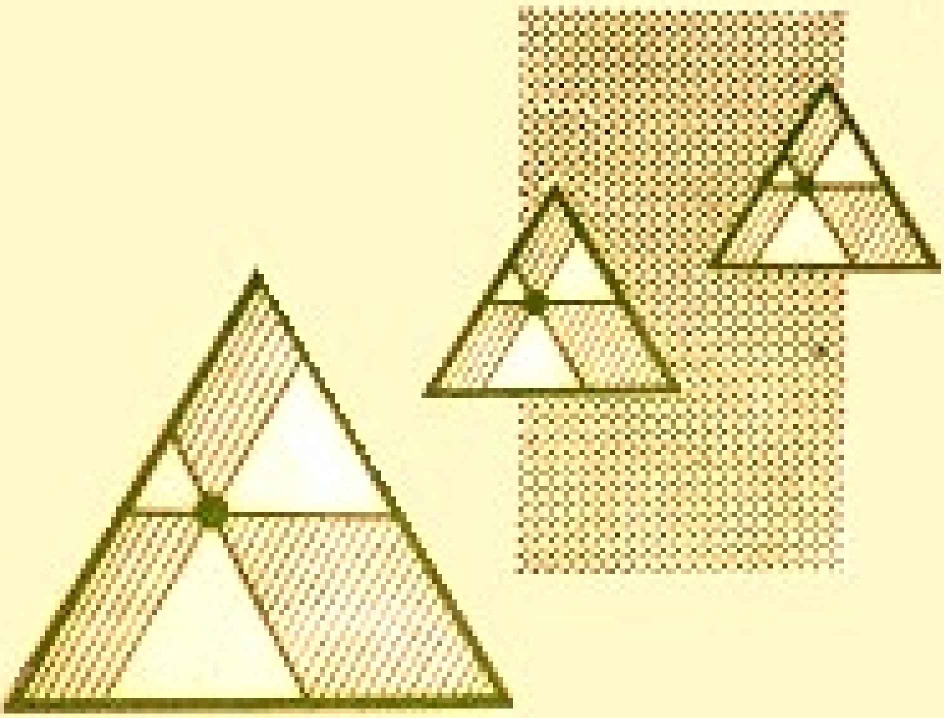
А.В. Кострамин, Д.М. Мухаметгалеев

Теория игр. Конспект лекций



КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

А.В.КОСТРОМИН, Д.М.МУХАМЕТГАЛЕЕВ

ТЕОРИЯ ИГР

Конспект лекций

Казань-2013

Костромин А.В., Мухаметгалеев Д.М.

Теория игр. Конспект лекций / А.В.Костромин, Д.М.Мухаметгалеев; Каз.федер.ун-т. – Казань, 2013. –87 с.

В предлагаемых лекциях излагаются основы теории игр в применении к экономическим моделям. Рассмотрены матричные игры, статические игы с полной информацией, динамические игры с полной информацией, повторяющиеся игры, статические и динамические игры с неполной информацией.

Для этого курса имеется электронная версия - http://zilant.kpfu.ru/course/view.php?id=17283

Принято на заседании кафедры статистики, эконометрики и естествознания

Протокол № 3 от 28.11.2013

Содержание

7.1. Дуополия Штакельберга
7.2. Корпорация и профсоюзы (модель Леонтьева)
7.3. Последовательные переговоры с дисконтированием

Лекция 8. Динамические игры с полной, но несовершенной информацией

8.1. Понятие несовершенной информации, информационных множеств и совершенного по подыграм равновесия Нэша
8.2. Многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.
8.3. Модель банка
8.4. Международная конкуренция
8.5. Корпоративный турнир за должность

Лекция 9. Повторяющиеся игры

9.1. Сущность повторяющихся игр, сотрудничество и конфликтная стратегии
9.2. Игра «Дилемма заключенного», повторенная два раза
9.3. Бесконечно повторяющиеся игры
9.4. «Народная теорема»

Лекция 10. Моделирование на основе повторяющихся игр

10.1. Сговор в олигополии Курно
10.2. Модель эффективной зарплаты
10.3. Денежная политика

Лекция 11. Статические игры с неполной информацией

11.1. Понятие ассиметричной информированности, типа игроков и природы
11.2. Дуополия Курно с неполной информацией
11.3. Байесовские игры, условия согласования, равновесие Байеса – Нэша
11.4. Аналогия между байесовской игрой и динамической игрой в развернутой форме

Лекция 12. Модели основанные на статических играх с неполной информацией

12.1. Аукцион с закрытыми заявками по первой цене
12.2. Двойной аукцион
12.3. Принцип выявления

Лекция 13. Динамические игры с неполной информацией

13.1. Совершенное равновесие Нэша
13.2. Игра террорист

Лекция 1. Введение в теорию игр. Основные понятия матричных игр.

Ключевые слова. Игра, игрок, ход в игре, стратегия, парные, конечные, бесконечные, антагонистические игры, верхняя и нижняя цены игры, чистые, смешанные стратегии.

1.1. Понятие игры

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами, которых называют, по традиции, игроками, в ситуациях, когда на результаты этих решений влияют действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть **играми**.

В свою очередь, **игрок** – это просто термин, который удобен для проведения аналогии изучаемой ситуации с салонной игрой с четко описанными правилами. Каждый игрок обладает определенной свободой выбора действий. Своими действиями игрок влияет не только на свой результат, но и на результаты всех остальных. Результат оценивается заданной для каждого игрока **функцией выигрыша**. Считается, что цель игрока – максимизировать свой выигрыш.

Определение. **Игра** – математическая модель конфликтной ситуации.

Определение. **Ход** в игре – выбор и осуществление игроком одного из предусмотренных правилами игры действий.

Определение. **Стратегия** – последовательность всех ходов до окончания игры.

1.2. Классификация игр

В зависимости от числа стратегий:

- **конечные**, если у игрока имеется конечное количество стратегий;
- **бесконечные** (в противном случае).

По числу игроков:

- **парные** (два игрока);
- **множественные** (больше двух игроков).

В зависимости от взаимоотношенй игроков:

- **кооперативные**, если в игре заранее определены коалиции;
- **коалиционные**, если игроки могут вступать в соглашения;
- **бескоалиционные**, если игрокам нельзя вступать в соглашения.

Определение. В играх с нулевой суммой одни игроки выигрывают за счет других, т.е. суммарный выигрыш всех игроков равен нулю.

Определение. Парные игры с нулевой суммой называются **антагонистическими**.

Определение. Конечные антагонистические игры называются **матричными** играми.

1.3. Матричные игры

В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размера mxn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$$

Считается, что 1-й игрок имеет статегии $A_1, A_2, \dots, A_m$, определяемые строками матрицы, а 2-й игрок – стратегии $B_1, B_2, \dots, B_n$, определяемые столбцами. Каждый элемент матрицы представляет выигрыш 1-го игрока (может быть и отрицательным) у 2-го, если каждый использует свою одну соответствующую стратегию.

Если представить платежную матрицу игры в виде:

	B_1	B_2		B_n	α
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β	β_1	β_2	…	β_n	

то можно сделать следующие определения:

Нижняя цена игры (максимин): $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \max\limits_i \alpha_i$

Верхняя цена игры (мимимакс): $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \min\limits_j \beta_j$

1.4. Чистые и смешанные стратегии игроков

Определение. Чистая стратегия игрока – это возможный ход игрока, выбранный им с вероятностью, равной единице.

Определение. ***Смешанной стратегией*** первого (второго) игрока называется вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\left(\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_j \geq 0, \ i = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right)$$

Определение. Если $x_i > 0$, $y_j > 0$, игра называется ***активной***

Платежная функция игры: $f(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$

Определение. Стратегии $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ называются ***оптимальными***, если для произвольных стратегий $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выполняется условие $f(\bar{x}, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \leq f(\bar{x}^*, \bar{y})$.

Определение. ***Решением игры*** называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры.

Теорема (об активных стратегиях). Если один игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры, если другой игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Теорема фон Неймана (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет по крайней мере одно решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену:

$$\left\langle \bar{x}^*, \bar{y}^*, v = f(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \right\rangle$$

Список литературы по лекции 1.

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. РХД, 2007. – 212 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 2. Методы решения матричных игр

Ключевые слова. Седловой элемент, активные стратегии, задача линейного программирования.

2.1. Игры с седловым элементом

В этом случае игрок 1 имеет чистую максиминную стратегию, а игрок 2 чистую минимаксную стратегию, и при этом α=β=ν. Тогда говорят, что игра решается в чистых стратегиях.

2.2. Игра 2x2: аналитическое и графическое решение

	B_1	B_2	
A_1	a_{11}	a_{12}	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	x_2
	y_1	y_2	

Система уравнений для 1-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = v \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = v \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $x_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$;

$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};\quad v = \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

Аналогично для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = v \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = v \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases}$$

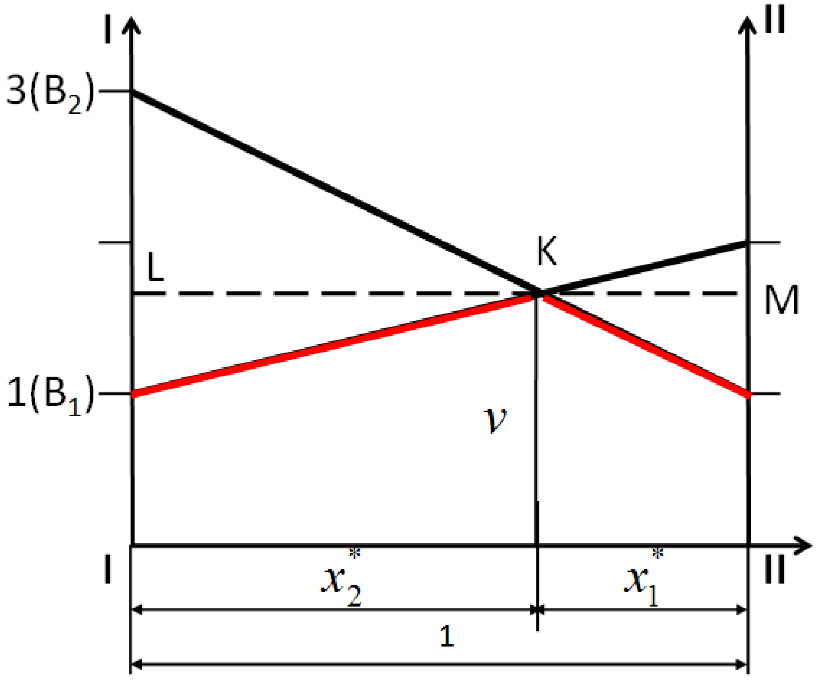
Решение аналогично: $y_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$;

$$y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

Графическое решение на следующем примере:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

дает такую картину:



Числовое значение решения игры: $\langle (4/15; 11/15); \quad (0; 1/5; 4/5); \quad 3{,}2 \rangle$

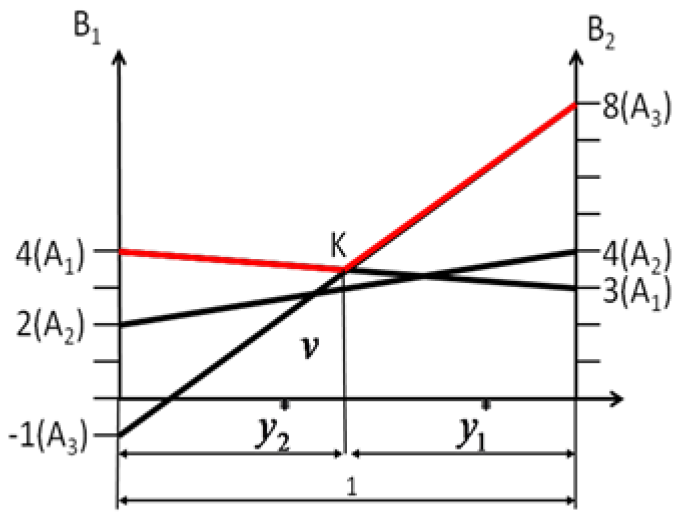
2.3. Игры 2xn

Здесь задача решается в 2 этапа. На первом этапе, графическом, определяется пара активных стратегий 2-го игрока. Затем, с учетом только этих активных стратегий у 2-го игрока, аналитически решается задача 2x2.

Например, при решении игры

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & \;\; y_2 & \;\; y_3 \end{matrix} \end{array}$$

строится график выигрышей 1-го игрока:



Из этого графика видно, что у 2-го игрока первая стратегия является невыгодной (проигрыш на ней больше) и отбрасывается, после чего остается игра 2x2,

$$\begin{array}{cc} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \quad\;\; y_2 \quad y_3 & \end{array}$$

которая решается аналитически по приведенным выше формулам. Решение здесь имеет вид:

$$\langle (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1); \quad (0{,}5;\ 0{,}5); \quad 3{,}5 \rangle$$

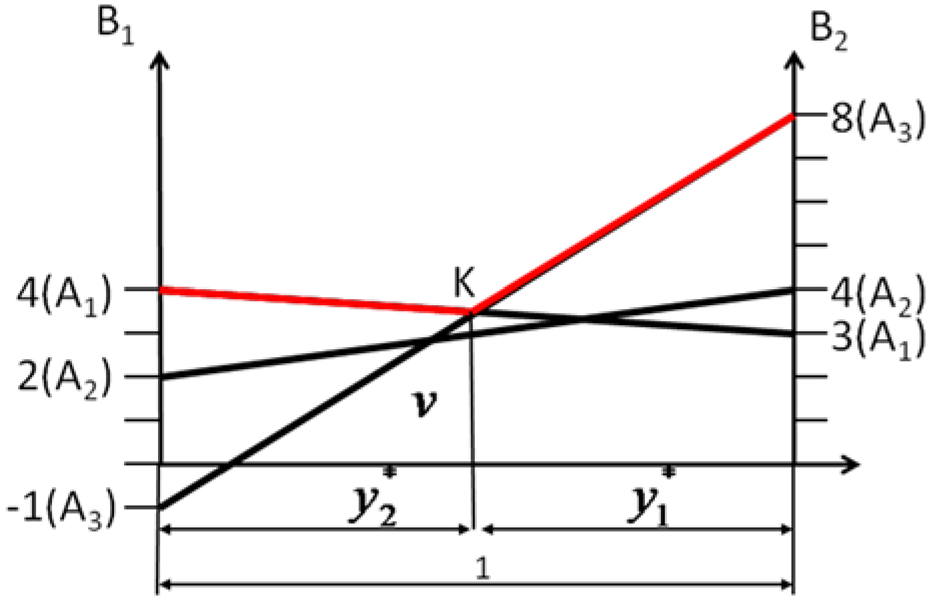
2.4. Игры mx2

Здесь на первом этапе строится график относительно выигрышей 2-го игрока. При этом максимальный проигрыш 2-го игрока изображается ломаной вверху графика, самая нижняя точка которой находится на пересечении двух активных стратегий 1-го игрока. Остальные стратегии 1-го игрока не являются активными. Далее аналитически решается игра 2x2 только на активных стратегиях.

Например, игра с матрицей

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \\ \quad\;\; y_1 \quad y_2 & \end{array}$$

графически решается так:



Отсюда видно, что для 1-го игрока вторая стратегия является невыгодной, и её нужно отбросить. Далее решается игра 2x2:

$$\tilde{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \end{array}$$

Решение имеет вид:

$$\langle (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1);\quad (0{,}5;\ 0{,}5);\quad 3{,}5 \rangle$$

2.5. Матричные игры mxn

Здесь матричная игра сводится к задаче линейного программирования. Пусть дана игра с матрицей:

	y_1	y_2		y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Все элементы матрицы при этом считаются неотрицательными; это всегда можно сделать эквивалентными преобразованиями. Тогда цена игры будет положительной, v>0. Вводятся новые переменные

$$t_i = \frac{x_i}{v}, \quad u_j = \frac{y_j}{v}, \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n\,.$$

Теперь матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования относительно 1-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1, \\ T = \dfrac{1}{v} = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min, \\ t_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{cases}$$

или к двойственной ей – для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1, \\ Z = \dfrac{1}{v} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to \max \\ u_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Список литературы по лекции 2.

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. РХД, 2007. – 212 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 3. Статические игры с полной информацией.

Ключевые слова. Статическая игра, полная информация, нормальная форма, доминирование стратегий, равновесие Нэша, функция отклика.

3.1. Определение статической игры с полной информацией.

Определение. Под **статической** понимают такую игру, в которой все её участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие.

Определение. Под играми **с полной информацией** понимают игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.

Пример. «Дилемма заключенного». Двое заключенных подозреваются в совершении некоторого преступления. Они помещены в разные камеры и не имеют никакой возможности обмениваться информацией. Каждому по отдельности предлагается сознаться (С) к определенному сроку, но можно и молчать (М). Если один сознался, а другой молчит, то сознавшегося освобождают, а молчун получает максимальный срок, равный 9 годам. Если оба сознались, то обоим срок снижается до 6 лет. Если оба молчат, то вину по основному преступлению доказать невозможно, и они получают по 1 году за незаконное владение оружием.

Кратко игра записывается в виде матрицы:

	М	С
М	- 1 , - 1	- 9 , 0
С	0 , - 9	- 6 , - 6

По традиции считается, что игрок 1 выбирает строки, а игрок 2 – столбцы. В каждой клетке матрицы стоят 2 числа: выигрыш игрока 1, выигрыш игрока 2. Матричная форма удобна для конечных игр двух лиц.

3.2. Игра в нормальной форме.

Пример. «Выбор компьютера». Двое знакомых одновременно выбирают, какого типа компьютеры им купить. Первый предпочитает IBM, второй – Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a>0 некоторых у.е., а второй – в b>0 у.е. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду c>0, если они выберут оди- наковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым.

Игра в нормальной форме имеет вид:

		Игрок 2	
		IBM	Mac
Игрок 1	IBM	$a+c$, c	a, b
	Mac	0, 0	c, $b+c$

Определение. Игра в нормальной форме задается следующей совокупностью объектов $G=\{S_i,u_i,i\in N\}$, где $N=\{1,2,...,n\}$ – множество игроков, S_i - множество стратегий i-го игрока, $u_i:\prod_{i\in N} S_i\to R$ - функция выигрыша игрока i.

Для целей дальнейшего рассмотрения полезно ввести следующие обозначения.

Профиль стратегий всех игроков: $s=(s_1,...,s_n)\in S=\prod_{i\in N} S_i$.

Профиль стратегий всех игроков, кроме i – го (т.е. остальных игроков): $s_{-i}=(s_j,\, j\neq i)\in S_{-i}=\prod_{j\neq i} S_j$.

При этом очевидно, что $s=(s_i,s_{-i})=(s_1,...,s_n)$.

3.3. Доминирование стратегий.

Определение. Для игры в нормальной форме $G=\{S_i,u_i,i\in N\}$ стратегия s_i' строго доминирует стратегию s_i'', если

$$u_i(s_i',s_{-i})>u_i(s_i'',s_{-i}),\quad \forall s_{-i}\in S_{-i}.$$

(Строго) доминирующая стратегия, если она существует, (строго) доминирует любую другую стратегию данного игрока. (Строго) доминируемая стратегия – это такая стратегия игрока, которую (строго) доминирует некоторая другая стратегия данного игрока.

В «Дилемме заключенного» у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия – сознаться лучше, чем молчать.

Определение. Равновесием в (строго) доминирующих стратегиях называется профиль (строго) доминирующих стратегий, если такие стратегии существуют для каждого игрока.

Очевидным путем использования доминирования является последовательное удаление строго доминируемых стратегий (СДС). Например, в игре с матрицей

	Л	С	П
В	1,0	1,2	0,1
Н	0,3	0,1	2,0

у игроков нет доминирующих стратегий, однако у 2-го игрока стратегия П является доминируемой по сравнению с С. После отбрасывания П появляется доминируемая стратегия Н, которую также следует отбросить. Далее 2-й игрок отбрасывает доминируемую стратегию Л. Остается пара стратегий игроков (В,С), которая является исходом этой игры.

Иногда стратегии, которые не отбрасываются при последовательном исключении СДС, называются рационализуемыми, поскольку за их выбором стоит цепочка рассуждений и предположений, основанных на доминировании.

3.4. Равновесие Нэша.

Процесс последовательного удаления СДС не всегда приводит к получению результата.

Пример.

	Л	С	П
В	0,4	4,0	5,3

Ц	4,0	0,4	5,3
Н	3,5	3,5	6,6

Здесь ни у одного из игроков нет ни одной доминирующей стратегии. Здесь всякая стратегия является наилучшей при некотором выборе другого игрока. В этом случае подход, основанный на доминировании, бессилен, поэтому требуется более универсальный подход.

Определение. Равновесием Нэша (РН) в игре в нормальной форме $G = \{S_i, u_i, i \in N\}$ называется такой профиль стратегий s^* всех игроков, что $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall i \in N, \quad \forall s_i \in S_i$.

Смысл равновесия Нэша в том, что ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии в одиночку.

Определение. **Отображение отклика** i – го игрока $R_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ сопоставляет каждому набору стратегий других игроков $s_{-i} \in S_{-i}$ множество стратегий *i*-го игрока, каждая их которых является ***наилучшим ответом*** на ***s-i*** . Каждая стратегия $s_i' \in R_i(s_{-i})$ такова, что $u_i(s_i', s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

Определение РН через отображение отклика: ***s**** - РН, если $s_i^* \in R_i(s_{-i}^*), \quad \forall i \in N$.

В случае, если отображение отклика является функцией, $s_i^* = R_i(s_{-i}^*), \quad i = 1,2,\ldots,N$.

Таким образом, здесь надо решать систему уравнений.

Для приведенного примера отображения отклика имеют вид:

для 1-го игрока на действия 2-го: $$R_1(s_2) \equiv s_1 = \begin{cases} Ц, & s_2 = Л; \\ В, & s_2 = С; \\ Н, & s_2 = П; \end{cases}$$

для 2-го игрока на действия 1-го: $$R_2(s_1) \equiv s_2 = \begin{cases} Л, & s_1 = В; \\ С, & s_1 = Ц; \\ П, & s_1 = Н. \end{cases}$$

Отсюда видно, что исход (Н,П) является равновесным по Нэшу, поскольку удовлетворяет одновременно обеим отображениям отклика.

В матрице выигрышей отображения отклика игроков показаны подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям, РН соответствует клетке, где выигрыши обоих игроков подчеркнуты, например:

	Л	С	П
В	$0,\underline{4}$	$\underline{4},0$	5,3
Ц	$\underline{4},0$	$0,\underline{4}$	5,3
Н	3,5	3,5	$\underline{6},\underline{6}$

Список литературы по лекции 3.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Громенко В.М. Теория игр. М., МГОУ, 2005, 142 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/19432)
3. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. М., БИНОМ, 2011, 163 с. (ссылка в ЭБС: www.knigafund.ru/books/68179)
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 4. Экономические модели, основанные на статических играх с полной информацией.

Ключевые слова. Дуополия, олигополия, монополия, совершенная конкуренция, арбитраж на рынке труда, общинный оптимум.

4.1. Дуополия Курно. Олигополия Курно (с назначением объемов выпуска)

Пусть есть всего два продавца n=2. Продавец i независимо от другого продавца $j\neq i$ планирует выпуск продукции в объёме q_i. Тогда совокупное предложение $Q=q_1+q_2$.

Цена на рынке устанавливается в соответствии с обратной функцией спроса, которую считаем линейной: $P(Q)=D^{-1}(Q)=a-Q,\quad a>0$, где a>0 характеризует максимально возможную цену покупки.

Фуекции затрат продавцов одинаковы и не содержат постоянных затрат: $c(q_i)=c\cdot q_i,\quad a>c>0$.

Множество стратегий игрока i – это объем выпуска продукции, который не ограничен: $S_i=[0,\infty)$.

Выигрыш игрока i – это размер его прибыли:

$$\begin{aligned}&u_i(q_i,q_j)=P(Q)\cdot q_i-c(q_i)=(a-q_i-q_j)\cdot q_i-c\cdot q_i=\\&=q_i\cdot(a-c-q_i-q_j)\end{aligned}.$$

Отсюда наилучший ответ игрока i на любую стратегию q_j игрока j:

$$R_i(q_j)=\frac{a-c-q_j}{2}.$$

Поэтому РН находим из решения системы двух уравнений:

$$\begin{cases}q_1^*=\dfrac{a-c-q_2^*}{2};\\[2ex] q_2^*=\dfrac{a-c-q_1^*}{2}\end{cases}.$$

Решение этой системы имеет вид: $q_1^*=q_2^*=\frac{1}{3}(a-c)$.

Выигрыши игроков в равновесии равны $\frac{1}{9}(a-c)^2$.

Суммарный выигрыш игроков равен $\frac{2}{9}(a-c)^2$.

Цена на продукцию равна $\frac{a+2c}{3}$.

Суммарный выпуск равен $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(a-c)$.

При монополии выпуск продукции равен $Q_M = \frac{1}{2}(a-c)$ при ценах на продукцию $P_M = \frac{a+c}{2}$, и выигрыш монополиста $\frac{1}{4}(a-c)^2$.

При совершенной конкуренции выпуск составляет $Q_{CE} = a-c$, цены равны $P_{CE} = c$ при нулевом выигрыше продавцов.

Сравнение дуополии с совершенной конкуренцией и монополией показывает, что по ценам, выпускам и выигрышам дуополия занимает промежуточное положение между монополией и совершенной конкуренцией.

В олигополии Курно количество продавцов произвольное ($n>2$).

Если ввести обозначение $q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$,то функция наилучшего ответа игрока i имеет вид: $R_i(q_{-i}) = \frac{1}{2}(a-c-q_{-i})$ и вычисляется аналогично дуополии.

Чтобы найти РН, надо решить систему уравнений

$$q_i^* = \frac{1}{2}\left(a-c-q_{-i}^*\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

Её решение имеет вид:

$Q^* = \frac{n}{n+1}(a-c)$; $P^* = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot c$; $q_i^* = \frac{1}{n+1}(a-c)$, причем при неограниченном увеличении числа игроков эти значения стремятся к уровням совершенной конкуренции: $Q^* \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_{CE}$; $P^* \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{CE} = c$.

4.2. Олигополия Бертрана (с назначением цен)

Рассмотрим дуополию (n=2) в случае однородной продукции. Продавцы одновременно и независимо назначают цены. Таким образом, в этой модели стратегией игрока является цена, а не объём выпуска продукции, и это множество $S_i = [0, \infty)$. Покупатели начинают покупать по более низкой цене, и если один продавец может удовлетворить весь спрос по выбранной цене, то другому ничего не достается. Функция спроса имеет вид:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0, & p_i > p_j \\ a - p_i, & p_i < p_j \\ (a - p_i)/2 & p_i = p_j \end{cases}$$

(при равенстве цен спрос делится пополам).

Пусть a>c, и выигрыш игрока *i* определяется как его прибыль:

$$u_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot D_i(p_i, p_j).$$

При любом $p_j > c$ наилучший ответ игрока *i* точно не реализуется, но ε – оптимальный ответ равен $p_i^* = c, \quad i = 1,2$.

Таким образом, в дуополии Бертрана с однородной продукцией и без ограничений на выпуск возникает жесткая конкуренция, приводящая к совершенному равновесию.

4.3. Неоднородная продукция в дуополии Бертрана

Каждый игрок *i* по-прежнему назначает цену p_i на свою продукцию, а спрос *a* на его продукцию задается функцией

$$D_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j, \quad 0 < b < 1 .$$

Выигрыш игрока определяется как прибыль:

$$u_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot D_i(p_i, p_j) = (p_i - c) \cdot (a - p_i + bp_j) .$$

Наилучший ответ игрока: $R_i(p_j) = \frac{1}{2}(a + c + bp_j)$.

Для нахождения РН надо решить систему:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}(a + c + bp_2^*), \\ p_2^* = \frac{1}{2}(a + c + bp_1^*) \end{cases} .$$

Решение имеет вид: $p_1^* = p_2^* = \frac{(a+c)}{2-b}$.

Это РН трудно сравнивать с другими вариантами. При b=0 каждый игрок является монополистом на своём рынке. При $0 < b < 1$ равновесные цены становятся больше локальных монопольных $P_M = \frac{a+c}{2}$. Получается случай, когда два локальных монополиста только помогают друг другу поднимать цены.

4.4. Арбитражные механизмы на рынке труда

Фирма и профсоюз пытаются придти к соглашению об уровне зарплаты с помощью арбитра. Они делают свои предложения по зарплате одновременно и независимо друг от друга. Фирма предлагает w_f, а профсоюз требует w_u. У арбитра есть своё мнение x о справедливой зарплате, и он в качестве своего окончательного решения выдаёт то из двух предложений, которое ближе к x. Игроки не знают точно мнение арбитра x и считают его случайной величиной с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Профсоюз стремится максимизировать, а фирма минимизировать ожидаемую зарплату.

Очевидно, что $w_u > w_f$. Тогда арбитр выберет w_f при условии, что

$x < \frac{w_f + w_u}{2}$, и вероятность этого события равна

$$P\left(x < \frac{w_f + w_u}{2}\right) = F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)$$

При $x > \frac{w_f + w_u}{2}$ будет выбрано предложение профсоюза, и

вероятность этого события равна $P\left(x > \frac{w_f + w_u}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)$.

При равенстве предложений выбор зарплаты не зависит от мнения арбитра.

Ожидаемая зарплата: $w_f \cdot F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) + w_u \cdot \left(1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right)\right)$.

Для нахождения РН запишем условия первого порядка по переменным w_u и w_f. Отсюда система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{w_u - w_f}{2} \cdot f\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) = F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right), \\ \frac{w_u - w_f}{2} \cdot f\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_f + w_u}{2}\right) \end{cases}$$

Если предположить, что мнение арбитра распределено по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}$, получаем равновесные предложения: $w_f^* = m-\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad w_u^* = m+\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4.5. Проблема общин

В одной деревне живут n крестьян, которые держат коз. Крестьянин i решает, независимо от других, сколько коз g_i ему держать. Общее поголовье $G=g_1+\ldots g_n$; затраты на содержание одной козы c от него не зависят. Однако ценность козы для крестьянина $v(G)$ зависит от общего поголовья, поскольку пастбище, где кормятся все козы деревни, весьма ограничено.

Наложим на функцию $v(G)$ условия:

1. $v(0)>0,\quad v(G_{\max})=0$
2. $v(G)>0,\quad v'(G)<0,\quad v''(G)<0,\quad 0<G<G_{\max}$

Стратегия крестьянина состоит в определении количества коз, которых будет держать. Функция выигрыша крестьянина – его прибыль:

$$u_i = g_i\cdot\left(v(G)-c\right)$$

Для нахождения РН запишем условия первого порядка:

$$v(G^*)-c+g_i^*\cdot v'(G^*)=0,\quad i=1,\ldots,n$$

Сложим все уравнения и поделим результат на n:

$$v(G^*)+\frac{G^*}{n}\cdot v'(G^*)=c\ .$$

Это уравнение всегда имеет единственное решение при $c<v(0)$, поскольку в левой части стоит убывающая функция, принимающая отрицательные значения на правом конце в точке G_{max}.

Найдем общинный оптимум из принципа максимизации суммарного выигрыша $G\cdot\left(v(G)-c\right)$.

Из условий первого порядка для общинного оптимума G_0 получим уравнение:

$$v(G_0)+G_0\cdot v'(G_0)=c\ .$$

Здесь в левой части стоит также убывающая функция, принимающая в нуле значение *v(0)*. Поскольку $v'(G) < 0$, то

$$v(G) + G \cdot v'(G) < v(G) + \frac{G}{n} \cdot v'(G) \Rightarrow G_0 < G^*.$$

Итак, если крестьяне действуют общинно, то им надо держать меньше коз. Но общинный минимум не является РН: если все остальные его придерживаются, то у крестьянина появляется соблазн завести себе немного больше коз. В итоге ситуация может скатиться в устойчивое, но неэффективное с коллективной точки зрения равновесие Нэша.

Список литературы по лекции 4.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 5. Существование равновесий Нэша и смешанные стратегии.

Ключевые слова. Смешанное расширение игры, вероятностная мера, теорема Нэша.

5.1. Смешанные стратегии и смешанное расширение игры

Пример. «Совпадение монет». Два игрока одновременно и независимо друг от друга кладут на стол по монете каждый, прикрывая свою монету рукой. По команде судьи они поднимают руки. Игрок 1 выигрывает, если монеты лежат по – разному, а игрок 2 выигрывает, если они лежат одинаково.

В этой игре нет РН:

	О	Р
О	-1,<u>1</u>	<u>1</u>,-1
Р	<u>1</u>,-1	-1,<u>1</u>

Один из способов разрешить проблему существования РН состоит в расширении множеств стратегий и введении так называемых **смешанных стратегий**.

Для удобства исходные стратегии иногда называют **чистыми стратегиями**.

Определение. *Смешанная стратегия игрока i* – это вероятностная мера μ_i на множестве его чистых стратегий s_i. Если все множества стратегий конечны, $\mu_i(s_i)$ является вероятностью выбора игроком i стратегии s_i: $\mu_i(s_i) \geq 0, \quad \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1$.

Определение. *Смешанным расширением* игры в нормальной форме $G = \{S_i, u_i, i \in N\}$ называется игра $G_m = \{M_i, \bar{u}_i, i \in N\}$, где $M_i = \left\{ \mu_i \mid \mu_i(s_i) \geq 0, \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i) = 1 \right\}$ - множество смешанных стратегий игрока i; $\mu(s)=\prod_{i\in N}\mu_i(s_i)$ - вероятность выбора s при независимом выборе s_i; $\overline{u}_i(\mu)=\sum_{s\in S}\mu(s)\cdot u_i(s)$ - ожидаемый выигрыш в исходной игре, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$.

5.2. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Определение. РН в смешанных стратегиях μ^* называют РН в смешанном расширении G_m: $\overline{u}_i(\mu_i^*,\mu_{-i}^*)\geq\overline{u}_i(\mu_i,\mu_{-i}^*)$; $\forall\mu_i\in M_i,\quad\forall i\in N$.

Найдем РН в смешанных стратегиях для игры «Совпадение монет».

Расставим вероятности p и q применения игроками своих стратегий:

	O	P	
O	-1,1	1,-1	*p*
P	1,-1	-1,1	1-*p*
	q	1-*q*	

Здесь $\mu_1(O)=p;\quad\mu_1(P)=1-p;\quad\mu_2(O)=q;\quad\mu_2(P)=1-q$.

Запишем средний выигрыш 1-го игрока от использования им 1-й стратегии:

$$\overline{u}_1(O)=(-1)\cdot q+(1)\cdot(1-q)=1-2q$$

Аналогично по 2-й стратегии:

$$\overline{u}_1(P)=1\cdot q+(-1)\cdot(1-q)=2q-1$$

Теперь сравним эти выигрыши между собой:

$$\overline{u}_1(O)>\overline{u}_1(P):\ p=1\ ;1-2q>2q-1\Rightarrow q<\frac{1}{2}\ ;$$

$$\overline{u}_1(O)<\overline{u}_1(P):\ p=0\ ;1-2q<2q-1\Rightarrow q>\frac{1}{2}\ ;$$

$$\overline{u}_1(O)=\overline{u}_1(P):\ p\in[0,1]\ ;\ 1-2q=2q-1\Rightarrow q=\frac{1}{2}\ .$$

Функция отклика (наилучшего ответа) первого игрока на действия второго:

$$R_1(q) \equiv p = \begin{cases} 1, & q < 1/2 \\ 0, & q > 1/2 \\ [0,1], & q = 1/2 \end{cases}$$

Запишем средний выигрыш 2-го игрока от использования им своей 1-й стратегии:

$$\bar{u}_2(O) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1$$

и аналогично от 2-й стратегии:

$$\bar{u}_2(P) = (-1) \cdot p + 1 \cdot (1 - p) = 1 - 2p \ .$$

Сравним эти выигрыши между собой:

$$\bar{u}_2(O) > \bar{u}_2(P) : q = 1; \Rightarrow 2p - 1 > 1 - 2p \Rightarrow p > \frac{1}{2} \ ;$$

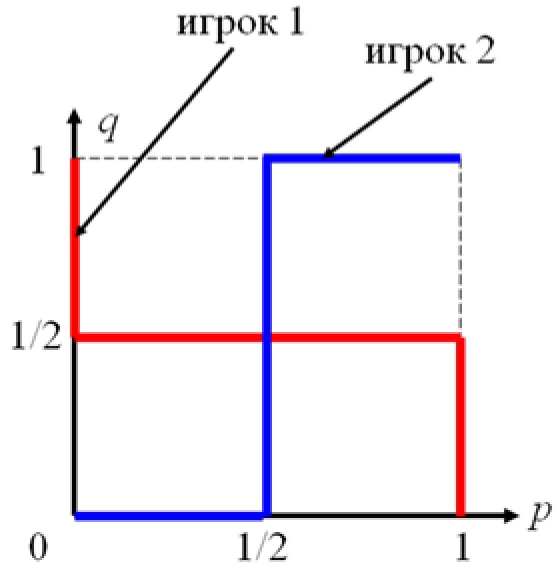
$$\bar{u}_2(O) < \bar{u}_2(P) : q = 0; \Rightarrow 2p - 1 < 1 - 2p \Rightarrow p < \frac{1}{2} \ ;$$

$$\bar{u}_2(O) = \bar{u}_2(P) : q \in [0,1]; \Rightarrow 2p - 1 = 1 - 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \ .$$

Функция отклика (наилучшего ответа) второго игрока на действия первого:

$$R_2(p) \equiv q = \begin{cases} 1, & p > 1/2 \\ 0, & p < 1/2 \\ [0,1], & p = 1/2 \end{cases}$$

РН соответствует всем точкам (p,q), удовлетворяющим обеим функциям отклика. Для этой цели можно построить график в координатах (p,q), т.е. на единичном квадрате:



В точке пересечения графиков функций отклика находится равновесие Нэша: $\mu_2(O)=\frac{1}{2}$; $\mu_2(P)=\frac{1}{2}$, $\mu_1(O)=\frac{1}{2}$; $\mu_1(P)=\frac{1}{2}$.

5.3. Теорема Нэша. Вычисление РН в смешанных стратегиях

Теорема Нэша. Пусть в игре $G=\{S_i, u_i, i\in N\}$ множества стратегий S_i игроков конечны. Тогда в игре существует РН в смешанных стратегиях.

Метод вычисления РН в смешанных стратегиях основан на структуре оптимальных ответов в смешанных стратегиях. Поскольку функция выигрыша $\bar{u}_i(\mu_i,\mu_{-i})=\sum\limits_{s_i\in S_i}\mu_i(s_i)\cdot\bar{u}_i(s_i,\mu_{-i})$ линейна по μ_i, то её максимум достигается в крайних точках множества M_i, т.е. на чистых стратегиях. Нужно взять все наилучшие ответы в чистых стратегиях и взять все смешанные стратегии, которые приписывают ненулевые вероятности только оптимальным ответам в чистых стратегиях.

Алгоритм поиска РН в смешанных стратегиях состоит из следующих шагов:

1. Для каждого игрока выделяется некоторое подмножество $S_i^0\subset S_i$ чистых стратегий и составляется система уравнений:

$$\bar{u}_i(s_i,\mu_{-i})=c_i, \quad \forall s_i\in S_i^0, \quad i\in N$$

В этой системе переменными являются числа c_i и вероятности $\mu_j(s_j)$ при $s_j\in S_j^0$. Остальные $\mu_j(s_j)$ полагаются равными нулю. Если игроков только два, то система является линейной. Если игроков больше двух, система будет нелинейной, и её решение становится сложной задачей.

2. После нахождения решения нужно проверить неотрицательность $\mu_j(s_j)$ при всех $s_j \in S_j^0$ и условие наилучшего ответа для $S_i^0: \quad s_i \in S_i \setminus S_i^0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_i(s_i, \mu_{-i}) \le c_i$.

Если все эти условия выполнены, то РН в смешанных стратегиях найдено. Если нет (или надо найти все равновесия), то нужно переходить к другой системе подмножеств S_i^0 .

Список литературы по лекции 5.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 6. Динамические игры с полной и совершенной информацией

Ключевые слова. Динамическая игра, совершенная информация, дерево игры, развернутая форма, обратная индукция, совершенное в подыграх равновесие Нэша.

6.1. Понятие динамической игры. Полная и неполная, совершенная и несовершенная информация. Дерево игры.

Динамической называется игра, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов, и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам).

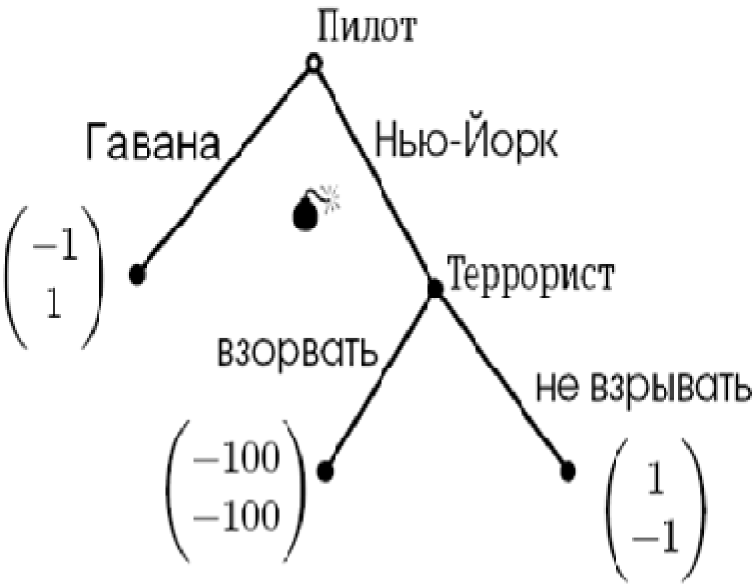
В динамических играх различают **полную** и **совершенную** информацию. Если все игроки имеют общую информацию о правилах игры и функциях выигрыша, то информацию считают полной. Это понятие в равной степени относится как к статическим, так и к динамическим играм. Понятие совершенной информации относится только к динамическим играм, в которых игроки делают ходы последовательно в разные моменты времени. Говорят, что динамическая игра обладает совершенной информацией, если все сделанные ходы сразу же становятся известны всем игрокам.

Иногда динамическую игру удобно представить в виде дерева. Такое представление называется **развернутой формой игры**. Она должна содержать:

- множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;
- для каждой вершины, кроме начальной – единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (это предполагает отсутствие циклов);
- множество игроков;
- для каждой вершины, кроме конечных – единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;
- для каждой конечной вершины – вектор выигрышей всех ироков;
- (если в игре есть случайные ходы «природы», то следует задать также распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов «природы»).

Пример. Игра «Террорист». В самолет сел террорист, который требует лететь из Майами в Гавану вместо Нью-Йорка. В предположении, что террорист не может определить маршрут полета, летчик выбирает, куда лететь. Если он летит в Гавану, игра заканчивается, а если в Нью-

Йорк, то ход делает террорист, который решает, взрывать самолет или нет. На конечных вершинах дерева проставлены выигрыши игроков (первый игрок – пилот)



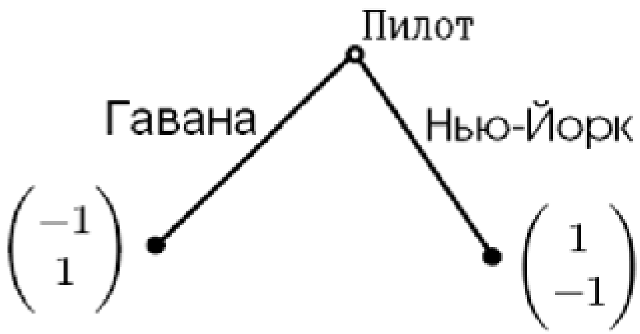
6.2. Метод обратной индукции.

В динамических играх с полной и совершенной информацией удобно решать игру методом обратной индукции.

В соответствии с методом обратной индукции игра «разматывается» с конца. При этом рассматриваются все последние вершины игры, в которых один из игроков делает выбор, исходя из его рациональности. Далее процесс повторяется для всех предшествующих вершин, пока не дойдет до начальной вершины.

Например, в игре «Террорист» единственной вершиной, из которой можно начать применение метода обратной индукции («предфинальная» позиция), является вершина, в которой ход делает террорист. Террорист из двух вариантов (взрывать или не взрывать бомбу в Нью-Йорке) выбирает – не взрывать, поскольку при заданных выигрышах ему выгоднее именно не взрывать.

После этого игру можно частично свернуть (редуцировать), и дерево игры упрощается:



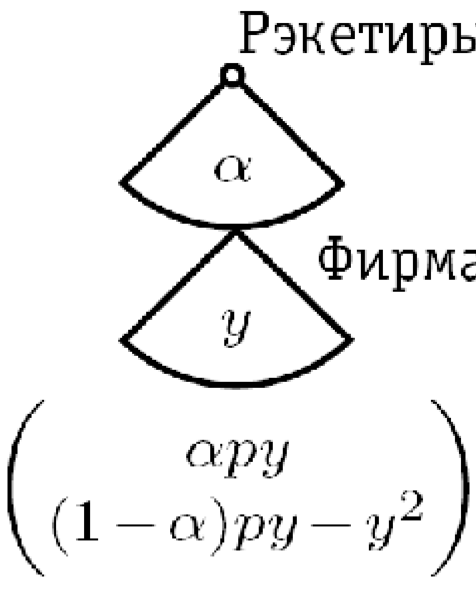
Поскольку действия террориста в Нью-Йорке несложно предугадать, пилот выбирает лететь в Нью-Йорк, где его выигрыш больше.

Таким образом, обратная индукция показывает, что пилот полетит в Нью-Йорк, а террорист не будет взрывать бомбу.

Обратную индукцию можно реализовать и на основе функций отклика игроков.

Пример. Игра «Рэкет». Рэкетиры выбирают, какую долю $\alpha \in [0,1]$ выручки следует отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют αpy , где *p* – цена, *y* - выпуск фирмы. Фирма имеет прибыль $(1-\alpha)py - y^2$ и максимизирует её при $y \geq 0$.

Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. Структура игры имеет вид:



На первом шаге условие первого порядка для фирмы дает следующую функцию отклика фирмы на отбираемую долю выручки:

$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)p}{2}$$

Зная эту функцию, рэкетиры максимизируют свою функцию выигрыша. Для этого надо подставить функцию отклика фирмы в функцию выигрыша рэкетиров и применить к полученному выражению условие первого порядка. Это дает значение α=1/2.

6.3. Стратегия в динамической игре. Равновесия «пустых угроз». Совершенное в подыграх равновесие Нэша (СПРН)

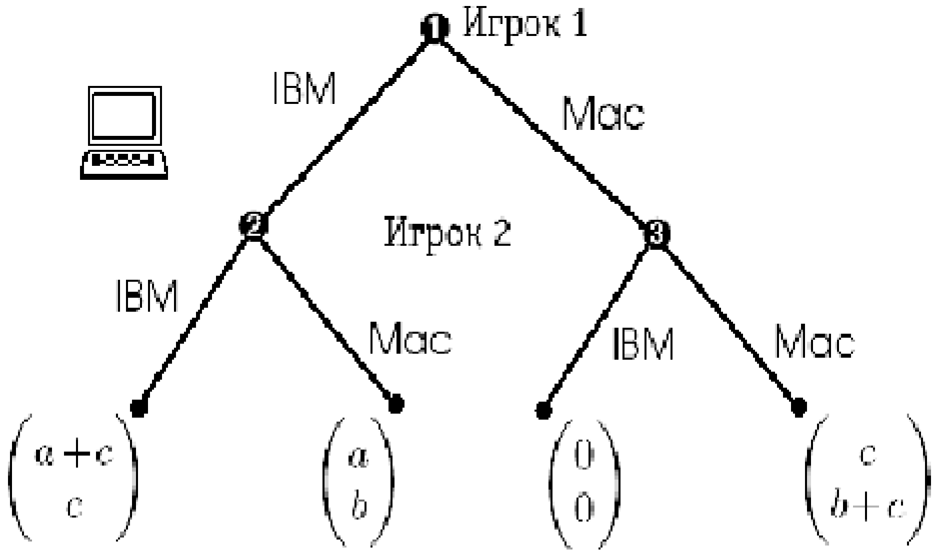
Кроме обратной индукции, для решения динамической игры с совершенной информацией можно использовать концепцию РН. Для этого надо записать игру в нормальной форме.

Множество игроков и в нормальной форме, и в развернутой должно быть одним и тем же. Однако понятие стратегии в динамической игре требует уточнения.

Определение. Стратегия (чистая) в динамической игре – это полный план действий игрока, который показывает, что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему.

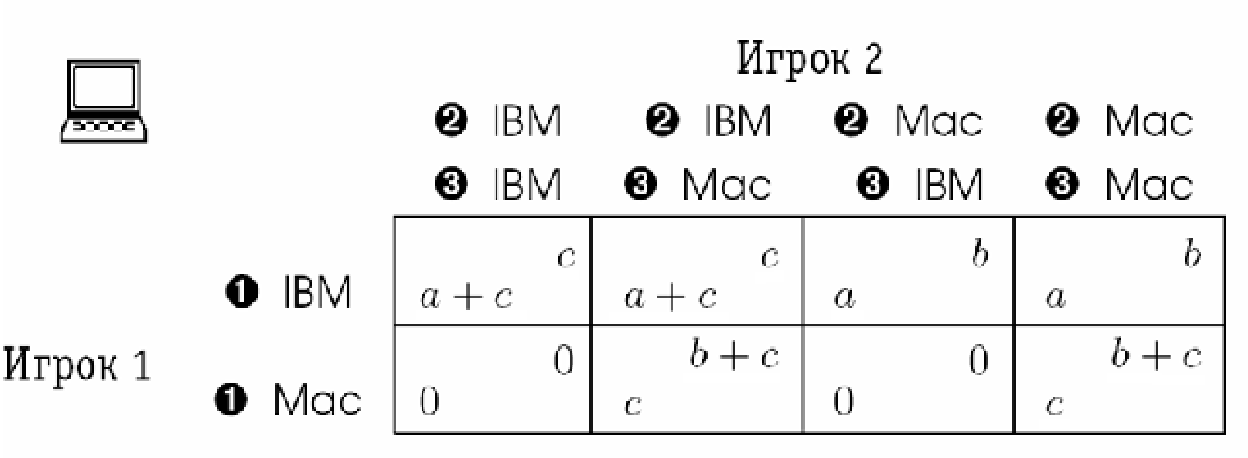
Следует отметить, что в этом плане игрок указывает свои действия даже в тех вершинах, в которых он в процессе игры реально вряд ли окажется.

Пример. Динамический вариант игры «Выбор компьютера», в котором 1-й игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево игры имеет вид:



1-й игрок имеет две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине 1. Игрок 2 имеет 4 стратегии, каждая из которых определяет его действия в двух вершинах – 2 и 3. Его стратегии следующие: $(2IBM, 3IBM), (2IBM, 3Mac), (2Mac, 3IBM), (2Mac, 3Mac)$.

Нормальная форма имеет вид:



Игрок 1 \ Игрок 2	❷ IBM ❸ IBM	❷ IBM ❸ Mac	❷ Mac ❸ IBM	❷ Mac ❸ Mac
❶ IBM	$a+c$, c	$a+c$, c	a, b	a, b
❶ Mac	0, 0	c, $b+c$	0, 0	c, $b+c$

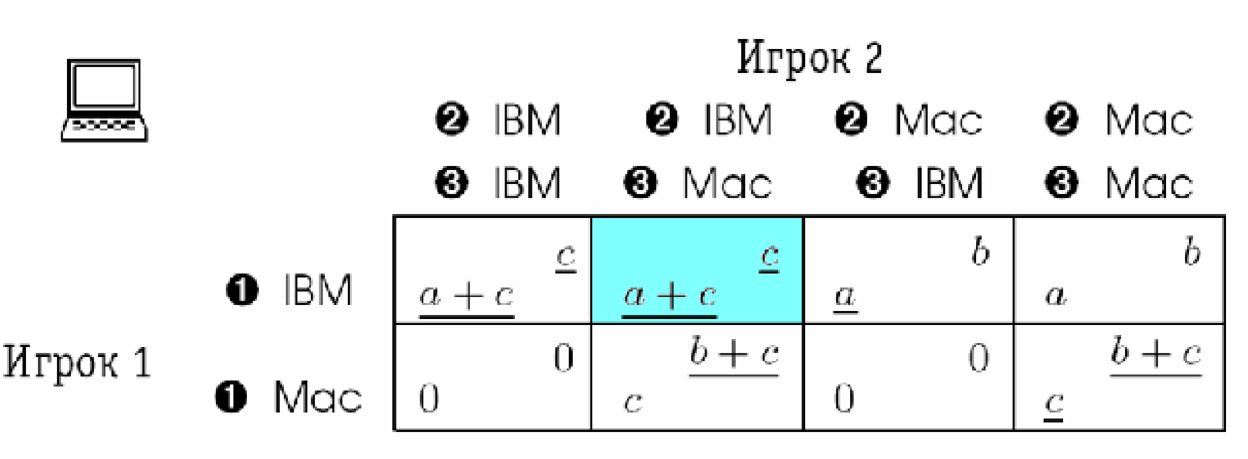
Рассмотрим случай, когда $a<c$, $b<c$. Сравним равновесия Нэша с результатом применения обратной индукции.

Сначала применим обратную индукцию. Здесь игроки выберут следующие стратегии:

$1: \quad 1IBM$

$2: \quad (2IBM, 3Mac)$

Из таблицы же получаем сразу 3 РН, и только одно из них совпадает с решением, полученным по методу обратной индукции:



Игрок 1 \ Игрок 2	❷ IBM ❸ IBM	❷ IBM ❸ Mac	❷ Mac ❸ IBM	❷ Mac ❸ Mac
❶ IBM	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a+c}$, $\underline{c}$	$\underline{a}$, b	a, b
❶ Mac	0, 0	c, $\underline{b+c}$	0, 0	$\underline{c}$, $\underline{b+c}$

Такая ситуация является типичной, т.е. решение, получаемое обратной индукцией, всегда является РН.

Определение. Все РН, которые не могут быть получены обратной индукцией, называются «равновесиями пустых угроз».

Это название отражает тот факт, что они противоречат предположению о рациональности игроков. Следовательно, концепция РН для динамических игр, вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры, и поэтому её требуется каким-то образом усилить.

Определение. Совершенным в подыграх равновесием Нэша (СПРН) называется такой набор стратегий, который является РН в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются РН во всех собственных подыграх этой игры.

Теорема. В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством СПРН.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование последней теоремы сильно упрощает поиск СПРН, поскольку не требует записи игры в нормальной форме и нахождения в ней РН.

Список литературы по лекции 6.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 7. Модели, основанные на динамических играх с полной и совершенной информацией.

Ключевые слова. Фирма-лидер, ведомая фирма, линии безразличия, дисконтирование, двухпериодная модель.

7.1. Дуополия Штакельберга

Пусть в игре участвую две фирмы, т.е. $N = \{1,2\}$, причем фирма 1 – лидер, а фирма 2 – ведомая. Описание отрасли возьмем таким же, как в дуополии Курно.

Здесь фирма – лидер имеет возможность прогнозировать ответную реакцию ведомой фирмы и планировать свой выпуск с учетом этого прогноза.

Зададим порядок ходов.

Ход 1. Фирма 1 выбирает объём выпуска q_1.

Ход 2. Фирма 2, зная выбор фирмы 1, выбирает объём своего выпуска q_2.

Поскольку информация о правилах игры и функциях выигрыша считается полной, фирма 1 может спрогнозировать ответную реакцию фирмы 2. Для этого применим условия первого порядка, и это дает:

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}$$

Теперь этот прогноз подставим в функцию выигрыша фирмы 1, получим после применения условий первого порядка для фирмы 1:

$$q_1^S = \frac{a - c}{2}$$

и соответственно для фирмы 2:

$$q_2^S = R_2(q_1^S) = \frac{a - c}{4}.$$

Выигрыш лидера равен здесь $\frac{(a-c)^2}{8}$, а выигрыш ведомого оказывается вдвое меньше: $\frac{(a-c)^2}{16}$. В дуополии Курно выигрыш любой фирмы оказывался равным $\frac{(a-c)^2}{9}$, т.е. каждой фирме выгодно захватить лидерство в отрасли.

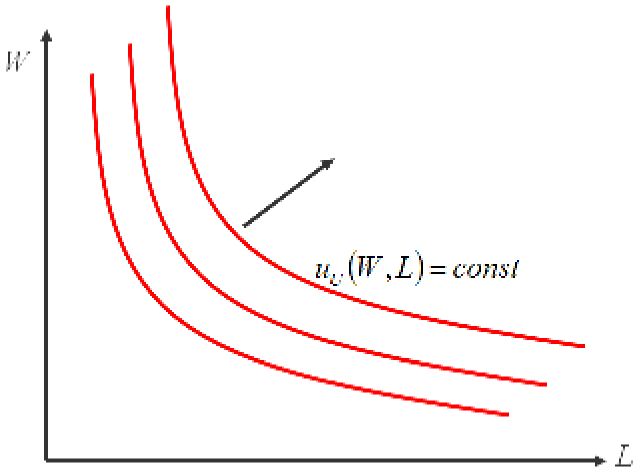
Такая ситуация называется борьбой за лидерство. Здесь речь идет только об информационном лидерстве, т.е. о праве первым принять решение и объявить его другому игроку.

Совокупный выпуск в дуополии Штакельберга равен $Q^S = \frac{3}{4}(a-c)$. Он больше, чем в дуополии Курно, а значит, и цены ниже. Потребители только выигрывают от появления фирмы-лидера.

7.2. Корпорация и профсоюзы (модель Леонтьева)

В этой модели два участника: профсоюз и фирма. 1-й ход принадлежит профсоюзу, который может диктовать фирме уровень зарплаты W. Зная предложение профсоюза, фирма в качестве 2-го хода выбирает уровень занятости L.

Профсоюз заинтересован как в увеличении зарплаты, так и в увеличении занятости, поэтому его функция выигрыша $u_U(W,L)$ должна возрастать по обеим переменным. Линии безразличия $u_U(W,L)=const$ и направление роста выигрыша профсоюза должны выглядеть примерно так:



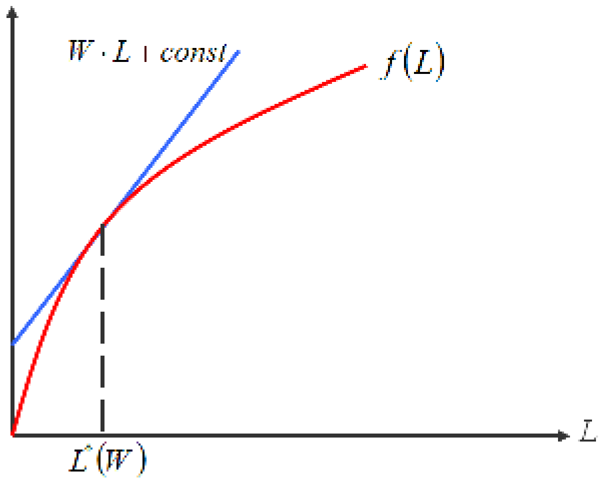
Выигрыш фирмы от найма рабочих определяется функцией выпуска $f(L)$, которая показывает, сколько продукции выпустит фирма, если наймет L рабочих. Будем считать эту функцию вогнутой и возрастающей, причем:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=\infty, \quad f'(\infty)=0 .$$

Выигрыш фирмы $u_F(W,L)=f(L)-W\cdot L$ - это выпуск продукции за вычетом зарплаты рабочим.

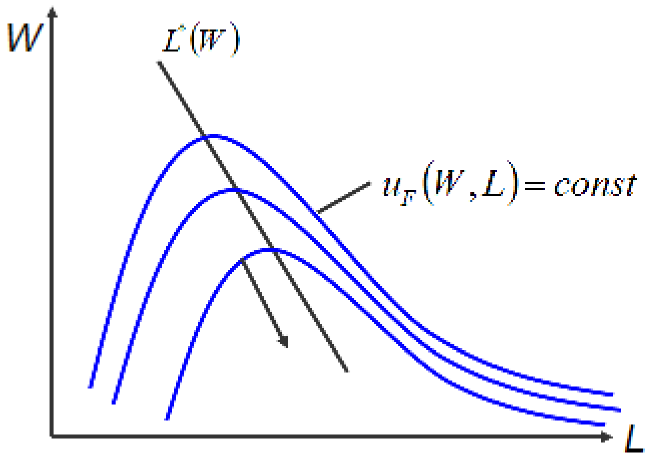
Оптимальный ответ фирмы $L^*(W)$ на заданный профсоюзом уровень зарплаты W определяется из максимизации выигрыша фирмы по L. Применение условий первого порядка даёт $f'(L)=W$.

Изобразим на графике прямую с наклоном *W*, касательную к графику функции выпуска:



Отсюда видно, что, чем больше запрос профсоюза *W*, тем меньше значение $L^*(W)$.

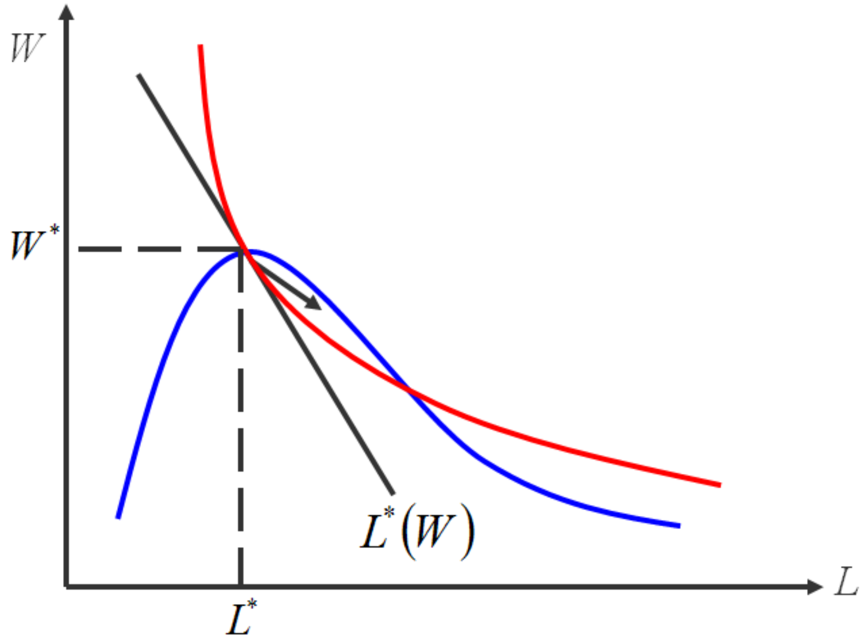
Теперь изобразим линии безразличия фирмы $u_F(W,L)=c$ с учетом того, что выигрыш фирмы убывает по *W*, а по *L* при заданном *W* возрастает до $L^*(W)$ и потом убывает. Отсюда следует, что при заданном уровне выигрыша фирмы наибольшая зарплата достигается при занятости $L^*(W)$. Изобразим ситуацию графически:



В силу обратной индукции решается задача оптимального выбора уровня зарплаты профсоюзом с учетом прогноза ответной реакции фирмы по занятости:

$$\max_{W\geq 0} u_U\left(W, L^*(W)\right) = u_U\left(W^*, L^*(W^*)\right).$$

Если обозначить $L^* = L^*(W)$, то в точке (L^*, W^*) линия безразличия для фирмы должна иметь максимум по зарплате, а линия безразличия профсоюза должна касаться линии $L^*(W)$. Графически это выглядит так:



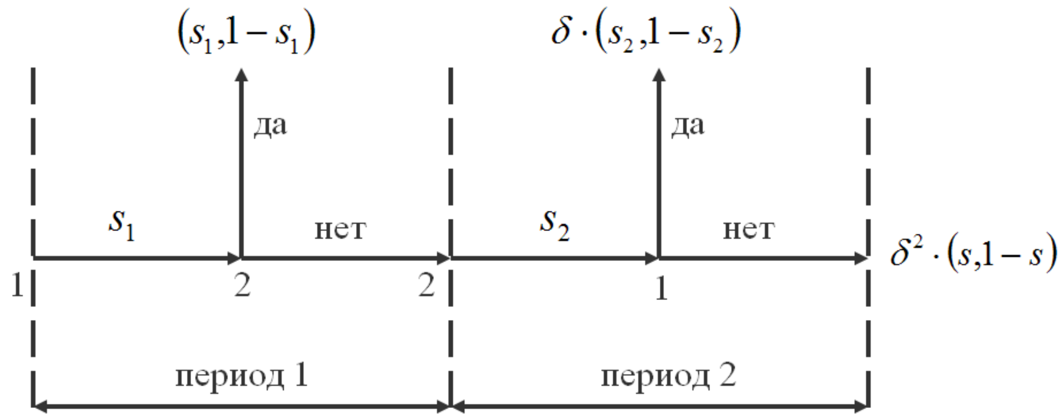
Из рисунка видно, что из точки (L^*, W^*) можно сместиться вправо и вниз так, чтобы оказаться ниже линии безразличия для фирмы и выше линии безразличия для профсоюза. Это означает, что данный механизм переговоров не является эффективным, поскольку он приводит к такому результату, который может быть улучшен одновременно и для профсоюза, и для фирмы за счет некоторого снижения зарплаты при одновременном увеличении занятости.

7.3. Последовательные переговоры с дисконтированием

Два игрока договариваются о дележе совместной выгоды размером 1. Переговоры проходят периодически. В начале каждого периода один из участников делает предложение по дележу, а другой может согласиться с этим или отказаться. При согласии игра кончается. При отказе переговоры в данном периоде завершается, но они возобновляются в следующем периоде, причем право предлагать дележ переходит к другому игроку.

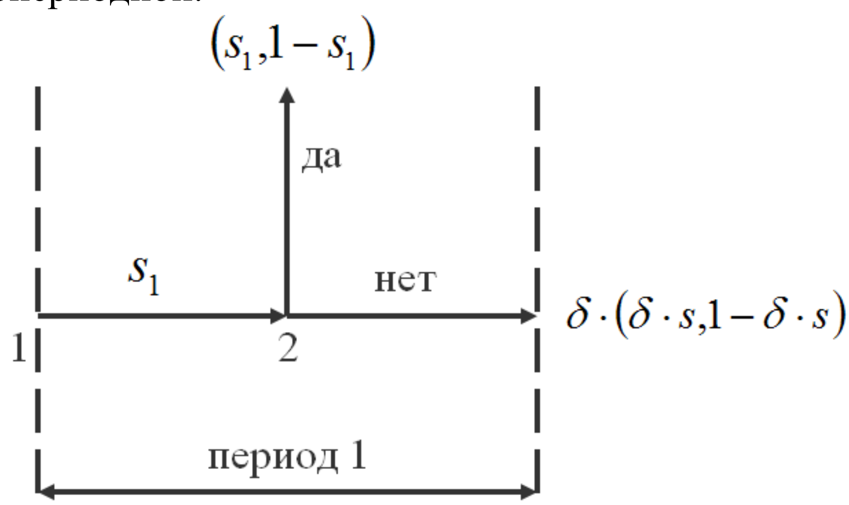
Считается, что совместная выгода каждый период убывает из-за действия коэффициента дисконтирования $0 < \delta < 1$.

Опишем модель переговоров с помощью следующее упрощенной схемы, т.н. двухпериодной модели:



Дележ (s,*1*-s) является параметром модели. Оба игрока знают, что если два периода переговоров не приведут к соглашению, то произойдет автоматический дележ (s,*1*-s). Выигрыши игроков проставлены с учетом дисконтирования.

В этой игре только одна предфинальная позиция, в которой во втором периоде игрок 1 может согласиться или отказаться от предложения s_2. Условие согласия игрока 1 $s_2 \geq \delta\cdot s$. Пусть игрок 1 доброжелателен и соглашается даже в случае равенства. Тогда оптимальное предложение игрока 2 будет $s_2 = \delta\cdot s$. После этого игру можно свести к одноперидной:



Условие согласия игрока 2 записывается как $1-s_1 \geq \delta\cdot(1-\delta\cdot s)$. Отсюда оптимальное предложение игрока 1 равно $s_1 = 1-\delta\cdot(1-\delta\cdot s)$, причем доброжелательный игрок 2 на него соглашается.

Итак, в силу обратной индукции получается дележ $(1-\delta\cdot(1-\delta\cdot s),\delta\cdot(1-\delta\cdot s))$, причем соглашение достигается в первом периоде переговоров.

Рассмотрим теперь последовательны переговоры с бесконечным количеством периодов. Формально обратную индукцию к такой схеме применить нельзя, поскольку в ней нет предфинальных позиций. Однако ясно, что после двух периодов мы имеем ту же бесконечную игру, в которой только все выигрыши умножены на δ^2. Следовательно, параметр s можно рассматривать как выигрыш игрока 1 в бесконечной игре, если

$$s = 1 - \delta \cdot (1 - \delta \cdot s) \Leftrightarrow s = \frac{1}{1+\delta} .$$

Следовательно, в бесконечных последовательных переговорах соглашение достигается в первом же периоде и приводит к дележу $\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$. При близком к единице коэффициенте дисконтирования, что соответствует малому банковскому проценту, дележ близок к справедливому, т.е. пополам.

Список литературы по лекции 7.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
5. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учебное пособие. – Спб: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. – 344 с. (адрес в интернете: http://www.twirpx.com/file/67483/)
6. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 8. Динамические игры с полной, но несовершенной информацией

Ключевые слова. Информационные множества, развернутая форма представления, повторяющаяся игра

8.1. Понятие несовершенной информации, информационных множеств и совершенного по подыграм равновесия Нэша

Рассмотрим класс игр, называемых играми с несовершенной информацией, в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е. осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого информационного множества).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно динамизировать, задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества.

«Выбор компьютера»

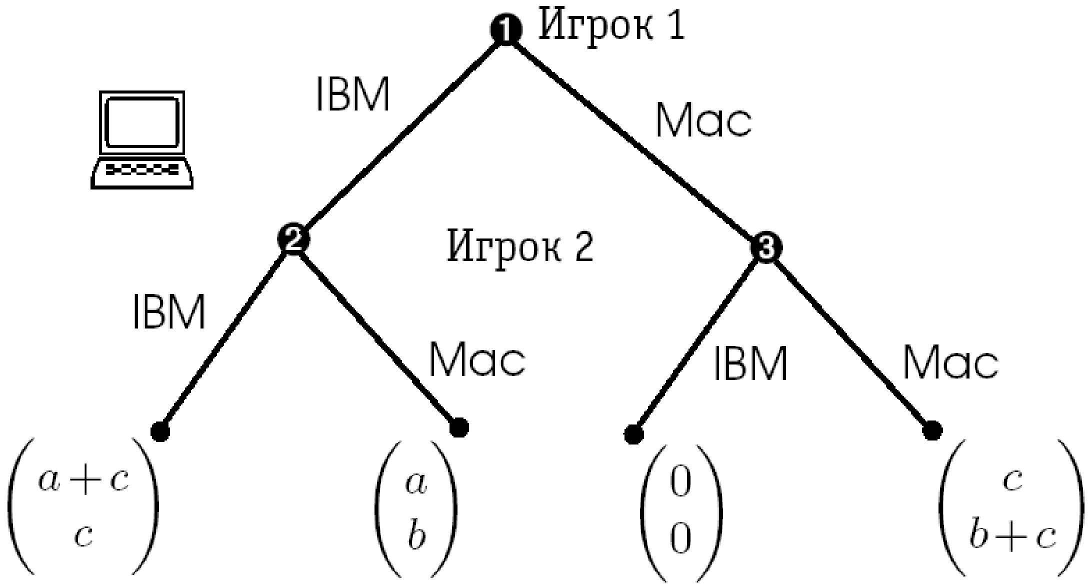
Предположим, что первый игрок ходит первым, второй—вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией.

Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества должны быть одинаковыми. - в вершине 2, и в вершине 3 второй игрок выбирает между IBM и Mac.

Нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С ее помощью можно представлять корректно только статические игры.



Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Необходимо наличие всех вершин информационного множества.

8.2. Многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Рассмотрим класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать играми с почти совершенной информацией. Другое название—многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Такие игры можно разбить на несколько этапов $t = 1, \ldots, T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. Пример такой игры — повторяющаяся конечное число раз статическая игра.

Начнем с двухпериодных игр. Каждый игрок i может выбрать, какое действие a_i из множества A_i ему совершить Игра происходит в два периода.

Период1. Игроки 1 и 2 выбирают свой действия a_1 и a_2 одновременно и независимо.

Период 2. Игроки 3 и 4 узнают, какие действия a_1 и a_2 совершили игроки 1 и 2 в периоде 1 и на основе этой информации одновременно и независимо выбирают свои действия a_3 и a_4 .

После этого определяются выигрыши игроков $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Применить обратную индукцию непосредственно, как в играх с совершенной информацией, нельзя, поскольку в тех играх в предфинальной позиции все сводится к индивидуальному выбору одного игрока. Однако можно совместить принцип обратной индукции и равновесие Нэша.

Предположим, что при любых $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ существует и притом единственное **РН** $(a^*_3(a_1,a_2),\ a^*_4\ (a_1,a_2))$ в игре с двумя игроками: $\{\{3,4\},\ A_3,\ A_4,\ u_3(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4),\ u_4(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)\}$.

Игроки 1 и 2 могут на этом основании предвидеть поведение игроков 3 и 4 . Тогда в ***периоде 1*** получится следующая игра двух лиц: $\{\{1,2\},\ A_1,\ A_2,\ u_1(a_1,\ a_2,\ a^*_3(a_1\ ,\ a_2),\ a^*_4\ (a_1\ ,\ a_2)),\ u_2(a_1,\ a_2,\ a^*_3(a_1\ ,\ a_2),\ a^*_4\ (a_1\ ,\ a_2)\ )\}$.

Пусть в этой игре существует **РН** $(a^*_1,\ a^*_2)$, тогда применение обратной индукции на основе **РН** приводит к успеху.

8.3. Модель банка

Существует много моделей построенных по схеме двухпериодной игры.

Модель банка:

1. Два инвестора положили деньги в банк на депозит в размере *D* каждый;
2. Банк вкладывает эти деньги в некоторый *проект,* который через два периода должен принести доход *2R*;
3. Инвестор имеет право забрать деньги после *первого периода*, но тогда проект не будет реализован и удастся вернуть только *2r*;
4. После *второго периода* деньги можно забирать без ущерба для проекта, причем первый имеет преимущество.

$$R > D > r > \frac{D}{2}$$

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	

	взять	**нет**
взять	***R,R***	***2R-D,D***
нет	***D,2R-D***	***R,R***

1. Во втором периоде имеется одно **РН.**
2. Подставим выигрыши в этом **РН** в игру первого периода.
3. Получается два равновесия **РН**.
4. Равновесие ***(нет, нет)*** лучше для обоих инвесторов.
5. Равновесие ***(взять, взять)*** возникает при бегстве капитала из банка из-за испуга, что кто-то заберет деньги из банка.(**слухи!**)

$$R > D > r > \frac{D}{2}$$

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	

	взять	**нет**
взять	***R,R***	***2R-D,D***
нет	***D,2R-D***	***R,R***

	взять	**нет**
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	***R,R***

Выводы: Имеем **2 РН**. Одно из них ***RR*** **предпочтительнее** другого, но ситуация ***r,r*** может возникнуть из-за слухов: *«бегство капитала из банка»*. Эта ситуация не является единственным равновесием, но одним из **РН**, которое может реализоваться.

8.4. Международная конкуренция

Две страны участвуют в ***международной торговле*** друг с другом. В ***каждой стране*** имеется **правительство**, **фирмы** и **потребители**.

1. **Правительство** i определяет тарифы t_i.
2. **Фирма** страны i производит продукцию h_i для потребления внутри страны и e_i на экспорт в др.страну.
3. **Потребители** покупают продукцию по цене $P_i(Q_i)=a-Q_i$, где $Q_i=h_i+e_j$.
4. **Затраты фирмы** складываются из производственных затрат: $c \cdot (h_i + e_i)$ и экспортной пошлины: $t_j \cdot e_i$.

Игра происходит в ***два этапа (периода):***

1. Сначала **правительства** обеих стран ***одновременно и независимо*** назначают **тарифы**;
2. Затем, ***зная эти тарифы,*** **фирмы участвуют на объединенном рынке** двух стран (дуополия Курно), **назначая выпуски** продукции для внутреннего потребления и на экспорт.

$$P_i(Q_i)=a-Q_i, \quad Q_i=h_i+e_j$$

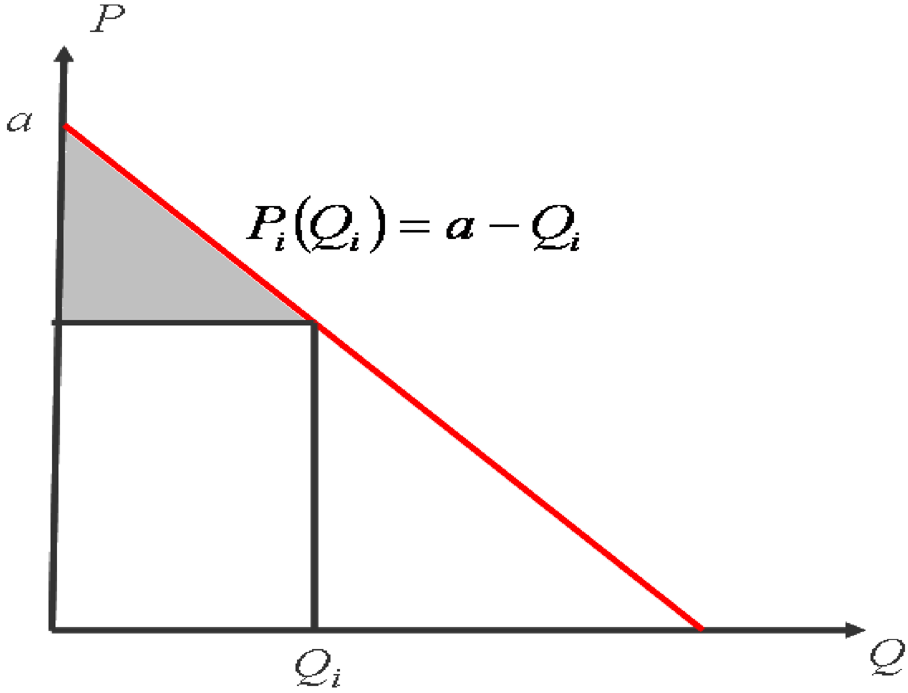
$$c\cdot(h_i+e_i)+t_je_i$$

$$\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=\lfloor a-(h_i+e_j)\rfloor\cdot h_i+\lfloor a-(h_j+e_i)\rfloor\cdot e_i-$$
$$-c\cdot(h_i+e_i)-t_je_i$$

$$W_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)=\frac{1}{2}Q_i^2+\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)+t_ie_j$$

1. **Выигрыш фирмы** определяется их ***прибылью***. (π_i)
2. **Выигрыш государства** учитывает ***интересы потребителей*** и ***фирмы*** своей страны, а также ***доходы*** от пошлины на импорт. (W_i)

Выигрыш покупателей на графике соответствует площади заштрихованного треугольника.



Фиксируем тарифы и найдем ***равновесие Нэша*** в игре фирм (найдем $\boldsymbol{h^*_1, h^*_2, e^*_1, e^*_2}$) для которых выполнено условие максимума прибыли). Т.к. функция **выигрыша** распадается на ***два слагаемых*** (внутренний рынок и экспорт), то преобразуем задачу.

$$\left(h_1^*, h_2^*, e_1^*, e_2^*\right)$$

$$\max_{h_i, e_i \geq 0} \pi_i\left(t_i, t_j, h_i, e_i, h_j^*, e_j^*\right), \quad i = 1,2$$

$$\max_{h_i \geq 0} h_i \cdot \left(a - \left(h_i + e_j^*\right) - c\right)$$

$$\max_{e_i \geq 0} e_i \cdot \left(a - \left(e_i + h_j^*\right) - c\right) - t_j e_i$$

$$\begin{cases} h_1^* = \dfrac{a - c - e_2^*}{2}; \quad e_1^* = \dfrac{a - c - h_2^* - t_2}{2}; \\ h_2^* = \dfrac{a - c - e_1^*}{2}; \quad e_2^* = \dfrac{a - c - h_1^* - t_1}{2} \end{cases}$$

$$h_i^* = \frac{a - c + t_i}{3}; \quad e_i^* = \frac{a - c - 2t_j}{3}, \quad i = 1,2$$

Подставив равновесие Нэша в игре корпораций, зависящей от тарифов, как от параметров, в функции выигрыша государств, найдем равновесие Нэша в игре государств, назначающих тарифы. (все переменные, кроме тарифов, опущены)

$$W_i(t_i,t_j)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_i}{3}\right)^2+\left[a-\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_i}{3}\right)\right]\cdot\frac{a-c+t_i}{3}+$$

$$+\left[a-\left(\frac{2\cdot(a-c)-t_j}{3}\right)\right]\cdot\frac{a-c-2t_j}{3}-c\cdot\left(\frac{a-c+t_i}{3}+\frac{a-c-2t_j}{3}\right)-$$

$$-t_j\frac{a-c-2t_j}{3}+t_i\frac{a-c-2t_i}{3}$$

$$W_i(t_i,t_j)=\frac{(2\cdot(a-c)-t_i)^2}{18}+\frac{(a-c+t_i)^2}{9}+$$

$$+\frac{t_i\cdot(a-c-2t_i)}{3}+\frac{(a-c-2t_j)^2}{9}\qquad(*)$$

$$\frac{-2\cdot(2\cdot(a-c)-t_i)}{18}+\frac{2\cdot(a-c+t_i)}{9}+\frac{(a-c-4t_i)}{3}=0$$

$$t_i^*=\frac{a-c}{3}\qquad h_i^*=\frac{4}{9}(a-c);\quad e_i^*=\frac{1}{9}(a-c)$$

$$W_1(t_1,t_2)+W_2(t_1,t_2)$$

$$\frac{(2\cdot(a-c)-t_i)^2}{18}+\frac{(a-c+t_i)^2}{9}+\frac{t_i\cdot(a-c-2t_i)}{3}+\frac{(a-c-2t_i)^2}{9}$$

$t_i=-(a-c)$ -отрицательные тарифы

Суммарный выпуск продукции в каждой стране будет равен ***5·(a-c)/9*** . Для ***потребителей*** это **<u>хуже</u>**, чем при нулевых тарифах, когда страны объединяются в один рынок с **дуополией Курно** и суммарным выпуском продукции ***2· (a-c)/ 3.***

С точки зрения ***правительства***, **максимум** выигрышей двух стран достигается при ***нулевых тарифах.***

РН для правительства достигается в доминирующих стратегиях, но оно хуже чем свободная неравновесная торговля.

8.5. Корпоративный турнир за должность

Два работника соревнуются за то чтобы занять *новую вакансию*. Руководство проводит турнир:

1. Каждый работник *i* выполняет определенную *работу*, прикладывая *усилия* e_i .
2. Выпуск продукции зависит не только от *личных усилий*, но еще и от некоторого *случайного фактора* (независимые одинаково распределенные случайные величины с одинаковым распределением, нулевым, средним и плотностью $f(\varepsilon)$)
3. Руководство судит о *усилиях работников* по выпуску продукции y_i .
4. Победителем турнира считается тот, у кого выпуск больше. Он получает более высокую зарплату w_H , в то время как проигравшему достается зарплата w_L , $w_L < w_H$.
5. Выигрыш работника определяется функцией $u(w,e)=w-g(e)$, где последняя функция измеряет связанные с усилиями психологические затраты и предполагается возрастающей и выпуклой.

Выигрыш начальства определяется суммарным выпуском минус зарплата $y_1+y_2-w_H-w_L$.

$$y_i = e_i + \varepsilon_i$$

$$w_H, w_L : w_H > w_L \quad u(w,e) = w - g(e)$$

$$y_1 + y_2 - w_H - w_L \quad g'(e) > 0, \quad g''(e) > 0$$

Предположим, что у работников есть возможность не участвовать в турнире, перейдя на альтернативную работу с выигрышем U_a

Порядок ходов:

1. Ход1: начальство объявляет турнир и назначает размер зарплаты;
2. Ход 2: работники одновременно и независимо выбирают размер усилий. После этого реализуются значения случайных факторов и определяется победитель турнира.

По правилам обратной индукции фиксируем уровни высокой и низкой заработной платы. Далее находим РН в игре работников.

Предполагается, что работники усредняют свой выигрыш по случайным факторам.

$$\left(e_1^*, e_2^*\right): \max_{e_i \geq 0}\left[w_H \cdot p + w_L \cdot (1-p) - g(e_i)\right] =$$

$$= \max_{e_i \geq 0}\left[(w_H - w_L)\cdot p + w_L - g(e_i)\right]$$

$$p = \Pr\left\{e_i + \varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j\right\} \quad (w_H - w_L)\frac{\partial p}{\partial e_i} = g'(e_i)$$

$$p = \Pr\left\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left\{\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i \middle| \varepsilon_j\right\} f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - F\left(e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right)\right] \cdot f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

$$(w_H - w_L)\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e_j^* + \varepsilon_j - e_i\right) \cdot f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e_i) \qquad (**)$$

$$e_1^* = e_2^* = e^* \quad (w_H - w_L)\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e^*)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$$

Так как функция ***g(e)*** выпуклая, то ее производная ***g'(e)*** возрастает и решение уравнения для ***e**** существует. Чем больше приз победителю ($\boldsymbol{W_H}$ **–** $\boldsymbol{W_L}$), тем больше усилий приложат работники в **РН**. Чем больше шум(

стандартное отклонение σ в нормальном распределении), тем меньше стимул стараться и уровень усилий в **РН** снижается.

Рассмотрим ход начальства по выбору W_H , W_L . В симметричном РН вероятность победы любого работника равна ½, поэтому ожидаемая заработная плата $(W_H + W_L)/2$.

Для согласия участвовать в турнире должно быть выполнено условие ***индивидуальной рациональности:***

$$\frac{w_H + w_L}{2} - g(e^*) \geq U_a \qquad 2e^* - (w_H + w_L)$$

$$w_H + w_L = 2U_a + 2g(e^*)$$

$$2 \cdot (e^* - U_a - g(e^*)) \qquad g'(e^*) = 1 \Rightarrow$$

$$(w_H - w_L)\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\varepsilon_j)\,d\varepsilon_j = 1$$

$$w_{H,L} = U_a + g(e^*) \pm \sigma\sqrt{\pi}$$

Начальство должно покрыть альтернативный выигрыш работника, затраты от прилагаемых усилий и обеспечить достаточный приз победителю.

Список литературы по лекции 8.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

Лекция 9. Повторяющиеся игры

9.1. **Сущность повторяющихся игр, сотрудничество и конфликтная стратегии**

Очень часто, **игровые взаимодействия** между одними и теми же игроками **повторяются**:

1. Противостояние между ***упрямым ребенком*** и ***его родителями*** продолжается изо для в день;
2. ***Две фирмы***, конкурирующие друг с другом, рассчитывают на то, что их **конкуренция** продлится и в следующем году, и через два года;
3. ***Люди***, отвечающие за ***кредитно-денежную*** политику в центральном банке, скорее всего, **будут отвечать** за нее и ***через год.***

Повторяющиеся игры – это некоторый класс динамических игр с полной, но несовершенной информацией , который имеет специальное прикладное значение.

В случае повторяющихся игр возможно увязывание стратегий наказания с последними ходами нарушителей. Возможно применение стратегий, учитывающих несколько последних ходов партнеров.

Предположим, что какая-то игра повторяется во времени и каждый игрок использует стационарную стратегию с памятью на один ход. Таким образом, стратегией игрока i является тройка $x_i = (a_i, b_i, c_i)$, где a_i, b_i, c_i {C,K} (С – сотрудничество, К – конфликт) и интерпретируются следующим образом:

1. Игрок i выбирает a_i в первом повторении игры (t = 1);
2. В момент $t \geq 2$ игрок i выбирает b_i , если игрок j вел себя мирно в момент времени (t – 1), и c_i в противном случае.

Типичной стратегией является стратегия «как ты, так и я», а именно (С; С, К). Согласно этой стратегии игрок на первом ходу выбирает сотрудничество, но предупреждает партнера, что он будет продолжать сотрудничать лишь при симметричном ответе партнера, а при конфликтном ответе партнера тут же перейдет на конфликтную стратегию.

Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической).

Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры.

Аналогично, чтобы получить дерево n раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине n − 1 раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры.
Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется.

В отличие от обычных игр в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры.

Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории повторяющейся игры. Таким образом, если u_{ij} —выигрыш, полученный i-м игроком в результате j-го повторения игры (на j-м раунде), то общий выигрыш в n раз повторяющейся игре составит:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем.
Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0,1)$
дисконтирующий множитель i-го игрока для j-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}$$

Повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие (СПРН)в них можно находить обратной индукцией.
Несовершенство информации в повторяющихся играх связано с одновременностью ходов игроков в повторяющейся игре.

Выигрыш игрока в повторяющейся игре G(T) обычно определяется как сумма выигрышей в повторениях.

Как правило, в таких играх существует много РН, построенных с помощью необоснованных угроз. Нас будут интересовать только РН, согласованные с принципом обратной индукции. Такие равновесия Нэша называются совершенными по подыграм (СПРН).

Для повторяющейся игры G(T) подыгрой G(t,T) полагается игра, которая возникает после того, как сыграны (t-1) повторений игры G. Равновесие, совершенное по подыграм — принцип оптимальности в теории игр, представляющий очищение равновесия Нэша для игр в развернутой форме.

Определение: Совершенным по подыграм равновесием Нэша (СПРН) в игре G(T) (с конечным числом повторений) называется такой профиль стратегий S*, который порождает равновесие Нэша в любой подыгре.

Набор стратегий игроков называется равновесием, совершенным по подыграм, если его сужение на любую подыгру данной игры есть равновесие Нэша в ней. Интуитивно это означает, что действия сторон в некоторой игре будут одинаковы, независимо от того, разыгрывается ли она отдельно или является частью более общей надыгры.

Равновесие, совершенное по подыграм, позволяет отсеять равновесия Нэша, основанные на недостоверных угрозах игроков.

Общим методом определения совершенных по подиграм равновесий является обратная индукция, при которой оптимизация ходов игроков начинается с конца игры. Данный метод не работает, если в игре отсутствуют подыгры, а также для повторяющихся игр с бесконечным горизонтом.

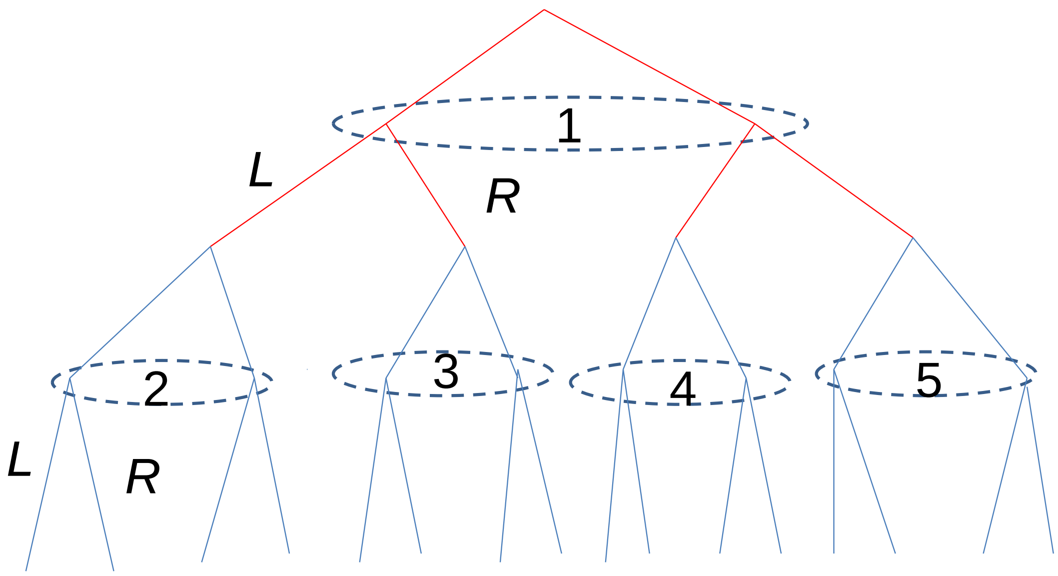
9.2. Игра «Дилемма заключенного», повторенная два раза

$G(t,T)$ **- подыгра игры *G(T)*, возникающая после *t-1* повторений игры *G***

Пример. Двукратное повторение дилеммы заключенного:

	L	R
L	1 , 1	5 , 0
R	0 , 5	4 , 4

Дерево игры «Дилемма заключенного», повторенная два раза.



Цифрами ***1-5*** обозначены информационные множества второго игрока

Множество 1 соответствует принятию решения (молчать/сознаться или L / R), в момент времени 1, то есть когда игроки играют «дилемму заключенного» в первый раз.

Множества 2-5 соответствуют принятию решения в момент времени 2, для каждого из 4 возможных вариантов исхода игры на первом этапе. Следуя формальному определению чистой стратегии в динамической игре, получается, что у игроков $2^5 = 32$ чистых стратегий. Некоторые из этих стратегий являются эквивалентными.

	L	R
L	1 , 1	5 , 0
R	0 , 5	4 , 4

	1	LL	LR	RL	RR

$$G(2):$$

	L	R
L	2 , 2	6 , 1
R	1 , 6	5 , 5

действие	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*

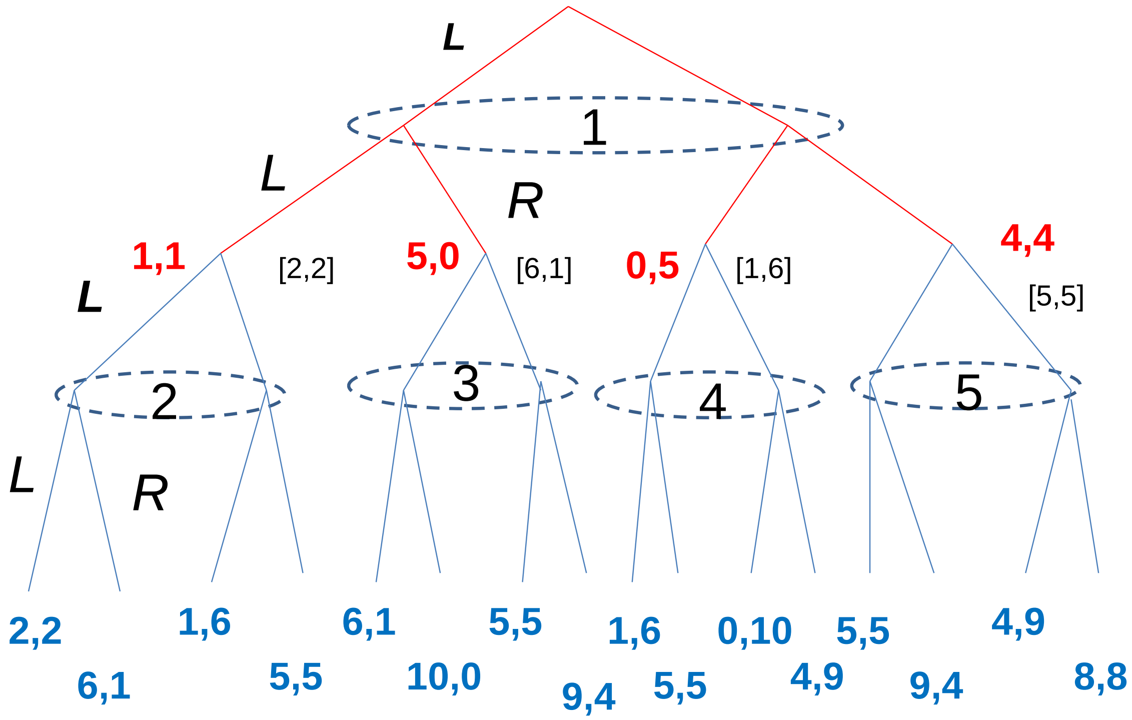
Действие a приписано первому повторению. Действия b, c, d, e приписаны второму повторению, например d – когда игрок 1 выбрал R, а игрок 2 выбрал L . Число стратегий можно сократить без ущерба для описания игры, т.к. при выборе действий игрока 1 во втором повторении достаточно учитывать только действия игрока 2 в первом повторении, поскольку свое действие в первом повторении он и так знает.
Тогда у **каждого игрока** останется по **8** стратегий с шаблоном:

	1	**L**	**R**
действие	***a***	***b***	***c***

Изобразим теперь нормальную форму игры G(2) с использованием таких стратегий:

	LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR
LLL	2,2	2,2	6,1	6,1	6,1	6,1	10,0	10,0
LLR	2,2	2,2	6,1	6,1	5,5	9,4	9,4	9,4
LRL	1,6	1,6	5,5	5,5	6,1	6,1	10,0	10,0
LRR	1,6	1,6	5,5	5,5	5,5	9,4	9,4	9,4
RLL	1,6	5,5	1,6	5,5	5,5	9,4	5,5	9,4
RLR	1,6	5,5	1,6	4,9	4,9	8,8	8,8	8,8
RRL	0,10	4,9	0,10	4,9	4,9	8,8	5,5	9,4
RRR	0,10	4,9	0,10	4,9	4,9	8,8	4,9	8,8

Дерево игры «Дилемма заключенного», повторенная два раза.



Утверждение 1. Если в статической игре ***G*** существует единственное **РН**, то в игре ***G(T)*** существует единственное **СПРН**, которое сводится к повторению статического **РН**

Утверждение 2. Если множество **РН** в игре ***G*** не пусто, то любая последовательность **РН** игры ***G*** образует **СПРН** в повторяющейся игре ***G(T)***.

9.3. Бесконечно повторяющиеся игры

Если всем игрокам известно, что игра закончится через Т периодов, то на последнем этапе будут сыграны какие-то равновесные стратегии; используя обратную индукцию, мы получим равновесные стратегии на всех этапах повторяющейся игры.

А если горизонт планирования отсутствует? Предположим, что в любой момент времени существует положительная вероятность того, что в следующий момент времени игра повторится. Такое предположение в ряде случаев вполне уместно.

Игровое взаимодействие в таком случае можно моделировать в виде игры, повторяющейся бесконечное число раз (БПИ), при условии, что выигрыш в каждом следующем периоде дисконтируется с определенной ставкой. В такой постановке использование обратной индукции невозможно. Как мы увидим, множество равновесий в бесконечно повторяющейся игре принципиально отличается от совершенных по подыграм равновесий в той же игре, повторенной конечное число раз. В БПИ суммировать выигрыши нельзя!

Множество стратегий (пусть даже чистых) в бесконечно повторяющейся игре очень громоздко. Стратегия должна предписывать, как действовать в зависимости от всех возможных действий игроков в предшествующие периоды для каждого момента времени t ≥ 0. В бесконечно повторяющейся игре любая подыгра эквивалентна самой игре. Поэтому будем ограничиваться стратегиями, в которых действие игрока в текущий период зависит от действий всех игроков за какое-то конечное число предыдущих периодов.

$G(\infty, \delta)$: игра с бесконечным количеством повторений и коэффициентом дисконтирования. $0 < \delta < 1$

$$\{\pi_i^1, \ldots, \pi_i^t, \ldots\} \qquad V_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot \pi_i^t$$

Стратегия игрока ***i*** в игре $G(\infty, \delta)$ - это бесконечная последовательность функций:

$$s_i = \{s_i^t(a_j^\tau, \tau < t,\ j \in N), t = 1, \ldots\},$$

Если нам понадобится сравнивать выигрыши в бесконечно повторяющейся игре с выигрышами в исходной игре, то удобно ввести условие нормировки выигрышей положив: $U_i = (1-\delta) \cdot V_i$

учитывая равенство $$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \frac{1}{1-\delta}$$

В отличие от игры с конечным числом повторений в бесконечно повторяющейся игре возможно возникновение сотрудничества.

Рассмотрим стратегии следующего вида:

1. сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе в первом раунде тоже сотрудничать);
2. не сотрудничать, если хотя бы в одном из предыдущих раундов другой игрок взял один доллар себе.

Такую стратегию называют триггерной (релейной). Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие (СПРН). Если δ_1, δ_2 малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклониться от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

9.4. **«Народная теорема»**

Пусть *G* – конечная статическая игра, и *s** - РН в этой игре.

Обозначим:

$$e = (e_1, \dots, e_n), e_i = u_i(s^*)$$

Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n), x_i = u_i(s), \quad s \in S$$

- любой реализуемый в статической игре вектор выигрышей. Если

$x_i > e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$ то при коэффициенте дисконтирования, достаточно близком к единице, в игре $G(\infty, \delta)$ существует **СПРН**, в котором **каждый игрок** получает ***выигрыш*** $U_i = x_i$

В бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и, кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины.

Список литературы по лекции 9.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. – М.: Вузовская книга, 2004. – 216 с.
4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.

Лекция 10. **Моделирование на основе повторяющихся игр**

10.1. Сговор в олигополии Курно

Олигополия отличается и от совершенной конкуренции и монополии. Если допустить возможность повторения олигополии, то возникают СПРН, которые можно интерпретировать как сговор.

В динамических играх трудно провести грань между независимым и кооперативным поведением игроков.

Даже, если игроки не вступают__в переговоры непосредственно, наблюдение общей траектории уже может служить достаточным сигналом для координации действий.

- Рассмотрим случай **дуополии**:

$$Q = q_1 + q_2; \qquad P(Q) = a - Q$$

$$C(q_i) = c \cdot q_i;$$

$$u_i(q_i, q_j) =$$

$$= P(Q) \cdot q_i - C(q_i) = (a - c - q_i - q_j) \cdot q_i$$

В **РН** выпуск каждого игрока и совокупный выпуск равны соответственно:

$$q^* = \frac{1}{3}(a-c); \qquad Q^* = \frac{2}{3}(a-c)$$

Монопольный выпуск меньше совокупного выпуска дуополии , а монопол. выигрыш больше.

$$q^M = \frac{1}{2}(a-c) < Q^*$$

$$\pi^M = \frac{1}{4}(a-c)^2 > 2\pi^*, \quad \pi^* = \frac{1}{9}(a-c)^2$$

Поэтому может возникнуть желание **договориться**...

В статической игре такая ситуация не является устойчивой.

С учетом найденной ранее функции наилучшего ответа можно рассчитать оптимальный ответ на половину монопольного объема выпуска с учетом дуополии.

При этом отклонившийся игрок получит соответствующий выигрыш.

- Используем релейные стратегии для построения СПРН, которое приводит к фактической монополии в каждом повторении.
- Для этого достаточно найти условие на коэффициент дисконтирования, чтобы отклонение было не выгодным.

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{\pi^M}{2} \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\cdot\pi^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\delta}\cdot\frac{(a-c)^2}{8} \geq \frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{\delta}{1-\delta}\cdot\frac{1}{9}(a-c)^2 \Rightarrow \delta \geq \frac{9}{17}$$

$$\delta < \frac{9}{17}: \qquad q_i^* > q^0 > \frac{q^M}{2}$$

$$\pi^0 = \left(a-c-2q^0\right)q^0; \quad \pi_d = \frac{1}{4}\left(a-c-q^0\right)^2$$

$$\frac{1}{1-\delta}\cdot\pi^0 \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\pi^* \quad \Rightarrow q^0 = \frac{9-5\delta}{3(9-\delta)}\cdot(a-c)$$

Если $\delta \geq 9/17$, то сговор с образованием монополии можно реализовать как СПРН в релейных стратегиях.

Возникают два вопроса про случай $\delta < 9/17$:

1. Какой сговор q^0, $q^*_i > q^0 > q^M/2$ реализуем как СПРН в релейных стратегиях?
2. Можно ли реализовать монополию как СПРН с помощью других (нерелейных) стратегий?

Если обе фирмы поддерживают монополию, то эта ситуация повторяется постоянно.

Если кто-то отклоняется, то другой в одном повторении включает наказание *x*.

Если отклонившийся тоже играет *x*, происходит возврат на монопольную траекторию, чего не было в *релейных стратегиях*.

Задача сводится к тому, чтобы найти подходящее значение x чтобы получилось СПРН.

$$\pi(x) = (a - c - 2x)x$$

$$V(x) = \pi(x) + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2} \pi^M$$

$$R_j(x) = (a - c - x)/2$$

$$\pi_d(x) = \frac{1}{4}(a - c - x)^2$$

Теперь рассмотрим *условия* невыгодности отклонения от СПРН в двухфазовых стратегиях:

Условие 1: Игрок отклоняется от половины монопольного выпуска, но потом играет x и происходит возврат на монопольную траекторию:

$$\frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2} \pi^M \geq \pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) + \delta \cdot V(x)$$

Условие 2: Сравниваем две траектории. Оба игрока играют x с последующим возвратом на равновесную траекторию, или игрок сначала реализует отклонение от x и только потом играет x с последующим возвратом на монопольную траекторию:

$$V(x) \geq \pi_d(x) + \delta \cdot V(x)$$

Оказывается, что выполнение этих двух условий достаточно для построения СПРН. Если игрок сначала оптимально ответит на половину монопольного выпуска, а потом будет оптимально отвечать на x, тогда его выигрыш будет равен:

$$\pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \pi_d(x)$$

В силу условия 2 выполнено: $$V(x) \geq \frac{1}{1-\delta} \cdot \pi_d(x)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi^M - \pi(x)\right) \geq \pi_d\left(\frac{q^M}{2}\right) - \frac{1}{2}\pi^M$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi^M - \pi(x)\right) \geq \pi_d(x) - \frac{1}{2}\pi(x)$$

Найдем диапазон допустимых значений ***x:***

$$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}(a-c) < x < \frac{1}{2}(a-c)$$

Выводы: Двухфазовые стратегии позволяют построить СПРН, основанные на монопольном сговоре в том случае, когда на релейных стратегиях такое СПРН построить нельзя.

10.2. Модель эффективной зарплаты

В этой модели повторяется динамическая игра переговоров о зарплате. В каждом повторении фирма предлагает работнику зарплату w. Работник, зная w, может либо согласиться на эту зарплату, либо отказаться и уйти на альтернативную работу с зарплатой w_0.

Если работник согласился на предложение фирмы, то он зачисляется на работу, где он может работать старательно, прикладывая необходимые усилия e и обеспечивая выпуск y, либо только изображать напряженную работу, прикладывая на самом деле нулевые усилия.

Поскольку **успех проекта** зависит от всей команды, то с вероятностью ***p*** срыва не произойдет и выпуск будет обеспечен, несмотря на ***нулевые усилия*** работника. В этом случае ничего не происходит, поскольку фирма наблюдает только величину выпуска, но не размер усилий работника.

С вероятностью ***1-p*** произойдет срыв проекта (выпуск при этом считается равным нулю) и виновный будет обнаружен.

$$u_F = y - w$$ -Выигрыш фирмы

Выигрыш работника $$u_W = w - e'$$

$$e' = \begin{cases} e & \textit{для старательного работника}, \\ 0 & \textit{для ленивого}. \end{cases}$$

Предположим, что $$y - e > w_0 > py$$

Первое неравенство обеспечивает **выгодность** для найма работника с некоторым уровнем зарплаты, выше его альтернативного уровня W_0.
Второе неравенство говорит о том, что альтернативная зарплата W_0 больше ожидаемого выигрыша работника при нулевых усилиях на новой работе даже при максимальной зарплате, равной выпуску.
Построим **СПРН** при заданном уровне зарплаты ***W**** на основе следующих ***релейных стратегий***:

1. ***Стратегия фирмы***: платить ***w****, пока наблюдается выпуск ***y***, иначе ***0***.
2. ***Стратегия работника***: соглашаться на зарплату не менее ***w**** и стараться; за меньшую зарплату «***не напрягаться***».

$$V_e = \frac{w - e}{1 - \delta}$$ Обозначим выигрыш работника, старательно выполняющего работу с зарплатой ***w****

Выигрыш работника при отклонении:

$$V_d = w^* + \delta\left(pV_d + (1 - p)\frac{w_0}{1 - \delta} \right)$$

$$V_d = \frac{(1 - \delta)w^* + \delta(1 - p)w_0}{(1 - \delta p)(1 - \delta)}$$

Минимальная зарплата:

$$w_0+\frac{1-\delta}{\delta(1-p)}\cdot e\xrightarrow[p\to 1]{}\infty$$

Поэтому в этом случае **СПРН** с этими стратегиями не получится. Если

$$w_0+\frac{1-\delta}{\delta(1-p)}\cdot e\xrightarrow[p\to 0]{}w_0+\frac{1-\delta}{\delta}\cdot e$$

Которая следует из ***условия невыгодности отклонения:***

$$\frac{1}{1-\delta}\left(w^*-e\right)\geq w^*+\frac{\delta}{(1-\delta)}\cdot w_0$$

10.3. Денежная политика

В этой модели повторяется динамическая игра, в которой участвуют представители власти, управляющие денежной политикой, и корпорации.

1. Ход 1. Корпорации формируют некоторый ожидаемый уровень инфляции π_e за год.
2. Ход 2. Власти узнают ожидания корпораций и определяют реальный уровень инфляции π.

Выигрыш корпораций связан с стремлением угадать истинный уровень инфляции, чтобы минимизировать ущерб от нее.

Для власти желателен низкий уровень инфляции, но при этом готовы использовать эффект неожиданной инфляции в качестве рычага госуправления :

Считается , что реальный уровень **ВВП** зависит от целевого по формуле:

$$y=by^*+d\left(\pi-\pi_e\right)^2,\quad 0<b<1,\quad d>0$$

- Здесь $0 < b < 1$ характеризует степень монополизации экономики, сдерживающую ее развитие.
- Параметр $d > 0$ измеряет чувствительность экономики к неожиданной инфляции $$\pi-\pi_e$$
- Незаметно поступающие в экономику деньги могут восприниматься корпорациями как увеличение спроса, на что они могут ответить

ростом предложения. Если же деньги в экономику поступают резко и открыто – увеличение цен

Рассмотрим двухходовую игру и далее добавим повторение.

- Если власти знают ожидаемый уровень инфляции π_e и стремятся максимизировать величину

$$w(\pi,\pi_e) = -c\pi^2 - \left(by^* + d(\pi-\pi_e) - y^*\right)^2,$$

- То из условия первого порядка находим наилучший ответ властей:

$$\pi^*(\pi_e) = \frac{d}{c+d^2}\left[(1-b)y^* + d\pi_e\right] \quad (*)$$

В силу обратной индукции корпорации стремятся максимизировать величину:

$$-\left(\pi^*(\pi_e) - \pi_e\right)^2 \Rightarrow \pi^*(\pi_e) = \pi_e \Rightarrow \pi_e = \frac{d(1-b)}{c}y^*$$

Рассмотрим следующие релейные стратегии:

- Корпорации ожидают нулевую инфляцию до тех пор, пока реализуется нулевая инфляция, иначе переходят на ожидание π_e^*
- Власти реализуют нулевую инфляцию, пока ожидаемая инфляция равна 0, иначе переходят на $\pi^*(\pi_e)$

Условие невыгодности отклонения для корпорации проверять не надо, т.к. для них реализуется максимально возможный выигрыш, равный нулю.

Для властей условие можно записать в виде:

$$\frac{w(0,0)}{1-\delta} \geq w\left(\pi^*(0),0\right) + \frac{\delta}{1-\delta}w\left(\pi_e^*,\pi_e^*\right) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{c}{2c+d^2}$$

Список литературы по лекции 10.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие. М.:ФОРУМ, 2012. – 128 с.
3. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002. – 140 с. (адрес в интернете: http://avorut.ucoz.ru/load/teorija_igr/34)

Лекция 11. Статические игры с неполной информацией

11.1. Понятие ассиметричной информированности, типа игроков и природы

Экономические субъекты всегда бывают информированы в разной степени , асимметрично информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло.

Формально это учитывается с помощью введения понятия типа игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип.

Можно считать, что первый ход делает природа, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми

Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми.

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией.

Характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

11.2. Дуополия Курно с неполной информацией

1. На рынке действуют две фирмы (1 и 2).
2. Фирма i выпускает q_i продукции .
3. Цена на товар $P(Q)=a-Q$ определяется совокупным выпуском $Q=q_1+q_2$.
4. Затраты фирмы i на выпуск продукции q_i равны $C_i(q_i)=c_i \cdot q_i$.Предельные затраты фирм могут быть разными. Предельные затраты фирмы 1 равны $c_1=c$ и общеизвестны и фирме 2 также. Предельн затраты фирмы 2 $c_2 \in\{ c_H , c_L \}$знает только фирма 2
5. **Фирма 1** знает с вероятностью $\boldsymbol{\theta}$, что у **фирмы 2** затраты будут $\boldsymbol{c_H}$

и с вероятностью **$1-\theta$**, что затраты у **фирмы 2** будут равны **c_L.**

6. Для **фирмы 1** стратегией является размер выпуска: **$s_1 = q_1 \geq 0$** а для **фирмы 2** назначение объема выпуска будет зависеть от предельных затрат **$s_2\ (c_2)$**. **$\rightarrow q_2(c_H),\ q_2(c_L)$**.
7. Тройка чисел **(q^*_1 , $q^*_2(c_H)$, $q^*_2(c_L)$)** образуют равновесие, если выпуск является оптимальным ответом **фирмы 2.** (1, 2, 3)усл.

Дуополия Курно с неполной информацией

$$P(Q) = a - Q; \qquad Q = q_1 + q_2$$

$$c_i(q_i) = c_i \cdot q_i;\ c_1 = c;\ c_2 \in \{c_H, c_L\}$$

$$p(c_H) = \theta, \qquad p(c_L) = 1 - \theta$$

$$s_1 = q_1 \geq 0, \qquad s_2 = s_2(c_2)$$

$$q_2(c_H), \quad q_2(c_L); \ (q_1^*, q_2^*(c_H), q_2^*(c_L))$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - c_H - q_1^*}{2}$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - c_L - q_1^*}{2}$$

(3) выпуск **q^*_1** является оптимальным ответом **фирмы 1** на выпуск **$q^*_2(c_H)$** с вероятностью **θ** и выпуск **$q^*_2(c_L)$** с вероятностью **$1-\theta$.**

Найдем **q^*_1** из условия максимизации ожидаемого выигрыша **фирмы 1.**

В силу линейности выигрыша **фирмы 1** по выпуску **фирмы 2** полезно ввести в рассмотрение ожидаемый выпуск q^{θ}_{2}.
Тогда выпуск **фирмы 1** должен быть оптимальным ответом на ожидаемый выпуск **фирмы 2.**

$$\max_{q_1 \geq 0} \theta \cdot \left[\left(a - c - q_1 - q_2^*(c_H)\right) \cdot q_1\right] + \\ + (1-\theta) \cdot \left[\left(a - c - q_1 - q_2^*(c_L)\right) \cdot q_1\right]$$

$$q_2^{\theta} = \theta \cdot q_2^*(c_H) + (1-\theta) \cdot q_2^*(c_L)$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - c_H - q_1^*}{2}$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - c_L - q_1^*}{2}$$

$$q_1^* = \frac{a - c - q_2^{\theta}}{2}$$

В итоге имеем **три** линейных уравнения с **тремя** неизвестными.

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_H + (1-\theta) c_L}{3};$$

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L);$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L).$$

В случае Дуополии Курно с полной информацией и предельных затратах c_1 и c_2 равновесные выпуски равны $q^*_i = (a-2c_i+c_j)/3$

В рассмотренном случае неполной информации при высоких затратах фирма 2 выпускает больше, а при низких затратах выпускает меньше, чем в РН с полной информацией.

Фирма 1 в данном случае вынуждена ориентироваться на средние затраты, уменьшая выпуск при высоких затратах.

11.3. Байесовские игры, условия согласования, равновесие Байеса – Нэша

Наиболее удобной формой задания статической игры с неполной информацией является так называемая байесовская игра.

Далее нормальная форма игры расширяется за счет введения так называемых множеств типов игрока, которые задают приватные характеристики участника, и вероятностных представлений о типах других участников.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры).

Описание **статической байесовской игры** должно включать в себя следующие составляющие:

1. ***множество игроков***;
2. для каждого игрока — ***множество типов***;
3. ***распределение вероятностей*** на множествах типов;

4. для каждого игрока — ***множество возможных действий***;
5. для каждого игрока — ***функции выигрышей***.

В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов. Предполагается, что появление того или иного типа—случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве типов.

Если множества типов конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов , т. е. функцию : π: $T\rightarrow R_{+}$, для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательными и их сумма должна равняться единице.

Предполагаем, что имеет место независимость появления типов у разных игроков. В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, т. е. m функций:

$$\pi_i: T_i \rightarrow R_{+},\ i=1,2,\ldots.m$$

таких что π_i —вероятность появления типа T T_i игрока i. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы—это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов.

Независимость типов в данном контексте означает, что ***функцию распределения*** можно представить как **произведение функций распределения типов** отдельных игроков.

Предполагается, что все **типы** одного и того же игрока имеют **одинаковые множества действий** . Выигрыш в **статических байесовских играх** зависит не только от выбранных игроками **действийm,** но и от того, какие именно **типы** участвуют в игре.

Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей.

Определение. Байесовской игрой называется следующая совокупность объектов

$$N = \{1, \dots, n\} \qquad G_B = \{A_i, T_i, u_i, p_i, i \in N\}$$

$$A_i, \quad a = (a_i, i \in N) \in A = \prod_{i \in N} A_i$$

$$T_i, \quad t = (t_i, i \in N) \in T = \prod_{i \in N} T_i$$

$$u_i(a, t) \qquad p_i(t_{-i} \mid t_i);$$

$$t_{-i} = (t_j, j \neq i) \in T_{-i} = \prod_{j \neq i} T_j$$

Стратегии в статических байесовских играх <u>не совпадают </u>с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией стратегия игрока описывает действия каждого из типов этого игрока.

Можно представить стратегию как функцию , которая ставит в соответствие каждому типу некоторые действия .

Условие согласования представлений:

$$p_i(t_{-i} \mid t_i) = \begin{cases} \dfrac{p_i(t_i, t_{-i})}{p(t_i)}, & p(t_i) > 0, \\ 0, & p(t_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{где} \quad p(t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_i, t_{-i})$$

Стратегия: $$s_i : T_i \to A_i$$

$p_i(t_{-i} \mid t_i)$- представления о типах остальных игроков при известном своем типе, заданные как вероятностные распределения на множестве типов остальных игроков.

Под стратегией s_i игрока i в байесовской игре понимается отображение множества типов T_i
во множество действий A_i

$$s_i : T_i \to A_i$$

Стратегия байесовской игры определяет действия игрока для всех типов , хотя реально каждый игрок обладает только каким-то одним типом.
В модели под игроком удобнее понимать экономическую роль, которую может играть один из многих участников .

11.4. Аналогия между байесовской игрой и динамической игрой в развернутой форме

Природа (игрок 0) выбирает тип $t\in T$, используя фиксированную и всем известную смешанную стратегию p(t).
Каждый игрок узнает свой тип t , но не знает типов остальных игроков. У игрока i столько информационных множеств H, сколько типов во множестве T_i.
Игроки одновременно и независимо выбирают действия $a_i \in A_i$.
Игра заканчивается подсчетом выигрышей $u_i(a,t)$

Для байесовской игры вводится свое понятие равновесия. Определим равновесие Байеса-Нэша.

Определение. Равновесием Байеса – Нэша **(РБН)** $s^* = \left(s_i^*, i \in N\right)$ в байесовской игре G_B называется такой профиль стратегий $s_i : T_i \to A_i$ всех игроков, для которого действие $s_i^*(t_i), \quad \forall t_i \in T_i$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока i

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(a_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\right) \cdot p\left(t_{-i} \mid t_i\right)$$

по всем его действиям $a_i \in A_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков. Так как игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть условным по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса— отсюда и термины - байесовские игры, -байесовское равновесие.)

Теорема: В конечной байесовской игре существует **РБН** в **смешанных стратегиях**. Если множества типов ***одноэлементные***, то **РНБ** сводится к **РН** в обычной ***статической игре с полной информацией.***

Интерпретация смешанных стратегий: (возможны 3 интерпретации смешанных стратегий)

1. Случайный выбор;
2. Малый случайный параметр;
3. Представления и ожидания.

Список литературы по лекции 11.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

Лекция 12. Модели основанные на статических играх с неполной информацией

12.1. Аукцион с закрытыми заявками по первой цене

Рассмотрим модели, которые основаны на статических играх с неполной информацией.

Интерес к аукционам связан с тем, что они лежат в основе многих торговых систем, целью которых является поиск эффективного механизма торговли и других сделок.

Рассмотри применение теорию игр с точки зрения совершенствования дизайна аукционов

Рассмотрим самый простой аукцион, на котором n покупателей соревнуются за покупку одной единицы товара. (аукцион с закрытыми заявками по первой цене)

Покупатели независимо и одновременно друг от друга подают аукционеру заявки на покупку товара. В каждой заявке указывается цена, которую покупатель готов заплатить за этот товар.

Победителем на аукционе считается тот покупатель, который указал в заявке наибольшую цену, по которой заключается сделка между продавцом и покупателем.

Если максимальных цен несколько, то для определения победителя бросается жребий среди покупателей, указавших максимальную цену.

Простой аукцион

$$n = 2; \quad b_i \geq 0; \quad v_i \in [0,1]$$

$$b_i \in A_i = [0,1]$$

$$v_i \in T_i = [0,1]$$

- $$p_i(v_j)$$

5

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

Если этот ***игрок i*** выберет цену b_i, то **вероятность** того, что другой ***игрок j*** предложил более низкую v_j цену, равна

$$\Pr\{b_j(v_j) < b(v_i)\} = \Pr\{v_j < b^{-1}(b_i)\}$$

где мы воспользовались тем, что оценка

равномерно распределена на ***[0, 1].***

$$u_i(b_i, b_j, v_i, v_j) = \begin{cases} v_i - b_i, & b_i > b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2}, & b_i = b_j \\ 0, & b_i < b_j \end{cases}$$

$$b_i : [0,1] \to [0,1]$$

8

Необходимо найти **РБН** в этой байесовской игре. **Выигрыш** игрока ***зависит*** только от его ***собственного типа***, но не зависит от остальных. **Стратегией** игрока ***i*** является функция $b_i:[0,1] \to [0,1]$, которая показывает, какую заявку $b_i(v_i)$ будет выставлять игрок ***i*** при стоимости товара v_i

Найти **РБН** , не накладывая ограничений на класс функций b_i, достаточно трудно. Выбираем линейную стратегию и из соображения невозможности превышения заявки над стоимостью принимаем $a_j=0$.Заявка не может быть отрицательной – $c_j>0$.

Вероятность одинаковых заявок равна ***0***.

Далее считаем вероятность победы на аукционе:

$$b_i\left(v_i\right):$$

$$\max_{b_i\in[0,1]}\left[\left(v_i-b_i\right)\cdot \Pr\left\{b_i>b_j\left(v_j\right)\right\}+\frac{1}{2}\left(v_i-b_i\right)\cdot \Pr\left\{b_i=b_j\left(v_j\right)\right\}\right]$$

$$b_j\left(v_j\right)=a_j+c_jv_j$$

$$a_j+c_jv_j\le v_j$$

$$a_j=0,\quad c_j>0\Rightarrow b_j\left(v_j\right)=c_jv_j$$

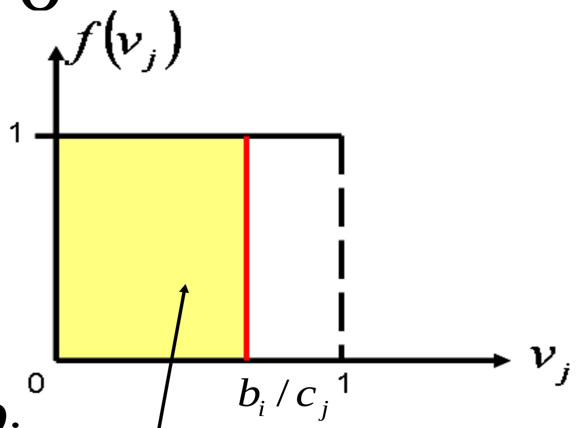
11

$$\Pr\left\{b_i=b_j\left(v_j\right)\right\}=0$$

$$\Pr\left\{b_i>b_j\left(v_j\right)\right\}=$$

$$=\Pr\left\{b_i>c_jv_j\right\}=$$

$$=\Pr\left\{v_j<\frac{b_i}{c_j}\right\}=\frac{b_i}{c_j}$$



$$\Pr\left\{v_j<\frac{b_i}{c_j}\right\}=1\cdot\frac{b_i}{c_j}=\frac{b_i}{c_j}$$

12

$$\frac{(v_i - b_i)\cdot b_i}{c_j} \qquad b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$$

$$a_j = 0, \quad c_j > 0 \quad \left(c_j = \frac{1}{2}\right)$$

13

Оптимальным ответом на линейную стратегию является линейная стратегия. Найдено **единственное равновесие в линейных стратегиях**. Если расширить класс стратегий до возрастающих дифференцируемых функций, то новых симметричных **РБН** не появится.

$$v_j = b^{-1}(b_j) = b^{-1}(b(v_j))$$

$$\Pr\{b_i > b(v_j)\} =$$

$$= \Pr\{v_j < b^{-1}(b_i)\} = b^{-1}(b_i)$$

$$\max_{b_i \in [0,1]} \left[(v_i - b_i)\cdot b^{-1}(b_i)\right]$$

15

$$-b^{-1}(b_i)+(v_i-b_i)\cdot\frac{db^{-1}(b_i)}{db_i}=0$$

$$\frac{db^{-1}(b_i)}{db_i}=\frac{1}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)}=\frac{1}{b'(v_i)}$$

$$-v_i+(v_i-b(v_i))\cdot\frac{1}{b'(v_i)}=0$$

$$b'(v_i)\cdot v_i+b(v_i)=v_i$$

$$\left[b(v_i)\cdot v_i\right]'=v_i$$

$$b(v_i)\cdot v_i=\frac{1}{2}v_i^2+k$$

$$0\le b(v_i)\le v_i\Rightarrow k=0\Rightarrow b(v_i)=\frac{1}{2}v_i$$ [17]

12.2. **Двойной аукцион**

В двойном аукционе роли покупателей и продавцов симметричны. Рассмотрим простейший вариант двойного аукциона: 1 покупатель, 1 продавец, 1 единица неделимого товара.

По типу подачи заявок данный вариант двойного аукциона называется аукционом с закрытыми заявками (покупатель и продавец подают заявки одновременно и независимо друг от друга).

- *Заявка покупателя* $\boldsymbol{p_B}$ означает желание купить товар по этой цене или дешевле.
- *Заявка продавца* $\boldsymbol{p_s}$ означает желание продать по этой цене или дороже.
- *Сделка* совершается при условии $\boldsymbol{p_B \geq p_s}$ по цене $\boldsymbol{p = \frac{(p_B+p_s)}{2}}$ Если $\boldsymbol{p_B < p_s}$, то сделки нет.
- *Для покупателя* стоимость товара равна ,
  а для *продавца* стоимость товара равна

Двойной аукцион

$$p_B \qquad p_S$$

$$p_B \geq p_S : \quad p = \frac{p_B + p_S}{2}$$

$p_B < p_S$ **- сделки нет**

$$v_B : (v_B - p) \qquad v_S : (p - v_S)$$

20

Стоимости товара для игроков равномерно распределены на отрезке ***[0,1]***, причем каждый игрок точно знает только ***свою оценку*** стоимости, а об оценке стоимости другого у него есть только **вероятностное представление**.

В результате данный вариант **двойного аукциона** предстает как **байесовская игра**, и наша задача найти **РБН.**

Стратегии игроков в данной игре – это их функции заявки .

$$p_B(v_B) \quad и \quad p_S(v_S)$$

Условие РБН запишем отдельно для покупателя и продавца.

$$v_B \in [0,1] \quad p_S(v_S)$$

$$\max_{p_B \in [0,1]} \left[v_B - \frac{p_B + E(p_S(v_S) \mid p_B \geq p_S(v_S))}{2} \right] \cdot \Pr\{p_B \geq p_S(v_S)\}$$

$$v_S \in [0,1] \quad p_B(v_B)$$

$$\max_{p_S \in [0,1]} \left[\frac{p_S + E(p_B(v_B) \mid p_S \leq p_B(v_B))}{2} - v_S \right] \cdot \Pr\{p_S \leq p_B(v_B)\}$$

$$p_B(v_B) = \begin{cases} x, & v_B \geq x \\ 0, & v_B < x \end{cases} \quad p_S(v_S) = \begin{cases} x, & v_S \leq x \\ 1, & v_S > x \end{cases}$$

23

Двойной аукцион

- *Стратегия покупателя:* $p_B(v_B) = x$,

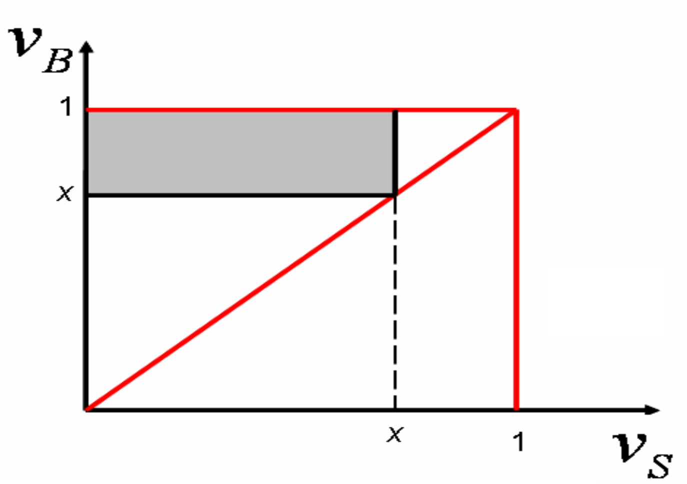
  если $v_B \geq x$, иначе $p_B(v_B) = 0$

- *Стратегия продавца:* $p_S(v_S) = x$ *,*

  если $v_S \leq x$, иначе $p_S(v_S) = 1$

24

$$v_S \le v_B \qquad p_B(v_B) \equiv v_B, \qquad p_S(v_S) \equiv v_S$$



$$x \cdot (1 - x) \le \frac{1}{4}$$

25

$$p_S(v_S) = a_S + c_S v_S, \qquad p_B(v_B) = a_B + c_B v_B$$

$$\max_{p_B \in [0,1]} \left[v_B - \frac{p_B + E(a_S + c_S v_S \mid p_B \ge a_S + c_S v_S)}{2} \right] \times$$
$$\times \Pr\{p_B \ge a_S + c_S v_S\}$$

$$\Pr\{p_B \ge a_S + c_S v_S\} = \frac{p_B - a_S}{c_S}$$

$$E(a_S + c_S v_S \mid p_B \ge a_S + c_S v_S) = \frac{p_B + a_S}{2}$$

26

$$\max_{p_B\in[0,1]}\left[v_B-\frac{p_B+\frac{a_S+p_B}{2}}{2}\right]\cdot\frac{p_B-a_S}{c_S}$$

$$p_B=\frac{2}{3}v_B+\frac{1}{3}a_S \qquad p_S=\frac{1}{3}(a_B+c_B)+\frac{2}{3}v_S$$

$$\max_{p_S\in[0,1]}\left[\frac{p_S+\frac{p_S+a_B+c_B}{2}}{2}-v_S\right]\cdot\frac{a_B+c_B-p_S}{c_B}$$ 27

$$p_B=\frac{1}{3}a_S+\frac{2}{3}v_B=a_B+c_Bv_B\Rightarrow a_B=\frac{1}{3}a_S,\quad c_B=\frac{2}{3}$$

$$p_S=\frac{1}{3}(a_B+c_B)+\frac{2}{3}v_S=a_S+c_Sv_S$$

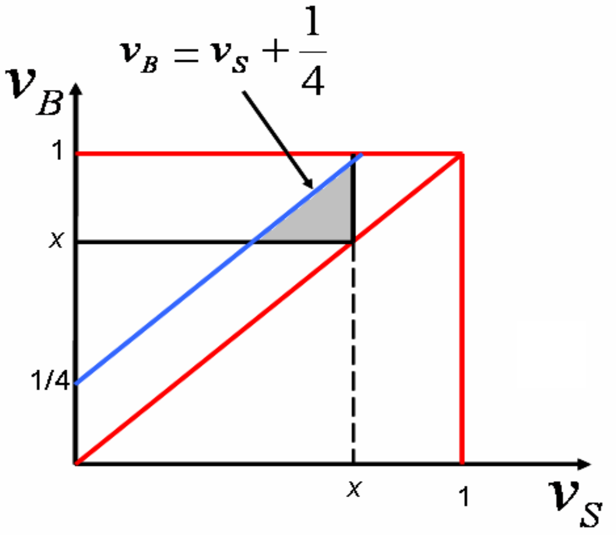
$$\Rightarrow\quad a_S=\frac{1}{3}(a_B+c_B),\quad c_S=\frac{2}{3}.$$

$$a_B=\frac{1}{3}a_S=\frac{1}{9}(a_B+c_B),\quad 9a_B=a_B+c_B=a_B+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a_B=\frac{1}{12},\quad a_S=\frac{1}{4}$$

$$p_B=\frac{2}{3}v_B+\frac{1}{12};\qquad p_S=\frac{2}{3}v_S+\frac{1}{4}$$ 28

$$\frac{2}{3}v_B + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3}v_S + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad v_B \geq v_S + \frac{1}{4}$$



$$\frac{9}{32} > \frac{1}{4}$$

29

12.3. **Принцип выявления**

12.4.

Дизайн экономических механизмов

Принцип выявления (Майерсон)

Дана байесовская игра $G_B = \{A_i, T_i, u_i, p_i, i \in N\}$

и ***s**** - РБН в этой игре. Тогда существует

правдивый прямой механизм

$$G_T\left(s^*\right) = \{T_i, T_i, v_i, p_i, i \in N\},$$

в котором ***искренние стратегии*** $\tau_i\left(t_i\right) \equiv t_i$

образуют **РБН** с теми же выигрышами, что и **РБН *s****.

30

Список литературы по лекции 12.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.

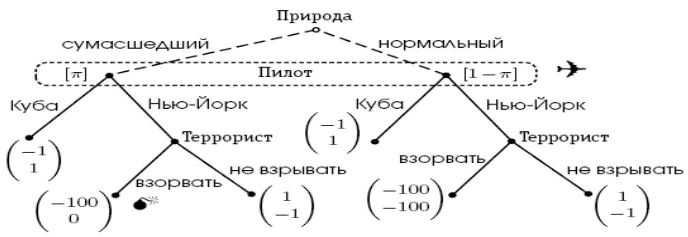
Лекция 13. **Динамические игры с неполной информацией**

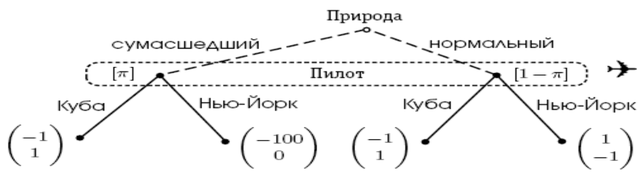
13.1. Совершенное равновесие Нэша

Байесовские игры (игры с неполной информацией) можно представить как динамические игры с несовершенной информацией, если ввести природу, делающую случайные ходы, как еще одного игрока. То, что один игрок не знает тип другого игрока, при этом отражается с помощью соответствующего задания информационных множеств.
В качестве примера динамической игры с неполной информацией(динамической байесовской игры) рассмотрим известную игру «Террорист». Террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший». Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна π. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок—природа. Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста.

Первый ход делает природа. С вероятностью π природа создает Сумасшедшего террориста, а с вероятностью $1-\pi$ —нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста. Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов.

Игра «Террорист»





$$(-100))\cdot \pi + 1\cdot(1-\pi) = 1-101\pi$$

$$1-101\pi > -1 \Rightarrow \pi < \frac{2}{101}$$

В рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, поскольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой—в правой. Однако зачастую такие вероятности неизвестны.

Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию совершенного байесовского равновесия.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

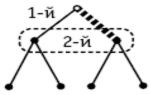
- набора стратегий ***(s1, . . . , sm)*** всех игроков;
- для каждого игрока ***i***—набора ожидаемых им стратегий остальных игроков s^e_{-i};
- для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход,— ожидаемого им распределения, заданного на вершинах этого информационного множества.

Для того чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия.

- Ожидания любого игрока согласуются со стратегиями: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока i соответствует выбранной игроком стратегии (s_i) и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки (s^e_{-i}).
- Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, т. е. выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий (s_i, s^e_{-i}).
- Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $s^e_{-i} = s_{-i}$.

Совершенное байесовское равновесие (СБР)

$$s_{-i}^{e} \qquad \left(s_i, s_{-i}^{e}\right)$$



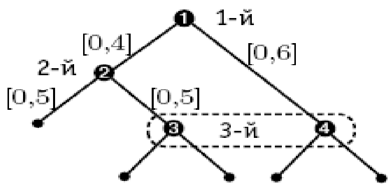
Правило Байеса:

$$A, B_j,\ j = \overline{1, m}$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j \qquad\qquad A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

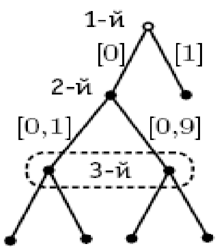
$$P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{\sum_{k=1}^{m} P\left(B_k\right) \cdot P\left(A \mid B_k\right)} = \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{P(A)}$$

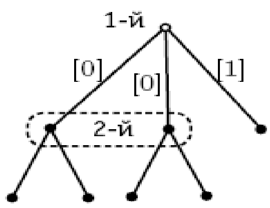
$$P\left(A \mid B_j\right) = 1 \Rightarrow P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right)}{P(A)}, \quad P(A) = \sum_{k=1}^{m} P\left(B_k\right)$$



$$\frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}6} = 0{,}25$$

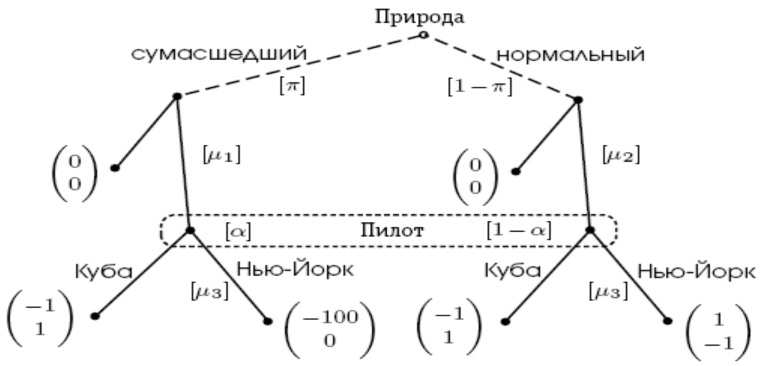
$$\frac{0{,}6}{0{,}2 + 0{,}6} = 0{,}75$$





13.2. **Игра террорист**

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры «Террорист» с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит 0, а выигрыш пилота составит 0.



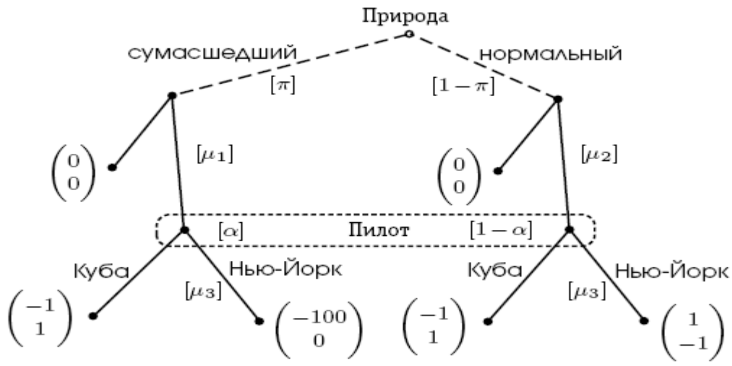
СБР определяется вероятностями:

$$\mu_1 \in [0,1], \quad (-100)\cdot\alpha + 1\cdot(1-\alpha) > -1 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{101}$$

$$\mu_2 \in [0,1], \qquad \mu_3 = \begin{cases} 1, & \alpha < 2/101, \\ [0,1], & \alpha = 2/101, \\ 0, & \alpha > 2/101, \end{cases}$$

$$\alpha \in [0,1],$$

$$\mu_3 \in [0,1].$$



$$P(B_1) = \pi, \quad P(B_2) = 1 - \pi, \quad P(B_1 \mid A) = \alpha,$$

$$P(A \mid B_1) = \mu_1, \quad P(A \mid B_2) = \mu_2.$$

$$\mu_1, \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi\mu_1}{\pi\mu_1 + (1-\pi)\mu_2}$$

$$\mu_1, \mu_2 = 0 \Rightarrow \alpha(\mu_1, \mu_2) = [0,1]$$

Список литературы по лекции 13.

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. - М., ООО «Контакт плюс», 2010. - 336 с.
2. Николенко С.И. Теория экономических механизмов: учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2009. – 207 с.
3. Бусыгин В.П. Микроэеономика- 3 уровень,2007.-1171с.

Невежин,
Виктор
Павлович

Теория игр. Примеры и задачи

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
серия основана в 1996 г.

В.П. НЕВЕЖИН

ТЕОРИЯ ИГР

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано
кафедрой математического моделирования экономических процессов
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров и магистров

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва ФОРУМ 2023
ИНФРА-М

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я73
Н40

Рецензенты:
Еремеев А.П., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Московского энергетического института;
Кружилов С.И., кандидат технических наук, доцент кафедры системного анализа Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

Невежин В.П.

Н40 Теория игр. Примеры и задачи : учебное пособие / В.П. Невежин. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2023. — 128 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-00091-563-9 (ФОРУМ)
ISBN 978-5-16-016657-5 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-109243-9 (ИНФРА-М, online)

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов, изучающих такие дисциплины, как «Теория игр», «Элементы теории игр», «Теория игр и стратегическое поведение фирм», «Математические методы и модели исследования операций» и т.п.

Важным достоинством данного пособия является то, что в нем по каждой рассматриваемой теме из теории игр приводится краткая теоретическая справка, рассматривается решение типового примера, а затем предлагаются задания для самостоятельной работы студентов. Приведенные задания могут быть использованы как для промежуточного контроля знаний, так и в качестве практических заданий на экзамене или зачете.

Для студентов экономических вузов, обучающихся по программам «бакалавр экономики» и магистерским программам, а также преподавателей, ведущих обучение по данным дисциплинам.

УДК 519.83(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-00091-563-9 (ФОРУМ)
ISBN 978-5-16-016657-5 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-109243-9 (ИНФРА-М, online)

Введение

Достаточно часто в коммерческой деятельности одна из сторон пытается применить свои условия или решения, а при этом другая сторона противодействует или препятствует им и преследует свои цели (решения). Эти противодействия могут носить как пассивный, так и активный характер, а поэтому следует учитывать различные варианты поведения противоположной стороны и ее действия.

Возможные варианты поведения обеих сторон и их исходов для каждого сочетания альтернатив и состояний можно представить в виде математической модели, которая называется игрой.

Если в качестве противоположной стороны выступает пассивная сторона, которая явно активно не противодействует достижению намеченной цели, то такие игры называются играми с природой. В качестве такой стороны в коммерции являются погодные условия, например при формировании и выпуске уборочной техники для сбора урожая, реакция населения на новые виды товаров, недостаточная информированность о коммерческих операциях и т. п.

Если же в качестве противоположной стороны выступает активная сторона, противодействующая достижению намеченной цели, т. е. происходит столкновение противоположных целей, решений, интересов, мнений, то такие ситуации называются конфликтными. Принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Известно только, что противник сознательно стремится предпринять наименее выгодные для вас действия, чтобы обеспечить себе наибольший успех, но при этом неизвестно, в какой мере противник оценивает обстановку, возможные последствия, ваши возможности и намерения. В таком случае принимать решения приходится каждой стороне конфликта.

Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр — математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу — в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках[1].

Теория игр представляет раздел прикладной математики, а точнее — исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках — социологии, политологии, психологии, этике и других. Начиная с 1970-х гг. ее взяли на вооружение биологи для исследования поведения животных и теории эволюции. Очень важное значение теория игр имеет для искусственного интеллекта и кибернетики, особенно с проявлением интереса к интеллектуальным агентам.

Математическая теория игр берет свое начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (англ. *Theory of Games and Economic Behavior*, *1944*).

Математическая теория игр сейчас бурно развивается, но однако этот метод достаточно затратен. Его применяют для оправданных задач: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п. Ряд известных ученых стали нобелевскими лауреатами по экономике за достижения в области теории игр и экономической теории. Это — Роберт Ауманн, Райнхард Зелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон.

В главе 1 предлагаются задачи из теории игр с наиболее простыми из ситуаций так называемые конфликтные ситуации, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные (иногда противоположные) цели, причем выигрыш каждой стороны зависит от того, как себя поведут другие.

Примеры конфликтных ситуаций многообразны. Это может быть ситуация между работником автоинспекции и водителем, налоговиком и налогоплательщиком, ситуация, складывающаяся в ходе боевых действий. Столкновение противоречащих друг другу интересов

[1] URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/

наблюдается также в судопроизводстве, в спорте, взаимоотношениях различных ступеней иерархии в сложных системах и др.

Близкой по идеям и методам к теории игр является теория статистических решений, которая отличается тем, что неопределенная ситуация не имеет конфликтной окраски — никто никому не противодействует, но элемент неопределенности налицо. Здесь неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника» (или других участников конфликта), а от объективной действительности, которую в теории статистических решений принято называть природой. Соответствующие ситуации часто называются играми с природой. Природа мыслится как некая незаинтересованная инстанция, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не злонамеренно.

Принимающему решение в игре с природой «легче» добиться успеха (ведь ему никто не мешает!), но ему «труднее» обосновать свой выбор. В игре против сознательного противника элемент неопределенности отчасти снимается тем, что мы «думаем» за противника, «принимаем» за него решение, самое неблагоприятное для нас самих. В игре же с природой такая концепция, в общем случае, не подходит.

В главе 2 предлагаются задачи на игры с природой

Практически все примеры и задачи прошли в течение целого ряда лет апробацию в процессе обучения студентов по курсу или разделу «Теория игр» в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации.

Глава 1
АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1.1. Основные положения теории игр

Теория игр — это математическая теория конфликтных ситуаций. Основными ограничениями этой теории являются предположение о полной («идеальной») разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного «перестраховочного» решения.

Игра — упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации, в которой выработаны определенные правила действия сторон в процессе игры. В игре конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры — партией, исход игры — выигрышем или проигрышем.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. *Ходом* в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают *личные* и *случайные*. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора, например бросанием монеты.

Одну играющую сторону может представлять один игрок или группа участников игры (игровое лицо), имеющих общие интересы или некоторую общую цель, не совпадающую с интересами (целями) других групп. Разные члены участников игры могут быть по-разному информированы об обстановке проведения игры.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей. Причем стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

- *комбинаторные игры*, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их все перебрать и проанализировать;
- *азартные игры*, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Теория игр не занимается азартными играми;
- *стратегические игры*, в которых неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе комбинаторику и свойства азартных игр, стратегичность может сочетаться с комбинаторикой и т. д.

Количество игроков. В игре могут сталкиваться интересы двух или более игровых лиц (сторон). В зависимости от количества игровых лиц игра называется парной, если в ней участвуют две стороны (игрока), а если число сторон (игроков) больше двух — множественной. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную. Наибольший интерес вызывают игры двух лиц. Они и математически более глубоко проработаны, получили наибольшее распространение в практике анализа игровых ситуаций и имеют обширную библиографию.

В последующем задачи и упражнения рассматриваются только для игр двух лиц.

По ***характеру выигрышей игры*** делятся на: игры с *нулевой суммой* и игры с *ненулевой суммой*. Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется *игрой с ненулевой суммой*, например игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней.

По ***характеру взаимодействия игры*** делятся на:

1) *бескоалиционные*: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) *коалиционные* (кооперативные) — могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперед определены.

По ***виду функций выигрыша*** игры делятся на: *матричные*, *биматричные*, *непрерывные*, *выпуклые*, *сепарабельные*, *типа дуэлей* и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задается выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2, столбец — номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путем сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец — стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице — выигрыш игрока 2).

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой*. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Одним из основных понятий теории игр является *стратегия.*

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре.

Количество стратегий игры. По этому критерию игры делятся на конечные и бесконечные. Игра называется *конечной*, если у каждого игрока имеется конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является *бесконечной*.

По количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей, игры бывают одношаговые и многошаговые. *Одношаговые* игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один-единственный ход. В *многошаговых* играх игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили большое распространение так называемые деловые игры. Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей. Деловые игры предназначены для воспроизведения и согласования коммерческих интересов.

В *деловых играх* игрокам обычно задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила проведения игры, представляются варианты возможных решений и оценка их последствий. В игре обязательно присутствует «ведущий», который руководит игрой, оценивает принятые игроками решения, состояния, в которых они могут находиться в процессе игры, и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Приведенный перечень существующих игр далеко не исчерпан. Его можно найти в различных источниках по теории игр, например [1, 6,13].

Выигрыш или проигрыш сторон оценивается численно, другие случаи в теории игр не рассматриваются, хотя не всякий выигрыш в действительности можно оценивать количественно.

Теория игр занимается принятием решений в условиях конфликтных ситуаций двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. Тем самым игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации, которые устанавливают:

- выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;
- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;
- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Основными вопросами теории игр, которые возникают в коммерческой деятельности, являются:

- в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;
- существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;
- существуют ли оптимальные стратегии, и если да, то как их найти?

Для игры, как правило, определен набор возможных конечных ее состояний (выигрыш, ничья, проигрыш) и игрокам (участникам игры) известны платежи в виде матрицы $C = \| c_{ij} \|$, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям игроков (номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1, номер столбца — номеру стратегии игрока 2), а ее элементы — выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*. В общем случае платежная матрица является прямоугольной.

Так как интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, минимизировать свой проигрыш. Поэтому решение игры будет состоять в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется очень «пессимистичный» критерий — *минимакса-максимина*.

Так, если имеются два игрока A и B. Обозначим стратегии игрока A через a_i, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а стратегии игрока B через b_j, $j = 1, \ldots, m$, т. е. $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Количество стратегий игроков может быть различным или одинаковым. Если игрок A применяет свою i-ю стратегию, а игрок B свою j-ю стратегию, то результатом игры будет значение c_{ij}. Построим матрицу результата игры. Расположим стратегии игрока A соответственно строкам некоторой матрицы, а стратегии игрока B — столбцам матрицы. На пересечении строк и столбцов будет стоять результат игры при применении игроками различных стратегий:

A	B			
	b_1	b_2	...	b_m
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}

Матрица $C = (c_{ij})_{n \times m}$ называется матрицей выигрыша, платежной матрицей или матрицей цен игры.

Для однозначной определенности принято, что игрок A всегда выигрывает, а игрок B — проигрывает. Так, если $c_{ij} > 0$, то игрок A выигрывает данную сумму, а если $c_{ij} < 0$, то игрок A выигрывает сумму минус c_{ij} (т. е. проигрывает эту сумму), если $c_{ij} = 0$, то результатом игры является ничья и выигрыши игроков равны нулю.

Решить задачу по теории игр значит найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и выигрыш (результат игры).

Если первый игрок применяет стратегию a_i, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии b_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума:

$$\alpha_i = \min_j c_{ij}, \ i = \overline{1, m}. \tag{1.1}$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i обращается в максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij}. \tag{1.2}$$

Величина α называется ***нижней ценой игры***. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α, т. е. является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично по каждому столбцу матрицы

$$\beta_j = \max_i c_{ij}, \quad j = \overline{1, n} \tag{1.3}$$

найдем минимальное значение β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij}. \tag{1.4}$$

Величина β называется ***верхней ценой игры***. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока, придерживаясь которой он при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β, т. е. это гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Для любой матрицы $C = \|c_{ij}\|$ выполняется неравенство $\beta \geq \alpha$.

Если $\beta = \alpha$, т. е. верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку* (образуется стратегией игрока A и стратегией игрока B).

Величина $V = \beta = \alpha$ называется *ценой игры*. Она определяет средний выигрыш игрока A и средний проигрыш игрока B при использовании ими оптимальных стратегий.

Если в платежной матрице C все элементы строки $A_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k = (c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{km})$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется *доминирующей*, а строка A_k — *доминируемой*. Аналогично можно говорить о «доминирующем» и «доминируемом» столбцах.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки; второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, т. е. используют *смешанную* стратегию.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m$, причем:

$$p_i \geq 0, \ i = \overline{1, m} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

или в виде строки:

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m).$$

Аналогично смешанные стратегии S_B игрока B обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_j & \dots & A_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

или в виде строки:

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где $q_j \geq 0, \ j = \overline{1, n} \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$

Платежная матрица игры имеет следующий вид:

A \ B	q_1	q_2	.....	q_j	.....	q_n
p_1	c_{11}	c_{12}	.....	c_{1j}	.....	c_{1n}
p_2	c_{21}	c_{22}	.....	c_{2j}	.....	c_{2n}
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
p_i	c_{i1}	c_{i2}	.....	c_{ij}	.....	c_{in}
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
p_m	c_{m1}	c_{m2}	.....	c_{mj}	.....	c_{mn}

Игрок A выбирает стратегию p_i так, чтобы максимизировать наименьший *ожидаемый* выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок *B* выбирает стратегию q_j с целью минимизировать наибольший *ожидаемый* проигрыш по строкам. Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Игрок *A* выбирает стратегию p_i, дающую

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} c_{i1}\cdot p_i\,,\ \sum_{i=1}^{m} c_{i2}\cdot p_i\,,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} c_{in}\cdot p_i\right)\right\};$$

игрок В выбирает стратегию q_j, дающую

$$\min_{p_i}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}\cdot q_j,\ \sum_{j=1}^{n} c_{2j}\cdot q_j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} c_{mj}\cdot q_j\right)\right\}.$$

Когда стратегии p_i^0 и q_j^0 оптимальны, то выполняется строгое равенство между максиминным ожидаемым выигрышем и минимаксным проигрышем, а результирующее значение равно оптимальному (ожидаемому) значению игры.

Этот вывод следует из теоремы фон Неймана о минимаксе.

1.2. Построение платежной матрицы

Пример. Предприниматель, осуществляющий ремонт автомашин, хочет определить, какое ему надо выбрать число ремонтных мест в мастерской, чтобы в последующем получить максимальную выручку. При этом у него имеются следующие данные: выручка с каждой обслуженной машины будет составлять 9 у. е., простой (когда машин на обслуживании нет) — 6 у. е., а убыток от невозможности обслужить (нет ремонтных мест) — 5 у. е. и ремонтных машиномест может быть 2, 3, 5, 8.

Требуется составить платежную матрицу, если машины будут поступать на ремонт в количестве 2, 3, 5 и 8 шт.

Решение. 1. Число ремонтных мест в мастерской — 2.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$).

б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$), а одну — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 5 у. е. Тем самым общая выручка составит 13 у. е. ($13 = 18 - 5$).

в) На ремонт поступят 5 машин. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$), а 3 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 15 у. е. Тем самым общая выручка составит 3 у. е. ($3 = 18 - 15$).

г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 2 и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$), а 6 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 30 у. е. Тем самым общая выручка составит –12 у. е. ($-12 = 18 - 30$).

2. Число ремонтных мест в мастерской — 3.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$). Одно ремонтное место будет простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 6 у. е. Тем самым общая выручка составит 12 у. е. ($12 = 18 - 6$).

б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат все 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. ($27 = 3 \cdot 9$).

в) На ремонт поступят 5 машин. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. ($27 = 3 \cdot 9$), а 2 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 10 у. е. Тем самым общая выручка составит 17 у. е. ($17 = 27 - 10$).

г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. ($27 = 3 \cdot 9$), а 5 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 25 у. е. Тем самым общая выручка составит 2 у. е. ($2 = 27 - 25$).

3. Число ремонтных мест в мастерской — 5.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. ($18 = 2 \cdot 9$). Три ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 18 у. е. Тем самым общая выручка составит 0 у. е. ($0 = 18 - 18$).

б) На ремонт поступят 3 машины. Из них обслужат 3 и с этого получат выручку в размере 27 у. е. ($27 = 3 \cdot 9$). Два ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 12 у. е. Тем самым общая выручка составит 15 у. е. ($15 = 27 - 12$).

в) На ремонт поступят 5 машин. Их все 5 обслужат и с этого получат выручку в размере 45 у. е. ($45 = 5 \cdot 9$).

г) На ремонт поступят 8 машин. Из них обслужат 5 и с этого получат выручку в размере 45 у. е. ($45 = 5 \cdot 9$), а 3 — не обслужат, так как нет мест, и это приведет к убытку в размере 15 у. е. Тем самым общая выручка составит 30 у. е. (30 = 45 – 15).

4. Число ремонтных мест в мастерской — 8.

а) На ремонт поступят 2 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 18 у. е. (18 = 2 · 9). Шесть ремонтных мест будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 36 у. е. (36 = 6 · 6). Тем самым общая выручка составит –18 у. е. (–18 = 18 – 36).

б) На ремонт поступят 3 машины. Их обслужат и с этого получат выручку в размере 27 у. е. (27 = 3 · 9). Пять ремонтных мест будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 30 у. е. (30 = = 5 · 6). Тем самым общая выручка составит –3 у. е. (–3 = 27 – 30).

в) На ремонт поступят 5 машин. Их все 5 обслужат и с этого получат выручку в размере 45 у. е. (45 = 5 · 9). Три ремонтных места будут простаивать, и этот простой будет стоить предпринимателю 18 у. е. (18 = 3 · 6). Тем самым общая выручка составит 27 у. е. (27 = 45 – 18).

г) На ремонт поступят 8 машин. Их все 8 обслужат и с этого получат выручку в размере 72 у. е. (72 = 8 · 9).

Полученная в процессе расчетов платежная матрица будет иметь следующий вид:

		Число поступивших автомашин			
		2	3	5	8
Число машиномест	2	18	13	3	–12
	3	12	27	17	2
	5	0	15	45	30
	8	–18	–3	27	72

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ[1]

1.2.1. Производство и реализация товаров

Фирма «Аспект» производит некоторый сезонный товар, имеющий спрос в течение $n(\geq 2)$ единиц времени, и который она может поставить на рынок в один из моментов i, где $i = 1, 2, ..., n$ (рис. 1.1).

[1] Многие задачи, приведенные в данном разделе, взяты из [11, 12, 13].

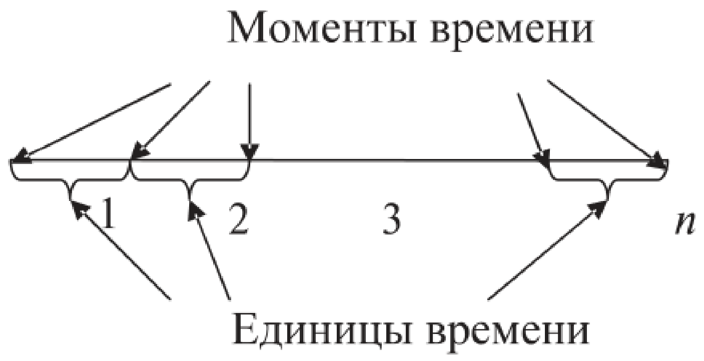


Рис. 1.1

Для конкурентной борьбы с фирмой «Аспект» дочерняя фирма «Ветер» концерна «Буря», не заботясь о собственных доходах, производит аналогичный товар, который поступает на рынок в один из моментов $j = 1, 2, \ldots, n$. Цель фирмы «Ветер» — разорение фирмы «Аспект», после чего, используя капитал концерна «Буря», она может легко наверстать упущенное.

Единственным законным средством фирмы «Ветер» в конкурентной борьбе является выбор момента поставки товара на рынок, так как понижение цены на поставляемый товар запрещено определенным соглашением. Для разорения фирмы «Аспект» фирма «Ветер» должна минимизировать ее доходы. Пусть технология выпуска товара такова, что чем дольше он находится в производстве и, следовательно, позже поступает на рынок, тем выше его качество (в результате, например, применения более совершенных методов производства, использования новых технологий, современного оборудования, более эффективных форм организации труда и т. п.), а реализуется товар только более высокого качества (так как цена на товары разного качества одна и та же). Доход от продажи товара в единицу времени составляет c денежных единиц.

Требуется построить выигрыш-функцию фирмы «Аспект», где под выигрышем понимается доход этой фирмы, зависящий от складывающихся ситуаций. Используя функцию выигрыша, надо сформировать платежную матрицу игры для случая $n = 4$ и записать конкретные значения элементов этой матрицы, которые она приобретает в случае, когда доход $c = 6$ денежным единицам.

1.2.2. Поставка товаров

Имеется две торговые базы, ассортиментный минимум которых составляет один и тот же набор из $n(\geq 2)$ видов товаров. Каждая база должна поставить в свой магазин только один из этих видов товара. Магазины, обозначим их A и B, конкурируют между собой. Один и тот же вид товара в обоих магазинах продается по одной и той же цене. Однако товар, поставляемый в магазин B, более высокого качества. Если магазин A завезет с базы товар i-го вида ($i = 1, 2, \ldots, n$), отличный от товара j-го вида ($j = 1, 2, \ldots, n$), завезенного в магазин B, то товар i-го вида будет пользоваться спросом и магазин A от его реализации получит прибыль c_i денежных единиц. Если же в магазины A и B завезены товары одинакового вида $i = j$, товар i-го вида в магазине A спросом пользоваться не будет, поскольку такой же товар, по такой же цене, но более высокого качества, можно купить в магазине B, и поэтому магазин A понесет убытки по транспортировке, хранению и, возможно, порче товара i-го вида в размере d_i денежных единиц.

Требуется математически формализовать данную конфликтную ситуацию и построить платежную матрицу игры для $n = 3$.

1.2.3. Уплата налога

В конфликтной ситуации участвуют две стороны: A — налоговая инспекция; B — налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет T условных денежных единиц.

У стороны A имеется два возможных способа поведения. Первый A_1 состоит в контролировании дохода налогоплательщика B и взимании с него:

- налога в размере T, если доход заявлен и соответствует действительному,
- налога в размере T и штрафа в размере W, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Второй способ A_2 — вообще не контролировать доход налогоплательщика B.

У стороны B имеется три стратегии поведения. Первая B_1 — заявить о действительном доходе, вторая B_2 — заявить доход, меньший действительного, и, следовательно, налог C с заявленного дохода будет меньше T, третий B_3 — скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Составить платежную матрицу — матрицу выигрышей игрока A.

1.2.4. Рекламная кампания

Две фирмы *A* и *B* проводят на предполагаемых рынках сбыта (в двух соседних городах) рекламную кампанию. У фирмы *A* имеются средства, чтобы оплатить в этих городах четыре способа проведения рекламной кампании, а у фирмы *B* — три способа. Победу каждой фирмы (для определенности фирмы *A*) в каждом из городов будем оценивать в условных единицах (очках) следующим образом:

- если у фирмы *A* больше способов рекламы, чем у противника, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных противником в данном городе, с добавлением одного очка за победу;
- если у *A* — меньше способов рекламы, чем у противника, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ею в данном городе, и минус одно очко — за проигрыш;
- если число способов рекламы в городе у обеих фирм одинаковое, то каждая из них получает ноль очков.

В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаем суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях.

Представить модель конфликта в виде матричной игры, составив платежную матрицу — матрицу выигрышей фирмы *A*.

1.2.5. Страхование автомобилей

Один из самых распространенных и известных видов страхования — страхование автомобилей. В России страхование автомобилей является обязательным, и каждый автолюбитель сталкивается с данной проблемой.

Многие автолюбители хотели бы, во-первых, максимально снизить свои расходы на страховые взносы, а, во-вторых, при наступлении страхового случая получить максимальную выплату. Страховщик при этом, наоборот, хотел бы получать максимальные премии и выплачивать минимальные суммы при наступлении страхового случая. Интересы автолюбителя (страхователя) и страховщика антагонистичны, и отношения, в которые они вступают друг с другом, можно рассматривать в качестве парной антагонистической игры.

Таким образом, рассматривается конфликтная ситуация, в которой присутствует две стороны:

A — это автомобилист (страхователь), целью которого является уменьшение расходов на страхование и в случае дорожно-транспортного происшествия (ДТП) получение максимальной выплаты. При заключении договора он страхует автомобиль на полную его стоимость.

B — страховая компания (страховщик), целью которой является получение максимальной прибыли (т. е. максимальных страховых взносов и минимальных выплат при наступлении страховых случаев).

У автомобилиста существует три стратегии:

A_1 — управлять автомобилем предельно аккуратно и при заключении договора страхования указывать настоящую стоимость автомобиля (300 000 руб.). Будем предполагать, что если водитель внимателен за рулем и следит за дорогой, то вероятность наступления страхового случая практически равна нулю (возможность угона исключим);

A_2 — управлять автомобилем предельно аккуратно и при заключении договора страхования указывать заниженную стоимость автомобиля (страховую сумму) (200 000 руб.) с целью уменьшения страховых взносов;

A_3 — не следить за дорогой и указать завышенную стоимость автомобиля (400 000 руб.). Поскольку в данном случае вероятность наступления страхового случая велика, а владелец автомобиля указал завышенную стоимость, то при ДТП автомобилист получит компенсацию больше, чем если бы он указал настоящую стоимость автомобиля.

При этом следует помнить, что если страховая компания установит, что авария произошла по вине водителя или что он указал завышенную или заниженную стоимость автомобиля, то страховой выплаты может не быть и автомобилист может быть оштрафован (пусть в данном случае это является одним из условий договора страхования).

У страховой компании существует четыре стратегии:

B_1 — не проводить оценку стоимости автомобиля и поверить автомобилисту на слово, а также не заниматься расследованием в случае ДТП на предмет установления виновного с целью экономии времени;

B_2 — проводить расследование в случае наступления страхового случая, но не делать оценку стоимости автомобиля;

B_3 — проверять стоимость автомобиля, но не проводить расследования при ДТП;

B_4 — проводить расследование в случае ДТП и проверять, соответствует ли указанная стоимость автомобиля реальности.

Пусть в случае обнаружения неверно указанной стоимости автомобиля страховщик взимает штраф со страхователя в размере 15 % от реальной стоимости объекта страхования. Если установлено, что ДТП наступило по вине страхователя, то он не получает страховой выплаты. Страховой взнос за страховой период составляет 10 % от указанной страховой суммы. Будем также предполагать, что при наступлении страхового случая автомобиль разрушается полностью. За рассматриваемый страховой период производится только один взнос, и страховой случай может наступить не более одного раза.

Требуется составить платежную матрицу игры.

1.2.6

Постройте платежную матрицу системы противовоздушной обороны (игрока A), целью которой является поражение как можно большего количества самолетов противника (игрока B). Задача противника — преодолеть систему противовоздушной обороны, потеряв при этом как можно меньше самолетов.

Система противовоздушной обороны прикрывает участок территории, располагая двумя зенитно-ракетными комплексами, зоны действия которых не пересекаются. Каждый зенитно-ракетный комплекс с единичной вероятностью поражает самолет противника в зоне своего действия, если его система наведения начинает отслеживать цель и вырабатывать данные для стрельбы еще за пределами зоны. Противник располагает двумя самолетами, каждый из которых может быть направлен в зону действия любого зенитно-ракетного комплекса. В момент, когда система противовоздушной обороны решает, какому зенитно-ракетному комплексу по какой цели стрелять, самолеты противника могут применить обманный маневр и изменить маршрут.

1.2.7

Ежемесячно страховая компания «Гарантия» страхует 100 объектов фирмы «Волна». Каждый из объектов страхуется на 1000 руб. Страховщик забирает себе 10 % от страховой суммы при заключении контракта. В следующем году страховщик намерен увеличить свой доход путем повышения процентной ставки на 1, 2 или 3 процента.

Страховая компания не намерена увеличивать расходы на страхование, а поэтому готова уменьшить количество страхуемых объектов на 5, 10 или 15 штук.

Смоделируйте дальнейшее сотрудничество страховой компании со страхователем, построив платежную матрицу. При каких условиях оно остается выгодным для страховщика?

1.2.8

Два предприятия A и B производят аналогичную продукцию и поставляют ее на рынок, являясь ее единственными поставщиками в регионе. Каждое из предприятий может производить свою продукцию с применением одной из трех различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут устанавливать цену за единицу продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц (д.е.) при различных затратах на производство единицы продукции, см. табл. 1.1.

Таблица 1.1

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1,5	1

В результате маркетингового исследования рынка региона была определена функция спроса на эту продукцию:

$$Y = 6 - 0{,}5X,$$

где Y — количество продукции, которое приобретет население региона (тыс. ед.), а X — средняя цена продукции предприятия. Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации, устанавливаемых предприятиями, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Цена реализации единицы продукции, д.е.		Средняя цена реализации единицы продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс. ед.	Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2			
10	10	10	1	0,31
10	6	8	2	0,33
10	2	6	3	0,18
6	10	8	2	0,70
6	6	6	3	0,30
6	2	4	4	0,20
2	10	6	3	0,92
2	6	4	4	0,85
2	2	2	5	0,72

Указанные в табл. 1.2 значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. Эти значения были вычислены по результатам маркетингового исследования. Поскольку на рынке региона действует всего только два предприятия, то долю продукции второго предприятия, приобретенной населением, в зависимости от соотношения цен можно определить как единица минус доля предприятия 1.

Какое предприятие в описанных условиях окажется в выигрышном положении? Составьте матрицу выигрышей для игрока A — предприятия 1. Коэффициенты выигрышей в матрице определять как значение разницы прибыли предприятий 1 и 2 от производства продукции. Если эта разница положительная, выигрывает предприятие 1 (игрок A), если отрицательная — предприятие 2 (игрок B).

Показатели прибыли каждого предприятия в данной задаче зависят:

- от цены и себестоимости продукции;
- от количества продукции, приобретаемой населением региона;
- от доли продукции, приобретенной населением у предприятия.

Поэтому коэффициенты платежной матрицы будут определяться по формуле

$$a_{ij} = q \cdot (Y \cdot P_1 - y \cdot C_1) - (1 - q) \cdot (Y \cdot P_2 - y \cdot C_2),$$

где q — доля продукции игрока A, приобретаемая населением региона;

Y — количество продукции, приобретаемой населением региона;

P_1 и P_2 — цена реализации единицы продукции игроками A и B;

C_1 и C_2 — полная себестоимость продукции, произведенной игроками A и B ($i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m$).

1.2.9

Семья Ивановых, состоящая из 5 совершеннолетних членов, располагает свободными средствами в размере 10 тыс. условных денежных единиц (у. е.) и желает их приумножить. На семейном совете рассматривается вопрос о возможности открытия срочных непополняемых вкладов на сумму 2 тыс. у. е., 3 тыс. у. е., 5 тыс. у. е. в двух банках, в надежности которых вся семья не сомневается. С учетом особенностей условий размещения средств по указанным вкладам процентные ставки по ним в банках отличаются:

- в первом банке они составляют 12, 6 и 8 %;
- во втором — 9, 10 и 7 % соответственно.

Являются ли отношения между семьей Ивановых и банковской системой антагонистическими? Как более выгодно семье Ивановых разместить свои средства? Составьте платежную матрицу игры.

1.2.10. Планирование посева

Сельскохозяйственное предприятие может посеять одну из трех культур — A_1, A_2, A_3. Необходимо определить, какую из культур сеять, если при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а статистические данные о погодных условиях отсутствуют. План посева должен обеспечить наибольший доход. Состояния погоды можно охарактеризовать тремя вариантами: B_1 — сухо, B_2 — нормально, B_3 — влажно. Показатели урожайности культур в зависимости от состояний погоды и цена каждой культуры приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Состояния погоды	Урожайность культуры в центнерах		
	A_1	A_2	A_3
B_1	20	7,5	0
B_2	5	12,5	7,5
B_3	15	5	10
Цена за 1 центнер в у. е.	2	4	8

Составить платежную матрицу задачи.

1.2.11

Торговый агент должен встретиться с иногородним клиентом и собирается лично вручить ему заказ на 3000 д.е.

Если агент поедет поездом, то потеряет рабочий день, который принес бы ему 1500 д.е.

Полет самолетом позволит сократить рабочий день, но если самолет не полетит из-за тумана, то личная встреча с клиентом не состоится и день на работе не будет потерян. В этом случае придется говорить с клиентом по телефону, что уменьшит сумму заказа до 500 д.е. Вероятность тумана оценивается как 0,1 (по статистике, в это время года 1 день из 10 — с туманом).

Составьте платежную матрицу, элементы которой будут представлять собой доход торгового агента в зависимости от принятого решения.

1.2.12

Два магазина могут продавать некоторый товар по 10 руб., по 12 руб. и по 14 руб. за шт. Каждый день покупатели приобретают в этих магазинах 100 ед. этого товара. Если цена будет одинаковая, то в обоих магазинах купят равное количество товара. Если разница в ценах будет 2 руб., то более дешевый товар купят 70 % покупателей. Если разница в ценах будет 4 руб., то более дешевый товар купят 90 % покупателей. Составить платежную матрицу, отражающую разность дохода первого и второго магазинов при любом сочетании стратегий.

1.2.13

Игрок A записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок B — одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то A выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то B выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры.

1.3. Принцип доминирования

В теории игр при их исследовании большое значение имеет возможность учета предпочтения стратегий игроков, которое осуществляется с помощью принципа доминирования.

Матрицы размерностью 2×2, $2 \times N$ или $M \times 2$, которые, как будет показано далее, несложно решаются, встречаются не так часто, как нам того бы хотелось, поэтому рассмотрим принцип доминирования, позволяющий уменьшить размерность матрицы.

Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, и ему будет выгодна та стратегия, которая принесет больший выигрыш. Если элементы некоторой строки платежной матрицы С меньше соответствующих элементов другой строки, то интуитивно ясно, первую можно вычеркнуть. Сформулируем условия доминирования строк и столбцов платежной матрицы, позволяющие уменьшить ее размерность.

Определение. Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ доминирует вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)$, если все элементы вектора x больше или равны соответствующим элементам вектора y. То есть $x_i \geq y_i$, для $\forall i = 1, \ldots, n$ и хотя бы одно неравенство выполняется как строгое. Про вектор y говорят, что он доминируется вектором x.

Определение. Линейная комбинация векторов называется выпуклой, если существуют такие коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $k_i \in [0, 1]$ для $i = 1, \ldots, n$, не равные нулю одновременно, что выполнено условие

$$k_1 x^1 + k_1 x^2 + \ldots + k_n x^n = x.$$

Теорема (о доминировании строк). Если в игре с платежной матрицей C какая-либо строка доминируется выпуклой комбинацией остальных строк, то она будет входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию первого игрока и ее можно вычеркнуть.

Замечания.

1. Если в матрице существуют несколько одинаковых срок, то все, кроме одной, можно вычеркнуть, и они будут входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию первого игрока.
2. Если какая-либо строка доминируется другой строкой, то меньшую можно вычеркнуть.

Теорема (о доминировании столбцов). Если в игре с платежной матрицей C какой-либо столбец доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов, то он будет входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию второго игрока и его можно вычеркнуть.

Пример. Используя принцип доминирования, найти оптимальную стратегию.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Третий и четвертый столбцы доминируют над вторым, поэтому, в соответствии с утверждением о доминировании столбцов, их можно вычеркнуть (они будут входить с нулевой вероятностью в оптимальную смешанную стратегию второго игрока).

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ получаем: } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из оставшихся трех строк и двух столбцов можно вычеркнуть первую строку, так как она доминируется третьей строкой. Таким образом, получаем игру с платежной матрицей 2×2: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, которая решается просто.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В заданиях 1.3.1—1.3.15 получить новые платежные матрицы, там, где это возможно, используя принцип доминирования:

1.3.1

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3.2

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3.3

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3.4

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3.5

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 8 & 4 \\ 7 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3.6

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1.3.7

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3.8

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3.9

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.3.10

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3.11

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 8 & 4 \\ 7 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3.12

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1.3.13

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1.3.14

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3.15

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 9 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 1 & 10 \\ 9 & 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4. Определение границ выигрыша и наличия седловой точки

Пример 1. Следует найти верхнюю и нижнюю границы игры, имеющей следующую платежную матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем нижнюю и верхнюю цены игры, определим наличие седловой точки.

1. По строкам сначала находим минимальные значения, а потом из них максимальное значение:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij}.$$

2. По столбцам сначала находим максимальные значения, а потом из них минимальное значение:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Min} \quad \text{Max} \\ & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 15 \\ 9 & 4 & 11 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} 2 & \\ 4 & \mathbf{4} \\ 1 & \end{array} \\ \text{Max} & \begin{array}{cccc} 9 & 4 & 11 & 15 \end{array} & \\ \text{Min} & \begin{array}{cccc} & \mathbf{4} & & \end{array} & \end{array}$$

Так как $\alpha = \beta$, то седловая точка присутствует и определяется координатами (2, 2), при этом выигрыш V равен 4.

Пример 2. Следует найти верхнюю и нижнюю границы игры, имеющей следующую платежную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры, определим наличие седловой точки.

1. По строкам сначала находим минимальные значения, а потом из них максимальное значение:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij}.$$

2. По столбцам сначала находим максимальные значения, а потом из них минимальное значение:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ -3 \end{array} & \begin{array}{c} \max \\ \alpha = -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 5 & 4 & 6 \end{array} & & \\ \min \quad \beta = 4 & & \end{array}$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет. Задачу следует решать в смешанных стратегиях.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.4.1—1.4.30 определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, седловую точку и значение выигрыша.

1.4.1

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.4

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1.4.5

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.6

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4.7

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1{,}1 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1{,}1 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1.4.8

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.9

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.10

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.11

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.12

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.13

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.14

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.15

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4.16

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4.17

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.18

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & -4 & -2 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.4.19

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4.20

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.21

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4.22

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.23

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 8 & 4 \\ 7 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4.24

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1.4.25

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 12 & 9 \\ 11 & 5 & 5 & 10 & 7 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 12 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.26

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 11 & 7 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.27

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

1.4.28

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 9 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4.29

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 40 & 70 & 10 \\ 15 & 70 & 10 & 30 & 40 & 20 \\ 80 & 50 & 40 & 25 & 80 & 70 \\ 45 & 90 & 25 & 55 & 60 & 50 \end{pmatrix}$$

1.4.30

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1.5. Игра 2 × 2

Рассмотрим игру размерностью 2×2, которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение — это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр *оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий* $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ *и* $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Пусть игра задана платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Средний выигрыш игрока A, если он использует оптимальную смешанную стратегию $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, а игрок B — чистую стратегию B_1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы C), равен цене игры V, т. е.:

$$c_{11} p_1^* + c_{21} p_2^* = V.$$

Тот же средний выигрыш получает игрок A, если игрок B применяет стратегию B_2, т. е. $c_{12} p_1^* + c_{22} p_2^* = V$. Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_A^* и цены игры V:

$$\begin{cases} c_{11} p_1^* + c_{21} p_2^* = V; \\ c_{12} p_1^* + c_{22} p_2^* = V; \\ \quad p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$:

$$p_1^* = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})}; \tag{1.6}$$

$$p_2^* = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})} \tag{1.7}$$

и цену игры:

$$V = \frac{c_{22} c_{11} - c_{12} c_{21}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})}. \tag{1.8}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_B^* — оптимальной стратегии игрока B, получаем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{11} q_1^* + c_{12} q_2^* = V; \\ c_{21} q_1^* + c_{22} q_2^* = V; \\ \quad q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда оптимальная стратегия $S_B^{\ *} = (q_1^{\ *},\ q_2^{\ *})$ определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})}\,; \qquad (1.10)$$

$$q_2^* = \frac{c_{11} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - (c_{12} + c_{21})}\,. \qquad (1.11)$$

Решение игры 2×2 приведенной выше платежной матрицы допускает наглядную геометрическую интерпретацию. По оси абсцисс (рис. 1.2) надо отложить единичный отрезок A_1A_2; точка $A_1(X = 0)$ изображает стратегию A_1, а все промежуточные точки отрезка A_1A_2 — смешанные стратегии S_A первого игрока, причем расстояние от S_A до правого конца отрезка — это вероятность p_1 стратегии A_1, расстояние до левого конца — вероятность p_2 стратегии A_2. На перпендикулярных осях Y и Y' откладываем выигрыши при стратегиях A_1 и A_2 соответственно. Если 2-й игрок примет стратегию B_1, то она дает выигрыши c_{11} и c_{21} на осях Y и Y', соответствующие стратегиям A_1 и A_2. Обозначим эти точки на осях Y и Y' буквой B_1.

Средний выигрыш V, соответствующий смешанной стратегии S_A, определяется по формуле математического ожидания $V_1 = c_{11}p_1 + c_{21}p_2$ и равен ординате точки D_1, которая лежит на отрезке B_1B_1 и имеет абсциссу S_A (рис. 1.2).

Аналогично строим отрезок B_2B_2, соответствующий применению вторым игроком стратегии B_2 (рис. 1.3). При этом средний выигрыш $V_2 = c_{12}\,p_1 + c_{22}p_2$ — ордината точки D_2.

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S_A^* такова, что минимальный выигрыш игрока A (при наихудшем поведении игрока B) обращается в максимум. Ординаты точек, лежащих на ломаной (см. рис. 1.4), показывают минимальный выигрыш игрока A при использовании им любой смешанной стратегии (на участке B_1N — против стратегии B_1, на участке NB_2 — против стратегии B_2). Оптимальную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ определяет точка N, в которой минимальный выигрыш достигает максимума; ее ордината равна цене игры V. На рис. 1.4 обозначены также верхняя и нижняя цены игры α и β.

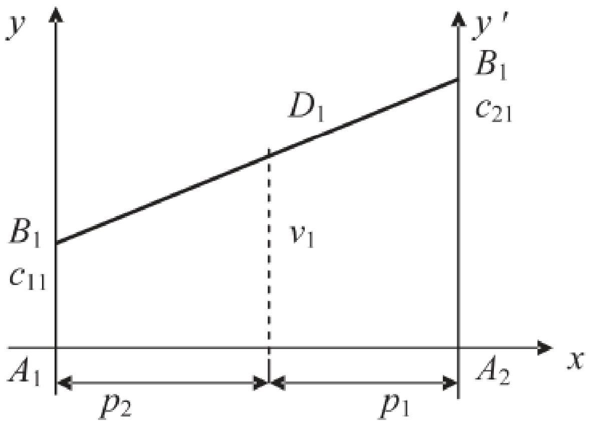


Рис. 1.2

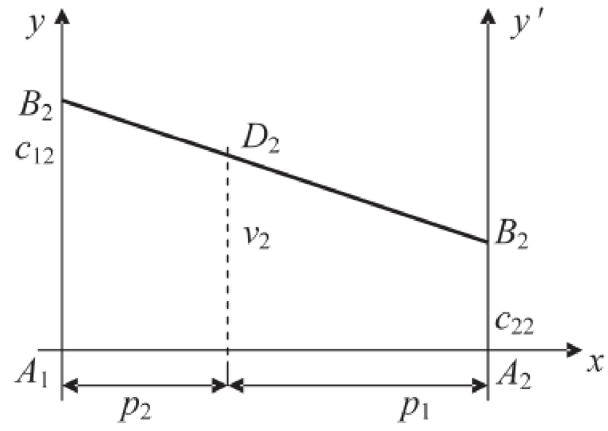


Рис. 1.3

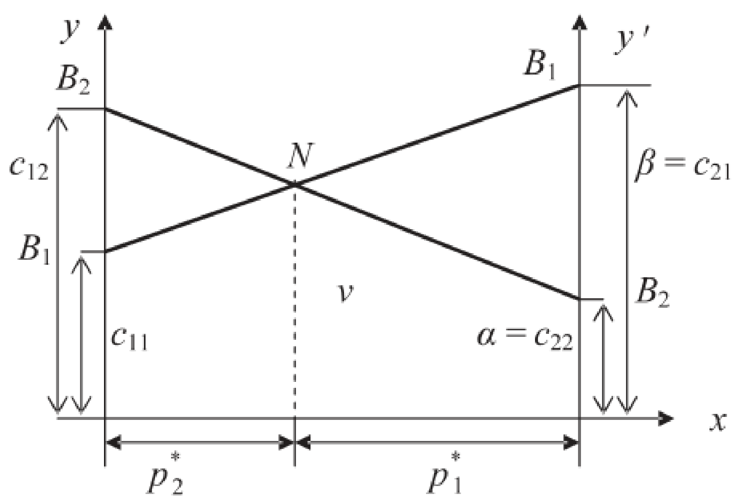


Рис. 1.4

Пример 1. Найти оптимальную смешанную стратегию руководителя предприятия и гарантированный средний выигрыш (V) при выборе из двух новых проектов оснащения предприятия новым оборудованием. Известны выигрыши каждого проекта по сравнению с имеющимся состоянием, которые представлены в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем минимальные элементы по строкам: $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha = \max \alpha_i = 5$.

Найдем максимальные элементы по столбцам: $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 6$, $\beta = \min \beta_i = 6$.

$\alpha \neq \beta$. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

(p_1, p_2) и V определим графически (рис. 1.5).

$$V = 5{,}7;\ p_1 = 0{,}33;\ p_2 = 0{,}67.$$

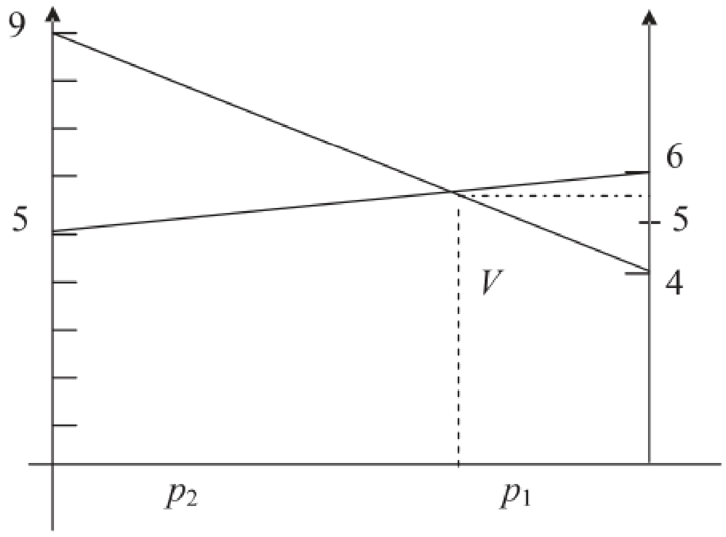


Рис. 1.5

Аналогично находим значение q_1 и q_2 :

$$V = 5{,}7;\ \ q_1 = 0{,}17;\ \ q_2 = 0{,}83.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.5.1—1.5.32 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их со значениями, полученными геометрически.

1.5.1 $C = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.2 $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.3 $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

1.5.4 $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

1.5.5 $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.6 $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

1.5.7 $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.5.8 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.9 $C = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.10 $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

1.5.11 $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

1.5.12 $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

1.5.13 $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

1.5.14 $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.5.15 $C = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.5.16 $C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.5.17
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5.18
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5.19
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5.20
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5.21
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.22
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.5.23
$$C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

1.5.24
$$C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.5.25
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.5.26
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.5.27
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5.28
$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.29
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1.5.30
$$C = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.5.31
$$C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.32
$$C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6. Игра 2 × *N*

Рассмотрим игру с платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3		B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}

Игрок A обладает двумя чистыми стратегиями A_1 и A_2 а игрок B — n чистыми стратегиями B_1, B_2, B_3, ..., B_n. Показатель эффективности стратегии $P = (p_1, p_2)$.

$$\alpha(P) = \min_{1 \le j \le n} (p_1 c_{1j} + p_2 c_{2j}). \tag{1.12}$$

Так как $p_1 + p_2 = 1$, то, выразив p_2 через p_1 и подставив его в предыдущее уравнение, получим:

$$\alpha(P) = \min_{1 \le j \le n} [p_1 c_{1j} + (1 - p_1) c_{2j}] = \min_{1 \le j \le n} [(c_{1j} - c_{2j}) p_1 + c_{2j}]. \tag{1.13}$$

Таким образом, $a(P)$ представляет собой нижнюю огибающую n линейных функций, график каждой из которых есть прямая, соответствующая возрастающей или убывающей функции, или горизонтальная прямая, в зависимости от того, положителен, отрицателен или равен нулю угловой коэффициент $k_j = c_{2j} - c_{1j}$ этой линейной функции.

Стратегия $P^\circ = (1 - p^\circ, p^\circ)$, удовлетворяющая равенству

$$\max_{P \in S_A} \alpha(P^\circ) = \alpha(P) = \min_{1 \le j \le n} [(c_{1j} - c_{2j})p_1 + c_{2j}],$$

где S_A — множество всех смешанных стратегий игрока A, является (по основной теореме матричных игр фон Неймана) оптимальной, т. е. абсцисса $p^\circ \in [0, 1]$ максимальной (наивысшей) точки нижней огибающей $a(P)$. Определяет оптимальную стратегию $P^\circ = (1 - p^\circ, p^\circ)$, придерживаясь которой игрок A выбирает свои чистые стратегии случайным образом, причем стратегию A_1 с вероятностью $1 - p^\circ$, а стратегию A_2 — с вероятностью p°. Цена игры при этом будет $V = \alpha(P^\circ)$, т. е. цена игры V равна ординате максимальной точки нижней огибающей.

Приведем здесь алгоритм геометрического (графического) нахождения оптимальных стратегий игрока A и цены игры V [12, 16].

Алгоритм А

1. Берем горизонтальный отрезок [0, 1].

2. Через концы отрезка [0, 1] проводим к нему два перпендикуляра — левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 (его пересечения с отрезком [0, 1]) откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первой строки матрицы A (рис. 1.6).

4. На правом перпендикуляре от точки 1 (его пересечения с отрезком [0, 1]) аналогично откладываем все элементы второй строки матрицы A. При этом масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковы, не обязательно совпадающие с масштабом горизонтального отрезка [0, 1]) (см. рис. 1.6).

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам c_{1j} и c_{2j}, $j = 1, ..., n$, стоящим в j-м столбце матрицы A, соединяем отрезком $c_{1j}c_{2j}$. Таким образом, будет построено n отрезков, представляющих собой графики n линейных функций:

$$(c_{1j} - c_{2j})p + c_{2j}, \quad p \in [0, 1], \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.14}$$

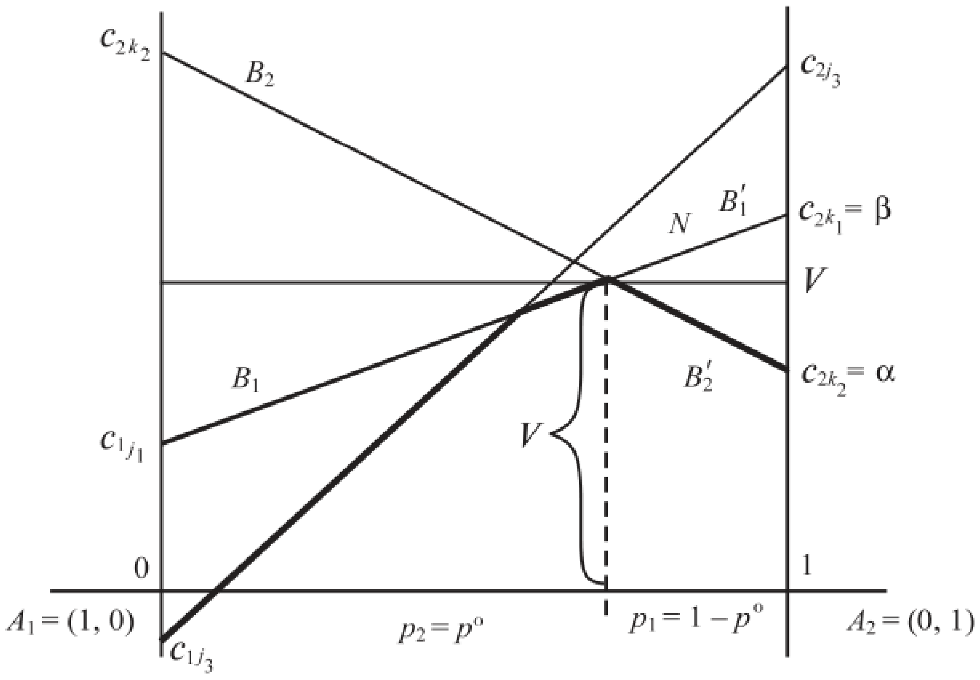


Рис. 1.6

6. Если все отрезки $c_{1j}c_{2j}$, $j = 1, ..., n$ — неубывающие (имеют неотрицательный угол наклона), то стратегия A_2 доминирует стратегию A_1.

Если все отрезки $c_{1j}c_{2j}$, $j = 1, ..., n$ — возрастающие (имеют положительный угол наклона), то стратегия A_1 строго доминирует стратегию A_1.

Если все отрезки $c_{1j}c_{2j}$, $j = 1, ..., n$ — невозрастающие (имеют неположительный угол наклона), то стратегия A_1 доминирует стратегию A_2.

Если все отрезки $c_{1j}c_{2j}$, $j = 1, ..., n$ — убывающие (имеют отрицательный угол наклона), то стратегия A_1 строго доминирует стратегию A_2.

7. Если отрезок $c_{1j1}c_{2j1}$ лежит не ниже отрезка $c_{1j2}c_{2j2}$, $j_1 \neq j_2$, j_1, $j_2 \in \{1, ..., n\}$, то стратегия B_{j2} доминирует стратегию B_{j1}.

Если отрезок $c_{1j1}c_{2j1}$ лежит выше отрезка $c_{1j2}c_{2j2}, j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, ..., n\}$, то стратегия B_{j2} строго доминирует стратегию B_{j1}.

8. Находим (выделяем) нижнюю огибающую семейства отрезков, которая в общем случае будет представлять собой выпуклую вверх ломаную, а в частности, может быть и отрезком.

9. На нижней огибающей находим максимальную (наивысшую) точку (точки).

10. Абсцисса p° этой точки (удовлетворяющая равенству (1.13)) является вероятностью выбора игроком А чистой стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии $P^\circ = (1 - p^\circ, p^\circ)$.

11. Ордината наивысшей точки нижней огибающей является ценой игры V.

12. Верхний из двух концов нижней огибающей (лежащих на перпендикулярах) — это нижняя цена игры в чистых стратегиях α.

13. Нижний из верхних концов отрезков c_{1j}, c_{2j}, $j = 1, \ldots, n$ есть верхняя цена игры в чистых стратегиях β.

14. Элемент матрицы A, которому на рис. 1.6 соответствует точка пересечения отрезков B_1B_1' и B_2B_2', будет седловой точкой игры.

В этом случае чистая стратегия игрока В, номер которой совпадает со вторым индексом седловой точки, является оптимальной.

На рис. 1.6 из n отрезков c_{1j}, c_{2j}, $j = 1, \ldots, n$ указаны три, которые принимают участие в конструировании нижней огибающей, выделенной жирной линией; N — максимальная точка этой огибающей; p° — абсцисса точки N, следовательно, $P^{\circ} = (1 - p^{\circ}, p^{\circ})$ — оптимальная смешанная стратегия игрока А; цена игры V равна ординате точки N; нижняя цена игры в чистых стратегиях $\alpha = c_{2j2}$; верхняя цена игры в чистых стратегиях $\beta = c_{2j1}$; на рисунке видно, что $\alpha < V < \beta$.

Пример. Найти графически оптимальную стратегию игрока А, цену игры V, нижнюю α и верхнюю β цены игры в чистых стратегиях, если матрица игры имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	–1	1	–2	6	3
A_2	4	3	2	7	1	4

Решение. Используя алгоритм A, найдем графически (рис. 1.7) значение $p^{\circ} = 5/6$, а потому $P^{\circ} = (1/6, 5/6)$ является оптимальной смешанной стратегией, придерживаясь которой игрок A случайным образом выбирает свои чистые стратегии A_1 и A_2 соответственно с вероятностями $p^{\circ}_1 = 1/6$ и $p^{\circ}_2 = 5/6$. Нижней ценой игры в чистых стратегиях является $\alpha = c_{25} = 1$, а верхней ценой игры в чистых стратегиях является $\beta = c_{23} = 2$. Ценой игры является ордината наивысшей точки N нижней огибающей (выделена жирной линией на рис. 1.7) $V \approx 1{,}8$.

Так как нижняя огибающая не имеет максимальных точек, лежащих на перпендикулярах к отрезку [0, 1] в его концах, то у данной игры нет седловых точек.

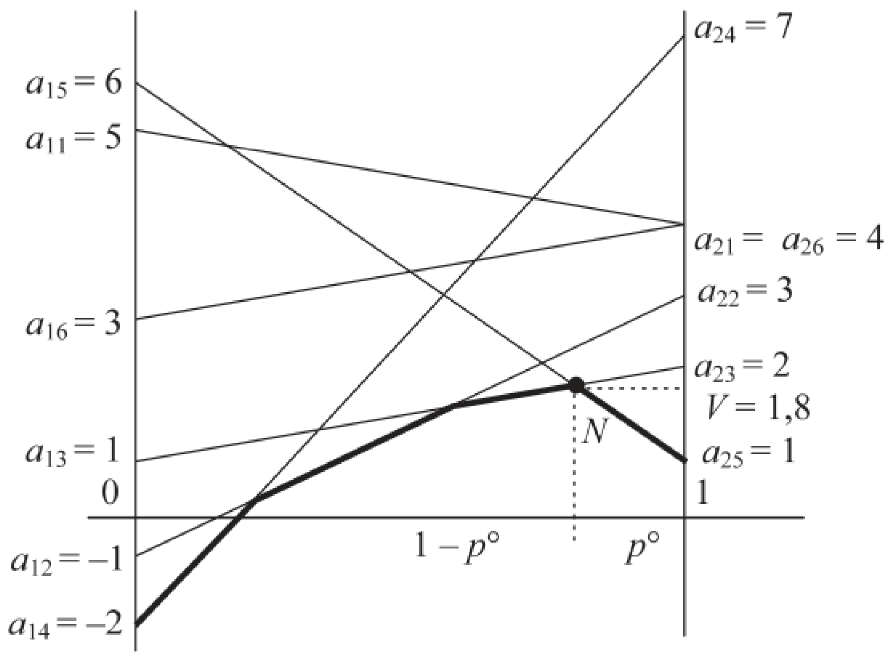


Рис. 1.7

Поскольку отрезки $c_{1j}c_{2j}$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ имеют разные наклоны (например, отрезок $c_{14}c_{24}$ имеет положительный угол наклона, а отрезок $c_{15}c_{25}$ — отрицательный), то ни одна из стратегий игрока A не доминирует другую.

Так как отрезок $c_{11}c_{21}$ лежит не ниже отрезка $c_{16}c_{26}$ (правые концы этих отрезков совпадают) и они оба лежат выше отрезков $c_{12}c_{22}$ и $c_{13}c_{23}$, то стратегия B_6 не строго доминирует стратегию B_1 и они обе строго доминируются каждой из стратегий B_2 и B_3, поэтому стратегии B_1 и B_6 игрока В являются заведомо невыигрышными и их нужно отбросить. Это обстоятельство на рис. 1.6 проявляется в том, что отрезки $c_{11}c_{21}$ и $c_{16}c_{26}$, определяемые соответственно стратегиями B_1 и B_6, в конструировании нижней огибающей всех отрезков не участвуют.

Вывод формул, выражающих $p_1^{\circ} = p^{\circ}$, $p_1 = 1 - p^{\circ}$ и цену игры V через элементы матрицы игры, подробно рассмотрен в [14]. Здесь же приведем их окончательное выражение:

$$p_1^0 = \frac{c_{2j2} - c_{2j1}}{(c_{1j1} + c_{2j2}) - (c_{1j2} + c_{2j1})}; \tag{1.15}$$

$$p_2^0 = \frac{c_{1j1} - c_{1j2}}{(c_{1j1} + c_{2j2}) - (c_{1j2} + c_{2j1})}; \tag{1.16}$$

$$V = \frac{c_{1j1}c_{2j2} - c_{1j2}c_{2j1}}{(c_{1j1} + c_{2j2}) - (c_{1j2} + c_{2j1})}. \tag{1.17}$$

Пример 2. В примере 1 оптимальная стратегия $P^{\circ} = (1/6,\ 5/6)$ и цена игры $V = 1{,}8$ были найдены графическим методом. Найдем их, используя формулы (1.15), (1.16) и (1.17).

Через максимальную точку N нижней огибающей проходят два отрезка $c_{13}c_{23}$ и $c_{15}c_{25}$. Тогда по формуле (1.16) при $j_1 = 3$ и $j_2 = 5$ получаем:

$$p_2^0 = \frac{c_{13} - c_{15}}{(c_{13} + c_{25}) - (c_{15} + c_{23})} = \frac{1 - 6}{(1+1) - (6+2)} = \frac{5}{6}.$$

Тогда $p_1 = 1 - p^{\circ}_2 = 1/6$.

По формуле (1.17) цена игры:

$$V = \frac{c_{13}c_{25} - c_{15}c_{23}}{(c_{13} + c_{25}) - (c_{15} + c_{23})} = \frac{1 \cdot 1 - 6 \cdot 2}{(1+1) - (6+2)} = \frac{11}{6} \approx 1{,}8.$$

В [12, 16] подробно рассмотрены все случаи, возникающие при графическом решении игры $2 \times N$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.6.1—1.6.30 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их с результатами, полученными геометрическим способом.

1.6.1

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1.6.2

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}1 \end{pmatrix}$$

1.6.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.5

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.8

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

1.6.9

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.6.11

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.12

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.13

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.6.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.15

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.16

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6.17

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.6.18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6.19

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.20

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.21

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1.6.23

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.24

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6.25

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.6.26

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.27

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.28

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.6.29

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

1.6.30

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.7. Игра $M \times 2$

Рассмотрим игру $M \times 2$, в которой игрок A обладает m чистыми стратегиями A_1, ..., A_m, а игрок B — двумя чистыми стратегиями B_1 и B_2. Матрица игры имеет вид:

	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	c_{22}
...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}

Для данного варианта игры запишем следующий алгоритм геометрического нахождения оптимальных стратегий игрока B и цену игры V [14].

Алгоритм B

1. Берем горизонтальный отрезок [0, 1].

2. Через концы отрезка [0, 1] проводим к нему два перпендикуляра: левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0, 1] откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первого столбца матрицы A.

4. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком [0, 1] откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы второго столбца матрицы A.

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам c_{i1} и c_{i2}, $i = 1, ..., m$, стоящим в i-й строке матрицы A, соединяем отрезком $c_{i1}c_{i2}$, в результате чего построим m отрезков, представляющих собой графики m линейных функций (рис. 1.8):

$$((c_{i1} - c_{i2})q + c_{i1}),\ \ q \in [0, 1],\ \ \ i = 1, ..., m.$$

6. Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, ..., m$ имеют неотрицательный, положительный или нулевой угол наклона, то стратегия B_1 доминирует стратегию B_2.

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, ..., m$ имеют положительный угол наклона, то стратегия B_1 строго доминирует стратегию B_2.

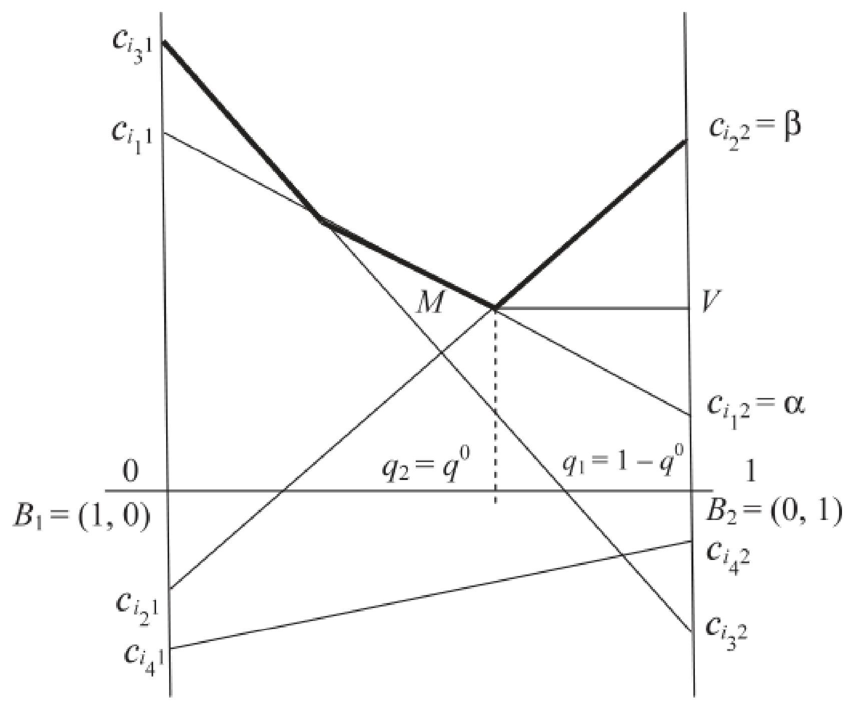


Рис. 1.8

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$ имеют неположительный угол наклона, т. е. отрицательный или нулевой, то стратегия B_2 доминирует стратегию B_1.

Если все отрезки $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$ имеют отрицательный угол наклона, то стратегия B_2 строго доминирует стратегию B_1.

7. Если отрезок $c_{i11}c_{i12}$ лежит не ниже отрезка $c_{i21}c_{i22}$, $i_1 \neq i_2$, i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, m\}$, то стратегия A_{i1} доминирует стратегию A_{i2}.

Если отрезок $c_{i11}c_{i12}$ лежит выше отрезка $c_{i21}c_{i22}$, $i_1 \neq i_2$, i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, m\}$, то стратегия A_{i1} строго доминирует стратегию A_{i2}.

8. Находим (выделяем) верхнюю огибающую из полученного семейства отрезков, представляющую собой в общем случае выпуклую вниз ломаную, которая, в частности, может быть и отрезком.

9. На верхней огибающей находим минимальную (наинизшую) точку (точки).

10. Абсцисса q° минимальной точки является вероятностью случайного выбора игроком B чистой стратегии B_2 в оптимальной смешанной стратегии $Q^\circ = (1 - q^\circ, q^\circ)$.

11. Ордината минимальной точки верхней огибающей является ценой игры V (рис. 1.7).

12. Верхний из нижних концов отрезков $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$ является нижней ценой игры в чистых стратегиях α.

13. Нижний из концов верхней огибающей (лежащих на перпендикулярах) является верхней ценой игры в чистых стратегиях β.

Элемент матрицы A, изображающая точка которого является нижним концом отрезка, на котором она лежит, и верхней на перпендикуляре, на котором она лежит, является седловой точкой игры. В этом случае чистая стратегия игрока A, номер которой совпадает с первым индексом седловой точки, является оптимальной.

На рис. 1.7 из m отрезков, $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, ..., m$, указаны четыре $c_{i11}c_{i12}$, $c_{i21}c_{i22}$, $c_{i31}c_{i32}$, $c_{i41}c_{i42}$, первые три из которых принимают участие в конструировании верхней огибающей, выделенной жирной линией. Точка M — минимальная точка этой верхней огибающей, имеющая своей абсциссой q°. Поэтому $Q^{\circ} = (1 - q^{\circ}, q^{\circ})$ — оптимальная смешанная стратегия игрока B. Ордината точки M есть цена игры V. Нижняя цена игры в чистых стратегиях $\alpha = c_{i12}$; верхняя цена игры в чистых стратегиях $\beta = c_{i22}$. Так как среди отрезков $c_{i1}c_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$ имеются отрезки с положительным и отрицательным углом наклона (например, отрезок $c_{i21}c_{i22}$ имеет положительный угол наклона, а отрезок $c_{i31}c_{i32}$ — отрицательный), то стратегия B_2 не доминирует и не доминируется стратегией B_1. Так как отрезки $c_{i11}c_{i12}$ и $c_{i21}c_{i22}$ лежат выше отрезка $c_{i41}c_{i42}$, то каждая из стратегий A_{i1} и A_{i2} строго доминирует стратегию A_{i4}. Оптимальную стратегию $Q^{\circ} = (1 - q^{\circ}, q^{\circ})$ игрока B и цену игры V можно подсчитать и по следующим формулам:

$$q_1^0 = \frac{c_{i12} - c_{i22}}{(c_{i12} + c_{i21}) - (c_{i11} + c_{i22})}; \tag{1.18}$$

$$q_2^0 = \frac{c_{i21} - c_{i11}}{(c_{i12} + c_{i21}) - (c_{i11} + c_{i22})}; \tag{1.19}$$

$$V = \frac{c_{i12}c_{i21} - c_{i11}c_{i22}}{(c_{i12} + c_{i21}) - (c_{i11} + c_{i22})}. \tag{1.20}$$

Пример. Найти решение игры 5×2 с матрицей

	B_1	B_2
A_1	3	1
A_2	–2	4
A_3	5	–5
A_4	1	2
A_5	–3	–1

Согласно алгоритму *B* строим геометрическую интерпретацию данной игры (рис. 1.9).

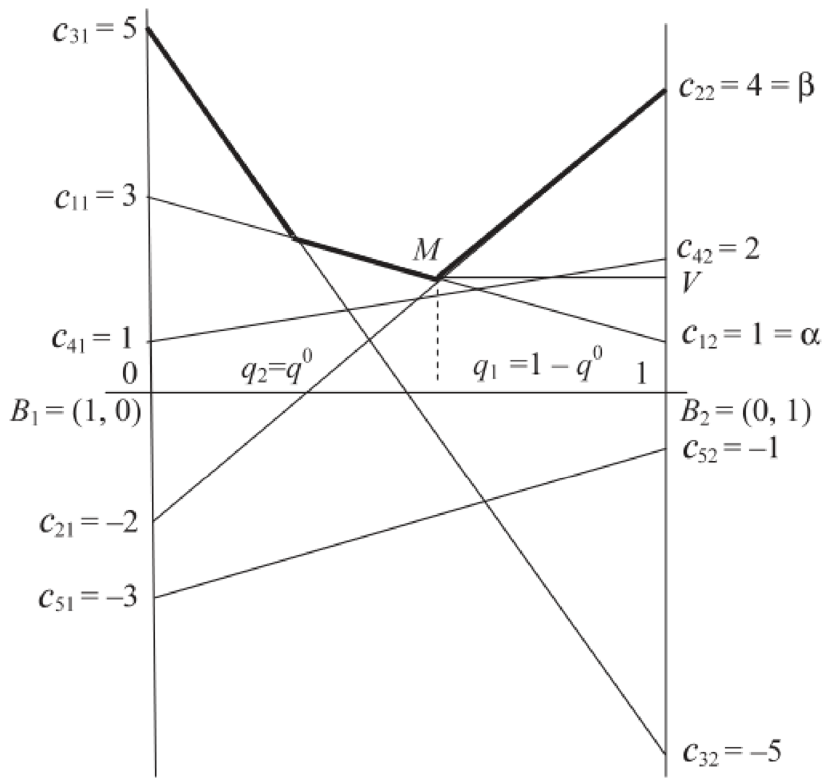


Рис. 1.9

Минимальная точка верхней огибающей дает нам цену игры, которая равна 1,8.

Значения $q_1 \approx 0{,}4$, $q_2 \approx 0{,}6$ и $V \approx 1{,}8$, найденные графически, подтверждаются результатом вычисления их по формулам (1.18), (1.19) и (1.20) ($q_1 = 0{,}375$, $q_1 = 0{,}625$ и $V = 1{,}75$).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.7.1—1.7.30 дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их результаты с геометрическими.

1.7.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.7.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7.3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7.4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 9 \\ 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7.6
$$A=\begin{pmatrix}7&3\\4&7\\5&8\\2&4\\1&3\end{pmatrix}$$

1.7.7
$$A=\begin{pmatrix}6&3\\5&2\\1&4\\3&6\\7&3\end{pmatrix}$$

1.7.8
$$A=\begin{pmatrix}2&6\\3&7\\4&2\\6&5\\8&3\end{pmatrix}$$

1.7.9
$$A=\begin{pmatrix}2&6\\3&8\\4&2\\6&5\\5&3\end{pmatrix}$$

1.7.10
$$A=\begin{pmatrix}-4&2\\5&7\\2&-8\\-1&4\\6&-3\end{pmatrix}$$

1.7.11
$$A=\begin{pmatrix}7&6\\5&4\\4&8\\6&5\end{pmatrix}$$

1.7.12
$$A=\begin{pmatrix}4&3\\1&6\\2&3\\3&5\end{pmatrix}$$

1.7.13
$$A=\begin{pmatrix}3&6\\5&2\\1&3\\4&5\end{pmatrix}$$

1.7.14
$$A=\begin{pmatrix}4&2\\5&3\\2&8\\1&4\end{pmatrix}$$

1.7.15
$$A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\\4&7\\2&8\end{pmatrix}$$

1.7.16
$$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\\4&8\\2&4\end{pmatrix}$$

1.7.17
$$A=\begin{pmatrix}5&2\\-3&1\\2&-8\\4&6\end{pmatrix}$$

1.7.18
$$A=\begin{pmatrix}-5&1\\1&4\\2&-3\\-4&3\end{pmatrix}$$

1.7.19
$$A=\begin{pmatrix}-2&9\\-3&4\\4&-3\\8&2\end{pmatrix}$$

1.7.20
$$A=\begin{pmatrix}-2&5\\-3&4\\4&-3\\8&3\end{pmatrix}$$

1.7.21
$$A=\begin{pmatrix}3&6\\4&2\\6&5\\8&3\end{pmatrix}$$

1.7.22
$$A=\begin{pmatrix}-3&2\\2&3\\1-&6\\2&9\end{pmatrix}$$

1.7.23
$$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\\4&9\\2&5\end{pmatrix}$$

1.7.24
$$A=\begin{pmatrix}9&2\\8&3\\5&8\\6&4\end{pmatrix}$$

1.7.25
$$A=\begin{pmatrix}5&2\\7&3\\4&-1\\2&5\end{pmatrix}$$

1.7.26
$$A=\begin{pmatrix}2&7\\5&3\\4&6\\7&8\\3&-2\end{pmatrix}$$

1.7.27
$$A=\begin{pmatrix}-2&9\\5&4\\-4&8\\7&6\\3&-2\end{pmatrix}$$

1.7.28
$$A=\begin{pmatrix}2&5\\3&4\\4&5\\7&6\\3&7\end{pmatrix}$$

1.7.29
$$A=\begin{pmatrix}-1&3\\4&-2\\5&8\\6&3\\3&5\end{pmatrix}$$

1.7.30
$$A=\begin{pmatrix}4&9\\5&4\\3&8\\2&5\\3&2\end{pmatrix}$$

1.8. Игра $M \times N$

Если игра $M \times N$ не имеет оптимального решения непосредственно в чистых стратегиях, то оптимальное решение необходимо искать в области смешанных стратегий. Игрок A обладает стратегиями A_1, A_2, ..., A_m, а игрок B — стратегиями B_1, B_2, ..., B_n. Необходимо определить оптимальные стратегии S_A^* и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$, где p_i^*, q_j^* — вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j. При этом $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1$.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ против любой чистой стратегии B_j игрока B, то он получает средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша):

$$a_j = c_{1j}p_1 + c_{2j}p_2 + \ldots + c_{mj}p_m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для оптимальной стратегии S_A^* все средние выигрыши не меньше игры V, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{aligned}
&c_{11}p_1 + c_{21}p_2 + \ldots + c_{m1}p_m \geq V;\\
&c_{12}p_1 + c_{22}p_2 + \ldots + c_{m2}p_m \geq V;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{1n}p_1 + c_{2n}p_2 + \ldots + c_{mn}p_m \geq V.
\end{aligned}$$

Если каждое неравенство разделить на число $V > 0$ ($V > 0$ можно добиться, сделав все элементы $c_{ij} \geq 0$) и введя новые переменные:

$$x_1 = p_1/V, \quad x_2 = p_2/V, \quad \ldots, \quad x_m = p_m/V,$$

предыдущая система примет вид:

$$\begin{aligned}
&c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m \geq 1;\\
&c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m \geq 1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m \geq 1.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Если равенство $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ разделить также на V, то получим, что переменные $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/V$. В силу того, что цель игрока A максимизировать свой гарантированный выигрыш, т. е. максимизировать цену игры V, максимизация цены игры V эквивалентна минимизации величины $1/V$. Поэтому задача может быть сформулирована следующим образом.

Найти минимум целевой функции $Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ при ограничениях (1.21). Тем самым получаем задачу линейного программирования, решая которую получим оптимальную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ и цену игры $V = 1/Z$.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ игрока B следует учесть, что игрок стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т. е. найти max $1/V$. Переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ удовлетворяют неравенствам

$$c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1n}q_n \le V;$$

$$c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2n}q_n \le V;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{m1}q_1 + c_{m2}q_2 + \ldots + c_{mn}q_n \le V.$$

Если так же, как и в предыдущем случае, ввести новые переменные:

$$y_1 = q_1/V,\ y_2 = q_2/V,\ \ldots.,\ y_n = q_n/V,$$

то предыдущая система примет вид:

$$\begin{gathered} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \le 1; \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n \le 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mn}y_n \le 1, \end{gathered} \tag{1.22}$$

а задача сводится к задаче линейного программирования, в которой надо найти максимум целевой функции $Z' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ при ограничениях (1.22).

Решение задачи линейного программирования определяет оптимальную стратегию $S_B^* = (q_1^*,\ q_2^*,\ \ldots,\ q_n^*)$. При этом цена игры

$$V = 1/\max Z' = 1/\min Z. \qquad (1.23)$$

Пример. Найти решение игры со следующей платежной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица не имеет седловой точки, то ее решение будем искать в смешанных стратегиях. Математические модели будут состоять из пары двойственных задач линейного программирования. Первая задача на нахождение минимума функции $F(x) = x_1 + x_2 + x_3$

При следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1; \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ 3, \end{cases}$$

где $x_i = \dfrac{p_i}{V},\ i = 1{,}3.$

Вторая задача будет на нахождение максимума функции $Z(y) = y_1 + y_2 + y_3$.

При следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 1; \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1; \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 1; \\ y_i \geq 0,\ i = 1,\ 3, \end{cases}$$

где $y_i = \dfrac{q_i}{V},\ i = 1,\ 3.$

Решение задач может быть выполнено либо симплекс-методом, либо с использованием функции *Поиск решения* в Excel.

Проведем решение данной задачи с использованием функции *Поиск решения* в Excel.

Решение первой задачи (для игрока A)

1. Введем в Excel исходные данные, как показано на рис. 1.10.

2. Сформируем запросы в функции *Поиск решения*, как показано на рис. 1.11. Задача на поиск минимума целевой функции *F*.

3. Зададим параметры поиска решения, как показано на рис. 1.12.

4. Проведем расчет, нажав на клавишу *Выполнить* (рис. 1.11).

Получим в Excel во введенной ранее таблице следующие результаты (рис. 1.13).

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		Платежная матрица (игрок *B*)				Ограничения
3		2	4	1	0	1
4		3	2	3	0	1
5		1	2	4	0	1
6						
7	Коэф. ЦФ	1	1	1		
8	*X*	0	0	0		
9						
10	*F*-функции	**0**				

Рис. 1.10

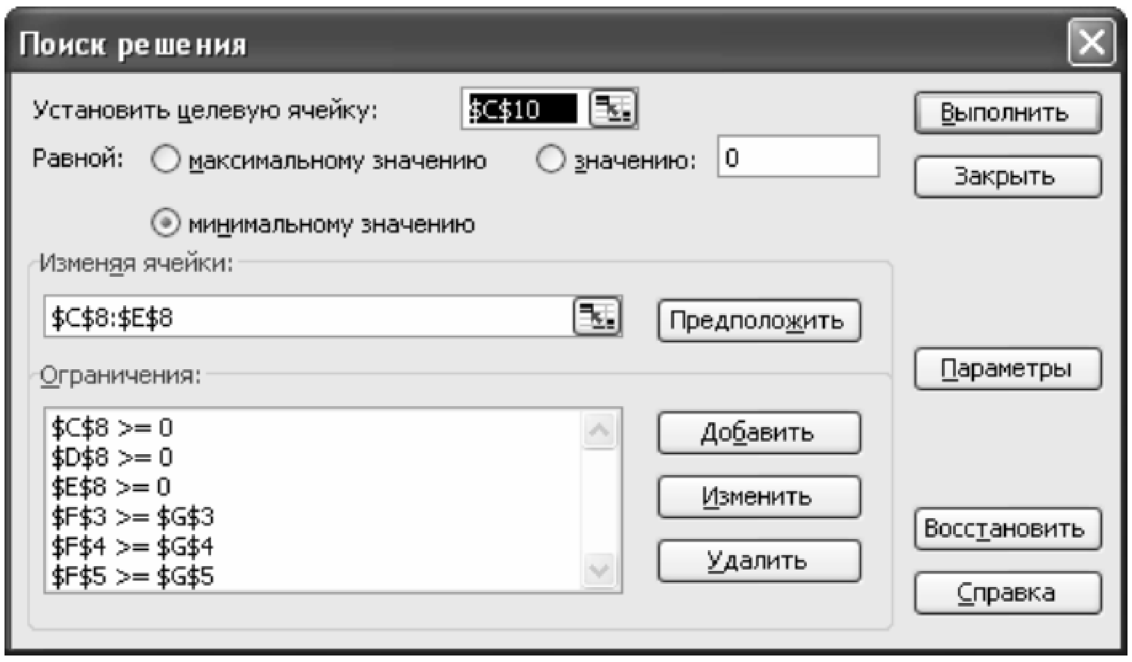


Рис. 1.11

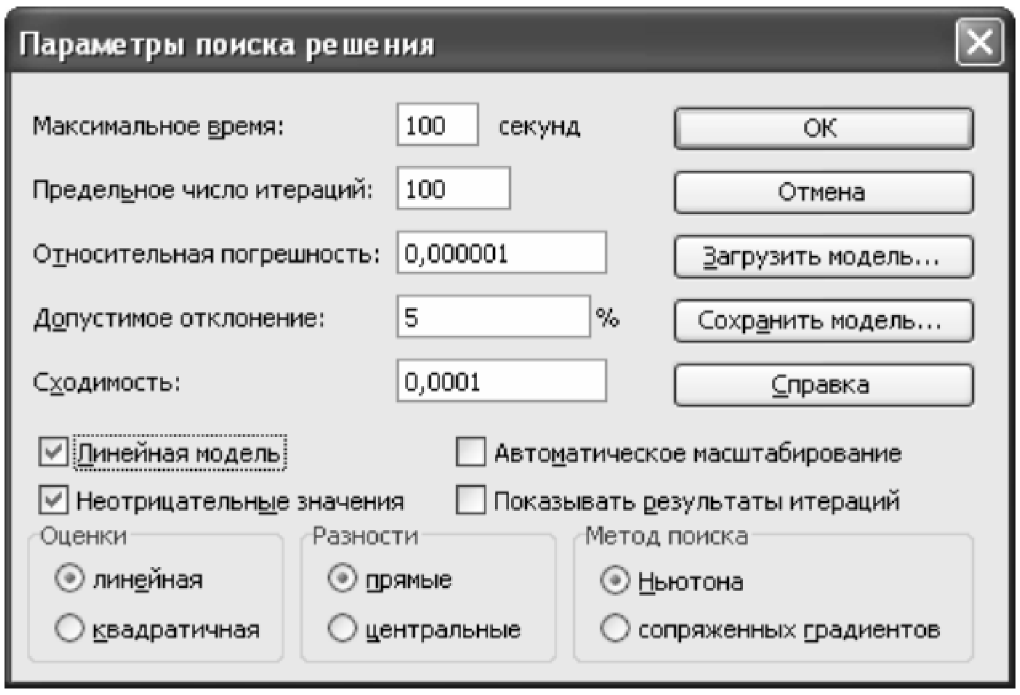


Рис. 1.12

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		Платежная матрица (игрок *B*)				Ограничение
3		2	4	1	1	1
4		3	2	3	1	1
5		1	2	4	1	1
6						
7	Коэф. ЦФ	1	1	1		
8	*X*	**0,071429**	**0,178571**	0,142857		
9						
10	*F*-функция	**0,392857**				

Рис. 1.13

Получено значение целевой функции F и значения переменных x_1, x_2, x_3.

Рассчитаем значение V и вероятностей p_1, p_2, p_3.

$$V = 1/F = 2{,}55;$$

$$p_1 = V \cdot x_1 = 0{,}18;$$

$$p_2 = V \cdot x_2 = 0{,}45;$$

$$p_3 = V \cdot x_3 = 0{,}36.$$

Решение второй задачи (для игрока B)

1. Введем в Excel исходные данные, как показано на рис. 1.14.

2. Сформируем запросы в функции *Поиск решения*, как показано на рис. 1.15. Задача на поиск максимума целевой функции Z.

3. Зададим параметры поиска решения, как показано на рис. 1.16.

4. Проведем расчет, нажав на клавишу *Выполнить* (рис. 1.15).

Получим в Excel во введенной ранее таблице следующие результаты (рис. 1.17).

Тем самым получено значение целевой функции Z и значения переменных y_1, y_2, y_3.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		Платежная матрица (игрок *B*)				Органичение
3		2	3	1	0	1
4		4	2	2	0	1
5		1	3	4	0	1
6						
7	Коэф. ЦФ	1	1	1		
8	У	0	0	0		
9						
10	*Z*-функции	**0**				

Рис. 1.14

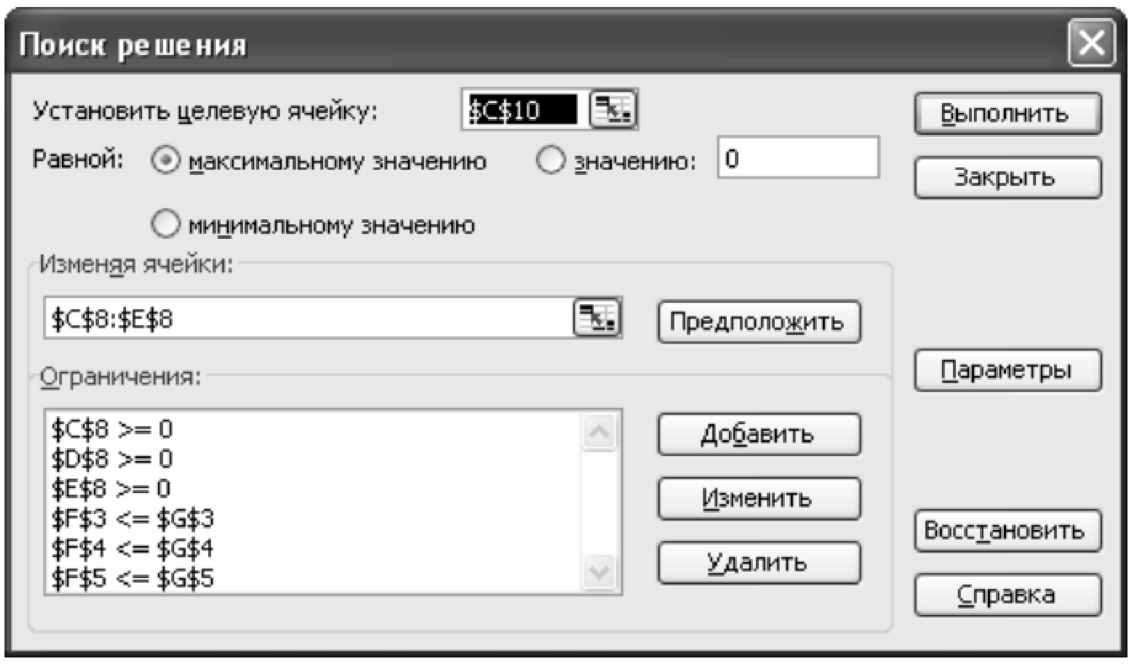


Рис. 1.15

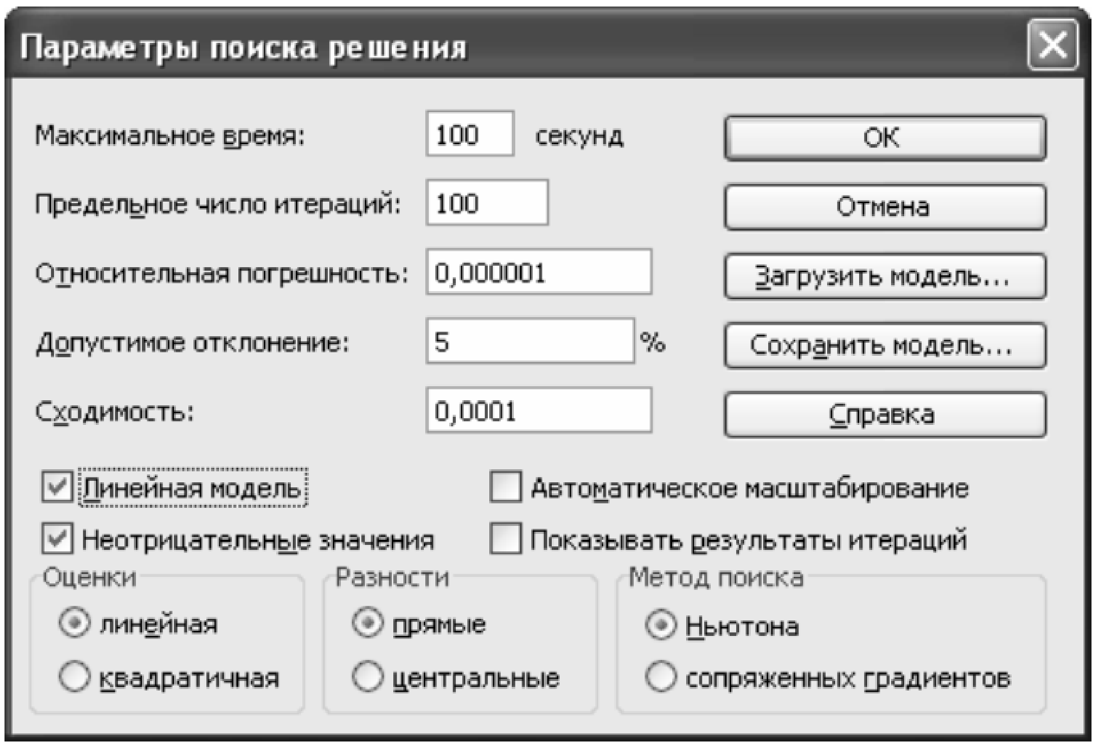


Рис. 1.16

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1		Платежная матрица (игрок *B*)				Органич.
3		2	3	1	1	1
4		4	2	2	1	1
5		1	3	4	1	1
6						
7	Коэф. ЦФ	1	1	1		
8	*Y*	**0,107143**	**0,25**	**0,035714**		
9						
10	*Z*-функц	**0,392857**				

Рис. 1.17

Рассчитаем значение V и вероятностей q_1, q_2, q_3.

$$V = 1/Z = 2{,}55;$$

$$q_1 = V \cdot y_1 = 0{,}27;$$

$$q_2 = V \cdot y_2 = 0{,}64;$$

$$q_3 = V \cdot y_3 = 0{,}09.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для задач 1.8.1— 1.8.36 найдите для двух игроков решение в смешанных стратегиях. При расчетах используйте либо функцию *Поиск решения* в Excel.

1.8.1
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1.8.2
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.8.3
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.4
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.5
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.6
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1.8.7
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

1.8.8
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8.9
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.10
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8.11
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 7 \\ -3 & 9 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

1.8.12
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.13
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.8.14
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1.8.15
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8.16
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 19 & 14 & 11 \\ 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

1.8.17
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.8.18
$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.8.19

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8.20

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8.21

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.22

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.8.23

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1.8.24

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.25

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

1.8.26

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1.8.27

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.8.28

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 12 & 9 \\ 11 & 6 & 5 & 10 & 7 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 12 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.8.29

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & 11 & 7 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.8.30

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.8.31

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.8.32

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.8.33

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8.34

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.8.35

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1.8.36

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.9. Общая схема решения парных игр с нулевой суммой

При решении произвольной конечной игры размера $M \times N$ следует придерживаться следующей схемы.

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии, используя принцип доминирования.

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена игры совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Игры размера $M \times N$ решаются путем сведения их к задаче линейного программирования. Для игр размера 2×2, $2 \times N$ или $M \times 2$ возможно геометрическое решение.

Глава 2
БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Антагонистические игры описывают, в основном, конфликты весьма частного вида, а для большинства имеющихся в реальной жизни конфликтов они либо вовсе не могут считаться приемлемыми (адекватными), либо могут рассматриваться как первые грубые приближения. Это, во-первых, связано с тем, что антагонистические игры никак не затрагивают своими описаниями конфликты с числом участников большим, чем два, а многосторонние конфликты являются принципиально более сложными и даже не поддаются сведению к последним.

Во-вторых, даже в конфликтах с двумя участниками интересы сторон вовсе не обязаны быть противоположными. Случается так, что одна из ситуаций оказывается предпочтительнее другой для обоих участников.

В-третьих, если даже любые две ситуации сравниваются игроками по их предпочтительности противоположным образом, различие разностей в оценках этой предпочтительности оставляет место для соглашений, компромиссов и коопераций.

В-четвертых, содержательная острота конфликта не обязательно соответствует его формальной антагонистичности. Так, например, при встрече налогового инспектора и налогоплательщика обоюдное их стремление уничтожить друг друга не выражает антагонистичности конфликта: в антагонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными и стремлению одной стороны «уничтожить» другую противоположным будет стремление избежать «уничтожения».

2.1. Игры двух лиц с произвольной суммой

В конечной бескоалиционной игре двух игроков каждый из них делает один ход — выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого он получает свой выигрыш согласно определенным для каждого из них матрицам выигрышей. Другими словами, игра полностью определяется двумя матрицами выигрышей для двух игроков. Поэтому такие игры называются *биматричными*.

В биматричной игре интересы игроков не обязательно противоположны и это игра с ненулевой суммой[1].

В биматричной игре выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец — стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице — выигрыш игрока 2), но при этом обе платежные матрицы должны быть одинаковой размерности $m \times n$.

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Пусть у игрока 1 имеется m стратегий, $i = \overline{1, m}$, а у игрока 2 — n стратегий, $j = \overline{1, n}$. Выигрыши игроков 1 и 2 соответственно задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — прибыль (при $a_{ij} > 0$), а b_{ij} — потери соответственно игроков A и B в ситуации $(i,\ j)$, $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Будем считать полный набор вероятностей $x = (x_1, \ldots, x_m)$ применения 1-м игроком своих чистых стратегий и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — смешан-

[1] *Возяков В.И., Филиппов В.П.* Задачи теории игр в курсе информационных технологий. ОУ ВПО ЦС РФ «Чебоксарский кооперативный институт». URL: http://acadio.ru/cheb2006/pdf

ной стратегией игрока 2. Тогда средние выигрыши игроков 1 и 2 соответственно равны:

$$\begin{cases} E(A,\ x,\ y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = xAy^T; \\ E(B,\ x,\ y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = xBy^T. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару (x, y) таких смешанных стратегий игроков 1 и 2, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (i = \overline{1,\ m}); & (2.2) \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \ (i = \overline{1,\ n}) & (2.3) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Ay^T \le xAy^T \quad (= E_1(A,\ x,\ y)); & (2.2') \\ xB \le xBy^T \quad (= E_2(V,\ x,\ y)). & (2.3') \end{cases}$$

Для определения ситуаций равновесия необходимо решить систему неравенств (2.2) и (2.3) ((2.2′) и (2.3′)) относительно неизвестных $x =$ $= (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \quad x_i \ge 0\ (i = \overline{1,\ m}); \quad y_j \ge 0\ (j = \overline{1,\ n}).$$

Теорема (Нэша). Каждая биматричная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия.

В качестве примера рассмотрим случай, когда каждый игрок имеет две чистые стратегии. В этом случае матрицы A и B равны:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии для игроков 1 и 2 имеют вид:

$$(x,\ 1-x);\quad (y,\ 1-y);\quad 0 \le x \le 1;\quad 0 \le y \le 1,$$

а средние выигрыши равны:

$$E_1(A,\ x,\ y) = xAy^T = (x;\ 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{21} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}.$$

$$E_2(B,\ x,\ y) = xBy^T = (x;\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{21} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}.$$

Условия (2.2′) и (2.3′) будут выглядеть:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le E_1(A, x, y);$$

$$(x;\ 1-\mathrm{x})\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \le E_2(B, x, y)$$

или

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \le E_1(A,\ x, y); \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \le E_1(A, x, y); \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \le E_2(B,\ x,\ y); \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \le E_2(B,\ x,\ y). \end{cases} \tag{2.5}$$

Преобразовав (2.4) и (2.5), получим

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1-x)\,y + (a_{12} - a_{22})\,(1-x) \le 0;$$

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})\,x \ge 0.$$

Обозначив через $a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, а через $-a_2 = a_{12} - a_{22}$, получим уравнения в виде:

$$\begin{cases} a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0; & (5) \\ a_1xy - a_2x \ge 0. & (6) \end{cases}$$

Таким образом, множество всех приемлемых стратегий для игрока 1 удовлетворяет условиям (2.6) и (2.7), $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Чтобы найти x, рассмотрим три случая :

1. Если $x = 0$, то (2.7) будет справедливо $\forall y$, а (2.6) имеет вид:

$$a_1 y - a_2 \le 0. \tag{2.8}$$

2. Если $x = 1$, то (2.6) будет справедливо $\forall y$, а (2.7) имеет вид:

$$a_1 y - a_2 \ge 0. \tag{2.9}$$

3. Если $0 < x < 1$, то (2.6) разделим на $(1 - x)$, а (2.7) — на x и получим

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \le 0; \\ a_1 y - a_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \ a_1 y - a_2 = 0. \tag{2.10}$$

Итак, множество K решений системы (2.6)—(2.7) состоит из:

1) всех ситуаций вида $(0; y)$, если $a_1 y - a_2 \le 0$; $0 \le y \le 1$;

2) всех ситуаций вида $(x; y)$, если $a_1 y - a_2 = 0$; $0 < x < 1$;

3) всех ситуаций вида $(1; y)$, если $a_1 y - a_2 \ge 0$; $0 \le y \le 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то решением является $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, так как все неравенства (2.8)—(2.9) выполняются при всех x и y, т. е. множество приемлемых для игрока 1 ситуаций покрывает весь единичный квадрат.

Если $a_1 = 0$, $a_2 \ne 0$, то выполняется либо (2.8), либо (2.9), и поэтому решением является либо $x = 0$, либо $x = 1$ при $0 \le y \le 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует).

Если $a_1 > 0$, то из (2.8) получаем решение

$$x = 0; \quad y \le \frac{a_2}{a_1} = \alpha.$$

Из (2.9) следует еще решение $x = 1$, $y \ge \alpha$, из (2.10) следует еще решение

$$0 < x < 1; \quad y = \alpha.$$

Если $a_1 < 0$, то решение следующее:

$$x = 0, y \ge \alpha; \quad x = 1, y \le \alpha; \quad 0 < x < 1, y = \alpha.$$

При этом необходимо учитывать, что дополнительно должно соблюдаться условие $0 \le y \le 1$.

Геометрически это выглядит следующим образом (рис. 2.1).

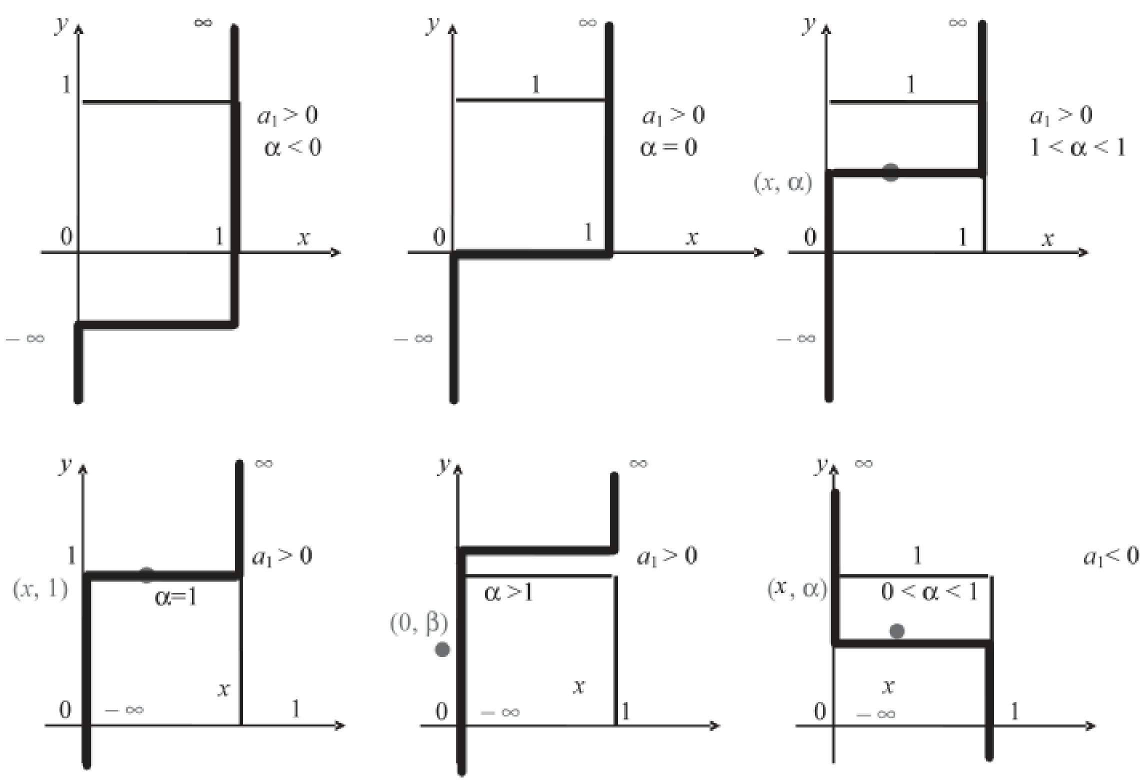


Рис. 2.1

Для игрока 2 исследования аналогичны. Если ввести обозначения

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22};$$

$$b_2 = b_{22} - \underline{b_{21}},$$

то множество L приемлемых для него ситуаций будет состоять из :

1) всех ситуаций вида $(x, 0)$, если $b_1 x - b_2 < 0$; $0 \le x \le 1$;

2) всех ситуаций вида (x, y), если $b_1 x - b_2 = 0$; $0 \le x \le 1$; $0 < y < 1$;

3) всех ситуаций вида $(x, 1)$, если $b_1 x - b_2 > 0$; $0 \le x \le 1$.

Результаты следующие:

если $b_1 = b_2 = 0$, то решение $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$;

если $b_1 = 0$; $b_2 \ne 0$, то решение либо $y = 0$, либо $y = 1$ при $0 \le x \le 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует);

если $b_1 > 0$, то решения следующие:

$$y = 0,\ x < \frac{b_2}{b_1} = \beta;\quad y = 1,\ x > \beta;\quad 0 < y < 1;\quad x = \beta;$$

если $b_1 < 0$, то решения следующие:

$$y = 0, x > \beta; \quad y = 1, x < \beta; \quad 0 < y < 1; \quad x = \beta.$$

При этом необходимо учитывать, что $0 \le x \le 1$.

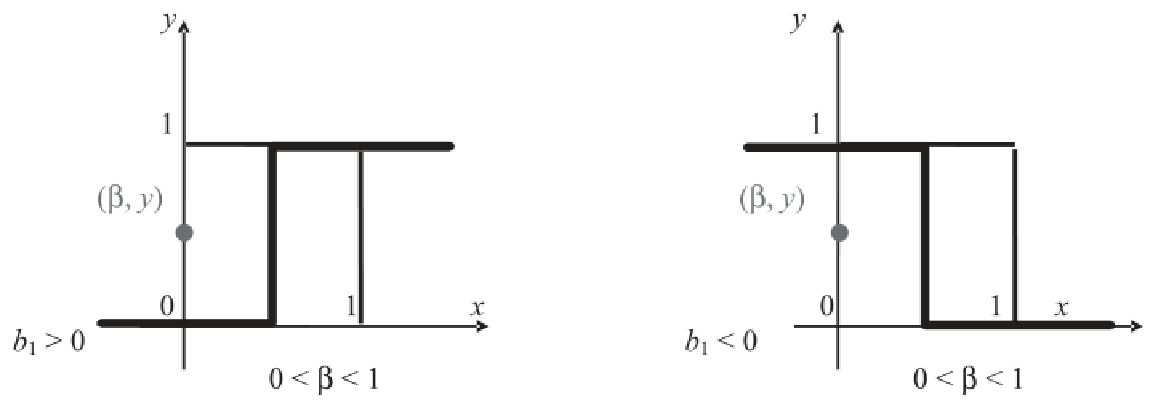


Рис. 2.2

Решением игры является пересечение множеств K и L, т. е. те значения x и y, которые являются общими для множеств K и L.

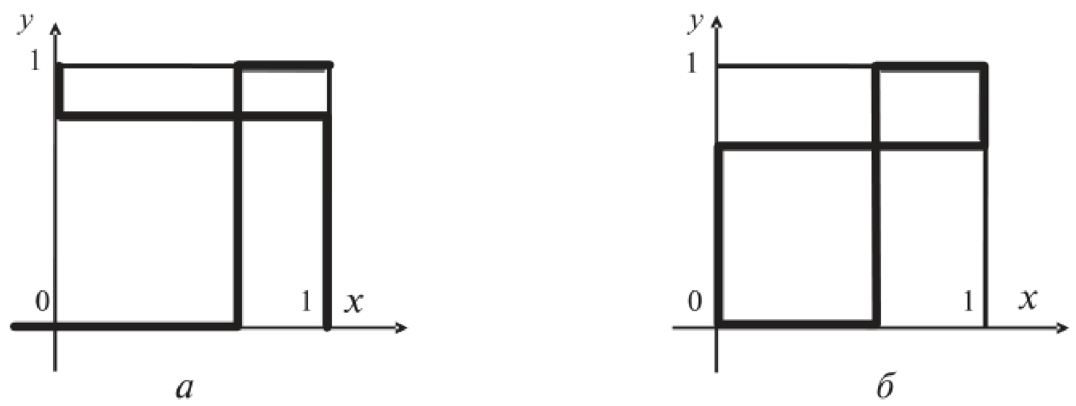


Рис. 2.3

При этом зигзаги K и L могут быть не только одинаковой, но и противоположной направленности. В первом случае зигзаги имеют одну точку пересечения, а во втором, — три. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (2.1), если в них подставить полученное решение x и y (рис. 2.3, *а*). Очевидно α входит в смешанную стратегию игрока 2, хотя зависит только от выигрышей игрока 1; β входит в смешанную стратегию игрока 1, хотя зависит только от выигрышей игрока 2. Сравнение этих результатов с результатами решения матричных игр с нулевой суммой показывает, что α совпадает с оптимальной стратегией игрока 1 в матричной игре с матрицей A, а β — с оптимальной стратегией игрока 2 в матричной игре с матрицей B. Отсюда можно сделать вывод, что равновесная ситуация направляет поведение игроков не столько на *максимизацию* своего выигрыша, сколько на *минимизацию* выигрыша противника.

С другой стороны, естественно также рассматривать подходящим поведение игроков в конечных бескоалиционных играх, направленное на максимизацию своего выигрыша с учетом максимального противодействия игрока, т. е. подходящей стратегией игрока 1 считать оптимальную смешанную стратегию игрока 1 в матричной игре с матрицей A, а подходящей стратегией игрока 2 считать оптимальную смешанную стратегию игрока 2 в матричной игре с матрицей B, если в ней рассматривать решение с позиций максимизации выигрыша игрока 2, т. е. решать ее, как для игрока 1, с матрицей B^T.

Пример 1. Строительная фирма желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложения фирмы или отказать. Строительная фирма (игрок 1) имеет две стратегии: 1 — строить объект, 2 — не строить объект. Городские власти (игрок 2) имеет две стратегии: принять предложение фирмы или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Например, если игроки применяют свои первые стратегии, строительная фирма решает строить 1 объект, а городские власти разрешают его постройку, тогда городские власти получат выигрыш 5 млн руб., а строительная фирма потеряет 10 млн руб., и т. д.).

Решение.

Для этой игры имеем:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14 < 0;$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3;$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{14}.$$

Так как $a_1 < 0$, то множество решений K имеет следующий вид:

$$(0, y) \text{ при } \frac{3}{14} \le y \le 1;$$

$$\left(x, \frac{3}{14}\right) \text{ при } \ 0 \le x \le 1;$$

$$(1, y) \text{ при } \ 0 \le y \le \frac{3}{14}.$$

Рис. 2.4

Для игрока 2 имеем:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9 > 0;$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2;$$

$$\beta = \frac{2}{9}.$$

Так как $b_1 > 0$, то множество решений L имеет следующий вид :

$$(x; 0), \text{ при } 0 \le x \le \frac{2}{9};$$

$$\left(\frac{2}{9}, \ y\right), \text{ при } 0 \le y \le 1;$$

$$(x; 1), \text{ при } \frac{2}{9} \le \ x \le 1.$$

Точка пересечения множеств L и K есть точка C с координатами $x=\frac{2}{9}$; $y=\frac{3}{14}$ и является соответственно приемлемыми стратегиями министерства и города.

При этом выигрыш соответственно равен:

$$E_1(A, x, y) = (x, 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{9}; \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/14 \\ 11/14 \end{pmatrix} = -\frac{4}{7}.$$

$$E_2(A, x, y) = (x, 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Если решить эту игру как матричные игры двух игроков с нулевой суммой, то для игры с матрицей A оптимальные смешанные стратегии для 1 игрока и цена игры получаются из решения уравнений

$$\begin{cases} -10x^1 + (1-x^1) = \upsilon_1; \\ 2x^1 - (1-x^1) = \upsilon_1, \end{cases}$$

откуда вероятность применения игроком 1 первой стратегии равна $x^1 = \frac{2}{14}$, цена игры — $\upsilon_1 = -\frac{4}{7}$, что совпадает с E_1, вероятность применения игроком 2 первой стратегии $y^1 = \frac{3}{14}$; для игры с матрицей B оптимальные смешанные стратегии и цена игры для игрока 2 определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} 5y^2 - 2(1-y^2) = \upsilon_2; \\ -y^2 + (1-y^2) = \upsilon_2. \end{cases}$$

Следовательно, вероятность применения игроком 2 своей стратегии $y^2 = \frac{1}{3}$, а игроком 1 $x^2 = \frac{2}{9}$, цена игры $\upsilon_2 = \frac{1}{3}$, что совпадает с E_2.

Таким образом, если каждый из игроков будет применять свои стратегии в этой игре, исходя только из матриц своих выигрышей, то их оптимальные средние выигрыши совпадают с их выигрышами при ситуации равновесия.

Пример 2. Биматричную игру, заданную матрицами A и B, можно свести к двум задачам линейного программирования.

Задана биматричная игра со следующими платежными матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что игрок A имеет возможность выбрать лишь свою чистую стратегию, найти его оптимальную стратегию.

Для игрока B запишем задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &Z(B) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max; \\ &3 \cdot y_1 + 11 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3 \le 1; \\ &2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 10 \cdot y_3 \le 1; \\ &8 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \le 1; \\ &y_1 \ge 0; \; y_2 \ge 0; \; y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся функцией *Поиск решения*, предварительно введя в Excel значения платежной матрицы игрока B:

	3	11	6	0	1
	2	4	10	0	1
	8	7	5	0	1
	1	1	1		
	0	0	0		
$Z =$	0				

(выделена исходная платежная матрица)

Выполнить команду *Сервис* $\to$ *Поиск решения* и заполнить окно **Поиск решения**, как показано на рис. 2.5.

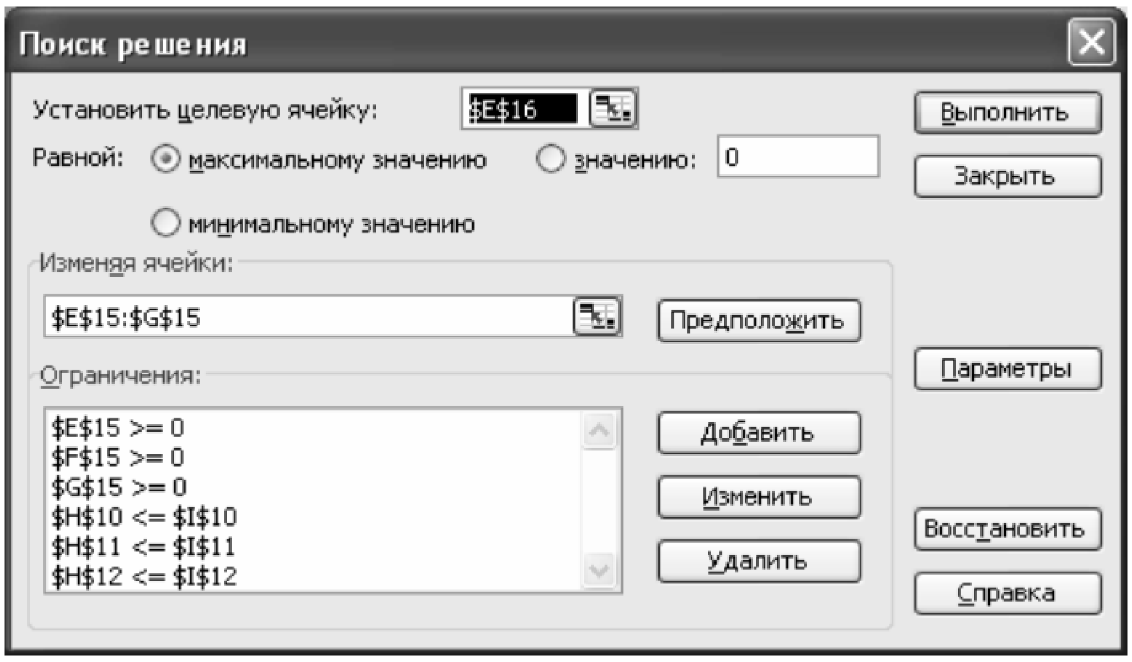


Рис. 2.5

Следует щелкнуть по кнопке ***Выполнить.*** В результате получим следующие данные:

	3	11	6	1	1
	2	4	10	1	1
	8	7	5	1	1
	1	1	1		
	0,044922	0,037109	0,076172		
$Z =$	0,158203				

Тем самым в результате проведенных расчетов получаем, что $y_1 = 0,43$; $y_2 = 0,37$; $y_3 = 0,076$ и $Z_{max} = 0,158$. Пересчитав значения, получим оптимальную смешанную стратегию игрока B:

$$\bar{q} = \{0,284;\ 0,235;\ 0,481\};$$
$$V = 6,32.$$

По условию задачи игрок A имеет возможность выбрать свою чистую стратегию. Его игру можно рассматривать как игру с «природой» и применить критерий Бейеса—Лапласа:

$$S_{\breve{i}} = \max_i S_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j,$$

где $\breve{i}$ — искомая оптимальная стратегия статистика;

a_{ij} — элементы платежной матрицы A;

$q_1, \ldots, q_n$ — вероятности состояний природы.

Так как на предыдущем этапе были определены вероятности $q_1, \ldots, q_n$ — состояния природы, то далее находим математические ожидания выигрыша по каждой стратегии игрока A, а затем среди них определяем максимальное значение.

По указанной формуле найдем средние значения выигрыша S_i для каждой чистой стратегии A_i:

$$S_1 = 4 \cdot 0{,}284 + 5 \cdot 0{,}235 + 6 \cdot 0{,}481 = 5{,}198;$$

$$S_2 = 7 \cdot 0{,}284 + 3 \cdot 0{,}235 + 2 \cdot 0{,}481 = 3{,}654;$$

$$S_3 = 2 \cdot 0{,}284 + 1 \cdot 0{,}235 + 8 \cdot 0{,}481 = 4{,}654.$$

Так как максимальное значение среди них равно 5,198 (max $\{S_1, S_2, S_3\}$), следовательно, первая стратегия будет являться оптимальной.

2.2. Задачи для самостоятельной работы

Биматричная игра задана платежными матрицами A и B. Найти оптимальную стратегию игрока A, предполагая, что он имеет возможность выбрать лишь свою чистую стратегию. При задании матриц A и B размерностью 2×2 решить задачу также графически.

2.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2.2.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2.4

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.7

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

2.2.9

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

2.2.10

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 10 & 6\\ 3 & 8 & 7 & 3\\ -4 & 3 & -4 & -2\\ 8 & 5 & -3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 8 & 7\\ 5 & 10 & -4 & -2\\ 7 & 2 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

2.2.11

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 7 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

2.2.12

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

2.2.13

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 8 & 2\\ 2 & 6 & 4 & 3\\ 9 & 5 & 3 & 7\\ 8 & 7 & 5 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 8 & 7 & 6\\ 10 & 11 & 5 & 7\\ 12 & 10 & 8 & 4\\ 7 & 11 & 10 & 3\end{pmatrix}$$

2.2.14

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 4\\ 3 & 7 & 5\end{pmatrix}$$

2.2.15

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

2.2.16

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 11 & 7 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

2.2.17

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 9 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 40 & 70 & 10 \\ 15 & 70 & 10 & 30 & 40 & 20 \\ 80 & 50 & 40 & 25 & 80 & 70 \\ 45 & 90 & 25 & 55 & 60 & 50 \end{pmatrix}$$

2.2.18

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2.19

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2.20

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.21

$$A=\begin{pmatrix}2&6&4&5\\7&2&3&1\\5&3&6&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&8&5&7\\-3&9&3&5\\8&-1&9&3\end{pmatrix}$$

2.2.22

$$A=\begin{pmatrix}2&6&4&5\\7&2&3&1\\5&3&6&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&8&5&7\\-3&9&3&5\\8&-1&9&3\end{pmatrix}$$

2.2.23

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&7&4\\3&1&4\\6&2&2\end{pmatrix}$$

2.2.24

$$A=\begin{pmatrix}2&3&6&5\\1&2&7&3\\5&4&3&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\3&5&2&3\\1&2&4&1\end{pmatrix}$$

2.2.25

$$A=\begin{pmatrix}9&5&5\\2&6&9\\6&2&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&7\\9&5&4\\5&3&9\end{pmatrix}$$

2.2.26

$$A=\begin{pmatrix}6&3&7&5&8\\7&1&4&9&10\\7&4&8&12&9\\11&6&5&10&7\\3&5&10&7&10\\12&4&3&3&6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&2&5&10&8\\7&5&4&9&1\\7&4&8&2&9\\9&8&5&11&7\\4&5&10&7&10\\8&4&3&4&6\end{pmatrix}$$

2.2.27

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 19 & 14 & 11 \\ 15 & 13 & 19 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2.28

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.29

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.30

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Глава 3
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

3.1. Игры с природой

В антагонистических играх присутствует неопределенность — когда ни один из игроков не обладал информацией о действиях противника. Тем не менее эта неопределенность в некоторой степени компенсировалась определенным предположением каждого из игроков о том, что противоборствующая сторона действует осознанно, выбирая стратегии, наиболее выгодные для себя и наименее выгодные для противника, т. е. поведение каждого игрока было нацелено на увеличение своего выигрыша (уменьшение проигрыша).

В экономической практике во многих задачах принятия решений существенно важным элементом является неопределенность, не связанная с сознательным целенаправленным противодействием противника и заключающаяся в недостаточной информированности лица, принимающего решение, об объективных условиях, в которых будет приниматься решение. Неопределенность такого рода может порождаться различными причинами: нестабильность экономической ситуации, покупательский спрос на товар определенного вида, меняющийся объем перевозок, рыночная конъюнктура, политика правительства, надежность партнера, выход из строя технического оборудования, погодные условия, стихийные бедствия, курс валюты, уровень инфляции, налоговая политика, биржевая ситуация, экологическая обстановка и др.

Во всех задачах такого рода, когда одной из сторон в игре выступает так называемая в математической модели *природа* и заранее неизвестно ее состояние во время принятия решения, игры (математические модели) называются *играми с природой*.

В игре с природой осознанно действует только один игрок, а именно лицо, принимающее решение; обозначим его через *А*. Природа, обозначим ее через *П*, является вторым игроком, но не противником игрока *А*, ибо она не действует осознанно против игрока *А*, а принимает неопределенным образом то или иное свое состояние, не преследуя конкретной цели и безразлично к результату игры. В статистических играх игрок, играющий «против природы», называется *статистиком*, а сама теорию игр с природой — теорией *статистических решений*.

Статистические решения — это игры, в которых один (для определенности — второй) из игроков оказывается нейтральным, т. е. таким, который не стремится извлечь для себя максимальной выгоды и, следовательно, не стремится обратить в свою пользу ошибки, совершаемые его противником. Таким «вторым игроком» может являться природа.

В этих случаях строки платежной матрицы игры соответствуют стратегии игрока-статистика, а столбцы — состояниям природы.

Представление данных в виде платежной матрицы *А* — один из методов статистической теории решений, оказывающий помощь руководителю в выборе одного из нескольких вариантов, а особенно когда руководитель должен установить, какая из стратегий в наибольшей мере будет способствовать достижению целей. В самом общем виде матрица означает, что платеж зависит от определенных событий, которые фактически совершаются. Если событие или состояние природы не случается на деле, платеж неизменно будет другим.

В целом платежная матрица полезна, когда:

1) имеется разумно ограниченное число альтернатив или вариантов стратегии для выбора между ними;

2) то, что может случиться, с полной определенностью не известно;

3) результаты принятого решения зависят от того, какая именно выбрана альтернатива и какие события в действительности имеют место.

Вероятность прямо влияет на определение ожидаемого значения — основного понятия платежной матрицы. Ожидаемое значение альтернативы или варианта — это сумма возможных значений, умноженных на соответствующие вероятности.

Определив ожидаемое значение каждой альтернативы и расположив результаты в виде матрицы, руководитель без труда может выбрать наиболее оптимальный вариант.

Пусть игрок A имеет множество конечных управленческих решений (планов) A_j, равное m возможных стратегий A_1, ..., A_m, а природа $П$ может находиться в одном из n возможных состояний $П_1$, ..., $П_n$, которые можно рассматривать как ее «стратегии». Будем считать, что множество состояний $П_i$ конечно (i = 1, n) или, по крайней мере, количество состояний можно пронумеровать. Все возможные состояния известны, но неизвестно, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения.

Совокупность $\{П_1, ..., П_n\}$ формируется либо на основе имеющегося опыта анализа состояний природы, либо в результате предположений и интуиции экспертов. Выигрыш игрока A при выбранной им стратегии A_i, $i = 1, ..., m$ и при состоянии природы $П_j$, $j = 1, ..., n$ обозначим v_{ij}, $i = 1, ..., m$; $j = 1,..., n$. Так же, как и в матричной игре, из выигрышей игрока A можно сформировать матрицу выигрышей игрока A (матрицу игры, платежную матрицу), которая содержательно отличается от матрицы антагонистической игры тем, что элементы столбцов не являются проигрышами природы при соответствующих ее состояниях (табл. 3.1).

Таблица 3.1

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$
A_1	V_{11}	V_{12}	...	V_{1n}
A_2	V_{21}	V_{22}	...	V_{2n}
...	...	...	...	.....
A_m	V_{m1}	V_{m2}	...	V_{mn}

Задача выбора игроком A чистой или смешанной стратегии, более эффективной, чем остальные, в игре с природой, с одной стороны, проще аналогичной задачи в антагонистической игре, поскольку в игре с природой отсутствует с ее стороны систематическое противодействие игроку A, а с другой стороны, эта задача осложняется наличием неопределенности, связанной с дефицитом осведомленности игрока A о характере проявления состояний природы.

В играх с природой можно и полезно пользоваться принципом минирования (см. п. 1.3) стратегий игрока A (строк матрицы игры).

Однако принцип доминирования стратегий (состояний) природы (столбцов матрицы игры) недопустим, поскольку природа не выбирает свои состояния с целью по возможности большего уменьшения выигрышей игрока *A*, для нее нет более или менее эффектных состояний. Это обстоятельство является еще одним свойством, отличающим игры с природой от антагонистических матричных игр [16].

Если какая-нибудь из стратегий игрока *A* окажется доминирующей каждую из остальных его стратегий, то она и должна выбираться игроком А в качестве предпочтительной, поскольку его выигрыш при этой стратегии и при любом состоянии природы *П* не меньше выигрыша при любой из остальных стратегий.

Если же матрица игры не обладает указанным свойством, т. е. у игрока А нет стратегии, доминирующей каждую из остальных его стратегий, то нужно посмотреть, нет ли у него номинируемых или дублирующих стратегий. Если они присутствуют, то соответствующие им строки матрицы можно удалить, уменьшив тем самым размерность матрицы.

Пример 1. В игре с природой с матрицей, представленной в табл. 3.2. [16], игрок *A* имеет три чистые стратегии A_1, A_2, A_3, а природа *П* может находиться в одном из четырех состояний $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$; при этом стратегия A_2 доминирует стратегии A_1 и A_3, а потому стратегия A_2 является предпочтительной.

Таблица 3.2

A_i	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	1	3	4
A_2	4	6	3	5
A_3	3	5	2	1

Пример 2. В игре с природой с матрицей размерностью 6×5, представленной в табл. 3.3 [16], стратегия A_6 доминирует стратегии A_1 и A_3 и эти стратегии можно отбросить. Стратегии A_2 и A_5 дублируют друг друга, и одну из них можно также удалить, например A_5. В результате получим матрицу размерностью 3×5 (табл. 3.4).

Таблица 3.3

A_i	$П_j$				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	2	6	4	3	2
A_2	9	4	5	1	3
A_3	2	3	1	4	2
A_4	4	8	3	0	1
A_5	9	4	5	1	3
A_6	4	7	4	8	2

Таблица 3.4

A_i	$П_j$				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_2	9	4	5	1	3
A_4	4	8	3	0	1
A_6	4	7	4	8	2

В ряде случаев при решении игры с природой в качестве результатов рассматривается *матрица рисков* $\| r_{ji} \|$.

Элементы матрицы рисков $\| r_{ji} \|$ связаны с элементами матрицы полезности (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji} = V_i - V_{ji}, \qquad (3.1)$$

где $V_i = \max V_{ji}$ — максимальный элемент в столбце i матрицы полезности.

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\| r_{ji} \|$ следует определять по формуле

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i, \qquad (3.2)$$

где $V_i = \min V_{ji}$ — минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Формулы (3.1) и (3.2) можно записать как:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{j}\{V_{ji}\} - V_{ji}, & \text{если } V \text{ — выигрыш;} \\ V_{ji} - \min\limits_{j}\{V_{ji}\}, & \text{если } V \text{ — потери.} \end{cases} \qquad (3.3)$$

При решении игр с природой используется ряд критериев, среди которых выделяют классические и производные (составные) критерии. К числу классических относят: критерий Байеса—Лапласа, ММ-критерий, критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа и др. К числу производных: критерий Гурвица, критерий Ходжа—Лемана, BL (MM)-критерий и др.

3.2. Классические критерии в играх с природой

3.2.1. Критерий Байеса—Лапласа (B-L-критерий)

Принципом выбора в статистических играх называется правило, позволяющее определить наилучшую стратегию статистика.

Если известны вероятности q_1, ..., q_n состояний природы, то принцип выбора состоит в максимизации математического ожидания выигрыша статистика — это так называемый *критерий Байеса—Лапласа*, т. е. платежная матрица дополняется еще одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк, а затем выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение этого столбца.

$$S_{\breve{i}} = \max_i S_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j, \qquad (3.4)$$

где $\breve{i}$ — искомая оптимальная стратегия статистика;

V_{ij} — элементы платежной матрицы A;

q_1, ..., q_n — вероятности состояний природы.

Предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами.

1. Вероятности появления состояния q_j известны и не зависят от времени.

2. Решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз.

3. Для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключен.

Критерий Байеса—Лапласа (B-L-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

3.2.2. Критерий Лапласа

Данный критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния природы S_i, $i = \overline{1,\ n}$ полагаются равновероятными $q_i = \dfrac{1}{n}$.

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей выигрышей $\|V_{ji}\|$, то для выбора оптимальной стратегии R_j выбирают максимальное значение среди предварительно вычисленных по строкам матрицы средних арифметических значений, дающих наибольший ожидаемый выигрыш, т. е.:

$$\max_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}\right\}. \tag{3.5}$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей затрат или рисков $\|r_{ji}\|$, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ji}\right\}. \tag{3.6}$$

3.2.3. Критерий Вальда

Критерий Вальда, который часто называют минимаксным или максиминным критерием, опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j.

Согласно ему игра с природой ведется как игра с разумным, причем агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать другому игроку достигнуть успеха. Оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш в любом случае не меньший, чем «нижняя цена игры с природой».

Если руководствоваться этим критерием, олицетворяющим «позицию крайнего пессимизма», надо всегда ориентироваться на худшие условия, зная наверняка, что «хуже этого не будет». Очевидно, такой подход — «перестраховочный», естественный для того, кто очень боится проиграть,— не является единственно возможным, но как крайний случай он заслуживает рассмотрения.

Таким образом, выбранные варианты полностью исключают риск и принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. К тому же данный критерий не требует знания вероятностей состояний S_i.

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *минимаксный критерий*:

$$Z = \min_j \max_i \{V_{ji}\}. \tag{3.7}$$

То есть для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов $\|V_{ji}\|$ найти сначала наибольший элемент, а затем среди них выбрать наименьший элемент.

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий*:

$$Z = \max_j \min_i \{V_{ji}\}. \tag{3.8}$$

3.2.4. Минимаксный критерий (ММ-критерий)

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

- матрица решений дополняется еще одним столбцом, состоящим из наименьших результатов в каждой строке;
- в новом столбце выбираются те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения.

$$Z = \min_j \max_i \{V_{ji}\}. \tag{3.9}$$

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных.

3.2.5. Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа или критерий минимаксного риска тоже критерий крайне пессимистический, но при выборе оптимальной стратегии советует ориентироваться не на выигрыш, а на риск. Выбирается в качестве оптимальной та стратегия, при которой величина риска в наихудших условиях минимальна.

Сущность такого подхода в том, чтобы всячески избегать большого риска при принятии решения. В смысле «пессимизма» критерий Сэвиджа сходен с критерием Вальда, но самый «пессимизм» здесь понимается по-другому. Он использует матрицу рисков $\| r_{ji} \|$, элементы которой можно рассчитать по формуле (3.3), и рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т. е.:

$$Z = \min_j \max_i \{r_{ji}\}. \tag{3.10}$$

Примеры игр с природой с применением классических критериев

Пример 1. Телефонная компания должна определить уровень своих возможностей по предоставлению телефонных услуг так, чтобы удовлетворить спрос своих клиентов на планируемый период.

Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень возможностей телефонной компании (например, с точки зрения возможных затрат на ввод нового тарифа). Отклонения от этих уровней могут приводить к дополнительным затратам. В табл. 3.5 приводятся сведения, определяющие прогнозируемые затраты на развитие телефонных возможностей.

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Таблица 3.5

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги			
	1 (S_1)	2 (S_2)	3 (S_3)	4 (S_4)
1 (R_1)	7	10	18	22
2 (R_2)	9	6	8	25
3 (R_3)	21	18	16	21
4 (R_4)	24	22	20	26

Имеются четыре варианта спроса на телефонные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний природы: S_1, S_2, S_3, S_4. Известны также четыре варианта предоставляемых компанией телефонных услуг: R_1, R_2, R_3, R_4.

Решение.

Критерий Лапласа. Он предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны, т. е. в данном случае $p = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Тогда ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют:

$$W\{R_1\} = 0{,}25 \cdot (7 + 10 + 18 + 22) = 14{,}25;$$

$$W\{R_2\} = 0{,}25 \cdot (9 + 6 + 8 + 25) = 12;$$

$$W\{R_3\} = 0{,}25 \cdot (21 + 18 + 16 + 21) = 19;$$

$$W\{R_4\} = 0{,}25 \cdot (24 + 22 + 20 + 26) = 23.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

Критерий Вальда. Так как V_{ji} представляет потери (затраты), то применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в табл. 3.6.

Наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» (критерий Вальда) будет третья (R_3).

Таблица 3.6

Состояния S_i / Стратегия R_j	Затраты (V_{ji}), ден. един.				max (V_{ji})	min max (V_{ji})
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	7	10	18	22	22	—
R_2	9	6	8	25	25	—
R_3	21	18	16	21	21	21
R_4	24	22	20	26	26, —	

Критерий Сэвиджа. Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (3.3) вычислим элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ и запишем их в следующую таблицу (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Состояния S_i / Стратегия R_j	Величина риска (r_{ji})				max (r_{ji})	min max (r_{ji})
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	4	10	1	10	—
R_2	2	0	0	4	4	4
R_3	14	12	8	0	14	—
R_4	17	16	12	5	17	—

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа привели к выбору второй стратегии (R_2), обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Пример 2. В процессе использования станка необходимо периодически его приостанавливать для профилактических работ с заменой или без замены отдельных частей. Приостановка станка приводит к определенным экономическим издержкам. В случае же, если профилактика и замену своевременно не проводить, то может произойти поломка станка и вывод его из работы на более долгий по сравнению с профилактикой срок, что приведет к еще большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E_1 — профилактика и замена отдельных частей станка;

E_2 — профилактика без замены отдельных частей станка;

E_3 — отказ от профилактики.

Станок может находиться в следующих состояниях:

F_1 — работает и не требует профилактики;

F_2 — работает, и требуется профилактика;

F_3 — не работает и требует ремонта.

Результаты, включающие затраты в усл. ден. ед. на профилактику и замену отдельных частей, а также затраты, связанные с ремонтом станка, представлены в табл. 3.8 (матрица затрат).

Таблица 3.8

	F_1	F_2	F_3
E_1	–140,00	–160,00	–180,00
E_2	–150.00	–170.00	–190.00
E_3	0	–180.00	–220.00

Критерий Лапласа. Следуя критерию Лапласа (табл. 3.9), когда все состояния станка равновероятны, получим, что надо следовать варианту без проведения профилактики станка ($Z = –133,00$ у. е., E_3).

Таблица 3.9

	F_1	F_2	F_3	Критерий Лапласа
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	**–160,00**
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	**–170,00**
E_3	0,00	–180,00	–220,00	**–133,33**

Критерий Байса—Лапласа. Согласно данному критерию, в предположении, что все состояния станка равновероятны ($q_j = 0,33$) рекомендуется отказаться от проверки (табл. 3.10).

Таблица 3.10

	F_1	F_2	F_3	min (V_{ij})	max min (V_{ji})
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	–158,40	—
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	–168,30	—
E_3	0,00	–180,00	–220,00	–132,00	**–132,00**

Критерий Вальда. Так как V_{ji} представляет потери (затраты), то применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в табл. 3.11.

Таблица 3.11

	F_1	F_2	F_3	max (V_{ji})	min max (V_{ji})
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	–140,00	—
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	–150,00	**–150,00**
E_3	0,00	–180,00	–220,00	0,00	—

Наилучшей стратегией обслуживания станка в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» (критерий Вальда) будет вариант проведения профилактики без замены отдельных частей станка (E_2).

ММ-критерий. В соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) дополняем столбец с минимальными значениями по каждой строке, а затем среди них выбираем максимальное (табл. 3.12).

Таблица 3.12

	F_1	F_2	F_3	min (V_{ij})	max min (V_{ji})
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	–180,00	**–180,00**
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	–190,00	—
E_3	0,00	–180,00	–220,00	–220,00	—

Наилучшая стратегия обслуживания станка согласно ММ-критерию — следует проводить профилактику и замену отдельных частей станка (E_1).

Критерий Сэвиджа. Так как данный критерий использует матрицу рисков, то сначала сформируем ее. Первоначально у нас имеется матрица затрат, поэтому найдем по каждому ее столбцу минимальное значение, а затем по формуле (3.3) вычислим элементы матрицы рисков $\| r_{ji} \|$ и запишем их в следующую таблицу (табл. 3.13).

Таблица 3.13

	F_1	F_2	F_3	max (r_{ij})	min max (r_{ji})
E_1	10,00	20,00	40,00	40,00	—
E_2	0,00	10,00	30,00	30,00	**30,00**
E_3	150,00	0,00	0,00	150,00	—

В результате вычислений наилучшей стратегией обслуживания станка согласно критерию Сэвиджа является стратегия E_2 — следует проводить профилактику без замены отдельных частей станка.

3.3. Производные критерии в играх с природой

3.3.1. Критерий Гурвица

Этот критерий называют также критерием пессимизма-оптимизма Гурвица. Он рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом («всегда рассчитывай на худшее!»), ни крайним, легкомысленным оптимизмом («авось кривая вывезет!»). Согласно данному критерию, стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, лицо, принимающее решение (ЛПР), может ввести оценочный коэффициент (критерий пессимизма-оптимизма Гурвица), называемый коэффициентом доверия или пессимизма, который находится в интервале [0, 1] и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Данный коэффициент определяется на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта ЛПР при принятии решений в схожих ситуациях.

Тем самым данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1 - \alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α – коэффициент доверия (пессимизма).

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами $(1 - \alpha)$ и α, где $0 \le \alpha \le 1$.

Если в исходной задаче матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет выигрыш, прибыль, полезность, доход и т. п., то критерий Гурвица записывается как:

$$Z = \max_j \left[\alpha \max_i V_{ji} + (1 - \alpha) \min_i V_{ji} \right]. \tag{3.11}$$

Если $\alpha = 0$, то получим критерий Вальда:

$$Z = \max_j \min_i \{V_{ji}\},$$

а если $\alpha = 1$, то приходим к решающему правилу вида:

$$Z = \max_j \max_i V_{ji},$$

т. е. критерий Гурвица превращается в ММ-критерий (см. п. 3.2.4).

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет затраты (потери), то критерий Гурвица записывается как:

$$Z = \min_j \left[\alpha \min_i x V_{ji} + (1 - \alpha) \max_i V_{ji} \right]. \tag{3.12}$$

Критерий Гурвица применяется в ситуации, когда:

1) информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна;

2) необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды;

3) реализуется только малое количество решений;

4) допускается некоторый риск.

В технических приложениях сложно выбрать весовой множитель α, так как трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего выбирают $\alpha = 0{,}5$.

имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния V_j, а затем среди полученных значений этого столбца выбирается вариант с наибольшим значением.

Так как в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $V_{ji} < 0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин V_{ji} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $V_{ji} - t$ при подходящем образом подобранном $t > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от t.

Критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $q_j = \dfrac{1}{n}$, $j = \overline{1,\ n}$, они становятся идентичными.

Если функция распределения известна не очень надежно, а числа реализации малы, то, следуя критерию Гермейера, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск.

3.3.4. BL (MM)-критерий

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем рассмотренные до этого, привело к построению так называемых производных или составных критериев, одним из которых является *BL* (*MM*)-*критерий*, полученный путем объединения критериев Байеса—Лапласа и минимакса.

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом: платежная матрица $\|V_{ji}\|$ дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк.

Во втором — разность между опорным значением $V_0 = \max\limits_i \max\limits_j \{V_{ji}\}$ и наименьшим значением $MI_i = \min\limits_j \{V_{ji}\}$ соответствующей строки, т. е. $V_0 - MI_i$.

В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением $MA_i = \max\limits_j \{V_{ji}\}$ каждой строки и наибольшим значением $\max\{V_{ji}\}$ той строки, в которой находится опорное значение V_0. После этого выбираются те варианты, строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание, а именно, соответствующее значение $V_0 - \max_j \{V_{ji}\}$ из второго столбца должно быть равно некоторому заранее заданному уровню риска $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значение же из третьего столбца должно быть больше значения из второго столбца.

Условие $V_0 - \max_j \{V_{ji}\}$ существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих условиях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным.

BL (MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако заданные границы риска $\varepsilon_{\text{доп}}$ и, соответственно, оценок риска ε_i не учитывают ни число применения решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но полностью не исключено.

3.3.5. Критерий произведений

Данный критерий имеет следующую формулу расчета:

$$Z = \max_j \prod_i V_{ji}. \tag{3.15}$$

В этом случае правило выбора формулируется так: матрица решений $\|V_{ji}\|$ дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки, и в нем затем выбираются варианты с наибольшим значением.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все V_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $V_{ij} + t$ с некоторой константой $t > |\min_{ij} v_{ij}|$. Результат при этом будет, естественно, зависеть от t. На практике чаще всего выбирают значение t как:

$$t = |\min_i \min_j \{V_{ji}\}| + 1. \tag{3.16}$$

Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

Примеры игры с природой с применением производных критериев

Критерий Гурвица с данными из примера 1 при $\alpha = 0{,}5$. Результаты проведенных вычислений приведены в табл. 3.14.

Таблица 3.14

	S_1	S_2	S_3	S_4	$\min V_{ji}$	$\max V_{ji}$	$W_j = \alpha \cdot \min V_{ji} + (1 - \alpha) \cdot \max V_{ji}$	$\min W_j$
R_1	7	10	18	22	7	22	14,5	14,5
R_2	9	6	8	25	6	25	15,5	—
R_3	21	18	16	21	16	21	18,5	—
R_4	24	22	20	26	20	26	23	—

Оптимальное решение заключается в выборе W_1.

Таким образом, далее лицу, принимающему решение (ЛПР), в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее:

- по критерию Лапласа — выбор стратегии R_2;
- по критерию Вальда — выбор стратегии R_3;
- по критерию Сэвиджа — выбор стратегии R_2;
- по критерию Гурвица при $\alpha = 0{,}5$ — выбор стратегии R_1.

Критерий Гурвица с данными из примера 2 при $\alpha = 0{,}5$. Так как матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет затраты (потери), то критерий Гурвица будет рассчитываться по формуле (3.12). В результате вычислений (табл. 3.15) наилучшая стратегия обслуживания станка согласно критерию Гурвица — проводить профилактику без замены отдельных частей станка (E_2).

Таблица 3.15

	F_1	F_2	F_3	min (V_{ij})	max (V_{ij})	[ ]	min
E_1	–140	–160	–180	–180,00	–140,00	–160	
E_2	–150	–170	–190	–190,00	–150,00	–170	**–170**
E_3	0	–180	–220	–220,00	0,00	–110	

Критерия Ходжа—Лемана. Для рассмотрения выберем данные примера 2 с $q = 0{,}33$, $\nu = 0.5$. Проведем расчеты по формуле (3.13), представленные в табл. 3.16.

Таблица 3.16

	F_1	F_2	F_3	$\min(V_{ij})$	$(1-a)\min V_{ij}$	$\sum fq$	$a\sum fq$	[ ]	max
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	–180,00	–90,00	–158,40	–79,20	–169,20	**–169,20**
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	–190,00	–95,00	–168,30	–84,15	–179,15	
E_3	0,00	–180,00	–220,00	–220,00	–110,00	–132,00	–66,00	–176,00	

Критерий Ходжа—Лемана рекомендует вариант E_1 (профилактика и замена отдельных частей станка). Смена рекомендуемого варианта происходит только при $\nu = 0{,}94$. Поэтому равномерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с очень высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остается произвольным.

Критерий Гермейера. При $q_j = 0{,}33$ он дает следующий результат (табл. 3.17).

Таблица 3.17

	F_1	F_2	F_3	$fi \cdot q$	$fi \cdot q$	$fi \cdot q$	$\min fi$	max
E_1	–140,00	–160,00	–180,00	–46,62	–53,28	–59,94	–59,94	**–59,94**
E_2	–150,00	–170,00	–190,00	–49,95	–56,61	–63,27	–63,27	
E_3	0,00	–180,00	–220,00	0,00	–59,94	–73,26	–73,26	

В качестве оптимального выбирается вариант E_1. Сравнение вариантов с помощью величин показывает, что способ действия критерия Гермейера является даже более гибким, чем у ММ-критерия.

Критерий произведений. Так как исходная матрица отрицательная, т. е. условие $f_{ij} > 0$ для данной матрицы не выполнимо, то к элементам матрицы добавляется параметр t, который сначала найдем по формуле (3.16). Значение его будет равно $t = 221$.

Результаты применения критерия произведения при $t = 221$ представлены в табл. 3.18.

Таблица 3.18

$F_1 + \lvert t \rvert$	$F_2 + \lvert t \rvert$	$F_3 + \lvert t \rvert$	$Z_i = \Pi (F_j + \lvert t \rvert)$	max Z_i
81,00	61,00	41,00	202 581	**202 581**
71,00	51,00	31,00	112 251	
221,00	41,00	1,00	9061	

Возьмем произвольный параметр t, например равный $t = 500$, и проведем соответствующие расчеты (табл. 3.19).

Таблица 3.19

$F_1 + \lvert t \rvert$	$F_2 + \lvert t \rvert$	$F_3 + \lvert t \rvert$	$Z_i = \Pi (F_j + \lvert t \rvert)$	max Zi
360,00	340,00	320,00	39 168 000	
350,00	330,00	310,00	35 805 000	
500,00	320,00	280,00	44 800 000	**44 800 000**

Для $t = 221$ оптимальным оказывается вариант E_1, а для $t = 500$ — вариант E_3, так что зависимость оптимального варианта от t очевидна.

Замечание 1.

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жестких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочередно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Замечание 2.

Примеры 1 и 2 подобраны так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределенность состояния превращается в неясность, какому критерию следовать.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучше всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса—Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

3.4. Задачи для самостоятельной работы

3.4.1. Шесть экспертов оценивали по 20-балльной шкале степень безопасности проезда в 7 видах транспорта. Результаты экспертов представлены в таблице.

По данным этих оценок по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа и др. выявить самые безопасные виды транспорта. Для критерия Гурвица взять $\alpha = 0{,}4$.

Вид транспорта	Эксперт					
	1	2	3	4	5	6
Воздушный	9	5	10	7	9	8
Железнодорожный	5	5	6	7	5	4
Водный	8	7	11	7	9	6
Автомобильный	15	12	13	10	12	14
Мотоцикл	19	15	14	8	10	12
Велосипед	5	14	7	7	7	6
Метро	10	8	9	7	5	11

3.4.2. Десять экспертов оценивали по 10-балльной шкале модели летних шин для автомобилей, учитывая их тормозной путь, надежность управления автомобилем на прямой и на поворотах, поперечные сцепные свойства, цену и др. по минимуму затрат. Результаты экспертов представлены в таблице потерь.

По данным этих оценок по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица ($\alpha = 0{,}6$), Сэвиджа и др. выбрать наиболее удачную модель.

Вид модели шин	Эксперт									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Barum Bravuris	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9
Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9
Danlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	8
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9

3.4.3. На новый год в детский сад хотят поставить наборы подарков, производимых 5 фабриками. При выборе фабрики руководствуются экспертными оценками о стоимости подарков, приведенными в таблице. С какой из фабрик следует заключить договор о поставке наборов подарков, обеспечивая минимальную их стоимость. $\alpha = 0{,}5$.

Тип фабрики	Экспертные оценки					
	1	2	3	4	5	6
Фабрика № 1	20	25	18	15	21	16
Фабрика № 2	25	24	18	10	24	15
Фабрика № 3	15	28	20	12	19	18
Фабрика № 4	9	21	22	18	20	17
Фабрика № 5	18	26	20	20	15	22

3.4.4. Автомобильная компания планирует вопрос о поставке автомобилей на рынок. Составлена смета расходов на закупку автомобилей в квартал, и рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения автолюбителей. В зависимости от принятого решения — покупки автомобилей в квартал и величины прогнозируемого спроса на автомобили составлена следующая таблица ежегодных финансовых результатов компании (доход, тыс. у. е.). Оценку проведите с использованием всех критериев, рассмотренных в разделе 2.

Варианты покупки а/м в квартал	Оценка прогнозируемой величины спроса					
	10	20	30	40	50	60
20	200	250	200	150	300	280
30	210	240	240	180	250	270
40	190	300	210	200	250	330
50	170	320	150	170	200	290
60	150	180	120	160	210	230

При использовании критерия Гурвица сделайте расчеты при следующих значениях $\alpha = 0{,}3$; $\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}7$.

3.4.5. Определите, какой тип самолета необходимо построить, чтобы удовлетворить потребность авиаперевозчиков. Множество возможных стратегий включает следующие параметры:

R_1 — строится самолет на 250 мест и дальностью полета 6000 км;
R_2 — строится самолет на 180 мест и дальностью полета 8000 км;
R_3 — строится самолет на 300 мест и дальностью полета 7000 км;
R_4 — строится самолет на 280 мест и дальностью полета 5500 км;
R_5 — строится самолет на 200 мест и дальностью полета 10 000 км.

Экономическая эффективность строительства самолетов зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i ($i = 1{,}5$). Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице. Для критерия Гурвица взять $\alpha = 0{,}45$.

Тип самолета	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	30	60	30	20	45
R_2	40	50	40	40	40
R_3	60	80	45	45	30
R_4	50	70	60	25	50
R_5	70	40	50	30	60

3.4.6. Имеются четыре варианта (проекта) оснащения предприятия современным техническим оборудованием R_i, $i = 1{,}4$. Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого варианта в зависимости от рентабельности производства в четырех кварталах (как некоторое состояние природы) (см. табл). Требуется выбрать лучший проект по оснащению предприятия, используя критерии, перечисленные в разделе 2. $\alpha = 0{,}7$.

Варианты оснащения	Состояние природы			
	1	2	3	4
R_1	8	15	12	11
R_2	10	12	14	15
R_3	6	8	13	14
R_4	5	10	15	12

3.4.7. На конкурс выставлено пять проектов строительства административного здания районного города (R_i, $i = 1{,}5$). Четырьмя рабочими группами проведена экспертиза этих проектов, результаты которой представлены в таблице. Требуется выбрать лучший проект, используя критерии, перечисленные в разделе 2. $\alpha = 0{,}5$.

Варианты проекта	Состояние природы			
	1	2	3	4
R_1	18	25	21	21
R_2	30	22	24	25
R_3	16	28	23	24
R_4	25	30	25	22
R_5	28	27	20	19

3.4.8. Компания «Молоко всем» изучает возможность производства и сбыта навесов для хранения кормов. Проект может основываться на большой или малой производственной базе. Рынок для реализации навесов может быть благоприятным или неблагоприятным.

Менеджер компании учитывает возможность вообще не строить эти навесы. При благоприятной рыночной ситуации большое производство позволило бы менеджеру получить чистую прибыль 300 тыс. руб. Если рынок окажется неблагоприятным, то при большом производстве компания понесет убытки в размере 200 тыс. руб. Малое производство дает 150 тыс. руб. прибыли при благоприятной рыночной ситуации и 50 тыс. руб. убытков при неблагоприятной. Какую альтернативу следует выбрать менеджеру компании?

Составить таблицу решений и определить вариант с использованием различных критериев, рассмотренных в главе 2.

3.4.9. В райцентре решается вопрос о строительстве сыроваренного завода. Известно, что дневной объем поставок молока колеблется от 4800 до 5600 л в день. Один сепаратор ежедневно перерабатывает 600 л молока в 50 кг сыра. Стоимость аппарата 40 000 руб., ежемесячные эксплуатационные расходы —5000 руб., годовая аренда помещения под него — 45 000 руб. Молоко закупается по 8 руб./л, сыр продается по 150 руб./кг. Неиспользованное молоко приходится вывозить на свинокомплекс молоковозами (вместимость 5 т) с затратами 300 руб. за рейс. Сколько требуется закупить сепараторов?

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.10. Консультационная фирма оказывает услуги клиентам по цене 1000 руб. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить в день до 10 заказов. Стоимость аренды помещения составляет 10 000 руб. в месяц. Количество лиц, пользующихся услугами фирмы, не превышает 200 человек в месяц. Определите, сколько надо иметь сотрудников в фирме, которые приносили бы максимум общего дохода.

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.11. Фермер решает вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке урожая картофеля. Урожайность картофеля со всего поля колеблется в зависимости от погоды от 8000 до 10 000 т, закупочная цена стабильна и равна 10 руб./кг. Рабочий за сезон собирает 250 т, получая 4 руб./кг за уборку и 300 руб. для оплаты стоимости проезда к месту работ. Затраты на обеспечение рабочих жильем и питанием за сезон составляют 30 000 руб. и не зависят от численности.

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.12. В городе планируется строительство кинотеатра. Имеются проекты на 250, 400, 500 и 600 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляют 2000 руб. в день и дополнительно 200 руб. за каждые сто мест (свыше 500). В день можно было дать 6 сеансов, стоимость билета составляла в среднем 80 руб. Количество посетителей колеблется, по оценке экспертов, от 2000 до 3000 чел. Какой из проектов кинотеатра следовало бы выбрать?

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.13. Туристическая фирма планирует десятидневные маршруты для туристов в летнем сезоне (60 дней). Известно, что число туристов в течение десятидневки колеблется от 1 до 1,5 тыс. чел. Группы комплектуются из 25 чел. Стоимость путевки — 10 тыс. руб. Заработная плата инструктора составляет 8 тыс. руб. в месяц. На экипировку группы затрачивается 1,5 тыс. руб., на питание группы — 12 тыс. руб. К тому же приходится оплачивать ремонт помещений и снаряжения при подготовке к сезону 30 тыс. руб. Сколько инструкторов разумно пригласить на работу в сезон?

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.14. Компания «Моя корова» производит различные сорта сыра и продуктов из него. Один из таких продуктов — сырная паста, продается в розницу. Менеджер компании должен решить, сколько ящиков сырной пасты следует производить в течение месяца. Вероятность того, что спрос на сырную пасту в течение месяца будет 6, 7, 8 или 9 ящиков, равна соответственно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. Затраты на производство одного ящика пасты составляют 45 тыс. руб. Менеджер продает каждый ящик по цене 95 тыс. руб. Если сырная паста не продается в течение месяца, то она портится и компания не получает дохода. Следует определить, сколько ящиков сырной пасты следует производить в течение месяца и какова ожидаемая стоимостная оценка этого решения[1].

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.15. Предприниматель может открыть в своей аптеке или большую, или маленькую секцию проката видеокассет. При этом он может получить дополнительную информацию о том, будет рынок видеопроката благоприятным или нет. Эта информация обойдется ему в 3 млн руб. Предприниматель считает, что эта информация окажется благоприятной с вероятностью 0,5. Если рынок будет благоприятным, то большая секция проката принесет прибыль 15 млн руб., а маленькая — 5 млн руб. При неблагоприятном рынке он потеряет 20 млн руб. в случае, если он откроет большую секцию, и 10 млн руб. в случае, если маленькую. Не имея дополнительной информации, предприниматель оценивает вероятность благоприятного рынка как 0,7. Положительный результат обследования гарантирует благоприятный рынок с вероятностью 0,9. При отрицательном результате рынок может оказаться благоприятным с вероятностью 0,4.

Следует определить:

- надо ли предпринимателю получить дополнительную информацию?
- следует ли открывать большую секцию?
- какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу,

[1] *Афанасьев М. Ю.*, *Суворов Б. П.* Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2003.

используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.16. Сельскохозяйственное предприятие планирует засеять поле площадью 5000 га двумя различающимися потреблением влаги во время вегетационного периода сортами ржи. Проанализировав погодные условия, выделены 4 состояния погоды (S_1, S_2, S_3, S_4), отличающиеся режимом осадков, и найдены статистические вероятности каждого состояния: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$; $p_4 = 0{,}2$. Средняя урожайность (ц/га) каждого сорта на всем участке для каждого состояния погоды приведена в таблице:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Сорт 1	23	29	31	37
Сорт 2	36	33	28	24

Возможные варианты посева:

А1) сорт 1 посадить на 100 % площади;

А2) сорт 1 посадить на 75 % площади, сорт 2 посадить на 25 % площади;

А3) сорт 1 посадить на 50 % площади, сорт 2 посадить на 50 % площади;

А4) сорт 1 посадить на 25 % площади, сорт 2 посадить на 75 % площади;

А5) сорт 2 посадить на 100 % площади.

Определить оптимальную стратегию с помощью критериев, представленных в разделе 2, взяв для критерия Гурвица коэффициент доверия равным 0,4, а для критерия Ходжа—Лемана коэффициент достоверности информации о состояниях погоды принять равным 0,7.

3.4.17. Дилерская компания бухгалтерского программного продукта 1С планирует открыть курсы по обучению бухгалтеров работе с программным продуктом. Ожидаемая численность слушателей в пределах от 50 до 100 чел. За каждого из них компания получает от работодателя 10 000 руб. Преподаватель работает с группой, не превышающей 8 чел. Расходы на хозяйственные нужды составляют

8000 руб. и на оплату преподавателя 15 000 руб. Рассчитайте оптимальное число преподавателей, необходимых для привлечения к обучению. Как изменится численность преподавателей, если решено увеличить их оплату труда до 20 000 руб.?

Требуется сформировать вектор состояний внешней среды и вектор решений ЛПР, построить матрицу полезности и решить задачу, используя предложенные критерии. Провести оценку полученных результатов.

3.4.18. Сельскохозяйственное предприятие производит сельхозпродукцию и может ее реализовать[1]:

- сразу после уборки (A_1);
- в осенние месяцы (A_2);
- в зимние месяцы (A_3);
- в весенние месяцы (A_4).

Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затрат на хранение и возможных потерь. Прибыль предприятия, рассчитанная для разных состояний — соотношений дохода и издержек (S_1, S_2, S_3 и S_4) в течение всего периода реализации, представлена в виде следующей платежной матрицы (млн руб.):

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	2	3	6	5
A_2	3	5	4	2
A_3	4	–3	2	3
A_4	1	–4	3	4

Определить наиболее выгодную стратегию по критерию Байеса, критерию Лапласа, максиминному критерию Вальда, критерию пессимизма-оптимизма Гурвица, критерию Ходжа—Лемана, критерию минимаксного риска Сэвиджа, если вероятности состояний спроса:

[1] Пример сформулирован на основе работы задания, изложенного в учебном пособии: *Деркач Д. В.* Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ: учеб.-метод. пособие. Армавир, Армавирский государственный педагогический университет, 2010. С. 28.

0,2; 0,4; 0,3; 0,1; коэффициент пессимизма $\alpha = 0,3$; а коэффициент достоверности информации о состояниях спроса $u = 0,6$.

3.4.19. В области, занимающейся выращиванием сахарной свеклы, имеется 4 участка, одинаковые по площади, но разные по степени влажности почвы:

- участок 1 с повышенной влажностью;
- участок 2 со средней влажностью;
- участок 3 с пониженной влажностью;
- участок 4 с особо низкой влажностью.

Предстоит выбрать участок под посадку сахарной свеклы. Для получения хорошего урожая требуется определенное количество влаги в почве в период созревания свеклы. При излишней влажности почвы свекла может частично сгнить на корню, при недостатке влаги – будет плохо развиваться, а при отсутствии влаги в период созревания свекла просто засохнет. Выделяются четыре состояния погоды: S_1 — в период созревания выпало много осадков, заметно больше нормы; S_2 — осадки в норме; S_3 — осадков заметно меньше нормы; S_4 — осадков не было. Средняя урожайность свеклы с 1 га в центнерах различна для разных участков и для разных погодных условий и задается следующей матрицей[1]:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Участок 1	8	35	10	8
Участок 2	7	40	15	12
Участок 3	15	45	20	11
Участок 4	7	15	8	6

Определить оптимальную стратегию выбора участка, используя критерии:

- недостаточного основания Лапласа;
- максиминного критерия Вальда;
- пессимизма-оптимизма Гурвица (коэффициент пессимизма взять равным 0,7);

[1] Цифры условные.

- критерия Ходжа—Лемана (коэффициент достоверности информации о состояниях погоды принять равным 0,7);
- минимаксного риска Сэвиджа.

3.4.20. Комплексная задача[1].

В авиакомпаниях рабочие часы устанавливаются в соответствии с договорами, заключенными с профсоюзными организациями. В частности, максимальная продолжительность работы может быть ограничена 16 часами для полетов на Боинге 747 (В 747) и 14 часами – на Боинге 707 (В 707). Если эти пределы превышаются в силу неожиданных задержек, экипаж должен быть заменен новым. Авиакомпании содержат резервные экипажи для таких случаев. Средняя годовая стоимость содержания члена резервного экипажа оценивается в 30 000 долл. Задержка полета на одну ночь, обусловленная отсутствием резервного экипажа, может стоить 50 000 долл. Член экипажа находится по вызову непрерывно 12 ч в сутки 4 дня в неделю и может не находиться по вызову три оставшихся дня недели. Самолет В 747 может обслуживаться двумя экипажами для самолета В 707.

Следующая таблица содержит вероятности вызова резервных экипажей, вычисленные на основании трехлетнего опыта.

Категория рейса	Рейс (время вылета)	Вероятность вызова	
		В 747	В 707
1	14:00	0,014	0,072
2	13:00	0,000	0,019
3	12:30	0,000	0,006
4	12:00	0,016	0,006
5	11:30	0,003	0,003
6	11:00	0,002	0,003

Приведенные данные свидетельствуют, например, что для 14-часового рейса вероятность вызова равна 0,014 для В 747 и 0,072 для В 707.

[1] Пример взят из работы: *Gaballa A.* Planning Callout Reserves for Aircraft Delays // Interfaces. Vol. 9. No. 2. Part 2, 1979. P. 78—86.

Типичная пиковая часть расписания дня имеет следующий вид.

Время дня	Самолет	Категория рейса
8:00	707	3
9:00	707	6
	707	2
10:00	707	3
11:00	707	2
	707	4
15:00	747	6
16:00	747	4
19:00	747	1

Существующая политика относительно резервных экипажей состоит в использовании двух экипажей (по семь членов каждый) с 5:00 до 11:00, четырех – с 11:00 до 17:00 и двух – с 17:00 до 23:00.

Оцените эффективность существующей политики относительно резервных экипажей. В частности, является ли число резервных экипажей очень большим, очень малым или таким, как необходимо?

Список рекомендуемой литературы

1. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматлит, 1961.

2. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. М.: Мир, 1972.

3. *Деркач Д. В.* Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ: учеб.-метод. пособие. Армавир, 2010.

4. *Ермольев Ю. М.*, *Ляшко И. И.*, *Михалевич В. С.* и др. Математические методы исследования операций. Киев: Выш. шк., 1979.

5. *Кремер Н. Ш.*, *Путко Б. А.* Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2003.

6. *Крушевский А. В.* Теория игр. Киев: Вища школа, 1977.

7. *Лабскер Л. Г., Ященко Н. А.* Теория игр в экономике (практикум с решениями задач): учеб. пособие. М.: КноРус, 2012.

8. *Лавринов С. М.* Excel: сборник примеров и задач. М.: Финансы и статистика, 2000.

9. *Невежин В. П.*, *Кружилов С. И.* Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование». М.: Городец, 2005.

10. *Невежин В. П.*, *Кружилов С. И.*, *Невежин Ю. В.* Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений: учеб. пособие для вузов / под общ. ред. В. П. Невежина. М.: ФОРУМ, 2012.

11. *Нейман Д.*, *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

12. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.

13. *Серегин Р. А.* Теория игр и динамическое программирование / Методическая разработка. М.: ФА, 1996.

14. *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2007

15. *Эддоус М.*, *Стэнсфилд Р.* Методы принятия решений / пер с англ. под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.

16. Экономико-математическое моделирование: учебник для студентов вузов / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2006.

Ответы на задания

Ответы на задачи раздела 1.2

1.2.1. Функция выигрыша игрока *A* имеет следующий вид:

$$a_{ij} = \begin{cases} c(j - i) & \text{при } i < j; \\ (n - i + 1)/2 & \text{при } i = j; \\ c(n - i + 1) & \text{при } i > j. \end{cases}$$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$2c$	c	$2c$	$3c$
A_2	$3c$	$1{,}5c$	c	$2c$
A_3	$2c$	$2c$	c	c
A_4	c	c	c	$0{,}5c$

Для $c = 6$ платежная матрица будет представлена в следующем виде:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	6	12	18
A_2	18	9	6	12
A_3	12	12	6	6
A_4	11	6	6	3

1.2.2. Функция выигрыша игрока *A* имеет следующий вид:

$$F_A(i, j) = \begin{cases} c_i, & \text{при } i \neq j; \\ -d_i, & \textit{при } i = j, \end{cases}$$

а платежная матрица — матрица игры (матрица выигрышей игрока A) при $n = 3$ выглядит следующим образом:

A_i	B_j		
	B_1	B_2	B_3
A_1	$a_{11} = -d_1$	$a_{12} = c_1$	$a_{13} = c_1$
A_2	$a_{21} = c_2$	$a_{22} = -d_2$	$a_{23} = c_2$
A_3	$a_{31} = c_3$	$a_{32} = c_3$	$a_{33} = -d_3$

1.2.3. Платежная матрица будет иметь вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	T	$T + W$	$T + W$
A_2	T	C	0

1.2.4. Платежная матрица будет иметь вид:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		0 + 3	1 + 2	2 + 1	3 + 0
A_1	0 + 4	4	2	1	0
A_2	1 + 3	1	3	0	–1
A_3	2 + 2	–2	2	2	–2
A_4	3 + 1	–1	0	3	1
A_5	4 + 0	0	1	2	4

1.2.5. Платежная матрица будет иметь вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	270 = 300 – – 300 · 0,1	315 = 300 – 300 × × 0,1 + 300 · 0,15	270 = 300 – 300 · 0,1	315 = 300 – 300 × × 0,1 + 300 · 0,15
A_2	180 = 200 – – 200 · 0,1	150 = 200 – 200 × × 0,1 + 200 · 0,15	150 = 200 – 200 × × 0,1 + 200 · 0,15	150 = 200 – 200 × × 0,1 + 200 · 0,15
A_3	360 = 400 – – 400 · 0,1	– 40 = 0 – 400 · 0,1	300 = 400 – 400 × × 0,1 – 400*0,15	– 100 = 0 – 400 × × 0,1 – 400*0,15

В окончательном виде:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	270	315	270	315
A_2	180	150	150	150
A_3	360	–40	300	–100

1.2.6. Платежная матрица будет иметь вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	0	1	1
A_2	0	2	1	1
A_3	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1

1.2.7. Первоначально прибыль игрока A составляла со всех объектов 10 000 руб. (1000 руб. × 0,1 × 100 шт.). В новых условиях страхования, в зависимости от различных ситуаций, она может составлять следующие значения:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	95 = 100 – 5	90 = 100 – 10	85 = 100 – 15
A_1	10 %	10 000	9500	9000	8500
A_2	11 %	11 000	10 450	9900	9350
A_3	12 %	12 000	11 400	10 800	10 200
A_4	13 %	13 000	12 350	11 700	11 050

Тогда платежная матрица игрока A, состоящая из показателей изменения прибыли страховой компании в новых условиях страхования, будет иметь вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	$a_{11} = 450$	$a_{12} = -100$	$a_{13} = -650$
A_2	$a_{21} = 1400$	$a_{22} = 800$	$a_{23} = 200$
A_3	$a_{31} = 2350$	$a_{32} = 1700$	$a_{33} = 1050$

Элементы матрицы, например a_{22}, рассчитываются так:

$$a_{22} = 1000 \times 0{,}12 \times 90 - 10\ 000 = 10\ 800 - 10\ 000 = 800.$$

Сотрудничество для игрока A с игроком B остается выгодным во всех случаях, кроме ситуаций (A_1, B_2) и (A_1, B_3). Здесь при увеличении ставки на 1 % страховщиком уменьшение количества страхуемых объектов на 10 и 15 штук будет приносить страховой компании прибыль меньше первоначальной суммы в 10 000 руб., на 100 и на 650 руб. соответственно.

1.2.8. Платежная матрица будет иметь вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,17	0,62	0,24
A_2	3	–1,5	–0,8
A_3	0,9	0,5	0,4

Верхняя и нижняя границы равны ($\alpha = \beta = 0{,}4$), и цена данной игры $V = 0{,}4$.

В ситуации равновесия будет реализовано 5000 ед. продукции. У первого предприятия купят 3600 ед. продукции (5000 × 0,72), а у второго — 1400 ед. продукции. В выигрышном положении будет предприятие A.

1.2.9. Матрица выигрышей для игрока A будет представлена в виде:

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	**1,20** = $10 \cdot 0{,}12$	**0,90** = $10 \cdot 0{,}09$
A_2	**0,90** = $6 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}06$	**0,84** = $6 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}1$
A_3	**0,84** = $4 \cdot 0{,}12 + 6 \cdot 0{,}06$	**0,96** = $4 \cdot 0{,}09 + 6 \cdot 0{,}1$
A_4	**0,88** = $4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}08$	**0,71** = $4 \cdot 0{,}09 + 5 \cdot 0{,}07$
A_5	**0,82** = $2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}06 + 5 \cdot 0{,}08$	**0,83** = $2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}07$
A_6	**0,54** = $9 \cdot 0{,}06$	**0,90** = $9 \cdot 0{,}1$
A_7	**0,80** = $10 \cdot 0{,}08$	**0,70** = $10 \cdot 0{,}07$

Ответы на задачи раздела 1.4

1.4.1. α[1] $= 1$; $\beta = 3$. **1.4.2.** $\alpha = 1$; $\beta = 3$. **1.4.3.** $\alpha = 3$; $\beta = 5$.
1.4.4. $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}6$. **1.4.5.** $\alpha = 3$; $\beta = 4$. **1.4.6.** $\alpha = 1$; $\beta = 2$.
1.4.7. $\alpha = \beta = V = 0{,}5$. **1.4.8.** $\alpha = \beta = V = 4$. **1.4.9.** $\alpha = 3$; $\beta = 6$.
1.4.10. $\alpha = 2$; $\beta = 3$. **1.4.11.** $\alpha = -3$; $\beta = 2$. **1.4.12.** $\alpha = 3$; $\beta = 4$.
1.4.13. $\alpha = 3$; $\beta = 7$. **1.4.14.** $\alpha = 5$; $\beta = 7$. **1.4.15.** $\alpha = 3$; $\beta = 5$.
1.4.16. $\alpha = 2$; $\beta = 5$. **1.4.17.** $\alpha = 3$; $\beta = 6$. **1.4.18.** $\alpha = 3$; $\beta = 7$.
1.4.19. $\alpha = 2$; $\beta = 5$. **1.4.20.** $\alpha = 2$; $\beta = 4$. **1.4.21.** $\alpha = 2$; $\beta = 5$.
1.4.22. $\alpha = 4$; $\beta = 7$. **1.4.23.** $\alpha = 5$; $\beta = 7$. **1.4.24.** $\alpha = 5$; $\beta = 8$.
1.4.25. $\alpha = \beta = V = 5$. **1.4.26.** $\alpha = 4$; $\beta = 5$. **1.4.27.** $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}5$.
1.4.28. $\alpha = \beta = V = 6$. **1.4.29.** $\alpha = 25$; $\beta = 40$. **1.4.30.** $\alpha = \beta = V = 6$.

Ответы на задачи раздела 1.5

1.5.1. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}83$; $q_2 = 0{,}17$; $V = 6{,}5$.
1.5.2. $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}6$; $q_1 = 0{,}6$; $q_2 = 0{,}4$; $V = 2{,}8$.
1.5.3. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}17$; $p_2 = 0{,}83$; $q_1 = 0{,}67$; $q_2 = 0{,}33$; $V = 3{,}67$.
1.5.4. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}25$; $q_1 = 0{,}37$; $q_2 = 0{,}63$; $V = 4{,}25$.
1.5.5. $\alpha = 10$; $\beta = 11$; $p_1 = 0{,}92$; $p_2 = 0{,}08$; $q_1 = 0{,}58$; $q_2 = 0{,}42$; $V = 10{,}42$.
1.5.6. $\alpha = 5$; $\beta = 8$; $p_1 = 0{,}67$; $p_2 = 0{,}33$; $q_1 = 0{,}56$; $q_2 = 0{,}44$; $V = 6{,}33$.
1.5.7. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 025$; $q_2 = 0{,}75$; $V = 2{,}5$.
1.5.8. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}5$; $q_2 = 0{,}5$; $V = 1{,}5$.
1.5.9. $\alpha = 9$; $\beta = 13$; $p_1 = 0{,}71$; $p_2 = 0{,}29$; $q_1 = 0{,}64$; $q_2 = 0{,}6$; $V = 10{,}43$.
1.5.10. $\alpha = 5$; $\beta = 8$; $p_1 = 0{,}56$; $p_2 = 0{,}44$; $q_1 = 0{,}67$; $q_2 = 0{,}33$; $V = 6{,}33$.
1.5.11. $\alpha = 4$; $\beta = 8$; $p_1 = 0{,}55$; $p_2 = 0{,}45$; $q_1 = 0{,}36$; $q_2 = 0{,}64$; $V = 5{,}82$.
1.5.12. $\alpha = 2$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}6$; $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}7$; $V = 3{,}8$.
1.5.13. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}6$; $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}8$; $V = 3{,}4$.
1.5.14. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}25$; $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}75$; $V = 4{,}25$.
1.5.15. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}17$; $p_2 = 0{,}83$; $q_1 = 0{,}17$; $q_2 = 0{,}83$; $V = 3{,}83$.
1.5.16. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}25$; $p_2 = 0{,}75$; $q_1 = 0{,}88$; $q_2 = 0{,}12$; $V = 3{,}75$.

[1] где α — верхняя цена игры; β — нижняя цена игры; V — выигрыш.

1.5.17. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}14$; $p_2 = 0{,}86$; $q_1 = 0{,}43$; $q_2 = 0{,}57$; $V = 3{,}57$.

1.5.18. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}75$; $q_2 = 0{,}25$; $V = 2{,}5$.

1.5.19. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}6$; $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}8$; $V = 3{,}6$.

1.5.20. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}4$; $q_1 = 0{,}8$; $q_2 = 0{,}2$; $V = 4{,}4$.

1.5.21. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}25$; $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}75$; $V = 1{,}75$.

1.5.22. $\alpha = -2$; $\beta = -2$; $V = -2{,}0$.

1.5.23. $\alpha = -4$; $\beta = -3$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}75$; $q_2 = 0{,}25$; $V = -3{,}5$.

1.5.24. $\alpha = -4$; $\beta = -3$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}8$; $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}6$; $V = -3{,}6$.

1.5.25. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}43$; $p_2 = 0{,}57$; $q_1 = 0{,}29$; $q_2 = 0{,}71$; $V = 4{,}14$.

1.5.26. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}2$; $q_1 = 0{,}6$; $q_2 = 0{,}4$; $V = 5{,}6$.

1.5.27. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}75$; $V = 4$.

1.5.28. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $p_1 = 0{,}375$; $p_2 = 0{,}625$; $q_1 = 0{,}125$; $q_2 = 0{,}875$; $V = 1{,}38$.

1.5.29. $\alpha = 8$; $\beta = 9$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}75$; $V = 8{,}5$.

1.5.30. $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $p_1 = 0{,}21$; $p_2 = 0{,}72$; $q_1 = 0{,}57$; $q_2 = 0{,}43$; $V = 4{,}29$.

1.5.31. $\alpha = 9$; $\beta = 9$; $V = 9$.

1.5.32. $\alpha = -1$; $\beta = 6$; $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$; $q_1 = 0{,}44$; $q_2 = 0{,}56$; $V = 2{,}5$.

Ответы на задачи раздела 1.6

1.6.1. $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}6$; $P = (0{,}42;\ 0;58)$; $[Q = (0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0{,}5)]$[1]; $V = 0{,}5$.

1.6.2. $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}5$; $P = (0{,}25;\ 0{,}75)$; $[Q = (0;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)]$; $V = 0{,}45$.

1.6.3. $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $P = (0{,}37;\ 0{,}63)$; $[Q = (0,\ 0,\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0)]$; $V = 2{,}8$.

1.6.4. $\alpha = -4$; $\beta = 1$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5;)$; $[Q = (0;\ 0{,}42;\ 0{,}58;\ 0)]$; $V = -1{,}5$.

1.6.5. $\alpha = -4$; $\beta = -2$; $P = (0{,}4;\ 0{,}6)$; $[Q = (0{,}4;\ 0;\ 0;\ 0{,}6;\ 0)]$; $V = -3{,}2$.

1.6.6. $\alpha = -3$; $\beta = 2$; $P = (0{,}43;\ 0{,}57)$; $[Q = (0;\ 0{,}64;\ 0{,}36;\ 0)]$; $V = -0{,}14$.

1.6.7. $\alpha = 4$; $\beta = 7$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0{,}375;\ 0{,}625;\ 0;\ 0)]$; $V = 5{,}5$.

1.6.8. $\alpha = 4$; $\beta = 6$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0{,}25;\ 0;\ 0{,}75;\ 0;\ 0)]$; $V = 5$.

1.6.9. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0{,}87;\ 0{,}13)$; $[Q = (0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)]$; $V = 4{,}5$.

1.6.10. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0{,}83;\ 0{,}17)$; $[Q = (0{,}67;\ 0;\ 0;\ 0{,}33;\ 0)]$; $V = 4{,}67$.

---

[1] В скобках приведены ответы, если при решении использовалась функция *Поиск решения*.

1.6.11. $\alpha = 5$; $\beta = 7$; $P = (0{,}75;\ 0{,}25)$; $[Q = (0{,}625;\ 0;\ 0;\ 0{,}375)]$; $V = 6{,}25$.

1.6.12. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}86;\ 0{,}14)$; $[Q = (0;\ 0{,}71;\ 0{,}29;\ 0)]$; $V = 2{,}71$.

1.6.13. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}89;\ 0{,}11)$; $[Q = (0{,}67;\ 0;\ 0{,}33;\ 0)]$; $V = 2{,}33$.

1.6.14. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $P = (0{,}2;\ 0{,}8)$; $[Q = (0;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0)]$; $V = 3{,}6$.

1.6.15. $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $P = (0{,}6;\ 0{,}4)$; $[Q = (0;\ 0{,}6;\ 0;\ 0;\ 0{,}4)]$; $V = 2{,}2$.

1.6.16. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0{,}86;\ 0{,}14)$; $[Q = (0{,}57;\ 0;\ 0{,}43;\ 0)]$; $V = 4{,}57$.

1.6.17. $\alpha = -3$; $\beta = -2$; $P = (0{,}67;\ 0{,}33)$; $[Q = (0{,}67;\ 0;\ 0;\ 0{,}33)]$; $V = -2{,}67$.

1.6.18. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0{,}57;\ 0{,}43)$; $[Q = (0;\ 0{,}67;\ 0{,}33;\ 0)]$; $V = 4{,}14$.

1.6.19. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0{,}67;\ 0{,}33)$; $[Q = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)]$; $V = 4$.

1.6.20. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $P = (0{,}14;\ 0{,}86)$; $[Q = (0{,}33;\ 0{,}67;\ 0;\ 0)]$; $V = 6{,}33$.

1.6.21. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0{,}25;\ 0;\ 0{,}75;\ 0)]$; $V = 3{,}5$.

1.6.22. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}25;\ 0{,}75)$; $[Q = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0)]$; $V = 2{,}5$.

1.6.23. $\alpha = 4$; $\beta = 4$; $V = 4$.

1.6.24. $\alpha = 2$; $\beta = 5$; $P = (0{,}67;\ 0{,}33)$; $[Q = (0;\ 0{,}56;\ 0{,}44;\ 0)]$; $V = 3{,}67$.

1.6.25. $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0;\ 0{,}33;\ 0{,}67;\ 0;\ 0)]$; $V = 5$.

1.6.26. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $P = (0{,}2;\ 0{,}8)$; $[Q = (0{,}4;\ 0;\ 0;\ 0{,}6;\ 0)]$; $V = 3{,}4$.

1.6.27. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}8;\ 0{,}2)$; $[Q = (0;\ 0{,}8;\ 0{,}2;\ 0)]$; $V = 2{,}8$.

1.6.28. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0{,}67;\ 0{,}33;\ 0;\ 0)]$; $V = 4$.

1.6.29. $\alpha = 2$; $\beta = 6$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $[Q = (0;\ 0{,}57;\ 0{,}43;\ 0)]$; $V = 5$.

1.6.30. $\alpha = 5$; $\beta = 5$; $V = 5$.

Ответы на задачи раздела 1.7

1.7.1. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $[P = (0;\ 0;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 0)]$[1]; $Q = (0{,}4;\ 0{,}6)$; $V = 6{,}4$.

1.7.2. $\alpha = 6$; $\beta = 8$; $[P = (0{,}17;\ 0{,}83;\ 0;\ 0;\ 0\ )]$; $Q = (0{,}33;\ 0{,}67)$; $V = 6{,}33$.

1.7.3. $\alpha = 5$; $\beta = 7$; $[P = (0{,}2;\ 0;\ 0{,}8;\ 0;\ 0)]$; $Q = (0{,}6;\ 0{,}4)$; $V = 5{,}6$.

1.7.4. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $[P = (0;\ 0{,}6;\ 0;\ 0;\ 0{,}4)]$; $Q = (0{,}8;\ 0{,}2)$; $V = 5{,}4$.

1.7.5. $\alpha = 7$; $\beta = 8$; $[P = (0;\ 0;\ 0{,}71;\ 0;\ 0{,}29)]$; $Q = (0{,}86,\ 0{,}14)$; $V = 7{,}29$.

1.7.6. $\alpha = 5$; $\beta = 7$; $[P = (0{,}43;\ 0;\ 0{,}57;\ 0;\ 0)]$; $Q = (0{,}71;\ 0{,}29)$; $V = 5{,}86$.

[1] В скобках приведены ответы, если при решении использовалась функция *Поиск решения*.

1.7.7. $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $[P = (0; 0; 0; 0{,}57; 0{,}43)]$; $Q = (0{,}43; 0{,}57)$; $V = 4{,}71$.

1.7.8. $\alpha = 5$; $\beta = 7$; $[P = (0; 0{,}2; 0; 0{,}8; 0)]$; $Q = (0{,}4; 0{,}6)$; $V = 5{,}4$.

1.7.9. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $[P = (0; 0{,}17; 0; 0{,}83; 0)]$; $Q = (0{,}5; 0{,}5)$; $V = 5{,}5$.

1.7.10. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $[P = (0; 0{,}82; 0; 0; 0{,}18)]$; $Q = (0{,}91; 0{,}09)$; $V = 5{,}18$.

1.7.11. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $[P = (0{,}8; 0; 0{,}2; 0)]$; $Q = (0{,}4; 0{,}6)$; $V = 6{,}4$.

1.7.12. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $[P = (0{,}67; 0; 0; 0{,}33)]$; $Q = (0{,}67; 0{,}33)$; $V = 3{,}67$.

1.7.13. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}25; 0; 0{,}75)]$; $Q = (0{,}75; 0{,}25)$; $V = 4{,}25$.

1.7.14. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}75; 0{,}25; 0)]$; $Q = (0{,}625; 0{,}375)$; $V = 4{,}25$.

1.7.15. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}5; 0{,}5; 0)]$; $Q = (0{,}83; 0{,}17)$; $V = 4{,}5$.

1.7.16. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}67; 0{,}3; 0)]$; $Q = (0{,}83; 0{,}17)$; $V = 4{,}67$.

1.7.17. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0{,}4; 0; 0; 0{,}6)]$; $Q = (0{,}8; 0{,}2)$; $V = 4{,}4$.

1.7.18. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $[P = (0; 0{,}625; 0{,}325; 0)]$; $Q = (0{,}875;0{,}125)$; $V = 1{,}375$.

1.7.19. $\alpha = 2$; $\beta = 8$; $[P = (0{,}35; 0; 0; 0{,}65)]$; $Q = (0{,}41; 0{,}59)$; $V = 4{,}47$.

1.7.20. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $[P = (0{,}42; 0; 0; 0{,}58)]$; $Q = (0{,}17, 0{,}83)$; $V = 3{,}83$.

1.7.21. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $[P = (0{,}25; 0; 0{,}75; 0)]$; $Q = (0{,}25; 0{,}75)$; $V = 5{,}25$.

1.7.22. $\alpha = 2$; $\beta = 2$; $V = 2$.

1.7.23. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}83; 0{,}17; 0)]$; $Q = (0{,}83; 0{,}17)$; $V = 4{,}83$.

1.7.24. $\alpha = 5$; $\beta = 8$; $[P = (0{,}3; 0; 0{,}7; 0)]$; $Q = (0{,}6; 0{,}4)$; $V = 6{,}2$.

1.7.25. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $[P = (0; 0{,}43; 0; 0{,}57)]$; $Q = (0{,}29; 0{,}71;)$; $V = 4{,}14$.

1.7.26. $\alpha = 7$; $\beta = 7$; $V = 7$.

1.7.27. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $[P = (0{,}08; 0; 0; 0{,}92; 0)]$; $Q = (0{,}25; 0{,}75)$; $V = 6{,}25$.

1.7.28. $\alpha = 6$; $\beta = 7$; $[P = (0; 0; 0; 0{,}8; 0{,}2)]$; $Q = (0{,}2; 0{,}8)$; $V = 6{,}2$.

1.7.29. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $[P = (0; 0; 0{,}5; 0{,}5; 0)]$; $Q = (0{,}83; 0{,}17)$; $V = 5{,}5$.

1.7.30. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $[P = (0{,}17; 0{,}83; 0; 0; 0)]$; $Q = (0{,}83; 0{,}17)$; $V = 4{,}83$.

Ответы на задачи раздела 1.8

1.8.1. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $P = (0{,}83; 0{,}17; 0)$; $Q = (0{,}5; 0{,}5; 0)$; $V = 1{,}5$.

1.8.2. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0{,}8; 0{,}2; 0)$; $Q = (0{,}4; 0{,}6; 0)$; $V = 4{,}6$.

1.8.3. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0; 0{,}57; 0{,}43)$; $Q = (0{,}71; 0{,}29; 0)$; $V = 4{,}14$.

1.8.4. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $P = (0{,}29; 0; 0{,}71)$; $Q = (0; 0{,}14; 0{,}86)$; $V = 5{,}29$.

1.8.5. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}6;\ 0;\ 0{,}4)$; $Q = (0{,}2;\ 0{,}8;\ 0)$; $V = 2{,}4$.

1.8.6. $\alpha = -1$; $\beta = 2$; $P = (0{,}55;\ 0{,}27;\ 0{,}18)$; $Q = (0{,}23;\ 0{,}36;\ 0{,}41)$; $V = 0{,}55$.

1.8.7. $\alpha = -1$; $\beta = 4$; $P = (0{,}33;\ 0{,}33;\ 0{,}34)$; $Q = (0{,}42;\ 0{,}56;\ 0{,}02{,}0)$; $V = 2$.

1.8.8. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $P = (0{,}8;\ 0{,}2;\ 0)$; $Q = (0;\ 0;\ 0{,}4;\ 0{,}6)$; $V = 1{,}4$.

1.8.9. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0{,}33;\ 0;\ 0{,}67)$; $Q = (0{,}42;\ 0{,}5;\ 0;\ 0{,}08)$; $V = 4$.

1.8.10. $\alpha = 2$; $\beta = 5$; $P = (0{,}67;\ 0{,}33;0)$; $Q = (0{,}44;\ 0;\ 0;\ 0{,}56)$; $V = 3{,}67$.

1.8.11. $\alpha = -1$; $\beta = 7$; $P = (0;\ 0{,}43;\ 0{,}57)$; $Q = (0{,}48;\ 0{,}52;\ 0;\ 0)$; $V = 3{,}29$.

1.8.12. $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $P = (0;\ 0{,}71;\ 0{,}29)$; $Q = (0;\ 0{,}57;\ 0{,}43;\ 0)$; $V = 1{,}86$.

1.8.13. $\alpha = 6$; $\beta = 8$; $P = (0;\ 0{,}67;\ 0{,}33)$; $Q = (0{,}5;\ 0;\ 0{,}5)$; $V = 7$.

1.8.14. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $P = (0;\ 0{,}83;\ 0{,}17)$; $Q = (0{,}83;\ 0;\ 0{,}17)$; $V = 3{,}83$.

1.8.15. $\alpha = 3$; $\beta = 4$; $P = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2)$; $Q = (0{,}4;\ 0;\ 0{,}6)$; $V = 3{,}6$.

1.8.16. $\alpha = 13$; $\beta = 14$; $P = (0;\ 0{,}67;\ 0{,}33)$; $Q = (0;\ 0{,}89;\ 0{,}11)$; $V = 13{,}7$.

1.8.17. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}6;\ 0{,}2;\ 0.2)$; $Q = (0{,}1;\ 0{,}6;\ 0{,}3)$; $V = 2{,}6$.

1.8.18. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$; $Q = (0{,}125;\ 0{,}875;\ 0)$; $V = 5{,}5$.

1.8.19. $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $P = (0{,}625;\ 0;\ 0{,}375)$; $Q = (0{,}625;\ 0;\ 0;\ 0{,}375)$; $V = 3{,}13$.

1.8.20. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0;\ 0{,}75;\ 0{,}25)$; $Q = (0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0)$; $V = 2{,}5$.

1.8.21. $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $P = (0{,}15;\ 0{,}85;\ 0)$; $Q = (0;\ 0{,}54;\ 0{,}46;\ 0)$; $V = 1{,}92$.

1.8.22. $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $P = (0{,}38;\ 0{,}15;\ 0{,}47\ )$; $Q = (0{,}08;\ 0{,}38;\ 0;\ 0{,}54)$; $V = 2{,}69$.

1.8.23. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0;\ 0{,}86;\ 0{,}14)$; $Q = (0;\ 0{,}71;\ 0{,}29)$; $V = 4{,}71$.

1.8.24. $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $P = (0;\ 0{,}71;\ 0{,}29)$; $Q = (0;\ 0{,}57;\ 0{,}43;\ 0)$; $V = 1{,}86$.

1.8.25. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0;\ 0{,}14;\ 0{,}86)$; $Q = (0{,}57;\ 0{,}43;\ 0)$; $V = 4{,}57$.

1.8.26. $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $P = (0{,}06;\ 0{,}69;\ 0{,}25;\ 0)$; $Q = (0{,}75;0{,}125;0{,}125)$; $V = 2{,}38$.

1.8.27. $\alpha = 4$; $\beta = 5$; $P = (0;\ 0{,}71;\ 0{,}29)$; $Q = (0{,}86;\ 0;\ 0{,}14)$; $V = 4{,}71$.

1.8.28. $\alpha = 5$; $\beta = 6$; $P = (0;\ 0;\ 0;\ 0{,}83;\ 0{,}17;\ 0)$; $Q = (0;\ 0{,}83;\ 0{,}17;\ 0;\ 0)$; $V = 5{,}83$.

1.8.29. $\alpha = 5$; $\beta = 8$; $P = (0;\ 0;\ 0;\ 0{,}62;\ 0{,}38;\ 0)$; $Q = (0;\ 0{,}62;\ 0{,}38;\ 0;\ 0)$; $V = 6{,}88$.

1.8.30. $\alpha = 4$; $\beta = 9$; $P = (0;\ 0;\ 0{,}62;\ 0;\ 0{,}38)$; $Q = (0{,}38;\ 0{,}62;\ 0)$; $V = 7{,}08$.

1.8.31. $\alpha = 3$; $\beta = 7$; $P = (0;\ 0{,}75;\ 0;\ 0{,}25)$; $Q = (0{,}69;\ 0;\ 0;\ 0{,}31)$; $V = 4{,}25$.

1.8.32. $\alpha = 5$; $\beta = 7$; $P = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)$; $Q = (0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0{,}5)$; $V = 6$.

1.8.33. $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $P = (0{,}05;\ 0{,}7;\ 0;\ 0{,}25)$; $Q = (0{,}25;\ 0{,}35;\ 0{,}4;\ 0)$; $V = 4{,}15$.

1.8.34. $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $P = (0,38; 0,27; 0,35)$; $Q = (0,04; 0,42; 0,54; 0)$; $V = 3,19$.

1.8.35. $\alpha = 2$; $\beta = 5$; $P = (0,4; 0,4; 0,2)$; $Q = (0,36, 0; 0,08; 0,56)$; $V = 3,4$.

1.8.36. $\alpha = 3$; $\beta = 6$; $P = (0,29; 0,4; 0,31)$; $Q = (0,14; 0,4; 0,46; 0)$; $V = 4,49$.

Ответы на задачи раздела 3.4

3.4.1. Безопасный вид транспорта по Лапласу — железнодорожный ($F = 5,3$), по Вальду — железнодорожный ($F = 7$), по Сэвиджу — железнодорожный ($F = 2$) и по Гурвицу — железнодорожный ($F = 5,8$).

3.4.2. Наиболее удачная модель по критерию Лапласа модель Danlop SP ($F = 7,1$), по критерию Вальда — Danlop SP ($F = 9$) и Barum Bravuris ($F = 9$), по Сэвиджу — Danlop SP ($F = 2$), по Гурвицу — Danlop SP ($F = 6,6$).

3.4.3. По критериям Лапласа, Вальда и Гурвица выбирается Фабрика 4, а по критерию Сэвиджа — Фабрика 3.

3.4.4. По критериям Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица выбирается оценка прогноза с номером 40.

3.4.5. По критерию Лапласа выбирается тип самолета R_3 ($F = 52$), по Вальду — тип самолета R_2 ($F = 40$), по Сэвиджу — тип самолета R_4 ($F = 20$) и по Гурвицу — тип самолета R_3 ($F = 45$).

3.4.6. По критерию Лапласа и Вальда — лучший вариант оснащения R_2, по критерию Гурвица — вариант оснащения R_2, по критерию Сэвиджа — вариант оснащения R_2.

3.4.7. По критерию Лапласа — лучший вариант проекта R_4 ($F = 25,5$). По критерию Вальда — проект R_2 и R_4 ($F = 22$), по критерию Сэвиджа — проект R_4 ($F = 5$), а по критерию Гурвица — R_2 и R_4 ($F = 26$).

3.4.18. Результаты расчетов будем заносить в таблицу:

	S_1	S_2	S_3	S_4	Бс	НО	ММ	П-О	Х-Л
A_1	2	3	6	5	3,9	4,0	2	4,8	3,14
A_2	3	5	4	2	4,0	3,5	2	4,1	3,2
A_3	4	–3	2	3	0,5	1,5	–3	1,9	–0,9
A_4	1	–4	3	4	0,1	1,0	–4	1,6	–1,66
$\boldsymbol{p_j}$	0,2	0,4	0,3	0,1	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$

А. Критерий Байеса (максимального математического ожидания)

Расчет осуществляется по формуле

$$W_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + a_{i3} p_3 + a_{i4} p_4 .$$

$$W_1 = 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}4 + 1{,}2 + 1{,}8 + 0{,}5 = 3{,}9;$$

$$W_2 = 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}6 + 2{,}0 + 1{,}2 + 0{,}2 = 4{,}0;$$

$$W_3 = 4 \cdot 0{,}2 + (-3) \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 - 1{,}2 + 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

$$W_4 = 1 \cdot 0{,}2 + (-4) \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 - 1{,}6 + 0{,}9 + 0{,}4 = -0{,}1;$$

Найденные значения заносим в первый столбец (Бс) и выбираем максимальное

$$W = \max\{2{,}9;\ 4{,}4;\ 0{,}5;\ -0{,}1\} = 4{,}4.$$

Оптимальной по данному критерию является стратегия:

A_2 — продавать в осенние месяцы.

Б. Критерий недостаточного основания Лапласа (НО)

Находим среднее значение элементов каждой строки:

$$W_i = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = \frac{1}{4}(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4}).$$

$$W_1 = \frac{1}{4}(2 + 3 + 6 + 5) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4{,}0;$$

$$W_2 = \frac{1}{4}(3 + 5 + 4 + 2) = \frac{1}{4} \cdot 14 = 3{,}5;$$

$$W_3 = \frac{1}{4}(4 - 3 + 2 + 3) = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1{,}5;$$

$$W_4 = \frac{1}{4}(1 - 4 + 3 + 4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1{,}0.$$

Найденные значения заносим во второй столбец (НО) и выбираем максимальное

$$W = \max\{4{,}0;\ 3{,}5;\ 1{,}5;\ 1{,}0\} = 4{,}0.$$

Оптимальной по данному критерию является стратегия:
A_1 — продавать сразу после уборки.

В. Максиминный критерий Вальда (ММ)
В каждой строке находим минимальный элемент:

$$W_i = \min_{1 \le j \le 4} a_{ij}.$$

$$W_1 = \min\{2;\ 3;\ 6;\ 5\} = 2;$$

$$W_2 = \min\{3;\ 5;\ 4;\ 2\} = 2;$$

$$W_3 = \min\{4;\ -3;\ 2;\ 3\} = -3;$$

$$W_4 = \min\{1;\ -4;\ 3;\ 4\} = -4.$$

Найденные значения заносим в третий столбец (ММ) и выбираем максимальное

$$W = \max\{2;\ 2;\ -3;\ -4\} = 2.$$

Оптимальными по данному критерию являются стратегии:
A_1 — продавать сразу после уборки;
A_2 — продавать в осенние месяцы.

Г. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица (П-О)
Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле

$$W_i = C \cdot \min_{1 \le j \le 4} a_{ij} + (1 - C) \cdot \max_{1 \le j \le 4} a_{ij}.$$

По условию С = 0,3, значит:

$$W_1 = 0{,}3 \cdot \min\{2;\ 3;\ 6;\ 5\} + (1 - 0{,}3) \cdot \max\{2;\ 3;\ 6;\ 5\} =$$

$$= 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 6 = 0{,}6 + 4{,}2 = 4{,}8;$$

$$W_2 = 0{,}3 \cdot \min\{3;\ 5;\ 4;\ 2\} + (1 - 0{,}3) \cdot \max\{3;\ 5;\ 4;\ 2\} =$$

$$= 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 5 = 0{,}6 + 3{,}5 = 4{,}1;$$

$$W_3 = 0{,}3 \cdot \min\{4; -3;\ 2;\ 3\} + (1 - 0{,}3) \cdot \max\{4; -3;\ 2;\ 3\} =$$

$$= 0{,}3 \cdot (-3) + 0{,}7 \cdot 4 = -0{,}9 + 2{,}8 = 1{,}9;$$

$$W_4 = 0{,}3 \cdot \min\{1; -4;\ 3;\ 4\} + (1 - 0{,}3) \cdot \max\{1; -4;\ 3;\ 4\} =$$

$$= 0{,}3 \cdot (-4) + 0{,}7 \cdot 4 = -1{,}2 + 2{,}8 = 1{,}6.$$

Найденные значения заносим в четвертый столбец (П-О) и выбираем максимальное значение

$$W = \max\{48;\ 4{,}1;\ 1{,}9;\ 1{,}6\} = 4{,}8.$$

Оптимальной по данному критерию является стратегия:
A_1 — продавать сразу после уборки.

Д. Критерий Ходжа—Лемана (Х-Л)

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле

$$W_i = u \cdot \sum_{j=1}^{4} a_{ij} p_j + (1-u) \cdot \min_{1 \le j \le 4} a_{ij}.$$

По условию $u = 0{,}6$ и множители в каждом слагаемом уже рассчитаны, их можно взять из первого столбика (Б) и из третьего столбика (ММ), значит:

$$W_1 = 0{,}6 \cdot 3{,}9 + (1-0{,}6) \cdot 2 = 2{,}34 + 0{,}8 = 3{,}14;$$

$$W_2 = 0{,}6 \cdot 4{,}0 + 0{,}4 \cdot 2 = 2{,}4 + 0{,}8 = 3{,}2;$$

$$W_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot (-3) = 0{,}3 - 1{,}2 = -0{,}9.$$

$$W_1 = 0{,}6 \cdot (-0{,}1) + 0{,}4 \cdot (-4) = -0{,}06 - 1{,}6 = -1{,}66.$$

Найденные значения заносим в пятый столбец (Х-Л) и выбираем максимальное

$$W = \max\{3{,}14;\ 3{,}2;\ -0{,}9;\ -1{,}66\} = 3{,}2.$$

Оптимальной по данному критерию является стратегия:
A_2 — продавать в осенние месяцы.

Е. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Рассчитаем матрицу рисков. Заполнять ее лучше по столбцам. В каждом столбце находим максимальный элемент и вычитаем из него все остальные элементы столбца. Результаты записываем на соответствующих местах.

Вот как рассчитывается первый столбец. Максимальный элемент в первом столбце: $a_{31} = 4$, значит, по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}:$$

$$r_{11} = 4 - a_{11} = 4 - 2 = 2;$$

$$r_{21} = 4 - a_{21} = 4 - 3 = 1;$$

$$r_{31} = 4 - a_{31} = 4 - 4 = 0;$$

$$r_{41} = 4 - a_{41} = 4 - 1 = 3.$$

Рассчитаем второй столбец матрицы рисков. Максимальный элемент во втором столбце: $a_{22} = 5$, значит:

$$r_{12} = 5 - a_{12} = 5 - 3 = 2;$$

$$r_{22} = 5 - a_{22} = 5 - 5 = 0;$$

$$r_{32} = 5 - a_{32} = 5 - (-3) = 8;$$

$$r_{42} = 5 - a_{42} = 5 - (-4) = 9.$$

Рассчитаем третий столбец матрицы рисков. Максимальный элемент в третьем столбце: $a_{13} = 6$, значит:

$$r_{13} = 6 - a_{13} = 6 - 6 = 0;$$

$$r_{23} = 6 - a_{23} = 6 - 4 = 2;$$

$$r_{33} = 6 - a_{33} = 6 - 2 = 4;$$

$$r_{43} = 6 - a_{43} = 6 - 3 = 3.$$

Рассчитаем четвертый столбец матрицы рисков. Максимальный элемент в четвертом столбце: $a_{14} = 5$, значит:

$$r_{14} = 5 - a_{14} = 5 - 5 = 0;$$

$$r_{24} = 5 - a_{24} = 5 - 2 = 3;$$

$$r_{34} = 5 - a_{34} = 5 - 3 = 2;$$

$$r_{44} = 5 - a_{44} = 5 - 4 = 1.$$

Таким образом, матрица рисков имеет вид (в каждом столбце на месте максимального элемента платежной матрицы должен стоять ноль):

				W_i
2	2	0	0	2
1	0	2	3	3
0	8	4	2	8
3	9	3	1	9

Дополним матрицу рисков рассчитанными значениями критерия W_i — в каждой строке выбираем максимальный элемент ($W_i = \max\limits_j r_{ij}$):

$$W_1 = \max\{2;\ 2;\ 0;\ 0\} = 2;$$

$$W_2 = \max\{1;\ 0;\ 2;\ 3\} = 3;$$

$$W_3 = \max\{0;\ 8;\ 4;\ 2\} = 8;$$

$$W_4 = \max\{3;\ 9;\ 3;\ 1\} = 9.$$

Найденные значения заносим в столбец (W_i) и выбираем минимальное $W = \min\{2;\ 3;\ 8;\ 9\} = 2$, значит, оптимальной по данному критерию является стратегия A_1 — продавать сразу после уборки.

Вывод:

1) стратегия A_1 (продавать сразу после уборки) является оптимальной согласно критериям недостаточного основания Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа;

2) стратегия A_2 (продавать в осенние месяцы) является оптимальной согласно критериям Байеса и Ходжа—Лемана;

3) стратегия A_3 (продавать в зимние месяцы) не выбирается ни по одному из критериев;

4) стратегия A_4 (продавать в весенние месяцы) не выбирается ни по одному из критериев.

Оглавление

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр.1
Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)
E-mail: bookware@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Учебное издание

Невежин Виктор Павлович

ТЕОРИЯ ИГР. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ООО «Издательство ФОРУМ»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
E-mail: forum-book@yandex.ru
Тел.: (495) 280-15-96

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Подписано в печать 11.08.2022.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,0.
ППТ20. Заказ № 00000

ТК 182950-1900974-140813

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29

В.П. НЕВЕЖИН

ТЕОРИЯ ИГР

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ