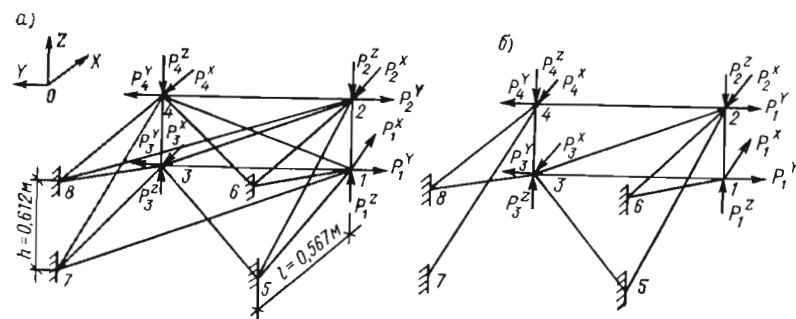
Пример 1. Исходная плоская шарнирно-стержневая система (рис. 41), состоящая из шести стержней ($l_1=l_6=497,3$ см; $l_2=l_5=300$ см; $l_3=l_4=237,1$ см), подвержена трем видам нагружений:

$$\begin{aligned} P_1^x &= 21 \text{ кН}; & P_2^x &= 0; & P_3^x &= 14,85 \text{ кН}; \\ P_1^y &= 0; & P_2^y &= 21 \text{ кН}; & P_3^y &= 14,85 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Нагрузки прикладываются к узлу. Модуль упругости материала $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа. Исходные площади поперечных сечений стержней составляли $F_1=F_2=1,658$ см²; $F_3=F_4=0,790$ см²; $F_5=F_6=1$ см²; масса $m_0=26\,239$ г.

В результате решения задач статического расчета (задача 1), а также корректировки значений узловых перемещений N и деформаций стержневых элементов κ (задача 2) были выявлены соотношения между перемещениями и деформациями для трех видов нагружений:

Рис. 42. Синтез оптимальной структуры пространственной шарнирно-стержневой системы
а — схема исходная; б — то же, оптимальная



$$N_1 = \begin{pmatrix} 0,1048951 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1013513 \end{pmatrix};$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0,0741258 \\ 0,0716698 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0,0894755 \\ 0,0741608 \\ 0,0468881 \\ -0,0468881 \\ -0,0741608 \\ -0,0894755 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0,0431756 \\ 0,0716553 \\ 0,0906080 \\ 0,0906080 \\ 0,0716553 \\ 0,0431756 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0,0938032 \\ 0,1031127 \\ 0,0972293 \\ 0,0309163 \\ -0,0017717 \\ -0,0327406 \end{pmatrix}.$$

На основе полученных значений узловых перемещений и деформаций была решена задача минимизации по массе исходной шестистержневой системы (задача 3). Оптимальная стержневая система на заданные виды нагрузок приведена на рис. 41, б. Площади поперечных сечений стержней при этом приняли следующие значения: $F_1=0$; $F_2=2,8289 \text{ см}^2$; $F_3=0,0637 \text{ см}^2$; $F_4=0,0640 \text{ см}^2$; $F_5=2,8285 \text{ см}^2$; $F_6=0$, а масса уменьшилась до $m=17\,277$.

Пример 2. Исходные данные и результаты решения задачи синтеза пространственной оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы (рис. 42) приведены в табл. 9.

Начальный объем материала конструкций при площадях поперечных сечений стержней $F=4,43 \text{ см}^2$ был равен 8311 см^3 , оптимальный объем материала составил 4429 см^3 .

5.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ ПО ЖЕСТКОСТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЗНАЧЕНИЯМ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИАЛА

Конструктивные системы биологических объектов, выполняющие опорные (например, стебли растений) или защитные (например, черепа, панцири и т. д.) функции, не всегда могут свободно перемещаться под действием внешних механических нагрузок. Тогда последние производят работу по изменению структуры конструктивной системы. В этом случае конечный результат механического воздействия определяется жесткостными и прочностными характеристиками материала, которые, как известно, имеют электромагнитную природу.

Показатель массы конструкции во многом зависит от жесткости и плотности материала вещества и определяется отношением E/ρ (где E — модуль упругости материала), которое называется удельным модулем Юнга. Для большинства конструктивных материалов удельный модуль Юнга имеет приблизительно одно и то же значение. Однако, насколько не сопоставимы их массы вследствие различных значений плотностей веществ, видно из табл. 10.

Прочностные характеристики биологических тканей ниже, чем у металлов, но если проанализировать отношение их прочности к плотности, то можно видеть, что металлы и по этому показателю значительно уступают тканям растений и животных. Из табл. 10 видно также, что существуют определенные зависимости между прочностью, жесткостью и массой, характеризующие соответственно σ , E , ρ . Физически в веществах эти зависимости проявляются в виде определенных структур. Однако следует отметить, что структуры тканей растений и животных отличаются от структур металлов еще и тем, что они образуются в условиях постоянного преодоления живыми организмами сил гравитации. Именно поэтому такие антигравитационные структуры и представляют интерес при создании искусственных систем, оптимальных по массе [49].

Формулировка задачи и ее решение. Исходя из существующей зависимости между прочностью, жесткостью и массой (см. табл. 10), которые могут быть учтены ограничениями вида $E/\rho \leq \xi$ и $\sigma/\rho \leq \zeta$, задача поиска оптимальной структуры для упругой конструктивной системы с числом узловых точек k , соединенных n элементами, может быть сформулирована в следующем виде:

$$f(E) = (1, E) \rightarrow \min (\max) \quad (5.39)$$

при ограничениях:

$$(\rho, F) \leq m^*; \quad (5.40)$$

$$AS_i = P_j; \quad (5.41)$$

Таблица 10. Физико-механические характеристики некоторых материалов

Наименование материалов	Модуль упругости E , МПа	Плотность ρ , г/см ³	Прочность на разрыв σ , МПа	E/ρ	σ/ρ
Сталь	210 000	7,86	400	25 445	50,89
Титан	120 000	4,50	700	26 667	155,56
Алюминий	70 000	2,70	230	25 926	85,18
Кость	30 000	1,20	150	25 000	125,00
Дерево (сосна обыкновенная)	12 500	0,520	115	24 038	221,15

$$S_j - EF[C] \kappa_j = 0; \quad (5.42)$$

$$E - \xi \rho \leq 0; \quad (5.43)$$

$$\left. \begin{aligned} S_j - \zeta \rho F &\leq 0; \\ -S_j - \zeta \rho F &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

$$A^T N_j - \kappa_j = 0; \quad (5.45)$$

$$\left. \begin{aligned} N_j &\leq \delta(+); \\ -N_j &\leq \delta(-); \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

$$E \geq 0; \quad F \geq 0; \quad \rho \geq 0, \quad (5.47)$$

где (5.40) — ограничения на теоретическую массу; (5.41) — условия равновесия; (5.42) — физические условия; (5.43) — ограничения на отношения модулей упругости к плотностям материала элементов (в неявном виде); (5.44) — то же, на отношения предельных напряжений в элементах к плотностям материала (в неявном виде); (5.45) — условия совместности деформаций; (5.46) — условия жесткости; (5.47) — то же, неотрицательности; A — матрица условий статического равновесия; $EF[C] = (E_1 F_1 [C]_1, E_2 F_2 [C]_2, \dots, E_i F_i [C]_i, \dots, E_n F_n [C]_n)$ — квазидиагональная матрица жесткости n конечных элементов; $E_i F_i [C]_i$ — матрица жесткости i -го одномерного (i -го двумерного) конечного элемента, аналогичная матрице, приведенной в 3.5 и 5.1; $I = (I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_n)$ — сум-вектор n конечных элементов; $E = (E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_n)$ — иско-мый вектор значений модулей упругости n конечных элементов; $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n)$ — то же, плотностей n конечных элементов; $F = (F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$ — то же, площадей поперечных сечений n конечных элементов; S — то же, усилий n конечных элементов; κ — то же, деформаций n конечных элементов; N — то же, узловых перемещений упругой конструктивной системы; l — заданный вектор длин n конечных элементов; m^* — фиксированное значение теоретической массы упругой конструктивной системы; ξ — заданная предельная величина отношения E/ρ ; ζ — то же, отношения σ/ρ ; $\delta(+)$, $\delta(-)$ — заданные векторы допустимых значений узловых перемещений упругой конструктивной системы; P — заданный вектор внешних сил и сосредоточенных моментов в узлах упругой конструктивной системы; $j=1, 2, \dots, h$ — число за-гружений.

Математическая модель (5.39) — (5.47) в силу нелинейности ограничений (5.40), (5.42) и (5.44) представляет собой нелинейную многоэкстремальную задачу математического программирования. Для решения этой задачи можно использовать алгоритм поиска глобального экстремума [39].

Геометрическая интерпретация задачи оптимизации. Дадим при заданных значениях внешней силы P и узловых перемещений N конструктивной системы геометрическое толкование задачи (5.39) — (5.47), используя для примера систему из двух стержней (рис. 43), подверженную силовому воздействию — растяжению от нагрузки P .

Математическую модель задачи (5.39) — (5.47) в случае одного нагружения и одной плотности материала для двух-стержневой системы с заданным значением узлового перемещения запишем так:

$$(E_1 + E_2) \rightarrow \min(\max) \quad (5.48)$$

при следующих ограничениях:

$$0 + 0 + 0 + 0 + l_1 \rho F_1 + l_2 \rho F_2 \leq m^*; \quad (5.49)$$

$$0 + 0 + S_1 + S_2 + 0 + 0 = P; \quad (5.50)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 + S_1 + 0 - \frac{E_1 F_1}{l_1} \kappa_1 + 0 &= 0; \\ 0 + 0 + 0 + S_2 + 0 - \frac{E_2 F_2}{l_2} \kappa_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 - \rho \xi + 0 + 0 + E_1 + 0 &\leq 0; \\ 0 - \rho \xi + 0 + 0 + 0 + E_2 &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 + S_1 + 0 - \zeta \rho F_1 + 0 &\leq 0; \\ 0 + 0 + 0 - S_2 + 0 - \zeta \rho F_2 &\leq 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

$$\left. \begin{aligned} N + 0 + 0 + 0 - \kappa_1 + 0 &= 0; \\ N + 0 + 0 + 0 + 0 - \kappa_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

$$N + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \leq \delta(+); \quad (5.55)$$

$$E_1 \geq 0, \quad E_2 \geq 0, \quad F_1 \geq 0, \quad F_2 \geq 0, \quad (5.56)$$

где (5.49) — ограничения на теоретическую массу; (5.50) — условия равновесия; (5.51) — физические условия; (5.52) — ограничения на отношение модуля упругости к плотности материала (в неявном виде); (5.53) — то же, на отношения предельных напряжений в элементах к плотности материала (в неявном виде); (5.54) — условия совместности деформаций; (5.55) — условия жесткости (5.56) — то же, неотрицательности.

Из уравнений (5.50) и (5.51) выразим площади поперечных сечений стержней следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= l_1 S_1 / (E_1 \kappa_1); \\ F_2 &= l_2 (P - S_1) / (E_2 \kappa_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Принимаем согласно условиям жесткости (5.55) узловое перемещение равным допустимому значению $\delta^{(+)}$. Тогда из условий (5.54) определяются деформации ($\chi_1 = \delta^{(+)}$, $\chi_2 = \delta^{(+)}$).

После подстановки выражений (5.57) в неравенства (5.49), (5.52), (5.53) и (5.56) с учетом полученных значений деформаций и последующих преобразований математическая модель (5.48) — (5.56) примет следующий вид:

$$(1 + 1/c) E_1 \rightarrow \min (\max) \quad (5.58)$$

при ограничениях:

$$b\rho S_1 - m^* E_1 \leq -a\rho P; \quad (5.59)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^{(+)} E_1}{l_1} &\leq \xi \rho; \\ \frac{\delta^{(+)} E_1}{l_2} &\leq c \xi \rho; \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

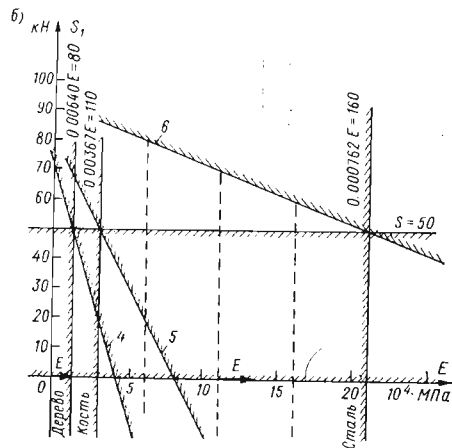
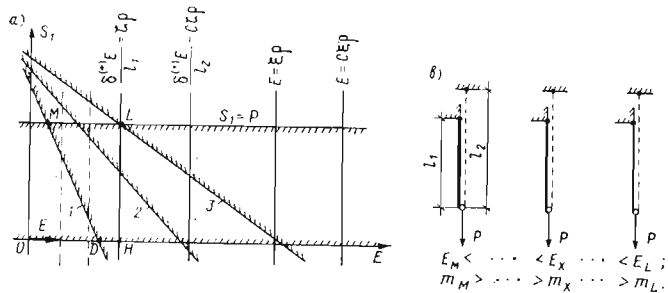


Рис. 43. Геометрическое решение задачи синтеза оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы исходя из жесткостных характеристик элементов

a — двухстержневая система из условного материала;
b — двухстержневая система из конкретных материалов;
1, 2, 3 — ограничения на массу двухстержневой системы соответственно в точке *M*, *(b\rho S_1 - m_M E \leq -a\rho P)*, произвольной точке *X* *(b\rho S_1 - m_X E \leq -a\rho P)* и в точке *L* *(b\rho S_1 - m_L E \leq -a\rho P)*;
4, 5, 6 — ограничения на массу двухстержневой системы, представленной соответственно из дерева;
 $b\rho S_1 - m_d E_d = -a\rho P$ ($m_d = 0,25$ кг), кости;
 $b\rho S_1 - m_k E_k = -a\rho P$ ($m_k = 0,55$ кг) и стали;
 $b\rho S_1 - m_c E_c = -a\rho P$ ($m_c = 2,46$ кг);
v — оптимальные структуры упругой системы при $l_1 = 100$ см, $l_2 = 200$ см, $P = 50$ кН

$$S_1 \leq P; \quad (5.61)$$

$$E_1 \leq \xi \rho; \quad (5.62)$$

$$E_1 \leq c \xi \rho; \quad (5.63)$$

$$S_1 \geq 0, \quad E_1 \geq 0, \quad c \geq 0, \quad (5.63)$$

где $a = c l_2^2 / \delta^{(+)}$, $b = (l_1^2 / \delta^{(+)} - c l_2^2 / \delta^{(+)})$, $c = E_1 / E_2$, причем

$$\left. \begin{aligned} b > 0 & \text{ при } c < l_1^2 / l_2^2; \\ b = 0 & \text{ при } c = l_1^2 / l_2^2; \\ b < 0 & \text{ при } c > l_1^2 / l_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

Если коэффициент соотношения модулей упругости c задан, то математическая модель (5.58) — (5.63) в силу линейности целевой функции (5.58) и неравенств (5.59) — (5.63) представляет собой задачу линейного программирования. Так как задача содержит только два неизвестных, то она может быть решена геометрически (см. рис. 43). Ограничения представляют собой нестрогие неравенства, и, как видно из рис. 43, *a*, образуют область определения линейной формы в виде неправильного многоугольника (*MLHD*). При этом граничная прямая условия (5.59) с положительным направлением оси E образует тупой угол, если $b > 0$, угол, равный 90° , если $b = 0$, и острый угол, если $b < 0$.

Минимум целевой функции (5.58) при заданном граничном значении m^* достигается, когда изоцелевая прямая E коснется вершины многоугольника *MLHD* — точки *M*. Эта точка и определяет оптимальное решение конкретно для заданной величины m^* . Геометрическое решение показывает (рис. 43, *b*), что заданным величинам массы соответствуют свои стержневые конструкции с оптимальными структурами, представленными в виде одного короткого стержня со своими значениями модулей упругости. При этом уменьшающейся последовательности масс ($m_M > \dots > m_H \dots > m_L$) отвечает увеличивающаяся последовательность значений модулей упругости ($E_M < \dots < E_H \dots < E_L$). С уменьшением задаваемых величин массы m^* многоугольник допустимых решений линейной формы *MLHD* постепенно сужается сначала до треугольника *MLH*, а затем вырождается в точку *L*. Эта точка является предельным положением изоцелевой линии и определяет окончательное решение задачи синтеза оптимальной конфигурации стержневой системы по весовому критерию и по минимальной величине модуля упругости материала элементов.

Из геометрического решения задачи (5.58) — (5.63) также видно, что при касании изоцелевой прямой E всей стороны *HL* — области определения линейной формы последняя достигает максимального значения. Причем в этом случае координаты всех точек отрезка *HL* являются оптимальными реше-

ниями задачи. При дальнейшем уменьшении значений массы m^* область допустимых решений постепенно будет сужаться, а длина отрезка HL — уменьшаться. Соответственно будет сокращаться и количество оптимальных решений задачи до тех пор, пока область допустимых решений не выродится в точку L . Как известно, координаты этой точки дают окончательное решение задачи (5.58) — (5.63).

Таким образом, из геометрической интерпретации задачи видно, что если исходить из максимизации модуля упругости, то можно избежать решения целой последовательности частных задач со своими заданными величинами масс. Для этого сначала достаточно решить задачу (5.58) — (5.63) при заданной величине m^* . Затем, после получения максимального значения модуля упругости, надо решить задачу в постановке оптимизации по массе (см. 5.1) с постоянной величиной E_{\max} . Оптимальное решение будет адекватно конечному результату последовательно решенных частных задач в постановке (5.58) — (5.63) как с минимизацией, так и с максимизацией линейной формы.

На рис. 43, в представлены геометрические решения задачи синтеза оптимальной конфигурации конструктивной системы по упомянутым критериям на примере двухстержневой системы, изготовленной из различных материалов (дерево, кость, металл).

5.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗИЛЬЯНСОВЫХ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Конструкции живых организмов не только обладают минимальной массой, но им также присуща способность запасать большое количество упругой энергии деформации на единицу объема (массы) при действии нагрузки. Как уже отмечалось в 4.4, такая способность носит название резильянса — свойства конструктивных систем максимально поглощать упругую энергию деформации без разрушения. Пластинчато-стержневые конструкции, спроектированные с учетом этого свойства, вследствие больших деформаций могут оказаться слишком мягкими для выполнения своих функций. Это ограничивает величину резильянса, которую проектировщики могли бы заложить. Конструкции зданий и сооружений должны быть достаточно жесткими и прочными, чтобы выполнять несущие и ограждающие функции. Поэтому в резильянсовых пластинчато-стержневых конструкциях необходимо также учитывать прочность и жесткость, т. е. искать компромиссное решение. В этом случае можно применить энергетический подход к задачам оптимизации конструкций и метод их решения, предложенные в работах [35, 39, 47].

Следует заметить, что минимальным значением потенциальной энергии определяются не только устойчивые равновесные состояния, но и, как показано в 5.2, оптимальные массы упругих стержневых конструкций. Идентичность энергетического и весового критериев отражает энергетический смысл задачи оптимизации по массе [60]. Однако это условие выполняется лишь в случае одинаковых значений объемных масс, модулей упругости и критических напряжений материала элементов стержневых систем. В общем случае оно не выполняется.

Чтобы сохранить энергетический смысл задачи оптимизации в общем случае и получить необходимые параметры массы и резильянса упругих конструкций при заданных условиях жесткости, при постановке задач достаточно использовать энергетические экстремальные принципы с фиксированием значений теоретической массы.

Задача 1. При действии на упругую конструктивную систему с фиксированной массой произвольной нагрузки согласно энергетическому экстремальному принципу в статической формулировке из всех статически возможных состояний в ней устанавливается именно то, при котором потенциальная энергия деформаций принимает минимальное значение. Тогда можно записать следующую задачу оптимизации упругой пластинчато-стержневой конструкции из n конечных элементов с фиксированным значением массы в соответствии с приведенным экстремальным принципом:

$$\min \sum_{j=1}^t (1/2) (F[C] \kappa_j, \kappa_j) \quad (5.65)$$

при ограничениях:

$$(\gamma b, F) \leq m^*; \quad (5.66)$$

$$AF[C] \kappa_j = P_j; \quad (5.67)$$

$$F_j \geq 0, \quad (5.68)$$

где (5.65) — целевая функция (минимизируется потенциальная энергия деформаций); (5.66) — ограничения на теоретическую массу; (5.67) — условия равновесия; (5.68) — условия неотрицательности; A — матрица условий статического равновесия; $F[C] = (F_1[C]_1, F_2[C]_2, \dots, F_s[C]_s, \dots, F_n[C]_n)$ — квазидиагональная матрица жесткости n конечных элементов; $F_s[C]_s$ — матрица жесткости s -го одномерного (s -го двумерного) конечного элемента, аналогичная матрице, приведенной в 3.5 и 5.1; κ — искомый вектор деформаций n конечных элементов; $F = (F_1, F_2, \dots, F_s, \dots, F_n)$ — то же, площадей поперечного сечения n элементов; m^* — фиксированное значение теоретической массы, пластинчато-стержневой системы; b — вектор длин n конечных элементов; γ — вектор плотности материала n конечных элементов; P — заданный вектор внешних сил и сосредоточенных моментов в узлах; $j = 1, 2, \dots, t$ — число нагружений.

[illegible]

В результате решения ряда задач методами математического программирования [12, 27] при различных значениях энергии находится ее глобальный экстремум и соответствующее минимальное значение теоретической массы.

5.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО МАССЕ, С УЧЕТОМ НАПРАВЛЕННОЙ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

оптимизации ее по массе. Таким образом, возможен синтез устойчивых пластинчато-стержневых систем, оптимальных по массе, на основе сочетания бионического принципа направленной формы потери устойчивости [41] и методов оптимального проектирования конструкций [39].

Рассмотрим произвольную упругую пластинчато-стержневую систему с числом узловых точек m , соединенных n элементами с заданными площадями поперечных сечений, и одновременно приложим в узлы внешние силы, соответствующие различным случаям нагружений. Напряженно-деформированное состояние такой системы под действием силовых воздействий, соответствующих всем видам внешних нагружений, можно определить, решив задачу статического расчета.

$$g(\kappa, N) = (1/2) (F[C] \kappa, \kappa) - (\bar{P}, N) \rightarrow \min \quad (5.78)$$



при ограничениях

$$A^T N - I \kappa = 0. \quad (5.79)$$

Здесь A — матрица условий статического равновесия: $F[C] = (F_1[C], F_2[C], \dots, F_n[C])$ — квазидиагональная матрица жесткости конечных элементов; $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ — заданный вектор площадей поперечных сечений элементов; N — искомый $(6 \times m \times 1)$ -мерный вектор узловых перемещений; I — единичная матрица; P — заданный вектор сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов в узлах от всех загрузок.

Квадратичная форма (5.78) представляет собой потенциальную энергию. Равенство (5.79) выражает условия совместности деформаций. Математическая модель (5.78), (5.79) задачи расчета пластинчато-стержневой системы в упругой стадии представляет собой задачу квадратичного программирования.

В результате решения задачи (5.78), (5.79) определяются векторы деформаций элементов κ и узловых перемещений N , которые характеризуют не только деформированное состояние, но и дают представление о направленности формы потери устойчивости пластинчато-стержневой системы. Затем исходной пластинчато-стержневой системе и ее элементам придаются очертания в соответствии с выявленной формой потери устойчивости и проводится статический расчет ее на каждый вид загрузки $P^{(j)}$ ($j=1, 2, 3, \dots, k$). В результате определяются векторы деформаций элементов $\kappa^{(j)}$ и узловых перемещений $N^{(j)}$ для каждого нагружения j , после чего решается задача корректировки.

При корректировке значений узловых перемещений и деформаций элементов пластинчато-стержневой системы исходя из условий прочности и жесткости для случая малых перемещений и деформаций решается задача (5.3) — (5.8). Корректировка значений узловых перемещений и деформаций элементов пластинчато-стержневой системы из условий прочности и жесткости для случая больших перемещений и малых деформаций осуществляется путем последовательного решения уравнений вида

$$\Delta N_n^{(j)} = -[K_1(N_n^{(j)}) + K_2(S_n^{(j)})]^{-1} [A(N_n^{(j)}) S_n^{(j)} - P_n^{(j)}]. \quad (5.80)$$

Матрицы $K_1(N_n^{(j)})$ и $K_2(S_n^{(j)})$ определяются соответственно из выражений:

$$K_1(N_n^{(j)}) = A(N_n^{(j)}) (F[C]) A^T(N_n^{(j)}); \quad (5.81)$$

$$\Delta A(N_n^{(j)}) S_n^{(j)} = K_2(S_n^{(j)}) \Delta N_n^{(j)}; \quad (5.82)$$

$$S_n^{(j)} = (F[C]) \kappa_n^{(j)}; \quad (5.83)$$

$$P_n^{(j)} = P_0^{(j)} + n \Delta P_n^{(j)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (5.84)$$

$$N_{n+1}^{(j)} = N_n^{(j)} + \Delta N_n^{(j)} \leq \Delta; \quad (5.85)$$

$$\Delta \kappa_n^{(j)} = A^T(N_n^{(j)}) \Delta N_n^{(j)}; \quad (5.86)$$

$$\kappa_{n+1}^{(j)} = \kappa_n^{(j)} + \Delta \kappa_n^{(j)} \leq [\kappa]. \quad (5.87)$$

Здесь $\Delta N_n^{(j)}$ — вектор приращений узловых перемещений; $S_n^{(j)}$ — вектор усилий в элементах; $\Delta P_n^{(j)}$ — вектор приращений нагрузок; $\Delta \kappa_n^{(j)}$ — вектор приращений деформаций в элементах; $n=0, 1, 2, 3, \dots$ — количество ступеней догружений.

В результате решения задачи корректировки (геометрически линейная или геометрически нелинейная задачи) получаются те соотношения между предельными значениями деформаций элементов и узловыми перемещениями пластинчато-стержневой системы, при которых удовлетворяются условия прочности и жесткости. Теперь можно перейти к задаче минимизации по массе устойчивой пластинчато-стержневой системы в случае многих загрузок. Для этого решается задача оптимизации (5.9) — (5.11).

Проектирование пластинчато-стержневых систем с использованием бионического принципа направленной формы потери устойчивости позволяет повысить несущую способность их, которая определяется в этом случае только прочностью и жесткостью.

Примеры проектирования бионических конструкций с использованием принципа направленной формы потери устойчивости приведены в главе 7.

Использование этого принципа в практике проектирования стержневых, пластинчатых и пластинчато-стержневых систем позволило не только повысить их устойчивость, но и упростить расчет на устойчивость. В последнем случае проверка на устойчивость сводится к определению критических сил или соответствующих прогибов конструкций, выполненных в соответствии с очертаниями осевых линий, срединных плоскостей или поверхностей, отвечающих их действительному изгибу при нагружении.

Современные методы оптимизации в сочетании с бионическим принципом направленной формы потери устойчивости позволяют получать конструктивные системы, которые отличаются пластичными формами от традиционных балочных, рамных конструкций и т. д. Математические модели задач оптимизации конструктивных систем с учетом потери устойчивости, сформулированных на основе этого принципа, упрощаются, что дает возможность использовать для решений эффективные методы математического программирования. Исследования биологических конструктивных систем также показали, что для повышения их устойчивости природа активно использует повороты поперечных сечений вдоль осей элементов (естественное закручивание).

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ

6

Следует поставить перед собой цель изыскать способ решения всех задач... одним и притом простым способом.

Ж. Д'Аламбер

Анализируя постановки задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем, приведенные в главах 2, 3 и 5, как задач математического программирования, можно заметить, что несмотря на различия в содержании, математическая формулировка этих задач сходна. Следовательно, для их реализации можно использовать общие методы решения экстремальных задач.

Задача математического программирования формулируется так: необходимо определить вектор $S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*)$, который обеспечивает минимум $f(S)$ при ограничениях $g_i(S) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$; $h_j(S) = 0$, $j = 1, \dots, b$.

Если функции f , $\{g_i\}$ и $\{h_j\}$ линейны, то задача называется задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из этих функций нелинейна, то задача называется задачей нелинейного программирования. В области математического программирования лучше всего исследованы задачи линейного программирования [12]. Достаточно подробно были исследованы задачи квадратичного программирования. Причем в этих задачах целевая функция $f(S)$ представляет собой неотрицательно определенную квадратичную форму, а ограничения линейны [27].

Интересные результаты получены для задач выпуклого программирования, т. е. когда $f(S)$ — выпуклая, $g_i(S)$ — вогнутые, а $h_j(S)$ — линейные функции. Выпуклость и вогнутость функций гарантируют выпуклость области допустимых решений, а также глобальность любого локального решения. Необходимые и достаточные условия существования экстремума этих задач приведены в работах [12, 28].

Трудный класс задач оптимизации составляют нелинейные невыпуклые задачи. И хотя за последние 20 лет появилось

много работ, относящихся к теории и развитию вычислительных алгоритмов [31, 54], все же в общем случае решить невыпуклую задачу еще не удалось. Главная трудность невыпуклых задач состоит в том, что среди локальных минимумов необходимо разыскивать глобальный. Вследствие этого для решения даже совсем небольших задач требуется применять вычислительные машины, а реализация задачи с несколькими десятками переменных может оказаться не под силу даже для мощной ЭВМ.

Группа методов штрафных функций, используемая при решении задач выпуклого программирования, привела к убедительным теоретическим результатам и эффективным вычислительным процедурам. Исследования последних лет [28, 53], показали, что эти методы можно распространять и на задачи нелинейного невыпуклого программирования, получая при этом существенные результаты.

6.1. О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОГО РАСЧЕТА И СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАСТИНЧАТО- СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В главах 2, 3 и 5 было показано, что задачи упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем представляют собой условные задачи математического программирования, но лишь только в очень простых случаях удается найти решение этих задач в явном виде. В большинстве же случаев для решения задач оптимизации конструктивных систем приходится применять тот или иной численный метод.

В вычислительной практике упругого расчета и оптимизации пластинчато-стержневых систем наиболее распространены точные методы [18, 42, 52]. В итерационных (бесконечных) методах строится последовательность все более точных приближений к решению. Прекращая вычислительный процесс после того или иного числа итераций, можем получить решение с заданной точностью. Применение итерационных методов целесообразно также в тех случаях (даже если задача может быть решена точными методами), когда объем памяти вычислительной машины ограничен или ошибки округления могут значительно исказить результат. Но, к сожалению, в большинстве случаев они сходятся чрезвычайно медленно [28].

Метод математического анализа при решении задачи расчета упругих пластинчато-стержневых систем. Рассмотрим три основных пути решения задачи расчета упругих конструкций как задачи квадратичного программирования.

1. Обратимся к математической модели задачи расчета:

$$f(S) = (1/2)(DS, S) \rightarrow \min \quad (6.1)$$

при ограничениях

$$AS = P, \quad (6.2)$$

где (6.1) — целевая функция (минимизируется потенциальная энергия деформаций); (6.2) — условия равновесия.

Покажем, что при заданных соотношениях жесткостей возможно решение поставленной задачи методом математического анализа [59]. Формальный ход решения такой задачи следующий: из уравнений равновесия $(n-m)$ неизвестных выражаются через m лишних неизвестных и подставляются в выражение квадратичной формы. Далее полученную квадратичную форму с m неизвестными дифференцируем по этим неизвестным и получаем систему линейных уравнений, из которых определяются неизвестные, после чего определяются и все остальные неизвестные.

Покажем конкретно решение такой задачи. Матрица условий статического равновесия A разбивается на матрицу A_{n-m} , состоящую из $(n-m)$ линейно независимых векторов, и матрицу A_m , состоящую из остальных m векторов, т. е. $A = [A_{n-m}, A_m]$. Тогда уравнения равновесия (6.2) можно записать так:

$$A_{n-m}S_{n-m} + A_mS_m = P, \quad (6.3)$$

откуда

$$S_{n-m} = A_{n-m}^{-1}P - A_{n-m}^{-1}A_mS_m. \quad (6.4)$$

Соответственно разбивается и матрица податливости

$$D = \begin{pmatrix} D_{n-m, n-m} & D_{n-m, m} \\ D_{m, n-m} & D_{m, m} \end{pmatrix}.$$

После этих преобразований квадратичная форма (6.1) будет иметь следующий вид:

$$f(S) = (1/2) S^T D S = (1/2) (S_{n-m}, S_m)^T \begin{pmatrix} D_{n-m, n-m} & D_{n-m, m} \\ D_{m, n-m} & D_{m, m} \end{pmatrix} (S_{n-m}, S_m). \quad (6.5)$$

Если теперь в (6.5) подставить выражение (6.4), продифференцировать по лишним неизвестным усилиям S_m и приравнять производную нулю, то получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} & [(A_{n-m}^{-1}A_m)^T D_{n-m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m - D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m - \\ & - (D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m)^T + D_{m, m}] S_m = \\ & = [(A_{n-m}^{-1}A_m)^T D_{n-m, n-m} A_{n-m}^{-1} - D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}] P. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Согласно теореме Кастильяно первая производная от потенциальной энергии деформации по силе дает перемещение по направлению этой силы. Следовательно, уравнения (6.6) представляют собой [33] канонические уравнения метода сил.

Отсюда

$$S_m = [(A_{n-m}^{-1}A_m)^T D_{n-m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m - D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m - (D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}A_m)^T + D_{m, m}]^{-1} [(A_{n-m}^{-1}A_m)^T \times \times D_{n-m, n-m} A_{n-m}^{-1} - D_{m, n-m} A_{n-m}^{-1}] P. \quad (6.7)$$

Неизвестные усилия S_{n-m} определяются из (6.4). Однако при таком подходе к решению всегда требуется выполнять обращение матрицы условий статического равновесия. Это обстоятельство неприятно проявляется при решении особенно больших систем, а именно: исходная матрица A_{n-m} обычно содержит много нулевых элементов и может быть компактно записана, обратная же матрица этим свойством не обладает. Вот почему ее запись требует большего объема оперативной памяти машины. К тому же накапливаются вычислительные погрешности из-за неустойчивости к ошибкам округления. Эти факторы и не позволяют рассчитывать большие стержневые системы методом математического анализа.

2. Обратимся к математической модели задачи расчета:

$$f(S) = -(1/2) (DS, S) + (P, W) \rightarrow \max \quad (6.8)$$

при ограничениях

$$\partial f(S)/\partial S = DS - AW = 0. \quad (6.9)$$

Задача (6.8), (6.9) является двойственной по отношению к задаче (6.1), (6.2). Квадратичная форма (6.8) представляет собой дополнительную работу внешних сил. Ограничения (6.9) означают условия совместности деформаций, выраженные через усилия. Из условий совместности деформаций имеем:

$$S = D^{-1}AW. \quad (6.10)$$

Подставляя это выражение в функцию цели (6.8), получаем

$$f(W) = -(1/2) (AD^{-1}A^T W, W) + (P, W) \rightarrow \max. \quad (6.11)$$

Теперь покажем, что при заданных соотношениях жесткостей также возможно решение поставленной задачи методом математического анализа. В этом случае производная, полученная дифференцированием выражения (6.11) по перемещениям, приравнивается нулю:

$$\partial f(W)/\partial W = (AD^{-1}A^T)^{-1}W - P = 0 \quad (6.12)$$

и определяются перемещения

$$W = (AD^{-1}A^T)^{-1}P. \quad (6.13)$$

Далее перемещения подставляются в уравнение совместности деформаций $A^T W = DS^T$ и получается формула для отыскания усилий в стержнях системы:

$$S = D^{-1}A^T (AD^{-1}A^T)^{-1}P. \quad (6.14)$$

Равенства (6.12) представляют собой не что иное, как систему канонических уравнений метода перемещений [33].

Хотя формула (6.13) определения перемещений и удобна для машинного счета, но в ней в той или иной форме необходимо выполнять обращения матрицы $(AD^{-1}A^T)$. Последнее обстоятельство, как известно, требует большого объема оперативной памяти машины, а это очень ограничивает размеры стержневых систем. Кроме того, при расчете больших стержневых систем накапливаются вычислительные погрешности, что существенно отражается на точности вычислений.

3. Задачу расчета пластинчато-стержневых систем (6.1), (6.2) можно решить с использованием неопределенных множителей Лагранжа, образовав функцию

$$\varphi(S, W) = (1/2)(DS, S) + W^T(AS - P). \quad (6.15)$$

Необходимые условия экстремума функции $\varphi(S, W)$ дают систему

$$\left. \begin{aligned} \partial\varphi(S, W)/\partial S &= DS + A^T W = 0; \\ \partial\varphi(S, W)/\partial W &= AS - P = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Эту систему равенств можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

W является вектором перемещений, а условия (6.16) — уравнениями совместности деформаций и равновесия. Система равенств (6.17) представляет собой не что иное, как систему канонических уравнений смешанного метода [33]. Такая запись удобна тем, что не требует дополнительных перемножений матриц, как, например, в методе перемещений (6.14). Это позволяет избежать дополнительных погрешностей, возникающих из-за округлений при перемножении матриц. Однако при решении задач большой размерности и такой подход не позволяет избежать недостатков точных методов.

Метод квадратичного программирования при решении задачи расчета стержневых систем. Итак, при определении искомых перемещений по формуле (6.13) или усилий по формуле (6.14) в задачах расчета стержневых систем всегда приходится сталкиваться с обращением матрицы. Это требует (особенно при решении задач большой размерности) значительного объема оперативной памяти машины. Неустойчивость точных методов к ошибкам округления ведет к накоплению вычислительной погрешности. Все это приводит к ограничению размеров задач расчета стержневых систем с помощью точных методов.

В связи с этим всегда существовал интерес к итерационным методам. Главным достоинством этих методов является отсутствие в них преобразования исходной матрицы, поэтому даже

задачи большого объема со слабо заполненной матрицей могут быть размещены в оперативной памяти машины. Они устойчивы и не накапливают погрешностей. Однако итерационные методы обладают медленной сходимостью. Ряд исследователей, таких как Ф. Л. Фокс, Е. Л. Стентен, Л. Фрид, все же предлагают находить перемещения путем прямой минимизации квадратичной формы (6.11). Для этого они используют метод сопряженных градиентов Хестенеса и Штифеля [66, 70] и его развитие Флетчером и Ривзом. Этот метод обладает большей скоростью сходимости по сравнению со всеми существующими итерационными методами [64], являясь по форме итерационным, он дает решение задачи в постановке (6.11) за m шагов, соответствующих размерности W , т. е. получаем m последовательных приближений решения системы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} W^{k+1} &= W^k - \alpha_k \rho^k; \\ \rho^k &= f'(W^k) + \beta_k \rho^{k-1}, \quad \rho^0 = f'(W^0); \\ \alpha_k : f(W^k - \alpha_k \rho^k) &= \min_{\alpha} f(W^k - \alpha \rho^k); \\ \beta_k &= \frac{\|f'(W^k)\|^2}{\|f'(W^{k-1})\|^2}; \\ f'(W^k) &= (AD^{-1}A^T)W^k - P, \end{aligned}$$

где k — номер итерации.

Вот почему этот метод относят к конечным [27]. Своими достоинствами он до сих пор привлекает исследователей и рекомендуется ими как общий метод расчета упругих стержневых систем. Однако в данном методе используются операции умножения, что при сильно заполненных матрицах ведет к существенному отклонению от точного решения. Особенно это сказывается при решении задач расчета больших стержневых систем. В подобных случаях для получения искомого вектора решений W требуется гораздо большее число шагов, чем его размерность, и метод сопряженных градиентов практически становится бесконечным.

Метод линейного программирования при решении задачи синтеза оптимальной структуры упругой стержневой системы. Одной из важных, но трудных проблем расчета пластинчато-стержневых систем является решение задач синтеза оптимальных стержневых конструкций, т. е. таких, для которых стоимость, масса или упругая энергия деформации достигают наименьшего значения. Рассмотрим возможности решения задач этого класса методами линейного программирования. Обратимся к постановкам задач (5.29) — (5.31) и (5.36) — (5.38).

Для решения указанных задач в настоящее время наибольшее применение нашел метод последовательного улучшения плана [18], который является шаговым методом. Основы этого

Таблица 11. Исходная система уравнений равновесия

$\frac{i_2}{i_1}$	1	2
1	0	$\alpha_{12}S_{12}$
	0	$\beta_{12}S_{12}$
2	$-\alpha_{12}S_{12}$	0
	$-\beta_{12}S_{12}$	0
...
$m-1$	$-\alpha_{1m-1}S_{1m-1}$	$-\alpha_{2m-1}S_{2m-1}$
	$-\beta_{1m-1}S_{1m-1}$	$-\beta_{2m-1}S_{2m-1}$
m	$-\alpha_{1m}S_{1m}$	$-\alpha_{2m}S_{2m}$
	$-\beta_{1m}S_{1m}$	$-\beta_{2m}S_{2m}$

метода изложены в литературе по линейному программированию. Хотя при этом решение получается и за конечное число шагов, но оно прямо зависит от выбора начального опорного плана: чем ближе опорный план к оптимальному, тем меньше число шагов. Кроме того, сам выбор статически определимой и геометрически неизменяемой конструкции с ростом числа узлов значительно усложняется. К тому же возможны вырожденные варианты.

В работе [44] была использована постановка задачи (5.36)—(5.38), хотя в принципе можно было использовать и постановку (5.29)—(5.31) и для ее решения предлагалось сочетание методов построения начального опорного плана и последовательного улучшения плана. Такой подход позволяет построить начальный опорный план, избежав вырожденных вариантов.

В самом методе построения заложен эвристический принцип, позволяющий при построении начального опорного плана приблизиться к оптимальному, что ведет к сокращению количества просчетов. При таком подходе вычисления упрощаются за счет автоматического приведения исходной матрицы системы к блочно-треугольному виду с матрицами второго порядка (если стержневая система плоская) или третьего порядка (если стержневая система пространственная) в каждом блоке.

Распишем постановку задачи (5.36)—(5.38) для шарнирно-стержневых систем и решим ее путем сочетания метода построения начального опорного плана и метода последовательного улучшения плана. Введем следующие обозначения: i — номер узла конструкции ($i=1, 2, \dots, k$); P_i — внешняя сила, приложенная в узле i ; α_i — косинус угла, образованного направлением внешней силы P_i с осью x ; β_i — то же, направлением внешней силы P_i с осью y ; γ_i — то же, направлением внешней силы

$\frac{i_2}{i_1}$	3	...	m	Проекции внешних сил, приложенных в узлах
1	$\alpha_{13}S_{13}$ $\beta_{13}S_{13}$...	$\alpha_{1m}S_{1m}$ $\beta_{1m}S_{1m}$	$-\alpha_1 P_1$ $-\beta_1 P_1$
2	$\alpha_{23}S_{23}$ $\beta_{23}S_{23}$...	$\alpha_{2m}S_{2m}$ $\beta_{2m}S_{2m}$	$-\alpha_2 P_2$ $-\beta_2 P_2$
...
$m-1$	$-\alpha_{3m-1}S_{3m-1}$ $-\beta_{3m-1}S_{3m-1}$...	$\alpha_{mm-1}S_{mm-1}$ $\beta_{mm-1}S_{mm-1}$	$-\alpha_{m-1} P_{m-1}$ $-\beta_{m-1} P_{m-1}$
m	$-\alpha_{3m}S_{3m}$ $-\beta_{3m}S_{3m}$...		$-\alpha_m P_m$ $-\beta_m P_m$

P_i с осью z ; $\alpha_{i_1 i_2}$ — то же, стержнем $i_1 i_2$ с осью x ; $\beta_{i_1 i_2}$ — то же, стержнем $i_1 i_2$ с осью y ; $\gamma_{i_1 i_2}$ — косинус угла, образованного стержнем $i_1 i_2$ с осью z ; $S_{i_1 i_2}$ — усилие в стержне $i_1 i_2$ ($i_1 i_2=1, 2, \dots, k$; $i_1 \neq i_2$), которое можно представить в виде $S_{i_1 i_2}^{(+)} - S_{i_1 i_2}^{(-)}$,

где $S_{i_1 i_2}^{(+)} \geq 0$ и $S_{i_1 i_2}^{(-)} \geq 0$, так как

$$S_{i_1 i_2}^{(+)} = \begin{cases} S_{i_1 i_2}, & \text{если } S_{i_1 i_2} \geq 0; \\ 0, & \text{если } S_{i_1 i_2} < 0; \end{cases}$$

$$S_{i_1 i_2}^{(-)} = \begin{cases} -S_{i_1 i_2}, & \text{если } S_{i_1 i_2} \leq 0; \\ 0, & \text{если } S_{i_1 i_2} > 0; \end{cases}$$

$[\sigma_{i_1 i_2}^{(-)}]$ — расчетное сопротивление для сжатого стержня $i_1 i_2$; $[\sigma_{i_1 i_2}^{(+)}]$ — то же, для растянутого стержня $i_1 i_2$; $l_{i_1 i_2}$ — длина стержня $i_1 i_2$; ρ — плотность материала стержней; $F_{i_1 i_2}$ — площадь сечения стержня $i_1 i_2$.

Рассмотрим целевые функции и ограничения задач синтеза оптимальных структур для плоских и пространственных шарнирно-стержневых систем.

1. *Плоские шарнирно-стержневые системы.* Итак, задана любая система m узлов и произвольная система внешних сил.

Необходимо так соединить все узлы стержнями, чтобы получилась допустимая конструкция, для которой масса имеет наименьшее значение

$$\min \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \rho l_{i_1 i_2} F_{i_1 i_2}. \quad (6.18)$$

Представим (6.18) в следующем виде:

$$\min \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \rho l_{i_1 i_2} (S_{i_1 i_2}^{(+)} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(+)}] + S_{i_1 i_2}^{(-)} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(-)}]). \quad (6.18a)$$

Когда в стержне $i_1 i_2$ возникает растягивающее усилие $S_{i_1 i_2}^{(+)}$, то $S_{i_1 i_2}^{(-)} = 0$ и $S_{i_1 i_2}^{(-)} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(-)}]$ в формуле отсутствует, и наоборот, когда в стержне $i_1 i_2$ возникает сжимающее усилие $S_{i_1 i_2}^{(-)}$, то $S_{i_1 i_2}^{(+)} = 0$, а в формуле (6.18a) отсутствует $S_{i_1 i_2}^{(+)} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(+)}]$.

Введем следующие обозначения:

$$C_{i_1 i_2}^{(+)} = \rho l_{i_1 i_2} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(+)}] \quad \text{при } S^{(+)};$$

$$C_{i_1 i_2}^{(-)} = \rho l_{i_1 i_2} / [\sigma_{i_1 i_2}^{(-)}] \quad \text{при } S^{(-)}.$$

В результате формула (6.18) примет вид:

$$\min \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m (C_{i_1 i_2}^{(+)} S_{i_1 i_2}^{(+)} + C_{i_1 i_2}^{(-)} S_{i_1 i_2}^{(-)}). \quad (6.19)$$

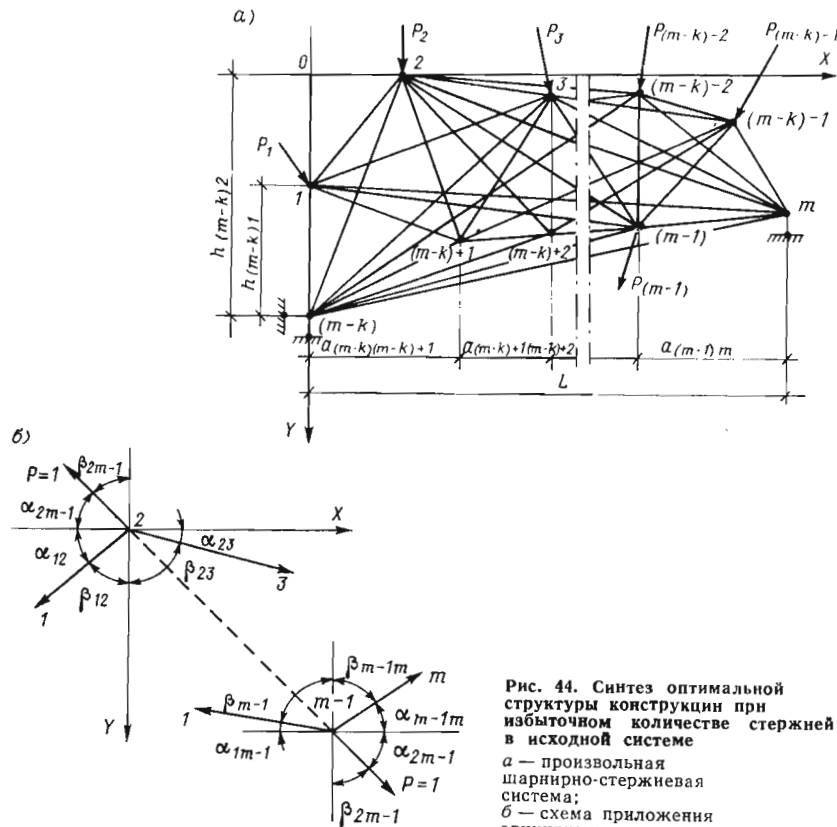


Рис. 44. Синтез оптимальной структуры конструкции при избыточном количестве стержней в исходной системе
а — произвольная шарнирно-стержневая система;
б — схема приложения единичных сил к узлам стержневой системы

Представим конструкцию, образованную в результате соединения узлов стержнями (рис. 44, а), в прямоугольной системе координат и запишем для каждого узла по два уравнения равновесия; получим систему из $2m$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} S_{12} + \alpha_{13} S_{13} + \dots + \alpha_{1m} S_{1m} &= -\alpha_1 P_1; \\ \beta_{12} S_{12} + \beta_{13} S_{13} + \dots + \beta_{1m} S_{1m} &= -\beta_1 P_1; \\ -\alpha_{12} S_{12} + \alpha_{23} S_{23} + \dots + \alpha_{2m} S_{2m} &= -\alpha_2 P_2; \\ -\beta_{12} S_{12} + \beta_{23} S_{23} + \dots + \beta_{2m} S_{2m} &= -\beta_2 P_2; \\ &\dots \dots \dots \\ -\alpha_{m-1} S_{m-1} - \alpha_{2m-1} S_{2m-1} + \dots + \alpha_{m-1m} S_{m-1m} &= \\ &= -\alpha_{m-1} P_{m-1}; \\ -\beta_{m-1} S_{m-1} - \beta_{2m-1} S_{2m-1} + \dots + \beta_{m-1m} S_{m-1m} &= \\ &= -\beta_{m-1} P_{m-1}; \\ -\alpha_{1m} S_{1m} - \alpha_{2m} S_{2m} - \dots - \alpha_{m-1m} S_{m-1m} &= -\alpha_m P_m; \\ -\beta_{1m} S_{1m} - \beta_{2m} S_{2m} - \dots - \beta_{m-1m} S_{m-1m} &= -\beta_m P_m. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Сведем систему уравнений (6.20) в табл. 11.

Система уравнений (6.20) вместе с неравенствами $S_{i_1 i_2}^{(+)} \geq 0$, $S_{i_1 i_2}^{(-)} \leq 0$ представляет собой ограничения рассматриваемой задачи. Таким образом, необходимо минимизировать линейную форму при линейных ограничениях, а это и есть в развернутом виде постановка задачи (5.36) — (5.38).

Алгоритм решения задачи. Решение начинается с построения начального опорного плана, в основу которого положен принцип построения геометрически неизменяемых и статически определимых ферм. Построение производится в следующем порядке: вначале выбираются три узла i_1, i_2, i_3 таким образом, чтобы в результате соединения их стержнями получался невырожденный треугольник. Условие невырожденности записывается так:

$$|\alpha_{i_1 i_2}| \neq |\alpha_{i_1 i_3}|. \quad (6.21)$$

Этот выбор осуществляется следующим образом: просматривается любая i -я строка (см. табл. 11) и выбираются два стержня $i_1 i_2$ и $i_1 i_3$ так, чтобы выполнялось условие (6.21). Далее стержни $i_1 i_2$ и $i_1 i_3$ фиксируются, а чтобы треугольник замкнулся, фиксируется и стержень $(i_2 i_3)$. Узлы i_1, i_2, i_3 , которые соединяются этими стержнями, также фиксируются. В табл. 11 помечаются соответствующие столбцы и строки.

После этого к выбранным узлам и стержням добавляется один узел и два стержня, соединяющие этот узел с двумя какими-либо из ранее выбранных узлов так, чтобы выполнялось условие невырожденности, аналогичное (6.21). Например, если выбирается новый узел i_4 , который соединяется с i_2 и i_3 , то

должно быть $|\alpha_{i_2 i_1}| \neq |\alpha_{i_1 i_2}|$. Такой выбор продолжается до тех пор, пока не будут зафиксированы все узлы.

Неизвестные, соответствующие выбранным стержням, включаются в опорный план (их количество будет равно $2m-3$). Для определения неизвестных усилий в выбранных стержнях можно использовать порядок их выбора: вначале находятся усилия в двух стержнях, соответствующих последнему из выбранных узлов, затем в двух стержнях, соответствующих предпоследнему узлу, и т. д. При этом в силу построения опорного плана процесс решения системы (6.20) распадается на последовательное решение линейных систем второго порядка. Решение системы уравнений и будет представлять неизвестные исходного опорного плана (допустим,

$$S^0 = [S_{12}^{(+)}, S_{13}^{(-)}, S_{14}^{(+)}, \dots, S_{1m-1}^{(+)}, S_{1m}^{(-)}, \dots, S_{m-1m}^{(+)}],$$

который затем проверяется на оптимальность; если он неоптимален, то его необходимо улучшить за счет введения в базис одного из не вошедших ранее векторов. С этой целью прежде всего надо определить коэффициенты разложения всех векторов, не вошедших ранее в базис.

Пусть система линейно независимых уравнений, из которых определится исходный опорный план, такова:

$$\left. \begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{12}S_{12} + \alpha_{23}S_{23} = -\alpha_2 P_2; \\ & -\beta_{12}S_{12} + \beta_{23}S_{23} = -\beta_2 P_2; \\ & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{1m-1}S_{1m-1} + \alpha_{m-1m}S_{m-1m} = -\alpha_{m-1}P_{m-1}; \\ & -\beta_{1m-1}S_{1m-1} + \beta_{m-1m}S_{m-1m} = -\beta_{m-1}P_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

В базис вводится какой-то вектор A_{2m-1} . После такого введения система уравнений (6.22) приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{12}S_{12} + \alpha_{23}S_{23} + \alpha_{2m-1}S_{2m-1} = -\alpha_2 P_2; \\ & -\beta_{12}S_{12} + \beta_{23}S_{23} + \beta_{2m-1}S_{2m-1} = -\beta_2 P_2; \\ & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{1m-1}S_{1m-1} + \alpha_{m-1m}S_{m-1m} - \alpha_{2m-1}S_{2m-1} = -\alpha_{m-1}P_{m-1}; \\ & -\beta_{1m-1}S_{1m-1} + \beta_{m-1m}S_{m-1m} - \beta_{2m-1}S_{2m-1} = -\beta_{m-1}P_{m-1}. \end{aligned} \right\}$$

В этой системе уравнений число неизвестных больше числа уравнений. Значит, коэффициенты при неизвестном S_{2m-1} находятся в линейной зависимости от коэффициентов при остальных неизвестных. Это можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{12}Y_{12} + \alpha_{23}K_{23} = \alpha_{2m-1}; \\ & -\beta_{12}Y_{12} + \beta_{23}Y_{23} = \beta_{2m-1}; \\ & \dots \dots \dots \\ & -\alpha_{1m-1}Y_{1m-1} + \alpha_{m-1m}Y_{m-1m} = -\alpha_{2m-1}; \\ & -\beta_{1m-1}Y_{1m-1} + \beta_{m-1m}Y_{m-1m} = -\beta_{2m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Из решения системы уравнений (6.23) получается вектор коэффициентов разложения

$$Y_{2m-1} = [Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}, \dots, Y_{1m-1}, Y_{1m}, \dots, Y_{m-1m}]$$

вектора A_{2m-1} по базису. С точки зрения строительной механики, это вектор усилий, возникающих в стержнях статически определимой конструкции от действия единичной силы (см. рис. 44, б).

Таким образом, чтобы получить коэффициент вектора, не вошедшего в базис, достаточно нагрузить исходную статически определимую конструкцию двумя взаимно произвольными силами, равными единице, направленными от узлов и лежащими на одной прямой с вектором, не вошедшим в базис, и определить усилия во всех стержнях. Найденные усилия и явятся коэффициентами разложения. В общем коэффициенты разложения определяются так же, как и неизвестные исходного опорного плана; аналогично решается система уравнений, лишь неизвестные опорного плана нужно заменить неизвестными коэффициентами разложения, а нагрузки — направляющими косинусами того вектора, коэффициенты разложения которого необходимо получить. После отыскания коэффициента разложения вычисляется

$$Z_{2m-1} = (C^0, Y_{2m-1}),$$

где C^0 — вектор-строка коэффициентов массы, соответствующая исходному опорному плану; записывается по следующему правилу: для $S^{(+)} \rightarrow C^{(+)}$, для $S^{(-)} \rightarrow C^{(-)}$.

Вычисленное Z_{2m-1} может быть: $Z_{2m-1}^{(+)} > 0$ или $Z_{2m-1} < 0$.

Подсчитав Z для всех векторов, не вошедших в план, проверяем исходный опорный план на оптимальность. Для этого определяем оценки:

$$\Delta Z = \begin{cases} \Delta Z^{(+)} = Z^{(+)} - C^{(+)} & \text{при } Z^{(+)}; \\ \Delta Z^{(-)} = Z^{(-)} - C^{(-)} & \text{при } Z^{(-)}. \end{cases}$$

Если вычисленные для всех векторов $\Delta Z \leq 0$, то исходный опорный план оптимален. Если хотя бы одно $\Delta Z > 0$, то в базис нужно вводить вектор со знаком, соответствующим ΔZ . Если имеется несколько $\Delta Z > 0$, то вводится тот вектор, для которого ΔZ — наибольшее. Пусть введен в базис A_{2m-1} . Для выявления

вектора, подлежащего исключению из базиса, составляются следующие отношения:

$$S_0/Y_{2\ m-1} = (S_{12}^{(+)} / Y_{12}, \quad S_{13}^{(-)} / Y_{13}, \quad S_{14}^{(+)} / Y_{14}, \quad \cdot \cdot \cdot, \quad S_{1\ m-1}^{(+)} / Y_{1\ m-1}, \\ S_{1m}^{(-)} / Y_{1m}, \quad \cdot \cdot \cdot, \quad S_{m-1\ m}^{(+)} / Y_{m-1\ m})$$

и выводится из базиса вектор, которому соответствует

$$t = \min(S_{12}^{(+)} / Y_{12}, S_{13}^{(-)} / Y_{13}, S_{14}^{(+)} / Y_{14}, \dots, S_{1\ m-1}^{(+)} / Y_{1\ m-1}, \\ S_{2\ m}^{(-)} / Y_{2\ m}, \dots, S_{m-1\ m}^{(+)} / Y_{m-1\ m}).$$

При этом минимум из этих соотношений выбирается следующим образом:

если вектор, вводимый в базис, положителен, то

$$t = \min(S_2^{(+)} / Y_{12}, S_4^{(+)} / Y_{14}, \dots, S_{l_{m-1}}^{(+)} / Y_{1 \ l_{m-1}}, \dots, S_{m-1 \ m}^{(+)} / Y_{m-1 \ m});$$

если вектор, вводимый в базис, отрицателен, то

$$t = \min(|S_3^{(-)}/Y_{13}|, \dots, |S_m^{(-)}/Y_{1m}|, \dots).$$

Таким образом получается новый базис и новый опорный план. Полученный опорный план вновь необходимо проверить на оптимальность; если он неоптимален, то надо улучшить его, вводя в базис какой-то из не вошедших в него векторов. Весь процесс повторяется до тех пор, пока не получатся все оценки $\Delta Z \leq 0$. Коэффициенты разложения векторов, не вошедших в базис, будут определяться из решения системы линейно независимых уравнений (6.20) только в первой итерации. В последующих итерациях при определении коэффициентов разложения векторов по новому базису будут использоваться коэффициенты разложения векторов по старому базису.

Пусть коэффициенты разложения всех векторов, не вошедших в старый базис, суть:

$$\left. \begin{array}{l} Y_{12}^{2m-k}, \dots, Y_{12}^{2m-1}, \dots; \\ Y_{13}^{2m-k}, \dots, Y_{13}^{2m-1}, \dots; \\ \vdots \\ Y_m^{2m-k}, \dots, Y_m^{2m-1}, \dots \end{array} \right\}$$

Известно также, что A_{2m-1} вводится в новый базис, а относительно A_{2m} предполагается, что он выводится из него. Коэффициенты разложения всех A_{2m-k} , ..., A_{2m} , не вошедших в но-

вый базис, определяются следующим образом: для вектора, который выводится из базиса

[illegible]

для остальных векторов, не вошедших в новый базис,

$$\begin{aligned} Y_{12}^{2m-k*} &= Y_{12}^{2m-k} - \beta Y_{12}^{2m-1}; \\ Y_{13}^{2m-k*} &= Y_{13}^{2m-k} - \beta Y_{13}^{2m-1}; \\ &\vdots \\ Y_{2m-1}^{2m-k*} &= Y_{2m-1}^{2m-k} / Y_{2m}^{2m-1} = b. \end{aligned}$$

2. *Пространственные шарнирно-стержневые системы.* В этом случае целевая функция может быть записана в форме (6.19), а система ограничений будет состоять из $3k$ уравнений равновесия, аналогичных (6.20), и из требования неотрицательности $S_{ik}^{(+)} \geq 0$ и $S_{ik}^{(-)} \geq 0$.

Процесс построения опорного плана проводится аналогично плоским стержневым системам, а именно: выбираются четыре узла i_1, i_2, i_3, i_4 , образующие невырожденный тетраэдр. Условие невырожденности записывается так:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1 i_4} & \alpha_{i_2 i_4} & \alpha_{i_3 i_4} \\ \beta_{i_1 i_1} & \beta_{i_2 i_4} & \beta_{i_3 i_4} \\ \gamma_{i_1 i_4} & \gamma_{i_2 i_4} & \gamma_{i_3 i_4} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.24)$$

где α, β, γ — косинусы углов, образованных осями стержней с осями координат.

Далее последовательно добавляются по одному узлу и по три стержня, соединяющие новый узел с тремя ранее выбранными так, чтобы эти четыре узла вместе образовывали невырожденный тетраэдр, и так продолжается до тех пор, пока не будут перебраны все узлы. Определение неизвестных усилий в выбранных стержнях, соответствующих опорному плану, сводится к последовательному решению нескольких линейных систем третьего порядка.

Описанный метод построения опорного плана не конкретизирует способ выбора тех узлов, к которым на каждом шаге присоединяется новый узел. В принципе, всегда можно этот узел присоединить к некоторым трем из первых четырех зафиксированных узлов, при этом в худшем случае нужно проверить два условия типа (6.24). Однако при таком соединении получится

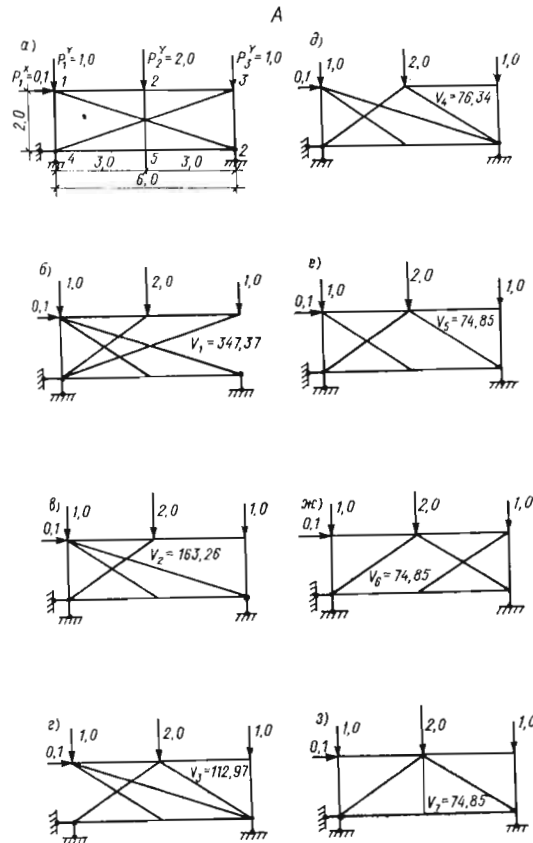
конструкция, как правило, заведомо далекая от оптимальной. Представляется, что более рациональным будет описанный ниже способ выбора стержней.

Пусть уже выбраны узлы i_1, i_2, \dots, i_k и какие-то стержни, их соединяющие. Берем узел i_{k+1} . Требуется выбрать узлы i_k, i_{k-1}, i_{k-2} из числа i_1, i_2, \dots, i_k так, чтобы

$$\Delta_{i_k, i_{k-1}, i_{k-2}, i_{k+1}} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_k i_{k+1}} & \alpha_{i_{k-1} i_{k+1}} & \alpha_{i_{k-2} i_{k+1}} \\ \beta_{i_k i_{k+1}} & \beta_{i_{k-1} i_{k+1}} & \beta_{i_{k-2} i_{k+1}} \\ \gamma_{i_k i_{k+1}} & \gamma_{i_{k-1} i_{k+1}} & \gamma_{i_{k-2} i_{k+1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Проверяем последовательно условия $\Delta_{i_{k-2}, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}} \neq 0$, $\Delta_{i_{k-3}, i_{k-2}, i_{k-1}, i_{k+1}} \neq 0$; $\Delta_{i_{k-4}, i_{k-3}, i_{k-2}, i_{k+1}} \neq 0, \dots$ до тех пор, пока не дойдем до условия $\Delta_{i_1, i_2, i_3, i_{k+1}} \neq 0$, которое оказывается невыполненным. Если оказалось, что при некотором $S(0, 1, 2, \dots, k-3)$ $\Delta_{i_{k-S-2}, i_{k-S-1}, i_{k-S}, i_{k+1}} \neq 0$, то выбираем стержни

Рис. 45. Синтез оптимальных структур (объем материала представлен в условных единицах)



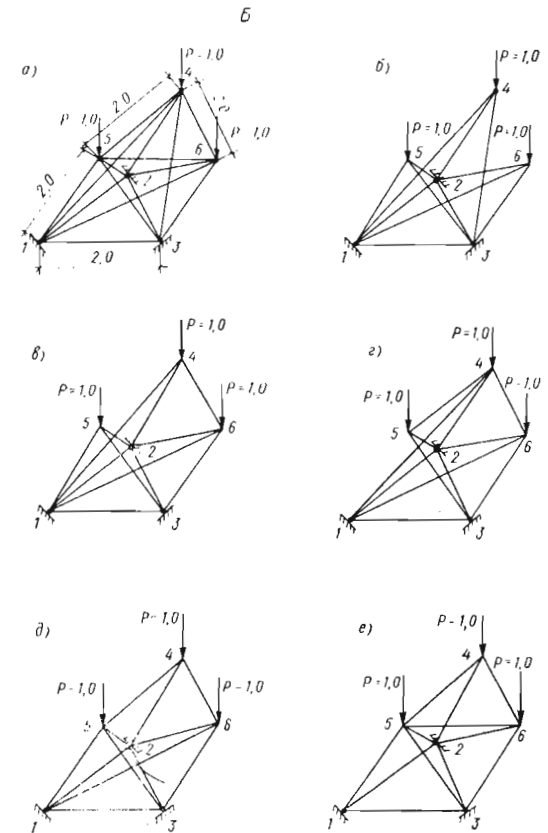
А — плоская шарнирно-стержневая система;
а — исходная схема;
б-з — процесс поиска оптимальной структуры;
е-з — оптимальные структуры;

$(i_{k-S-2}, i_{k+1}), (i_{k-S-1}, i_{k+1})$ и (i_{k-S}, i_{k+1}) . В противном случае, если таких S не существует, то можно выбрать любое сочетание из трех стержней: $(i_1, i_{k+1}), (i_2, i_{k+1}), (i_3, i_{k+1})$ или $(i_1, i_{k+1}), (i_3, i_{k+1}), (i_4, i_{k+1})$.

Действительно, узлы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют невырожденный тетраэдр, поэтому узел i_{k+1} не может образовывать вырожденный тетраэдр более чем с двумя гранями тетраэдра (i_1, i_2, i_3, i_4) , а две грани (i_2, i_3, i_4) и (i_1, i_2, i_3) к этому моменту были уже проверены на невырожденность. В остальном алгоритм решения задачи синтеза оптимальной структуры пространственной стержневой системы остается без изменения.

На рис. 45 приводятся примеры получения оптимальной структуры плоской и пространственной конструкций данным алгоритмом.

Размерность и сложности задач оптимизации. В начальный период применения аппарата математического программирования



Б — пространственная шарнирно-стержневая система;
а — исходная схема;
б-е — процесс поиска оптимальной структуры;
е — оптимальная структура

ния при проектировании оптимальных конструктивных систем предпочтение отдавалось общим постановкам задач. Эти задачи, как правило, имели небольшую размерность, поэтому трудностей, связанных с их реализацией, не возникало. С развитием и внедрением в практику строительства эффективных стержневых конструкций, упругих пластин и оболочек, подкрепленных ребрами, возникла необходимость решать задачи расчета и оптимизации больших пластинчато-стержневых систем [6, 38]. И здесь возникли свои сложности и трудности, вызванные такой особенностью, как размерность задачи. Проблема усложнилась, так как принципиально важными стали не только общая постановка задач, но и метод их решения.

Основные сложности, которые возникают с ростом размерности задач, вызваны главным образом заполненностью, обусловленностью и особенно обращением слаботолстых матриц, с которыми приходится иметь дело в задачах расчета и оптимизации. Все это сказывается на возможности реализации, на результате и времени счета больших систем.

Для наглядности покажем, как изменяется точность и время счета при решении задачи линейного программирования симплекс-методом с использованием обращения матрицы [22]. Решались задачи вида:

$$\min(C, S), S \in R^n, AS = P, P \in R^m, S \geq 0.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 12.

При реализации упомянутых задач упругого расчета и оптимизации пластинчато-стержневых систем как условно-экстремальных задач в основном и будут возникать осложнения, указанные выше. Если применим к этим задачам теорию алгоритмов перехода от условно-экстремальной задачи к задаче безусловной минимизации специальной вспомогательной функции [12, 28, 53], то получим общую задачу. Эта задача будет эквивалентна задачам расчета и оптимизации. При таком подходе надо думать уже над трудностями, возникающими при реализации одной общей задачи, а не над трудностями каждой задачи в отдельности.

6.2. МЕТОДЫ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

При решении задач расчета и оптимизации конструктивных систем как задач математического программирования возможны два случая: первый, когда решение может быть найдено с помощью дифференциального исчисления (расчет стержневых систем при работе в упругой стадии), и тогда задача определения условного экстремума функции сводится к задаче определения безусловного экстремума функции; второй случай, когда этот классический метод не применим.

Таблица 12. Характеристики задач линейного программирования

Номер задачи	n	m	δ	Время счета, мин	Δ
1	59	13	14	1	$3 \cdot 10^{-3}$
2	258	76	3	30	$2 \cdot 10^{-3}$
3	429	76	3	60	$7 \cdot 10^{-1}$
4	505	314	1	—	—

Примечания: 1. В таблице n — размерность S ; m — размерность P ; Δ — невязка в ограничениях для найденного решения; δ — заполненность матрицы A (в %).
2. Прочерк в графе означает, что решение такой задачи по данной программе не имеет смысла из-за слишком большого машинного времени и накопления вычислительной погрешности.

С теоретической точки зрения, метод неопределенных множителей Лагранжа, основанный на дифференциальном исчислении, наиболее прост, но он не может быть использован всегда, так как решение, которое находится с помощью дифференциального исчисления, основано на сопоставлении предельных приращений. Вследствие этого дифференциальное исчисление нельзя применять в задачах синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем в линейной постановке.

Для решения задач линейного программирования применяются особые методы, которые существенно отличаются от методов дифференциального исчисления. Чтобы условные задачи линейного программирования можно было свести к эквивалентным экстремальным задачам, требуется включение в оптимизируемую функцию небольшой нелинейности. Одним из таких подходов является введение квадратичной функции штрафа. Так, в методе Томаша Петшиковского [69] задача линейного программирования приводится к эквивалентной безусловной выпуклой экстремальной задаче. Это преобразование выполняется с помощью вспомогательной квадратичной функции штрафа. Идея квадратичной штрафной функции связана с именем Куранта [62].

Изложим основную идею методов штрафных функций, или методов последовательной безусловной минимизации. Эти методы с помощью штрафных функций преобразуют исходную задачу с ограничениями в последовательность задач без ограничений, т. е. ограничения включаются в минимизируемую функцию. При этом получаем последовательность задач на безусловный минимум, решения которых сводятся к решению исходной задачи. Пусть имеем следующую экстремальную задачу:

$$\min f(S) \quad (6.25)$$

при ограничениях

$$g_i(S) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.26)$$

Запишем функцию

$$\varphi[S, x(\lambda)] = f(S) + \sum_{i=1}^m x_i(\lambda) G[g_i(S)],$$

где λ — параметр; $\{x_i(\lambda)\}$ — весовые коэффициенты; $G[g_i(S)]$ — монотонная функция от $g_i(S)$, причем $G[g_i(S)] > 0$ при $g_i(S) < 0$ и $G[g_i(S)] = 0$ при $g_i(S) \geq 0$, если при вычислениях ограничения задачи удовлетворяются только для искомого оптимума, и $G[g_i(S)] \rightarrow +\infty$ при $g_i(S) \rightarrow +0$, если ограничения выполняются в процессе всех вычислений.

Сущность метода заключается в том, что выбирается последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_k\}$ и для каждого $k = 1, 2, \dots$ вычисляется вектор S^k , дающий минимум функции $\varphi[S, x(\lambda_k)]$. Когда же $k \rightarrow \infty$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, то $S^k \rightarrow S^*$ и $f(S^k) \rightarrow f^*$, где S^* — решение задачи, f^* — минимальное значение целевой функции. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m x_i(\lambda_k) G[g_i(S^k)] = 0;$$

тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi[S^k, x(\lambda_k)] - f(S^*) = 0.$$

Из последнего выражения видно, что исходная и модифицированная целевые функции сходятся к одному и тому же значению. Следовательно, влияние ограничений на модифицированную целевую функцию при $\lambda_k \rightarrow \infty$ постепенно уменьшается. Подобное преобразование дает то преимущество, что нет необходимости рассматривать ограничения отдельно, и для отыскания безусловных экстремумов можно применять как методы классического анализа, так и современные методы вычислительной математики. Кстати, следует отметить, что метод Лагранжа — это частный случай метода, в котором используются штрафные функции.

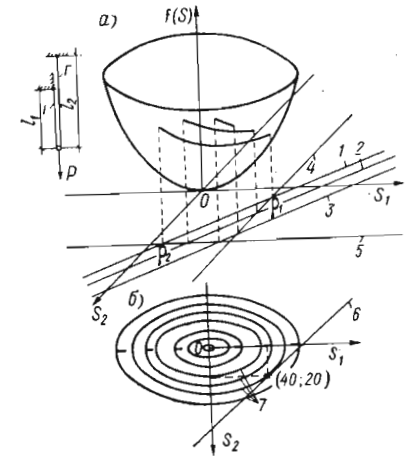
Рассмотрим основные методы преобразования задач упругого расчета и синтеза оптимальных конструктивных систем в безусловные задачи [37, 38].

6.3. МЕТОД ВНЕШНЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Идея метода внешней точки состоит в том, что условная экстремальная задача оптимизации конструктивных систем сводится к эквивалентной безусловной задаче с помощью квадратичной штрафной функции.

Рис. 46. Геометрическая интерпретация условно-экстремальной задачи упругого расчета

а — исходная двухстержневая система;
б — область статически возможных систем;
в — искомое решение задачи при $P = 60$ Н;
1, 2, 3, 6 — условия равновесия при различных значениях P ;
4, 5 — ограничения на усилия S ;
7 — линии уровня
 $[f(S) = 1/2 d_1 S_1^2 + 1/2 d_2 S_2^2 = \text{const}]$; $1 - S_1 + S_2 = P$; $2 - S_1 + S_2 = P$; $3 - S_1 + S_2 = P$; $4 - S_1 = Z$; $5 - S_2 = Z$; $6 - S_1 + S_2 = 60$



Задача упругого расчета пластинчато-стержневых систем. Как было показано в § 6.1, задача расчета пластинчато-стержневых систем при работе в упругой стадии заключается в отыскании вектора S^* , доставляющего минимум функции (6.1) при ограничениях (6.2).

Считаем, что $D \neq 0$. Область определения квадратичной формы (6.1) ограничена и представляет собой выпуклое множество, определяемое условиями (6.2) в силу их линейности. Сведем условную задачу расчета пластинчато-стержневых систем при работе в упругой стадии к эквивалентной выпуклой экстремальной задаче с помощью квадратичной штрафной функции.

$$\varphi(S) = (1/2)(DS, S) + \lambda_i \|AS - P\|^2 \rightarrow \min \quad (6.27)$$

Здесь λ_i — некоторая положительная постоянная — коэффициент штрафа ($\lambda_{i+1} > \lambda_i > 0$).

Функция (6.27), которую назовем расширенной упругой энергией деформации, совпадает с квадратичной формой задачи (6.1), (6.2) в области ее определения. Вне этой области функция $\varphi(S)$ отличается от квадратичной формы $f(S)$ на невязку $\lambda \|AS - P\|^2$ — меры отклонения точки S от множества, образованного равенством $AS = P$. Вообще говоря, множество M решений задачи (6.1), (6.2) не совпадает с множеством M_λ тощек, в которых функция $\varphi(S)$ достигает минимума на всем пространстве E^n . Но по мере увеличения фиктивной податливости λ множество M_λ приближается к множеству M . Совершается итерационный процесс, сходящийся со стороны недопустимой области с внешней стороны. Т. Петшиковский в своей работе [69] доказал сходимость метода квадратичной функции штрафа, примененного к задаче выпуклого программирования. Он по-

казал, что при $\lambda \rightarrow \infty$ точка S^* , в которой функция $\varphi(S)$ достигает минимума, стремится к точке \tilde{S} , в которой достигается условный минимум функции $f(S)$, и при этом $f(\tilde{S}) \rightarrow \varphi(S^*)$.

Покажем на простейшей шарнирно-стержневой системе геометрический смысл задачи упругого расчета.

Геометрическая интерпретация задачи расчета упругой шарнирно-стержневой системы как условно-экстремальной задачи. Итак, имеем систему из двух стержней (рис. 46, а), которая нагружена внешней нагрузкой P . Под действием этой нагрузки в стержнях будут возникать только растягивающие усилия. Обозначим через F_1 , F_2 заданные площади сечений, E — модуль упругости материала и l_1 , l_2 длины стержней. Меняя нагрузку P , можно получать различные статические системы. Мы же будем искать из множества статически возможных такие, для которых упругая энергия деформаций принимает наименьшее значение (рис. 46, б).

Для простоты интерпретации воспользуемся постановкой задачи (6.1), (6.2) и запишем ее для системы из двух стержней в виде $f(S) = (1/2)d_1 S_1^2 + (1/2)d_2 S_2^2 \rightarrow \min$ при ограничениях $S_1 + S_2 = P$.

Квадратичная форма, представляющая собой потенциальную энергию деформаций, строго выпуклая, так как миноры

$$D_1 = f_{11} \partial^2 f / \partial S_1 \partial S_1 = d_1 > 0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} > 0$$

положительны в любой точке. Эта функция определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве S_1 , S_2 , $f(S)$ (см. рис. 46, б).

Ограничения, представляющие собой условия равновесия системы, образуют на плоскости S_1 , S_2 область допустимых решений в виде прямой линии. Задача состоит в том, чтобы найти точку из области допустимых решений, которая отвечала бы наименьшему значению функции $f(S)$. Причем с изменением значений P будет меняться область допустимых решений и минимальное значение потенциальной энергии деформации.

Дадим геометрическое обоснование конкретно на числах, используя систему из двух стержней (см. рис. 46, а). Пусть $P = 60$ Н — внешняя нагрузка; $l_1 = 100$ см и $l_2 = 200$ см — длины стержней; $[\sigma] = 10$ МПа — допускаемое напряжение при растяжении; $E = 1000$ МПа — модуль упругости материала; $F_1 = 0,05$ см², $F_2 = 0,05$ см² — площади сечений стержней; тогда податливости стержней

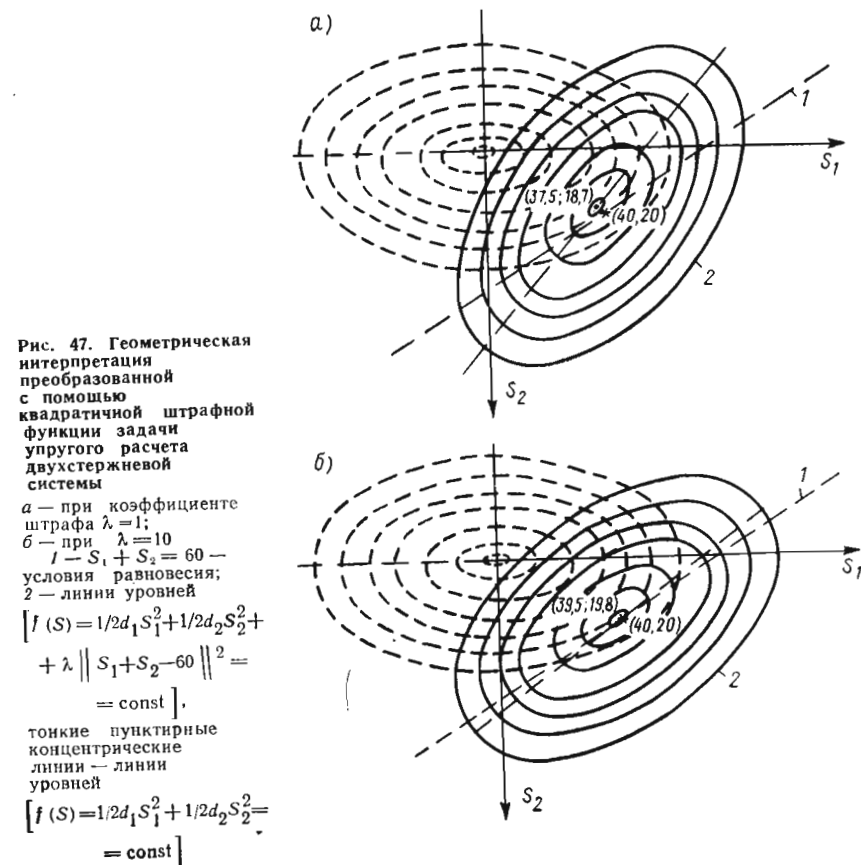
$$d_1 = \frac{l_1}{EF_1} = \frac{100}{100000 \cdot 0,05} = 0,02 \text{ см/Н};$$

$$d_2 = \frac{l_2}{EF_2} = \frac{200}{100000 \cdot 0,05} = 0,04 \text{ см/Н}.$$

Подставляя числовые значения в математическую модель (6.1) и (6.2), получим $f(S) = 0,01 S_1^2 + 0,02 S_2^2 \rightarrow \min$ при ограничениях $S_1 + S_2 = 60$.

Определим минимальное значение квадратичной формы $f(S)$ на множестве допустимых решений, определяемых равенством $S_1 + S_2 = 60$ (рис. 46, в). Это множество представляет собой прямую. Квадратичная форма $f(S)$ есть параболоид с вершиной в начале координат. Различным ее значениям соответствует семейство линий уровней. Построим эти линии. Одной из них в точке $\rho(40; 20)$ касается прямая, представляющая собой множество допустимых решений. Координаты этой точки, соответствующие усилиям в стержнях ($S_1 = 40$ Н, $S_2 = 20$ Н), определяют минимальное значение потенциальной энергии деформаций на множестве допустимых решений:

$$f(S) = 0,01 \cdot 40^2 + 0,02 \cdot 20^2 = 16,0 + 8,0 = 24,0 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$



Следовательно, они являются искомым решением задачи упругого расчета двухстержневой системы.

Геометрическая интерпретация преобразованной с помощью квадратичной штрафной функции задачи расчета упругой шарнирно-стержневой системы. Обратимся к математической модели (6.27) и представим ее для системы из двух стержней:

$$\varphi(S) = (1/2) d_1 S_1^2 + (1/2) d_2 S_2^2 + \lambda \|S_1 + S_2 - P\|^2 \rightarrow \min.$$

Здесь $f(S)$ — квадратичная форма, где $\lambda > 0$, причем $\varphi(S)$ строго выпуклая, так как миноры

$$D_1 = f_{11} = \partial^2 f / \partial S_1 \partial S_1 = d_1 + 2\lambda > 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 + 2\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & d_2 + 2\lambda \end{vmatrix} > 0$$

положительны в любой точке.

Квадратичная форма будет определять некоторую поверхность в трехмерном пространстве $S_1, S_2, \varphi(S)$. Различным значениям квадратичной формы $\varphi(S)$ соответствует семейство линий уровней в координатах S_1, S_2 (рис. 47). Построим линии уровней при числовых значениях $P=60$ Н, $d_1=0,02$ см/Н, $d_2=0,04$ см/Н.

При этих числовых значениях математическая модель (6.27) принимает следующий вид:

$$\varphi(S) = 0,01 S_1^2 + 0,02 S_2^2 + \lambda \|S_1 + S_2 - 60\|^2 \rightarrow \min.$$

В силу положительности миноров квадратичная форма $\varphi(S)$ является строго выпуклой. Для нахождения минимумов продифференцируем ее по S_1 и по S_2 . Соответственно получим:

$$\varphi'(S_1) = (d_1 + 2\lambda) S_1 + 2\lambda S_2 - 2\lambda P;$$

$$\varphi'(S_2) = 2\lambda S_1 + (d_2 + 2\lambda) S_2 - 2\lambda P.$$

Теперь приравняем производные нулю и решим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (d_1 + 2\lambda) S_1 + 2\lambda S_2 &= 2\lambda P; \\ 2\lambda S_1 + (d_2 + 2\lambda) S_2 &= 2\lambda P. \end{aligned} \right\}$$

В результате получим следующие решения:

$$S_1 = d_2 P / [(d_1 d_2 / 2\lambda) + d_1 + d_2]; \quad S_2 = d_1 P / [(d_1 d_2 / 2\lambda) + d_1 + d_2],$$

которые при коэффициенте штрафа $\lambda \rightarrow \infty$, $d_1 d_2 / 2\lambda = 0$ принимают вид

$$S_1 = d_2 P / (d_1 + d_2); \quad S_2 = d_1 P / (d_1 + d_2).$$

Если теперь в эти выражения подставим числовые значения $d_1=0,02$ см/Н, $d_2=0,04$ см/Н, $P=60$ Н, то получим $S_1=0,04 \cdot 60 / (0,02 + 0,04) = 40$ Н, $S_2=0,02 \cdot 60 / (0,02 + 0,04) = 20$ Н.

S_1, S_2 соответствуют координатам точки ρ (40; 20) (см. рис. 46). Мы получили точные значения усилий, возникающих

в стержнях при работе в упругой стадии. Но даже при коэффициенте штрафа $\lambda=1$ получаем для данного случая приемлемые значения усилий: $S_1=37,50$ Н, $S_2=18,75$ Н. При коэффициенте штрафа $\lambda=10$ получаем почти точные значения усилий: $S_1=39,80$ Н, $S_2=19,85$ Н.

Если при рассмотрении задачи (6.1), (6.2) как условной задачи расчета системы в упругой стадии искомая точка ρ (см. рис. 46, в) получается в результате касания линий уровня функции и прямой $S_1 + S_2 = P$, то при рассмотрении задачи расчета как задачи безусловной минимизации вспомогательной функции (6.27) точка ρ при $\lambda \rightarrow \infty$ является точкой глобального минимума этой вспомогательной функции.

Из рис. 47 видно, как с увеличением коэффициента штрафа λ происходит приближение точек глобального минимума вспомогательных функций к искомой точке ρ . Образно говоря, коэффициент штрафа λ выполняет роль фокусирующего устройства.

Синтез оптимальных пластинчато-стержневых систем. Задача синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем по весовому, жесткостному или по энергетическому критериям по сравнению с задачей статического расчета не только имеет сложную математическую модель, но и громоздка в смысле размерности. Поэтому, чтобы не усложнять сущности метода внешней точки, используемого для преобразования этих условных задач в эквивалентные безусловные задачи, изложим его на простой задаче синтеза оптимальных структур упругих шарнирно-стержневых систем. Обратимся к постановке задачи (5.34), (5.35) и запишем ее в следующем виде:

$$V(N) = (1/2)(P, N) \rightarrow \max \quad (6.28)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \xi_i(N) &= (A_i^T, N) - [W_i^{(+)}] \leq 0; \\ \xi_{n+i}(N) &= -(A_{n+i}^T, N) - [W_i^{(-)}] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{2n+j}(N) &= (e_j, N) - \Delta_j^{(+)} \leq 0; \\ \xi_{2n+m+j}(N) &= -(e_{m+j}, N) - \Delta_{m+j}^{(-)} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Здесь A_i^T и A_{n+i}^T — i -е или $(n+i)$ -е векторы — строки матрицы условий равновесия стержневой системы; e_j и e_{m+j} — $(2m)$ — мерные единичные векторы с единицей на j -м или $(m+j)$ -м месте.

Полагая

$$\begin{aligned} A_{2n+j}^T &= e_j, \quad [W_{2n+j}^{(+)}] = \Delta_j; \\ A_{2n+m+j}^T &= -e_{m+j}, \quad [W_{2n+m+j}^{(-)}] = \Delta_{m+j}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \\ [W_i] &= ([W_{2n+j}^{(+)}]; [W_{2n+m+j}^{(-)}]), \quad i = 1, 2, \dots, 2n + 2m, \end{aligned}$$

перепишем условия (6.29), (6.30) в эквивалентной форме

$$\xi_i(N) = (A_i^T, N) - [W_i] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n + 2m. \quad (6.31)$$

Считаем, что $P \neq 0$ и область определения линейной формы ограничена и представляет собой выпуклый многогранник W , определяемый условиями (6.31). Сведем условную задачу синтеза оптимальных структур стержневых систем при работе в упругой стадии к эквивалентной безусловной выпуклой экстремальной задаче с помощью квадратичной штрафной функции

$$\varphi(N) = -(1/2)(P, N) + \lambda \sum_{i=1}^{2n+2m} \delta_i [\xi_i(N)] [\xi_i(N)]^2 \rightarrow \min, \quad (6.32)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}[\xi_i(N)] = \tilde{\delta}_i(N) = \begin{cases} 0, & \text{если точка } N \text{ удовлетворяет} \\ & i\text{-му условию задачи;} \\ 1, & \text{если точка } N \text{ не удовлетворяет} \\ & i\text{-му условию задачи.} \end{cases}$$

Для условий задачи, записанных в форме (6.31), имеем:

$$\delta_i(N) = \begin{cases} 0, & \text{при } \xi_i(N) \leq 0; \\ 1, & \text{при } \xi_i(N) > 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Как видим, функция $\varphi(N)$ совпадает с линейной формой (6.28) в области ее определения (6.29), (6.30). Вне многогранника W функция $\varphi(N)$ отличается от линейной формы $-(1/2)(P, N)$ на квадратичную форму $\lambda \sum_{i \in I} ((A_i^T, N) - [W_i])^2$

где I — множество номеров нарушенных ограничений. При $\lambda \rightarrow \infty$ решение задачи (6.32) стремится к решению задачи (6.28) — (6.30). Перепишем задачу (6.32) в следующем виде:

$$\varphi(N) = -(1/2)(P, N) + \lambda \|(A^T N - [W])_+\|^2 \rightarrow \min; \quad (6.34)$$

$$\text{здесь } \|(A^T N - [W])_+\|^2 = \sum_{i=1}^{2n+2m} [\xi_i(N)]^2.$$

Запись «+» означает выполнение условия (6.33).

Геометрическая интерпретация задачи минимизации работы внешних сил. Распишем постановку задачи синтеза оптимальной структуры стержневых систем (6.28) — (6.30) для простейшей системы из двух стержней (рис. 46, а).

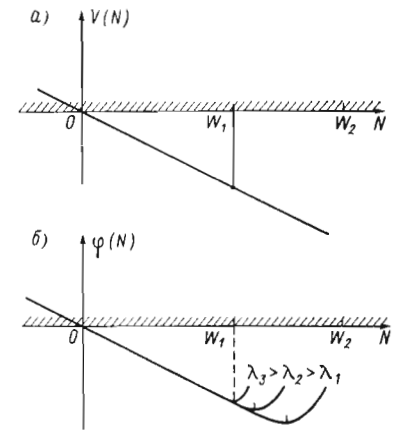
$$V(N) = -(1/2)(P, N) \rightarrow \min \quad (6.35)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} N - W_1 &\leq 0; \\ N - W_2 &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Для простоты интерпретации не будем учитывать ограничение на перемещение N . Линейная форма (6.35) представляет

Рис. 48. Геометрическая интерпретация задач синтеза оптимальной структуры стержневой системы
а — условно-экстремальная задача;
б — безусловно-экстремальная



собой работу внешней силы P , совершаемую на перемещение системы N . Ограничения (6.36), выраженные условиями совместности деформаций, образуют область допустимых решений, которая представляет собой множество точек на оси N (рис. 48, а), где $W_1, W_2 (W_1 < W_2)$ — соответственно допустимые продольные деформации при растяжении. Граничной точкой является точка W_1 , которая характеризует статически определимую систему с одним стержнем.

Все внутренние точки этой области — статически неопределимые системы из двух стержней. Целевая функция (6.35) является прямой, проходящей через начало координат. Наименьшее значение $((-1/2)P, W_1)$ эта функция принимает в точке а при значении аргумента $N = W_1$. Этому соответствует система, состоящая из одного стержня длиной l_1 . Таким образом, максимальное значение работы внешних сил равно минимальному значению потенциальной энергии деформации, т. е. здесь проявился двойственный характер задач. В зависимости от длины стержней меняется максимальное значение работы внешних сил. В частном случае при $l_1 = l_2$ оно будет одним и тем же и для систем статически неопределимых, состоящих из двух стержней, и статически определимых, состоящих из одного стержня.

Обратимся теперь к математической модели (6.34) и распишем ее для системы из двух стержней.

$$\varphi(N) = -(1/2)(P, N) + \lambda (\tilde{\delta}_1(N) [N - W_1]^2) + \lambda (\tilde{\delta}_2(N) [N - W_2]^2) \rightarrow \min, \quad (6.37)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_1(N) = \begin{cases} 0, & \text{если } N - W_1 \leq 0; \\ 1, & \text{если } N - W_1 > 0; \end{cases} \quad \tilde{\delta}_2(N) = \begin{cases} 0, & \text{если } N - W_2 \leq 0; \\ 1, & \text{если } N - W_2 > 0. \end{cases}$$

Фактически условную задачу линейного программирования (6.35), (6.36) свели к эквивалентной безусловной выпуклой экстремальной задаче (6.37).

При значениях N , которые удовлетворяют ограничениям (6.36), функция (6.37) совпадает с линейной формой (6.35). Но, вообще говоря, множество решений $[-\infty, W_1]$ задачи (6.35) не совпадает с множеством решений $[-\infty, \infty]$, в которых функция (6.37) достигает минимума. В действительности минимальное значение функции (6.37) по абсолютной величине больше минимального значения линейной формы (6.35) (рис. 48, б).

По мере увеличения λ множество решений задачи (6.37) приблизится к множеству решений задачи (6.35), (6.36), и минимальное значение функции будет все более отвечать минимальному значению линейной формы. Другими словами, итерационный процесс сходится со стороны недопустимой области решений (с внешней стороны).

Аналогичным образом преобразуются другие рассматриваемые задачи синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем по весовому, жесткостному или энергетическому критериям.

6.4. МЕТОД ВНУТРЕННЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Сущность метода внутренней точки заключается в том, что условная экстремальная задача (6.25), (6.26) сводится к эквивалентной безусловной или с помощью логарифмической функции штрафа

$$\varphi(S) = f(S) - \lambda_j \sum_{i=1}^m \ln q_i(S), \quad (6.38)$$

или с помощью обратной функции штрафа

$$\varphi(S) = f(S) + \lambda_j^2 \sum_{i=1}^m [1/q_i(S)], \quad (6.39)$$

где λ_j — произвольное положительное число.

При заданном λ_j задача сводится к минимизации $\varphi(S)$. Далее λ_j заменяется меньшим положительным числом $0 < \lambda_{j+1} < \lambda_j$, и процедура минимизации повторяется. Последовательности значений $\lambda \rightarrow 0$ соответствует последовательность локальных безусловных минимумов функции (6.38) или (6.39), сходящихся к условному минимуму задачи (6.25), (6.26) [53]. В отличие от метода внешней точки функции (6.38), (6.39) дают процесс, сходящийся со стороны допустимой области решения (с внутренней стороны).

Вернемся к геометрической интерпретации условной задачи расчета упругой системы из двух стержней. Заметим (см. рис. 46), что одна из линий уровней проходит через точку (40; 20). Эта точка соответствует наименьшему значению потенциальной энергии деформации в области допустимых решений, т. е. $\min f(S) = b$, $S \in Q$, $Q = \{S; AS = P\}$ и, следовательно, является искомым решением задачи расчета.

Теперь сформулируем задачу следующим образом: при заданной величине потенциальной энергии деформаций $f(S) = b$ требуется определить максимальные значения усилий, а следовательно, и максимальное значение внешней нагрузки, вызывающей эти усилия:

$$q(S) = -S_1 - S_2 \rightarrow \min \quad (6.40)$$

при ограничениях

$$(-1/2)d_1 S_1^2 - (1/2)d_2 S_2^2 + b \geq 0. \quad (6.41)$$

Полученная математическая модель (6.40), (6.41) задачи определения внешнего нагружения соответствует математической модели задачи нелинейного программирования. Следовательно, условная экстремальная задача (6.40) — (6.41) может быть преобразована в эквивалентную безусловную экстремальную задачу или с помощью логарифмической функции штрафа

$$\varphi(S) = S_1 + S_2 - \lambda_i \ln [(-1/2)d_1 S_1^2 - (1/2)d_2 S_2^2 + b],$$

или с помощью обратной функции штрафа

$$\psi(S) = S_1 + S_2 + \lambda_i^2 [1/(-1/2)d_1 S_1^2 - (1/2)d_2 S_2^2 + b].$$

Из табл. 13 и рис. 49 видно, что с уменьшением коэффициента штрафа получаем процесс, сходящийся в области допустимых решений.

В силу того, что функции $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ дважды дифференцируемы, безусловные экстремальные задачи можно решать аналитически. Итак, продифференцировав функцию $\varphi(S)$ по S_1 и S_2 , приравняв нулю производные и подставив числовые значения податливостей стержней ($d_1 = 0,02$ см/Н, $d_2 = 0,04$ см/Н), получим следующую систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} 0,01 S_1^2 + 0,02 S_2^2 + \lambda_i \cdot 0,02 S_1 - b &= 0; \\ 0,01 S_1^2 + 0,02 S_2^2 + \lambda_i \cdot 0,04 S_2 - b &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из решения системы уравнений определяем

$$\begin{aligned} S_1 &= (-0,04\lambda_i \pm \sqrt{0,0016\lambda_i^2 + 0,24b})/0,06; \\ S_2 &= (-0,04\lambda_i \pm \sqrt{0,0016\lambda_i^2 + 0,24b})/0,12. \end{aligned}$$

Таблица 13. Результаты решений примеров методом внутренней точки

Определение максимальных значений усилий в двухстержневой системе при заданном значении потенциальной энергии деформаций $b = 24 \text{ Н}\cdot\text{см}$					Синтез оптимальной структуры двухстержневой системы, подверженной действию внешней силы $P = 60 \text{ Н}$					
с использованием логарифмической функции штрафа					с использованием логарифмической функции штрафа			с использованием обратной функции штрафа		
№ п/п	λ	$S_1, \text{ Н}$	$S_2, \text{ Н}$	$q(S), \text{ Н}$	λ	$N, \text{ см}$	$V(N), \text{ Н}\cdot\text{см}$	λ	$N, \text{ см}$	$V(N), \text{ Н}\cdot\text{см}$
1	1,00	39,339	19,669	—59,01	0,25	0,500	—15,00	0,25	0,500	—15,00
2	0,50	39,668	19,834	—59,50	0,15	0,816	—24,48	0,15	0,613	—18,39
3	0,25	39,834	19,917	—59,75	0,10	0,887	—26,61	0,10	0,684	—20,52
4	0,10	39,933	19,967	—59,90	0,01	0,989	—29,67	0,01	0,900	—27,00

В табл. 13 приведены вычисленные значения усилий S_1 и S_2 при различных числах λ_i ($i = 1, \dots, 4$) и при значении потенциальной энергии деформации $b = 24 \text{ Н·см}$. В пределе при $\lambda_i \rightarrow 0$ получаем решения $S_1 = 40 \text{ Н}$, $S_2 = 20 \text{ Н}$. Следовательно, для данной системы из двух стержней максимальной нагрузкой будет $P = S_1 + S_2 = 60 \text{ Н}$. Поскольку значения усилий S_1 и S_2 для рассматриваемой стержневой системы должны быть положительными, то корни принимались лишь со знаком плюс.

Аналогично решается и вторая безусловная экстремальная задача. Теперь проиллюстрируем работу метода внутренней точки на задаче синтеза оптимальной структуры той же двухстержневой системы. Условная экстремальная задача (6.35), (6.36) в отличие от (6.40), (6.41) представляет собой задачу линейного программирования. Однако ее также несложно преобразовать в эквивалентную безусловную экстремальную задачу, используя идею внутренней точки. Следует отметить то обстоятельство, что в этой задаче границу области допустимых решений (фазу допустимости) определяет неравенство $N_1 \leq W_1$, поэтому при преобразовании условной задачи в безусловную будем учитывать лишь это неравенство.

Итак, преобразуя условную задачу (6.35), (6.36) с помощью логарифмической функции, получим:

$$\varphi(N) = (-1/2)(P, N) - \lambda_i \ln(W_1 - N). \quad (6.42)$$

Та же задача (6.35), (6.36), преобразованная с помощью обратной функции штрафа, имеет следующий вид:

$$\varphi(N) = (-1/2)(P, N) + \lambda_i^2 [1/(W_1 - N)]. \quad (6.43)$$

Безусловные экстремальные задачи (6.42) и (6.43) в силу того, что функции $\varphi(N)$, $\psi(N)$ дважды дифференцируемы, мо-

гут быть решены аналитически. Если продифференцировать функции $\varphi(N)$, $\psi(N)$ по неизвестной N и приравнять нулю производные, то необходимые условия первого порядка примут следующий вид:

для задачи (6.42)

$$-N + \lambda_i/(W_1 - N) = 0; \quad (6.44)$$

для задачи (6.43)

$$-N + \lambda_i/(W_1 - N)^2 = 0. \quad (6.45)$$

Из решений уравнений (6.44) и (6.45) вытекает, что перемещения могут быть определены соответственно по формуле

$$N = (W_1 \pm \sqrt{W_1^2 - 4\lambda_i})/2 \quad (6.46)$$

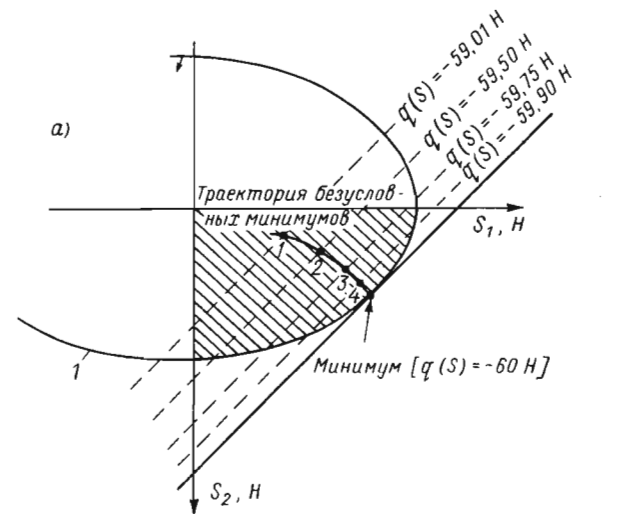
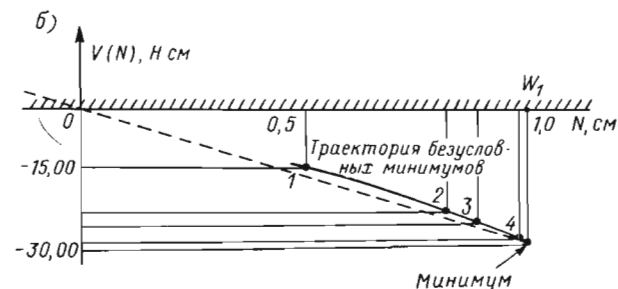


Рис. 49. Решение задачи методом внутренней точки
а — определение максимальных значений усилий в стержневой системе при заданном значении потенциальной энергии деформаций;
б — синтез оптимальной структуры стержневой системы;
1 — ограничение вида $(-1/2 \lambda_1 S_1^2 - 1/2 \lambda_2 S_2^2 + b \geq 0)$



и по формуле

$$N = [2W_1 \pm \sqrt{4W_1^2 - 4(W_1^2 - \lambda_i)}] / 2. \quad (6.47)$$

Если исходить из данных задачи расчета упругой двух-стержневой системы, то $W_1 = [\sigma] \cdot l_1 / E = 10 \cdot 100 / 1000 = 1$ см. В табл. 13 приведены вычисленные по формулам (6.46), (6.47) значения перемещений при различных λ_i ($i=1, 2, \dots, 4$). Из рис. 49, б видно, что итерационный процесс сходится в области допустимых решений с уменьшением значений коэффициента штрафа λ_i . В пределе, когда λ достигает нулевого значения, по формуле (6.46) получаем два решения $N=0$ и $N=W_1$. Глобальному же экстремуму функции (6.42) будет отвечать второе решение ($N=W_1$). По формуле (6.47) при достижении λ нулевого значения получаем единственное решение ($N=W_1$).

Таким образом, преобразование условной задачи (6.35), (6.36) с помощью логарифмической функции штрафа и обратной функции штрафа в безусловные экстремальные задачи позволило аналитически решить даже задачу линейного программирования, каковой является задача синтеза оптимальной структуры шарнирно-стержневой системы.

Полученные решения показали, что оптимальная структура стержневой системы определяется одним коротким стержнем. При этом максимальное значение работы внешних сил составило $(1/2)PW_1$.

6.5. МЕТОД ШТРАФНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В основном задачи оптимизации пластинчато-стержневых систем, представленные в главах 2, 3, 5, в силу нелинейности целевых функций или условий (ограничений) представляют собой нелинейные задачи математического программирования. Эти задачи почти все имеют ограничения смешанного типа, хотя формально их всегда можно свести к задаче с ограничениями общего вида, т. е.

$$\min f(S), \quad S \in R^n, \quad (6.48)$$

при ограничениях

$$q_i(S) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (6.49)$$

$$a_1 \leq S \leq a_2, \quad (6.50)$$

где $f(S)$ и $q_i(S)$ — дифференцируемые функции.

Для реализации задачи (6.48) — (6.49) можно применять методы последовательной безусловной минимизации (методы штрафных функций). В случае использования методов, осно-

ванных на множителях Лагранжа (t), составляется функция Лагранжа

$$\varphi(S, t) = f(S) + (t, q(S)) \quad (6.51)$$

и определяется ее экстремальное значение.

Однако такие методы обеспечивают сходимость при сильно выпуклой функции $\varphi(S, t)$ по S в окрестности решения, например в задачах упругого расчета шарнирно-стержневых систем. В большинстве же случаев это требование не всегда удается удовлетворить, особенно при решении задач синтеза оптимальных конструктивных систем в линейной постановке, что и ограничивает применение этих методов.

Возможно решение задачи (6.48) — (6.50), как было показано в 6.3 и 6.4, на основе методов внешней и внутренней последовательной минимизации.

Следует отметить, что метод внешней последовательной минимизации не требует обеспечения внутренней допустимой области решений, задаваемых неравенствами, и дает более простую схему решения задачи в отличие от метода внутренней последовательной минимизации. Эти ценные качества очень важны при решении задач большой размерности, каковыми являются задачи синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем. Однако при малых значениях коэффициента штрафа λ вектор S^* , реализующий минимум функции $\varphi(S, \lambda)$, будет значительно отличаться от \tilde{S} , при котором достигается условный минимум функции $f(S)$.

Следовательно, при малых значениях коэффициента штрафа метод внешней последовательной минимизации дает большую погрешность. Если же значения λ велики, то векторы S^* и \tilde{S} будут близки, но в этом случае при решении уже необходимо оперировать произведениями больших чисел на малые, что в свою очередь служит источником ошибок [28]. Кроме того, при больших величинах λ_n функции $\psi(S, \lambda_n)$ становятся плохо обусловленными. Все это затрудняет поиск их экстремума. Для того чтобы избежать вышеуказанных недостатков при решении задач синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем, в работе [47] было предложено использовать метод штрафных оценок, основанный на комбинации квадратичных штрафных функций с множителями Лагранжа.

Схема решения задач синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем на основе метода штрафных оценок следующая.

1. Условную экстремальную задачу (6.48) — (6.50) с помощью метода штрафных оценок сводят к безусловной вида

$$L(S, t, \lambda) = f(S) + \sum_{i=1}^r t_i q_i(S) + (\lambda/2) \sum_{i=1}^r [q_i(S)]^2 \rightarrow \min, \quad (6.52)$$

где t_i ($i=1, 2, \dots, r$) — множители Лагранжа; $\lambda/2$ — коэффициент штрафа.

2. Задают начальное приближение S^0 из условия выполнения ограничений (6.50).

3. Вычисляют приближения t^0 для заданного S^0 из условия

$$\min_t \{Q(t) = (1/2) \|f'(S^0) + (q'(S^0), t)\|^2\}. \quad (6.53)$$

Чем ближе S^0 к решению S , которое удовлетворяет условиям (6.49) и (6.50) и при котором $\min Q(t) = 0$, тем ближе будут получены из (6.53) приближения t^0 к t^* . Задача (6.53) может быть решена методом сопряженных градиентов.

4. Выбирают начальное значение коэффициента штрафа при найденных S^0 , t^0 исходя из условия $\|t^0\| = \|\lambda q(S^0)\|$.

5. Отыскивают S^{k+1} путем решения методом сопряженных градиентов промежуточной задачи вида

$$\left. \begin{aligned} \min L(S, t^k, \lambda_k); \\ S \in H = \{S : a_1 \leq S \leq a_2\} \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

до выполнения условия

$$\|R_n^0 L'_S(S, t^k, \lambda_k)\|^2 \leq \|q(S)\|^2,$$

где R_n^0 — оператор проектирования на множество H .

6. Пересчитывают значения t и λ по формулам

$$t^{k+1} = t^k - \lambda_k q(S^{k+1}), \quad \lambda_{k+1} = c \lambda_k$$

где c — заданное число.

7. Повторяют процедуру минимизации (6.52) до выполнения критерия

$$\sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^n |(S_i^{k+1} - S_i^k)/S_i^k| \leq \zeta \quad \text{при} \quad |S_i^k| > \zeta,$$

который означает, что относительное изменение переменных при решении промежуточной задачи (6.54) находится в пределах допустимой погрешности.

Здесь ζ — ограничение на относительное изменение переменных, индекс k — номер итерации метода сопряженных градиентов при решении промежуточной задачи.

6.6. РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ УПРУГОГО РАСЧЕТА И СИНТЕЗА ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Для реализации задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем могут быть применены как точные методы линейной алгебры, линейного программирования, так и итеративные, строящиеся на минимизации квадратич-

ной функции (метод покоординатного спуска, наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов и т. д.).

Преобразование условных экстремальных задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем с помощью штрафных функций в эквивалентные безусловные экстремальные задачи позволило расширить возможность реализации названных задач. Преимущество такого подхода состоит в том, что нет необходимости рассматривать ограничения отдельно и что для решения могут быть применены не только методы математического программирования, такие как модифицированный метод сопряженных градиентов Б. Т. Поляка, метод Флетчера — Ривза, метод переменной метрики, обобщенный метод Ньютона и т. д., но и классические методы анализа. К сожалению, из-за большой размерности, а также сложности задач оптимизации конструктивных систем не всегда удается с помощью условий экстремума получить аналитическое решение. Вот почему при реализации задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем отдают предпочтение алгоритмам, разработанным на основе численных методов решения [35, 38, 46].

Задачи оптимизации конструктивных систем имеют свои особенности. Так, с увеличением размера задач увеличивается порядок матриц; и поэтому методы, в которых в той или иной форме строится обратная матрица, уже не подходят. Это вызвано тем, что запись обратной матрицы требует большого объема машинной памяти. С ростом размерности задач существенное влияние на точность результатов начинают оказывать погрешности, возникающие в процессе огромного количества вычислений. Часто эти погрешности для плохо обусловленных задач сильно осложняют получение решения. Повышается трудоемкость вычислений, связанная с применяемым методом решения. Анализ влияния погрешностей для систем высокого порядка крайне сложен. Существующие количественные характеристики для проверки обусловленности системы уравнений невыгодно применять к системам более чем из десяти уравнений. В этих случаях, вероятно, проще составить машинную программу решения системы уравнений по принятому методу и просчитать несколько контрольных примеров, вместо того чтобы пытаться провести анализ погрешностей. В настоящее время для решения плохо обусловленных и вырожденных систем уравнений разработаны методы, в основе которых лежит идея регуляризации [50]. Это уже обнадеживает, и все же обеспечение достоверности результатов решений больших систем, которая определяется в первую очередь вычислительной погрешностью и обусловленностью этих систем, еще остается нерешенной проблемой.

Одним из средств борьбы с влиянием погрешностей является применение двойной точности вычислений, когда арифмети-

ческие действия выполняются с удвоенным числом по сравнению с обычно используемым количеством значащих цифр. Такой прием значительно снижает скорость вычислений и, как следствие, требует дополнительного расхода машинного времени по сравнению с обычным счетом.

Все перечисленные факторы приводят к ограничению размеров задач упругого расчета и синтеза пластинчато-стержневых систем, решение которых возможно с помощью точных методов. В связи с этим всегда существовал интерес к итерационным методам. При решении же задач большой размерности итерационными методами отсутствует необходимость преобразования исходной матрицы; решения получаются устойчивыми и не накапливаются погрешности, но зато мы сталкиваемся с такой проблемой, как чрезвычайно медленная сходимость.

Таким образом, можно видеть, что задачи упругого расчета и синтеза пластинчато-стержневых систем требуют специальных методов, т. е. таких, которые позволили бы получать приемлемое решение за разумное время.

Грейв [52] кратко сформулировал следующие основные требования, которым должен удовлетворять идеальный метод:

- простота и легкость кодирования;
- обеспечение быстрой сходимости, если применяется какая-либо итерационная схема;
- устойчивость по отношению к любым погрешностям округления;
- возможность сохранения большей части исходных данных в течение всего вычислительного процесса.

Из всех точных и итеративных методов лучше всего подходит под эту характеристику метод сопряженных градиентов. Он применим к весьма плохо обусловленным матрицам. По словам Форсайта [65], он, вероятно, приближается к идеальному машинному методу, который может автоматически использоваться в работе без специального анализа частной рассматриваемой системы уравнений.

Как было показано в работах [66, 70], метод сопряженных градиентов обладает всеми достоинствами итеративных методов, но он дает решение за конечное число шагов. Этому методу отдают предпочтение такие исследователи, как Форсайт, Фрид. Однако в данном методе используются операции умножения, что при заполненных матрицах и особенно матрицах высокого порядка приводит к отклонению от точного решения и к понижению скорости сходимости. Так, в работе [6] показано, что для систем с заполненной матрицей порядка более 50 погрешности округления приобретают существенное значение.

В ряде работ исследователей предлагаются подходы и приемы, позволяющие избежать указанных недостатков метода сопряженных градиентов. Так, в работе [57] при расчете шарнирно-стержневой системы предлагается использовать метод сопряженных градиентов совместно с приемом, повышающим

скорость сходимости. В работе [6] при расчете стержневых систем показана целесообразность применения метода сопряженных градиентов с методом подавления компонент.

Однако указанные подходы не полностью используют возможность этого метода. Кроме того, в перечисленных работах метод используется исключительно для задач расчета стержневых систем, в то время как его можно использовать и для решения задач оптимизации [35, 38, 39]. Метод сопряженных градиентов по своей природе является методом безусловной минимизации функций, и, как показано в работе [66], он хорошо работает со слабозаполненными матрицами. Для реализации задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем в работах [35, 39, 42, 47] было предложено использовать комбинации метода квадратичных штрафных функций или метода штрафных оценок с методом сопряженных градиентов в зависимости от вида решаемой задачи. Это позволило получить более точные результаты и сократить время счета, хотя нелинейность, невыпуклость функций затрудняла поиск глобального экстремума при таком подходе к решению задач оптимизации конструктивных систем.

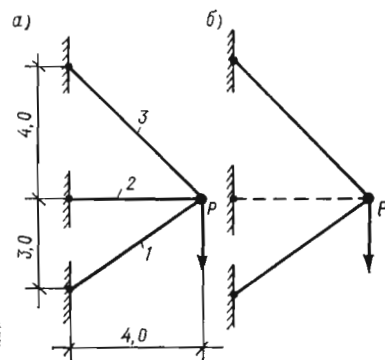
В то же время на основе установленных бионических принципов (см. главу 4) можно прогнозировать строение искомым конструктивных систем, в результате чего задача синтеза оптимальных упругих пластинчато-стержневых систем упрощается и, как было показано выше (см. главу 5), она сводится к последовательности решения задач квадратичного и линейного программирования. В этом случае сочетание метода штрафных функций или метода штрафных оценок с методом сопряженных градиентов позволяет получить универсальный и эффективный математический аппарат для решения задач как квадратичного, так и линейного программирования. Причем в процессе решения результаты задачи квадратичного программирования используются в качестве начального приближения для задачи линейного программирования, что с вычислительной стороны имеет существенное значение и прямо отвечает применению итеративных методов. Следует лишь отметить, что для реализации задач в линейной постановке можно с успехом применять симплекс-метод. В настоящее время машинные программы, разработанные по этому методу, с точки зрения и вычисления и программирования достаточно эффективны и совершенны.

Главной проверкой и подтверждением любой теории и методов решения задач, в том числе математического аппарата, разработанного автором на основе теории и методов безусловной минимизации с использованием бионических принципов для оптимизации конструктивных систем, является возможность их практического применения и вычислительной реализации.

По составленным программам ПРОСС-1 и ПРОСС-2, написанным на языках АЛГОЛ, ФОРТРАН, был просчитан ряд

Рис. 50. Пример синтеза оптимальной структуры плоской трехстержневой системы

а — исходная схема;
б — оптимальная структура;
1—3 — номер стержней



примеров с размерностью матриц (2×3) , (39×98) , (123×150) , (150×200) , (200×300) , относящихся к задаче синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем по весовому критерию. Основные характеристики решенных на ЕС ЭВМ задач синтеза упругих систем приведены в табл. 14, где приняты следующие обозначения: m — число строк в матрице A ; n — число столбцов в матрице A ; g — заполненность матрицы A , %; $\Delta = \|AS - P\|^2$ — невязка в ограничениях для найденного решения. В задачах 3—5 счет начинался с разных исходных векторов S^0 при $m_0 = 900$ кг:

для задачи 3 $S^0 = [0, 0, \dots, 0]$;
» » 4 $S^0 = [500, 500, \dots, 500]$;
» » 5 $S^0 = [1000, 1000, \dots, 1000]$.

Первый пример, представляющий собой задачу синтеза оптимальной структуры плоской трехстержневой системы, заимствован из работы [19] в целях проверки алгоритма решения задачи. В этом примере (рис. 50) для упрощения вычислений все величины заданы в условных безразмерных единицах: длины стержней $l_1 = 5$, $l_2 = 4$, $l_3 = 5,66$; предельные напряжения $\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = \sigma_3^+ = 10$ и $\sigma_1^- = \sigma_2^- = \sigma_3^- = 5$.

Плотность материала $\gamma = 1$; внешняя нагрузка $P = (0, -1)$; коэффициенты массы

$$C_1^{(+)} = \gamma l_1 / \sigma_1^{(+)} = 0,5; \quad C_2^{(+)} = \gamma l_2 / \sigma_2^{(+)} = 0,4; \quad C_3^{(+)} = \gamma l_3 / \sigma_3^{(+)} = 0,566;$$

$$C_1^{(-)} = \gamma l_1 / \sigma_1^{(-)} = 1,0; \quad C_2^{(-)} = \gamma l_2 / \sigma_2^{(-)} = 0,8; \quad C_3^{(-)} = \gamma l_3 / \sigma_3^{(-)} = 1,131.$$

На основании исходных данных запишем математическую модель задачи:

$$\varphi(S) = (C, S) + \lambda \|AS - P\|^2 \rightarrow \min,$$

Таблица 14. Основные характеристики решаемых задач синтеза упругих пластинчато-стержневых систем

Номер задачи	m	n	g	Число итераций	Время счета, мин	Δ
1	2	3	83,3	9	≤ 1	0
2	36	66	3,76	1194	15	$1 \cdot 10^{-15}$
3	123	152	2,84	2468	41	$1,72 \cdot 10^{-13}$
4	123	152	2,84	2537	49	$2 \cdot 10^{-13}$
5	123	152	2,84	2612	55	$2,3 \cdot 10^{-13}$
6	150	200	3,41	3126	67	$2,1 \cdot 10^{-10}$
7	200	300	4,07	3789	93	$1,8 \cdot 10^{-7}$

или в раскрытом виде:

$$\varphi(S) = 0,5S_1^{(+)} + 0,4S_2^{(+)} + 0,566S_3^{(+)} + 1,0S_1^{(-)} + 0,8S_2^{(-)} + 1,131S_3^{(-)} +$$

$$+ \lambda \times \begin{vmatrix} 0,800 & 1,000 & 0,707 \\ 0,600 & 0 & -0,707 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0,800 & -1,660 & -0,707 \\ -0,600 & 0 & 0,707 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} S_1^{(+)} \\ S_2^{(+)} \\ S_3^{(+)} \\ S_1^{(-)} \\ S_2^{(-)} \\ S_3^{(-)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \min$$

при граничных условиях

$$S_1^{(+)} \geq 0, \quad S_2^{(+)} \geq 0, \quad S_3^{(+)} \geq 0, \quad S_1^{(-)} \geq 0, \quad S_2^{(-)} \geq 0, \quad S_3^{(-)} \geq 0.$$

Приведем результаты промежуточных и конечной итераций, выданные на печать при решении данного примера.

1. +++ 02 100000000 Δ — признак выдачи на печать
 +++ 01 200000000 2λ — коэффициент штрафа
 +-+ 00 000000000 $\|\varphi'(S)\|^2$
 +-+ 00 416361067 (C, S)
 +-+ 00 377695436 $\|AS-P\|^2$ — невязка в ограничениях для
 найденного решения
 +++ 00 794056504 $\varphi(S)$
 +++ 01 300000000 — счетчик итераций
2. +++ 02 100000000 Δ
 +++ 02 200000000 2λ
 +-+ 18 275285708 $\|\varphi'(S)\|^2$
 +++ 01 109621285 (C, S)
 +-+ 02 377695435 $\|AS-P\|^2$
 +++ 01 113398239 $\varphi(S)$
 +-+ 01 500000000 — счетчик итераций
3. +-+ 00 000000000 $S_1^{(+)}$
 +-+ 00 000000000 $S_2^{(+)}$
 +++ 00 808244138 $S_3^{(+)}$
 +++ 00 714285757 $S_1^{(-)}$
 +-+ 00 000000000 $S_2^{(-)}$
 +-+ 00 000000000 $S_3^{(-)}$
 +-+ 00 000000000 Δ
 +-+ 03 200000000 2λ
 +++ 01 132035599 $\|\varphi'(S)\|^2$
 +++ 01 117175193 (C, S)
 +-+ 00 000000000 $\|AS-P\|^2$
 +++ 01 117175193 $\varphi(S) = (C, S)$
 +++ 01 900000000 — счетчик итераций.

На основании полученных результатов видим, что оптимальная структура, соответствующая минимальной массе, состоит из первого сжатого стержня с $S = -0,714\ 285\ 757$ и из третьего растянутого стержня с $S_3 = 0,808\ 244\ 138$. Такая же конфигурация была получена и в работе [19].

На рис. 51—53 приведены примеры оптимального проектирования металлических конструкций: консольной пространственной фермы и регулярно-стержневых плит и железобетонной призматической складки (оболочки), подкрепленной ребрами. Координаты узлов консольной пространственной фермы приведены в табл. 15. До оптимизации масса фермы составляла

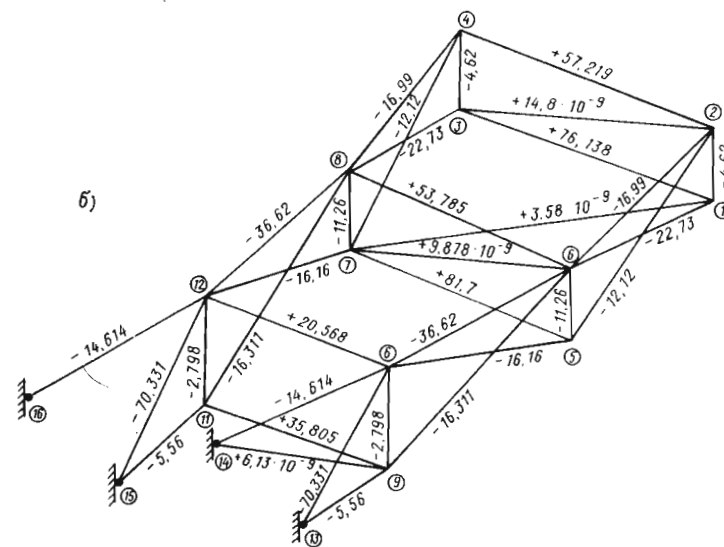
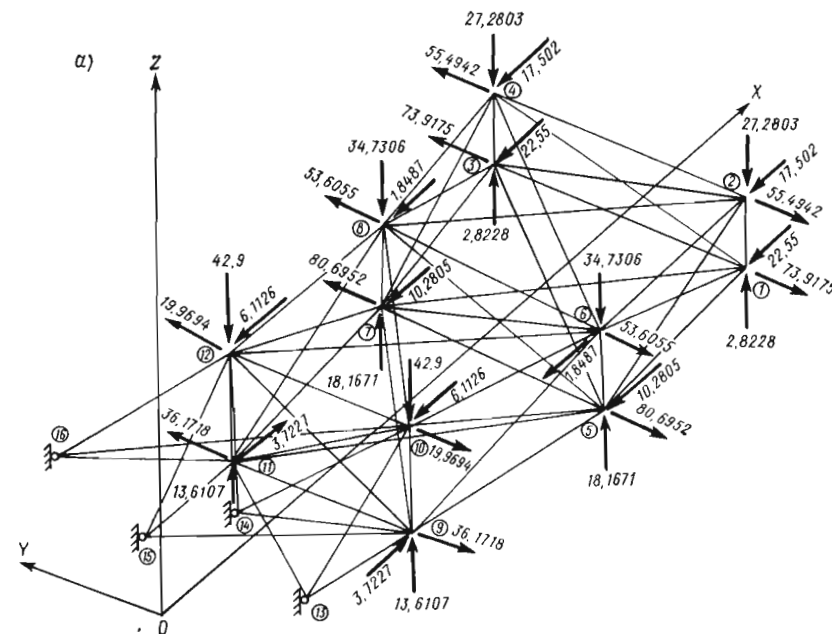
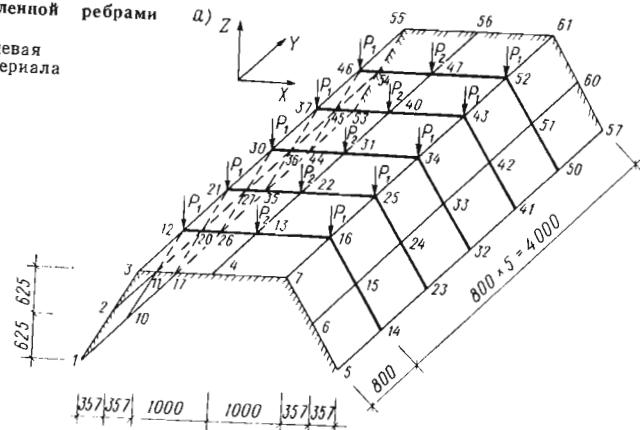


Рис. 51. Синтез оптимальной структуры консольной пространственной фермы
 а — исходная структура и схема приложения внешних сил (масса материала $m_0 = 224$ кг);
 б — оптимальная структура (масса материала $m_{\text{опт}} = 135$ кг)

Рис. 52. Оптимизация по массе материала призматической складки, подкрепленной ребрами

α — исходная пластинчато-стержневая система (масса материала $m_0 = 1382$ кг);



β — оптимальная пластинчато-стержневая система (масса материала $m_{\text{опт}} = 908$ кг)

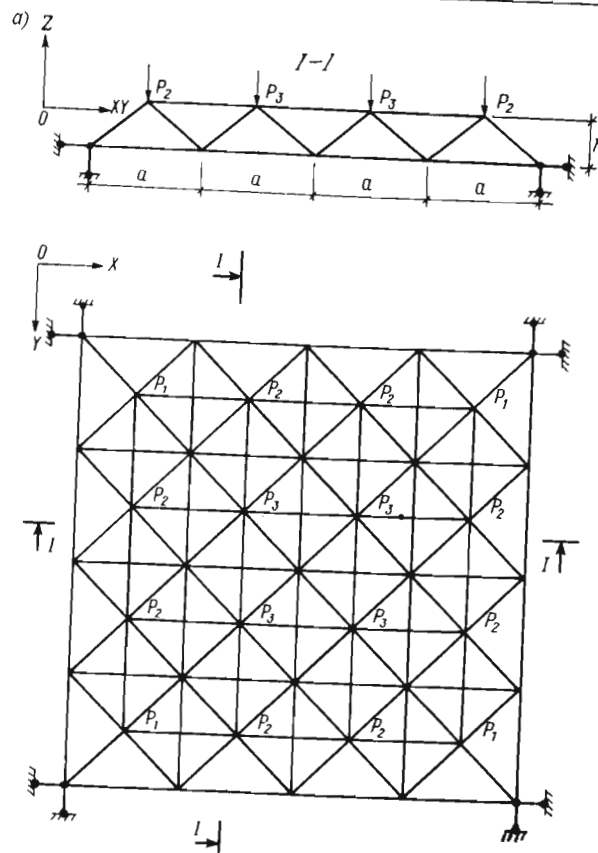
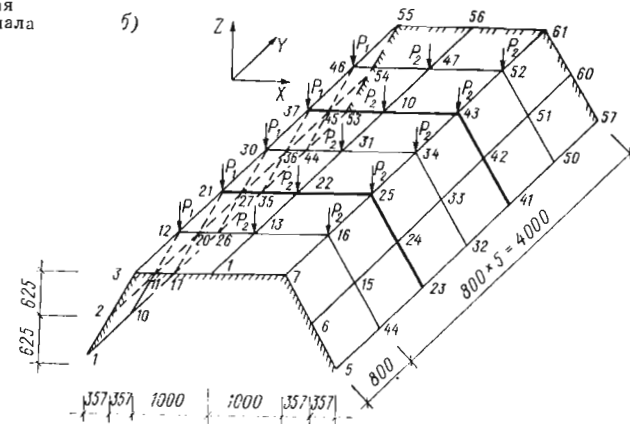


Рис. 53. Синтез оптимальной структуры пространственной регулярной стержневой системы

α — исходная структура;

β — оптимальные структуры

(варианты 1, 2, 3)

$P_1 = 2,43$ кН, $P_2 = 4,86$ кН,

$P_3 = 9,72$ кН, $a = 1,5$ м,

$h = 0,6$ м

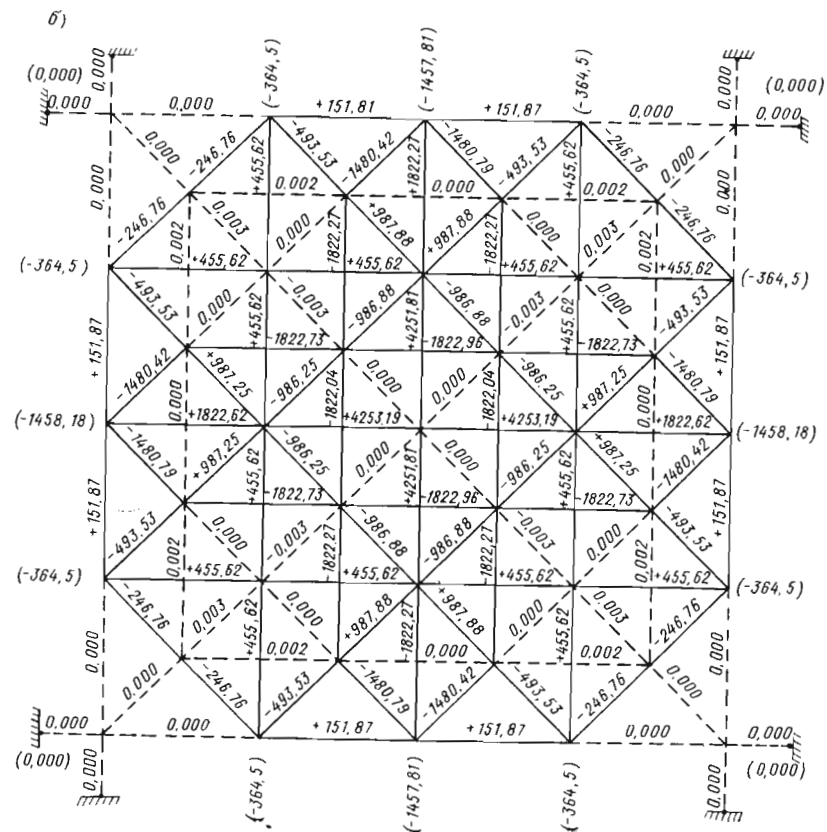
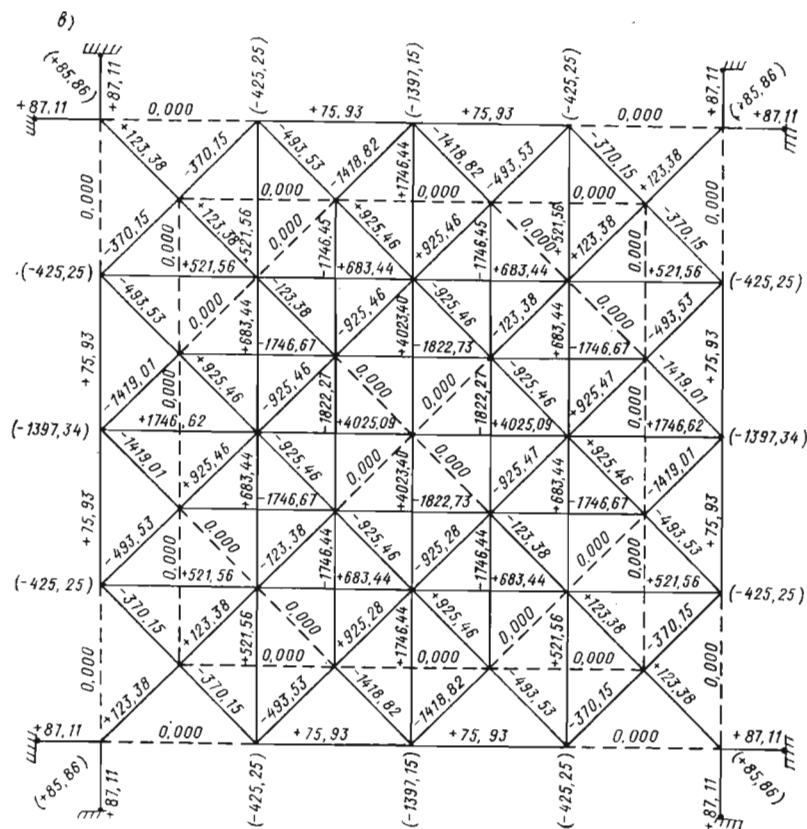
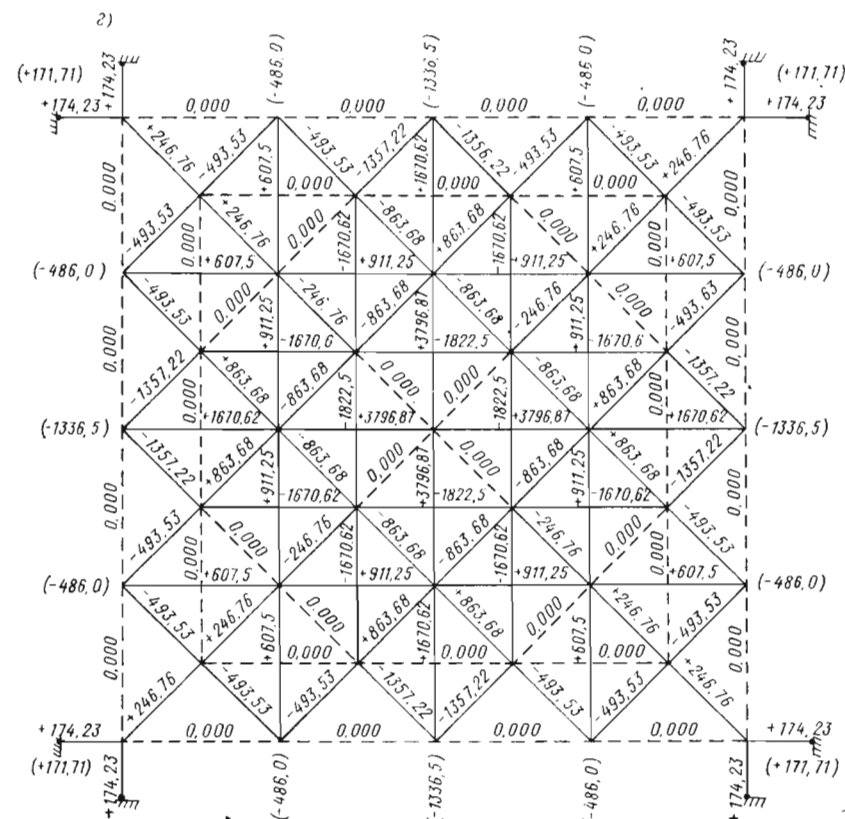


Таблица 15. Координаты узлов исходной пространственной фермы

Оси	Номера						
	1	2	3	4	5	6	7
X	6,140	6,140	6,140	6,140	5,576	5,576	5,576
Y	-0,604	-0,604	0,604	0,604	-0,549	-0,549	0,549
Z	3,848	4,348	3,848	4,348	3,191	3,803	3,191



узлов								
8	9	10	11	12	13	14	15	16
5,576	4,471	4,471	4,471	4,471	3,276	3,276	3,276	3,276
0,549	-0,440	-0,440	0,440	0,440	-0,322	-0,322	0,322	0,322
3,803	1,909	2,909	1,909	2,909	1,040	2,140	1,040	2,140



$m_0 = 244$ кг. В результате оптимизации ее масса снизилась до $m = 135$ кг. Следует отметить, что дискретная плита с регулярно-стержневой структурой (рис. 51) была просчитана трижды при одной и той же нагрузке P , но при разных исходных векторах усилий: $S^0 = (0, 0, \dots, 0)$, $S^0 = (500 \text{ Н}, 500 \text{ Н}, \dots, 500 \text{ Н})$, $S^0 = (1 \text{ кН}, 1 \text{ кН}, \dots, 1 \text{ кН})$. Во всех трех случаях полученные оптимальные дискретные плиты отличались друг от друга структурами и опиранием, хотя и обладали одними и теми же теоретическими массами $m = 675$ кг. Это как раз тот случай, когда целевая функция касается либо линии, либо плоскости, либо симплекса допустимой области решений. Данная исходная регулярно-стержневая плита (см. рис. 52) дает бесчисленное множество оптимальных решений.

Призматическая складка, подкрепленная ребрами, предварительно разбивалась на конечные элементы (см. рис. 53) и подвергалась оптимизации при следующих исходных данных; толщина плиты перекрытия и боковых стенок равнялась $t = 0,03$ м; поперечные ребра имели сечение $F = 0,04 \times 0,05$ м; модуль упругости материала принимался $E = 2 \cdot 10^4$ МПа; масса складки составляла $m_0 = 1382$ кг. Нагрузки (эксплуатационная $2,1 \cdot 10^3$ Па, собственный вес $8,4 \cdot 10^2$ Па) сводились к узловым.

В результате оптимизации толщина плиты перекрытия и боковых стенок уменьшилась до $t = 0,02$ м, сечение поперечных ребер увеличилось до $F = 0,04 \times 0,065$ м, масса складки стала равняться $m_{\text{опт}} = 908$ кг.

Преобразование условных экстремальных задач на основе теории и методов последовательной безусловной минимизации с использованием бионических принципов в эквивалентные безусловные экстремальные задачи позволило получить единый подход к реализации различных актуальных механических проблем — от расчета до синтеза оптимальных конструктивных систем в упругой стадии по весовому, жесткостному и энергетическому критериям. Кроме того, удалось преодолеть трудности, вызванные наличием ограничений в этих задачах, качественно упростить поиск глобального экстремума.

В безусловных задачах оптимизации конструктивных систем, полученных методами внешней и внутренней точек или с помощью метода штрафных оценок, влияние ограничений на модифицированную функцию постепенно ослабевает и в пределе исчезает. Преимущество такого подхода заключается в том, что нет необходимости рассматривать ограничения отдельно от целевой функции и что для решения можно применять методы классического анализа и современные численные методы оптимизации. Появилась возможность использовать различные эффективные методы безусловной минимизации, в частности, метод сопряженных градиентов. Все это значительно увеличивает творческие возможности инженера-проектировщика при создании конструкций.

ИНЖЕНЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БИОНИЧЕСКИХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ



Все то, что создано и совершенствовалось природой в течение многих миллионов лет эволюционного развития биологических систем, представляет большой интерес для познания и использования с целью дальнейшего совершенствования технических систем.

Академик А. И. Берг

Огромное количество пластинчато-стержневых конструкций наблюдается как в растительном мире, так и в животном (листья, стебли, панцири, черепа и т. д.). Чем тоньше и протяженнее пластинчатые элементы, тем легче конструкция, тем меньше требуется материала на ее изготовление. Строение конструкций живых организмов всегда связано с оптимизацией, в основе которой лежит принцип минимизации массы, так как она непосредственно определяет энергетические затраты, или метаболическую стоимость, связанную с постоянным обновлением конструкции.

Однако тонкостенные пластинчато-стержневые системы под нагрузкой теряют устойчивость. В природе наблюдается несколько способов борьбы с потерей устойчивости.

Как отмечалось выше, широко используется принцип направленной формы потери устойчивости элементов: последние заранее искривляются в соответствии с изогнутой осевой линией, отвечающей устойчивой криволинейной форме равновесия.

Этот принцип был использован при разработке бионических конструкций — дискретных плит с ортогональной решеткой и со спиральным расположением элементов в плане.

Бионические пластинчато-стержневые конструкции начинают находить разнообразное применение в строительной практике.

В настоящее время широкое развитие получают трансформируемые системы. К классу трансформируемых стержневых систем относятся упругогибкие конструкции, которые обычно состоят из отдельных жестких элементов, стягиваемых гибкими поясами или вантами в процессе их трансформации из плоскости в пространство. Подобные упругогибкие системы наблюдаются как в растительном мире, так и в животном. Достоинством этих систем является способность максимально накапливать

упругую энергию деформации на единицу объема массы при действии нагрузки.

Трансформируемые упругогибкие конструкции, создаваемые на основе аналогов живой природы, начинают находить применение в строительной практике, особенно в районах Севера, Сибири и Дальнего Востока. Для этих районов требуются такие конструкции домов, которые могли бы доставляться в самые отдаленные районы любым видом транспорта, легко монтировались и отвечали специфическим условиям эксплуатации, были экономичны по расходу материала.

Всем этим условиям отвечают трансформируемые упругогибкие конструкции. Этим системам на время транспортировки придается компактная форма. На месте освоения территории такие системы превращают в живые ячейки, столовые, клубные или производственные помещения.

Трансформируемые упругогибкие системы в отличие от трансформируемых пневматических систем не требуют поддержания постоянного избыточного давления и более надежны по сравнению с последними. Возможность регулирования размеров упругогибких элементов, их кривизны, расположения по контуру конструкций, а также различные типы соединений упругогибких элементов между собой и с ограждениями обеспечивают разнообразные динамические формы трансформируемых покрытий. Достоинства этих систем определили конструкцию бионического сборно-разборного покрытия, состоящего из упругогибкого каркаса (сетчатого свода) и тентового ограждения, а также пластинчато-стержневых конструкций для мобильных домов.

Пластинчато-стержневые системы с транстропно-полигональной структурой сочетают в себе геометрию полигональных ячеек и слоистость их стенок. Это позволяет обеспечить надежную работу системы в целом, создать конструкции с высокой прочностью и жесткостью, с относительно малой массой, хорошими тепло- и звукоизоляционными свойствами и стойкостью к неблагоприятным условиям окружающей среды. Пластинчато-стержневые системы с транстропно-полигональными структурами находят применение в строительстве передвижных, легко транспортируемых в труднодоступные районы страны домов для геологов, нефтяников и т. д. Эти конструкции могут быть использованы преимущественно при строительстве многоэтажных жилых, общественных и культурно-бытовых зданий из модульных блоков.

Транстропно-полигональные структуры отличаются от традиционных тем, что они обеспечивают повышенную несущую способность и пространственную жесткость зданию. Конструкции зданий собираются из однотипных элементов блок-ячеек, изготовленных в заводских условиях. Это не только упрощает монтаж зданий, но и способствует уменьшению трудозатрат при обеспечении высокого качества строительства.

Для изготовления перечисленных типов бионических конструкций могут быть использованы как традиционные (сталь, железобетон, дерево, современные легкие сплавы и металлы, армицемент, фибробетон, пластмассы и т. д.), так и местные строительные материалы, отходы промышленного производства (дерево, конвейерные ленты, техническая кожа, тросы и т. д.).

7.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ТРАЕКТОРИАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

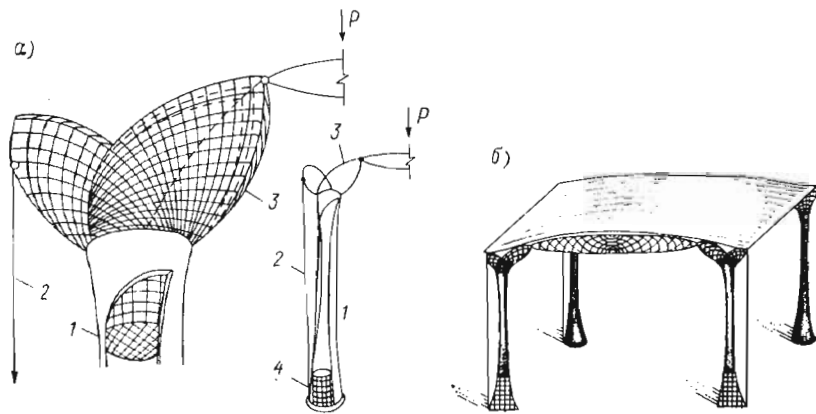
Одной из характерных сторон пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами является соответствие размещения их элементов силовому полю. Это обеспечивает значительную несущую способность конструкций при минимальных затратах материала, позволяет компактно формировать структуры пластинчато-стержневых систем.

Одной из первых конструкций с траекториальной структурой является плоское покрытие фабрики Гатти в Риме, разработанное П. Л. Нерви. Ребра железобетонной плиты этого покрытия расположены по линиям главных напряжений, что соответствует нервации листа виктории-регии. Используя принцип построения траекториальной структуры, П. Л. Нерви добился большого конструктивного эффекта. Изогнутые ребра позволили не только обеспечить необходимую прочность и жесткость покрытия, но и добиться эстетического эффекта за счет ритмичности и плавности рисунка.

Радиально-кольцевую структуру листа виктории-регии использовал в своем проекте также и советский архитектор В. Буйнов при конструировании понтона для перевозки четырехэтажных домов нефтяникам Каспия.

На основе строения бедренной кости человека и связанных с ее функционированием мышц в ЛенЗНИИЭПе создана конструкция башни (рис. 54, а). Она состоит из трубчатой стойки 1, ее завершения — расширяющегося башмака 4 и наголовника 3 в виде двух решетчатых параболоидообразных консолей, в которых стержни решетки расположены вдоль пересекающихся под прямым углом криволинейных траекторий поля главных деформаций и образуют фермы Митчелла. Аналогом является губчатая структура головки, шейки и большого вертела бедренной кости. Башмак 4 имеет ортогональную решетку.

Подобная конструкция может быть подвергнута двум видам загрузки: первый — асимметричная нагрузка на одну консоль (возникающая при этом опасность продольного изгиба трубчатой основы исключается за счет предварительного натяжения вант 2, прикрепленных к другой консоли и к основанию стойки), второе — симметричное. В этом случае создается бла-



поприятное условие для работы стойки только на сжатие без вантового обеспечения. Такое конструктивное выполнение башни позволяет повысить ее прочность и жесткость при минимальном расходе материала, идущего на изготовление.

Области применения в строительстве сконструированного аналога бедренной кости человека могут быть самыми разнообразными: их можно использовать как стойки, рамы, сооружения башенного типа и т. д. Интересны и архитектурные возможности использования ее в качестве колонн с завершением в виде необычных капителей, поддерживающих пространственное покрытие, или в сочетании с фермами, элементы которых расположены по траекториям главных деформаций (рис. 54, б).

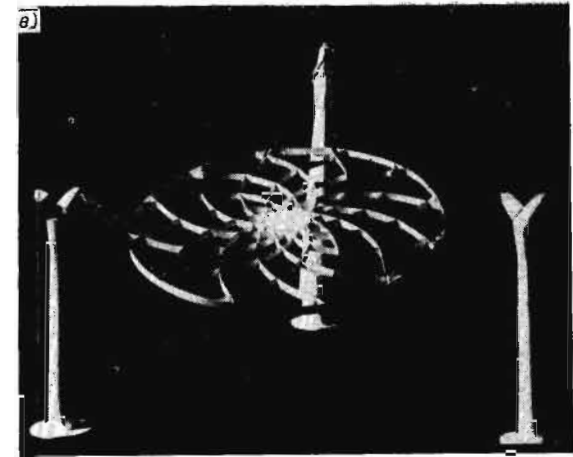
Возможны траекториальные структуры с расположением элементов по пересекающимся логарифмическим спиральям, как это наблюдается у подсолнуха, ромашки, кедровой шишки и т. д. На основе строения соцветия подсолнуха в ЛенЗНИИЭП разработана и выполнена в натуре дискретная плита с траекториальной осесимметричной решеткой. Конструкция этой плиты позволяет применять ее как несущую систему в перекрытиях (покрытиях) зданий и сооружений, а также для малых архитектурных форм (рис. 55).

Собирается такая плита из отдельных дугообразных элементов одного типоразмера, прикрепляемых к центральному кольцу. Траекториальная решетка получается за счет расположения стержней по сетке с диагональным размещением элементов, образующих в плане логарифмические спирали, пересекающиеся между собой под углом 90° .

Следует заметить, что ориентирование элементов в плите по логарифмическим спиральям хорошо согласуется с осесимметричным полем напряжений в толстостенном кольце при загруз-

Рис. 54. Пластинчато-стержневые системы с траекториальными структурами

а — конструкция башни, спроектированная на основе строения бедренной кости человека;
б — конструкция покрытия из ферм (В. Г. Темнов);
в — проект висячего покрытия из дискретной плиты со спиральным расположением пластинчатых элементов в плане (инж. В. Г. Темнов, М. Н. Алтарев, дизайнер Л. Г. Фаорова)



жении круговой части контура и позволяет получить оптимальную упругую сетку для передачи периферийных нагрузок (сил распора) на центральное кольцо. Геометрия решетки также хорошо согласуется с эпюрой изгибающего момента. В центре, где величина изгибающего момента имеет максимальную величину, суммарная площадь поперечных стержней наибольшая (этим и объясняется густота ячеек в центре плиты). К опорному контуру суммарная площадь сечений стержней постепенно уменьшается в соответствии со значениями ординат эпюры изгибающего момента.

При работе плиты на кручение в плоскости под действием сил, приложенных к краям, плита в силу траекториального размещения элементов решетки работает как система пересекающихся ферм Митчелла. Таким образом, мы имеем дело с оптимальной структурой многоцелевой конструкции, где одна и та же плита работает при различных условиях нагружения либо как упругая сетка, либо как система брусьев равного сопротивления с постоянной высотой, либо как система ферм Митчелла, органически связанных между собой.

В настоящее время конкретное приложение плита с траекториальной осесимметричной решеткой нашла в промышленном образце «пергола-навес» (авторы инженеры В. Г. Темнов, Е. Н. Митрофанов и архитектор О. Н. Радеев). Конструкция ее состоит из верхней плиты-покрытия в виде розетки, укрепленной на стойке, опирающейся на нижнюю плиту-основание (рис. 55, а).

В нижней части ребра переходят в лучи каркаса плиты-основания, представляющей собой шестигранную плиту с выступающими ребрами в углах. Снизу плиты-основания для обеспечения жесткости прикреплен силовой диск. Образец перголы-на-



веса выполнен из дерева, плита-покрытие которого сделана из гнуто-клееных листов фанеры. Возможно изготовление пергол из пластмассы, металла, армоцемента, фибробетона и т. п.

Ячейки решетки покрытия могут быть или незаполненными, или заполненными, или частично заполненными (например, цветным пластиком, стеклом или другими декоративными материалами). Это позволяет не только украсить сооружение, но и получить своеобразные орнаментальные и цветовые ритмы. Конструкция промышленного образца может не только выполнять декоративные функции, свойственные перголе, но и использоваться в качестве навесов от непогоды, защитных грибков от солнца, для выставочных павильонов, киосков и т. п. Пергола-навес сочетает в себе функциональное назначение с интересным художественным решением, а в конструктивном отношении обеспечивает жесткость конструкции и снижение материалоемкости.

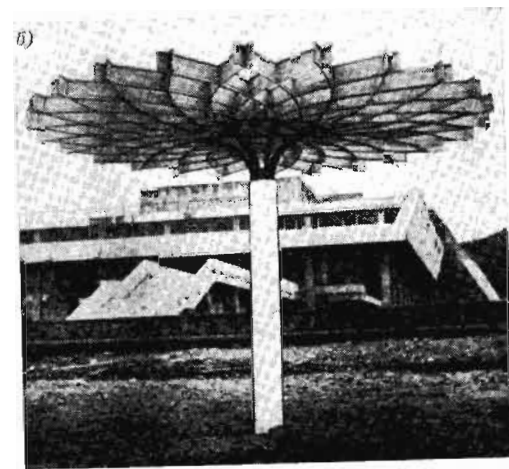
В конструкции перголы-навеса была использована лишь одна из характерных сторон строения цветка подсолнуха — организация структуры из элементов по пересекающимся логарифмическим спиральям. Особый интерес в строении цветка подсолнуха представляет композиция его наружных слоев, геометрия решеток которых совершенно различна.

Зарождение наружных слоев с различным рисунком решеток вызвано не только их функциональным назначением, но и различной статической работой. Слой, состоящий из стержней, образующих кольцевую сетку, работает преимущественно на сжатие, а слой, состоящий из стержней, образующих спиралеобразную сетку, работает на растяжение. В основе такого синтеза лежит все та же оптимизация биологических пластинчато-стержневых систем (рис. 56, а).

Принцип разделения статической работы слоев в цветке под-

Рис. 55. Траекториальные структуры в конструкциях малых форм

а — общий вид перголы-навеса (инж. В. Г. Темнов, Е. Н. Митрофанов, архит. О. Н. Радсес);
б — пергола-навес в пионерлагере «Орленок» (инж. В. Г. Темнов, архит. В. М. Столова)



солнуха был использован при конструировании двухслойного безраспорного покрытия. Это покрытие, опертное по контуру, включает верхний сжатый и нижний растянутый слои, которые по внешнему контуру соединены непосредственно друг с другом, а в центре — через натягающие распорки (рис. 56, б, в).

Верхний (сжатый) слой выполнен из связанных между собой радиальных стержней и кольцевых стержней, образующих радиально-кольцевую сетку. Радиальные и кольцевые стержни могут быть выполнены, например, соответственно из профильного металла и металлических лент, которые объединены в секции, образующие конструкцию верхнего слоя. Нижний (растянутый) слой выполнен из связанных между собой дугообразных элементов, например стержней (тросов, лент), расположенных по диагоналям относительно радиально-кольцевой сетки верхнего слоя и образующих спиралеобразную сетку с неравными ромбическими ячейками, жестко прикрепленную к центральному кольцу.

Распорки снабжены натягающими устройствами, они установлены в шахматном порядке в узлах пересечения стержней радиально-кольцевой сетки и прикреплены к нижнему слою в узлах пересечения дугообразных стержней. Распорки соединяют также центральные кольца обоих слоев. Для опирания такой конструкции покрытия на центральную стойку радиально-кольцевую сетку делают внизу, а спиралеобразную — вверху (рис. 56, б).

Построение радиально-кольцевой сетки нижнего сжатого слоя и спиралеобразной сетки верхнего растянутого слоя выполняют в полярных координатах по формуле

$$\rho = a e^{k\varphi},$$

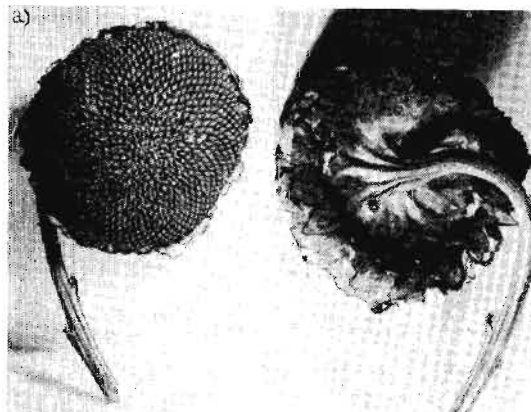


Рис. 56. Двухслойные стержневые системы с траекторными структурами
а — строение наружных слоев в цветке подсолнуха;

б — конструкция двухслойного покрытия с траекторной структурой наружных слоев (инж. В. Г. Темнов);
в — модель безраспорного вантово-стержневого покрытия «турнесоль» пролетом 6 м (инж. В. Г. Темнов, А. Ю. Коновалов)

где ρ , φ — полярные координаты; a — постоянная величина; $k = \operatorname{ctg} \alpha$ (α — угол пересечения луча, выходящего из полюса, со спиралью, причем полярные координаты для радиально-кольцевой сетки определяют при значении $k = \operatorname{ctg} \pi/2$, а полярные координаты спиралесобранной сетки — при значении $k = \pm \operatorname{ctg} \pi/4$).

При работе такой конструкции покрытия растягивающие усилия воспринимаются дугообразными элементами нижнего слоя, при расположении которых по пересекающимся в плане спиральям достигаются равнозначные напряжения в элементах спиралесобранной сетки, что позволяет применять элементы одинакового сечения. Сжимающие усилия от нагрузок на покрытие воспринимаются стержнями верхнего слоя, расположенными по радиально-кольцевой сетке, что соответствует направлению максимальных напряжений силового поля покрытия. Кроме того, в сжатых стержнях за счет уменьшения свободной длины стержней при размещении распорок в шахматном порядке увеличивается предельная величина сжимающего усилия, что повышает несущую способность покрытия. Такая рациональная конструктивная схема покрытия позволяет уменьшить материалоемкость.

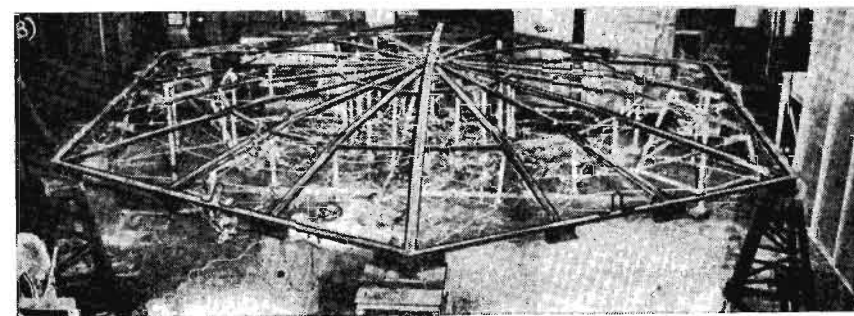
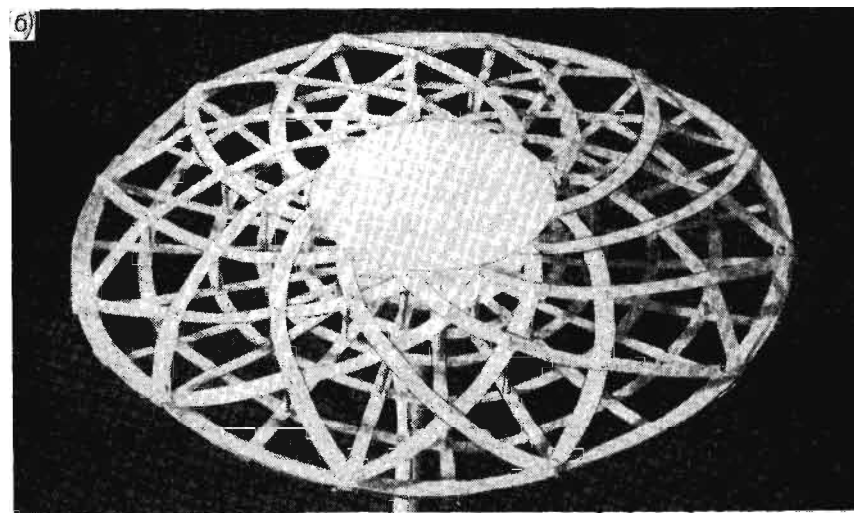
Разработанное двухслойное безраспорное покрытие может быть использовано для зданий и сооружений как на круглом, так и на многоугольном (в частности, четырех-, или шестиугольном) планах с опиранием по контуру или на центральную опору (рис. 57).

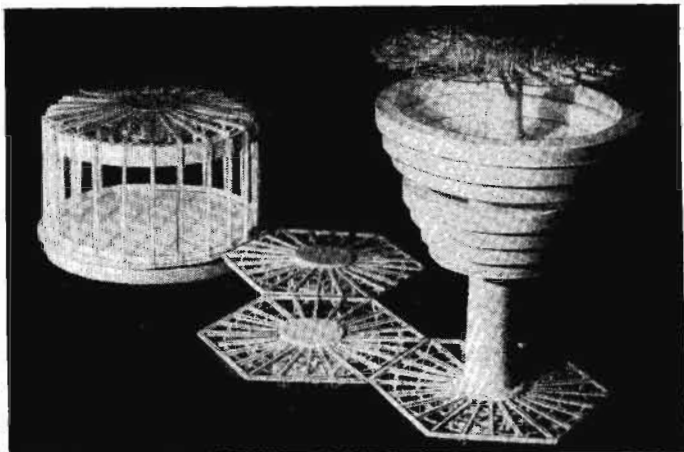
В основе принципа построения ряда структур биологических пластинчато-стержневых систем с расположением элементов по логарифмическим спиральям лежит упаковка покрытия неравными кругами. Особенно наглядно это выражено в цветке ромашки, где диаметры кругов растут от центра к периферии. Причем слои кругов, расположенных по логарифмическим спи-

ралям, сдвинуты относительно друг друга так, что получается плотная гексагональная упаковка. По мере роста цветка ромашки эти круги давят друг на друга, стенки деформируются и круги превращаются в шестиугольники. Рисунок приобретает вид сотовой структуры. Таким образом на круглом плане из контуров шестиугольников получается сеть, которая имеет минимальную длину.

На основе строения цветка ромашки было разработано сборное решетчатое пространственное покрытие с сотовой структурой.

Конструкцию такого покрытия собирают из отдельных элементов в виде трилистников, изготовленных из отдельных стержней и последовательно соединенных в звенья. Свободные концы трилистников одного звена соединены шарнирами с трилистниками соседнего звена, образуя шестиугольные ячейки (рис. 58) При этом линейные размеры трилистников одного





звена изменяются пропорционально расстоянию их от центрального кольца покрытия, на котором одним концом укреплены звенья. Другой конец каждого звена укреплен на опорном контуре. Концы трилистников каждого звена расположены по пересекающимся логарифмическим спиральям, соответствующим направлению линий скольжения, при этом все последовательно соединенные концы трилистников одного звена расположены по одной спирали, а центры трилистников этого звена и их свободные концы — на спиральях, пересекающих первую под углом 90° .

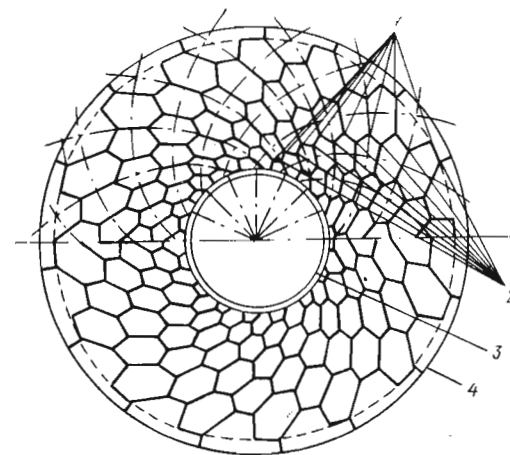
Конструкция каждой секции из трилистников может трансформироваться в пакет за счет поворота каждого трилистника вокруг шарнира на 120° с последующим наложением друг на друга. Монтаж покрытия осуществляют на площадке из звеньев, собранных в заводских условиях и транспортируемых в виде пакетов. Пакеты звеньев разворачивают в монтажное положение, после чего звенья крепят одним концом к опорному контуру, а другим — к центральному кольцу в заданных точках разбивки. Свободные концы трилистников каждой секции крепят к шарнирному соединению трилистников соседней секции, смонтированной ранее. А на образованные таким образом шестиугольные ячейки покрытия укладывают ограждающие элементы.

Ячейки шестиугольной формы полученного решетчатого пространственного покрытия обеспечивают перераспределение усилий в покрытии при любой нагрузке, а ориентация звеньев по направлениям логарифмических спиралей позволяет получить равнозначные напряжения в элементах при передаче периферийных нагрузок на центральное кольцо. Это позволяет собирать конструкцию из элементов одного профиля с одинаковым сече-

Рис. 57. Композиция морского (речного) порта из турнесолей (инж. В. Г. Темнов, дизайнер Л. Г. Фаорова)

Рис. 58. Конструкция покрытия с сотовой траекториальной структурой (инж. В. Г. Темнов)

- 1 — трилистники;
- 2 — звенья;
- 3 — кольцо центральное;
- 4 — то же, опорное



нием, упрощая изготовление и снижая материалоемкость покрытия.

Пространственная решетчатая конструкция может быть использована для покрытий зданий и сооружений. Покрытие может быть выполнено в виде плоской или криволинейной поверхностей на круглом или многоугольном контуре. Это позволяет расширить диапазон применения такой конструкции в строительной практике.

7.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ТРАЕКТОРИАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Структура пластинчато-стержневых биосистем: геометрия решетки, взаиморасположение и сопряжение составных частей между собой — не только определяет их конфигурацию, формообразование, но и характеризует качественные стороны, такие как прочность, жесткость, устойчивость, материалоемкость, энергоемкость и т. д. Вот почему были проведены теоретические и экспериментальные исследования на моделях конструктивных систем, полученных на основе бионических принципов, с целью оценки поведения таких систем под нагрузкой и установления действительного характера их напряженно-деформированного состояния.

Конструкции пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами. Однослойная дискретная плита (деревянная) диаметром 3,7 м набиралась из однотипных дугообразных сосновых реек сечением 12×20 мм, которые, пересекаясь,

образовали в плане спиралеобразную 24-лепестковую стержневую систему высотой 0,15 м (рис. 59, а). Рейки склеивались между собой на казеиновом клее. В центре плиты дугообразные элементы заключались в обойму, состоящую из двух дисков (верхнего и нижнего) диаметром 1 м, выполненных из листовой фанеры толщиной 10 мм и скрепленных между собой болтами.

Геометрическое построение решетки дискретной плиты с расположением элементов в плане по логарифмическим спиральм осуществлялось по методике, изложенной в главе 4.

Однослойная дискретная плита (фанерная) диаметром 3,7 м набиралась из однотипных гнутых в заводских условиях дугообразных пластинчатых элементов с поперечным сечением 9×150 мм (рис. 59, б). В элементах сделаны прорезы на глубину $\frac{2}{3}$ высоты сечения и на расстояниях, соответствующих месту расположения узловых точек спиралеобразной сетки. Сопряжения фанерных элементов осуществлялись с помощью деревянных

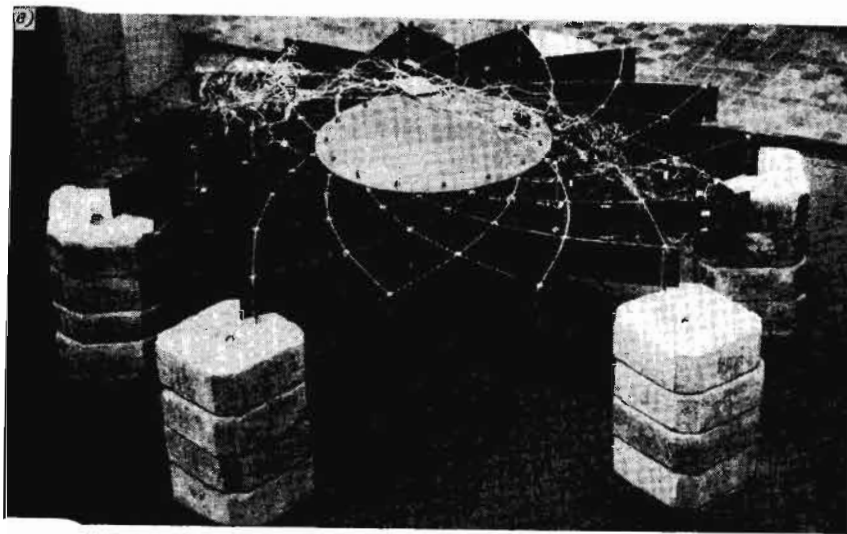
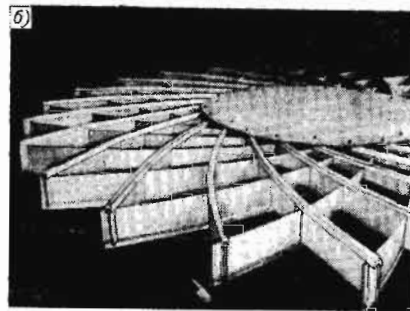


Таблица 16. Расчетные сочетания нагрузок

Номера сочетаний	Постоянные	Временные нагрузки			
		Распределенная		Сосредоточенная	
		эксплуатационная	снеговая	эксплуатационная	монтажная
1	1	1	—	—	—
2	1	—	1	—	—
3	1	—	—	1	—
4	1	—	—	—	1

Рис. 59. Конструктивные решения плит со спиральным расположением пластинчатых элементов

а — дискретная плита из деревянных элементов;
б — дискретная плита из фанерных элементов;
в — дискретная плита из пластмассовых элементов

нащельников, изогнутых по форме элемента, и казеинового клея. Дугообразные фанерные элементы соединялись с верхним и нижним дисками так же, как и в плите, изготавливаемой из деревянных элементов. Геометрическое построение 24-лепестковой решетчатой фанерной плиты осуществлялось аналогично деревянной.

Однослойная дискретная плита (пластмассовая) диаметром 2,4 м набиралась из однотипных плоских (в отличие от первого и второго вариантов) стеклопластиковых пластинчатых элементов с поперечным сечением 5×150 мм. Прорезы в элементах глубиной 7,5 мм и шириной 100 мм выполнялись на расстояниях, соответствующих месту расположения узловых точек спиралеобразной сетки. Узлы сопряжения пересекающихся пластин обматывались стеклолентой шириной 12 м и подвергались многократному проклеиванию эпоксидным клеем с использованием в качестве наполнителя молотого кварцевого песка. Сопряжения пластинчатых элементов с дисками (верхним и нижним, толщиной 8 мм) выполнены аналогично деревянной и фанерной плитам. Криволинейность очертания пластинчатых элементов в плане достигалась в процессе сборки плиты за счет их гибкости. Пластинчатые элементы и оба диска изготавливались из плоских листов стеклопластика. Геометрическое построение 15-лепестковой решетчатой плиты (рис. 59, в) осуществлялось также по методике, изложенной в главе 4.

Двухслойная безраспорная вантово-стержневая конструкция покрытия диаметром 6 м изготавливалась из металла (см. рис. 56, в). Модель включает жесткий верхний слой с радиально-кольцевой решеткой, выполненной из прокатных уголков, и гибкий нижний слой из вант (арматурные стержни), которые, пересекаясь между собой, образуют 18-лепестковую спиралеоб-

разную сетку. Верхний и нижний слои соединяются в пролете стойками трубчатого сечения с подвижными муфтами по центру, а по шестиугольному контуру объединяются обрамляющим кольцом. Стойки обеспечивают совместную работу покрытия в целом и дают возможность поворотом муфт создавать предварительное напряжение элементов слоев. Обрамляющее кольцо выполнено из прокатного швеллера, через который осуществляется опирание конструкции покрытия. При этом конструкция обрамляющего контура запроектирована таким образом, чтобы усилия, возникающие в радиальных стержнях верхнего слоя и в вантах нижнего слоя, передавались в одну точку и тем самым исключалось возникновение крутящего момента в элементах контура.

Расчетные схемы. Все рассмотренные варианты однослойных дискретных плит представляют собой один тип конструкций из тонкостенных дугообразных пластинчатых элементов, жестко

Таблица 17. Варианты расчетных схем

Номер расчетной схемы	Вид расчетной схемы	Тип опирания конструкции	Узлы сопряжения элементов в слоях	Номера расчетных сочетаний нагрузок
1	Однослойная стержневая система из пластинчатых элементов	Шарнирное по контуру на 12 точек	Жесткие	1, 2
2	То же	То же	То же	3
3	»	Шарнирное по контуру на 15 точек	»	1, 2
4	»	То же	»	4
5	Двухслойная вантово-стержневая система с жестким соединением слоев со стойками	Шарнирное по контуру на 6 точек	»	2
6	Двухслойная вантово-стержневая система с шарнирным соединением слоев со стойками	То же	»	2

соединенных между собой в местах их пересечений. Поэтому для них в качестве расчетной схемы принята статически неопределимая стержневая система с жесткими узловыми сопряжениями. Опирание плит, изготовленных из дерева и фанеры, было принято шарнирным по контуру в 12 из 24-х вершин лепестков через одну на вертикальные связи. Для стеклопластиковой плиты опирание также было принято шарнирным по контуру на все 15 вертикальных связей в вершинах лепестков.

В качестве расчетных схем для двухслойной безраспорной конструкции покрытия приняты статически неопределимые пространственные вантово-стержневые системы с жестким и с шарнирным соединением верхнего и нижнего слоев со стойками. Для покрытия принято шарнирное опирание на шесть вертикальных связей, установленных в углах обрамляющего контура.

Опираемые все модели отвечали опираниям однослойных дискретных плит и двухслойной безраспорной конструкции покрытия в проектируемых сооружениях. Характеристики нагрузок принимались согласно СНиП. II-6—74.

Постоянные нагрузки

Собственный вес однослойной дискретной плиты, выполненной из различных элементов, Па:

из деревянных	60
» фанерных	66
» стеклопластиковых	150
двухслойной конструкции покрытия из металлических элементов	

Временные нагрузки

эксплуатационная нагрузка на однослойную дискретную плиту, Па	1000
снеговая нагрузка (III территориальный район СССР) на однослойную дискретную плиту, Па	1000
снеговая нагрузка (IV территориальный район СССР) на двухслойную конструкцию покрытия, Па	1500

Сосредоточенные нагрузки

На однослойную дискретную плиту, выполненную из различных элементов, Н:

из деревянных	5000
» фанерных	5000
» стеклопластиковых	1800

Распределенные нагрузки сводились к узловым. Основные расчетные сочетания нагрузок приведены в табл. 16, причем сочетания 2 и 4 отвечают условиям работы конструкции как плиты покрытия, а 1 и 3 — плиты перекрытия; варианты расчетных схем приведены в табл. 17.

Статический расчет. Статический расчет однослойных пластинчатых и двухслойной стержневой систем проводился с целью выявления действительного характера напряженно-деформированного состояния, а также уточнения оптимального очертания

решеток слоев. С целью статического расчета таких конструкций применен предложенный в главе 6 математический аппарат для решения условных задач квадратичного программирования. Задачи расчета пластинчатых и стержневой систем согласно принятым расчетным схемам реализовались по программе ПРОСС-1.

Расчетные схемы дискретных плит, а также значения узловых перемещений и изгибающих моментов в сечениях пластинчатых элементов приведены на рис. 60. Из эпюр видно, что значения изгибающих моментов в элементах центральной части плиты, изготовленной из дерева, составляют $120 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при распределенной нагрузке $q=1000 \text{ Па}$ и $150 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при сосредоточенной нагрузке $P=5000 \text{ Н}$, а в элементах периферийной зоны—соответственно 180 и $100 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Аналогичные результаты получились и для плиты, изготовленной из фанеры. Для плиты, выполненной из стеклопластика, величины изгибающих моментов

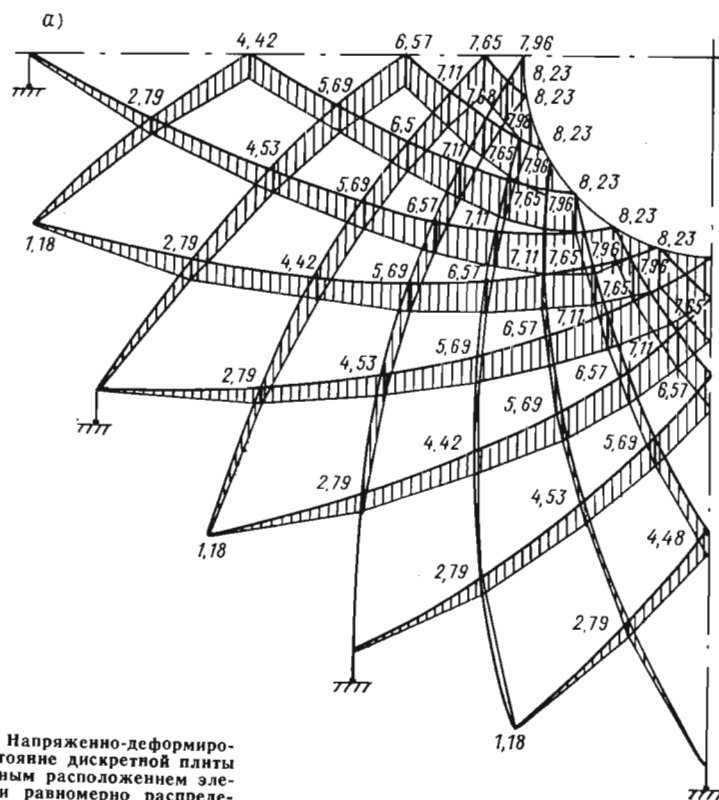
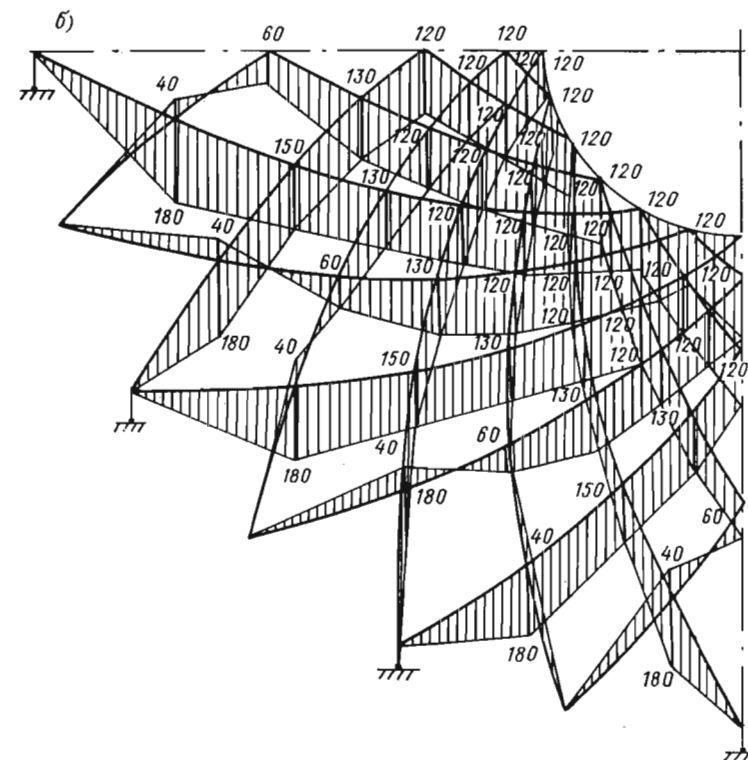


Рис. 60. Напряженно-деформированное состояние дискретной плиты со спиральным расположением элементов при равномерно распределенной нагрузке $q=1000 \text{ Н/м}^2$

а — эпюра перемещений узлов;

в центральных элементах достигли $100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при распределенной нагрузке $q=1000 \text{ Па}$ и $40 \text{ Н} \cdot \text{м}$ при сосредоточенной нагрузке $P=1800 \text{ Н}$, а в элементах, удаленных от центра, соответственно 40 и $27 \text{ Н} \cdot \text{м}$. В целом при рассмотренных загрузках распределение усилий в элементах дискретных плит в основном равномерное, а плиты работают как пространственные системы. Это объясняется геометрией решетки, полученной в результате расположения элементов в плане по спиральной сетке.

За счет перераспределения усилий почти по всей длине дугообразных пластинчатых элементов дискретных плит изгибающие моменты имеют значения почти одного порядка в отличие от плит с радиально-кольцевой решеткой, где происходит увеличение изгибающих моментов от периферии к центру. Обнаруженная особенность дает возможность путем только одного варьирования местоположения узлов решетки дискретной плиты без изменения сечений дугообразных элементов (один типораз-



б — эпюра изгибающих моментов в сечениях пластинчатых элементов

мер элементов) получать равномоментные системы, т. е. системы с оптимальным распределением материала.

Максимальные напряжения в элементах дискретных плит, выполненных из дерева, фанеры и пластмасс, при действии распределенной и сосредоточенной нагрузок не превосходили допустимых. В центральных элементах плит они достигали соответственно:

в плите из дерева, МПа	2,66 и 3,33
» » из фанеры, МПа	3,58 и 4,3
» » из стеклопластика, МПа	5,3 и 1,43

Максимальные напряжения в элементах, примыкающих к опорному контуру, составляли соответственно:

в плите из дерева, МПа	4,0 и 2,22
» » из фанеры, МПа	5,37 и 2,99
» » из стеклопластика, МПа	2,12 и 1,43

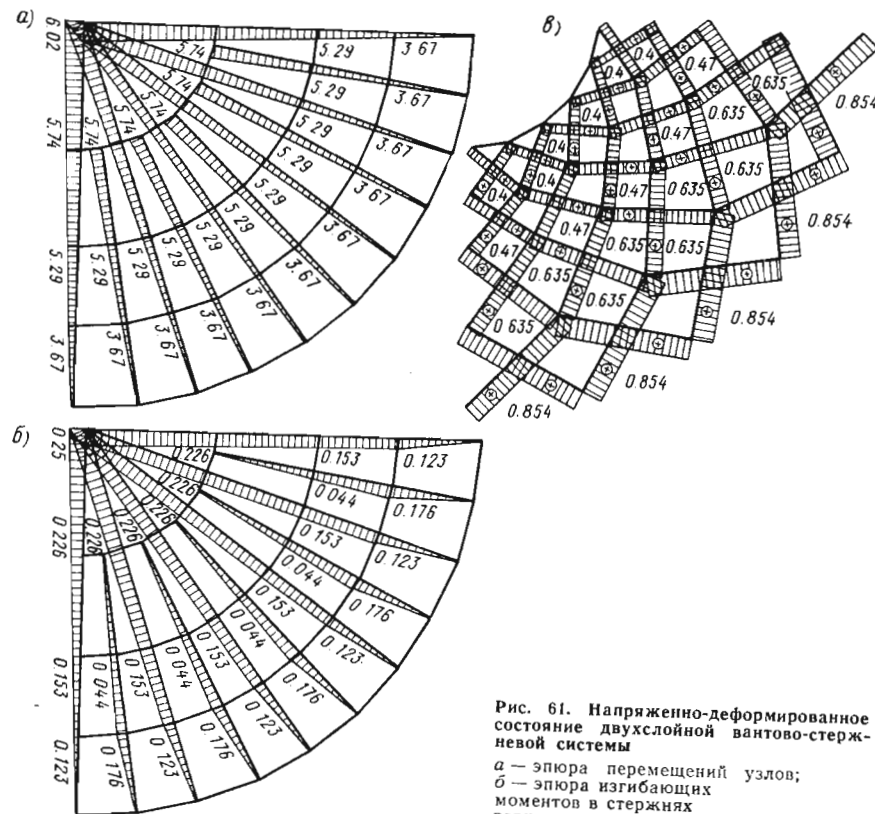


Рис. 61. Напряженно-деформированное состояние двухслойной вантово-стержневой системы

а — эпюра перемещений узлов;
б — эпюра изгибающих моментов в стержнях верхнего слоя;
в — эпюра продольных сил в вантах нижнего слоя

Характер эпюр прогибов в дискретных плитах от действия распределенной q и сосредоточенной P нагрузок одинаков. Вертикальные перемещения плавно возрастают от опорного контура к центру плиты, достигая максимума на центральном кольце, и составляют соответственно $f_q=8,23$ мм, $f_P=9,9$ мм для деревянной и $f_q=2,0$ мм для стеклопластиковой плит, что меньше предельного значения прогиба $(1/200)D$. Для фанерной плиты $f_q=13,2$ мм, $f_P=16,1$ мм, что не превышает $(1/200)D$. Малые величины прогибов по сравнению с диаметром плиты свидетельствуют о том, что она обладает достаточно большой жесткостью.

Статический расчет двухслойной безраспорной конструкции покрытия производился как вантово-стержневой системы на действие вертикальной равномерно распределенной нагрузки $q=2400$ Па. В ходе математического моделирования варьировались условия сопряжения стержней в каждом слое, способы сое-

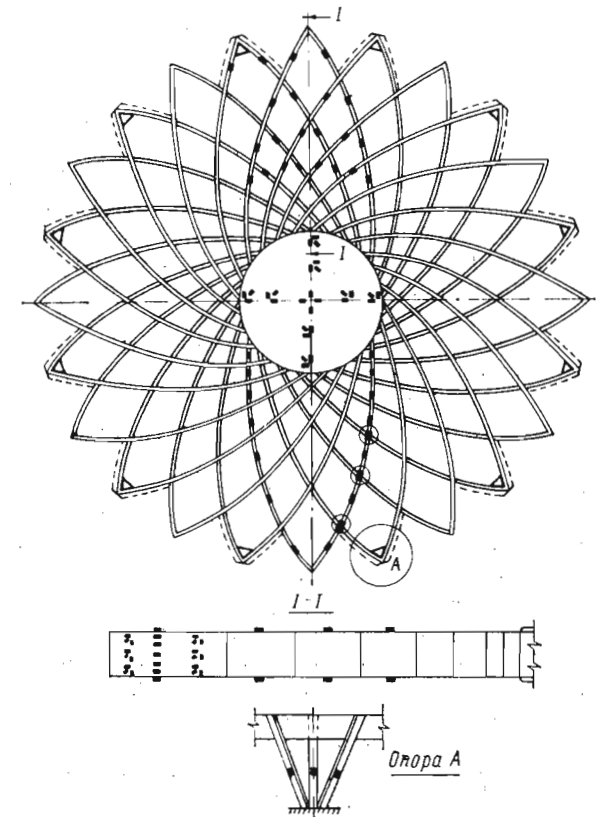


Рис. 62. Схема размещения тензодатчиков на дискретной плите из деревянных элементов

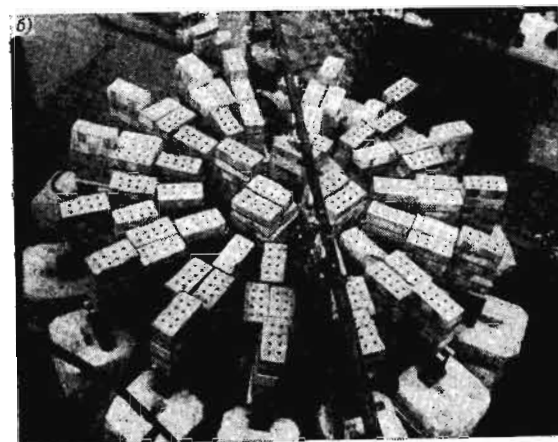
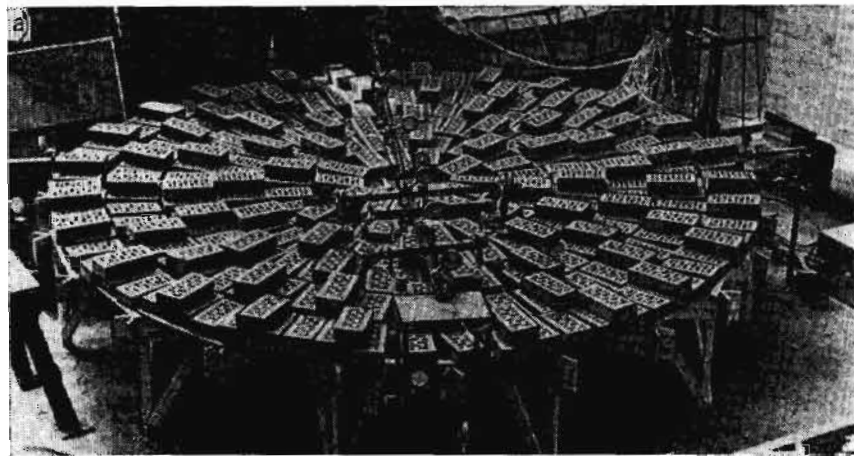


Рис. 63. Загружение дискретных плит в процессе статических испытаний
а — дискретная плита из деревянных элементов;
б — дискретная плита из пластмассовых элементов

динения слоев между собой и с обрамляющим контуром. На рис. 61 показана картина напряженно-деформированного состояния двухслойной безраспорной конструкции покрытия при шарнирном соединении верхнего и нижнего слоев со стойками и обрамляющим контуром.

Из анализа числовых значений узловых перемещений и усилий в стержнях, полученных в результате расчета, видно, что конструкция покрытия работает как пространственная система. Малые величины узловых перемещений свидетельствуют о ее большой жесткости. Распределение усилий в пределах слоев носит относительно равномерный характер. Это объясняется разделением статической работы слоев и конфигурацией их решеток; последние были получены путем расположения стержневых элементов соответственно по радиально-кольцевой и спиралеобразной сеткам. Обнаруженная особенность дает возможность путем варьирования местоположения узлов решеток покрытия без изменения поперечного сечения стержневых элементов получать системы с оптимальным распределением материала и достаточно высокой несущей способностью.

Приведенные теоретические исследования позволили выявить скрытые возможности рационального проектирования пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами за счет варьирования конструктивными параметрами, геометрией решеток, физико-механическими характеристиками материалов, возможными схемами опирания.

Статические испытания. Для проверки конструктивных решений, выяснения несущей способности и уточнения расчетных схем были испытаны конструкции, разработанные на основе бионического принципа траекториального строения пластинчато-стержневых систем.

Напряженное состояние дискретных плит из древесины и конструкционного стеклопластика исследовалось тензометрическим методом. Относительные фибровые деформации элементов деревянной плиты измерялись при помощи 132 тензодатчиков с базой 20 мм (для стеклопластиковой — 143-х тензодатчиков).

Следует заметить, что расположение измерительных приборов при испытании деревянной и стеклопластиковой плит адекватно. На рис. 62 приведена схема размещения тензодатчиков для деревянной дискретной плиты. При испытании плит использовалась тензометрическая аппаратура АЦТМ-3, АЦТМ-5 для деревянной плиты и автоматический измеритель деформаций АИД-1М для плиты из стеклопластика.

Вертикальные и горизонтальные перемещения узлов дискретных плит измерялись при помощи соответственно 25 и 15 прогибомеров системы ПАО-6. Горизонтальные перемещения тонкостенных элементов стеклопластиковой плиты из плоскости также замерялись прогибомерами системы ПАО-6. Те же перемещения элементов деревянной плиты замерялись индикаторами часового типа с ценой деления 0,01 мм.

С целью определения углов поворота прогибомеры и индикаторы устанавливали по высоте элементов попарно на одной вертикали. Расстановка прогибомеров и индикаторов для деревянной плиты представлена на рис. 59, а. Опирание плит осуществлялось по контуру на вертикальные связи, установленные в вершинах лепестков дискретных плит. Стеклопластиковая плита опиралась всеми 15 вершинами лепестков на жесткие стойки. Для деревянной плиты было принято два варианта опирания — на жесткие и гибкие стойки. При этом опирание плиты осуществлялось на 12 из 24 вершин лепестков через одну вершину.

Способы опирания дискретных плит и физико-механические характеристики материалов определили схемы испытаний. По каждой схеме плиты нагружались сосредоточенной расположенной на центральной части плиты и равномерно распределенной нагрузками — по всей поверхности и на половине плиты, а также сочетанием этих нагрузок.

Испытания проводились при нагрузках, имитировавших реальные условия эксплуатации и соответствовавших расчетным. В качестве грузов использовался кирпич массой 3,3 кг и чугунные грузы массой 20 кг. Загружение плит осуществлялось ступенями, с расположением грузов по концентрическим окружностям (кольцам) от центра плиты к периферии (рис. 63).

Испытания плит проводились в две стадии. На первой стадии плиты испытывались на воздействие кратковременных нагрузок в пределах их расчетных значений. Деревянные плиты загружали равномерно распределенной нагрузкой $q=1030 \text{ Н/м}^2$

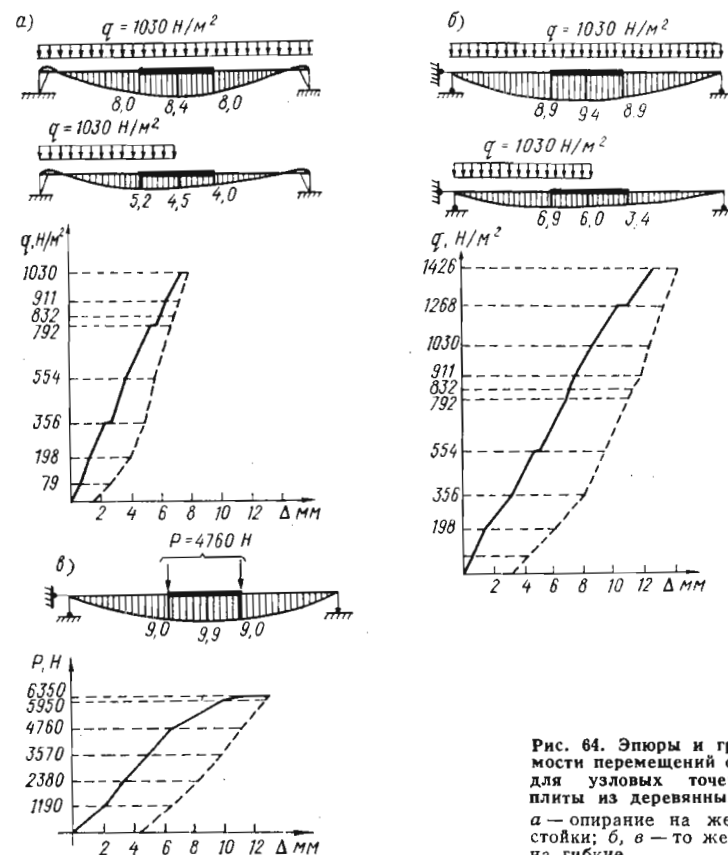


Рис. 64. Эпюры и графики зависимости перемещений от нагрузок для узловых точек дискретной плиты из деревянных элементов
а — опирание на жесткие стойки; б, в — то же, на гибкие

и условно сосредоточенной $P=4760 \text{ Н}$, а стеклопластиковые соответственно $q=1000, 2000$ и 3000 Н/м^2 и $P=1200, 1800 \text{ Н}$. При этом стеклопластиковая плита испытывалась на силовое воздействие от сочетания нагрузок $q_i + P_j$. Здесь q_i — равномерно распределенная нагрузка, имитирующая вес легкого покрытия, а $P_1=1200 \text{ Н}$ и $P_2=1800 \text{ Н}$ — сосредоточенные нагрузки, определяющие вес человека с инструментом. На второй стадии плита из деревянных элементов доводилась до первых признаков разрушения (появление трещин). При этом равномерно распределенная нагрузка достигала $q=1400 \text{ Па}$, что составляло примерно $1,5q_{\text{расч}}$, а сосредоточенная нагрузка $P=6350 \text{ Н}$.

С целью определения деформаций при длительном нагружении стеклопластиковую плиту на второй стадии выдерживали под нагрузкой $q=3000 \text{ Па}$ в течение 768 ч (32 суток). В процессе испытаний регулярно контролировались температура и влажность воздуха. Качественная картина напряженно-дефор-

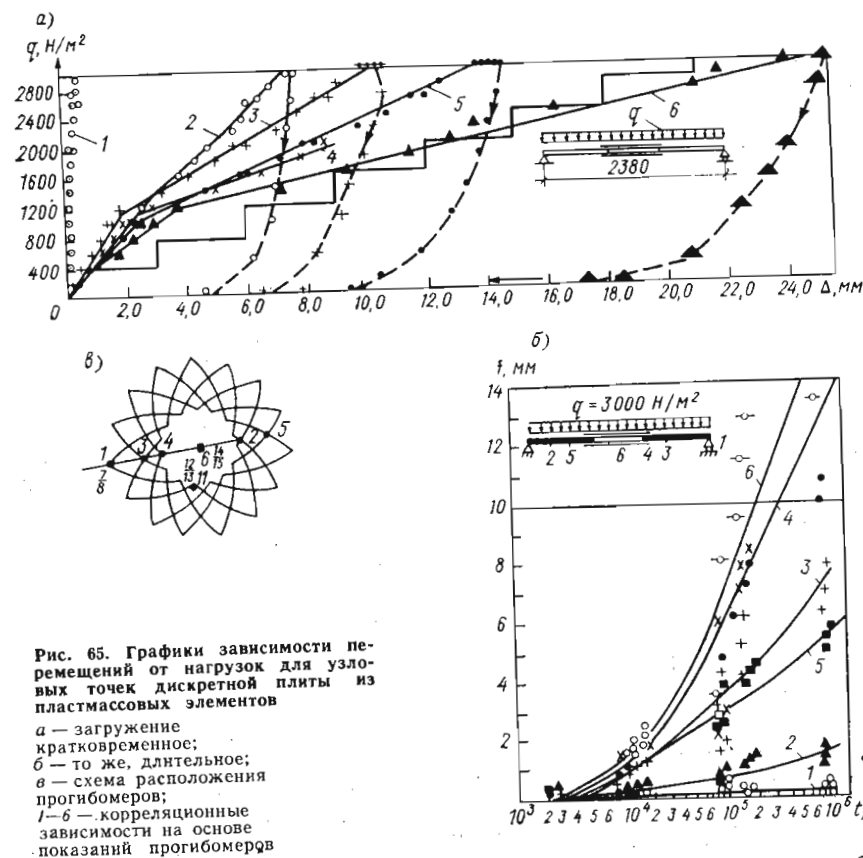


Рис. 65. Графики зависимости перемещений от нагрузок для узловых точек дискретной плиты из пластмассовых элементов
а — нагружение кратковременное; б — то же, длительное; в — схема расположения прогибомеров; 1—6 — корреляционные зависимости на основе показаний прогибомеров

мированного состояния дискретных плит выявлялась на основе результатов испытаний. На рис. 64 приведены эпюры и графики зависимости перемещений от нагрузки для узловых точек дискретных плит. Эпюры вертикальных перемещений носят плавный характер.

Дискретная плита из деревянных элементов. Наибольшие вертикальные перемещения при действии нагрузок $q=1030$ Па по всей поверхности плиты наблюдались в центре и составляли при опирании на гибкие стойки 9,4 мм. Характер перемещений центральной части плиты не изменился при увеличении нагрузки вплоть до разрушающей. При $q=1400$ Па величины вертикальных перемещений при опирании плиты на гибкие стойки составили 12,7 мм (плиту доводили до начала разрушения при опирании на гибкие стойки).

При действии распределенной нагрузки на половине плиты наибольшие вертикальные перемещения наблюдались в узлах сопряжения дугообразных элементов с жестким диском плиты со стороны приложения нагрузки. От $q=1030$ Па при опирании на жесткие стойки перемещения составили 5,2 мм, при опирании на гибкие стойки — 6,9 мм.

Эпюры перемещений узлов дискретной плиты от действия сосредоточенной нагрузки были аналогичны эпюрам перемещений, построенных для случая равномерно распределенной нагрузки. Отличие заключается лишь в том, что при действии сосредоточенной нагрузки перемещения узлов носят более резко выраженный характер в центральной части плиты по сравнению с периферийными участками. При $P=6350$ Н величина вертикальных перемещений в центре плиты при опирании плиты на гибкие стойки составила 11,4 мм. Из графиков (см. рис. 64) следует, что зависимость перемещений узлов дискретной части плиты в целом носит почти линейный характер до приложения нагрузки $q=1268$ Па и $P=4760$ Н.

Характер прогибов узлов дискретных плит при разных способах опирания несколько отличается. При опирании на жесткие стойки возникают отрицательные прогибы участков плиты, примыкающих к опорам. Это способствует уменьшению прогибов в центре плиты. Увеличение податливости стоек (переход к гибким связям) приводит к появлению выгибов последних, в результате чего увеличиваются прогибы в центре плиты.

Значения изгибающих моментов в дугообразных элементах плиты вычислялись по показаниям тензодатчиков. Максимальные значения изгибающих моментов отличались от теоретических на 12—15 % в сторону увеличения и составляли в центральной части плит $M_q=140$ Н·м при распределенной нагрузке $q=1030$ Па и $M_q=170$ Н·м при сосредоточенной нагрузке $P=4760$ Н, а в элементах периферийной зоны — соответственно $M_q=210$ и 120 Н·м. Экспериментом был выявлен довольно равномерный характер распределения усилий (изгибающих момен-

тов) в элементах плиты. Это подтвердило теоретическое предположение о возможности получения равномоментной системы за счет варьирования местоположения узлов решетки дискретной плиты из дугообразных элементов одного типоразмера. Максимальные напряжения в элементах дискретной плиты при действии равномерно распределенной ($q=1030$ Па) и сосредоточенной ($P=4760$ Н) нагрузок соответственно составили: 3,1 и 4 МПа в элементах центральной части плиты, 4,66 и 2,60 МПа — в элементах, примыкающих к опорному контуру.

При доведении равномерно распределенных нагрузок до $q=1400$ Па и сосредоточенных на $P=6350$ Н началось образование трещин в элементах периферийной части плиты при равномерно распределенной нагрузке и в элементах, примыкающих к центральной части (диску), от сосредоточенной нагрузки. Напряжения, вычисленные по показаниям тензодатчиков, для этих случаев соответственно возросли в 1,5—1,9 раза.

Возникновение трещин при напряжениях меньше допустимых для дерева, вычисленных по показаниям тензодатчиков, объясняется тем, что в действительности при нагрузках $q=1400$ Па и $P=6350$ Н напряжения на отдельных участках элементов достигали предельных значений. Это обусловлено следующим: напряжениями, вызванными внешними нагрузками, начальными напряжениями, возникающими в процессе изготовления плиты (изгиб реек дугообразных элементов при установке их в проектное положение); ослаблением сечений элементов вследствие неоднородности материала и несовершенства технологии изготовления.

Дискретная плита из стеклопластика. Кратковременное нагружение плиты осуществлялось сначала одной равномерно распределенной нагрузкой q_i , а затем в сочетании ее с сосредоточенной нагрузкой P_j . Результаты испытаний, представленные на рис. 65, показали, что наибольшие вертикальные перемещения от действия нагрузок $q_1=1000$ Па, $q_2=2000$ Па и $q_3=3000$ Па возникли в центре плиты и соответственно равнялись $\Delta_1=2,68$ мм, $\Delta_2=12,88$ мм и $\Delta_3=24$ мм. На периферии перемещения от указанных нагрузок были меньше: $\Delta_1=1,94$ мм, $\Delta_2=5,68$ мм и $\Delta_3=10$ мм. Таким образом, максимальные прогибы плиты от равномерно распределенных нагрузок соответственно составляли $(1/896)D$, $(1/186)D$ и $(1/100)D$.

Зависимости узловых перемещений Δ от нагрузок q_i носят нелинейный характер, что отражает появление неупругих процессов деформаций. Подтверждением тому являются остаточные деформации, наблюдаемые при разгрузке плиты. В зависимостях узловых перемещений Δ от нагрузок q_i при достижении равномерно распределенной нагрузкой значений $q \geq 1000$ Па наблюдается рост перемещений при постоянной нагрузке. Это связано с накоплением дисперсных повреждений в структуре материала, хотя в элементах и узловых сопряжениях дискретной

плиты визуально не наблюдалось признаков разрушения в виде трещин, отслоений и т. д.

Величины максимальных изгибающих моментов, вычисленные по показаниям тензодатчиков, от действия равномерно распределенных нагрузок $q_1=1000$ Па, $q_2=2000$ Па и $q_3=3000$ Па соответственно составили в элементах центральной части плиты 107, 168 и 276 Н·м, а в элементах периферийной зоны плиты — 39, 51 и 76 Н·м. Распределение усилий (изгибающих моментов) в элементах плиты носило равномерный характер. Таким образом, экспериментально была еще раз подтверждена возможность получения равномоментных пластинчато-стержневых систем за счет изменения геометрии их структур. Максимальные напряжения в элементах стеклопластиковой плиты при действии указанных равномерно распределенных нагрузок соответственно составили; в центральной части — 5,71, 8,96 и 14,72 МПа, а на периферийных участках 2,08, 2,72 и 4,05 МПа, что меньше допустимых.

Испытания стеклопластиковой дискретной плиты на действие равномерно распределенных нагрузок q_i ($i=1, 2, 3$) в сочетании с сосредоточенной нагрузкой P_j ($j=1, 2$) показали, что эпюры узловых перемещений аналогичны в целом эпюрам перемещений, полученным в результате загрузки плиты лишь равномерно распределенными нагрузками. Отличие состояло в более резко выраженном характере перемещений центра плиты по сравнению с периферийной зоной. Соответственно и максимальные напряжения возникли в центральной части.

В силу зависимости прочности конструктивных пластмасс от температурно-временных факторов дискретная плита была подвергнута длительным испытаниям. Загружение плиты длительно действующей нагрузкой интенсивностью $q=3000$ Па производилось ступенями (каждая ступень составляла 200 Н/м) с выдержкой между загрузками 15 мин. Длительные испытания дискретной плиты, изготовленной из стеклопластика, показали, что она обладает достаточной жесткостью и устойчивостью, однако по прочности имеет большой запас. Вот почему для изготовления таких конструкций рациональнее использовать стеклопластики с меньшей прочностью (например, полиэфирные).

При загрузке дискретной плиты длительно действующей нагрузкой наблюдалось перераспределение усилий в ее элементах во времени. Вертикальные и горизонтальные перемещения узлов во времени развивались достаточно медленно. Соответственно и скорость роста деформаций элементов при достигнутом уровне напряжений была сравнительно мала. Величины узловых перемещений колебались в пределах допустимых значений для плит покрытий, хотя в целом зависимость вертикальных перемещений от уровня длительно действующей нагрузки имела нелинейный характер.

Результаты натурных испытаний позволяют рекомендовать стеклопластики в качестве одного из наиболее эффективных материалов для создания разнообразных пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами.

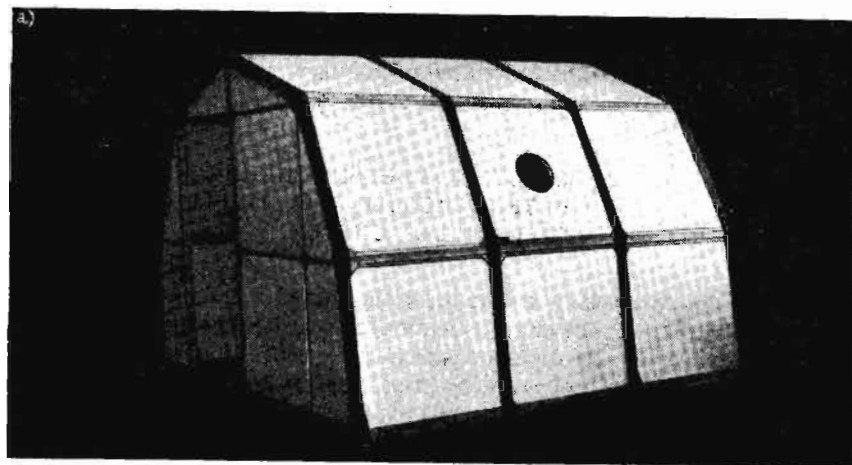
7.3. КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ РЕЗИЛЬЯНСОВЫХ ПЛАСТИНЧАТО- СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Как уже отмечалось в главе 4, к резильянсовым пластинчато-стержневым системам относятся конструкции, которые обычно состоят из отдельных жестких и гибких элементов. За счет определенного сочетания этих элементов в конструкции последние становятся упругогибкими, способными накапливать максимальное количество упругой энергии деформации без разрушения. Устойчивое рабочее состояние таких систем, обеспечивается за счет предварительного напряжения конструкции.

Пластинчато-стержневое покрытие мобильного дома. В научно-исследовательском экспериментальном отделении ЛенЗНИИЭПа в г. Воркуте был разработан трансформирующийся мобильный дом (инж. В. Г. Темнов, О. А. Фершуков), предназначенный для жилья на период сезонных сельскохозяйственных работ в районах Крайнего Севера (рис. 66, а).

Составными частями дома размером $3,5 \times 3 \times 2,25$ м являлись покрытие, представляющее собой свод-оболочку пролетом 3 м, две торцевые (сегментные) стенки и плоский пол. В основу конструктивного решения пластинчато-стержневого покрытия мобильного дома было положено строение ступни человеческой ноги (рис. 66, б). Конструкция покрытия представляет собой упругогибкую систему, состоящую из пяти продольных ребер жесткости и 18 четырехугольных пластинчатых элементов, установленных между ними. Все пластинчатые элементы связаны между собой и с продольными ребрами жесткости связями лишь с наружной стороны гибкими поясами из конвейерных лент, которые обхватывают по всему периметру свод-оболочку в поперечном направлении (рис. 66, а). Сверху по всей поверхности свода-оболочки прикрепляется в качестве гидроизоляционного ограждения тентовое полотно.

Разложенное на плоскости покрытие в целом не обладает конструктивной жесткостью, что позволяет трансформировать его из плоскости в пространственное покрытие. При этом пластинчатые элементы в рабочем состоянии обжимаются гибкими поясами. Это весьма выгодно в статическом отношении и позволяет получить достаточно прочную и устойчивую конструкцию при минимальном расходе материала. Конструкция также хорошо справляется с динамическими нагрузками в силу того, что упругая энергия, возникающая от динамических воздействий,



поглощается (накапливается) конструкцией покрытия за счет присущего ей резильянса и возвращается при снятии динамических нагрузок.

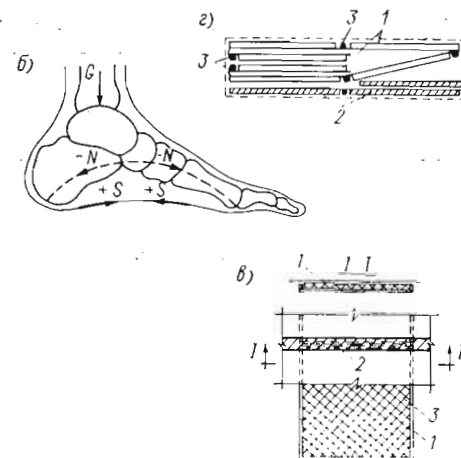
Каждый четырехугольный пластинчатый элемент ($1150 \times 1150 \times 50$ мм) состоит из деревянного каркаса, в который уложен эффективный утеплитель (рис. 66, в). С внутренней стороны каркас обшивается плоскими листами (декоративная фанера, картон, пластик и т. д.), а с наружной стороны к нему приклеивается ткань тентового ограждения в процессе изготовления всего покрытия. Продольные ребра жесткости представляют собой деревянные брусья, форма поперечных сечений которых имеет вид равнобоких трапеций. Наружные пояса, изготовленные из конвейерных лент, не только объединяют все пластинчатые элементы и продольные ребра жесткости, выполняют несущие функции, но и вместе с тентовым ограждением обеспечивают непродуваемость и водонепроницаемость стыковых соединений. Герметичность стыков является одним из главных показателей, определяющих пригодность конструкций зданий и сооружений для эксплуатации их в экстремальных условиях. Гибкость поясов и тентового ограждения позволяет при транспортировке складывать конструкцию свода-оболочки в пакет.

Конструкция пола собирается по тому же признаку, что и верхняя ограждающая часть мобильного дома. Торцевые стенки также представляют собой слоистые конструкции, изготовленные из тех же материалов, что покрытие и пол. Крепятся торцевые стенки к покрытию и полу мобильного дома на болтах.

Меняя толщину утеплителя и тип отопления, можно получать трансформирующиеся конструкции домов как для сезонного, так и для круглогодичного проживания. Конструкция отличается простотой и технологичностью изготовления; возво-

Рис. 66. Упругогибкая пластинчатая система

а — конструкция покрытия трансформируемого мобильного дома (инж. В. Г. Темнов, О. А. Фершук);
б — строение ступни человеческой ноги;
в — конструктивное решение пластинчатого элемента покрытия:
1 — каркас пластинчатого элемента;
2 — гибкий пояс, объединяющий элементы;
3 — утеплитель;
г — конструкция мобильного дома в транспортном состоянии:
1 — пластинчатые элементы покрытия;
2 — то же, пола; 3 — продольные ребра жесткости



дится она за несколько часов. Трудозатраты в 6—8 раз ниже, чем на обычные конструкции, используемые в настоящее время. Небольшая масса дома позволяет использовать не только различные виды транспорта, но и значительно снизить транспортные и монтажные расходы. Транспортировка возможна как в сложенном состоянии, так и в собранном — на лыжах.

На основе принципа трансформации покрытий из плоскости в пространство можно получать конструкции различных форм с учетом их аэродинамических свойств (форма непосредственно влияет на величину снегоотложения). В 1975 г. были проведены натурные испытания опытного образца мобильного дома и разработаны чертежи трансформирующихся мобильных домов, предназначенных для сезонных сельскохозяйственных работ в условиях Заполярья. Ниже приведены основные технико-экономические показатели трансформирующегося мобильного дома «Тундра».

Вместимость, чел.	2—3
Жилая площадь, м ²	10
Строительный объем, м ³	18,84
Масса дома без внутреннего оборудования, кг	330
Толщина утеплителя, мм	50
Трудоемкость изготовления, чел.-ч	70
Стоимость 1 м ² жилой площади дома, руб.	33

Трансформируемое упругогибкое сетчатое покрытие. На основе строения плечевого сустава человека была разработана, теоретически и экспериментально исследована в ЛенЗНИИЭПе конструкция сетчатого покрытия, трансформируемого из плоскости в пространство [45]. Она собирается из плетей, расположенных параллельными рядами перпендикулярно продольной оси покрытия с шагом 650 мм. Длина каждой плети определялась

Таблица 18. Физико-механические характеристики материалов

Наименование характеристик	Вид материалов	
	Сосна	Конвейерная лента
Модуль упругости, МПа	10 000	1300
Предел прочности на растяжение, МПа	10	80
Предел прочности на сжатие, МПа:		
вдоль волокон	13	—
поперек волокон	1,8	—
Предел прочности при изгибе, МПа	13	—

длинной линии кривизны покрытия и составляла 5760 мм. Каждая плетель набиралась из однотипных элементов (брусков-параллелепипедов $40 \times 40 \times 450$ мм), торцы которых заканчивались полукруглыми вырезами ($r=20$ мм). Сверху и снизу вдоль всей длины будущей плетель элементы объединялись гибкими поясами толщиной $\delta=3$ мм, посаженными на клей. В качестве материала для поясов использовались отходы от раскроя конвейерных лент.

Пояса не только объединяют элементы в плетель, но и выполняют несущие функции вант, расположенных снаружи элементов. В круглые отверстия, получаемые при стыковке элементов между собой, вставлялись продольные ребра диаметром $d=40$ мм и длиной $l=4550$ мм (см. рис. 36, а).

Разложенное на плоскости покрытие в целом обладает гибкостью, что позволяет трансформировать его из плоскости в пространственное покрытие (см. рис. 36, в—е). При этом за счет обжатия элементов облегающими их поясами, выполняющими роль бандажей, происходит преднапряжение конструкции в целом [45]. Физико-механические характеристики материалов сетчатого покрытия даны в табл. 18. Характеристики на грузок принимались согласно СНиП II-6—74:

Постоянные нагрузки	
Собственный вес покрытия, Па	50
Временные нагрузки	
Снеговая нагрузка (III территориальный район СССР), Па	1000

Нормативная снеговая нагрузка на 1 м^2 площади горизонтальной проекции покрытия определялась по формуле

$$P_n = P_0 c,$$

где c — коэффициент условий перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие.

Согласно указаниям п. 5.2 СНиП II-6—74 в качестве основного варианта распределения снеговой нагрузки на покрытие принят вариант 1 (равномерно распределенная нагрузка). Интенсивность нагрузки с учетом коэффициента перегрузки $n=1,6$ и коэффициента перехода к снеговой нагрузке (вариант 1) $c=0,3$ (пп. 5.3 и 5.7 СНиПа) составила 500 Па. Сосредоточенная нагрузка на покрытие принималась исходя из веса человека и составила 800 Н. Опирающие сетчатого покрытия в поперечном направлении осуществлялось на жесткие торцевые диафрагмы, а в продольном — на крайние ребра жесткости (бортовые элементы).

Статический расчет. Для предварительной оценки напряженно-деформированного состояния сетчатого покрытия из слоистых элементов был выполнен статический расчет. Следует отметить, что гибкие наружные слои элементов сетчатого покрытия имеют модуль упругости на порядок меньше, чем жесткий внутренний слой, и незначительную по сравнению с ним толщину, поэтому в расчете они также принимались жесткими.

По виду расчетной схемы при принятом типе опирания трансформируемое из плоскости в пространство сетчатое покрытие отвечает сетчатому своду-оболочке. Исходя из этого задача расчета покрытия как стержневой системы с жестким сопряжением узлов сводилась к составлению и решению уравнений равновесия в перемещениях.

Сетчатое покрытие рассчитывалось согласно принятой расчетной схеме на нагрузку, равномерно распределенную по всему покрытию и на половине его, а также на сосредоточенную нагрузку, приложенную в центре покрытия. Равномерно распределенная нагрузка сводилась к узловой. Задача расчета сетчатого покрытия реализовалась на ЭВМ по программе РАС-СУДОК.

Анализ расчетных данных показал, что при действии равномерно распределенной нагрузки по всей поверхности покрытия оно приобретает седловидную форму, прогибаясь в продольном направлении и выпучиваясь в поперечном. Наибольшие значения вертикальных перемещений узловых точек ($1,2$ см) возникли в центральной части, а наибольшие горизонтальные перемещения — в боковых частях покрытия и составляли $0,8$ см.

При одностороннем действии равномерно распределенной нагрузки загруженная половина поверхности покрытия приобретает также седловидную форму, а незагруженная — бочкообразную. Наибольшие вертикальные перемещения узловых точек возникли в центральной части загруженной половины (в четверти пролета покрытия) и составили $0,7$ см, наибольшие горизонтальные перемещения, равные $0,5$ см — в боковой части ненагруженной половины, в четверти пролета покрытия.

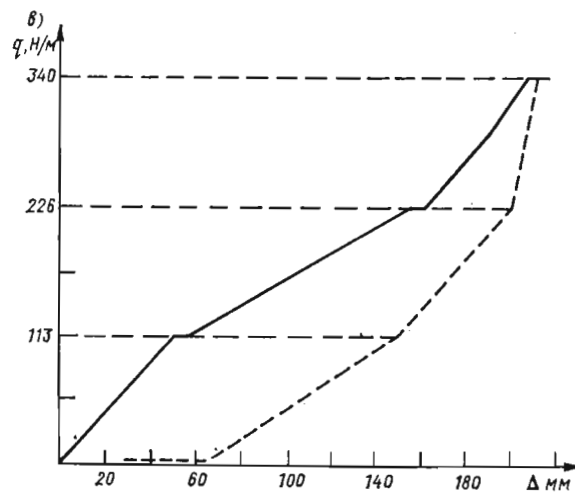
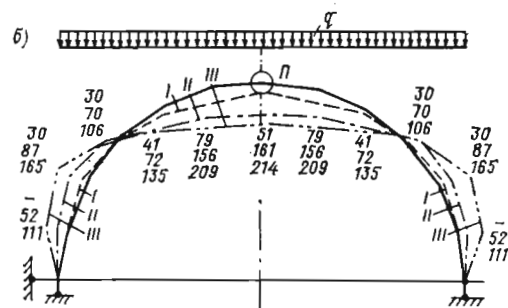
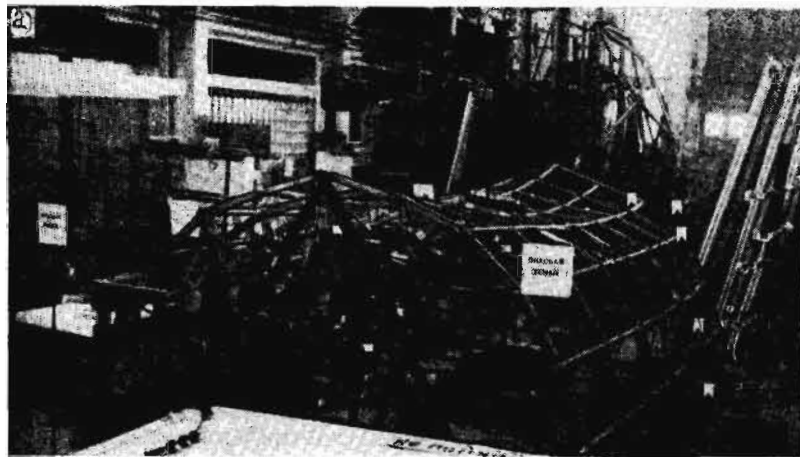


Рис. 67. Статическая работа упругогибкого сетчатого покрытия при действии нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности
 а — характер деформации конструкции;
 б — эпюры перемещений узловых точек;
 в — график зависимости перемещений центрального узла от нагрузки;
 П — прогибомер

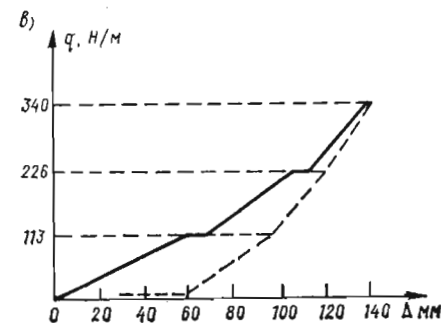
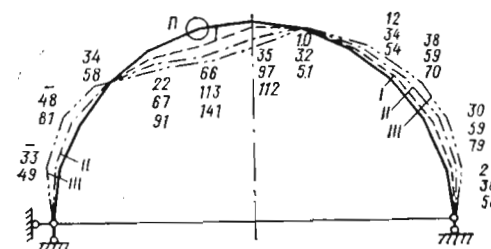
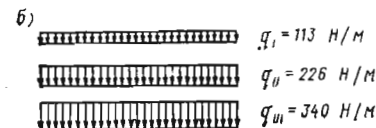
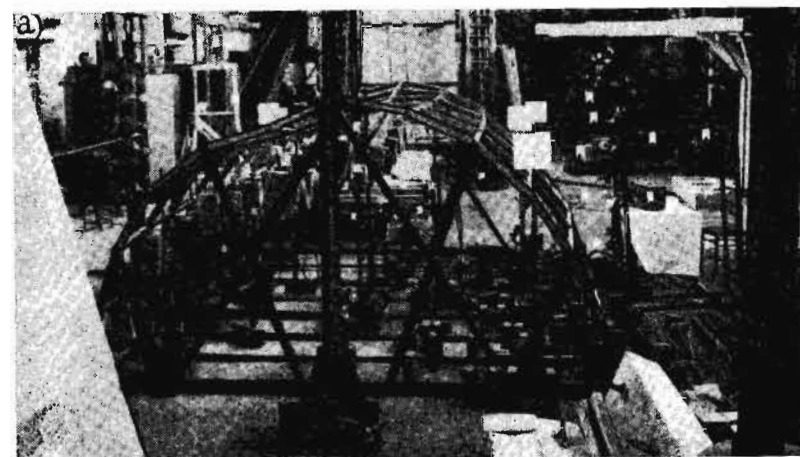


Рис. 68. Статическая работа упругогибкого сетчатого покрытия при действии нагрузки, равномерно распределенной на половине поверхности
 а — характер деформации конструкции;
 б — эпюры перемещений узловых точек;
 в — график зависимости перемещений бокового узла от нагрузки

Действие сосредоточенной нагрузки носило локальный характер, при этом перемещение в точке приложения нагрузки составило 0,75 см. При всех случаях загрузки покрытия напряжения в сечениях элементов в основном носили знакопеременный характер, причем максимальные значения превышали допустимые предельные значения в 1,5 раза.

Проведенные теоретические исследования напряженно-деформированного состояния сетчатого покрытия показали, что для восприятия заданных нагрузок и обеспечения напряжений в стержневых элементах в пределах допустимых требуется значительное увеличение их поперечных сечений.

Экспериментальные исследования. Напряженное состояние сетчатого покрытия исследовалось тензометрическим методом. Деформации жестких элементов измерялись при помощи тензодатчиков с базой 50 мм, а поверхностного слоя гибких поясов — тензодатчиками ТА-2. В качестве тензометрической аппаратуры использовался АИД-1М. Вертикальные и горизонтальные перемещения узловых точек, образованных пересечением арок и продольных ребер, измерялись при помощи прогибомеров системы ПАО-6. Сетчатое покрытие испытывалось на воздействие кратковременных нагрузок в пределах расчетных значений ($q_{расч} = 500$ Па). В качестве нагрузки использовался штучный груз массой 3,3 кг, подвешиваемый на специальных крюках в узловых точках покрытия, разбитого на грузовые зоны. Загрузка велась ступенями. Разгрузка покрытия осуществлялась также по ступеням, но в обратном порядке.

Сетчатое покрытие при действии равномерно распределенной нагрузки по всей его поверхности работает как сетчатый свод-оболочка с жесткими узловыми сопряжениями (рис. 67, а). Эпюры перемещений узловых точек покрытия приведены на рис. 67, б. Следует отметить значительные величины перемещений узловых точек покрытия, возникающие при загрузке, по сравнению с расчетными, что объясняется подвижностью шарнирных узловых соединений покрытия. Наибольшие значения перемещений 21,4 и 16,5 см соответственно наблюдались в центральной и боковой частях покрытия.

Под нагрузкой покрытие, деформируясь, приобретает седловидную форму: в продольном направлении прогибается вниз центральная часть, а в поперечном выпучиваются наружу боковые части. В процессе нагружения происходит стабилизация конструкции, в результате чего она становится более жесткой. По представленной на рис. 67, в зависимости между внешней нагрузкой и перемещением можно судить и о том, как протекает процесс накопления и возврата упругой энергии деформации в ходе нагружения покрытия и последующей его разгрузки. Как можно видеть, сетчатое покрытие из слоистых стержневых элементов с шарнирными узловыми сопряжениями обладает способностью запасать упругую энергию деформации без раз-

рушений в большей степени, нежели сетчатый свод-оболочка с жесткими узловыми сопряжениями.

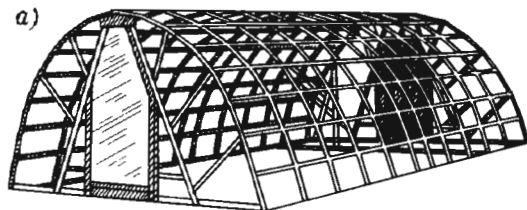
В сетчатом покрытии из слоистых стержневых элементов при действии равномерно распределенной нагрузки на половине поверхности картина деформации в поперечном направлении несколько иная, чем в сетчатом своде-оболочке с жесткими узловыми сопряжениями. Центральная часть половины поверхности покрытия, находящаяся под нагрузкой, прогибается вниз, а боковая часть этой половины выпучивается наружу (рис. 68, а). Схема деформации сетчатого покрытия при одностороннем нагружении похожа на схему деформации при полном нагружении, но с некоторым смещением в сторону приложения нагрузки (рис. 68, б). Это связано с тем, что при одностороннем нагружении шарнирные узловые соединения элементов лишают покрытие бокового смещения в целом. Наибольшие вертикальные перемещения возникают в центральной части нагруженной половины покрытия и составляют 14,1 см, наибольшие горизонтальные перемещения — в боковых частях покрытия и составляют 7,9 и 8,1 см.

Из графика зависимости между внешней нагрузкой и узловым перемещением покрытия (рис. 68, в) видно, что процесс накопления и возврата упругой энергии деформации носит уже более равномерный характер. Это объясняется приработкой элементов конструкции в результате ранее проводимых двухсторонних нагружений и разгрузок покрытия.

При нагружении сетчатого покрытия односторонней, двухсторонней и сосредоточенной нагрузками в гибких наружных слоях стержневых элементов возникали только растягивающие, а во внутреннем жестком слое (призматических стержнях) — преимущественно сжимающие напряжения. Наиболее напряженными местами в конструкции сетчатого покрытия оказались центральная и боковые зоны. В центральной зоне были растянуты нижние гибкие пояса, а в боковых — верхние. Максимальные напряжения в них составили 35 МПа. В то же время в сечениях призматических стержней максимальные напряжения достигли 5 МПа. Таким образом, несущая способность сетчатого покрытия из слоистых стержневых элементов при приложении нагрузок на него в пределах расчетных использована не полностью, тогда как по расчету стержневые элементы в центральной и боковых частях сетчатого свода-оболочки при жестком сопряжении узлов значительно перенапряжены.

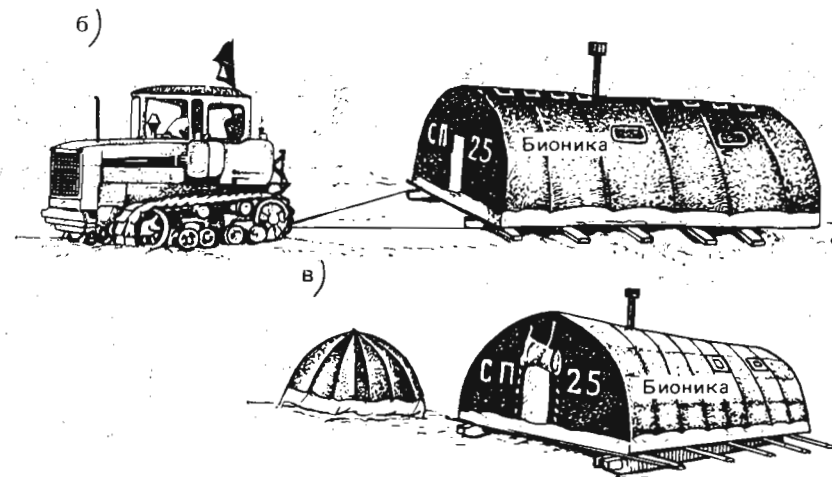
На основе теоретических и экспериментальных исследований упругогибких резильяновых конструкций в ЛенЗНИИЭП совместно с ЦНИИТИА был разработан опытный образец сборно-разборного покрытия дома (рис. 69). Основное функциональное назначение этого покрытия состояло в том, чтобы в кратчайший срок можно было обеспечить условия для временного проживания научно-технического персонала, хранения

Рис. 69. Опытный образец сборно-разборного дома на полярной станции «Северный полюс-25»
 а — структура покрытия;
 б — транспортирование;
 в — общий вид дома на станции



и использования оборудования и проведения научно-исследовательских работ на полярной станции «Северный полюс-25». Перечисленные условия допускали выполнение сборно-разборного покрытия податливым. Габаритные размеры покрытия составляли $3900 \times 6400 \times 2100$ мм, его конструктивное решение аналогично конструктивному решению ранее исследованного в ЛенЗНИИЭПе упругогибкого резильянского свода-оболочки (см. рис. 67, 68). Конструкция покрытия собиралась из двух каркасных модулей (размер модуля в плане 3900×3200 мм). Для увеличения жесткости и устойчивости покрытия по его торцам были запроектированы жесткие диафрагмы в виде ферм, изготовленных из деревянных элементов сечением 40×40 мм.

Двойное ограждение сборно-разборного покрытия состояло из наружного тента и внутренней обшивки. Материал наружного тента — кирза, а внутренней обшивки — бязь. Внутренняя обшивка крепилась специальными петлями к каркасу покрытия. Между наружным тентом и внутренней обшивкой образуется теплоизолирующая воздушная прослойка толщиной 40—50 мм. Каркас покрытия был изготовлен на научно-экспериментальной базе ЛенЗНИИЭПа. Масса всего сборно-разборного покрытия составляла 367 кг, из которых 281 кг — масса конструкции и 86 — наружного и внутреннего ограждения. Отпускная цена 1 м² покрытия составила 32 руб. Весной 1981 г. сборно-разборное покрытие в упакованном виде (габаритные размеры $3200 \times 1600 \times 500$ мм) было доставлено самолетом ИЛ-14 на научно-исследовательскую полярную станцию «Северный полюс-25», находящуюся на дрейфующей льдине в Северном Ледовитом океане, где была произведена сборка (см. рис. 69). Покрытие было установлено на листы фанеры толщи-



ной 4 мм, уложенные на снег. Внутри дома поверх поперечных связей и пола из перкаля укладывался еще один слой из фанерных листов толщиной 4 мм. Таким образом между двумя фанерными слоями образовалась воздушная теплоизолирующая прослойка толщиной 60 мм. В качестве отопительного прибора в доме была установлена печь типа «Апсны», работающая на дизельном топливе. Температура внутри дома регулировалась путем изменения подачи дизельного топлива в камеру сгорания печи.

В течение первых 20 дней исследовались прочностные, теплозащитные качества покрытия и температурный режим внутри дома. В эти дни минимальная температура наружного воздуха составляла -22°C и максимальная скорость ветра достигала 18 м/с. Днем наружная поверхность ограждения за счет темной окраски под действием солнечных лучей разогревалась до температуры $+20 \dots +25^\circ\text{C}$, поэтому в дневное время расход горючего на обогрев дома был минимальным. В ночное время температура наружного воздуха доходила до -20°C , и расход горючего увеличивался (был максимальным). В среднем расход горючего в сутки составлял 20 л. Температура внутри дома колебалась от $+12^\circ\text{C}$ у пола до $+25 \dots +30^\circ\text{C}$ у потолка. От ветровых воздействий в конструкции покрытия явных деформаций или повреждений не произошло. При порывах ветра наблюдались сильные хлопки наружного тентового ограждения.

В течение 20 дней дом эксплуатировался без оттяжек. Затем на случай сильных ветров были установлены четыре оттяжки по две с каждого торца дома. После значительных подвижек ледяных масс в океане на дрейфующей льдине с полярной станцией появилась трещина, и дом пришлось перевозить из

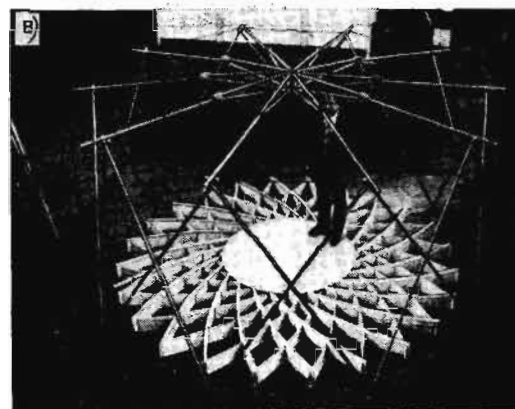
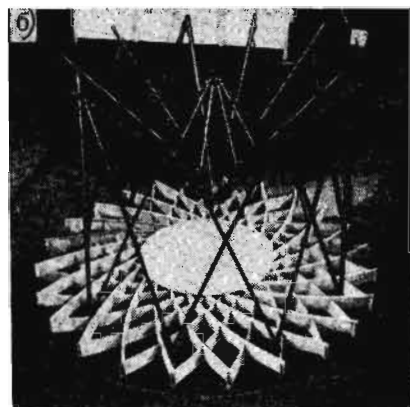
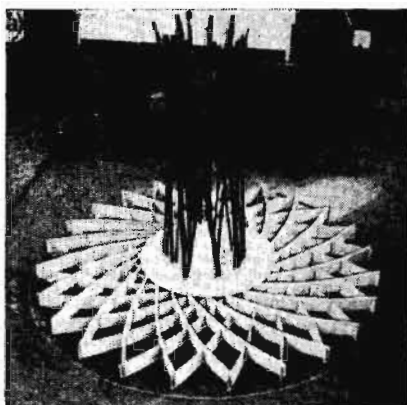


Рис. 70. Каркас бионического трансформируемого дома
а — транспортное состояние;
б — момент трансформации;
в — рабочее положение

района взлетно-посадочной полосы на основную базу станции. Для этого изготовили сани, и дом без демонтажа был установлен на них. Он был перевезен трактором на расстояние 1,5 км (см. рис. 69). При перевозке дома через торосы никаких поломок не произошло, так как упругогибкая конструкция покрытия с шарнирными узловыми соединениями элементов легко приспосабливалась к перекосам полозьев, происходившим на неровных участках дрейфующей льдины.

За 3 года работы научно-исследовательской полярной станции «Северный полюс-25» бионическое сборно-разборное покрытие использовалось как временное жилое, производственное и складское помещение, и надежная работа конструкции покрытия подтвердилась полностью.

Бионическая конструкция трансформируемого дома. Несущей основой бионического трансформируемого дома является пространственная упругогибкая стержневая конструкция, состоящая из складного кольцевого каркаса и складного покрытия пространственной фермы (рис. 70).

Складной кольцевой каркас (авторы инж. Н. П. Мельников, Б. Г. Мухин, В. А. Савельев) состоит из 20 наклонных жестких стержней-стоек, пересекающихся по длине между собой и расположенных по прямолинейным образующим гиперболоида вращения. Стержни в местах их пересечения по длине и на концах соединены шарнирами, обеспечивающими свободный поворот их относительно трех осей X , Y , Z .

В развернутом виде стальной каркас имеет форму правильного десятигранника, вписанного в окружность радиусом 2,25 м. Высота каркаса в рабочем состоянии составляет 2,1 м.

Складное покрытие, разработанное в ЛенЗНИИЭПе на основе строения крыльев птеродактиля — летающего ящера, со-

стоит из десяти отдельных вилкообразных стержней, расположенных по радиусам окружности, образованной кольцевым каркасом вилками к центру (рис. 70, а, б), причем одна ветвь вилки в каждом стержне обязательно подвижная, т. е. соединяется с другой неподвижной дугообразной ветвью с помощью цилиндрического шарнира, что обеспечивает ей поворот относительно последней. По периметру окружности радиальные стержни концами укладываются в седловидные выемки, образованные пересечением концов двух смежных стержней-стоек кольцевого каркаса. Все три стержня, связанные единой тросовой затяжкой диаметром 5 мм, образуют опорный узел покрытия (рис. 70, а). Вилками все десять стержней в центре покрытия шарнирно прикрепляются к двум втулкам, посаженным на одну ось (рис. 70, б), причем верхняя втулка соединяется с осью неподвижно, а нижняя может перемещаться по ней.

Предлагаемое решение складного покрытия в виде радиальной пространственной фермы со складным кольцевым каркасом позволяет легко трансформировать всю конструкцию из транспортного состояния в рабочее и наоборот (рис. 70, а—в) без всякой разборки ее, что очень важно при ее возведении в суровых условиях Арктики.

Стержни кольцевого каркаса и радиальной пространственной фермы покрытия выполняются из алюминиевых трубок диаметром 30 мм с толщиной стенок $\delta=1$ мм. Тросовая затяжка снабжена натяжным устройством (талрепом), с помощью которого можно осуществлять преднапряжение всей бионической конструкции трансформируемой палатки.

Физико-механические характеристики материалов, используемых для сооружения пространственной стержневой конструкции, приведены в табл. 19.

Таблица 19. Физико-механические характеристики материалов

Наименование характеристик	Вид материалов		
	Алюминий АМГ-2П	Сталь	Стальной трос
Модуль упругости, МПа	$70 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$
Расчетное сопротивление, МПа			
при растяжении	150	210	1000
при сжатии	150	210	—
при изгибе	150	210	—

Пространственная упругогибкая бионическая конструкция трансформируемого дома обладает следующими особенностями: подвижностью шарнирных узловых соединений; преднапряжением жестких стержневых элементов складного каркаса и радиальной фермы покрытий, создаваемым в процессе трансформации конструкции из транспортного в рабочее состояние. Вследствие этого для исследования действительного характера ее напряженно-деформированного состояния был необходим эксперимент и последующий совместный анализ расчетных и экспериментальных данных.

Статический расчет. Бионический трансформируемый дом был предназначен для эксплуатации в условиях Крайнего Севера, что соответствует III району СССР по весу снегового покрова (см. п. 5.2 СНиП II-6—74. Согласно п. 5.1 СНиП нормативная снеговая нагрузка на 1 м^2 горизонтальной проекции покрытия составляет $P_n = P_0 c = 1000 \cdot 0,76 = 760 \text{ Па}$ ($P_0 = 1000 \text{ Па}$ — вес снегового покрова на 1 м^2 горизонтальной поверхности земли по табл. 4 п. 5.2; $c = 1 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,76$ — коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие при $\alpha \leq 25^\circ$ и $v = 7 \text{ м/с}$, определенный по 5.5). Расчетная снеговая нагрузка на 1 м^2 покрытия согласно СНиП равна $P_c = P_n \cdot n = 760 \cdot 1,6 = 1220 \text{ Па}$, где $n = 1,6$ — коэффициент перегрузки по п. 5.7. В районах, где предполагалось эксплуатировать дом, средние скорости ветра за зимний период согласно СНиП — в пределах 6—7 м/с, а отрицательная ветровая нагрузка (отсос) на покрытие равна 450 Па (см. карту 2, пп. 6.3 и 6.4, табл. 8, п. 12). При таких ветровых воздействиях накопления снега на покрытия либо не происходит, либо снег откладывается с подветренной стороны, что подтверждается исследованиями снеговых нагрузок на кровли в 1972—1975 гг.

в г. Воркуте. Действительные снеговые нагрузки при таких ветровых воздействиях в 7,5 раз меньше принятых по СНиП II-6—74. С учетом вышеизложенного за расчетную принимаем снеговую нагрузку на покрытие дома: $P_n = P/7,5 = 1220/7,5 = 160 \text{ Па}$.

Предполагаемый район эксплуатации дома соответствует VI району СССР по скоростному напору ветра (см. п. 6.4 СНиП). Нормативное значение статической составляющей ветровой нагрузки в соответствии с п. 6.3 СНиП определяется по формуле:

$$q_n = q_0 k c,$$

где $q_0 = 850 \text{ Па}$ — скоростной напор ветра для VI района СССР (табл. 6, п. 6.4), который согласно п. 6.6 допускается снизить до 25 %, т. е. $q_0 = 850 \cdot 0,25 = 212,5 \text{ Па}$; k — коэффициент, учитывающий высоту и тип местности (табл. 7, п. 6.5 СНиП), для открытой местности $k = 1$; c — аэродинамический коэффициент, принимаемый в соответствии с п. 6.7 СНиП II-6—74.

Рис. 71. Расчетная схема и эпюра перемещений узловых точек бионической конструкции трансформируемого дома
1 — тросовая затяжка

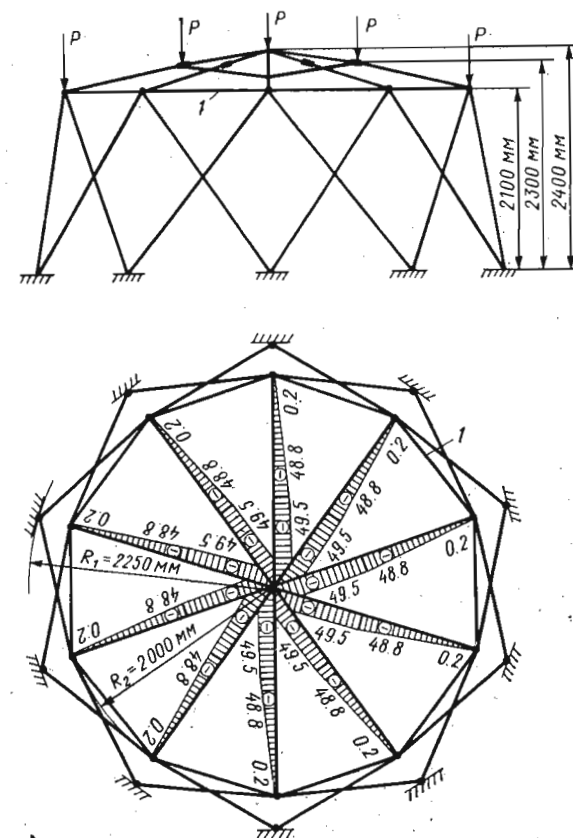
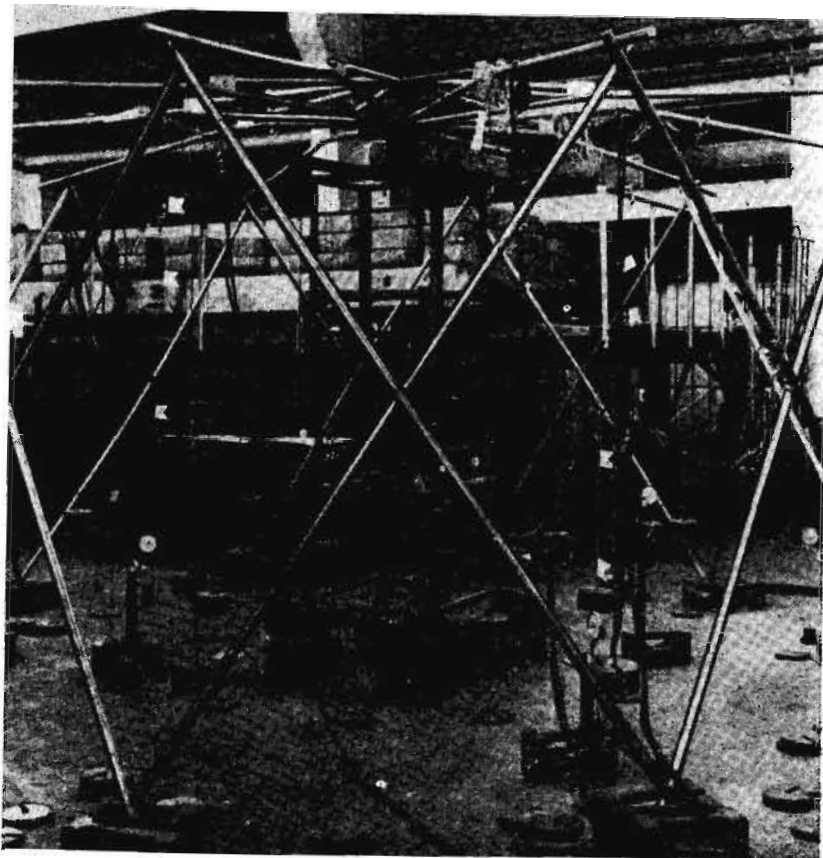


Схема распределения значений аэродинамических коэффициентов c для дома принимается в соответствии с указаниями табл. 8, п. 12, б СНиП II-6—74, в соответствии с которой и высчитываются нормативные значения ветровой нагрузки.

Расчетная ветровая нагрузка на дом определяется по формуле $q = q_n \cdot n$, где $n = 1,2$ — коэффициент перегрузки в соответствии с п. 6.18 СНиП. Поскольку бионическая конструкция трансформируемого дома состоит из опорного кольцевого каркаса и покрытия в виде пространственной фермы, то для правильной оценки напряженно-деформированного состояния конструкции ее рассматривали как пространственную стержневую систему. Узлы сопряжений наклонных стоек кольцевого каркаса с основанием и со стержнями пространственной фермы покрытия принимались шарнирными. Все остальные узловые сопряжения пространственной стержневой системы принимались жесткими. Нагрузки согласно методике расчета сводились



к узловым. В соответствии с типом опирания и загрузки бионической конструкции трансформируемого дома была принята расчетная схема (рис. 71).

Задача расчета сводилась к составлению и решению уравнений равновесия в перемещениях на ЭВМ по программе ПРОСС-1.

Результаты статического расчета бионической конструкции трансформируемого дома показали, что наибольшие вертикальные перемещения возникают в центральных узлах и составляют 49,48 мм, а наибольшие горизонтальные перемещения — в контурных узлах покрытия и составляют 2,14 мм. Максимальные изгибающие моменты в стержнях конструкции при этом достигают $M = 9000$ Н·см, а максимальные продольные силы в этих же стержнях равны $N = 300$ Н.

Максимальные нормальные напряжения в стержнях каркаса, соответственно площадь поперечного сечения и момент

Рис. 72. Размещение измерительных приборов на бионической конструкции трансформируемого дома

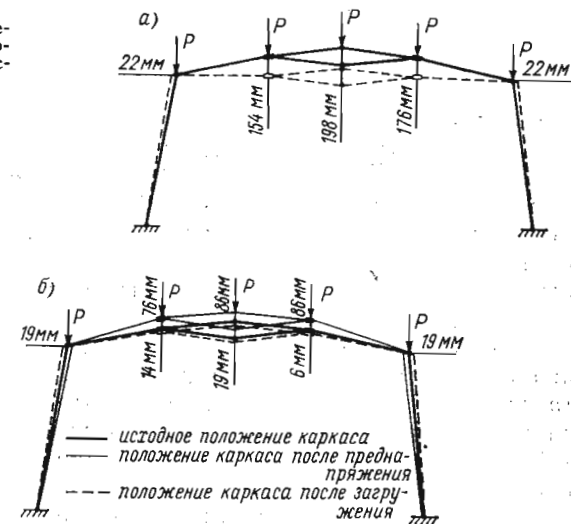
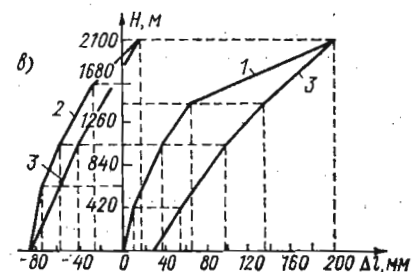


Рис. 73. Статические испытания бионической конструкции трансформируемого дома

а — схема перемещений узловых точек каркаса на первом этапе нагружений;
б — график зависимости перемещений центрального узла покрытия от нагрузки;
в — схема перемещений узловых точек каркаса на втором этапе нагружений
1 — первый этап нагружения
2 — то же, второй;
3 — разгрузка



сопротивления которых равны $0,92 \text{ см}^2$ и $0,64 \text{ см}^2$, составили $\sigma = N/F + M/W = 300/(0,91 \cdot 10^{-4}) + 9000/(0,64 \cdot 10^{-6}) = 143,3 \text{ МПа}$.

Таким образом, максимальные нормальные напряжения в стержнях конструкции при загрузке расчетной вертикальной нагрузкой были меньше расчетного сопротивления материала конструкции ($R=150 \text{ МПа}$ для алюминия марки АМГ-2П).

Экспериментальные исследования. Напряженно-деформированное состояние бионической конструкции трансформируемого дома исследовалось тензометрическим методом. Относительные фибровые деформации элементов измерялись при помощи 102 тензодатчиков с базой 50 мм. В качестве тензометрической аппаратуры использовался измеритель деформаций АИД-1М. Для измерения перемещений узловых точек элементов конструкции применялось семь прогибомеров системы ПАО-6. Усилия в тросовой затяжке определялись при помощи динамометра с ценой деления 50 Н. На рис. 72 представлено размещение измерительных приборов на бионической конструкции.

При статическом испытании конструкции дома расчетная равномерно распределенная нагрузка, имитирующая снеговую, заменялась сосредоточенными силами, приложенными в узлах покрытия. Для определения величин сосредоточенных сил поверхность покрытия дома была разбита на 21 грузовую зону. При площади каждой зоны $S=0,6 \text{ м}^2$ величина сосредоточенной силы равнялась $P=P_n \cdot S=160 \cdot 0,6=96 \text{ Н}$. Для загрузки бионической конструкции трансформируемого дома использовались наборные плоские грузы массой от 1,5 до 3 кг, которые укладывались на специальные подвески (см. рис. 72).

Перед загрузкой конструкции ее предварительно натягивали за счет натяжения кольцевой затяжки, установленной по периметру покрытия. Натяжение осуществлялось с помощью талрепа. Статические испытания выполнялись в два этапа, каждый из которых определялся величиной натяжения кольцевой затяжки и соответственно предварительным напряжением конструкций.

На первом этапе испытаний конструкции усилие в тросовой затяжке составляло 200 Н, на втором оно было доведено до 750 Н. Деформации бионической конструкции трансформируемого дома как на первом, так и на втором этапах испытаний показали, что ее работа носит пространственный характер.

На первом этапе испытаний (при усилии в кольцевой затяжке покрытия 200 Н) горизонтальные перемещения контурных узлов покрытия были незначительны и не превысили 22 мм, а вертикальные перемещения этих же узлов не превысили 10 мм. Наиболее значительными были вертикальные перемещения центральных узлов покрытия (рис. 73, а).

При полном загрузке (общий вес нагрузки $P_0=2100 \text{ Н}$) вертикальное перемещение центрального узла покрытия до-

стигло 198 мм. Зависимость перемещений центральных узловых точек покрытия от нагрузки приведена на графиках (рис. 73, б). Из этих графиков видно, что на последней ступени загрузки происходит резкое увеличение перемещений по сравнению с начальными ступенями. Максимальные напряжения в стержнях каркаса составляли 150 МПа. Схема перемещений узловых точек конструкции на первом этапе испытаний приведена на рис. 73, а. После разгрузки центральная часть покрытия имела остаточный прогиб, равный 28 мм.

На втором этапе испытаний усилие в тросовой затяжке с помощью талрепа было доведено до 750 Н. В процессе предварительного напряжения конструкции за счет натяжения тросовой затяжки произошел подъем системы центральных узлов покрытия. Центральный узел покрытия поднялся на 86 мм (рис. 73, б). На втором этапе испытаний конструкции горизонтальные и вертикальные перемещения контурных узлов покрытия были незначительны и не превышали соответственно 20 и 10 мм. Наиболее значительными были вертикальные перемещения центральных узлов покрытия (рис. 73, в).

При полном загрузке (общий вес нагрузки $P_0=2100 \text{ Н}$) центральный узел покрытия опустился на 105 мм, что составляет около 1/40 пролета покрытия.

Из графиков зависимости перемещений узловых точек от нагрузки видно, что на втором этапе испытаний эта зависимость более близка к линейной, чем на первом. После разгрузки центральные узлы покрытия не имели остаточного прогиба, что указывает на упругий характер деформаций в элементах покрытия на втором этапе испытаний (рис. 73, б). В результате испытаний выяснилось, что за счет предварительного напряжения вертикальные перемещения центральных узлов покрытия при загрузке конструкции вертикальной нагрузкой уменьшаются почти в 2 раза; при этом наибольшие напряжения в элементах покрытия (второй этап испытаний) достигали 70—80 МПа.

Большие узловые перемещения бионической конструкции при упругом характере деформаций в ее элементах, выявленные в процессе экспериментальных исследований, говорят о том, что она обладает способностью при действии внешних сил накапливать значительное количество упругой энергии без разрушения. Отсюда следует, что бионическая конструкция работает по упругогибкой, а не жесткой схеме, как это предполагалось при теоретических исследованиях ее напряженно-деформированного состояния. И если согласно статическому расчету несущая способность бионической конструкции трансформируемого дома была на пределе, то данные экспериментальных исследований показали, что несущая способность этой конструкции при загрузке расчетной нагрузкой была использована лишь наполовину. Высокая несущая способ-

бионической конструкции при больших узловых перемещениях обеспечивается присущим ей свойством резильянса.

На основе предварительных теоретических и экспериментальных исследований в ЛенЗНИИЭПе был разработан опытный образец бионического трансформируемого дома. Основное его функциональное назначение, так же как и сборно-разборного покрытия, состояло в том, чтобы в кратчайший срок обеспечить оптимальную среду для временного проживания технического персонала, хранения и использования оборудования, проведения камеральных работ в полевых условиях. Перечисленные требования допускали выполнение конструкции трансформируемого дома податливой.

Конструкция образца (кольцевой каркас) трансформируемого дома была изготовлена на научно-экспериментальной базе ЛенЗНИИЭПа (масса каркаса составляла 20 кг); тентовое ограждение было сшито на одном из ленинградских предприятий (масса ограждения составляла 60 кг). Отпускная цена 1 м² палатки — 42 руб. 68 коп.

Наружный слой тента палатки выполнен из парусины, внутренний — из бязи. Тент крепится к каркасу на специальных петлях. Между наружным тентом и внутренней обшивкой образуется теплоизолирующая прослойка толщиной 40—50 мм.

Для противодействия ветровым нагрузкам были предусмотрены четыре оттяжки из стального троса, которые крепятся к верхним узлам каркаса. Предварительная сборка и разборка бионического трансформируемого дома была произведена на научно-экспериментальной базе ЛенЗНИИЭПа, а затем в упакованном виде его отправили на место эксплуатации в натуральных условиях — на островах Северной Земли.

7.4. КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСТРОПНО-ПОЛИГОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Как было показано в 4.4, набираются из отдельных полигональных блоков со слоистым строением ограждающих конструкций транструпно-полигональные структуры. Наружные несущие слои обычно выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Внутренние слои являются связующими и перераспределяют усилия между несущими наружными слоями. Как известно [7], сочетание слоев с различными свойствами позволяет получить конструкции с минимальной массой и при этом обладающие высокой прочностью и жесткостью. Это обеспечивает конструкциям повышенную надежность.

В ЛенЗНИИЭПе разработана транструпно-полигональная система для жилых и общественных зданий (авторы инж. В. Г. Темнов, Е. Н. Митрофанов, архит. Е. Е. Чернов).

Эта конструктивная система набирается из модульных блоков — шестиугольных призм, образующих сотовую структуру. В горизонтальном и вертикальном направлениях блоки стягиваются затяжками. В результате по периметру происходит их обжатие. Каждый блок оказывается как бы в «обойме». Это повышает не только их несущую способность, но и надежность конструктивной системы в целом без увеличения массы.

Для исследования напряженно-деформированного состояния гексагонального блока при загрузке статической нагрузкой была изготовлена его модель в натуральную величину. Материал модели — древесина. Модель гексагонального блока образуется из двух трехгранных складок и двух торцевых панелей. Складки соединены между собой на болтах по горизонтальным граням (рис. 74, а, б). Грани складок изготовлены из 5-метровых досок с поперечным сечением 100×20 мм, объединенных по периметру поперечными ребрами жесткости сечением 40×65 мм. Торцевые панели состоят из наружной и внутренней обшивки, связанных между собой решеткой из досок сечением 170×40 мм. Обшивка была выполнена из листовой фанеры толщиной 10 мм. Торцевые панели к складкам прикреплялись болтами. Для того чтобы модель могла наиболее полно представить работу гексагонального блока в конструкциях зданий (рис. 75 а—в), влияние торцевых панелей соседних гексагональных блоков имитировалось треугольными фермами. Эти фермы устанавливались между торцевыми панелями верхней и нижней складок исследуемой модели и стягивались между собой стальной затяжкой (рис. 74, б).

Исследование статической работы гексагонального блока из складок корытообразного профиля. Гексагональный блок, образуемый двумя корытообразными складками, зеркально установленными друг на друга, в конструктивном отношении представляет собой оболочку с сечением в виде двутавра. С точки зрения несущей способности блока представляет интерес исследование его статической работы. С этой целью и был выполнен статический расчет гексагонального блока, состоящего из складок с толщиной стенок $\delta=20$ мм, подкрепленных поперечными ребрами жесткости сечением 40×65 мм. Характеристики нагрузок принимались согласно СНиП II-6—74.

Постоянные нагрузки, Па

Собственный вес складки при коэффициенте перегрузки $n=1,1$ 840

Временные нагрузки, Па

Снеговые нагрузки (IV территориальный район СССР) при коэффициенте перегрузки $n=1,4$ 2100
Эксплуатационные нагрузки при коэффициенте перегрузки $n=1,4$ 2100

Нагрузки согласно методике расчета методом конечных элементов сводились к узловым. Оболочка опиралась только на торцевые диафрагмы. Сопряжения были приняты жесткими.

Рассматриваемая конструкция оболочки представляет собой сложную пластинчато-стержневую систему: сочетание горизонтальных и наклонных боковых граней, подкрепленных наружными ребрами жесткости. Это потребовало для правильной оценки напряженно-деформированного состояния складки рассматривать ее в целом как комбинированную систему. С этой целью ребра жесткости представлялись стержневыми конечными элементами, а горизонтальные и наклонные боковые грани — конечными элементами прямоугольной формы. Узлы сопряжений подкрепляющих ребер принимались жесткими.

Для расчета применялся метод конечных элементов в форме метода перемещений. Задача расчета сводилась к последовательному объединению элементов стержней и пластин в единое целое с последующим составлением и решением уравнений равновесия в перемещениях. Эта задача была реализована на ЭВМ по программе РАССУДОК.

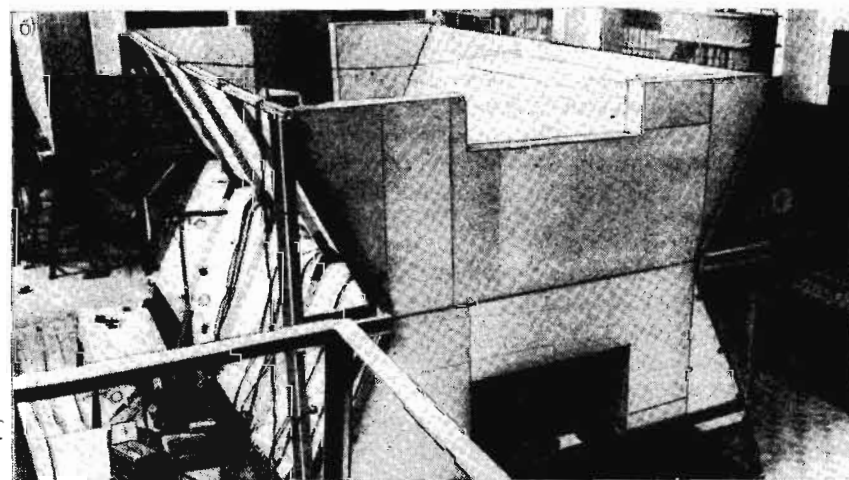


Рис. 74. Модульный блок транзитроно-гексагональной системы

а — корытообразные складки, подготовленные к транспортировке на место сборки блока;
б — несущая оболочка в виде двутавра, выполненная из двух корытообразных складок

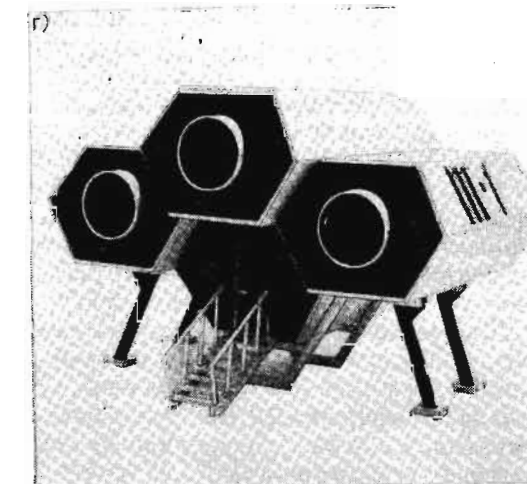
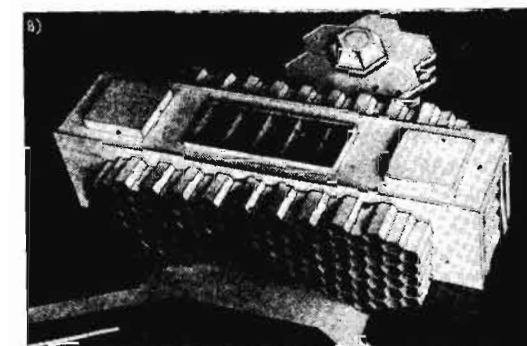
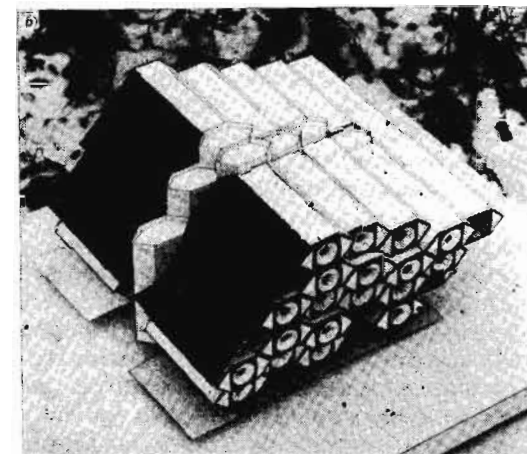


Рис. 75. Примеры решений заданий с транзитроно-гексагональной структурой

а — проект высотного здания гостиницы (архит. Е. Е. Чернов и А. В. Иванов, инж. В. Г. Темнов);
б — модель жилого комплекса для северных районов (архит. А. Н. Акулова, инж. В. Г. Темнов);
в — модель здания гостиницы (архит. Ю. А. Някитин, инж. В. Г. Темнов и Т. И. Ефимова);
г — модель мобильного жилого дома (архит. Е. Е. Чернов, инж. В. Г. Темнов, Е. Н. Митрофанов)

Схема деформаций, значения перемещений и изгибающих моментов, полученных в результате статического расчета, показали следующее. Оболочка под действием равномерно распределенной нагрузки в продольном направлении работает по балочной схеме, а в поперечном — по рамной. Причем горизонтальная грань оболочки работает как прямоугольная пластина, жестко защемленная по контуру, а боковые наклонные грани — как прямоугольные пластины, защемленные по трем сторонам. Наибольшие вертикальные перемещения наблюдаются в центральной части оболочки и составляют 15,8 мм. Боковые наклонные грани выпучиваются в наружную сторону. Максимальные прогибы их из плоскости равны 3,6 мм. Напряжения в гранях и в поперечных ребрах жесткости оболочки не превосходят допустимых и находятся в отношении 1:4. Наибольшие напряжения возникают в ребрах, подкрепляющих горизонтальную грань оболочки, а также в центральной части и в местах защемления горизонтальной грани торцевыми диафрагмами и соответственно составляют 11, 2,8 и 2,4 МПа.

Проведенные теоретические исследования напряженно-деформированного состояния пластинчато-стержневой системы показали, что каждая из складок гексагонального объемного блока в состоянии полностью воспринять нагрузку, приходящуюся на него в случае отказа одной из складок. Кроме того, эти исследования позволили выявить скрытые возможности рационального конструирования оболочек двутаврового профиля за счет варьирования сечений граней и ребер, а также количества последних.

Экспериментальные исследования конструкции гексагонального блока. Для проверки конструктивных решений, выяснения несущей способности и уточнения расчетных схем были проведены статические испытания модели гексагонального блока.

Статические испытания осуществлялись в четыре этапа:

- I этап — испытания отдельной складки модели гексагонального блока;
- II этап — испытания модели гексагонального блока;
- III этап — испытания усиленной модели гексагонального блока на нормативную и расчетную нагрузки;
- IV этап — испытания усиленной модели гексагонального блока с целью определения запаса прочности.

Модель гексагонального блока была испытана на восприятие сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузки. Значение сосредоточенной нагрузки согласно п. 3.10 СНиП II-6—74 было принято равным 1500 Н.

Сосредоточенная нагрузка прикладывалась в центре горизонтальной грани настила отдельной складки или гексагонального блока. После приложения сосредоточенной нагрузки давалась выдержка 10 мин для стабилизации перемещений конструкции и затем производилось снятие отсчетов по прогибомерам и тензодатчикам.

Значение равномерно распределенной нагрузки согласно п. 3.5 СНиП было принято равным 1500 Па. Расчетная равномерно распределенная нагрузка: $q_p = q_n \cdot n = 1500 \cdot 1,4 = 2100$ Па, где $n = 1,4$ — коэффициент перегрузки.

Для загрузки равномерно распределенной нагрузкой поверхность горизонтальной грани отдельной складки или гексагонального блока была разбита на 16 равных прямоугольных грузовых зон. При загрузке на каждую грузовую зону укладывали равное количество грузов. Этим обеспечивалось равномерное распределение нагрузки на загружаемой поверхности.

Загружение конструкций велось ступенями. Величина ступени на первом этапе испытаний — 100 Па, на остальных этапах — 240 или 580 Па. После каждой ступени давалась выдержка 10 мин для стабилизации перемещений конструкции. При испытаниях конструкций определяющими являлись прогиб в середине пролета отдельной складки или всего гексагонального блока от загрузки нормативной нагрузкой и максимальные напряжения в элементах конструкций при загрузке расчетной равномерно распределенной нагрузкой.

Напряженно деформированные состояния отдельной складки и модели гексагонального блока исследовались с помощью тензодатчиков и прогибомеров. Относительные фибровые деформации элементов испытываемых конструкций измерялись прибором ИДЦ-1 (измеритель деформации цифровой) при помощи тензодатчиков с базой 50 мм. На нижней складке гексагонального блока было установлено 120 тензодатчиков. При испытании модели гексагонального блока в целом, т. е. состоящего из двух складок — верхней и нижней, было поставлено еще 90 тензодатчиков на верхнюю складку. Для определения перемещений конструкций применялись 26 прогибомеров системы ПАО-6. Размещение приборов показано на рис. 74, б. Для загрузки конструкций в качестве грузов использовались кирпичи массой 3,7 кг и стальные грузы массой 20 кг.

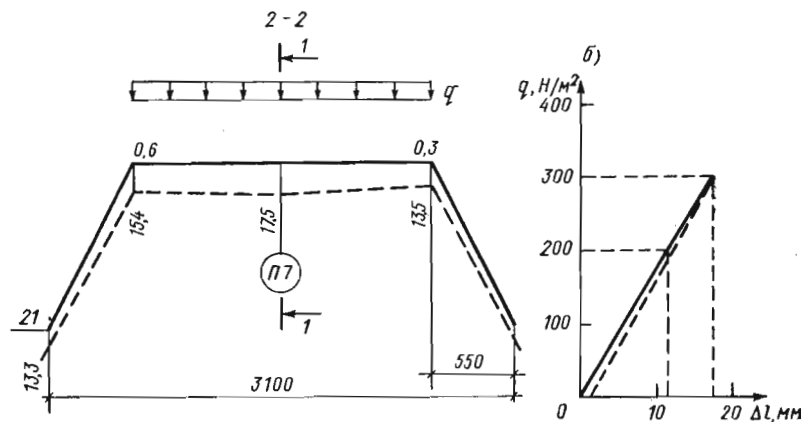
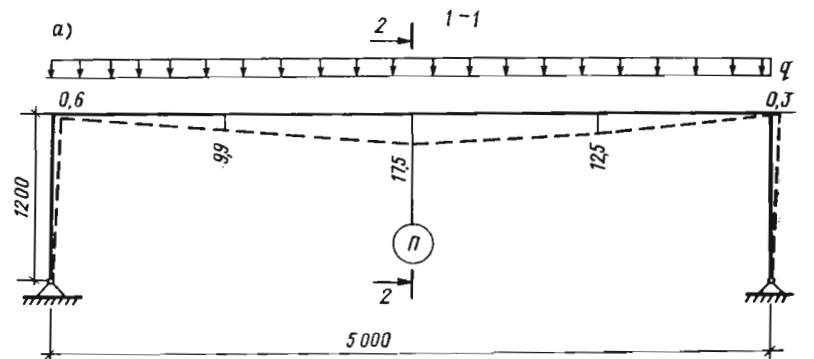
При испытании отдельной складки гексагонального блока (первый этап испытаний) исследовалось напряженно-деформированное состояние элементов складки при загрузке сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузками. При загрузке сосредоточенной нагрузкой $P = 1500$ Н прогиб в середине пролета складки составил 15,3 мм. При загрузке равномерно распределенной нагрузкой $q = 300$ Па прогиб в середине пролета был равен 17,5 мм. Эпюры перемещений и график зависимости перемещений от нагрузки приведены на рис. 76.

Напряжения в элементах конструкций при этих нагрузках не превышали 2,5 МПа. Испытания показали, что при загрузке сосредоточенной нагрузкой прогиб в середине пролета отдельной складки не превышает допускаемого, равного $(1/200)l = 25$ мм ($l = 5000$ мм — величина пролета складки).

Дальнейшее нагружение равномерно распределенной нагрузкой выше 300 Па не производилось, так как прогиб при нормативной равномерно распределенной нагрузке, равной 1500 Па, явно превысил бы допустимый. На втором этапе испытаний исследовалось напряженно-деформированное состояние модели гексагонального блока, состоящего из двух складок, соединенных по горизонтальным граням.

При нагружении модели гексагонального блока сосредоточенной нагрузкой $P=1500$ Н прогиб в середине пролета модели составил 5,0 мм. Величина равномерно распределенной нагрузки была доведена до 1270 Па. При этом прогиб в середине пролета модели достиг 30,7 мм и превысил допустимый прогиб, равный 25 мм. Эпюры и график зависимости перемещений от нагрузки приведены на рис. 77.

Наибольшие напряжения при нагрузке $q=1270$ Па возникли в поперечных ребрах модели, расположенных в середине про-



лета. Наибольшее сжимающее напряжение в поперечных ребрах нижней складки составило 5,7, а наибольшее растягивающее — 2,7 МПа. Напряжения в элементах модели при нагрузке 1270 Па были меньше расчетного сопротивления древесины при изгибе $R_n=13$ МПа.

На третьем этапе испытаний для увеличения жесткости модели боковые грани верхней и нижней складок были усилены раскосами из досок поперечным сечением 20×100 мм. Раскосы располагались под углом 45° к продольным элементам граней, образуя треугольную решетку, и крепились к продольным элементам граней гвоздями. Продольные элементы боковых граней, связанные раскосами, работали на изгиб совместно, что увеличивало общую жесткость модели. Так, при нагрузке, равной нормативной ($q_n=1500$ Па), прогиб в середине пролета блока составил 23,5 мм, что меньше допустимого прогиба, равного 25 мм. Эпюры перемещений, а также изгибающих момен-

Рис. 76. Статические испытания отдельной складки гексагонального блока
а — эпюра перемещений от нагрузок;
б — график зависимости перемещений от нагрузок в середине пролета

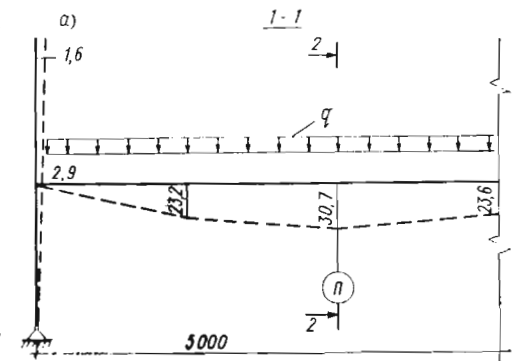


Рис. 77. Статические испытания модели гексагонального блока, состоящего из двух складок
а — эпюра перемещений от нагрузок; б — график зависимости перемещений от нагрузок в середине пролета

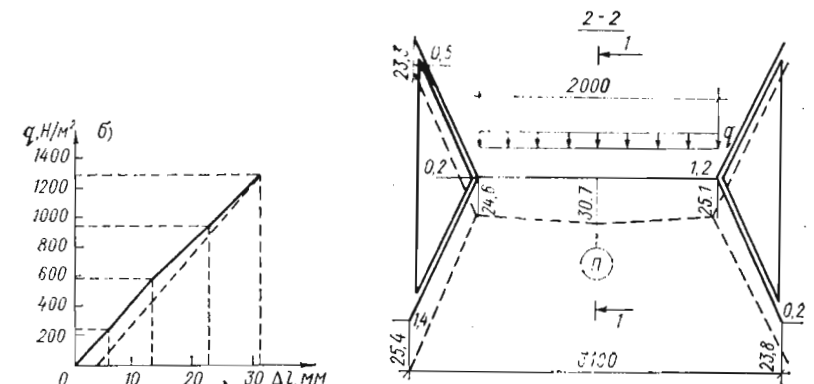
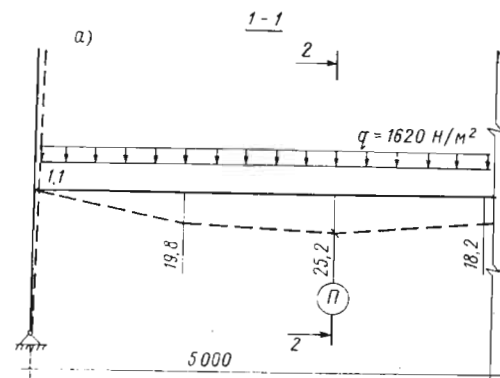


Рис. 78. Статические испытания модели гексагонального блока, состоящего из двух складок, усиленных раскосами
а — эпюра перемещений от нагрузок;



тов в срединных поперечных ребрах и продольных элементах гексагонального блока приведены на рис. 78, 79.

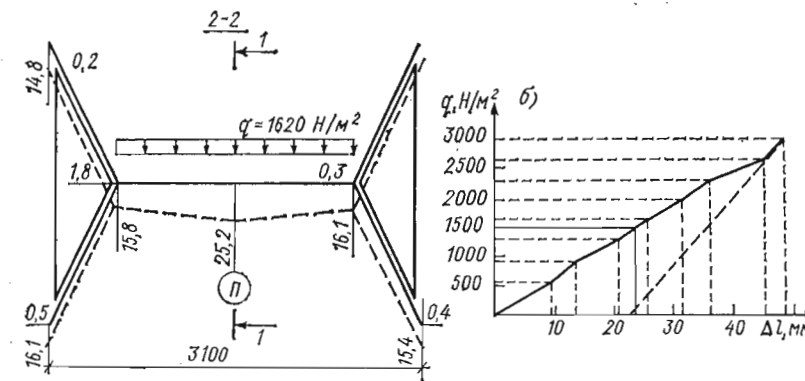
При нагрузке, равной расчетной ($q_{расч} = 2100$ Па), наибольшие напряжения возникли в срединных поперечных ребрах нижней складки блока и составляли: сжимающие 10, растягивающие — 4,9 МПа. В продольных элементах гексагонального блока максимальные сжимающие и растягивающие напряжения достигали 5 МПа.

Такие значения напряжений в поперечных и продольных элементах гексагонального блока указывают на его пространственную работу.

Поскольку напряжения в элементах гексагонального блока при загрузке его расчетной нагрузкой были меньше расчетного сопротивления древесины при изгибе ($R_n = 13$ МПа), то при испытании продолжали увеличивать равномерно распределенную нагрузку, постепенно доведя ее до 2990 Па. При этой нагрузке прогиб в середине пролета блока достиг 48,5 мм, а напряжения в срединных поперечных ребрах нижней складки блока составили: сжимающие 13,8, а растягивающие 6,6 МПа. Из этих данных следует, что лишь при равномерно распределенной нагрузке, на 42 % превосходящей расчетную, в элементах гексагонального блока возникли предельные напряжения (см. рис. 79).

На четвертом этапе испытаний нагрузка на гексагональный блок была постепенно доведена до 4920 Па с целью проверки его запаса прочности. При этой нагрузке прогиб в середине пролета блока достиг 104 мм (см. график зависимости перемещений от нагрузок, приведенный на рис. 80). Напряжения в срединных поперечных ребрах нижней складки блока при нагрузке $q = 4920$ Па составили: сжимающие — 43,8, растягива-

б — график зависимости перемещений от нагрузок в середине пролета



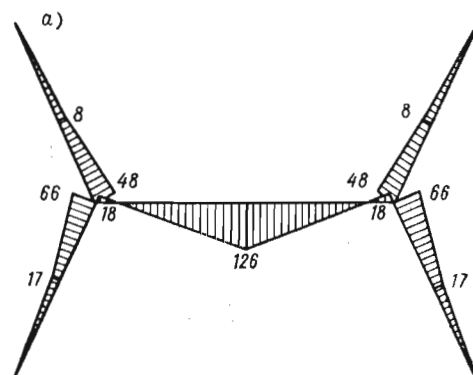
ющие 20 МПа. Как видно, наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения превысили расчетное сопротивление древесины соответственно в 3,4 и в 1,5 раза; прогиб в середине пролета блока превысил допустимый в 4 раза. Однако при этом видимых признаков разрушения конструкции обнаружено не было. Все это говорит о более чем трехкратном запасе прочности пластинчато-стержневой конструкции гексагонального блока. В итоге можно отметить следующее.

1. Пластинчато-стержневые системы с траекториальными структурами. Теоретические и экспериментальные исследования плит с траекториальными структурами показали достаточно высокую несущую способность и жесткость их при минимальном расходе материала, идущего на изготовление. Так, процентное отношение собственного веса дискретных плит к величине воспринимаемых нагрузок составило при равномерно распределенной (1400 Па и 3000 Па) и сосредоточенной (6000 Н и 1800 Н) соответственно: для деревянной плиты 4 и 10 %, для фанерной — 5 и 11 %, для плиты из стеклопластика — 5 и 7,8 %.

Дискретные плиты имеют следующие особенности: за счет применения траекториальных структур наиболее рационально используется материал; монтаж и демонтаж плиты может осуществляться с наименьшими затратами времени и труда; обеспечивается максимальная заводская готовность; они обладают архитектурной выразительностью и декоративностью; отсутствие отделочных работ; имеется возможность включения в работу плиты легкого настила или обшивок. Дискретные плиты представляют собой стержневые системы из тонкостенных пластинчатых элементов с жесткими узловыми соединениями, но, несмотря на это, потеря устойчивости при плоской форме из-

Рис. 79. Результаты статических испытаний модели гексагонального блока, состоящего из двух складок

а — эпюра изгибающих моментов в срединных поперечных ребрах при нагрузке $q=1000$ Н/м;



гиба отдельных элементов (пропеллерообразность) наблюдалась лишь при нагрузках, близких к разрушающим. Несущая способность такой системы в основном определялась прочностью, а не устойчивостью.

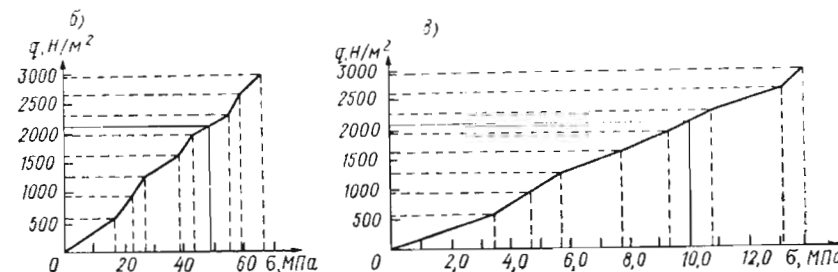
Проведенные теоретические и экспериментальные исследования, а также натурные испытания дискретных плит позволяют рекомендовать их к практическому применению в гражданском, промышленном и сельском строительстве. Покрытия и перекрытия жилых, общественных и промышленных зданий, навесы и укрытия для техники, складские помещения для хранения материалов и сельскохозяйственных продуктов, сооружения отдыха и туризма, малые архитектурные формы и т. д. — вот диапазон применения дискретных плит.

Выбор эффективного материала для плит должен базироваться на экономическом расчете и соответствовать конкретной области применения (тип здания или сооружения, вид конструкции, район строительства). Для сооружений стационарного назначения рационально применять плиты, изготовленные из модифицированной древесины или фанеры, обладающих высокой прочностью, повышенной стойкостью и долговечностью.

Дискретные плиты из конструкционных пластмасс целесообразнее применять там, где требуется повышенная атмосферостойкость и долговечность, в условиях агрессивных сред и в сооружениях, где должны быть выдержаны требования немагнитности и радиопрозрачности.

При выборе марки стеклопластика особое внимание следует обращать на деформативно-прочностные показатели материала. При работе конструкций в нормальных температурно-влажностных условиях для плит лучше всего использовать стеклопластики, изготовленные на основе полиэфирных смол. Для изго-

б, в — графики зависимостей соответственно растягивающих и сжимающих напряжений от нагрузок в срединных поперечных ребрах нижней складки



товления дискретных плит можно применять фанеру, облицованную алюминиевой фольгой или стеклопластиком.

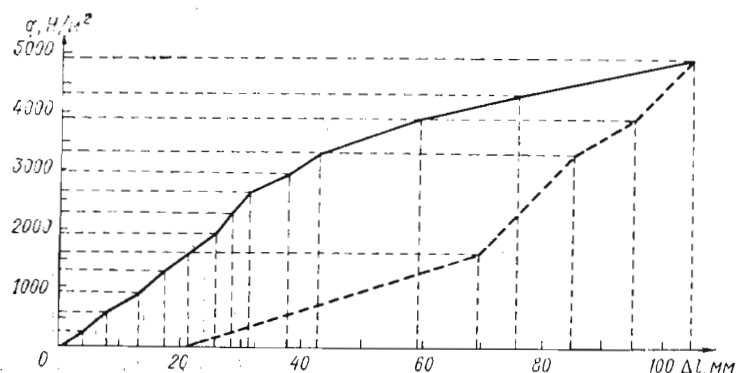
В большепролетных конструктивных системах с тракториальным расположением элементов в плане могут найти широкое применение строительные стеклопластиковые профили.

2. Резильяновые пластинчато-стержневые системы. Конструктивные системы, созданные на основе аналогов живой природы, позволяют, с одной стороны, решать вопросы организации жилого пространства за счет присущей им способности трансформироваться из компактного состояния в пространственные формы; с другой стороны, эти системы способны максимально накапливать упругую энергию деформации на единицу объема (массы) при действии внешних нагрузок по сравнению с другими типами конструкций. За счет высокого резильянса эти системы способны подстраиваться под действующие внешние силы, принимая при этом устойчивые формы равновесия.

Это положительное свойство резильяновых систем позволяет эксплуатировать их в экстремальных условиях (районы Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока), где преобладают ветровые воздействия. Природные, территориальные и экономические особенности этих районов требуют создания таких конструкций домов, которые можно доставлять в самые отдаленные районы любым видом транспорта и которые легко монтировать. Они должны отвечать специфическим условиям эксплуатации и быть экономичными по расходу материала, по энергозатратам.

Всем этим требованиям отвечают трансформируемые резильяновые системы, которые в отличие от трансформируемых пневматических систем не требуют постоянного поддержания избыточного давления воздуха, на что, как известно, нужны

Рис. 80. График зависимости перемещений от нагрузок в середине пролета гексагонального блока



дополнительные затраты энергии. Вследствие этого резилянсовые конструкции экономичнее пневматических и обладают большей степенью надежности.

Проведенные теоретические, экспериментальные, а также натурные испытания резилянсовых систем позволяют рекомендовать их к практическому применению в гражданском, промышленном и сельском строительстве в качестве покрытий для жилых, общественных и промышленных зданий, навесов для укрытия техники и обслуживающего персонала, складских помещений для хранения материалов, сельскохозяйственных продуктов и т. д., парников, теплиц, сооружений для отдыха и туризма, домов для оленеводов, охотников и рыбаков Севера.

3. Транстропно-полигональные структуры. При строительстве жилых, общественных зданий и сооружений в условиях Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока уменьшение количества работ, связанных с монтажом их на строительных площадках, приобретает первостепенное значение.

По технологичности возведения наиболее рационально объемно-блочное домостроение, позволяющее максимально использовать возможности заводского производства. Однако объемные блоки, применяемые в строительстве в настоящее время, имеют большую массу. Так, во многих разработанных проектах жилых домов из объемных блоков масса, включая оборудование и отделку, превышает 20 т. Такая масса объемных блоков требует специального кранового оборудования, а также транспортных средств с высокой грузоподъемностью. Это ведет к значительным энергозатратам. Кроме того, растет масса возводимых зданий из-за высокого показателя массы применяемых объемных блоков. В результате стоимость 1 м² зданий сильно возрастает. Вот почему снижение материалоемкости объемных

блоков, а также массы здания в целом является первоочередной задачей проектировщиков и строителей.

На основе сочетания принципов плотной упаковки типовых ячеек и гетерогенного размещения материала в их гранях и были разработаны транстропно-полигональные структуры, в частности структуры зданий из гексагональных блоков. В последнем случае масса здания уменьшается на 25—30 % не только за счет снижения массы объемных модульных блоков, но и за счет эффективного использования пространственных характеристик обитаемых ячеек здания при монтаже, например, из гексагональных блоков.

Эргономические исследования также показали достаточно высокое качество жилой среды, получаемой при использовании транстропно-полигональных структур в строительстве зданий и сооружений. Проведенные теоретические и экспериментальные исследования транстропно-полигональных структур позволяют рекомендовать блоки для практического применения в гражданском, промышленном и сельском строительстве: модульные объемные блоки для жилого, общественного и промышленных зданий; укрытия для техники и обслуживающего персонала; гаражи; складские помещения для хранения материалов и сельскохозяйственных продуктов и т. д.

Надежность жилых и общественных зданий, в частности крупнопанельных и объемно-блочных, зависит от состава и количества образующих их элементов, учета и способов их объединения в целостную систему с одновременным обеспечением нормального функционирования всех элементов системы. Однако в отличие от систем живых организмов в функциональных системах зданий нарушения связей между элементами не компенсируются и функции каждого элемента не восполняются другими элементами. Чтобы полно отразить факторы, влияющие на надежность зданий, приходится усложнять и увеличивать систему. Надежность такой системы будет зависеть от надежности сотен и тысяч элементов, т. е. формально может оказаться, что здание постоянно находится в неработоспособном состоянии. За счет сложности системы, как это наблюдается в живой природе, можно обеспечить высокую надежность. Здания с транстропно-полигональной структурой, смонтированные из гексагональных блоков, тому пример.

В здании как сложной технической системе отказы элементов не обязательно приводят к полному прекращению ее функционирования, а скорее — к некоторому снижению ее эффективности. Важно знать в любой момент времени эффективность сложной системы, которую можно характеризовать количеством отказавших элементов. Это позволяет в качестве показателя надежности здания как системы принять меру сохранения ее эффективности в заданных пределах, определяемую надежностью элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Технические решения не всегда совместимы с природной средой, а это приводит к серьезным экологическим ошибкам, не в пример живым конструктивным системам, которые создаются в соответствии с условиями окружающей внешней среды. Эволюция конструктивных систем в живой природе не опережает, да и не может опережать изменяющиеся условия развития внешней среды, поэтому конструктивные решения выживших видов животных и растений всегда отвечают объективной реальности.

Окончательные конструктивные решения живые организмы приобретают в процессе непрерывной оптимизации конструктивных систем по отношению к внешним воздействиям. Качественными показателями этой оптимизации являются масса и энергозатраты, связанные с обменом веществ. На эту особенность живых организмов указывали русские естествоиспытатели К. А. Тимирязев и В. Ф. Раздорский.

Чтобы сохранить природу и жить в гармонии с ней, необходимо создавать такие конструктивные системы, которые бы способствовали сближению, а не разрыву с ней. Для этого необходимо постоянно раскрывать биологические закономерности, позволяющие понять, как создаются конструктивные системы живых организмов в различных экологических ситуациях. Бионические принципы, установленные на основе анализа технических решений, отработанных в процессе эволюции биологических систем, позволяют физически осмыслить процессы оптимального конструирования. Кроме того, используя опыт живой природы как эвристический прием, они дают возможность облегчить решение проблемы оптимального проектирования конструктивных систем. Так, одним из главных отличий траекториальных структур от традиционных является соответствие

размещения их элементов полю разрушения. Конструкции с такими структурами получаются компактными и обладают значительной несущей способностью при минимальных затратах материала.

Транстропно-полигональные структуры в отличие от траекториальных сочетают в себе геометрию полигональных ячеек и слоистость их стенок, что обеспечивает надежную работу системы в целом, дает возможность создать конструкции с высокими прочностью и жесткостью, с относительно малой массой. При этом возможно достижение высокого технического и эстетического качества конструкций.

Особенностью резильяновых систем является способность запасать упругую энергию и при действии эксплуатационных нагрузок подвергаться значительным деформациям без разрушения конструкции. Один из перспективных путей обеспечения высокого резильянса — изготовление конструкций из коротких жестких элементов (стержней), объединяемых гибкими, эластичными связями (поясами). Конструкции такого типа можно выполнять из современных легких материалов, что значительно снизит материалоемкость, однако при этом в конструкциях должен быть обеспечен оптимальный компромисс между прочностью, жесткостью и резильянсом.

Исследование биостержней показало, что природа активно использует для повышения их устойчивости такие приемы, как пространственное их искривление в соответствии с изогнутой осевой линией, отвечающей устойчивой криволинейной форме равновесия, повороты поперечных сечений вдоль оси стержня (естественное закручивание). Использование этих приемов в практике проектирования стержневых систем позволит не только повысить их устойчивость, но и упростить расчет стержней на устойчивость, так как он практически будет сводиться к определению $P_{кр}$ и соответствующих прогибов для заранее заданной формы изогнутой оси стержня, по которой он изгибается в действительности.

Сочетание принципов строительной бионики и методов оптимизации создает надежную научную базу для разработки достаточно общих и высокоэффективных средств синтеза конструктивных систем (ферм, рам, пластин, оболочек и т. д.).

При построении моделей синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем с учетом принципов строительной бионики упрощается их математическая структура. Это позволяет использовать для реализации задач эффективные методы оптимизации, которые в настоящее время применяются специалистами при проектировании конструктивных систем.

Сформулированные задачи синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем представляют собой условные задачи математического программирования. Наличие ограничений усложняет необходимые условия экстремума. Соответственно

с этим усложняются и методы решения, использующие необходимые условия экстремума.

Преобразование условных экстремальных задач на основе теории и методов последовательной безусловной минимизации с использованием бионических принципов в эквивалентные безусловные экстремальные задачи позволило получить единый подход к реализации различных актуальных механических проблем — от упругого расчета до синтеза оптимальных конструктивных систем по весовому, жесткостному и энергетическому критериям. Кроме того, удалось преодолеть трудности, вызванные наличием ограничений в этих задачах, качественно упростить поиск глобального экстремума.

В безусловных задачах оптимизации конструктивных систем, полученных как методом внешней точки, так и методом внутренней точки или с помощью метода штрафных оценок, влияние ограничений на модифицированную функцию постепенно ослабевает и в пределе исчезает.

Преимущество такого подхода заключается в том, что нет необходимости рассматривать ограничения отдельно и что для решения можно применять методы классического анализа и современные численные методы оптимизации. Появилась возможность использовать различные эффективные методы безусловной минимизации, в частности метод сопряженных градиентов. Все это значительно увеличивает творческие возможности инженера-проектировщика для создания прогрессивных пластинчато-стержневых систем.

По таблицам приложения можно отчетливо проследить, как различные силовые воздействия (гравитационные, гидродинамические и др.), значительно менявшиеся в главные периоды развития Земли, влияли на формирование конструкций важнейших групп живых организмов. Окончательные конструктивные решения (структуры, формы, конструкции) живые организмы приобрели в процессе эволюции в условиях борьбы за свое существование в результате непрерывной оптимизации массы конструктивных систем по отношению к внешним воздействиям и энергетическим затратам, связанных с обменом веществ. Таким образом, качественные показатели массы и энергозатрат являются основными критериями эффективности, которыми пользуется природа при создании оптимальных конструктивных систем живых организмов (энергозатраты находятся в непосредственной зависимости от массы). Вот почему живая природа строит свои конструктивные системы более легкими, но при этом обеспечивая достаточно высокую их несущую способность.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем изменения гравитационного поля Земли в процессе ее эволюции и смену главнейших групп живых организмов, которые обитали на ней в различные периоды ее развития. Следует отметить, что жизнь на Земле проходила в гравитационном поле, интенсивность которого постоянно менялась в зависимости от ряда факторов, таких как увеличение радиуса и уменьшение скорости вращения планеты во времени, дрейф континентов по ее поверхности, возмущающее притяжение других планет и т. д.

Согласно гипотезе советского ученого И. В. Кириллова Земля до расширения имела среднюю плотность вещества $\rho = 15500 \text{ кг/м}^3$, а средняя величина силы тяготения, приходящаяся на единицу массы, была в 2 раза больше. Среднее вековое замедление осевого вращения Земли, соответствующее удлинению суток, по данным наблюдений античных затмений, палеонтологических исследований ископаемых кораллов [21], а также по современным данным советских и американских ученых, составляет $0,00183 \text{ с}$ [9]. При таком значении удлинения продолжительности суток годовое увеличение радиуса Земли составляет величину порядка $6,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Это увеличение позволяет предположить, что расширение Земли началось с периода, когда еще не было океанов и она состояла из единого континента, т. е. материки покрывали всю поверхность Земли и ее усредненный радиус составлял 3991671 м (табл. I).

Исходя из этих данных и с учетом среднего векового замедления осевого вращения Земли, автором [49] были определены основные ее параметры в различные периоды развития (см. табл. I). Радиус шарового тела Земли в период t вычислялся по формуле:

$$R_t = R_0 - 6,8 \cdot 10^{-4} t, \quad (1)$$

где R_0 — радиус шара, объем которого равен объему Земли в настоящее время ($V_0 = 1083 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$).

Средняя плотность Земли определялась по формуле:

$$\rho_t = \rho_0 + [(\rho_{3500} - \rho_0)/(V_0 - V_{3500})](V_0 - V_t), \quad (II)$$

где V_t — объем Земли в период t ; $V_{3500} = 0,26663 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, $\rho_{3500} = 15\,500 \text{ кг/м}^3$ — соответственно объем и плотность Земли 3500 млн. лет назад (граница планетарного и катархейского периодов — начало расширения); $V_0 = 1,083 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, $\rho_0 = 5520 \text{ кг/м}^3$ — соответственно объем и плотность Земли в настоящее время.

Предполагалось также, что гравитационная константа

Таблица I. Эволюция планеты Земля

Радиус шаровидного тела Земли, м	Объем шаровидного тела Земли, 10^{21} м^3	Средняя плотность, кг/м^3	Гравитационная константа, $10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/(\text{кг} \cdot \text{кг})$	Средняя величина силы тяготения, приходящаяся на единицу массы, Н/кг
6371671	1,083	5520	6,6745	9,8217
6364871	1,0795	5563	6,6748	9,8881
6354671	1,0744	5625	6,6775	9,9930
6324071	1,0589	5814	6,6882	10,2955
6276471	1,0352	6104	6,7065	10,7571
6245871	1,020	6290	6,7183	11,0502
6218671	1,007	6449	6,7287	11,2977
6188071	0,9921	6631	6,7404	11,5795
6154071	0,9758	6830	6,7534	11,8843
6099671	0,9501	7144	6,7744	12,3591
6086071	0,9438	7221	6,7796	12,4740
6045271	0,9249	7452	6,7952	12,8162
5984071	0,8971	7792	6,8187	13,3112
5555671	0,7179	9981	6,9831	16,2116
5351671	0,6417	10913	7,0614	17,2660
5079671	0,5488	12048	7,1657	18,3602
4535671	0,3907	13980	7,3744	19,5769
3991671	0,2663	15500	7,5834	19,6434

уменьшалась во времени и потому для различных периодов t определялась следующим образом:

$$G_t = G_0 + [(G_{3500} - G_0)/(3500 \cdot 10^6 t)], \quad (III)$$

где G_0 — гравитационная константа в настоящее время ($6,6745 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/(\text{кг} \cdot \text{кг})$); G_{3500} — гравитационная константа 3,5 млрд. лет назад, вычисленная по формуле $G = (3/4) q_{3500} / (\pi \rho_{3500} R_{3500})$ при $q_{3500} = 19,6434 \text{ Н/кг}$.

Центробежная сила на экваторе Земли определялась по формуле:

$$a = \omega^2 R_t = (2\pi/T) R_t, \quad (IV)$$

Угловая скорость вращения, 10^{-5} рад/с	Центробежная сила на экваторе, Н/кг	Сила тяжести на экваторе, Н/кг	Период вращения Земли вокруг осн., ч	Момент инерции шаровидного тела Земли, $10^{86} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	Абсолютный возраст, млн. лет
7,292	0,03388	9,7878	23,92	97,08	0
7,300	0,03392	9,8542	23,89	97,31	↑ 1
7,330	0,034114	9,9588	23,79	97,62	↑ 25
7,400	0,03463	10,2609	23,57	98,49	↑ 70
7,520	0,03549	10,7216	23,19	99,57	↑ 140
7,59	0,03598	11,0142	22,98	100,11	↑ 185
7,66	0,03649	11,2612	22,77	100,46	↑ 225
7,74	0,03707	11,5424	22,53	100,76	↑ 270
7,83	0,03773	11,8466	22,273	100,96	↑ 320
7,97	0,03875	12,3204	21,866	101,01	↑ 400
8,01	0,03905	12,4350	21,765	100,97	↑ 420
8,12	0,03986	12,7763	21,460	100,75	↑ 480
8,30	0,04122	13,2699	21,003	100,13	↑ 570
9,80	0,05336	16,1582	17,800	88,46	↑ 1200
10,71	0,06139	17,2046	16,275	80,23	↑ 1500
12,24	0,07610	18,2841	14,242	68,24	↑ 1900
17,14	0,13325	19,4436	10,175	44,95	↑ 2700
28,55	0,32536	19,3180	6,108	26,31	↑ 3500
					↑ Более 3500

где ω — угловая скорость вращения Земли (рад/с); T — период вращения Земли вокруг оси в часах.

Из табл. I, куда сведены значения, вычисленные по формулам (I) — (IV), можно видеть, что идет непрерывное изменение всех основных параметров Земли в процессе ее развития. Это изменение связано с расширением Земли, которое началось 3500 млн. лет назад. Увеличение значения силы тяжести на экваторе за катархейский период особенно наглядно отражает, что это могло произойти лишь за счет увеличения массы и уменьшения угловой скорости вращения Земли. Если учесть, что средняя величина плотности вещества за этот период уменьшилась, то причиной увеличения массы и уменьшения угловой скорости могло быть только расширение Земли. Следует также отметить, что гравитационная константа, являющаяся показателем тяготения, за 3500 млн. лет уменьшилась на 12,04 %, что почти совпадает с величиной, установленной американским физиком Робертом Дикке, которая согласно его теории составляет 13 %.

Из табл. II видно, как изменение интенсивности гравитационного поля накладывает определенный отпечаток на морфологию растений и животных в процессе их эволюционного развития. Особенно это наглядно проявилось на гигантских растениях, существовавших в период карбона, а также на гигантских животных (пресмыкающиеся ящеры-динозавры на суше и ихтиозавры в море), живших в периоды триас—юра—мел.

Живая природа не ограничена в своем многообразии. Об этом можно судить по количеству различных животных и организмов, обитавших на планете. В настоящее время на ней существует более 3000 видов бактерий и сине-зеленых водорослей, примерно 450 000 видов растений и 1,2 млн. видов животных. Такое многообразие живых организмов вызвано, с одной стороны, генетической изменчивостью, которая проявляется в широком диапазоне, а с другой — фенотипической (наследственной) изменчивостью их во времени при взаимодействии с внешней средой.

Следует отметить, что приспособляемость (организационная перестройка) во времени конструктивных систем к гравитационным полям у живых организмов происходит именно за счет способности их к фенотипической изменчивости. Благодаря наследственной изменчивости, которая противоположна способности к чисто идентичному самовоспроизведению под действием внешней среды, и в первую очередь гравитационного поля, изменяющегося в ходе геологического развития Земли, происходит естественный отбор огромного количества видов организмов с присущими им формами и структурами. Живые организмы во все периоды развития и существования их на Земле представляют собой неиссякаемый источник прототипов для создания бионических конструктивных систем, обладающих высо-

Т а б л и ц а II.

Эволюция живых организмов (геохронологическая шкала по Л. Г. Вологдину, 1976 г.)

Абсолютный возраст Земли, млн. лет	Главнейшие группы организмов	Период	Эра
0 ↑ 1 ↑ 25	Человек, млекопитающие, многие группы морских и пресноводных моллюсков, кораллы, морские ежи и лилии, губки, фораминиферы. Разнообразные млекопитающие, в том числе трехпалые лошади, человекообразные обезьяны. Млекопитающие (появление низших обезьян), пресмыкающиеся; из беспозвоночных — пеллециподы, гастроподы, нуммулиты, орбитолиты; из водорослей — диатомовые.	Антропогеновый Неогеновый Палеогеновый	Кайнозойская
70 ↑ 140 ↑ 185	Млекопитающие, массовое развитие пресмыкающихся, костистых рыб; птицы; из беспозвоночных — устрицы, белемниты, кораллы, губки, мелообразующие глобигерины, роталии и орбитолиты. Покрывтосемянные растения. Массовое развитие пресмыкающихся и амфибий (двоякодышащие), млекопитающие (мало), костистые рыбы (мало), рифообразующие кораллы, аммониты, устрицы, насекомые. Появление первых млекопитающих, костистых рыб, многих пресмыкающихся — наземных, водных, летающих; из беспозвоночных — морские лилии, цератиты, аммониты, белемниты, беллерофоны	Меловой Юрский Триасовый	
225 ↑ 270	Амфибии, примитивные пресмыкающиеся; из беспозвоночных — брахиоподы, гониатиты, аммониты, пеллециподы, мшанки; наземные растения — папоротники, голосемянные в виде первичных хвойных, гингковые, кордаиты. Из позвоночных — акулоподобные рыбы; из беспозвоночных — брахиоподы, гониатиты, наутилоидеи; из растений — семянные папоротники и кордаиты, плауновые, каламиты, клинолистники. Много амфибий — стегоцефаллы и др. Первые пресмыкающиеся.	Пермский Карбоновый (каменноугольный)	Палеозойская

Абсолютный возраст Земли, млн. лет	Главнейшие группы организмов	Период	Эра
320	Появление первых амфибий; кистеперые и двоякодышащие рыбы, панцирные рыбы; из беспозвоночных — расцвет четырехлучевых кораллов и кальцеол, спирифериды, пентамериды, гониатиты, трилобиты, морские лилии; из растений — псилофитовая флора, исчезающая к концу периода, развитие плаценовых, членисто-стебельчатых, начало голосемянных (первые наземные растения).	Девонский	Палеозойская
400	Позвоночные — хрящевые рыбы, примитивные рыбообразные бесчелюстные. Из беспозвоночных — многообразные плеченюгие, моллюски, членистоногие (ракообразные трилобиты), граптолиты, четырехлучевые кораллы, появление морских лилий. Из растений — значительное развитие водорослей — сине-зеленых и красных	Силурийский	
420	Панцирные рыбы, из ракообразных — остракоды, листоногие раки; трилобиты, граптолиты, четырехлучевые и трубчатые кораллы, плеченюгие, ранние представители мшанок, наутилоидеи. Массовое развитие водорослей.	Ордовикский	
480	Трилобиты и ракообразные. Появление граптолитов, губок, строматопороидеи, брахиопод, примитивных наутилоидеи. В раннем и среднем кембрии — массовое развитие археоциат. Обилие красных и сине-зеленых водорослей.	Кембрийский	
570	Массовое развитие одноклеточных и многоклеточных сине-зеленых, реже красных и зеленых водорослей; в конце периода — появление ранних археоциат, губок, червей, медуз.	Синийский	Протерозойская
1200	Массовое развитие одноклеточных сине-зеленых водорослей и многоклеточных, развитие железных и других бактерий.	Енисейский	
1500	Развитие одноклеточных водорослей, железных и других бактерий.	Саянский	
1900	Появление микроплазматических организмов, бактерий, окисляющих минеральные вещества, почвенных бактерий, возникновение водорослей. Химическое преобразование первичных углеродных соединений. Преобладание химических реакций в преобразовании минерального вещества земной коры.	—	Архейская

Абсолютный возраст Земли, млн. лет	Главнейшие группы организмов	Период	Эра
2700	Химические процессы в земной коре, массовые проявления вулканизма и магнетизма, начало образования на земной поверхности водных бассейнов за счет конденсирующихся паров воды «вторичной» атмосферы. Возникновение незначительных количеств кислорода при воздействии космических излучений на пары воды и атмосферу. Общий восстановительный характер добиосферы.	—	Катархейская
3500 ↑ Более 3500	Догеологический этап развития Земли — формирование планеты за счет концентрации космического материала. «Срыв» первичной атмосферы.	—	

кой надежностью. Образцом надежности существования в комплексном и системологическом смысле является живая природа. Поэтому особенно интересны приспособительные (к среде) средства живых организмов, существовавших в различные времена. Высокая надежность живых организмов обеспечивается в первую очередь за счет сложной структуры связей между их отдельными функциональными элементами. Причем эти связи в случае нарушения одной из них имеют тенденцию к компенсации. Возможна также и перестройка системы в соответствии с изменившимися условиями существования.

Создавая ту или иную конструктивную систему, природа учитывает ряд требований. Так, структура растений подчинена не только требованиям необходимого сопротивления внешним механическим воздействиям, физико-химическим влияниям среды, но и требованиям вентиляции и регулирования температурно-влажностного режима. Учет комплекса всех требований связан с общей задачей, а именно с общим ритмом жизни организма. Причем формируются эти организмы экономично, с высокой степенью надежности.

Проблему надежности в строительстве и архитектуре также нельзя ограничивать только несущей способностью конструкций. Она должна иметь более широкое значение и включать в себя комплекс вопросов формирования зданий, их функционирования, технологии изготовления и эксплуатации, а также основные технико-экономические показатели, учет моральной устареваемости (в том числе и в эстетическом смысле) и связи с окружающей средой.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Агрегирование 6, 31
Алгоритм решения 6, 55, 56
Аппроксимация континуальных систем 49, 59
Архитектурно-строительная бионика 20

Безусловная экстремальная задача 152, 169

Биологические прототипы (аналоги) 22
Биологические системы 21, 26, 27, 106

Бионика 20
Бионические принципы 23, 61, 64, 80, 88, 93
Биостержни 97, 98, 100, 102

Вариабельность 25

Геометрическая интерпретация задачи 125, 126, 156, 158
Гетерогенное размещение материала 79
Глобальный экстремум 29
Граничные условия 26, 32, 106

Двойственность задачи синтеза 118
Декомпозиция системы 44, 59
Динамические структуры 16
Динамическое равновесие 16, 18, 19
Дискретные аналоги 39

Естественное закручивание 105

Живые структуры стержневых систем 65

Задача программирования квадратичного 136, 169
— — линейного 111, 136
— многокритериальной оптимизации 6, 24, 31
— синтеза оптимальной конфигурации 45, 141, 144
Заполненность матриц 25, 153, 172

Идентификация 112
Изоцелевая прямая 127
Итерационные методы 140, 170

Критерий минимума массы 24, 30
— — потенциальной энергии 129, 130
— — энергозатрат 26, 30, 31
Квадратичная форма 139
— функция штрафа 154
Квазилинейная система уравнений 70
Клетки механической ткани 67
Композиты 64
Компоненты деформации 109
Компромиссное решение 24
Континуальный объект 38
Костная ткань 65, 79
— — компактная 79
— — спонгиозная 79
Коэффициенты свободной длины 104
— разложения векторов 147, 148
— штрафа 155, 167
Критическая сила 96

Линеаризация дифференциальных уравнений 73
Линии главных деформаций 66

— главных напряжений 26
— давления 26
— скольжения 26
Локальный экстремум 137

Математическое моделирование 106, 108
— программирование 7, 136
Материалоемкость 7
Матрица жесткости 54, 56, 108
— податливости системы 138
— условий равновесия 32, 108, 110, 134

Метаболизм 26
Метод безусловной минимизации 153, 166
— внешней точки 154
— внутренней точки 162
— выпуклого программирования 136, 137

— вычислительной математики 160, 168
— квадратичного программирования 140
— конечных элементов 48, 52, 108
— линейного программирования 141
— неопределенных множителей Лагранжа 153, 167
— Ньютона 169
— переменной метрики 169
— сопряженных градиентов 141, 169, 171

— Флетчера — Ривза 169
— штрафных оценок 166
Механизм обмена веществ 26
Минимальная поверхность 81
Многоекстремальность 6, 25
Множество допустимых конструкций 116
Модульные элементы 81, 84, 87

Напряженно-деформированное состояние 45, 109
Невыпуклость функций 136
Нелинейные многоекстремальные задачи 136

Обращение матриц 25
Обусловленность матрицы 25
Онтогенез 9
Опорный план 143, 145, 146, 148
Оптимальное решение 147
Оптический метод 75
Осесимметричное поле 72, 73

Параметрическая оптимизация 7
Плотная упаковка 80

Пределы прочности 110
Пространственные конструкции 24

Резильянс 23, 88, 89, 92, 128

Селекция 25
Синтез оптимальной структуры 34, 141
Складное покрытие 218
Структуры траекторные 66
— транзитивно-полигональные 79
Сходимость 141, 170

Теория оптимального проектирования конструкции 24
Технические системы 21, 24, 106
Трансформируемые системы 90, 93, 207, 209, 218

Условия невырожденности опорного плана 145, 149
— прочности и устойчивости 34, 54
— равновесия 32, 124, 129
— равноустойчивости 104
— совместности деформации 32, 115, 130
— физические 32, 124
Условная экстремальная задача 152, 154, 162
Устойчивая форма равновесия 96, 132
Устойчивое равновесное состояние 96, 132
Устойчивость решения 170

Ферма Мичелла 61, 65
Филогенез 9
Функция Лагранжа 140, 167

Характеристики дифференциальных уравнений 70
Характеристические линии 71

Целевая функция 34, 55, 144
Центрированное поле 72

Шарнирно-стержневые системы 34, 144, 149

Эволюция 21, 61, 64, 88, 240
Энергетический экстремальный принцип 106, 129, 130
Этапы бионических исследований 21

Якобиан 74

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем.— М.: Машиностроение, 1978.— 312 с.
2. Арман Ж.-Л. П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций.— М.: Мир, 1977.— 142 с.
3. Ахмеров У. Ш., Ахмеров Н. У. Введение в бионику/Учеб. пособие для вузов.— Казань: изд-во Казан. ун-та.— 1984.— 143 с.
4. Ахутин В. М. Бионические аспекты синтеза биотехнических систем// Информ. мат.-лы. Кибернетика.— М.: Советское радио, 1976.— № 4/(92).— с. 3—11.
5. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел.— М.: Наука, 1980.— 256 с.
6. Бобров Э. Ш. Исследование эффективности применения итерационных методов линейной алгебры к расчету покрытий на основе дискретных расчетных схем// Большеболетные пространственные конструкции МНИИТЭП.— М., 1971.— С. 160—169.
7. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.— 375 с.
8. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1981.— 448 с.
9. Бурдаков В. П., Зигель Ф. Ю. Физические основы космонавтики: (Физика космоса)— М.: Атомиздат, 1975.— 232 с.
10. Бюттнер О., Хампе Э. Сооружение — несущая конструкция — несущая структура: Анализ живой природы и градообразующей среды: Пер. с нем.— М.: Стройиздат, 1983.— 340 с.
11. Власов Н. В. Выбор оптимальных параметров трехслойных пластин и оболочек при сжатии//Проектирование оптимальных конструкций: Сб. науч. тр. Куйбышев. авиац. ин-та.— 1971.— Вып. 54.— С. 16—22.
12. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975.— 272 с.
13. Коржуев П. А. Эволюция, гравитация, невесомость.— М.: Наука, 1971.— 151 с.
14. Кудрин И. Д., Сулимо-Самуйло З. К., Филатов А. И. Механические ударные нагрузки и перегрузки как фактор экологии.— Л.: Наука, 1980.
15. Лебедев Ю. С. Архитектура и бионика. 2-е изд.— М.: Стройиздат, 1977.— 221 с.
16. Левин М. А. Построение дискретной модели анизотропного тела в виде регулярной стержневой системы//Тр. IV Всесоюз. конф. по применению электронных мат. машин в строительной механике.— Киев.: Наукова думка, 1963.— С. 74—79.
17. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем.— М.: Наука, 1981.— 288 с.
18. Мацюлявичюс Д. А. Алгоритмы линейного программирования для синтеза стержневых статически определимых конструкций минимального веса.— Тр./Каунасский политехн. ин-т//Сб. науч. тр. Строительная механика и конструкции: Докл. XI науч.-техн. конф. Каунасского политехн. ин-та.— Вильнюс: Минтис, 1964.— С. 46—56.
19. Мацюлявичюс Д. А. Принцип двойственности в линейных задачах синтеза оптимальных упругих шарнирно-стержневых систем//Сб. Литов. механич. сб.— Вильнюс: Минтис. 1967.— № 1.— С. 115—125.
20. Мельников В. П. Металлические конструкции: Современное состояние и перспективы развития.— М.: Стройиздат, 1983.— 543 с.
21. Мельхиор П. Физика и динамика планет. Ч. 2. М.: Мир, 1976.— 483 с.
22. Мякишев Е. Д. Стандартная программа для решения задач линейного программирования на машине БЭСМ-4.— М.: МГУ, 1968.— 85 с.
23. Общественные здания и пространственные конструкции/А. П. Морозов, О. В. Василенко, С. М. Верижников, Б. А. Мироцков.— Л.: Стройиздат, 1977.— 2-е изд.— 152 с.
24. Основы общей биологии: Пер. с нем./Под общ. ред. Э. Либберта.— М.: Мир, 1982.— 440 с.
25. Отто Ф. Форма — усилие — масса//Каталог выставки в Москве: Легкая конструкция в архитектуре и в природе. Природообразование конструкций.— ФРГ, Штутгарт, 1983.
26. Патури Ф. Р. Растения — гениальные инженеры природы.— М.: Прогресс, 1979.
27. Поляк Б. Т. Численные методы математического программирования. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник.— М.: Экономика, 1971.— с. 634—636.
28. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
29. Пригоровский Н. И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений: Справочник.— М.: Машиностроение, 1983.— 248 с.
30. Прохоров Б. Ф., Кобелев В. Н. Трехслойные конструкции в судостроении.— Л.: Судостроение, 1972.— 344 с.
31. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1980.— 360 с.
32. Сергеев Н. Д., Богатырев А. И. Проблемы оптимального проектирования конструкций.— Л.: Стройиздат, 1971.— 126 с.
33. Строительная механика. Стержневые системы/А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников.— М.: Стройиздат, 1981.— 512 с.
34. Темнов В. Г., Хоцацкий Л. И. Структурные решения пространственно-стержневых конструкций в технике и в природе//Архитектурная форма и научно-технический прогресс. Науч.-творческое совещание.— М.: 1972.— С. 11—14.
35. Темнов В. Г. Применение метода сопряженных градиентов для упругого расчета и оптимизации стержневых систем//Расчет пространственных конструкций на прочность и жесткость: Сб. науч. тр.— Л.: Стройиздат, 1973.— С. 228—232.
36. Темнов В. Г., Лебедев Ю. С. Пространственные конструктивные системы бионического типа (Опыт применения в строительстве).— Л.: Знание, 1980.
37. Темнов В. Г. Методы перехода к безусловным задачам расчета и оптимизации стержневых систем//Пространственные конструкции в гражданском строительстве: Сб. науч. тр. ЛенЗНИИЭП.— Л.: Стройиздат, 1974.— С. 29—33.

38. Темнов В. Г. Общая математическая модель оптимизации больших стержневых систем//Расчет и проектирование пространственных конструкций гражданских зданий и сооружений: Сб. науч. тр. ЛенЗНИИЭП.—Л., 1975.—С. 35—46.

39. Темнов В. Г. Поиск оптимальных по массе упругих стержневых систем методами безусловной минимизации//Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр./ЛИСИ.—Л., 1982.—С. 115—122.

40. Темнов В. Г. Оптимальные структуры искусственных и биологических систем//Мат-лы второй Всесоюз. науч.-техн. конф. по автоматизир. системам управления в судостроении.—Л.: Судостроение, 1979.—С. 36—40.

41. Темнов В. Г., Смольский А. И. Исследование упругой устойчивости элементов стержневых биосистем//Теоретические и экспериментальные исследования строительных конструкций нового типа: Сб. науч. тр./ЛенЗНИИЭП.—Л., 1981.—С. 8—16.

42. Темнов В. Г., Слеповичев А. А. Оптимизация структуры пластинчатых элементов упругих комбинированных систем замкнутого объема//Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр./ЛИСИ.—Л., 1981.—С. 97—104.

43. Темнов В. Г. Архитектурно-строительная бионика и оптимизация конструкций//Науч.-техн. прогресс в области градостроит. освоения Сибири, Дальнего Востока, Севера страны.—Л.: Стройиздат, 1982.—С. 52—55.

44. Темнов В. Г. Структурный синтез стержневых статически определенных конструкций минимального веса//Пространственные конструкции в гражданском строительстве: Сб. науч. тр.—Л.: Стройиздат, 1973.—С. 157—166.

45. Темнов В. Г., Митрофанов Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния трансформируемого сетчатого покрытия из слоистых стержневых элементов//Металлические конструкции и испытания сооружений: Межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ.—Л., 1982.

46. Темнов В. Г. Математическое моделирование бионических пластинчато-стержневых систем, оптимальных по массе//Пространственные конструкции в гражданском строительстве. Сб. науч. тр./ЛенЗНИИЭП.—Л.: 1982.—С. 104—110.

47. Темнов В. Г. Энергетический подход к оптимизации упругих конструкций//Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ.—Л., 1983.—С. 75—84.

48. Темнов В. Г., Муреев П. Н. Конструкции на основе аналогов живой природы: Экспресс-информация/ЦБТЭИ.—М., 1983.—28 с.

49. Темнов В. Г. Биомеханические антигравитационные структуры и оптимизация конструктивных систем по массе//Исследования и испытания новых типов строительных конструкций/ЛенЗНИИЭП.—Л., 1983.—С. 67—75.

50. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—285 с.

51. Трофимов В. И., Бегун Г. Б. Структурные конструкции: Исследования, расчет и проектирование.—М.: Стройиздат, 1972.—247 с.

52. Уайт Р. Н. Оптимальные методы решений уравнений в конечных разностях//Расчет строительных конструкций с применением электронных машин/Под ред. А. Ф. Смирнова.—М.: Стройиздат, 1967.—С. 346—367.

53. Фиакко А. В., Мак-Кормик Дж. Р. Нелинейное программирование: Методы последовательной безусловной минимизации.—М.: Мир, 1972.—240 с.

54. Федорова И. Е. Поиск глобального оптимума в многоэкстремальных задачах//Теория оптимальных решений/Ин-т математики и кибернетики, Вильнюс, 1978. Вып. 4.—С. 87—93.

55. Филин А. П. Современные проблемы использования ЭЦВМ в механике твердого деформируемого тела: О согласовании дискретных и континуальных объектов в механике твердого деформируемого тела.—Л.: Стройиздат, 1974.—73 с.

56. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела.—М.: Наука, 1981.—Т. 3.—480 с.

57. Фокс Р. Л., Стентон Е. Л. Достижения в области расчетов на проч-

ность прямыми методами минимизации энергии//Ракетная техника и космонавтика.—1968—Т. 6, № 6.—С. 177—179.

58. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции: Пер. с англ.—М.: Мир, 1983.—487 с.

59. Чирас А. А. Двойственность в задачах строительной механики, теории упругости и пластичности//Литов. механ. сб.—Вильнюс, 1968. № 2(3),—С. 34—54.

60. Чирас А. А. Математические модели задач оптимизации для линейно-упругого тела//Литов. механ. сб.—Вильнюс, 1974, № 1—2(14—15).—С. 5—27.

61. Bionics symposium held in Dayton.—Ohio. 13—15 Sept. 1960, Dayton, 1960.—499 p.

62. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations//Bull. Am Math. Soc., 1943, 49.—P. 1—23.

63. D'Arcy Wentworth Thompson. On growth and form.—Cambridge Univ. Press.—1971.—346 p.

64. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients//Comput. J.—1964, N 2.—P. 149—154.

65. Forsythe George E. Solving Linear Algebraic Equations Can be Interesting//Bulletin of the American Mathematical Society.—1953.—Vol. 59.

66. Hestenes M. R., Stiefel E. Methods on conjugate gradient for solving linear systems//J. Res. Nat. Bur. Standards.—1952.—49, N 6.—P. 409—436.

67. Michell A. G. M. The limits of economy of material in framestructures//Philosophical magazine and Journ. of Science. 1904.—Vol. VIII, Sixth series, London.

68. Munk W., MacDonald G. J. The rotation of the Earth. Cambridge Univ. Press., 1960.

69. Pietszykowski T. Application of the steepest ascent method to linear programming. Zaklad Aparatow Matematycznych PAN, Prace A.—1961.—N 11, Warszawa.

70. Stiefel E. Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. Z. angew. Math und Phys.—1952, 3.—N 1. C. 1—33.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
1. Взаимообусловленность систем живой и неживой природы в процессе их эволюции	9
1.1. Гравитация и организация конструктивных систем живых организмов	10
1.2. Динамическое состояние живых конструктивных систем	16
2. Строительная бионика и оптимизация конструкций	20
2.1. Концепция строительной бионики	21
2.2. Процесс оптимизации в технике и живой природе	23
2.3. Энергетический критерий оценки конструктивных систем	26
3. Синтез искусственных конструктивных систем	33
3.1. Синтез оптимальной конфигурации шарнирно-стержневых систем	34
3.2. Структурные аналоги конструкций с упругим поведением материала	38
3.3. Оптимизация по массе пластинчато-стержневых систем замкнутого объема при различных комбинациях нагрузок	42
3.4. Оптимизация структуры пластинчатых элементов упругих комбинированных систем замкнутого объема	45
3.5. Дискретные и дискретизированные системы, оптимальные по массе	52
4. Бионические принципы оптимизации конструктивных систем	61
4.1. Принцип траекториального строения пластинчато-стержневых систем	64
4.2. Математические и экспериментальные модели траекториальных структур	68
4.3. Транстропно-полигональные структуры	79
4.4. Принцип накопления упругой энергии	88
4.5. Принципы обеспечения устойчивости элементов пластинчато-стержневых систем	93
5. Математическое моделирование бионических конструктивных систем	106
5.1. Моделирование пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами и оптимальными сечениями элементов	108
5.2. Синтез оптимальных структур бионических шарнирно-стержневых систем	113
5.3. Моделирование конструктивных систем по жесткостным характеристикам их элементов и значениям плотности материала	123
5.4. Моделирование резильяисовых пластинчато-стержневых систем	128
5.5. Моделирование пластинчато-стержневых систем, оптимальных по массе, с учетом направленной формы потери устойчивости	132
6. Методы оптимизации конструктивных систем	136
6.1. О некоторых методах решения задач упругого расчета и синтеза оптимальных пластинчато-стержневых систем	137
6.2. Методы штрафных функций	152
6.3. Метод внешней последовательной безусловной минимизации пластинчато-стержневых систем	154
6.4. Метод внутренней последовательной безусловной минимизации пластинчато-стержневых систем	162
6.5. Метод штрафных оценок при оптимизации пластинчато-стержневых систем	166
6.6. Реализация задач упругого расчета и синтеза пластинчато-стержневых систем	168
7. Инженерное проектирование бионических конструктивных систем	181
7.1. Конструктивные решения пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами	183
7.2. Теоретические и экспериментальные исследования пластинчато-стержневых систем с траекториальными структурами	191
7.3. Конструктивные решения резильяисовых пластинчато-стержневых систем	207
7.4. Конструктивные решения транстропно-полигональных структур	226
Заключение	240
Приложение	243
Предметный указатель	250
Список литературы	252