ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

А. Н. Павлов, Б. В. Соколов

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2006

УДК 519.7
ББК 22.18
П12

Павлов, А. Н., Соколов, Б. В.

П12 Принятие решений в условиях нечеткой информации: учеб. пособие / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов; ГУАП – СПб., 2006 – 72 с. ISBN 5-8088-0162-1

Излагаются основные положения теории нечетких множеств и отношений, арифметические операции над нечеткими числами и операции по их сравнению. На простейших примерах иллюстрируется применение формализмов теории нечетких множеств в задачах принятия решений. Проводится классификация нечетких мер, рассматриваются наиболее конструктивные меры Сугено и Цукамото, нечеткий интеграл и на иллюстративных примерах демонстрируется применение теории нечетких мер для принятия решений в задачах выбора.

Материалы, изложенные в учебном пособии, могут быть полезны специалистам, занимающимся вопросами принятия решений в условиях существенной неопределенности, в учебном процессе по дисциплинам системно-кибернетической направленности, а также курсовом и дипломном проектировании при подготовке инженеров-системотехников, инженеров-математиков и других специалистов по управлению сложными организационно-техническими системами.

Рецензенты:
кафедра автоматизированных систем управления
войсками Военно-космической академии А. Ф. Можайского;
доктор технических наук, профессор *Ю. С. Мануйлов*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-8088-0162-1

ВВЕДЕНИЕ

Образно говоря, теории о природе должны отражать то, что природа «пишет» скорее произвольными мазками, чем шариковой ручкой.

Л. А. Заде

Наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является, пожалуй, способность принимать рациональные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Разработка моделей приближенных рассуждений человека и использование их в сложных технических системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки. Начало в этом направлении сделано более 35 лет тому назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде. В этом плане любопытна точка зрения Л. Заде: «Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными» [1].

Основная идея Лотфи Заде состояла в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся на естественный язык, не может быть описан в рамках традиционных математических формализмов. Этим формализмам присуща строгая однозначность интерпретации, а все, что связано с использованием естественного языка, имеет многозначную интерпретацию. Теория нечетких множеств (Fuzzy Sets, «fuzzy» – означает «нечеткий, размытый, пушистый») готова предоставить необходимый аппарат, чтобы помочь решению этой трудной задачи.

Идеи Заде и его последователей находят применение при создании систем, понимающих тексты на естественном языке, при создании планирующих систем, опирающихся на неполную информацию, при обработке зрительных сигналов, при распознавании образов, при управлении техническими, социальными и экономическими системами, в системах искусственного интеллекта и робототехнических системах. Л. Заде подчеркивает: «По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные, содержащие смысл утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за которым точность и смысл становятся взаимоисключающими» [1].

Можно выделить три периода в становлении, развитии и практическом применении теории нечетких множеств. Первый период, который обычно связывают с концом 60-х – началом 70-х годов, характеризуется становлением теоретических основ теории нечетких множеств, изложенных в статьях Л. Заде. Второй период приходится на 70–80-е годы, когда появились первые практические результаты применения созданной теории. Третий период с конца 80-х годов до настоящего времени. Этот период характеризуется бумом практического применения нечеткой теории в различных сферах науки и техники.

Новые подходы позволяют расширить сферу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории.

1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Операции над нечеткими множествами и отношениями

1.1.1. Понятие нечеткого множества

Определение 1. Пусть E – универсальное множество, x – элемент E. *Нечетким множеством A* в E называется множество упорядоченных пар $A = \{\mu_A(x)/x\}$, где $\mu_A(x)$ – *характеристическая функция принадлежности* (или просто функция принадлежности), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, $M = [0,1]$).

Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента x подмножеству A, $\mu_A: E \to M$ – функция принадлежности, отображающая E в множество M. Если $M = \{0,1\}$, то A является обычным множеством и его функция принадлежности совпадает с характеристической функцией множества A. В дальнейшем будем предполагать, что $M = [0,1]$.

Примеры

Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$; A – нечеткое множество, для которого $\mu_A(x_1) = 0{,}3$; $\mu_A(x_2) = 0$; $\mu_A(x_3) = 1$; $\mu_A(x_4) = 0{,}5$; $\mu_A(x_5) = 0{,}9$.

Тогда A можно представить в виде:

1) $A = \{0{,}3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0{,}5/x_4;\ 0{,}9/x_5\}$, или

2) $A = 0{,}3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0{,}5/x_4 + 0{,}9/x_5$, или

3)

A =	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0,3	0	1	0,5	0,9

Замечание. Здесь знак «+» не является обозначением операции сложения, а имеет смысл объединения.

Нечеткое множество A называется пустым, если $\mu_A(x) = 0,\ \forall x \in E$.

Носителем нечеткого множества A называется множество вида

$$S(A) = \mathrm{supp}(A) = \{x \mid x \in E,\ \mu_A(x) > 0\}.$$

Нечеткое множество A называется н о р м а л ь н ы м, если выполняется равенство $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$.

Нечеткое множество A называется в ы п у к л ы м, если выполняется неравенство

$$\mu_A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in E, \forall \alpha \in [0,1].$$

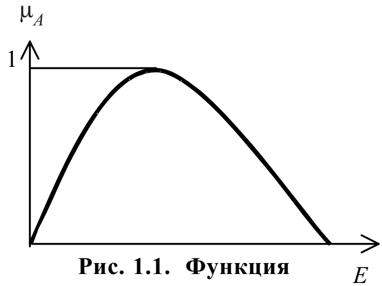


Рис. 1.1. Функция принадлежности

Нечеткое множество строго определяется с помощью функции принадлежности, поэтому в случае функционального представления степени принадлежности его можно представить графически (рис. 1.1).

Множеством уровня α (или α-сечением) нечеткого множества A называется множество $A_\alpha = \{x \mid x \in E, \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

П р и м е р: $A = 0{,}2/x_1 + 0/x_2 + 0{,}5/x_3 + 1/x_4$, тогда $A_{0,3} = \{x_3, x_4\}$, $A_{0,7} = \{x_4\}$.

Теорема о декомпозиции. Всякое нечеткое множество A разложимо по его множествам уровня в виде:

$$A = \cup \alpha A_\alpha,$$

где αA_α – произведение числа α на множество A, и α «пробегает» область значений M функции принадлежности нечеткого множества A.

П р и м е р: $A = 0{,}1/x_1 + 0/x_2 + 0{,}7/x_3 + 1/x_4$ представимо в виде:

$$A = 0{,}1(1{,}0{,}1{,}1) \cup 0{,}7(0{,}0{,}1{,}1{,}) \cup 1(0{,}0{,}0{,}1) =$$

$$= (0{,}1/x_1 + 0/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0{,}1/x_4) \cup (0/x_1 + 0/x_2 + 0{,}7/x_3 + 0{,}7/x_4) \cup$$

$$\cup (0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4) = 0{,}1/x_1 + 0/x_2 + 0{,}7/x_3 + 1/x_4.$$

1.1.2. Операции над нечеткими множествами

Рассмотрим различные операции над нечеткими множествами, важные с практической точки зрения [1, 2, 6].

1. *Равенство* нечетких множеств: A и B равны, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Обозначение: $A = B$.

2. *Подмножество* нечеткого множества. Говорят, что A содержится в B, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) \le \mu_B(x)$.

Обозначение: $A \subset B$.

3. *Дополнение* нечеткого множества: A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$.

Обозначение: $B = \overline{A}$ или $A = \overline{B}$.

Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$.

4. *Пересечение* нечетких множеств: $A \cap B$ – наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

5. *Объединение* нечетких множеств: $A \cup B$ – наименьшее нечеткое подмножество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

6. *Разность* нечетких множеств: $A - B = A \cap \overline{B}$ с функцией принадлежности $\mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$.

7. *Алгебраическое произведение* нечетких множеств: $A \bullet B$ с функцией принадлежности $\mu_{A \bullet B}(x) = \mu_A(x)\, \mu_B(x)$.

8. *Граничное произведение* нечетких множеств: $A \times B$ с функцией принадлежности $\mu_{A \times B}(x) = \max\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0\}$.

9. *Драстическое произведение* нечетких множеств $A \times B$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A \times B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{ если } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x), \text{ если } \mu_A(x) = 1, \\ 0 - \text{в других случаях.} \end{cases}$$

10. *Алгебраическая сумма* нечетких множеств: $A + B$ с функцией принадлежности $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\, \mu_B(x)$.

11. *Граничная сумма* нечетких множеств: $A \mathbin{++} B$ с функцией принадлежности $\mu_{A ++ B}(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}$.

12. *Драстическая сумма* нечетких множеств $A \oplus B$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{ если } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x), \text{ если } \mu_A(x) = 0, \\ 1 - \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Между указанными выше операциями над нечеткими множествами справедливо следующее соотношение:

$$\varnothing \subseteq A * B \subseteq A \times B \subseteq A \bullet B \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A + B \subseteq A + + B \subseteq$$

$$\subseteq A \oplus B \subseteq E.$$

П р и м е р ы

Пусть:

$A = 0{,}4/\ x_1 + 0{,}2/\ x_2 + 0/\ x_3 + 1/\ x_4$;
$B = 0{,}7/\ x_1 + 0{,}9/\ x_2 + 0{,}1/\ x_3 + 1/\ x_4$;
$C = 0{,}1/\ x_1 + 1/\ x_2 + 0{,}2/\ x_3 + 0{,}9/\ x_4$.

Здесь:

$A \subset B$, т. е. A содержится в B.

$E - A = 0{,}6/\ x_1 + 0{,}8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4$; $E - B = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0{,}9/x_3 + 0/x_4$.

$A \cap B = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$.

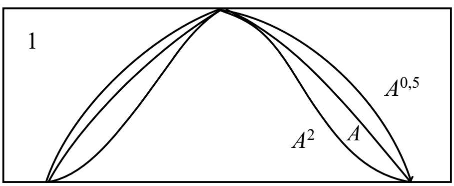
$A \cup B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$.

$A - B = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4$; $B - A = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$.

$A \oplus B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$.

Продолжим обзор основных операций над нечеткими множествами.

На основе операции алгебраического произведения (по крайней мере для целых, α эта основа очевидна) определяется операция *возведения в степень* α нечеткого множества A, где α – положительное число. Нечеткое множество A^α определяется функцией принадлежности $\mu_A^\alpha(x) = \mu_A^\alpha(x)$. Частным случаем возведения в степень являются: CON(A) = A^2 – операция *концентрирования*, DIL(A) = $A^{0,5}$ – операция *растяжения,* которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями.



Проиллюстрируем эти понятия на рис. 1.2, 1.3.

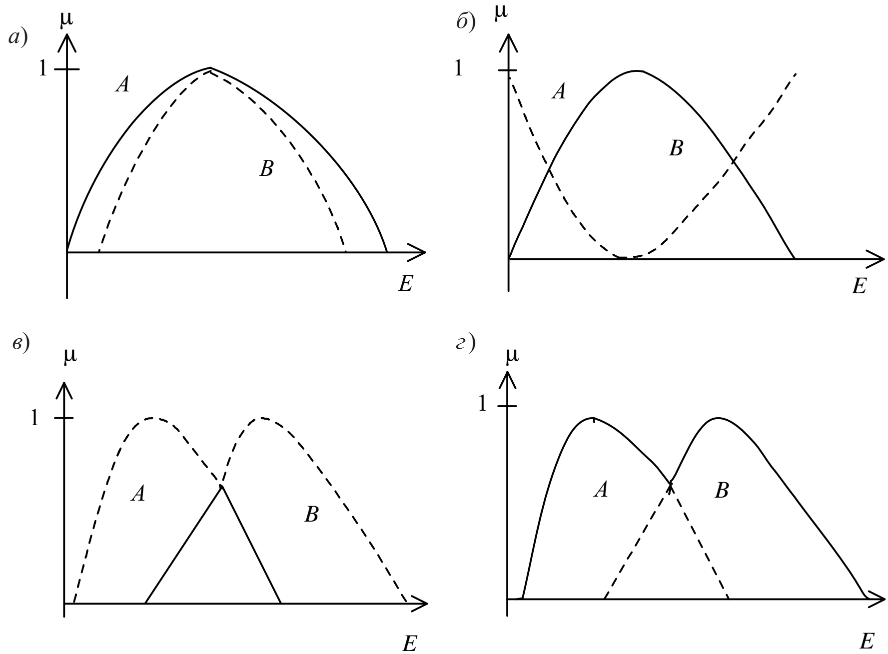


Рис. 1.2. Основные операции над нечеткими множествами: *а* – подмножество нечеткого множества; *б* – дополнение нечеткого множества; *в* – пересечение нечетких множеств; *г* – объединение нечетких множеств

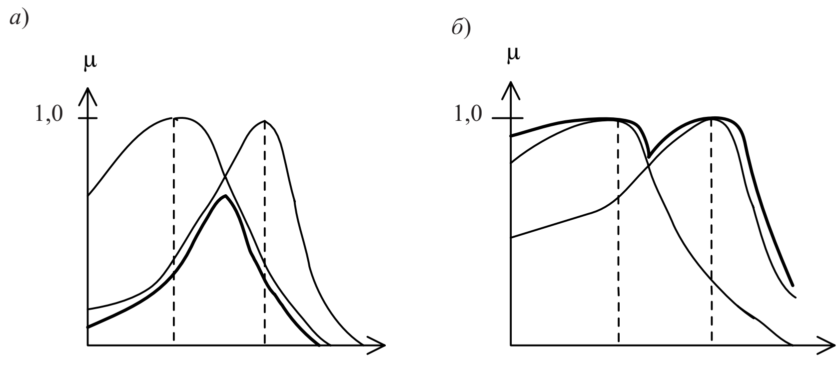


Рис. 1.3. Операции произведения и суммы нечетких множеств: *а* –алгебраическое произведения нечетких множеств; *б* – алгебраическая сумма нечетких множеств

1.1.3. Понятие нечеткого отношения

Определение 2. Нечетким отношением R на множестве $E = E_1 \times E_2$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $E_1 \times E_2$, которое характеризуется функцией принадлежности μ_R: $E_1 \times E_2 \to M$.

Если $M = \{0,1\}$, то R является обычным отношением. В дальнейшем будем предполагать, что $M = [0,1]$. Значение $\mu_R\ (x, y)$ этой функции понимается как некоторая субъективная мера выполнения отношения xRy.

Примеры

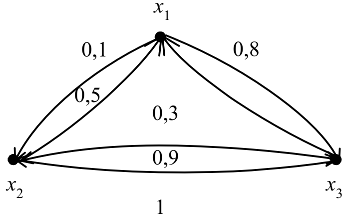
1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $M = [0,1]$. Нечеткое отношение $R = XRY$ может быть задано, к примеру, таблицей:

X \ Y	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

2. Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$, т. е. множество всех действительных чисел. Отношение $x >> y$ (x много больше y) можно задать функцией принадлежности:

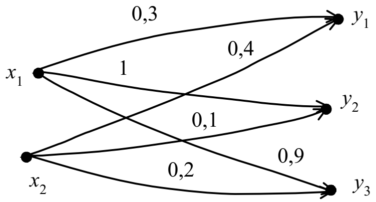
$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le y, \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если} \quad y < x, \end{cases}$$

3. Отношение R, для которого $\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$, при достаточно больших k можно интерпретировать так: «x и y близкие друг к другу числа».



В случае конечных или счетных универсальных множеств очевидна интерпретация нечеткого отношения в виде нечеткого графа (слева), в котором пара вершин (x_i, x_j) в случае XRX соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i, x_j)$, в случае XRY пара вершин (x_i, y_j) соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i, y_j)$.

4. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и задано нечеткое отношение $\mu_R : X \times X \to [0,1]$, представимое графом, приведенным справа.



5. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, тогда нечеткий граф вида задает нечеткое отношение XRY.

Носителем нечеткого отношения R называется подмножество декартова произведения $X \times X$ вида $S(R) = \{(x, y)$: $\mu_R(x, y) > 0\}$.

Множеством уровня α (или α-сечением) нечеткого отношения R называется $R_\alpha = \{(x, y)$: $\mu_R(x, y) \geq \alpha\}$.

1.1.4. Операции над нечеткими отношениями

Перейдем к рассмотрению операций над нечеткими отношениями, некоторые из которых являются аналогами операций над нечеткими множествами, а некоторые присущи только нечетким отношениям [1, 2, 3, 6, 7, 9].

1. *Нечеткое отношение*, содержащее данное нечеткое отношение или содержащееся в нем.

Пусть R_1 и R_2 – два нечетких отношения такие, что

$$\forall (x, y) \in X \times Y: \ \mu_{R_1}(x, y) \leq \mu_{R_2}(x, y),$$

тогда говорят, что R_2 содержит R_1 или R_1 содержится в R_2.

Обозначение: $R_1 \subseteq R_2$.

П р и м е р:

$$\mu_{R_1}(x, y) = \begin{cases} 0, & x > y, \\ 1 - e^{-k_1 (x-y)^2}, & y \geq x; \end{cases}$$

$$\mu_{R_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & x > y, \\ 1 - e^{-k_2 (x-y)^2}, & y \geq x. \end{cases}$$

Отношения R_1, R_2 – отношения типа $y >> x$ (y много больше x). При $k_2 > k_1$ отношение R_2 содержит R_1.

2. Объединение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

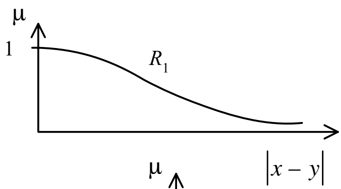
$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\}.$$

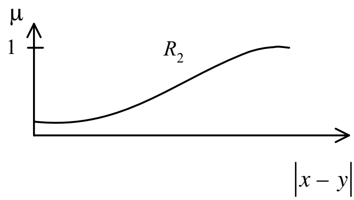
П р и м е р ы

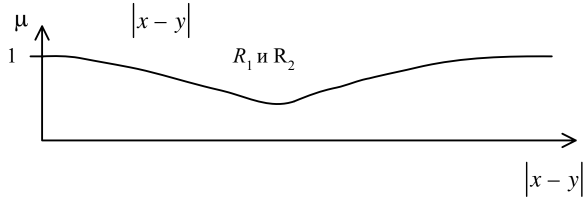
1. Ниже изображены отношения действительных чисел, содержательно означающие: xR_1y – «числа x и y очень близкие», xR_2y – «числа x и y очень различны» и их объединение $xR_1 \cup R_2y$ – «числа x и y очень близкие или очень различные».

Функции принадлежности отношений заданы на $|y - x|$.

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \begin{cases} \mu_{R_1}(x, y), & |y - x| \le \alpha, \\ \mu_{R_2}(x, y), & |y - x| > \alpha. \end{cases}$$







где α – такое $|y - x|$, что $\mu_{R_1}(x, y) = \mu_{R_2}(x, y)$

2.

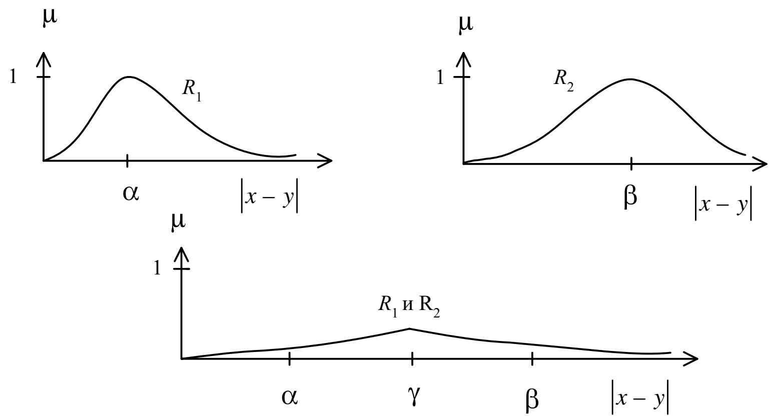
R_1				R_2				$R_1 \cup R_2$			
									y_1	y_2	y_3
	y_1	y_2	y_3		y_1	y_2	y_3	x_1	0,7	0,9	1
x_1	0,1	0	0,8	x_1	0,7	0,9	1	x_2	1	0,7	0,5
x_2	1	0,7	0	x_2	0,3	0,4	0,5				

3. *Пересечение двух отношений* R_1 и R_2. R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\}.$$

П р и м е р

Ниже изображены отношения: R_1, означающее «модуль разности $|y - x|$ близок к α», R_2, означающее «модуль разности $|y - x|$ близок к β», и их пересечение.



4. *Дополнением отношения* R называется нечеткое отношение Q с функцией принадлежности

$$\mu_Q(x, y) = 1 - \mu_R(x, y).$$

5. *Композиция двух нечетких отношений*: пусть R_1 – нечеткое отношение R_1: $X \times Y \rightarrow [0,1]$ между X и Y, и R_2 – нечеткое отношение R_2: $Y \times Z \rightarrow [0,1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_1 \bullet R_2$, определенное через R_1 и R_2 выражением

$$\mu_{R_1 \bullet R_1}(x,z) = \max_y \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\},$$

называется (max-min)-композицией отношений R_1 и R_2, например:

R_1				R_2					$R_1 \circ R_2$				
				$Y \backslash Z$	z_1	z_2	z_3	z_4	$X \backslash Z$	z_1	z_2	z_3	z_4
$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_1	0,9	0	1	0,2	x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_1	0,1	0,7	y_2	y_2	0,3	0,6	0	0,9	x_2	0,9	0,5	1	0,5
x_2	1	0,5	0	y_3	0,1	1	0	0,5					

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) \max_{y_i} \min\{\mu_{R_1}(x_1, y_i), \mu_{R_2}(y_i, z_1)\} =$$

$$= (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) = 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3,$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, x_2) = (0{,}1 \wedge 0) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}4 \wedge 1) = 0 \vee 0{,}6 \vee 0{,}4 = 0{,}6,$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_3) = 0{,}1$$

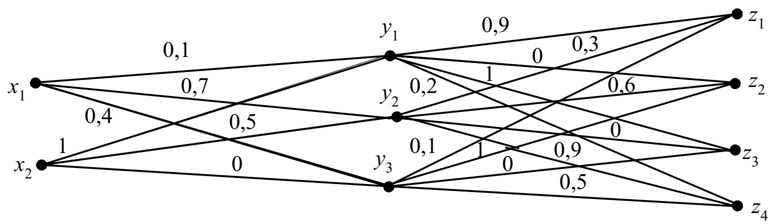
....

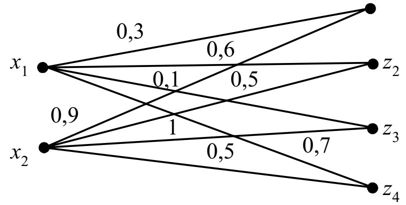
....

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_3) = 0{,}5.$$

З а м е ч а н и е. В данном примере вначале использован «аналитический» способ композиции отношений R_1 и R_2, т. е. i-я строка R_1 «умножается» на j-й столбец R_2 с использованием операции $\wedge(\min)$, полученный результат «свертывается» с использованием операции $\vee(\max)$ в $\mu\,(x_i, z_j)$.

Ниже приведены графы, соответствующие R_1 и R_2, «склеенные» по Y. В полученном графе рассматриваем пути от x_i к z_j и каждому ставим в соответствие минимальный из «весов» его составляющих. Затем определяем максимум по всем путям из x_i в z_j, который и дает искомое $\mu\,(x_i, z_j)$.





6. *Свойства композиции*. Операция композиции ассоциативна, т. е.

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1,$$

дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения

$$R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1),$$

$$R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1).$$

Кроме того, для композиции выполняется следующее важное свойство: если $R_1 \subset R_2$, то $R \bullet R_1 \subset R \bullet R_2$.

Транзитивным замыканием нечеткого отношения называется нечеткое отношение $Q = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$, где $R^m = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{m \text{ раз}}$.

1.2. Арифметические операции над нечеткими числами

1.2.1. Понятие нечеткой и лингвистической переменных

Понятие нечеткой и лингвистической переменных используется при описании объектов и явлений с помощью нечетких множеств [1, 2, 3].

Определение 3. *Нечеткая* переменная характеризуется тройкой

$$<\alpha, X, A>,$$

где α – наименование переменной; X – универсальное множество (область определения α); A – нечеткое множество на X, описывающее ограничения на значения нечеткой переменной α (т. е. $\mu_A(x)$).

Определение 4. *Лингвистической* переменной называется набор

$$<\beta, T, X, G, M>,$$

где β – наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X (множество T называется базовым терм-множеством лингвистической переменной); G – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности генерировать новые термы (значения), тогда $G(T)$ – множество сгенерированных термов, называемое расширенным терм-множеством лингвистической переменной; M – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

П р и м е р

Пусть эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью понятий «*малая толщина*», «*средняя толщина*» и «*большая толщина*», при этом минимальная толщина равна 10 мм, а максимальная – 80 мм. Формализация такого описания может быть проведена с помощью следующей лингвистической переменной:

$$<\beta, T, X, G, M>,$$

где β – толщина изделия; T – {«*малая толщина*», «*средняя толщина*», «*большая толщина*»}; X – [10, 80]; G – процедура образования новых термов с помощью связок «*и*», «*или*» и модификаторов типа «*очень*», «*не*», «*слегка*» и др. Например: «*малая или средняя толщина*», «*очень малая толщина*» и др.; M – процедура задания на X = [10, 80] нечетких подмножеств A_1= «*малая толщина*», A_2 = «*средняя толщина*», A_3 = «*большая толщина*», а также нечетких множеств для термов из $G(T)$ в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов «*и*», «*или*», «*не*», «*очень*», «*слегка*» и др. операции над нечеткими множествами вида: $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, CON(A) = A^2, DIL(A) = $A^{0,5}$ и др.

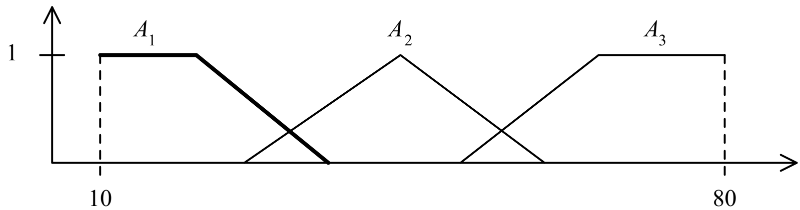


Рис. 1.4. Функции принадлежности нечетких множеств: A_1 – «*малая толщина*», A_2 – «*средняя толщина*», A_3 – «*большая толщина*»

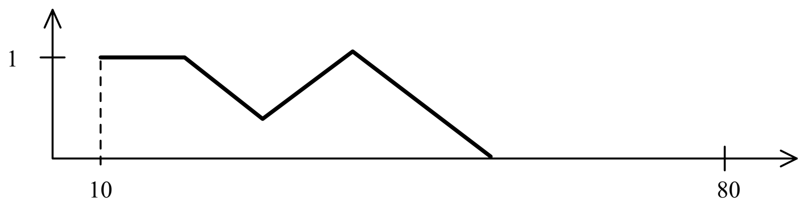


Рис. 1.5. Функция принадлежности: $A_1 \cup A_2$ – нечеткое множество «малая или средняя толщина»

1.2.2. Понятие нечеткого числа

Определение 5. *Нечеткие числа* – нечеткие переменные, определенные на числовой оси, т. е. нечеткое число определяется как нечеткое множество A на множестве действительных чисел R^1 с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0,1]$, где x – действительное число ($x \in R^1$).

Нечеткое число A нормально, если $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$; выпуклое, если

$$\mu_A(ax_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in R, \forall \alpha \in [0,1].$$

Подмножество $S(A) \subseteq R^1$ называется *носителем* нечеткого числа A, если $S(A) = \{x/x \in R^1, \mu_A(x) > 0\}$.

Нечеткое число A унимодально, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси. На рис. 1.4 число A_2 является унимодальным, а число A_1 не является унимодальным.

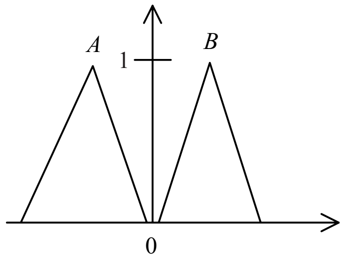


Рис. 1.6. Число *A* – отрицательное, *B* – положительное

Нечеткое число A положительно, если $\inf S(A) \geq 0$, и отрицательно, если $\sup S(A) \leq 0$.

1.2.3. Принцип обобщения

Принцип обобщения – одна из основных идей теории нечетких множеств – носит эвристический характер и используется для расширения области применения нечетких множеств на отображения. Пусть X и Y – два заданных универсальных множества. Говорят, что имеется функция, определенная на X со значением в Y, если, в силу некоторого закона f, каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. Когда функцию f: $X \to Y$ называют отображением, значение $f(x) \in Y$, которое она принимает на элементе $x \in X$, обычно называют образом элемента x. Образом множества А $\subseteq X$ при отображении называют множество $f(A) \subseteq Y$ тех элементов Y, которые являются образами элементов множества A.

Принцип обобщения для четких функций заключается в том, что при заданном четком f: $X \to Y$ отображении для любого нечеткого множества A, заданного на X, определяется нечеткое множество $f(A)$ на Y, являющееся образом A.

Пусть f: $X \to Y$ – заданное четкое отображение, а $A = \{\mu_A(x)/x\}$ – нечеткое множество в X. Таким образом, A при отображении f является нечеткое множество $f(A)$ на Y с функцией принадлежности:

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x); \quad y \in Y,$$

где $f^{-1}(y) = \{x/f(x) = y\}$.

1.2.4. Операции над нечеткими числами

Для рассмотрения операций над нечеткими числами применим принцип обобщения Заде. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – нечеткие числа с носителями $S(A_1), S(A_2), ..., S(A_n)$, а g: $R^1 \times R^1 \times \ldots \times R^1 \to R^1$ – некоторая функция. Тогда согласно принципу обобщения нечеткое число $B = g(A_1, A_2, ..., A_n)$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_B(x) = \sup \min\{\mu_{A_1}(a_1), \mu_{A_2}(a_2), \ldots, \mu_{A_n}(a_n)\},$$
$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = x,$$
$$a_i \in S(A_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Унарные операции над нечеткими числами

Если g – функция одного аргумента, а A – нечеткое число, то функция принадлежности образа $g(A)$ имеет вид [10]

$$\mu_{g(A)}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{g(a)=x} \mu_A(a), & \text{если} \quad g^{-1}(x) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad g^{-1}(x) = \varnothing. \end{cases}$$

П р и м е р ы

Наименование операции	$g(x)$	$g(A)$	$\mu_g(A)(x)$
Умножение на число	cx	cA	$\mu_A(x/c)$, $c \neq 0$,
Обратная величина	$1/x$	$1/A$	$\mu_A(1/x)$, $x \neq 0$,
Степень	x^c	A^c	$\mu_A(x^{1/c})$, $c \neq 0$,
Экспонента	e^x	e^A	$\mu_A(\log(x))$, $x > 0$,
Тригонометрическая	$\sin(x)$	$\sin(A)$	$\mu_A(\arcsin(x))$

Бинарные операции над нечеткими числами

Приведем основные арифметические операции (+, – , ×, :) над нечеткими числами A и B.

1. Операция *сложения* $A + B$ двух нечетких чисел определяется следующей формулой:

$$\mu_{A+B}(x) = \sup_{y \in R^1} \min\{\mu_A(y), \mu_B(x-y)\}.$$

2. Операция *вычитания* $A – B$ двух нечетких чисел определяется следующей формулой:

$$\mu_{A-B}(x) = \sup_{y \in R^1} \min\{\mu_A(x+y), \mu_B(y)\}.$$

3. Операция *умножения* $A \times B$ двух нечетких чисел определяется следующей формулой:

$$\mu_{A\times B}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y\neq 0} \min\{\mu_A(y), \mu_B(x/y)\}, & \text{если} \quad x \neq 0; \\ \max\{\mu_A(0), \mu_B(0)\}, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Операция *деления* $A : B$ двух нечетких чисел определяется следующей формулой:

$$\mu_{A:B}(x) = \sup_{y} \min\{\mu_A(xy), \mu_B(y)\}.$$

Применим принцип обобщения для операций взятия максимума и минимума для нечетких чисел. Результаты взятия max и min над нечеткими числами A, B показаны на рис. 1.7.

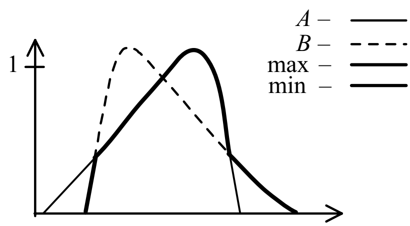


Рис. 1.7. Операции max (*A*, *B*) и min (*A*, *B*)

Далее рассмотрим другой подход к определению арифметических операций над нечеткими числами [11, 12].

Нечеткое число A можно представить через множества α-уровня A_α следующим образом:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha, \quad \text{где} \quad A_\alpha = \left\{ x \in E / \mu_A(x) \geq \alpha \right\} = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha \right].$$

Тогда арифметические операции определяются следующим образом.

1. Операция *сложения A + B* двух нечетких чисел

$$A + B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[a_1^\alpha + b_1^\alpha, \; a_2^\alpha + b_2^\alpha \right].$$

2. Операция *вычитания A – B* двух нечетких чисел

$$A - B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[a_1^\alpha - b_2^\alpha, \; a_2^\alpha - b_1^\alpha \right],$$ так как число $-B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[-b_2^\alpha, -b_1^\alpha \right].$

3. Операция *умножения A × B* двух нечетких чисел

$$A \times B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[a_1^\alpha b_1^\alpha, \; a_2^\alpha b_2^\alpha \right].$$

4. Операция *деления A : B* двух нечетких чисел

$$A : B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[a_1^\alpha / b_2^\alpha, \; a_2^\alpha / b_1^\alpha \right],$$

так как число $B^{-1} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[1/b_2^\alpha, 1/b_1^\alpha \right].$

Примеры

Выполнение арифметических операций над дискретными нечеткими числами $A = \{0{,}1/5,\ 0{,}8/6,\ 0{,}4/7\}$, $B = \{0{,}2/4,\ 0{,}9/5,\ 0{,}3/6\}$:

$A + B = \{0{,}1/9,\ 0{,}2/10,\ 0{,}8/11,\ 0{,}4/12,\ 0{,}3/13\}$;

$A - B = \{0{,}1/{-1},\ 0{,}3/0,\ 0{,}8/1,\ 0{,}4/2,\ 0{,}2/3\}$;

$A \times B = \{0{,}1/20,\ 0{,}2/24,\ 0{,}1/25,\ 0{,}2/28,\ 0{,}8/30,\ 0{,}4/35,\ 0{,}3/42\}$;

$A : B = \{0{,}1/0{,}83,\ 0{,}3/1{,}0,\ 0{,}3/1{,}17,\ 0{,}8/1{,}22,\ 0{,}1/1{,}25,\ 0{,}4/1{,}4,\ 0{,}2/1{,}5,\ 0{,}2/1{,}75\}$.

Выполнение арифметических операций над непрерывными нечеткими числами приведены на рис. 1.8.

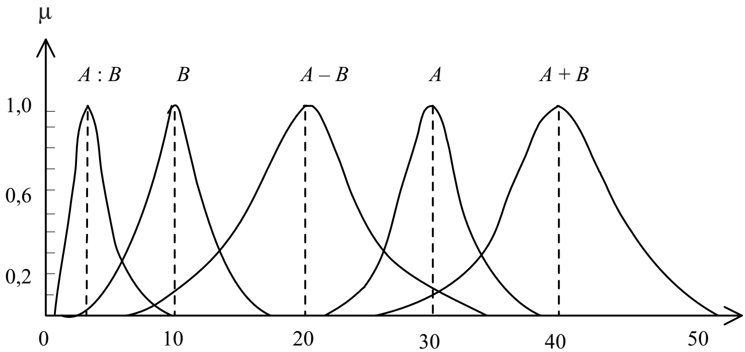


Рис. 1.8. Сложение, вычитание и деление нечетких чисел

Основные свойства арифметических операций

В заключение остановимся на некоторых свойствах бинарных операций над нечеткими числами.

1. В общем случае число $-A$ не является противоположным числу A, т. е. $(-A) + A \neq 0$;

2. Число $1/A$ не является обратным числу A, т. е. $1/A \times A \neq 1$;

3. Операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, но в общем случае недистрибутивны, т. е.

$$A + B = B + A;\ A \times B = B \times A;\ (A + B) + C = A + (B + C);$$
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C);$$

$$A \times (B + C) \neq A \times B + A \times C;$$

$$A - B = A + (-B);$$

$$A \times B = (-A) \times (-B);\ (-A) \times B = A \times (-B) = -(A \times B).$$

4. Свойство дистрибутивности выполняется в следующих случаях:

а) A – действительное число;

б) B и C – либо оба отрицательные, либо оба положительные;

в) B и C – симметричные нечеткие числа (т. е. $B = -B$, $C = -C$).

5. Основные свойства операций max и min:

1. $\min(A, B) + \max(A, B) = A + B$;

2. $A + \min(B, C) = \min(A + B, A + C)$;

3. $A + \max(B, C) = \max(A + B, A + C)$.

1.3. Практические вычисления арифметических операций над нечеткими числами

1.3.1. Нечеткие числа (L-R)-типа

Нечеткие числа (L-R)-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, т. е. задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними [3, 10].

Функции принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа задаются с помощью невозрастающих функций на множестве неотрицательных действительных чисел действительного переменного $L(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих свойствам:

а) $L(-x) = \mathrm{L}(x)$, $R(-x) = R(x)$;

б) $L(0) = R(0)$;

в) $L(\infty) = R(\infty) = 0$.

Очевидно, что к классу (L-R)-функций относятся функции, графики которых имеют следующий вид (рис. 1.9):

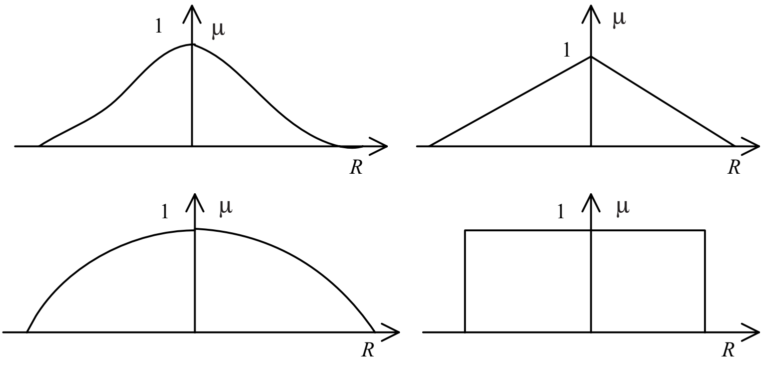


Рис. 1.9. *L-R*-функции

Примерами аналитического задания (L-R)-функций могут быть

$$L(x) = e^{-|x|^p}, \quad p \geq 0;$$

$$R(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \quad p \geq 0 \quad \text{и т. д.}$$

Пусть $L(y)$ и $R(y)$ – функции (L-R)-типа. Унимодальное нечеткое число A с *модой* a (т. е. $\mu_A(a) = 1$) с помощью $L(y)$ и $R(y)$ задается следующим образом:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) & \text{при} \quad x \le a, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right) & \text{при} \quad x \ge a, \end{cases}$$

где a – мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(y)$ и $R(y)$ нечеткое число (унимодальное) задается тройкой $A = (a, \alpha, \beta)$.

Толерантное нечеткое число задается, соответственно, четырьмя параметрами $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$, где a_1 и a_2 – границы толерантности, т. е. в промежутке $[a_1\ a_2]$ значение функции принадлежности равно 1.

Примеры графиков функций принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа приведены на рис.1.10.

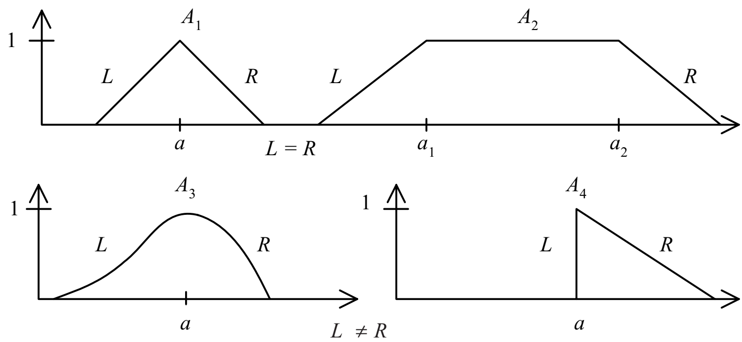


Рис. 1.10. Виды представления нечетких чисел *L*-*R*-типа

Мы не будем здесь рассматривать операции над (L-R)-числами. Отметим, что в конкретных ситуациях функции $L(y)$, $R(y)$, а также параметры a, b нечетких чисел (a, α, β) и $(a_1, a_2, \alpha, \beta)$ должны подбираться таким образом, чтобы результат операции (сложения, вычитания, деления и т. д.) был точно или приблизительно равен нечеткому числу с теми же $L(y)$ и $R(y)$, а параметры α- и β-результата не выходили за рамки ограничений на эти параметры для исходных нечетких чисел, особенно если результат в дальнейшем будет участвовать в операциях.

З а м е ч а н и е. Решение задач математического моделирования сложных систем с применением аппарата нечетких множеств требует выполнения большого объема операций над разного рода лингвистическими и другими нечеткими переменными. Для удобства исполнения операций, а также для ввода-вывода и хранения данных, желательно работать с функциями принадлежности (L-R)-типа. Нечеткие множества, которыми приходится оперировать в большинстве задач, являются, как правило, унимодальными и нормальными. Одним из возможных методов аппроксимации унимодальных нечетких множеств является аппроксимация с помощью функций (L-R)-типа.

Пример

Терм ЛП	(L-R)-представление
Средний	$A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$, $\alpha = \beta > 0$
Малый	$A = (a, \infty, \beta)_{LR}$, $\alpha = \infty$
Большой	$A = (a, \alpha, \infty)_{LR}$, $\beta = \infty$
Приблизительно в диапазоне	$A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}$, $\alpha = \beta > 0$
Определенный	$A = (a, 0, 0)_{LR}$, $\alpha = \beta = 0$
Разнообразный зона полной неопределенности	$A = (a, \infty, \infty)_{LR}$, $\alpha = \beta = \infty$

1.3.2. Выполнение арифметических операций над нечеткими числами

Пусть A и B – два нечетких интервала с полунепрерывными сверху функциями принадлежности. Пусть f: $R^2 \to R^1$ – функция непрерывная. Тогда [10, 11, 12] множества α-уровня нечеткой величины $f(A, B)$ связаны с множествами α-уровней нечетких величин A и B при отображении f следующим образом:

1. Если f – изотонная функция, т. е. $\forall x_1 \geq x_2$, $\forall y_1 \geq y_2$, $f(x_1, y_1) \geq f(x_2, y_2)$, то $\forall \alpha > 0 [f(A, B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha)$. Если A_α, B_α замкнутые ограниченные интервалы вида $\left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right]$, $\left[b_1^\alpha, b_2^\alpha\right]$, то $\forall \alpha \in (0,1)\, f\left(A_\alpha, B_\alpha\right) = \left[\left(f(a_1^\alpha, b_1^\alpha\right), f\left(a_2^\alpha, b_2^\alpha\right)\right]$.

2. Если f – антитонная функция, т. е. $\forall x_1 \geq x_2$, $\forall y_1 \geq y_2$, $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$, то $\forall \alpha \in (0,1)]\, f\left(A_\alpha, B_\alpha\right) = \left[f\left(a_2^\alpha, b_2^\alpha\right), f\left(a_1^\alpha, b_1^\alpha\right)\right]$.

3. Если f – г и б р и д н а я функция, т. е. $\forall x_1 \geq x_2, \forall y_1 \geq y_2, f(x_1, y_1) \geq$ $\geq f(x_2, y_2)$, то $\forall \alpha \in (0,1)\, f(A_\alpha, B_\alpha) = \left[f\left(a_1^\alpha, b_2^\alpha\right), f\left(a_2^\alpha, b_1^\alpha\right)\right]$.

Если $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}$ и $B = (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR}$ – нечеткие (L–R) числа, а операция $f(A, B)$ над ними изотонная функция, то w: $\mu_{f(A,B)}(w) = \lambda$ вычисляется по следующим формулам:

$$w = \begin{cases} f(a_1 - \alpha L^{-1}(\lambda), b_1 - \gamma L^{-1}(\lambda)), & \text{если} \quad w \leq f(a_1, b_1), \\ 1, \quad \text{если} \quad f(a_1, b_1) \leq w \leq f(a_2, b_2), & \\ f(a_2 + \beta R^{-1}(\lambda), \ b_2 + \delta R^{-1}(\lambda)), & \text{если} \quad w \geq f(a_2, b_2). \end{cases}$$

Если $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}$ и $B = (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{RL}$ – нечеткие числа противоположного типа (L–R и R–L), а операция $f(A, B)$ над ними – гибридная функция, то w: $\mu_{f(A,B)}(w) = l$ вычисляется по следующим формулам:

$$w = \begin{cases} f(a_1 - \alpha L^{-1}(\lambda), b_2 + \delta L^{-1}(\lambda)), & \text{если} \quad w \leq f(a_1, b_2), \\ 1, \quad \text{если} \quad f(a_1, b_2) \leq w \leq f(a_2, b_1), & \\ f(a_2 + \beta R^{-1}(\lambda), \ b_1 + \gamma R^{-1}(\lambda)), & \text{если} \quad w \geq f(a_2, b_1). \end{cases}$$

Рассмотрим основные арифметические операции над нечеткими числами.

1. Операция сложения $f(x, y) = x + y$ изотонная функция. Если A и B нечеткие интервалы (L-R)-типа, то $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$.

2. Операция вычитания $f(x, y) = x–y$ гибридная функция. Если A и B нечеткие интервалы противоположного типа (L-R и R-L)-типа, то $A–B =$ $= (a_1–b_2, a_2–b_1, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$.

3. Операция умножения $f(x, y) = xy$ изотонная функция на $(R^+)^2$. Если A и B нечеткие интервалы (L–R)-типа и $A > 0$, $B > 0$, то

$$\mu_{AB}(w) = \begin{cases} L\left(\dfrac{b_1\alpha + a_1\gamma - \sqrt{(a_1\gamma - b_1\alpha)^2 + 4\alpha\gamma w}}{2\alpha\gamma}\right), & \text{если} \quad w \leq a_1 b_1, \\ 1, \quad \text{если} \quad a_1 b_1 \leq w \leq a_2 b_2, & \\ R\left(\dfrac{-b_2\beta - a_2\delta + \sqrt{(b_2\beta - a_2\delta)^2 + 4\beta\delta w}}{2\beta\delta}\right), & \text{если} \quad w \geq a_2 b_2. \end{cases}$$

4. Операция деления $f(x, y) = x/y$ гибридная функция на $(R^+)^2$. Если A и B нечеткие интервалы противоположных типов (L-R и R-L) и $A > 0$, $B > 0$, то

$$\mu_{A/B}(w) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_1 - wb_2}{\alpha + \delta w}\right), & \text{если} \quad w \le a_1 / b_2, \\ 1, \quad \text{если} \quad a_1 / b_2 \le w \le a_2 / b_1, \\ R\left(\dfrac{b_1 w - a_2}{\beta + \gamma w}\right), & \text{если} \quad w \ge a_2 / b_1. \end{cases}$$

1.3.3. Приближенные вычисления арифметических операций над нечеткими числами

Если функцию $f(A, B)$ нельзя рассчитать аналитически, то ее можно вычислить либо поточечно, либо при непрерывных функциях L и R с помощью приближенных формул, которые дают (L–R)-аппроксимацию искомого результата.

Если A и B нечеткие числа (L-R)-типа, а функция f – изотонная, то в окрестности ядра получаем (L-R)-аппроксимацию функции $f(A, B)$ в виде

$$f(A, B) \cong (f(a_1, b_1), f(a_2, b_2), f_x'(a_1, b_1)\alpha + f_y'(a_1, b_1)\gamma, f_x'(a_2, b_2)\beta + \\ + f_y'(a_2, b_2)\delta)_{LR}.$$

Другой способ аппроксимации заключается в следующем:

$$f(A, B) \cong (f(a_1, b_1), f(a_2, b_2), f(a_1, b_1) - f(a_1 - \alpha, b_1 - \gamma), f(a_2 + \beta, b_2 + \delta) - \\ - f(a_2, b_2))_{LR}.$$

Таким образом, арифметические операции над нечеткими числами (L-R)-типа примут следующий вид [10]:

1. Сложение:

$$(a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} + (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}.$$

2. Вычитание:

$$(a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} - (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{RL} = (a_1 - b_2, a_2 - b_1, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}.$$

3. Умножение:

$$(\mathrm{a}_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} \cdot (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} \cong (a_1 b_1, a_2 b_2, b_1\alpha + a_1\gamma, b_2\beta + a_2\delta)_{LR}.$$

4. Деление:

$$(a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}/(b_1, b_2, \gamma, \delta)_{RL} \cong (a_1/b_2, a_2/b_1, (b_2\alpha + a_1\delta)/b_2^2, (b_1\beta + \\ + a_2\gamma)/b_1^2)_{LR}.$$

1.4. Методы построения функций принадлежности нечетких множеств

Рассмотрим основные методы построения функций принадлежности $\mu_A(x)$ элементов $x \in E$ нечеткому множеству A [3, 5, 7, 8].

Существует ряд методов построения по экспертным оценкам функции принадлежности нечеткого множества. Различают две группы методов: прямые и косвенные методы.

П р я м ы е методы определяются тем, что эксперт просто задает правила определения значений функции принадлежности μ_A множества A. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве E.

Примеры прямых методов: непосредственное задание μ_A таблицей, формулой, графиком. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых величин, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т. д., или когда выделяются полярные значения.

Прямые методы, основанные на непосредственном определении функции принадлежности, должны использоваться только в том случае, когда эксперты далеки от случайных ошибок и работают как «надежные и правильные приборы».

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1. При этом используют следующую процедуру:

– определить список свойств, по которым оценивается объект;

– найти в этом списке полярные свойства и сформировать полярную шкалу;

– для каждой пары полюсов оценит объект на то, как сильно он обладает этим свойством.

Например, в задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

	Признаки	0	1
x_1	Высота лба	Низкий	Широкий
x_2	Профиль носа	Курносый	Горбатый
x_3	Длина носа	Короткий	Длинный
x_4	Разрез глаз	Узкие	Широкие

	Признаки	0	1
x_5	Цвет глаз	Светлые	Темные
x_6	Форма подбородка	Остроконечный	Квадратный
x_7	Толщина губ	Тонкие	Толстые
x_8	Цвет лица	Темный	Светлый
x_9	Очертание лица	Овальное	Квадратное

Для конкретного лица A эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает $\mu_A(x) \in [0,1]$, формируя векторную функцию принадлежности $\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_9)\}$.

Также используются прямые методы для группы экспертов, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо и каждый должен дать один из двух ответов: «*этот человек лысый*» *или «этот человек не лысый*», тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение $m_{«лысый»}$ (данного лица).

К о с в е н н ы е методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки.

К таким условиям могут относиться следующие:

– функция принадлежности отражает близость к заранее выделенному эталону;

– при парном сравнении объектов, если один объект в α раз предпочтительнее второго, то второй объект оценивается в $1/\alpha$ раз предпочтительнее первого; и т. д.

Косвенные методы основаны на более слабых предположениях об экспертах как «измерительных приборах». Косвенные методы более трудоемкие, чем прямые, но их преимущество в стойкости по отношению к искажениям в ответах. Один из наиболее известных методов является метод парных сравнений, предложенных Т. Л. Саати. Если бы значения функций принадлежности были нам известны, например, $\mu_A(x_i) = \omega_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то парные сравнения можно представить матрицей отношений $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = \omega_i/\omega_j$.

На практике эксперт сам формирует матрицу A, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов симметричных относительно диагонали $a_{ij} = 1/a_{ij}$, т. е. если один объект в α раз предпочтительнее другого, то второй объект оценивается в $1/\alpha$ раз предпочтительнее первого. В этом случае

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j = n\omega_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где n – наибольшее собственное значение матрицы A. В общем случае задача сводится к поиску вектора $\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющего уравнению вида $A\boldsymbol{\omega} = \lambda_{\max}\boldsymbol{\omega}$, где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матрицы A. Поскольку матрица A положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным. Чем ближе $\lambda_{\max}$ к числу n, тем более верным является результат. Отклонение $\lambda_{\max}$ от n используется как мера правильности результата (например, $\varepsilon = (\lambda_{\max} - n)/n$). При $\varepsilon = 0$ имеем полную транзитивность суждений. Чем больше е, тем больше нетранзитивность суждений эксперта.

При формировании оценок парных сравнений, эксперта просят отразить опыт следующим образом:

– установить какой из двух предлагаемых объектов более важен;

– оценить различия в виде ранга важности по определенной ранговой шкале.

Различия	Качественная оценка	Объяснения
0	Несравнимость	Нет смысла сравнивать объекты
1	Одинаковая значимость	Элементы равны по значимости
3	Слабо значимее	Существуют показания о предпочтении одного элемента над другим, но показания не убедительны
5	Сильно значимее	Существуют хорошее доказательство и логические критерии, которые могут показать, что элемент более важен
7	Очевидно значимее	Существует убедительное доказательство большей значимости одного элемента над другим
9	Абсолютно значимее	Максимально подтверждается ощутимость предпочтения одного элемента над другим
2, 4, 6, 8	Промежуточные оценки	Когда необходим компромисс

Для нахождения значений функции принадлежности можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Искомые значения получаются при решении оптимизационной задачи:

$$f(\vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j - n\omega_i \right)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1, \quad \omega_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую задачу.

Требуется оценить важность показателей эффективности $F = \{f_1, f_2, \dots, f_7\}$ сложной системы. В результате опроса эксперта получена матрица парных сравнений $\mathbf{M} = \|m_{ij}\|$ $i, j = 1, \dots, 7,$ где m_{ij} показывает, во сколько раз по мнению эксперта $\mu_F(f_i)$ больше $\mu_F(f_j)$ (т. е. во сколько раз f_i показатель важнее f_j показателя для принятия решения):

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 9 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1/3 & 9 & 7 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1 & 1/7 & 1/6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/7 & 1/8 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 1/5 & 1/7 & 1/7 & 6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 5 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далее применяя итерационную процедуру для нахождения максимального собственного числа $\lambda_{\max}$ и связанного с ним собственного вектора m_F, находим $\lambda_{\max} = 7{,}003$; $\mu_F = (0{,}43;\ 0{,}682;\ 1{,}0;\ 0{,}046;\ 0{,}153;\ 0{,}133;\ 0{,}102)$.

Рассмотрим приближенный метод нахождения собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу, матрицы парных сравнений. Для чего находится построчное произведение элементов матрицы **M** и из полученного результата извлекается корень n-й степени. Полученный вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ используется для нахождения вектора μ_F следующим образом:

$$\mathbf{M}=\begin{vmatrix}\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2}\dots & \frac{w_1}{w_n}\\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2}\dots & \frac{w_2}{w_n}\\ & \dots & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2}\dots & \frac{w_n}{w_n}\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}\sqrt[n]{\frac{w_1}{w_1}\times\frac{w_1}{w_2}\times\dots\times\frac{w_1}{w_n}}\\ \sqrt[n]{\frac{w_2}{w_1}\times\frac{w_2}{w_2}\times\dots\times\frac{w_2}{w_n}}\\ \dots\\ \sqrt[n]{\frac{w_n}{w_1}\times\frac{w_n}{w_2}\times\dots\times\frac{w_n}{w_n}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \dots\\ \varphi_n\end{vmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}_F=\begin{vmatrix}\frac{\varphi_1}{\max\limits_{i=1,\dots,n}\varphi_i}\\ \frac{\varphi_2}{\max\limits_{i=1,\dots,n}\varphi_i}\\ \dots\\ \frac{\varphi_n}{\max\limits_{i=1,\dots,n}\varphi_i}\end{vmatrix}$$

Проведем расчеты для исходных данных, приведенных в примере.

Вектор $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ = (1,996; 3,086; 4,633; 0,183; 0,726; 0,555; 0,789) и соответственно вектор $\boldsymbol{\mu}_F$ получился равным $\boldsymbol{\mu}_F$ = (0,43; 0,666; 1,0; 0,04; 0,157; 0.112; 0.103).

1.5. Операции сравнения нечетких чисел

В процессе принятия решений при нечеткой исходной информации необходимо производить выбор между различными нечеткими числами, т. е. следует определить процедуру сравнения нечетких чисел. Все предложенные [5, 10, 11, 13, 16, 17] процедуры сравнения нечетких чисел основаны на вычислении некоторой вещественной функции $F(A, B)$ от нечетких чисел A, B, которая называется индексом ранжирования [13].

Рассмотрим *ряд индексов ранжирования:*

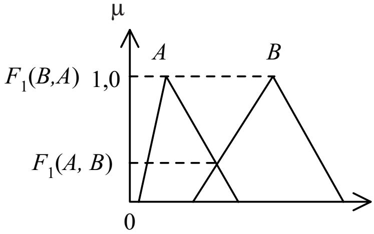
1. Индекс ранжирования [5]:

$$F_1(A,B)=\sup_{a\in S(A),\ b\in S(B)}\min\{\mu_A(a),\ \mu_B(b),\ \mu_R(a,b)\},$$

где $\mu_R(a, b)$ – функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения между числами a, b. Например,

$$\mu_R(a,\ b)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad a\ge b,\\ 0, & \text{если} \quad a<b.\end{cases}$$

Если $F_1(A, B)\ge F_1(B, A)$, то $A\ge B$.



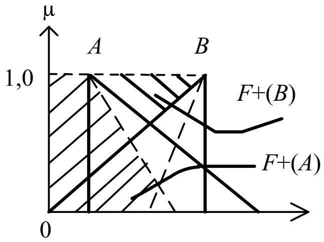
Пример определения индекса ранжирования приведен слева.

2. Индекс ранжирования, предложенный в [17]:

$F_2(A,\ B) = F_+(A) - F_+(B)$, где

$$F_+(A) = \int_0^1 \frac{A_-(\alpha) + A_+(\alpha)}{2} d\alpha.$$

В этом случае, если $F_2(A, B) \geq 0$, то $A \geq B$.



Нахождение $F_+(A)$, $F_+(B)$ показано слева

3. Индекс ранжирования [13]:

$$F_3(A, B) = \frac{\int_{a_1}^{a_2} \mu_A(a)\ da \quad \int_{b_1}^{a} \mu_B(b)\ db}{C},$$

где $$C = \int_{a_1}^{a_2} \mu_A(a)\ da \quad \int_{b_1}^{b_2} \mu_B(b)\ db,$$

$$a_1 = \inf_{a \in S(A)} a,\ a_2 = \sup_{a \in S(A)} a,\ b_1 = \inf_{b \in S(B)} b,\ b_2 = \sup_{b \in S(B)} b.$$

Если $F_3(A, B) \geq F_3(B, A)$, то $A \geq B$.

4. Индекс ранжирования [13]:

$$F_4(A,\ B) = \int_0^{0,5} \max\{0, (1 - \mu_D(x))\}\ dx + \int_{0,5}^{1} \mu_D(x)\ dx,$$

где $D = A/(A + B)$.

Если $F_4(A, B) \geq F_4(B, A)$, то $A \geq B$.

5. Индексы ранжирования [15]:

$$F_5^1(A,B) = \sup_{a \geq b} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}; \quad F_5^2(A,B) = \sup_a \inf_{b \geq a} \min\{\mu_A(a),$$
$$1 - \mu_B(b)\};$$

$$F_5^3(A,B) = \inf_a \sup_{b \leq a} \max\{1 - \mu_A(a), \mu_B(b)\}; \quad F_5^4(A,B) = 1 - \sup_{a \leq b} \min\{\mu_A(a),$$
$$F\ \mu_B(b)\}.$$

В этом случае, если $F_5^i(A, B) \geq F_5^i(B, A)$, то $A \geq B$ (i = 1, 2, 3, 4).

Как показано в [15],

$$F_5^i(A, B) \geq \max\left\{F_5^2(A, B), F_5^3(A, B)\right\};$$

$$\min\left\{F_5^2(A, B), F_5^3(A, B)\right\} \geq F_5^4(A, B).$$

6. Индекс ранжирования [12]:

$F_6(A, B)$ определяется алгоритмическим путем, в основе которого лежит метод пропорций оптимума (метод М. З. Згуровского).

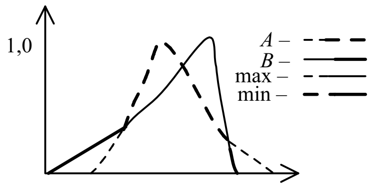
Метод Згуровского

Пусть A, B нечеткие числа. Введем операции $\max\{A, B\}$ и $\min\{A, B\}$.

$$\min\left\{F_5^2(A, B), F_5^3(A, B)\right\} \geq F_5^4(A, B),$$

$$\mu_{\min\{A,B\}}(x) = \max_{x=\min\{a,b\}} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}.$$

Обозначим через MP(A) вклад в $\max\{A, B\}$ величины A, а через mp(A) вклад в $\min\{A, B\}$ величины A, которые вычисляются по следующим формулам:



$$\mathrm{MP}(A) = \frac{\int \min\left\{\mu_{\max\{A,B\}}(x),\ \mu_A(x)\right\} dx}{\int \mu_A(x)\, dx};$$

$$\mathrm{mp}(A) = \frac{\int \min\left\{\mu_{\min\{A,B\}}(x),\ \mu_A(x)\right\} dx}{\int \mu_A(x)\, dx}.$$

Суть метода пропорций оптимума заключается в следующем:

1. Если MP(A) > MP(B) и mp(A) ≤ mp(B), то $F_6(A, B) = 1$.

Если MP(A) > MP(B) и mp(A) > mp(B), то вычисляются сложные пропорции.

2. Если MP(A) < MP(B) и mp(A) ≥ mp(B), то $F_6(A, B) = 0$.

Если MP(A) < MP(B) и mp(A) < mp(B), то вычисляются сложные пропорции.

3. Если MP(A) = MP(B) и mp(A) < mp(B), то $F_6(A, B) = 1$.

Если MP(A) = MP(B) и mp(A) = mp(B), то $F_6(A, B) = 0{,}5$.

Если MP(A) = MP(B) и mp(A) > mp(B), то $F_6(A, B) = 0$.

Вычисление сложных пропорций

$$\mathrm{CMP}(A) = \mathrm{MP}(A)/(\mathrm{MP}(A) + \mathrm{mp}(A)),$$
$$\mathrm{cmp}(A) = \mathrm{mp}(A)/(\mathrm{mp}(A) + \mathrm{MP}(A)).$$

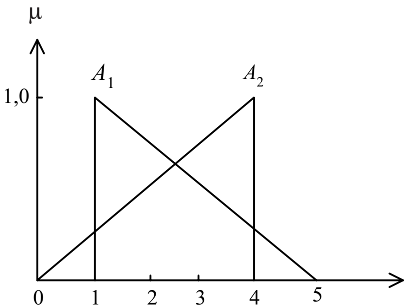
4. Если CMP(A) > CMP(B) и cmp(A) < cmp(B), то $F_6(A, B) = 1$.

5. Если CMP(A) < CMP(B) и cmp(A) > cmp(B), то $F_6(A, B) = 0$.

6. Если (CMP(A) = CMP(B) и cmp(A) = cmp(B)) и MP(A) + mp(A) > > MP(B) + mp(B), то $F_6(A, B) = 1$.

7. Если (CMP(A) = CMP(B) и cmp(A) = cmp(B)) и MP(A) + mp(A) < < MP(B) + mp(B), то $F_6(A, B) = 0$.

8. Если (CMP(A) = CMP(B) и cmp(A) = cmp(B)) и MP(A) + mp(A) = = MP(B) + mp(B), то $F_6(A, B) = 0{,}5$.



9. Если $F6(A, B) = 1$, то $A > B$.

10. Если $F6(A, B) = 0$, то $A < B$.

11. Если $F6(A, B) = 0{,}5$, то $A = B$.

Некоторые примеры расчета индексов ранжирования нечетких чисел приведены в табл. 1.1.

Покажем расчет индексов ранжирования F_3, F_4, F_6 для нечетких чисел $A_1 = (1, 0, 4)$ и $A_2 = (4, 4, 0)$.

1. Расчет индекса F_3:

$$F_3(A_1, A_2) = \frac{1}{C}\int_1^5\int_0^x \mu_{A_2}(y)dy\ \ \mu_{A_1}(x)dx = \frac{1}{C}\Big(\int_1^4\left(\frac{1}{8} + \int_1^x \frac{y}{4}dy\right)\left(-\frac{x}{4} + \frac{5}{4}\right)dx +$$
$$+\int_4^5 2\left(-\frac{x}{4} + \frac{5}{4}\right)dx\Big) = \frac{1}{C}\left(\frac{495}{384} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{591}{384} = 0{,}385;$$

$$F_3(A_2,A_1)=\frac{1}{C}\int_1^4\int_0^x \mu_{A1}(y)dy\ \mu_{A2}(x)dx=\frac{1}{C}\int_1^4\int_1^x(-\frac{y}{4}+\frac{5}{4})dy\frac{x}{4}\ dx=$$

$$=\frac{1}{C}\frac{1}{16}\int_1^4(-\frac{x^3}{2}+5x^2-\frac{9x}{2})dx=\frac{1}{4}\times\frac{945}{384}=0,615.$$

Таблица 1.1

Исходные данные	Индексы ранжирования				
	F^1, F_5^1	F_2	F_3	F_4	F_6
A_1 = (2, 1, 1)	1	0	0,5	0,5	0,5
A_2 = (2, 2, 2)	1	0	0,5	0,5	0,5
A_1 = (2, 1, 2)	1	0,25	0,618	0,658	1
A_2 = (2, 2, 2)	1	–0,25	0,382	0,581	0
A_1 = (2, 2, 3)	0,833	–0,5	0,404	0,534	0
A_2 = (3, 3, 2)	1	0,5	0,83	0,669	1
A_1 = (1, 0, 4)	0,625	–1	0,385	0,352	0
A_2 = (4, 4, 0)	1	1	0,615	0,725	1

2. Расчет индекса F_4:

$$A_1=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[1,5-4\alpha],A_2=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[4\alpha,\ \ 4],A_1+A_2=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[1+4\alpha,\ 9-4\alpha],$$

$$D_1=\frac{A_1}{A_1+A_2}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left[\frac{1}{9-4\alpha},\ \frac{5-4\alpha}{1+4\alpha}\right],D_2=\frac{A_2}{A_1+A_2}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left[\frac{4\alpha}{9-4\alpha},\frac{4}{1+4\alpha}\right]$$

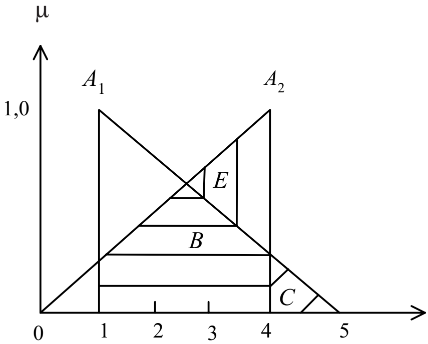
$$F_4(A_1,A_2)=\int_0^{0,5}\max\{0,(1-\mu_{D1}(x))\}dx+\int_{0,5}^1\mu_{D1}(x)dx=\frac{1}{9}+\int_{\frac{1}{9}}^{0,5}\frac{1-5x}{4x}dx+$$

$$+\int_{0,5}^1\frac{4-x}{5+4x}dx=0,352.$$

$$F_4(A_2,A_1)=\int_0^{0.5}\max\{0,(1-\mu_{D2}(x))\}\,dx+\int_{0.5}^1\mu_{D2}(x)dx=\int_0^{0.5}\frac{4-5x}{4+4x}dx+$$

$$+\int_{0,5}^{0,8}\frac{9x}{4+4x}\quad dx+\int_{0,8}^1\frac{4-x}{4x}\quad dx=0,725.$$

3. Расчет индекса F_6:



Обозначим площади выделенных фигур соответственно через B, C, E (см. слева).

Произведем расчет простых пропорций и сравним их согласно алгоритму:

$$\mathrm{MP}(A_1) = \frac{B+C}{B+C+E},$$

$$\mathrm{MP}(A_2) = \frac{B+E}{B+C+E},$$

$$\mathrm{mp}(A_1) = \frac{B+E}{B+C+E}, \quad \mathrm{mp}(A_2) = \frac{B+C}{B+C+E}.$$

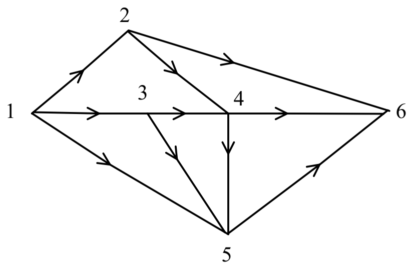
Так как $\mathrm{MP}(A_2) > \mathrm{MP}(A_1)$ и $\mathrm{mp}(A_1) > \mathrm{mp}(A_2)$, то $F_6(A_1, A_2) = 0$ и $F_6(A_2, A_1) = 1$.

Следовательно, число $A_2 > A_1$.

Таким образом, значение индекса ранжирования для конкретной пары нечетких чисел дает основание решить вопрос, какое из двух чисел больше и с какой степенью.

1.6. Иллюстративные примеры

1.6.1. Задача сетевого планирования с нечетко заданными длительностями операций



Процесс подготовки средств управления к работе показан слева.

Продолжительность операций A_{ij} ($i,j = 1, \ldots, 6$) точно не известны и представлены нечеткими интервалами (L-R)-типа. Исходные данные для примера приведены в табл. 1.2.

Пусть известен самый ранний срок начала проведения комплекса операций обслуживания $t_0 = (1, 1, 1, 1)_{LR}$. Для нахождения ранних сроков начала отдельных операций t_i ($I = 1, \ldots, 6$) воспользуемся следующей формулой:

$$t_i = \begin{cases} \max\limits_{j \in P_i}\{t_j + A_{ji}\}, \text{если } P_i \neq 0; \\ t_0, \qquad\qquad \text{если } \quad P_i = 0, \end{cases}$$

где P_i – множество работ, предшествующих i-й работе. Тогда ранний срок окончания всего комплекса операций $t_f = \max\{t_i, I = 1, \ldots, 6\}$.

Таблица 1.2

(i, j)	A_{ij}	(i, j)	A_{ij}
(1, 2)	$(3, 3, 1, 3)_{LR}$	(3, 4)	$(2, 4, 0, 1)_{LR}$
(1, 3)	$(2, 3, 0, 1)_{LR}$	(3, 5)	$(4, 5, 2, 3)_{LR}$
(1, 5)	$(3, 4, 1, 1)_{LR}$	(4, 5)	$(3, 3, 1, 2)_{LR}$
(2, 4)	$(1, 2, 0, 0)_{LR}$	(4, 6)	$(3, 4, 0, 2)_{LR}$
(2, 6)	$(8, 11, 1, 4)_{LR}$	(5, 6)	$(1, 1, 0, 1)_{LR}$

Пусть известен самый поздний срок окончания комплекса операций обслуживания $T_f = (20, 21, 1, 0)_{LR}$. Для нахождения поздних сроков начала отдельных операций T_i ($I = 1, \ldots, 6$) воспользуемся следующей формулой:

$$T_i = \begin{cases} \min\limits_{j \in S_i}\{T_j - A_{ij}\}, \text{если } \ S_i \neq 0; \\ T_f, \qquad\qquad \text{если } \ S_i = 0, \end{cases}$$

где S_i – множество работ, следующих за i-й работой.

Для операций max и min используем следующий вариант аппроксимации с использованием формул (см. п.п. 1.3.2):

$$M = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}, N = (n_1, n_2, \gamma, \delta)_{LR}$$

$$\max(M, N) \cong (\max(m_1, n_1), \max(m_2, n_2), \max(m_1, n_1) - \max(m_1 - \alpha, n_1 - \gamma), \\ \max(m_2 + \beta, n_2 + \delta) - \max(m_2, n_2))_{LR},$$

$$\min(M, N) \cong (\min(m_1, n_1), \min(m_2, n_2), \min(m_1, n_1) - \min(m_1 - \alpha, n_1 - \gamma), \\ \min(m_2 + \beta, n_2 + \delta) - \min(m_2, n_2))_{LR}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.3:

Таблица 1.3

i	Ранний срок начала работ	Поздний срок начала работ
1	(1, 1, 1, 1)	(6, 10, 8, 2)
2	(4, 4, 2, 4)	(9, 13, 5, 1)
3	(3, 4, 1, 2)	(12, 15, 5, 1)
4	(5, 8, 1, 3)	(16, 17, 4, 1)
5	(8, 11, 2, 5)	(19, 20, 2, 0)
6	(12, 15, 3, 8)	(20, 21, 1, 0)

1.6.2. Оценивание денежных средств в бюджете

В рамках составления проекта бюджета предприятия рассматриваются различные источники финансирования, причем некоторые из них характеризуются неточностью оценки денежных сумм и малой надежностью. В примере рассматриваются четыре источника финансирования, обозначаемые буквами A, B, C, D.

Источник A: точен и надежен, ожидаемая сумма поступлений 100 ед.

Источник B: сумма финансирования изменяется от 40 до 100 ед. в зависимости от коньюнктуры, но с наибольшей вероятностью можно ожидать поступления размером от 50 до 70 ед.

Источник C: разумно полагать, что финансирование будет предоставлено и составит сумму 100–110 ед., но решение пока не принято и нельзя полностью исключить вариант отказа от финансирования.

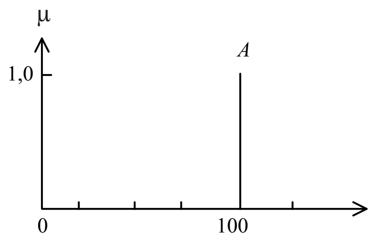
Источник D: очень не надежен потому, что новый и неустойчивый. Можно ожидать поступления от 20 ед. и выше, но в любом случае не более 30 ед.

Финансовые поступления можно представить с помощью нечетких величин. Каждая нечеткая величина рассматривается как объединение трапециевидных и не обязательно нормальных нечетких чисел:

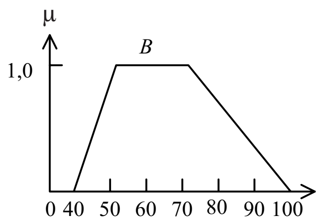
$$M_i = (m_{iq}, m_{i2}, \alpha_i, \beta_i, h_i),$$

где m_{1i}, m_{2i} – соответственно нижнее и верхнее модальные значения нечеткого числа M_i; α_i, β_i – левый и правый коэффициенты нечеткости; h_i – высота нечеткого числа.

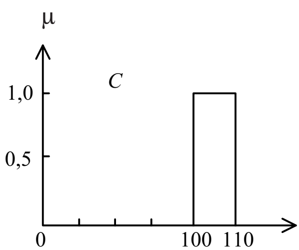
Используя результаты, полученные в подразд. 1.2–1.3, заметим, что сумма двух трапециевидных чисел $M_i + M_j$ также будет трапециевидным числом (m_1, m_2, α, β, h), где $h = \min\{h_i, h_j\}$ (эффект среза); $\alpha = h(\alpha_i/h_i + \alpha_j/h_j)$; $\beta = h(\beta_i/h_i + \beta_j/h_j)$; $m_1 = m_{iq} + m_{j1} - \alpha_i - \alpha_j + \alpha$; $m_2 = m_{i2} + m_{j2} + \beta_i + \beta\beta_j - \beta$.



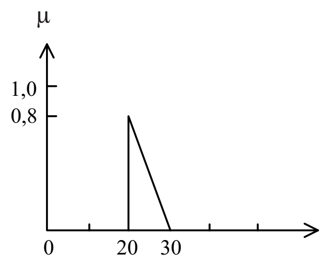
$A = (100,100,0,0,1)$



$B = (50,70,10,30,1)$

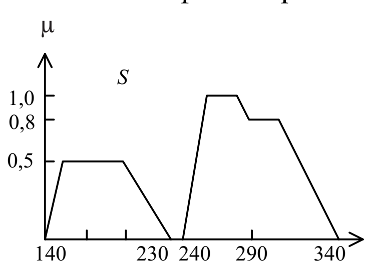


$C = (100,110,0,0,1)$ И $(0,0,0,0,0,5)$



$D = (20,20,0,10,0,8)$ И $(0,0,0,0,1)$

В результате суммирования указанных источников финансирования получаем $S = A + B + C + D = (250, 280, 10,30,1) \cup (145, 185, 5, 15, 0,5) \cup (165, 209, 5, 21, 0,5) \cup (268, 306, 8, 34, 0.8)$.



Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: область наиболее вероятного финансирования простирается в диапазоне 250–280 ед., превышение суммы 280 ед. возможно, но менее вероятно (0.8); маловероятно и то, что поступления не составят более 150–200 ед. (0.5). В любом случае они не могут опуститься ниже 140 ед. и подняться выше 340 ед.

1.6.3. Стабилизация перевернутого маятника

Контроллеры нечеткой логики – наиболее важное приложение теории нечетких множеств. Их функционирование немного отличается от работы обычных контроллеров тем, что для описания системы используются знания экспертов вместо дифференциальных уравнений. Эти знания могут быть выражены естественным образом с помощью лингвистических переменных, которые описываются нечеткими множествами.

Ярким примером применения нечетких контроллеров является эксперимент по стабилизации перевернутого маятника. Проблема состоит в балансировке вертикальной мачты, подвижно закрепленной нижним концом на тележке, которая может двигаться только в двух направлениях – влево или вправо (см. рис. 1.11).

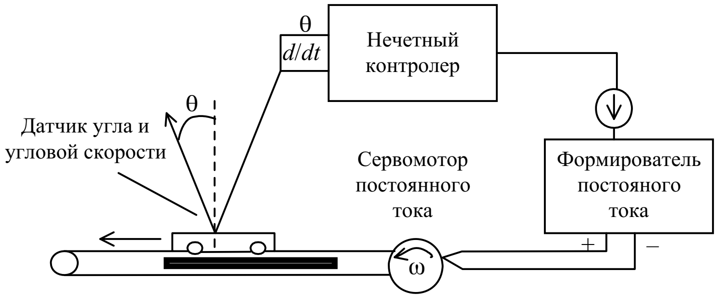


Рис. 1.11. Схема стабилизации перевернутого маятника

Существуют две модели для определения необходимого движения платформы: математическая и лингвистическая. Математическая модель содержит нелинейные члены в дифференциальных уравнениях, которые линеаризуются и упрощаются в предположении очень малых углов отклонения маятника. Это, однако, увеличивает время расчета дифференциальных уравнений, описывающих кинематику маятника. Очень трудно стабилизировать короткий и легкий маятник (5 мм в диаметре, 15 см длины и вес 3,5 г). Кроме того, если размер и вес маятника изменяются, то параметры уравнений должны быть изменены. Для практической реализации в реальном масштабе времени такой путь по существу не приемлем.

С другой стороны, человек, даже не обладая ни физическими, ни математическими знаниями о динамике перевернутого маятника, обретает умение его стабилизации методом проб и ошибок. Это умение может быть описано лингвистическими правилами, содержащими нечеткость. Например: «Если угол положительный низкий (ПН) и угловая скорость приблизительно нуль (0), то скорость движения платформы должна быть положительная низкая (ПН)».

Правила управления сведены в табл. 1.4:

Таблица 1.4

Скорость	Угол				
	ОВ	ОН	О	ПН	ПВ
ОВ	–	–	ОВ	–	–
ОН	–	–	ОН	О	–
О	ОВ	ОН	О	ПН	ПВ
ПН	–	О	ПН	–	–
ПВ	–	–	ПВ	–	–

где ОВ – отрицательное высокое (большое) значение, ОН – отрицательное низкое (малое) значение, 0 – нуль и т. д.

Во-первых, мы должны определить (субъективно), что такое высокая скорость, низкая скорость и т. п. для платформы. Это делается описанием функции принадлежности для нечетких множеств (см. рис. 1.12).

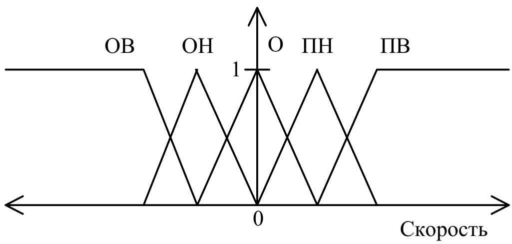


Рис. 1.12. Скорость платформы

То же самое делается для угла между платформой и мачтой маятника и для угловой скорости изменения этого угла (см. рис. 1.13).

Пусть заданы реальные значения угла и угловой скорости (рис. 1.13–1.14.

Применим правило: «Если угол равен нулю и угловая скорость равна нулю, тогда скорость равна нулю» к реальным значениям переменных.

Реальное значение угла принадлежит нечеткому множеству «нуль» со степенью 0,75.

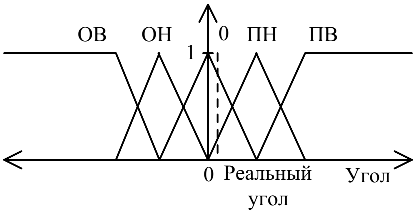


Рис. 1.13. Угол отклонения мачты маятника

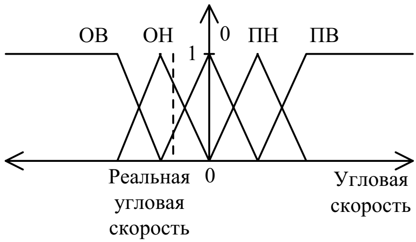
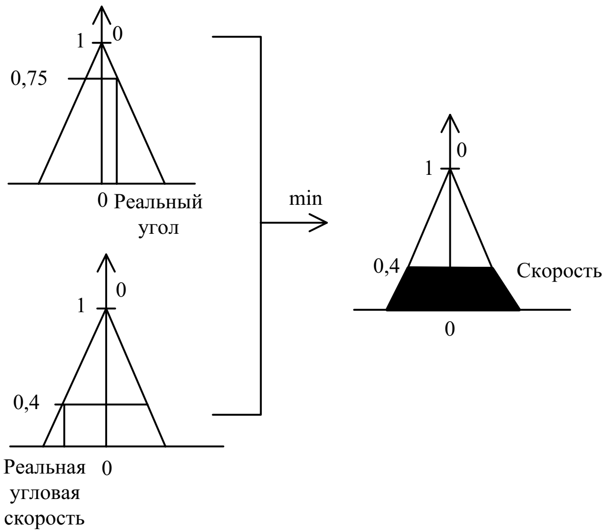


Рис. 1.14. Угловая скорость мачты

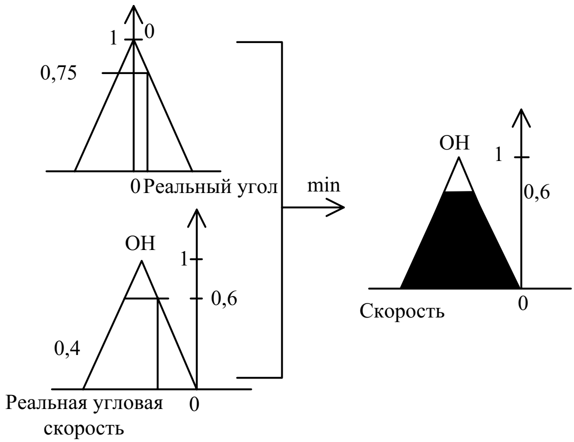
Реальное значение угловой скорости принадлежит нечеткому множеству «нуль» со степенью 0,4:



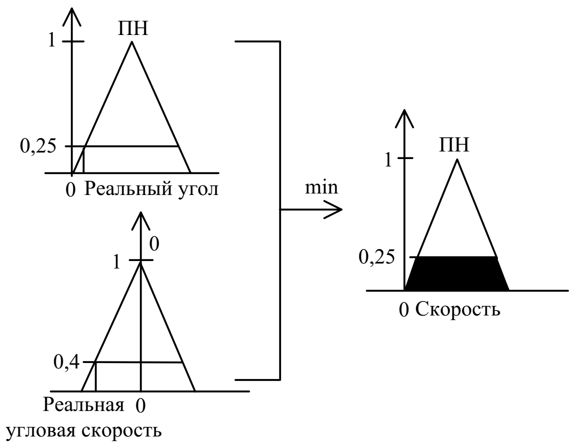
Так как две части условий правила объединяются по И, то вычисляем min {0,75; 0.4} = 0,4 и уменьшаем нечеткое множество «нуль» для переменной «скорость» до этого уровня (в соответствии с рассматриваемым правилом).

Только четыре правила приводят к результату. Объединим их в одно решение.

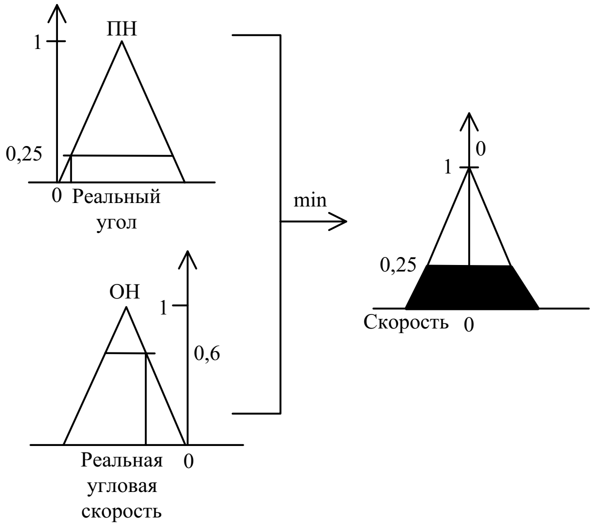
Таким образом, результатом правила: «Если угол равен нулю и угловая скорость отрицательная низкая, тогда скорость отрицательная низкая» является:



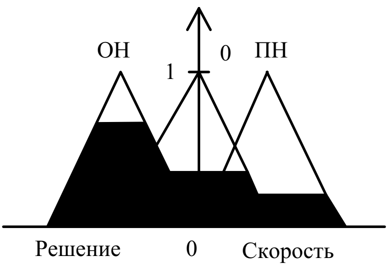
Результатом правила: «Если угол положительный малый и угловая скорость равна нулю, тогда скорость – положительная низкая» является:



Результатом правила: «Если угол положительный малый и угловая скорость отрицательная низкая, тогда скорость равна нулю» является:



Объединение этих четырех результатов дает общее решение:



Таким образом, решением контроллера нечеткой логики является нечеткое множество (для скорости). Далее необходимо выбрать одно значение для представления конечного выходного значения. Существует несколько эвристических методов (*методов дефаззификации*), один из которых, например, предполагает выбирать в качестве конечного значения центр тяжести нечеткого множества.

Отметим следующие особенности нечеткого контроллера:

1. Одни и те же правила пригодны для стабилизации двух маятников: первый – диаметр 5 мм, длина 15 см, вес 3,5 г и второй – диаметр 10 мм, длина 50 см, вес 50 г.

2. Контроллер работает (правда, менее устойчиво), даже если одно из правил управления игнорируется, что очень важно с точки зрения надежности системы.

3. Нечеткий контроллер успешно работает при небольших программных ошибках (например, замене ПН на ПВ).

1.6.4. Области применения нечеткого управления

В общих словах определим области применения нечеткого управления.

Использование нечеткого управления рекомендуется для очень сложных процессов, когда не существует простой математической модели для нелинейных процессов высоких порядков, если должна производиться обработка (лингвистически сформулированных) экспертных знаний.

Использование нечеткого управления не рекомендуется, если приемлемый результат может быть получен с помощью общей теории управления, уже существует формализованная и адекватная математическая модель.

В заключение приведем примеры использования реального нечеткого управления:

– использование Агентство космических исследований (NASA) нечеткой логики в маневрах стыковки;

– автоматическое управление воротами плотины на гидроэлектростанциях;

– наведение телекамер при трансляции спортивных событий;

– эффективное и стабильное управление автомобильными двигателями;

– управление экономичной скоростью автомобилей;

– системы прогнозирования землетрясений;

– диагностика рака в медицине;

– распознавание рукописных символов в карманных компьютерах (записных книжках);

– распознавание движения изображения в видеокамерах;

– автоматическое управление двигателем пылесосов с автоматическим определением типа поверхности и степени засоренности;

– однокнопочное управление стиральными машинами;

– вспомогательные средства полета вертолетов;

– управление скоростью линий и температурой при производстве стали;

– управление метрополитенами для повышения удобства вождения, точности остановки и экономии энергии;

– оптимизация потребления бензина в автомобилях;

– повышение чувствительности и эффективности управления лифтами;

– повышение безопасности функционирования ядерных реакторов.

2. НЕЧЕТКИЕ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ В МОДЕЛЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

2.1. Классификация мер неопределенности

В современных условиях учет факторов неопределенности и неполноты информации является неотъемлемой принадлежностью сложных технических систем. Причем традиционный путь учета факторов неопределенности на основе вероятностного и статистического моделирования зачастую оказывается неадекватным решаемым задачам и привести к неверным результатам.

Указанные ситуации на практике характеризуются:

– неполнотой или отсутствием знаний о поведении отдельных входящих в систему элементов и подсистем, а также взаимосвязей между ними;

– ограниченной возможностью экспериментального исследования процессов управления техническими средствами, а также необоснованно высокой стоимостью экспериментов, не позволяющей получить достаточную статистическую информацию о наиболее важных характеристиках системы;

– многоцелевым, многокритериальным, многофункциональным характером задач управления технических средств в сложных иерархических структурах;

– качественными оценками условий функционирования сложных технических систем;

– во многих случаях человек (эксперт, группа экспертов) представляет собой единственный источник сведений о разрабатываемых блоках, подсистемах управления и системы в целом.

Во всех перечисленных случаях возникает необходимость поиска иных, отличающихся от традиционных, путей решения проблемы неопределенности. При этом необходимо отметить, что указанные причины отражают объективно недостаточную информированность лица, принимающего решение (ЛПР), о возможных количественных значениях факторов, а сам процесс управления техническими средствами базируется на некоторых субъективных суждениях ЛПР, отражающих его собственный опыт как эксперта.

Существуют различные интерпретации понятия вероятности. Это – классическая частотная интерпретация Лапласа, субъективная вероятность по Байесу, субъективная вероятность по Де Финетти, Сэвиджу. Наиболее содержательной с математической точки зрения является аксиоматическая трактовка вероятности А. Н. Колмогорова с позиций теории меры.

Как известно, мерой называется *функция множества* m: $P(X) \to R^{+}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1) $\forall A \subseteq X \Rightarrow m(A) \geq 0$, $m(\varnothing) = 0$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$;

3) если $A, B \in P(X)$ и $A \cap B = \varnothing$, то $m(A \cup B) = m(A\} + m(B)$.

Здесь P (X) – множество всех подмножеств X (σ-алгебра), а $R^{+} = [0, \infty]$ – множество положительных действительных чисел.

При $R^{+} = [0, 1]$ эти аксиомы определяют вероятностную меру.

Под субъективной вероятностью понимается степень уверенности в данном событии, возникающая у человека на основе известных ему данных. Эта степень уверенности всегда зависит от индивидуального опыта и поэтому различна для разных людей.

Субъективную вероятность можно рассматривать как индивидуальный способ обработки тех аспектов субъективных данных, которые доступны индивидуальному суждению. Однако чаще всего такие суждения неаддитивны. В отличие от субъективной вероятности, нечеткая мера свободна от весьма ограничительного требования аддитивности, что делает ее особенно привлекательной для решения ряда задач при наличии неопределенности типа нечеткости.

В последнее время возрастает потребность в новых подходах к математическому описанию информации, характеризующейся высоким уровнем неопределенности. Один из возможных подходов может основываться на обобщении понятия меры и определения понятия нечеткой меры и интеграла.

Пусть X – произвольное множество, а β – поле борелевских множеств (δ-алгебра) на X. Дадим определение понятия нечеткой меры.

Определение. Функция $g(\cdot)$, определяемая в виде g: $\beta \to [0, 1]$, называется *нечеткой мерой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall A \subseteq X \Rightarrow g(A) \geq 0, g(\varnothing) = 0; g(X) = 1;$

2) если $A, B \in \beta$ и $A \subseteq B$, то $g(A) \leq g(B)$ (монотонность);

3) если $F_i \in \beta$ и $\{F_i, i = 1, 2, \ldots\}$ является монотонной последовательностью $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_i \supseteq \ldots$, то $\lim\limits_{i\to\infty} g(F_i) = g(\lim\limits_{i\to\infty} F_i)$ (непрерывность).

Тройка (X, β, g) называется *пространством с нечеткой мерой*. Для нечеткой меры в общем случае не должно выполняться условие аддитивности: $g(A \cup B) \neq g(A) + g(B)$.

Для описания различных видов неопределенности в теории нечетких мер используется общее понятие «степень нечеткости». В общем случае это понятие включает в себя «степень важности», «степень уверенности» и как отдельный случай – «степень принадлежности» в теории нечетких множеств. Нечеткая мера, таким образом, может интерпретироваться различными способами в зависимости от конкретного применения. Пусть необходимо оценить степень принадлежности некоторого элемента $x \in X$ множеству $E \subset X$.Очевидно, что для пустого множества эта степень принадлежности равна 0, а для $x \in F$ $(F \subset E)$ равна 1, т. е. степень принадлежности для $x \in F$ будет больше, чем для $x \in F$, если $(F \subset E)$. Если степень принадлежности $x_0 \in F$ равна $g(x_0, E)$, а вместо E задано нечеткое подмножество $\mu_A \in F(X)$, то

$$g(x_0, A) = \int\limits_X \mu_A(x) * g(x_0, \bullet) = \mu_A(x_0).$$

Это говорит о том, что степень нечеткости суждения «$x_0 \in A$» равна степени принадлежности x_0 нечеткому подмножеству μ_A.

Таким образом, понятие степени нечеткости в теории нечетких мер включает в себя понятие степени принадлежности теории нечетких множеств.

Рассмотрим несколько примеров мер неопределенности.

2.1.1. Нечеткие меры Сугено

Наиболее конструктивными нечеткими мерами являются меры Сугено [3], построенные по следующему λ-правилу (λ-нечеткие меры).

Пусть $A, B \in \beta$, $A \cap B = \varnothing$. Тогда

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B). \tag{2.1}$$

В случае $A \cup B = X$ будем называть выражение (2.1) условием нормировки для g_λ-мер. Очевидно, что $g_\lambda(X) = 1$; $g_\lambda(\varnothing) = 0$. Параметр

$g_{\in}(X)-1,\ +\infty)$ называется *параметром нормировки* g_λ-меры. При $\lambda > 0$, $g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ имеем класс супераддитивных мер, а при $-1 < \lambda < 0$, $g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ получаем класс субаддитивных мер.

Легко убедиться, что если $\bar{A} = X \setminus A,\ A \in \beta$, то из (2.1) следует

$$g_\lambda(\bar{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + g_\lambda(A)\lambda}. \tag{2.2}$$

В общем случае, когда A и B – произвольные подмножества множества X, т. е. A, $B \in \beta$, $A \cap B \neq \varnothing$ выражение (2.2) приобретает вид

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda\, g_\lambda(A)\, g_\lambda(B)}{1 + \lambda\, g_\lambda(A \cap B)}. \tag{2.3}$$

2.1.2. Супераддитивные меры

Меры *Дирака*. Класс мер Дирака определяется соотношением

$$\forall A \in \beta \quad m(A) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_0 \in A, \\ 0 & \text{– в противном случае}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где x_0 – заданный элемент в X.

Функция *доверия* (belief function) [3] – мера, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow 0 \le b(A) \le 1$, $b(\varnothing) = 0$; $b(X) = 1$,

2) $$\forall A_1, \ldots, A_n \in \beta \ \ b(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} b(A_i) - \sum_{i<j} b(A_i \cap A_j) + \\ + \ldots + (-1)^{n+1} b(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \tag{2.5}$$

В случае, когда $\operatorname{card}(\beta) = 2$, получаем:

$\forall A, B \in \beta$, $b(A \cup B) \ge b(A) + b(B) - b(A \cap B)$ (свойство супераддитивности).

Другое определение меры доверия. Пусть m: $\beta \to [0, 1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $m(\varnothing) = 0$;

2) $$\sum_{A \in \beta} m(A) = 1. \tag{2.6}$$

Тогда $\forall A \in \beta \quad b(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$ является функцией доверия.

Согласованная функция доверия (consonant belief function) [3] – мера, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow 0 \le b(A) \le 1$, $b(\varnothing) = 0$; $b(X) = 1$,

2) $\forall A \in \beta \quad b(A \cap B) = \min\{b(A), b(B)\}$. (2.7)

2.1.3. Субаддитивные меры

Мера *правдоподобия* – определяется следующим образом [3]:

$$P(A) = 1 - b(\bar{A}), \quad \forall A \in \beta,$$

где b – функция доверия.

Мера правдоподобия удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\forall A \in \beta \; 0 \le P(A) \le 1$, $P(\varnothing) = 0$; $P(X) = 1$,

2) $$\forall A_1, \ldots, A_n \in \beta \quad P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cup A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n). \quad (2.8)$$

Другой способ определения меры правдоподобия . Пусть m – мера, удовлетворяющая свойствам (2.6), тогда $\forall A \in \beta \quad P(A) = \sum_{B \cap A \neq \text{O}} m(B)$.

Мера *возможности*. Мерой возможности [3] называется функция $\Pi{:}\beta \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall A \in \beta \; 0 \le \Pi(A) \le 1$, $\Pi(\varnothing) = 0$; $\Pi(X) = 1$,

2) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \beta \quad P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sup_{i=1,\ldots,n} \Pi(A_i)$. (2.9)

Соотношение между рассмотренными нечеткими мерами иллюстрируются с использованием кругов Эйлера на рис. 2.1.

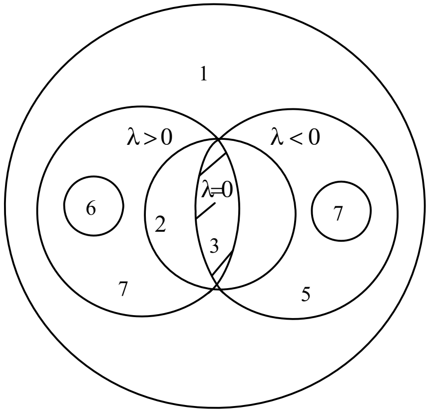


Рис. 2.1: ***1*** **– нечеткие меры (исключая меру Дирака);** ***2*** **–** g_λ **– меры,** $\lambda \in (-1; +\infty)$**;** ***3*** **– вероятностная мера (** $\lambda = 0$**);** ***4*** **– функции доверия;** ***5*** **– меры правдоподобия;** ***6*** **– согласованные функции доверия (мера необходимости);** ***7*** **– мера возможности**

2.2. Параметрические нечеткие меры

Рассмотрим два класса параметрических нечетких мер: λ-нечеткие меры Сугено и ν-нечеткие меры Цукамото. Указанные нечеткие меры имеют важное практическое приложение при решении задач моделирования нечетких систем.

2.2.1. Понятие λ-нечеткой меры Сугено

Сугено (Суджено, *Sugen*o) ввел теорию нечетких интегралов и понятие нечеткой меры. Кроме того, он предложил λ-нечеткую меру как частный случай нечеткой меры и сообщил о некоторых вариантах ее применения.

По сравнению с другими нечеткими мерами λ-нечеткая мера допускает более естественную интерпретацию. Сугено определил функцию *F*-распределения λ-нечеткой меры для бесконечного случая и ее функцию *F*-плотности для конечного случая. Поскольку функция плотности распределения играет важную роль в теории вероятностей и статистики, то может оказаться очень полезной попытка определить по аналогии и функцию λ-плотности.

Рассмотрим случай, когда $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – конечное множество. Нечеткая мера g_λ, удовлетворяющая λ-правилу (2.1) с параметром нормировки $-1 < \lambda < \infty$ алгебры всех подмножеств $(X, 2^X)$, строится следующим образом.

Пусть $0 \le g^i \le 1$, $1 \le i \le n$, где $g^i \equiv g(\{x_i\})$. При условии, что величины $g^i (i = 1, ..., n)$ заданы, для любого подмножества $X' \subset X$ можно получить удовлетворяющую λ-правилу меру $g_\lambda(X') = \frac{1}{\lambda}\{ \prod_{x_i \in X'} (1+\lambda g^i) - 1 \}$. (2.10)

Поэтому величины g^i будут называться *нечеткой плотностью* λ-нечеткой меры Сугено. Параметр нормировки λ находится из следующего соотношения:

$$\frac{1}{\lambda}\{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g^i) - 1\} = 1, \quad -1 < \lambda < \infty. \tag{2.11}$$

З а м е ч а н и я:

1. Поясним, что $-1 < \lambda < \infty$.

Так как $1 = g_\lambda(X) = g_\lambda\left(\overline{A} \cup A\right) = g_\lambda\left(\overline{A}\right) + g_\lambda\left(A\right) + \lambda g_\lambda\left(\overline{A}\right) g_\lambda\left(A\right)$, то

$g_\lambda\left(\overline{A}\right) = \dfrac{1 - g_\lambda\left(A\right)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda\left(A\right)} \ge 0.$ Очевидно, что, $\forall A \in \beta \quad 1 + \lambda \cdot g_\lambda\left(A\right) > 0$, следовательно, $\lambda > \sup\limits_{A \in \beta} \dfrac{-1}{g_\lambda(A)} = -1$.

2. Правильность выражения (2.10) доказывается методом индукции.

Если $X = \{x_1, x_2\}$, то $g_\lambda\left(\{x_1, x_2\}\right) = g^1 + g^2 + \lambda g^1 g^2 = \frac{1}{\lambda}\{(1+\lambda g^1)$ $(1+\lambda g^2) - 1$.

Пусть выражение (2.10) верно для $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Докажем, что оно выполняется для $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$.

$$g_\lambda\left(\{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}\right) = g_\lambda\left(\{x_1, x_2, ..., x_k\}\right) + g^{k+1} + \lambda g_\lambda\left(\{x_1, x_2, ..., x_k\}\right) g^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(1 + \lambda g_\lambda\left(\{x_1, x_2, ..., x_k\}\right))(1 + \lambda g^{k+1}) - 1\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(1 + \prod_{i=1}^{k}(1+\lambda g^i) - 1)(1 + \lambda g^{k+1}) - 1\right\} = \frac{1}{\lambda}\{\prod_{i=1}^{k+1}(1+\lambda g^i) - 1\}.$$

Уравнение (2.11) при известных g^i является полиномом n–1-го порядка от λ.

Для нахождения корня рассматриваемого уравнения воспользуемся ниже приведенной теоремой.

ТЕОРЕМА

Уравнение (2.11) при условии, что $0 < g < 1$, $n > 1$, в интервале $\lambda \in (-1, \infty)$ имеет ровно одно решение.

Доказательство. Для доказательства указанного утверждения необходимо показать, что функция

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g^{i}) - 1\right] - 1$$

при приведенных в теореме условиях обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{\lambda\to -1} f(\lambda) < 0$;

2) $\lim\limits_{\lambda\to \infty} f(\lambda) > 0$;

3) $f'(\lambda) > 0$, т. е. функция строго возрастающая.

Покажем это:

1) $\lim\limits_{\lambda\to -1} f(\lambda) = -\prod\limits_{i=1}^{n}(1-g^{i}) < 0;$

2) $\lim\limits_{\lambda\to \infty} f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to \infty}(g^{1}\prod\limits_{i=2}^{n}(1+\lambda g^{i}) - 1) = \infty > 0.$

Докажем свойство 3.

1-й случай: $1 > 0$.

$$f(\lambda) = [(g^{1}(1+\lambda g^{2})\ldots(1+\lambda g^{n}) + (1+\lambda g^{1})g^{2}(1+\lambda g^{3})\ldots(1+\lambda g^{n}) +$$
$$+ (1+\lambda g^{1})(1+\lambda g^{2})\ldots(1+\lambda g^{n-1})g^{n} - 1)\lambda - (1+\lambda g^{1})\ldots(1+\lambda g^{n}) + 1 + \lambda]/\lambda^{2} =$$
$$= [\lambda g^{1}(1+\lambda g^{2})\ldots(1+\lambda g^{n}) + (1+\lambda g^{1})\lambda g^{2}(1+\lambda g^{3})\ldots(1+\lambda g^{n}) +$$
$$+ (1+\lambda g^{1})\ldots(1+\lambda g^{n-1})\lambda g^{n} - (1+\lambda g^{1})\ldots(1+\lambda g^{n}) + 1]/\lambda^{2} = [\Delta_1 +$$
$$+ \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n\text{-}1} + \Delta_n]/\lambda^{2} > 0\ ,$$

где

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \lambda g^{i}(1+\lambda g^{i+1})\ldots(1+\lambda g^{n})[(1+\lambda g^{1})(1+\lambda g^{2})\ldots(1+\lambda g^{i-1}) - 1] > 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

2-й случай*:* $1 < 0$.

Проведем доказательство методом индукции.

Пусть $n = 2$.

$$f(\lambda)|_{n=2} = [\lambda g^1(1+\lambda g^2) + (1+\lambda g^1)\lambda g^2 - (1+\lambda g^1)(1+\lambda g^2)+1]/\lambda^2 = $$
$$=[(1+\lambda g^1)\lambda g^2 - (1+\lambda g^2) + 1]/\lambda^2 = g^1 g^2 > 0.$$

Пусть утверждение верно для $n = k$, т. е. $f'(\lambda)|_{n=k} = [\lambda g^1(1+\lambda g^2)\ldots$ $\ldots(1+\lambda g^k) + (1+\lambda g^1)\lambda g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^k) + (1+\lambda g^1)\ldots (1+\lambda g^{k-1})\lambda g^k -$ $- (1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^k) + 1]/\lambda^2 > 0$.

Докажем для $n = k+1$ $f'(\lambda)|_{n=k+1} = [\lambda g^1(1+\lambda g^2)\ldots(1+\lambda g^{k+1}) +$ $+ (1+\lambda g^1)\lambda g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^{k+1}) + +(1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^k)\lambda g^{k+1} -$ $-(1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^{k+1})+1]/\lambda^2 = f'(\lambda)|_{n=k} + [\lambda^2 g^1 g^{k+1}(1+\lambda g^2)\ldots(1+\lambda g^k) +$ $+(1+\lambda g^1)\lambda^2 g^2 g^{k+1}(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^k)+ \ldots +(1+\lambda g^1)(1+\lambda g^2)\ldots(1+\lambda g^{k-1})\lambda^2 g^k g^{k+1} -$ $- \lambda g^{k+1}(1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^k)]/\lambda^2 > 0$.

3-й случай: $\lambda = 0$.

$$f'(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} [\lambda g^1(1+lg^2)\ldots(1+\lambda g^n) + (1+\lambda g^1)\lambda g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^n) +$$ $$+ (1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^{n-1})\lambda g^n - (1+\lambda g^1)\ldots(1+\lambda g^n)+1]/\lambda^2 = [(g^1(1+\lambda g^2)\ldots(1+\lambda g^n) +$$ $$+\lambda g^1\lambda g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^n) + \lambda g^1\ldots(1+\lambda g^{n-1})g^n) + (g^1\lambda g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^n) +$$ $$+(1+\lambda g^1)g^2(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^n) + (1+\lambda g^1)\lambda g^2\ldots(1+\lambda g^{n-1})g^n) +\ldots+((1+\lambda g^1)$$ $$(1+\lambda g^2)\ \ldots\ (1+\lambda g^{n-1})g^n) + g^1(1+\lambda g^2)(1+\lambda g^3)\ldots(1+\lambda g^{n-1})\lambda g^n+\ldots +(1+\lambda g^1)\ldots$$ $$\ldots (1+\lambda g^{n-2})g^{n-1}\lambda g^n) - (g^1(1+\lambda g^2)\ldots(1+\lambda g^n) + (1 + \lambda g^1)g^2(1 + \lambda g^3)\ldots(1 +$$ $$+ \lambda g^n) +(1 + \lambda g^1)\ldots(1 + lg^{n-1})g^n]/2\lambda = g^1g^2 + g^1g^3 +\ldots+ g^1g^n + g^2g^3 + g^2g^4 +\ldots +$$ $$+ g^2g^n + g^3g^4 + g^3g^5 + \ldots + g^3g^n +\ldots+ g^{n-1}g^n > 0.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $X = R^1$ – вся вещественная ось.

Пусть b есть σ-алгебра в R^1. Тогда вероятностная мера P есть отображение

$$P : \beta \to (0,1),\ P(A) \equiv \int_A p\,dx,$$

где величина $P(A)$ означает вероятность того, что $W \in A$ (W – случайная переменная, принимающая значение в R^1). Аналогичным образом можно рассмотреть некоторый тип функции плотности для пространства λ-нечеткой меры (R^1, β, g_λ. Пусть h – отображение R^1 в R^+ и

$$\int_R h(x)dx = N_\lambda, \text{ где } N_\lambda \equiv (\ln(1+\lambda))/\lambda, \quad -1<\lambda<\infty. \qquad (2.12)$$

Тогда λ-нечеткая мера g_λ: $\beta \to [0,1]$ задается соотношением

$$g_\lambda(A)=\left(e^{\lambda\int\limits_A h(x)dx}-1\right)/\lambda. \qquad (2.13)$$

Выражение (2.13) можно представить в другой форме [3, 5]:

$$g_\lambda(A)=((1+\lambda)^{\mathrm{p}}-1)/\lambda \qquad (2.14)$$

или

$$g_\lambda(A)=\int\limits_0^{\mathrm{p}N_\lambda}\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}dt, \qquad (2.15)$$

где

$$p\equiv\int\limits_A hdx/\int\limits_R hdx.$$

Рассмотрим функцию F-распределения.

Пусть X совпадает с R^1 и функция $H(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}p(x)dx$

обладает свойствами функции распределения вероятностей:

1) если $x<z$, то $H(x)\le H(z)$; 2) $\lim\limits_{x\to a}H(x)=H(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}H(x)=0$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)=1.$

Следовательно, чтобы сохранить связь между функцией F-плотности и функцией F-распределения, следует F-распределение представлять в виде

$$H_\lambda(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}h(x)dx,$$

а свойство 4 нужно заменить на 4а: $\lim\limits_{x\to\infty}H_\lambda(x)=\ln(1+\lambda)/\lambda.$

Таким образом, λ-нечеткая мера задается формулой

$$\forall(a,b]\subset R g_\lambda((a,b))=1/\lambda\{e^{\lambda(H(b)-H(a))}-1\}.$$

Утверждение 1: λ-нечеткую меру Сугено для случая $X = R$ можно представить в виде как и в случае X конечного множества.

Доказательство. Пусть $E_i \equiv (a_i, b_i]$, $i \equiv 1, ..., n$ и $E_i \equiv (a_n, b_n]$ – попарно непересекающиеся подмножества R и пусть $g_i \equiv g_\lambda(E_i) = 1/\lambda(e^{\lambda\int_{Ei} hdx} - 1)$. Таким образом, получаем $e^{\lambda\int_{E_i} hdx} = 1 + \lambda g_i (i = 1, ..., n)$. Тогда $g_\lambda(\bigcup_i E_i) = 1/\lambda\{e^{\lambda\sum_i \int_{E_i} hdx} - 1\} = 1/\lambda\{\prod_i (1 + \lambda g_i) - 1\}$.

Когда $a_1 = -\infty, b_i = a_{i+1} (i = 1, \ldots, n-1)$ и $b_n = +\infty$, получаем $g\lambda(R) = 1$, что и завершает доказательство.

2.2.2. Понятие ν-нечеткой меры Цукамото

Определение. Нечеткая мера g_ν называется ν-нечеткой мерой Цукамото, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $g_\nu(X) = 1; g_\nu(\varnothing) = 0;$

2) $\forall A, B \in B : A \subseteq B \Rightarrow g_\nu(A) \le g_\nu(B);$

3) если $\forall i \in N : A_i \in B$ и $\forall i \ne j : A_i \cap A_j = 0 \Rightarrow$

$$g_\nu\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = (1-\nu)\sup_{i \in N} g_\nu(A_i) + \nu \sum_{i \in N} g_\nu(A_i), \qquad \nu \ge 0.$$

Приведенная ν-нечеткая мера является расширением известной меры Цукамото, для которой $\nu \in [0,1]$. Нетрудно видеть, что при $\nu = 0$ g_ν-мера является мерой возможности, при $\nu = 1$, g_ν-мера является вероятностной мерой, а при $\nu > 1$, g_ν-мера описывает неопределенность, отличающуюся по своим свойствам от вероятности или возможности.

Условие нормировки для g_ν-меры в случае счетного множества X имеет вид

$$g_\nu(X) = (1-\nu)\max_{i \in N} g_i + \nu \sum_{i \in N} g_i = 1,$$

где

$$g_i = g_\nu(\{x_i\}), \quad x_i \in X.$$

Если $X = R$, то для нечеткой плотности $f_\nu(x)$: $X \to [0,1]$ g_ν-мера имеет вид $g_\nu(X) = (1-\nu)\sup_{i\in N}(f_\nu(x)) + \nu\int_X f_\nu(x)\, dx.$

Утверждение 2:

$$g_\nu(\overline{A}) = \begin{cases} \max(\dfrac{1-g_\nu(A)}{\nu}, 1-\nu g_\nu(A)), \nu > 1, \\ \min(\dfrac{1-g_\nu(A)}{\nu}, 1-\nu g_\nu(A)), \nu \in [0,1]. \end{cases}$$

Доказательство. Используя следующее свойство: $\forall a, b \in R : \max\{a, b\} = = |a+b|/2 + |a-b|/2$ и условие нормировки g_ν-меры, получаем

$$1 = g_\nu(X) = (1-\nu)(\left|g_\nu(\overline{A}) - g_\nu(A)\right|/2 +$$
$$+\left|g_\nu(\overline{A}) + g_\nu(A)\right|/2) + \nu(g_\nu(\overline{A}) + g_\nu(A)).$$

Тогда, если $g_\nu(\overline{A}) \le g_\nu(A)$, то $g_\nu(\overline{A}) = (1 - g_\nu(A)/\nu$, а при $g_\nu\left(\overline{A}\right) > > g_\nu(A) / \overline{g}_\nu(A) = 1 - \nu g_\nu(A)$.

Доказательство окончено.

Отказ от обязательного для вероятностной меры условия аддитивности создает определенную свободу с частными мерами, что для ряда задач прикладного характера может быть весьма успешно использовано.

Изложенное показывает, что с формальной точки зрения λ-нечеткая мера и ν-нечеткая мера являются столь же обоснованными, как и частный случай ($\lambda = 0$, $\nu = 1$) – вероятностная мера.

Введение λ-нечеткой меры и ν-нечеткой меры полезно по следующим причинам:

1. С их помощью можно поставить на фундамент теории меры проблематику широкого круга прикладных задач оценивания и выбора в условия неопределенности, имеющих невероятностный характер.

2. Позволяют подойти к решению задач принятия решений, связанных с использованием оценок событий, выдаваемых человеком, мышление и возможности по учету различных факторов которого обычно не удовлетворяют требованию аддитивности.

3. Особое место занимают задачи по оценке явлений единичного, случайного характера, для которых частотная вероятностная концепция неприемлема.

2.3. Нечеткий интеграл

Введение данного понятия связано со стремлением к разработке в нечеткой математике аналогов, используемых в статистике и теории вероятностей понятий среднего и математического ожидания. Поскольку указанные понятия базируются на свойстве аддитивности вероятностной меры, а нечеткие меры более широкий класс мер, разработка указанных аналогов привела к построению принципиально новой математической конструкции.

Определение. Нечеткий интеграл от функции h: $X \to [0, 1]$ на множестве $A \subseteq X$ по нечеткой мере g определяется как

$$\int_A h(x) \circ g = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge g(A \cap H_\alpha))$$

где $H_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$. Нечеткий интеграл принято также называть нечетким ожиданием или *FEV* (*fuzzy expected value*).

Определение. Нечеткий интеграл от функции h: $X \to [0, 1]$ на нечетком множестве $A = \{x, \mu_A(x)\}$ по нечеткой мере g определяется как

$$\int_A h(x) \circ g = \int_A (\mu_A(x) \wedge h(x)) \circ g. \qquad (2.16)$$

Отметим основные свойства нечетких интегралов.

Пусть $a \in [0,1]$, $(E, F \subseteq X)$ и h: $X \to [0,1]$.

1. $\int_E (a \vee h) \circ g = a \vee \int_E h \circ g$.

2. $\int_E (a \wedge h) \circ g = a \wedge \int_E h \circ g$.

3. $\int_E (h_1 \vee h_2) \circ g \geq \int_E h_1 \circ g \vee \int_E h_2 \circ g$.

4. $\int_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \leq \int_E h_1 \circ g \wedge \int_E h_2 \circ g$.

5. $\int\limits_{E \cup F} h \circ g \geq \int\limits_{E} h \circ g \vee \int\limits_{F} h \circ g \cdot$

6. $\int\limits_{E \cap F} h \circ g \geq \int\limits_{E} h \circ g \wedge \int\limits_{F} h \circ g \quad .$

Можно показать, что понятие нечеткого интеграла сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества X на непересекающиеся подмножества (рис. 2.2) .

$$E_i : X = \bigcup_{i=1} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j, i = 1 \ldots n.$$

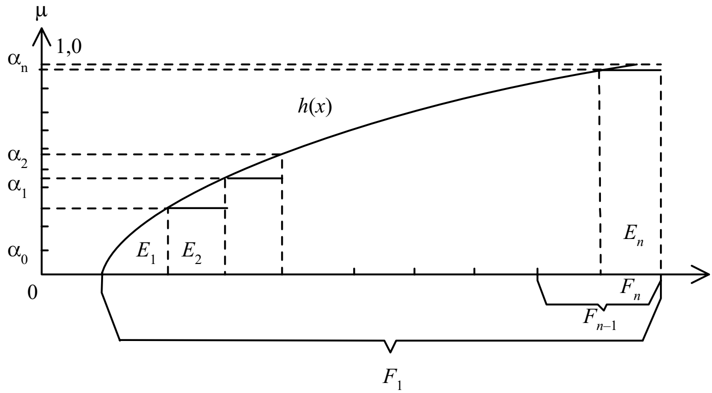


Рис. 2.2. Построение ступенчатой функции

Пусть $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{E_i}(x)$ ступенчатая возрастающая функция (h: $X \to [0,1]$), где $\alpha_i \in [0,1], E_i \subset X, f_{E_i}$ – характеристическая функция обычного множества E_i, т. е. $f_{E_i}(x) = 1$, если $x \in E_i, f_{E_i}(x) = 0, x \notin E_i$. Пусть 1 есть мера Лебега. Интеграл Лебега от функции h по множеству A определяется как

$$x \in E_i, f_{E_i}(x) = 0, x \notin E_i, \tag{2.17}$$

где $i \in I = \{1, 2, 3 \ldots . n\}; \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \alpha_n$. Введем множества $F_i = E_i \cup \cup E_{i+1} \cup \ldots \cup E_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда $h(x)$ можно определить в виде $h(x) = \max\limits_{i=\overline{1,\, n}} \min(\alpha_i, f_{F_i}(x))$

и получаем следующее по аналогии с определением обычного интеграла выражение для нечеткого интеграла:

$$\int\limits_A h(x) \circ g(\bullet) = \max_{i=1n} \min(\alpha_i, g(A \cap F_i)). \qquad (2.18)$$

Оба интеграла – лебегов и нечеткий – можно сравнить, используя вероятностную меру-[18]. Если (X, B, P) – вероятностное пространство, а h: $X \to [0,1]$ есть B-измеримая функция, то имеем, что

$$\left| \int\limits_X h(x) \circ P(\bullet) - \int\limits_X h(x) dP \right| \le \frac{1}{4}. \qquad (2.19)$$

Сравнительно легко осуществлять расчет нечеткого интеграла в случае конечного множества X и соответственно конечного числа α, для которых требуется определить $g(H_\alpha)$.

Для этого необходимо воспользоваться следующим утверждением [18].

Утверждение. Если функция $h(x)$ принимает $n + 1$ значение α_i, то соответственно множество значений $g(H_{\alpha i})$, отличных от 0 и 1, состоит из n элементов. В последовательности из $2n + 1$ элементов, составленной из элементов $\{\alpha_i\}$ и $\{g(H_{\alpha i})\}$, расположенных в порядке возрастания, значение срединного $n + 1$ элемента равно значению $FEV(h)$.

На рис. 2.3 приведен пример графической интерпретации нахождения значения нечеткого интеграла для $X = R^1$

$$FEV(h) = \int\limits_X h(x) \circ G = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge G(H_\alpha)), \text{ где } H_\alpha = \{x \mid h(x) \ge \alpha\}.$$

В качестве примеров рассмотрим вычисления нечеткого интеграла для конечных множеств в случаях g_λ- и g_v-мер.

Пример

Пусть задано пятиэлементное множество $X = \{x_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Каждому элементу $x_i \in X$ соответствуют значения нечетких плотностей g_i из табл. 2.1.

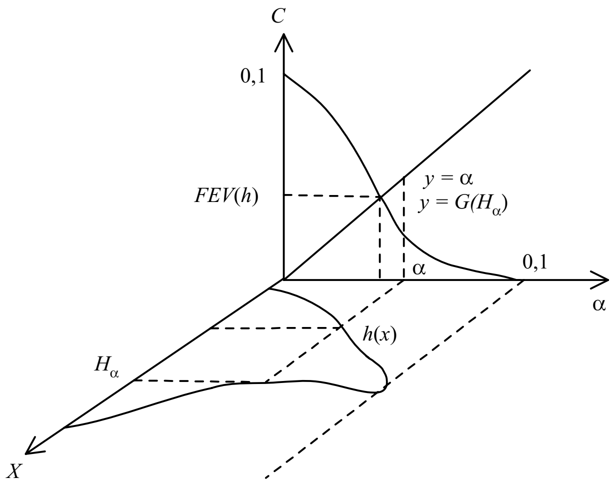


Рис. 2.3. Графическая интерпретация нечеткого интеграла

Таблица 2.1

i	1	2	3	4	5
g_i	0,170	0,257	0,216	0,212	0,061
$h(xi)$	0,5	0,7	0,1	0,2	0,3

Согласно условию нормировки для g_1-меры получаем $\lambda = 0{,}25$. Значение нечеткого интеграла

$$S = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge g_\alpha],$$

где $g_\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\Big(\prod_{i\in H_\alpha} (\alpha\bullet g_i + 1) - 1\Big); H_\alpha = \{i \mid h(x_i) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1],$ принимает значение $S = 0{,}4379$.

Для g_ν-меры из условия нормировки можно получить

$$v = \frac{(1 - \bigvee_{i=1}^{5} g_i)}{\sum_{i=1}^{5} g_i - \bigvee_{i=1}^{5} g_i} = 1{,}127.$$

При этом значение нечеткого интеграла для g_ν -меры $S = 0{,}448$.

2.4. Примеры использования нечетких мер и интеграла в процессах принятия решений

Пример 1

Рассмотрим технический комплекс управления подвижным объектом, состоящий из 10 средств четырех типов $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Количество средств каждого типа и интенсивность обмена информацией технических средств с подвижным объектом в процессе управления им заданы в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Тип средства	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Количество средств	2	4	2	2
Интенсивность обмена информацией ($h(\omega)$)	0,2	0,25	0,3	0,99

Определим среднее взвешенное и нечеткое ожидание интенсивности обмена информацией всего технического комплекса. Для этого в качестве меры, определяющей важность использования в процессе управления каждого типа средств, примем $g(\omega_1) = 0{,}2$, $g(\omega_2) = 0{,}4$, $g(\omega_3) = 0{,}2$, $g(\omega_4) = 0{,}2$ как отношения количества средств данного типа к общему числу всех средств. Введенная мера обладает свойствами вероятностной меры.

Тогда среднее взвешенное значение интенсивности вычисляется по формуле

$$E = \sum_{i=1}^{4} g(\omega_i) \bullet h(\omega_i).$$

$$E = 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}25 + 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}2\cdot 0{,}99 = 0{,}398.$$

Для расчета нечеткого среднего FEV(h) воспользуемся утверждением из подразд. 2.3:

$$\alpha_1 = 0{,}2;\ g(H_{\alpha 1}) = g(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = 1;$$

$$\alpha_2 = 0{,}25;\ g(H_{\alpha 2}) = g(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = 0{,}4+0{,}2+0{,}2 = 0{,}8;$$

$$\alpha_3 = 0.3;\ g(H_{\alpha 3}) = g(\{\omega_3, \omega_4\}) = 0{,}2+0{,}2 = 0{,}4;$$

$$\alpha_4 = 0.99;\ g(H_{\alpha 4}) = g(\{\omega_4\}) = 0{,}2.$$

Расположим все полученные значения α_i и $g(H_{\alpha i}) \neq 1$ в порядке возрастания, получим последовательность (0,2; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,8; 0,99). Значение срединного элемента этой последовательности равен FEV(h) = 0,3.

Значение FEV(h) = 0,3 более адекватно отражает интенсивность работы средств в рассматриваемом комплексе, чем значение математического ожидания E = 0,398. Отличие E от $FEV(h)$ связано с интенсивностью работы лишь двух средств комплекса, составляющих небольшую часть от общего числа средств. Таким образом, для ряда практических задач нахождение *FEV* целесообразно даже при использовании аддитивных мер, не говоря уже о тех задачах, для которых используются неаддитивные меры.

Пример 2

Основные особенности и соответствующие проблемы, связанные с решением задач многокритериальной оптимизации, имеют скорее не вычислительный, а концептуальный характер, так как невозможно строго математически доказать, что выбранная в конкретных условиях ЛПР-альтернатива из числа недоминируемых (не улучшаемых одновременно по всем показателям) является наилучшей. Построение множества Парето не снимает многокритериальной неопределенности, а является первым шагом на пути ее преодоления. Для корректного решения указанной проблемы (поиск наилучшей альтернативы) необходимо получение дополнительной информации от ЛПР, на основе которой формируется соответствующее результирующее отношение предпочтения (правило согласования).

На различных этапах жизненного цикла разработки проектных решений (ПР) возрастают потребности в получении и обработке все более сложной и неточной информации. Причем значительная часть этой информации недоступна в форме точных, четко определенных значений. Как показывает анализ, учет факторов неопределенности и неполноты информации является неотъемлемой принадлежностью сложных ПР. Обычно не существует, да и невозможно получить достаточной статистической информации о различных параметрах ПР. Причем традиционный путь учета факторов неопределености на основе вероятностного и статистического моделирования в ряде ситуаций может оказаться неадекватным решаемым задачам и привести к неверным результатам.

В интересах решения проблемы конструирования обобщенных показателей эффективности для оценки различных вариантов разрабатываемых ПР предлагается использовать нечетко-возможностный подход для формализации неопределенности стоящих целей создания и разработки ПР и разрешения многокритериальной неопределенности.

Преимущества теории возможностей, основанной на идее нечеткого множества, заключается в том, что она позволяет количественно описывать суждения, характеризовать неопределенность и моделировать неточность при разработке ПР.

Предположим, что общий показатель эффективности разрабатываемых ПР выражается в виде иерархии n частных показателей эффективности $F = \{F_i, i = 1, 2, ..., n\}$, которые оценивают варианты ПР из множества $W = \{w\}$. На практике число проектов W является конечным и достаточно малым, так что их можно перечислить непосредственно.

В качестве частных показателей F_i, как правило, выступают показатели целевой, технической, экономической эффективности и др. Частные показатели эффективности $F_i(X_1, X_2, ..., X_m, Z)$ зависят от различных структурных, конструктивных и других параметров (X_j) ПР и от влияния внешней среды (Z) на различных этапах жизненного цикла системы. Эта взаимосвязь параметров и показателей эффективности ПР может задаваться не только в аналитическом, но и в алгоритмическом виде путем построения различных моделей функционирования системы (многоструктурный, многомодельный подход [14, 15]).

При этом сведения о параметрах и внешней среде носят неточный, неопределенный характер, особенно на этапах проектирования, создания, развития ПР. Имеется значительная неопределенность в возможностях достижения характеристик системы тех или иных своих значений. В связи с этим полагаем, что возможности параметров реализации заданы в виде нечетких множеств $X_j = (x_j, \mu_j(x_j))$, $Z = (z, \nu(z))$. Здесь $\mu_j(x_j)$, $\nu(z)$ – возможности того, что параметры X_j, характеристики внешней среды Z могут принимать соответственно значения x_j, z.

Учитывая вышесказанное считаем, что частные показатели эффективности ПР будут представлены в виде нечеткого события F_i: $W \to \Re(Y_i)$, где для каждого варианта $w \in W$ $F_i(w) \subseteq Y_i$ является нечетким множеством $F_i(w) = (f_i, \mu_{Fi(w)}(f_i))$, $f_i \in Y_i$ – значения показателя F_i, $\mu_{Fi(w)}$ – функция принадлежности. При этом $\mu_{Fi(w)}(f_i)$ интерпретируется как возможность того, что показатель эффективности F_i примет значение f_i для проекта $w \in W$.

Таким образом, задача заключается в выработке обобщенного показателя эффективности ПР (F), представляющего собой некоторую операцию над нечеткими событиями $F(w) = H(F_1(w), F_2(w), ..., F_n(w))$ $\forall \in W$, объединяющего частные показатели эффективности и учитывающего их влияние на оценку вариантов ПР на различных этапах жизненного цикла.

В зависимости от особенностей разрабатываемых ПР частные показатели эффективности, как правило, носят неравнозначный по важности характер. Распространенным методом выражения различий критериев по важности является назначение каждому из них некоторого веса с последующим суммированием этих весов в рамках операции свертки. Данный подход, как показывает анализ [14, 15], приводит к потерям в эффективности применения ПР. Указанные потери вызваны тем, что коэффициенты в свертке частных показателей эффективности не учитывают нелинейный характер влияния показателей F_i друг на друга и в целом на обобщенный показатель эффективности ПР. Для того чтобы избежать указанные недостатки и учесть нечетко-возможностное представление частных показателей эффективности, в настоящей работе предлагается при построении обобщенного показателя эффективности ПР нечетко-возможностная свертка, основанная на нечеткой мере и нечетком интеграле [3, 5, 10].

Пусть g_i ($i = 1, ..., n$) ($0 < g_i < 1$) коэффициенты важности отдельно взятых частных показателей эффективности при построении обобщенного показателя. Данная информация может быть получена от экспертов с применением методов экспертного оценивания [14]. Учет влияния совокупности различных показателей F_i, $i \in M$ ($M = \{1,2, ...,n\}$) на оценку вариантов из множества W предлагается осуществлять путем построения конструктивной λ-нечеткой меры Сугено на конечном множестве частных показателей F_i, $i \in M$, где g_i – плотность распределения этой нечеткой меры. Мера Сугено для рассматриваемого случая имеет следующий вид [3, 5]:

$$G_\lambda\left(\left\{F_i, i = \in M^1\right\}\right) = \left[\prod_{i \in M^1}\left(1+\lambda g_i\right)-1\right]/\lambda,\ M^1 \subseteq M.$$

Следует указать, что значение λ находится из условия нормировки λ-нечеткой меры Сугено

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda g_i\right)-1\right]/\lambda=1,\ -1<\lambda<\infty. \qquad (2.20)$$

Обобщенный показатель эффективности ПР предлагается конструировать в виде нечеткой свертки, позволяющей гибко учитывать нелинейный характер влияния частных показателей. Для чего используем понятие нечеткого интеграла по λ-нечеткой мере Сугено [3, 5]:

$$e(w)=\int h\circ G_\lambda=\sup_{\alpha\in[0,1]}\min\{\alpha, G_\lambda(F_\alpha(w))\},$$

где $F_\alpha(w) = \{F_i | h(F_i, w) \geq \alpha\}$ – множество показателей, степень влияния которых на оценку варианта $w\in W$ превышает порог α; $h{:}FxW \to [0,1]$ – оценочная функция.

В качестве оценочной функции h будем считать значения частных показателей эффективности, приведенных к безразмерному виду с носителем нечеткого множества $F_i(w)$ ($i = 1, ...,n$; $w\in W$) в интервале [0,1] с помощью следующего преобразования:

$$\tilde{F}_i\left(w\right)=\left(f_i/K_i, \mu_{Fi(w)}\left(f_i\right)\right),$$

где $K_i=\max\limits_{w\in W}\max\limits_{\mu_{Fi(w)}(f_i)>0}\{f_i\}$.

Рассмотрим частный случай предложенного подхода к разрешению многокритериальной неопределенности. Пусть частные показатели эффективности ПР из множества $F = \{F_i, i = 1,2, ...,n\}$ принимают четкие значения, т. е. F_i: $W \to [0, \infty)$, $i = 1,2, \ldots n$, где $W = \{w_j, j = 1,2, \ldots, m\}$.

В этих условиях методика построения обобщенного показателя эффективности $e(w_j)$ для каждого варианта w_j и выбор среди них наилучшей альтернативы состоит из следующих шагов.

Ш а г 1. Построение оценочной функции h: $FxW \to [0,1]$ путем нормировки частных показателей F_i, $i = 1,2, ...,n$.

Ш а г 2. Проведение экспертного опроса для нахождения коэффициентов важности отдельно взятых показателей эффективности ПР g_i ($i =$ $= 1, ..., n$) ($0 < g_i < 1$).

Ш а г 3. Построение λ-нечеткой меры Сугено, характеризующей важности различных совокупностей показателей из множества F при принятии решений. Для чего осуществляется нахождение корня из интервала (–1, ∞) следующего полинома n-1-го порядка

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda g_i\right)-1\right]/\lambda=1.$$

Ш а г 4. Вычисление значения результирующего показателя эффективности на основе нечеткой свертки частных показателей

$$e(w_j)=\int h\circ G_\lambda=\sup_{\alpha\in[0,1]}\min\{\alpha, G_\lambda(F_\alpha(w_j))\},$$

где

$$F_\alpha(w_j)=\{F_i|\, F_{i'}(w_j)\geq\alpha\},\ w_j\in W,$$

$$G_\lambda\left(F_\alpha\left(w_j\right)\right)=\left[\prod_{F_i\in F_\alpha(w_j)}\left(1+\lambda g_i\right)-1\right]/\lambda.$$

Ш а г 5. Нахождение варианта $w_{j0}\in W$, доставляющего обобщенному показателю максимальное значение:

$$e\left(w_{j0}\right)=\max_{w_j\in W}{}^{e(w_j)}.$$

Применим рассмотренный алгоритм для выбора рационального ПР из множества $W=\{w_1, w_2, w_3\}$, состоящего из трех вариантов, по трем показателям эффективности $F=\{F_1, F_2, F_3\}$. Исходные данные приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

F	g_i	w_1	w_2	w_3
F_1	0,2	1/3	4/9	2/9
F_2	0,6	1/3	1/6	1/2
F_3	0,4	1/7	2/7	4/7

1. Построение λ-нечеткой меры Сугено (расчет коэффициента нормировки λ):

$$\frac{(1+0,2\lambda)(1+0,6\lambda)(1+0,4\lambda)-1}{\lambda}=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow 0{,}048\lambda^2+0{,}44\lambda+0{,}2=0\Rightarrow\lambda_1\approx-0{,}48$; $\lambda_2\approx-8{,}69$ (параметр должен быть в области $-1<\lambda<\infty$) $\Rightarrow\lambda\approx-0{,}48$.

2. Расчет обобщенного показателя для варианта w_1:

(расчет уровней α_i и значений важности множества показателей, удовлетворяющих требованию α_i $G_\lambda(F_{\alpha i}(w_1))$ для варианта w_1:

$$\alpha_1 = 1/7;\ F_{\alpha 1}(w_1) = \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_1)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_1, G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_1))\} = 1/7;$$

$$\alpha_2 = 1/3;\ F_{\alpha 2}(w_1) = \{F_1, F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 2}(w_1)) = \frac{(1+0,2\lambda)(1+0,6\lambda)-1}{\lambda} \approx 0,742 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_2, G_\lambda(F_{\alpha 2}(w_1))\} = 1/3;$$

$$\alpha_3 > 1/3;\ F_{\alpha 3}(w_1) = \varnothing \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_3, G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_1))\} = 0;$$

– (определение максимального из минимальных значений): $e(w_1) = \max\{1/7, 1/3, 0\} = 1/3$ – значение обобщенного показателя для варианта w_1.

3. Расчет обобщенного показателя для варианта w_2:

$$\alpha_1 = 1/6;\ F_{\alpha 1}(w_2) = \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_2)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_1, G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_2))\} = 1/6;$$

$$\alpha_2 = 2/7;\ F_{\alpha 2}(w_2) = \{F_1, F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_\lambda\left(F_{\alpha 2}(w_2)\right) = \frac{(1+0,2\lambda)(1+0,4\lambda)-1}{\lambda} \approx 0,56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_2, G_\lambda(F_{\alpha 2}(w_2))\} = 2/7;$$

$$\alpha_3 = 4/9;\ F_{\alpha 3}(w_2) = \{F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_2)) = 0,2 \Rightarrow \min\{\alpha_3, G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_2))\} = 0,2;$$

$$\alpha_4 > 4/9;\ F_{\alpha 4}(w_2) = \varnothing \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 4}(w_2)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_4, G_\lambda(F_{\alpha 4}(w_2))\} = 0;$$

$e(w_2) = \max\{1/6, 2/7, 0,2, 0\} = 2/7$ – значение обобщенного показателя для варианта w_2.

4. Расчет обобщенного показателя для варианта w_3:

$$\alpha_1 = 2/9;\ F_{\alpha 1}(w_3) = \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_3)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_1, G_\lambda(F_{\alpha 1}(w_3))\} = 2/9;$$

$$\alpha_2 = 1/2;\ F_{\alpha 2}(w_3) = \{F_2, F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_\lambda\left(F_{\alpha 2}(w_3)\right) = \frac{(1+0,6\lambda)(1+0,4\lambda)-1}{\lambda} \approx 0,88 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_2,\ G_\lambda(F_{\alpha 2}(w_3))\} = 1/2;$$

$$\alpha_3 = 4/7;\ F_{\alpha 3}(w_3) = \{F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_3)) = 0,4 \Rightarrow \min\{\alpha_3,\ G_\lambda(F_{\alpha 3}(w_3))\} = 0.4;$$

$$\alpha_4 > 4/7;\ F_{\alpha 4}(w_3) = \varnothing \Rightarrow G_\lambda(F_{\alpha 4}(w_3)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha_4,\ G_\lambda(F_{\alpha 4}(w_3))\} = 0.$$

$e(w_3) = \max\{2/9, 1/2, 0,4, 0\} = 1/2$ – значение обобщенного показателя для варианта w_3.

5. Нахождение наилучшего варианта $w_{j0} \in W$.

Выбор варианта, который доставляет обобщенному показателю наилучшее значение:

$$w_{jo} = w_3 = \arg\max_{w_j \in W} e(w_j).$$

Таким образом, наилучший из предложенных вариантов ПР является третий вариант.

Библиографический список

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
2. *Кофман А*. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. *Д. А. Поспелова*. М.: Наука, 1986.
4. Прикладные нечеткие системы / Под ред. *Т. Тэтано*, *К. Асаи*, *Сугэно*. М.: Мир, 1993.
5. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / под ред. *Р. Ягера* М.: Радио и связь, 1986.
6. *Орловский С. А*. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
7. *Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П*. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. Рига: Зинатне, 1990.

8. *Малышев Н. Г., Берштейн Л. С., Боженюк А. В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат, 1991.

9. *Беллман Р., Заде Л.* Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976.

10. *Дюбуа Д., Прад А*. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.

11. *Зайченко Ю. П*. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. Киев: Выща школа, 1991.

12. *Згуровский З. М.* Интегрированные системы оптимального управления и проектирования: учеб. пособие. К.: Выща школа, 1990.

13. *Райфа Г*. Анализ решений М.: Наука, 1974.

14. Военная системотехника и системный анализ / под ред. *Б. В. Соколова*; ВИКУ им. А. Ф. Можайского,1999.

15. *Резников Б. А*. Системный анализ и методы системотехники. Ч. 1 / МО СССР. 1990.

16. To*ng R.M.*, *B*o*nn*os*o*n*e P. P.* Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. 1981. Vol. 10. № 1.

17. *Shafe*r *G. A*. Mathematical Theory of Evidence. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.

18. *Кандель А., Байатт У*. Нечеткие множества, нечеткая алгебра, нечеткая статистика // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 12.

Оглавление

Учебное издание

Павлов Александр Николаевич
Соколов Борис Владимирович

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ
В УСЛОВИЯХ
НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Редактор *Г. Д. Бакастова*

Компьютерный набор и верстка *Н. С. Степановой*

Сдано в набор 06.09.05. Подписано в печать 28.11.05 Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,24. Усл. кр.-отт. 4,37. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 120 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67