А.В.Захаров

ТЕОРИЯ ИГР В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

УЧЕБНИКИ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

А.В.Захаров

ТЕОРИЯ ИГР В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

*Рекомендовано
Финансовым университетом
при Правительстве Российской Федерации
к использованию в качестве учебника
в образовательных учреждениях,
реализующих образовательные программы ВПО
по дисциплине «Дополнительные главы теории игр»
по направлениям подготовки 080000
«Экономика и управление»*

Издательский дом
Высшей школы экономики

Москва, 2015

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7
З-38

Рецензент — проректор по магистратуре и аспирантуре Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, доктор экономических наук, профессор
Л.И. Гончаренко

Научный редактор — доктор физико-математических наук
А.В. Савватеев

З-38 **Захаров, А. В**. Теория игр в общественных науках [Текст] : учебник для вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — (Учебники Высшей школы экономики). — 304 с. — 1500 экз. — ISBN 978-5-7598-1180-0 (в пер.).

В учебнике излагаются основы некооперативной теории игр и разбираются примеры из различных областей экономики и политической науки. Для понимания материала необходимо знание математического анализа и теории вероятностей на уровне первого курса.

Книга может быть использована как основной учебник по семестровому курсу теории игр для студентов бакалавриата или магистратуры, не изучавших предмет ранее, или для более короткого повторного курса.

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7

Учебное издание
Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Алексей Владимирович Захаров

Теория игр в общественных науках

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *И.Л. Легостаева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*
Корректор *И.Л. Легостаева*

Подписано в печать 28.11.2014. Формат 70×100/16. Печать офсетная
Усл.-печ. л. 24,7. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 1500 экз. Изд. № 1771

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20. Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (495) 988-63-76, тел./факс: 8 (496) 726-54-10

ISBN 978-5-7598-1180-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время имеется множество книг по теории игр на русском языке, однако необходимость в написании, как минимум, еще одной такой книги у меня не вызывает сомнений.

Причина здесь кроется в том факте, что термин «теория игр» существенным образом многозначный. Во-первых, существует теория игр в рамках общей теории исследования операций (игры с нулевой суммой, потенциальные игры и методы численного решения). Во-вторых, есть теория игр с точки зрения чистой математики (теоремы о неподвижных точках, параметрические задачи на максимум, поведение многозначных отображений, многоцелевое динамическое программирование). В-третьих, можно говорить о теории игр с точки зрения математической логики («детские» игры с последовательными ходами, в которых нужно отыскать оптимальную стратегию одного из двух игроков, теорема Цермело и метод обратной индукции, алгоритмическая сложность поиска равновесий Нэша). В-четвертых, можно говорить о теории игр с точки зрения экономики и политической науки (гербарий сюжетов, так или иначе концентрирующийся вокруг трагедии общин и иных примеров неэффективности равновесий по Нэшу). Все перечисленные «теории игр» — это совершенно разные науки! И по методам, и по характеру формулируемых задач, и по тому математическому аппарату, который является в каждой из них центральным.

Предлагаемая читателю «Теория игр в общественных науках» посвящена решению не очень простой задачи. А именно, разъяснить не-математикам основы теории игр *на строго научном языке*. Такая попытка является достаточно рискованной. В то же время, учитывая то, что данная книга —

(А) *почти единственный* текст на русском языке, где подробно обсуждаются аукционы, задача дизайна механизмов, а также сигнальные игры и равновесия в них, в рамках общей теории динамических игр с неполной информацией [1];

(Б) возможно, не единственная, но исключительно удачная попытка разъяснить базовые для современного экономиста вещи на строгом уровне (равновесия в играх голосования и политические равновесия, решение по доминированию в модели олигополии Курно, а также целый ряд других классических сюжетов, входящих в необходимый минимум любого работающего экономиста);

[1] Часть этого материала разбирается в книгах Печерского и Беляевой [2001], Писарука [2013], Васина и Морозовой [2003], Данилова [2002] и в некоторых других книгах.

(В) в числе прочего, «малая энциклопедия», или «джентльменский набор» сюжетов, которыми оперирует любой грамотный экономист-теоретик, я полагаю, что риск, предпринятый автором, оправдан.

Научное редактирование не коснулось части разобранных в книге примеров, однако все они в свое время были проработаны во время семинарских и лекционных занятий в Высшей школе экономики. И автор, и научный редактор с благодарностью учтут все присланные замечанные вами опечатки и неточности при последующем переиздании книги после первой «пробы читателем».

Алексей Савватеев,
доктор физико-математических наук

Васин А.А., *Морозов В.В.* Введение в теорию игр с приложениями в экономике. Учеб. пособ. М.: 2003.

Данилов В. Лекции по теории игр. М.: New Economic School, 2002.

Печерский Л., *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. 2013. <http://pisaruk.narod.ru/books/games.pdf>.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Люди, организации и государства все время взаимодействуют друг с другом. Как поступит каждый, когда его выигрыш зависит не только от его собственного выбора, но и от чьего-то другого? Теория игр — это раздел прикладной математики, позволяющий осмыслить принимаемые в подобных ситуациях решения. Теория игр широко используется в экономике, а также в политологии, социологии и науке об управлении.

Эта книга написана на основе курсов, читаемых автором на факультетах экономики и прикладной математики Высшей школы экономики в Москве на протяжении последних четырех лет. Книга адресована студентам бакалавриатов и магистратур высших учебных заведений, изучающих экономику, политологию, менеджмент, прикладную математику. Предполагается, что читатель владеет основами математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), а также основами теории вероятностей. Книга также может представлять интерес для студентов магистратуры (особенно, не изучавших предмет ранее) и любого читателя, желающего подготовить себя к чтению международной академической литературы в области экономики или политологии.

При составлении книги автор преследовал три непростые и отчасти противоречивые задачи.

Во-первых, книга должна содержать достаточно большой, но не чрезмерный, объем формальных математических определений, теорем и доказательств, составляющих костяк теории. С одной стороны, книга задумывалась как учебник, предназначенный для студентов бакалавриатов экономических вузов, что предполагало наличие у читателя знания математического анализа, по крайней мере, на начальном уровне. С другой стороны, целью книги не являлся обзор (пусть даже поверхностный) всего инструментария, разработанного по сей день, или формулирование утверждений как можно в более общей форме. Таким образом, необходимо было достичь компромисс между доступностью и общностью (и в значительно меньшей мере — между доступностью и точностью) формулировок и объемом.

Во-вторых, книга должна быть «живой», т.е. содержать большое число примеров применения теории в таких общественных науках, как экономика или политология, чтобы поддерживать интерес читателя и не допускать ощущения, что теория оторвана от реальности и от предметной области читателя. Книга должна быть способна заинтересовать незнакомого с предметом читателя.

В-третьих, как подбор математических утверждений, так и подбор примеров и задач должны быть современными и актуальными. Наука быстро меняется. Те ветви теории, которые казались перспективными (и даже необходимыми) двадцать–тридцать лет назад, сегодня представляют лишь исторический интерес — т.е. не используются в экономической, политологической или иной науке. В то же время появились новые направления. Поэтому одним из критериев отбора задач для книги являлся индекс цитирования работ, откуда они были взяты.

Структура книги следует более-менее установившемуся стандарту для учебников среднего и продвинутого уровней по данному предмету. Учебник разделен на четыре главы.

Первая глава посвящена статическим играм с полной информацией. Приводится определение игры в нормальной форме, определения доминирования, смешанных стратегий и равновесия Нэша. В качестве приложения приводится доказательство теоремы Нэша о существовании равновесия.

Во второй главе рассматриваются динамические игры с полной информацией. Помимо совершенства по подыграм для конечных игр, в главе говорится о конечно и бесконечно повторяющихся играх. Также дается определение совершенного марковского равновесия в повторяющихся играх (это — очень востребованная в наше время аналитическая концепция) и разбираются несколько задач, использующих такую игровую постановку.

Третья глава имеет два раздела. Во-первых, это байесовы игры, или статические игры с неполной информацией. Во-вторых, в главе излагаются основы теории дизайна механизмов и теории аукционов. В частности, формулируется и доказывается теорема об эквивалентности доходов в аукционах, даются определения и условия Нэш-реализуемости и реализуемости в доминирующих стратегиях.

Наконец, четвертая глава посвящена динамическим играм с неполной информацией. Большое внимание уделяется изложению различных концепций решения для таких игр (секвенциального равновесия, совершенного равновесия) и их взаимосвязи, сигнальным играм, играм с сообщениями.

В книге разбираются или предлагаются для самостоятельного решения около 200 примеров и задач, в том числе и стандартные примеры из области экономики — производство общественных благ, объемная и ценовая конкуренция, аукционы, некоторые макроэкономические модели. Значительная часть примеров приходится и на политологические темы, такие как поведение политиков и избирателей на выборах, лоббирование, моделирование решений в авторитарных политических системах, возникновение массовых протестов.

Для вводного курса в теорию игр объемом в один семестр в качестве основного текста можно использовать первые две главы данной книги, а также (в зависимости от скорости освоения материала) начало третьей главы. Вся книга может быть использована в качестве учебника в рамках двухсеместровых курсов, рассчитанных на студентов 3–4 года обучения. Книга также может быть использована в качестве вспомогательного материала для продвинутого курса по политологии или политической экономике.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность К.С. Сорокину, помогавшему мне вести курсы в Высшей школе экономики (ему же принадлежит доказательство теоремы 4.1); А.В. Савватееву, проведшему большую работу по научному редактированию текста; Д.С. Карабекяну, редактировавшему тексты задач; Ф.Т. Алескерову, С.Б. Измалкову, а также всем студентам, с которыми я работал и которые помогали мне находить ошибки в этом тексте.

1

ГЛАВА

СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ранним утром 14 октября 1066 г. войска короля Гарольда, правителя Англосаксонского королевства, стояли на высоком холме рядом с местечком под названием Гастингс и готовились к бою. Двумя неделями ранее Вильгельм, герцог Нормандский, вторгся на земли Гарольда, желая присвоить их себе и щедро наградить ими своих подданных. И вот настал день большого сражения.

Войско нормандцев, в основном состоявшее из тяжело вооруженных всадников, обрушилось на пеших англосаксов, стоявших щитом к щиту на вершине холма. Первая атака была отбита: потеряв много убитых и раненых, нормандцы отступили, чтобы напасть снова.

Раз за разом они атаковали. Наконец, когда уже почти стемнело, всадникам все-таки удалось пробить брешь в обороне англичан. Войско Гарольда вдруг дрогнуло и побежало. Король был убит; немногим удалось спастись. Англия была завоевана — в последний раз в своей долгой истории.

Почему исход сражения решился так быстро? Каждый воин, стоя в строю, преследовал две (иногда противоположные) цели: выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока его товарищи держали строй, воин должен был сражаться: конечно же, он мог быть убит при следующей атаке, но если бы он покинул поле боя, то его ждал бы позор и, возможно, наказание или даже смерть за трусость. Но вот последовала особо суровая атака. Видя, как кругом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнуло и побежало. Несколько стоящих рядом последовало их примеру.

Как только некоторое критическое число солдат покинуло поле боя, держать оборону перестало быть выгодным: риск быть убитым начал перевешивать возможное наказание за бегство. Тем более, что чем больше солдат покидало поле боя, тем меньше становилась вероятность того, что каждый отдельно взятый беглец будет наказан. Не прошло и нескольких минут, как все войско обратилось в бегство и погибло: пеший не имеет никаких шансов против преследующего его конного воина. Тем не менее решение каждого солдата бросить свой щит и попытаться добежать до видневшейся вдали лесной опушки было рациональным: если остальные бегут, то у отдельно взятого воина фактически нет выбора. Оставаясь сражаться, он обрекает себя на верную смерть. Пытаясь спастись, он с некоторой вероятностью остается в живых. Что произошло бы, если бы каждый воин был готов сражаться до конца, как личная дружина короля Гарольда (которая не отступила ни на шаг и была полностью уничтожена)? Возможно, никто бы не побежал и битва закончилась бы победой англосаксонцев. Но история не знает сослагательного наклонения.

Оглянитесь вокруг. Действия других людей практически всегда влияют на решения, которые нам приходится принимать. Почему в некоторых вузах студенты списывают на экзамене? Если списывают все остальные, то для каждого отдельно взятого студента выгода от списывания перевешивает ожидаемое наказание от поимки. В приличных вузах не списывает никто (или почти никто): попавшегося ждет показательное наказание, вплоть до отчисления. Как происходит обвал финансового рынка? По той же причине: если вы ожидаете, что цена акции упадет, то вам выгодно от нее избавиться. Если все начинают избавляться от этой акции, то ее цена падает, оправдывая ожидания. Конечно же, всегда можно рассуждать о «стадном инстинкте» и о стремлении людей имитировать друг друга, но очень часто массовая паника имеет рациональное (на индивидуальном уровне) объяснение.

Теория игр — раздел прикладной математики, с помощью которого ученые (в первую очередь экономисты и политологи) моделируют поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. Важнейший факт состоит в том, что решение игровой задачи часто отличается от решения оптимизационной задачи: войску короля Гарольда (да и самому королю) было бы «выгодно», если бы никто из солдат не побежал. Но в итоге решение каждый отдельный солдат принимал сам за себя.

1.1. СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ: ЧИСТЫЕ СТРАТЕГИИ

Существует несколько способов классифицировать игровые задачи. Различие между *статическими* и *динамическими* играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

1.1.1. ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В детстве все играли в игру «камень-ножницы-бумага». Каждый из двух игроков выбрасывает одну из трех заглавных фигур. «Камень» побеждает «ножницы», «бумага» — «камень», «ножницы» — «бумагу». Победивший бьет щелбан проигравшему. Как можно математически описать эту игру?

Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Будем говорить, что *множество игроков* в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1, 2\}$.

Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, для каждого игрока $i \in I$ *множество стратегий* будет[1] $S_i = \{$«камень», «ножницы», «бумага»$\}$.

В-третьих, мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. В нашей игре всего два игрока, причем у каждого игрока конечное число стратегий. Выигрыши игроков в такой игре можно представить в виде матрицы, каждая строка которой соответсвует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец — одной стратегии 2-го игрока. Каждая ячейка такой матрицы будет соответствовать одной из возможных ситуаций развития событий. Она будет содержать два числа: выигрыш 1-го игрока и выигрыш 2-го игрока. Если выигрыш от победы равен 1, выигрыш от поражения равен -1, а выигрыш от ничьей равен 0, то матрица выигрышей будет выглядеть так:

		Игрок 2		
		«камень»	«ножницы»	«бумага»
Игрок 1	«камень»	$0;\ \ 0$	$1; -1$	$-1;\ \ 1$
	«ножницы»	$-1;\ \ 1$	$0;\ \ 0$	$1; -1$
	«бумага»	$1; -1$	$-1;\ \ 1$	$0;\ \ 0$

Эта матрица задает нам *функции выигрышей* игроков — т.е. то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

Для того чтобы формально определить, что такое функция выигрышей (ее иногда также называют *функцией полезности*), введем следующее обозначение.

[1] «Камень-ножницы-бумага» — статическая игра: решая, какой ход делать, вы не знаете, что выбросит ваш противник. После того, как вы сделали свой ход, у вас нет возможности передумать, причем ваш противник находится в том же положении, что и вы. Примерами динамических игр являются карточная игра в «дурака», «крестики-нолики» или шахматы. Стратегия должна предписывать, какой ход надо делать в каждой из возможных игровых ситуаций. Стратегия, в таком случае, — это толстая книга, прочтя которую, доверенное вами лицо может играть в карты или шахматы так, как вы считаете нужным. Множество стратегий в такой игре — это все возможные способы написания таких книг. Более подробно о том, как решать такие игры, мы расскажем в следующей главе.

Определение 1.1. Пусть $S_1, \ldots, S_N$ — множества. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество

$$S \equiv \prod_{i=1}^{N} S_i = \big\{(s_1, \ldots, s_N) \bigm| s_1 \in S_1, \ldots, s_N \in S_N\big\}.$$

Если $I = \{1, \ldots, N\}$ — множество игроков, $S_1, \ldots, S_N$ — множества стратегий игроков, то будем говорить, что *множество профилей стратегий*, или *множество стратегий в игре*, есть $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$. Например, в нашей игре множество профилей стратегий будет $S = \{$(«камень», «камень»), («камень», «ножницы»),…,(«бумага», «бумага»)$\}$.

Любой элемент $s_i \in S_i$ называется *стратегией* игрока i, любой элемент $s \in S$ — *профилем стратегий* игроков. Обозначим через $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока i. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме i.

Функция выигрыша игрока i будет присваивать каждому профилю стратегий $s \in S$ некоторый выигрыш $u_i \colon S \to \mathbb{R}$. Назовем функцию $u \colon S \to \mathbb{R}^N = (u_1, \ldots, u_N)$ *профилем функций выигрышей* игроков.

Теперь можно формально определить, что мы имеем в виду под игрой.

Определение 1.2. Набор $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *игрой в нормальной форме*.

В игре каждый игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры — понять, какие стратегии игроки выберут в зависимости от множества профилей стратегий S и профиля функций выигрышей u.

1.1.2. ДОМИНИРОВАНИЕ

Наша задача — составить прогноз поведения игроков в игре. Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть некоторую стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему больший выигрыш.

Определение 1.3. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}). \tag{1.1}$$

Стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминирует* стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}), \tag{1.2}$$

а хотя бы для одного $s_{-i} \in S_{-i}$ мы дополнительно имеем (1.1).

Если одна стратегия всегда приносит игроку больший выигрыш, чем другая, то мы говорим о сильном доминировании. Если у игрока есть одна стратегия, которая сильно или слабо доминирует все остальные, то мы можем ожидать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры — прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

Определение 1.4. Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно* (*слабо*) *доминирующих стратегиях*, если для всех i и всех $s_i' \in S_i$, $s_i' \neq s_i^*$, стратегия s_i^* сильно (слабо) доминирует s_i'.

Будем говорить, что стратегия является *доминируемой*, если ее доминирует какая-то другая стратегия.

Дилемма заключенного. Два бандита — Петя и Вася — попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколятся, то каждый получит по восемь лет. Формально, мы имеем $I = \{\text{Петя, Вася}\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{«сознаться», «молчать»}\}$. Пусть выигрыш каждого равен, со знаком минус, годам, проведенным за решеткой:

		Вася	
		«молчать»	«сознаться»
Петя	«молчать»	$-1;\ -1$	$-10;\ 0$
	«сознаться»	$0; -10$	$-8; -8$

Как же поведут себя Петя и Вася? Каждому выгодно сознаться, вне зависимости от того, что сделает другой. Допустим, что Васе стало известно, что Петя промолчит. Если Вася сознается, он проведет в тюрьме 0 лет; если промолчит, то один год. Следовательно, если Петя будет молчать, то Вася расколется. Теперь предположим, что Вася знает, что Петя решил расколоться. Васе все равно выгодно сознаться (так он получит 8 лет вместо 10). Следовательно, вне зависимости от того, что сделает Петя, Вася сознается. Поскольку выигрыши симметричны, Петя тоже сознается: профиль стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием в сильно доминирующих стратегиях.

Эффективность по Парето. Заметим, что исход «дилеммы заключенного» (8 лет тюрьмы каждому) не является наилучшим: если бы Петя и Вася сыграли стратегии $s = (\text{«молчать», «молчать»})$, то каждому из них было бы строго лучше. Это — следствие того, что мы анализируем игровую, а не оптимизационную задачу. Петя и Вася принимают решения по отдельности; если бы за них обоих решал кто-то один, максимизирующий суммарный выигрыш Пети и Васи, то он бы действительно выбрал $s =$ («молчать», «молчать»). Однако в реальности каждый решает сам за себя.

Можем ли мы сказать, какой из двух профилей стратегии является более хорошим? Наиболее строгий критерий имеет следующее формальное определение.

Определение 1.5. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра, стратегии $s, s' \in S$. Будем говорить, что профиль стратегий s *Парето-доминирует* s', если для всех $i \in I$

$$u_i(s) \geqslant u_i(s'), \tag{1.3}$$

причем как минимум для одного i это неравенство выполняется строго.

Профиль стратегий s^o является *Парето-эффективным* или *оптимальным по Парето*, если не существует стратегии $s' \in S$, которая Парето-доминирует стратегию s^o.

Следуя этому определению, мы будем считать, что первый профиль стратегий лучше второго, если все без исключения игроки согласны с тем, что первый профиль стратегий не хуже, причем по крайней мере один игрок считает, что первый профиль стратегий лучше. В игре «дилемма заключенного» единственный профиль стратегий, который не является Парето-эффективным — это равновесные стратегии («сознаться», «сознаться»). В этом отражена суровая правда жизни. Поведение игроков в самых разных ситуациях очень часто оставляет желать лучшего. Случается так, что существует вариант действий, который увеличил бы благосостояние всех без исключения игроков — но он не обязан являться равновесием. В итоге может показаться, что в плачевном для всех игроков исходе виновата какая-то невидимая сила, какой-то дополнительный игрок, о существовании которого мы можем только догадываться. Однако теория игр способна объяснять такие исходы, не прибегая к конспирологии. Парето-доминируемые равновесные исходы случаются, как бы это ни было печально.

Аукцион второй цены. Предположим, что на продажу выставлена ранее не известная картина великого художника Виктора Михайловича Васнецова. Два богатых человека — Владимир и Михаил — решили купить эту картину. Владимир оценивает картину в v_1 руб., Михаил — в v_2 руб. (т.е. по определению, v_1 и v_2 — максимальная сумма, которую каждый из них готов заплатить за картину). Аукцион происходит по следующей схеме. Сначала Владимир и Михаил присылают свои заявки в закрытых пакетах. Картину приобретает тот, кто предложит бóльшую сумму денег, но платит он столько, сколько указано в проигравшей заявке. Для простоты предположим, что при совпадении заявок каждый покупатель выигрывает с вероятностью $1/2$. Таким образом, если s_1 — это заявка Владимира, а s_2 — заявка Михаила, то функция выигрышей Владимира выглядит следующим образом:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} v_1 - s_2, & s_1 > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_1}{2}, & s_1 = s_2; \\ 0, & s_1 < s_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Докажем, что стратегия $s_1^* = v_1$ слабо доминирует все остальные. Нам надо перебрать все остальные стратегии $s_1' \in [0, \infty)$ и показать, что ни для одной $s_2 \in [0, \infty)$ мы не можем иметь $u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1^*, s_2)$. Мы имеем

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} 0, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_2}{2}, & s_1' = s_2; \\ v_1 - s_2, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

при $s_2 \leqslant v_1$ и

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} s_2 - v_1, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{s_2 - v_1}{2}, & s_1' = s_2; \\ 0, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.6}$$

при $s_2 > v_1$. Обе эти величины неотрицательны. Следовательно, в аукционе второй цены слабо доминирующая стратегия состоит в том, чтобы назвать в качестве заявки свою истинную оценку.

Выборы — два кандидата. Пусть N (нечетное число) членов гаражного кооператива решают, за какую из двух кандидатур на должность председателя следует проголосовать. Председателем становится тот, кто получит больше половины голосов. Таким образом, $S_i = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ для всех i, где «A» означает отдать голос за кандидата A, «B» — за кандидата B. Пусть избиратель i получает выигрыш 1, если председателем становится первый кандидат, и 0, если председателем становится второй кандидат. Тогда стратегия $s_1 = \mathtt{A}$ слабо доминирует стратегию $s_1' = \mathtt{B}$. Действительно, пусть D_{A} — число голосов (кроме избирателя i), поданых за кандидата A (остальные $N - 1 - D_{\mathrm{A}}$ голосов отдаются за кандидата B). Пусть $u_i(s_i, D_{\mathrm{A}})$ — выигрыш избирателя i при голосовании за кандидата $s_i \in S_i$. Тогда мы получим

$$u_i(\mathtt{A}, D_{\mathrm{A}}) - u_i(\mathtt{B}, D_{\mathrm{A}}) = \begin{cases} 1, & D_{\mathrm{A}} = \dfrac{N-1}{2}; \\ 0, & D_{\mathrm{A}} \neq \dfrac{N-1}{2}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Иными словами, голос избирателя имеет значение, только если остальные голоса разделились ровно пополам. В таком случае его голос будет решающим; если же за одного из кандидатов собираются голосовать более половины оставшихся избирателей, то голос избирателя не влияет на исход выборов (и, соответственно, его выигрыши при голосовании за кандидата А и кандидата В равны). Профиль стратегий «каждый голосует за своего любимого кандидата» является, таким образом, равновесием в слабо доминирующих стратегиях. При двух кандидатах *честное* поведение (когда каждый голосует за того, кто ему больше нравится) является рациональным, т.е. даже если избиратель знал бы, как проголосуют другие, он все равно проголосовал бы так же.

1.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УДАЛЕНИЕ ДОМИНИРУЕМЫХ СТРАТЕГИЙ

Если равновесие в сильно доминирующих стратегиях существует, то оно является весьма обоснованным прогнозом действий игроков. К сожалению, равновесие в сильно доминирующих стратегиях встречается далеко не во всех играх. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2		
		U	C	R
Игрок 1	U	1; 2	2; 1	1; 0
	L	0; 5	1; 2	7; 4
	D	−1; 1	3; 0	5; 2

В этой игре у игрока 1 нет доминирующих (и доминируемых) стратегий. Однако у игрока 2 стратегия U доминирует C. Следовательно, если игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию C. Если игрок 1 знает, что игрок 2 рационален, то он может вообще не учитывать существование стратегии C у игрока 2. Следовательно, он может рассматривать следующую игру:

		Игрок 2	
		U	R
Игрок 1	U	1; 2	1; 0
	L	0; 5	7; 4
	D	−1; 1	5; 2

Если игрок 1 (а) рационален и (б) знает о том, что игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию D. С точки зрения игрока 2 (если он рационален, верит в рациональность игрока 1, а также в то, что игрок 1 верит в рациональность игрока 2), матрица игры тогда выглядит так:

		Игрок 2	
		U	R
Игрок 1	U	1; 2	1; 0
	L	0; 5	7; 4

Тогда игрок 2 не станет играть доминируемую стратегию R (т.е. он всегда будет играть U). Правда, для этого он должен быть уверен в том, игрок 1 знает о его (игрока 2) рациональности. Если игрок 1 уверен, что игрок 2 не станет играть R, то игра приобретет следующий вид:

		Игрок 2
		U
Игрок 1	U	$1;2$
	L	$0;5$

Игроку 1 остается сыграть U — конечно же, при условии выполнения следующей итерации предположений о рациональности[2]. В итоге у нас есть прогноз: $s_1^* = \mathtt{U}$, $s_2^* = \mathtt{U}$.

Процедура, которую мы проделали в этом примере, называется *последовательным удалением доминируемых стратегий*. Дадим ей формальное описание.

Определение 1.6. Пусть $G^1, G^2, \ldots$ — последовательность игр, полученных следующим образом. Пусть S_i^n — множество стратегий игрока i в игре G^n, полученное путем удаления сильно доминируемых стратегий из множества S_i^{n-1} в игре $G^{n-1} = \langle I, S^{n-1}, u\rangle$. Пусть S_i^∞ — предел последовательности $S_i^1 \supseteq S_i^2 \supseteq \ldots$. Тогда игра *разрешима по доминированию*, если S_i^∞ состоит из одного элемента s_i^∞ для всех i. Набор $s^\infty = (s_1^\infty, \ldots, s_N^\infty)$ назовем *решением игры по доминированию*.

Мы предполагаем, что множества S_i^∞ существуют. При конечных множествах стратегий S_i это утверждение очевидно. Кроме того, если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат S^∞. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге — доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится (см. задачу 1.21). Мы получим тот же результат и в том случае, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен (см. с. 21).

[2] Будем говорить, что в предельном случае рациональность является *всеобщим знанием*. Такое предположение является реалистичным, например, в том случае, когда игровое взаимодействие между несколькими субъектами повторяется много раз подряд. Если на протяжении нескольких ходов мои партнеры не играют доминируемые стратегии, то у меня есть основания полагать, что такое не произойдет и впредь. Если мои действия основаны на предположении о рациональности моих партнеров, то рано или поздно они это поймут, и т.д.

Решение игры по доминированию может не существовать: множества S_i^∞ могут содержать несколько элементов. Рассмотрим такую игру:

Игрок 2

Игрок 1		U	C	R
	U	1; 0	2; 1	0; 0
	L	0; −1	0; 0	2; 1
	D	−1; 1	−1; 0	1; 2

Мы удаляем стратегию D у игрока 1, потому что она доминируется стратегией L. Далее мы удаляем стратегию U у игрока 2 (ибо она доминируется стратегией C, если игрок 1 не играет D) и остаемся с неразрешимой по доминированию игрой

Игрок 2

Игрок 1		C	R
	U	2; 1	0; 0
	L	0; 0	2; 1

Здесь мы имеем $S^\infty = \{\mathtt{U}, \mathtt{L}\} \times \{\mathtt{C}, \mathtt{R}\}$.

Битва на море Бисмарка. Вот классический жизненный пример использования удаления доминируемых стратегий. Во Второй мировой войне на Тихом океане сражались силы Соединенных Штатов и Японии. Японский генерал Имамура планировал атаковать американские позиции в Новой Гвинее; для этого ему было необходимо перебросить значительные сухопутные силы на Новую Гвинею. Существовали два возможных пути конвоя: южный (S) и северный (N). Американцы под командованием генерала Кенни собиралась не допустить японских подкреплений. Американцы не знали, какой путь выберут японцы; для того, чтобы уничтожить японский конвой, нужно было сначала обнаружить его с воздуха (из-за шторма обе стороны знали примерное время отправки конвоя). Таким образом, у Кенни тоже были две стратегии: искать конвой на севере (N) или на юге (S). От выбора обоих генералов зависело число дней, в течение которых американская авиация могла бомбить японский конвой. При этом северный маршрут был на один день короче южного. Эту ситуацию можно представить в виде следующей игры:

Кенни

Имамура		N	S
	N	−2; 2	−1; 1
	S	−2; 2	−3; 3

В этой игре ни у одного из игроков нет сильно доминируемых стратегий. Однако у генерала Имамуры есть слабо доминируемая стратегия: S. Она дает ему меньший выигрыш, чем N, при условии, если противник выбирает S, и равный выигрыш, если противник выбирает N. Следуя логике последовательного удаления доминируемых стратегий, Кенни должен был знать, что Имамура не станет играть стратегию S, и самому сыграть N. Так и произошло: Имамура выбрал северный путь, и довольно быстро был обнаружен. Японцы понесли большие потери и вторжение в Новую Гвинею не состоялось (хотя, вероятно, потери японцев были бы еще больше, если бы они выбрали южный путь).

Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий. При последовательном удалении слабо доминируемых стратегий решение игры по доминированию может зависеть от порядка, в котором игроки удаляют свои стратегии. Пусть в игре с двумя игроками матрица выигрышей такова[3]:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1; 1	0; 0
	M	1; 1	2; 1
	D	0; 0	2; 1

В этой игре у первого игрока стратегия M слабо доминирует U и D. Если сначала удалить U, то в игре с оставшимися стратегиями у второго игрока R будет слабо доминировать L. Удалив L, мы приходим к двум решениям — (M, R) и (D, R). Если же сначала удалить D, то на второй итерации мы удаляем R у второго игрока и приходим к решениям (M, L) и (U, L) с другим значениями выигрышей.

1.1.4. РАВНОВЕСИЕ НЭША

Рассмотрим пример на с. 20. Если игрок 1 знает, что игрок 2 собирается играть C, то ему следует сыграть U. Аналогично, если игроку 2 известно намерение игрока 1 сыграть U, то ему следует сыграть C. Таким образом, профиль стратегий $s^* = (\mathtt{U}, \mathtt{C})$ является равновесным: ни одному игроку не выгодно изменить свою стратегию при условии, что другой игрок не изменит свою. Формально, (U, C) отвечает следующему определению.

Определение 1.7. Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ — *равновесие Нэша*, если для всех i, для всех $s_i' \in S_i$, мы имеем

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}^*). \tag{1.8}$$

Равновесие Нэша — это такой профиль стратегий, что ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными. Равновесие Нэша является основной концепцией решения теоретико-игровых задач в общественных

---

[3] [Печерский, Беляева, 2001, с. 43].

науках. Почему? Видимо, из-за того, что оно удовлетворяет определенному минимальному набору представлений о рациональности игроков. Нобелевский лауреат Роджер Майерсон так обосновал важность равновесия:

> Когда меня спрашивают, почему в какой-то игре игроки должны вести себя, как в равновесии Нэша, я отвечаю: «Почему нет?» Далее я предлагаю задавшему вопрос сформулировать свое представление о том, как должны повести себя игроки. Если эта спецификация не является равновесием Нэша, то … она будет противоречить сама себе, если мы предположим, что игроки имеют верное представление о действиях друг друга. [Myerson, 1991, p. 106].

Иными словами, равновесие Нэша является необходимым условием «разумного» поведения игроков. Является ли это условие достаточным? То есть существуют ли игры, в которых профили стратегий, формально удовлетворяющие условиям равновесия Нэша, не могут являться разумными (с интуитивной точки зрения) прогнозами поведения игроков? К сожалению, да. Во многих динамических играх (как мы увидим в следующих главах) нам могут потребоваться более строгие условия для составления прогноза поведения игроков. Тем не менее все равно любой такой прогноз будет являться равновесием Нэша.

Координационные игры. Два студента, Маша и Андрей, договорились пойти в Малый театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах города Москвы. Театр находится на станции метро «Площадь революции». К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро или у театра. Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрица игры для них выглядит так:

		Андрей М	**Андрей** Т
Маша	М	1; 1	0; 0
	Т	0; 0	1; 1

В этой игре два равновесия: $(\mathtt{М}, \mathtt{М})$ и $(\mathtt{Т}, \mathtt{Т})$, причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. Это — классический пример *координационной игры*.

Можно ли сказать, какое из нескольких возможных равновесий будет реализовано в координационной игре? Важную роль играет коммуникация между игроками. Если перед тем, как выйти из дома, Андрей передал Маше, что будет ждать ее в метро, то, скорее всего будет реализована пара стратегий $(\mathtt{М}, \mathtt{М})$ — несмотря на то что сообщение Андрея не является обязательным к исполнению и никто не мешает Маше прийти к театру.

При отсутствии коммуникаций важную роль играет культурный и психологический контекст игры, не отраженный в функциях выигрышей игроков. Представьте себе следующий пример. Вы и ваш товарищ — десантники, заброшенные во вражеский тыл. Вы приземлились в разных местах; для успешного проведения операции вам необходимо встретиться. Ни у одного из вас нет рации. Однако у каждого есть карта местности — такая как на рис. 1.1. Куда вы пойдете в надежде встретить своего товарища? Для большинства ответ очевиден: мост через речку. Почему? Потому что это место наиболее очевидно. Эта очевидность никак не отражена в функциях выигрышей: если вы встретитесь в любом другом месте, то ваш выигрыш будет таким же. Если вы разминетесь, то вы проиграете — вне зависимости от того, куда вы в итоге пришли.

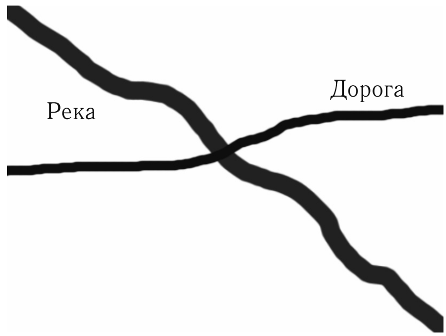


Рис. 1.1. Карта вражеской местности

Стратегии, похожие на точку на пересечении дороги и реки на рис. 1.1, иногда называют *фокальными точками*. Важность таких стратегий в координационных играх описана в классической книге Томаса Шеллинга [1960]. Автор спрашивал своих студентов: если бы вам надо было встретиться в Нью-Йорке с незнакомым вам человеком (который находится в том же затруднительном положении, что и вы), то в какое место (и когда) бы вы пришли? Наиболее частый ответ был: в полдень на Times Square. Конечно же, наличие таких фокальных точек зависит от однородности культурной среды, из которой происходят игроки. Человек из другой страны, впервые попавший в Нью-Йорк, вряд ли пойдет искать своего товарища по игре на Times Square, так как не знает о символическом значении, которое может иметь это место для второго игрока.

В координационной игре на выбор равновесия могут влиять не только ментальные факторы, но и история предыдущих взаимодействий игроков. Если Маша и Андрей всегда встречались в метро на станции «Площадь революции» в центре зала, то и в следующий раз они встретятся там же. Андрей, предполагая, что Маша будет ждать его в метро, придет в метро. Маша, рассуждая схожим образом, сделает то же самое. Таким образом, координационная игра обладает свойством *зависимости от истории* или *зависимости от траектории*. Если данная игра повторялась несколько раз и в ней каждый раз реализовывалось одно и то же равновесие, то и в следующий раз, скорее всего, игроки сыграют те же стратегии[4].

[4] Такие многократные взаимодействия более полно описываются динамическими играми.

Реализация одного и того же равновесия в повторяющемся игровом взаимодействии может привести к формированию социальных конвенций. Масколлел, Уинстон и Грин приводят такой пример:

> Каждый день люди, идущие на работу [в центре Нью-Йорка], должны решать, по какой стороне тротуара следует идти. Со временем формируется конвенция, согласно которой люди идут по правой стороне тротуара. Эта конвенция поддерживается, так как любой индивид, отклонившийся [от конвенции] в одностороннем порядке, будет растоптан. Конечно же, в любой день *возможно*, что какой-нибудь индивид решит идти по левой стороне, рассчитывая на то, что все остальные вдруг решат, что конвенция изменилась. Тем не менее наиболее разумный прогноз — что пешеходы и дальше будут придерживаться равновесия «все идут по правой стороне». Заметим, что поведение, для того чтобы стать устойчивой конвенцией, должно являться равновесием Нэша. Иначе индивиды начнут отклоняться от конвенции, как только та будет сформирована [Масколлел, Уинстон, Грин, 1995, с. 249; перевод автора].

1.1.5. ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ

Рассмотрим матричную игру, представленную на рис. 1.2.

В левой части рис. 1.2 показано, какие стратегии игрока 1 максимизируют его выигрыш при данной стратегии игрока 2. Например, если игрок 2 выбирает стратегию a, то выигрыш игрока 1 максимизируется при выборе им стратегии C. Фактически, для каждого значения s_2 мы определяем одно или несколько значений s_1, максимизирующих выигрыш игрока 1. Аналогично, правая часть таблицы показывает, какая стратегия игрока 2 максимизирует его выигрыш для данной стратегии игрока 1. Дадим определение.

Игрок 1

	a	b	c	d
A	1;1	4;2	$\boxed{4;3}$	2;5
B	0;2	1;1	3;2	0;0
C	$\boxed{3;4}$	$\boxed{5;6}$	2;0	4;1
D	2;2	1;1	3;5	$\boxed{5;0}$

Игрок 2

	a	b	c	d
A	1;1	4;2	4;3	$\boxed{2;5}$
B	$\boxed{0;2}$	1;1	$\boxed{3;2}$	0;0
C	3;4	$\boxed{5;6}$	2;0	4;1
D	2;2	1;1	$\boxed{3;5}$	5;0

Рис. 1.2. Наилучшие реакции для двух игроков

Определение 1.8. Функция реакции игрока i есть точечно-множественное отображение $\check{s}_i$ между множествами S_{-i} и S_i такое, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i \;\middle|\; u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i}) \right\}.$$

В математике *точечно-множественное отображение* между множествами A и B означает правило, которое каждому элементу из множества A ставит в соответствие какое-то подмножество множества B. Функция реакции является точечно-множественным отображением, показывающим, какие стратегии игрока максимизируют его выигрыш в зависимости от профиля стратегий остальных игроков. Для профиля стратегий s_{-i} может существовать несколько стратегий игрока i, максимизирующих его выигрыш. Например, выигрыш игрока 2 при $s_1 = \mathtt{B}$ в описанной выше игре максимизируется при $s_2 \in \check{s}_2(\mathtt{B}) = \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}$.

Равновесие Нэша можно определить как любой такой профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока является наилучшей реакцией на стратегии остальных игроков:

Лемма 1.1. *Профиль стратегий s^* есть равновесие Нэша в том и только том случае, если для всех i мы имеем*

$$s_i^* \in \check{s}_i(s_{-i}^*). \tag{1.9}$$

Данную формулировку удобно использовать для решения некоторых задач по нахождению равновесия.

Дуополия Курно. Первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была модель конкуренции двух фирм, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в XIX в.

В стране N имеются две фирмы-производителя виджетов[5]. Обе фирмы должны решить, какое количество виджетов следует произвести в течение ближайшего месяца. Для простоты предположим, что виджеты делимы — можно произвести (и продать) любое дробное количество. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — объем производства второй. Функция спроса на виджеты имеет вид $p = 1 - q_1 - q_2$, где p — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течение месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы i равны $c_i q_i$, где $0 \leqslant c_i < 1$ — издержки изготовления одной единицы товара. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 p - c_1 q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \\ u_2 &= q_2 p - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c_2 q_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

[5] В экономической литературе так обозначаются типовые изделия.

В этой задаче множество стратегий у каждой из двух фирм не является конечным: каждая фирма может выбрать любой неотрицательный объем производства. Функции выигрышей фирм являются непрерывными функциями от их стратегий. Если (q_1^*, q_2^*) — равновесие Нэша, то q_1^* должен максимизировать u_1 при $q_2 = q_2^*$, и наоборот. Решениями максимизационных задач фирм

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) \quad \text{и} \quad \max_{q_2} u_2(q_1, q_2) \tag{1.11}$$

будут соответственно

$$\check{q}_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{1-q_2-c_1}{2}, & q_2 < 1-c_1; \\ 0, & q_2 \geqslant 1-c_1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \check{q}_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1-q_1-c_2}{2}, & q_1 < 1-c_2; \\ 0, & q_1 \geqslant 1-c_2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12) определяют функции реакции для первой и второй фирмы. Равновесие Нэша — это такие величины (q_1^*, q_2^*), при которых объем производства первой фирмы максимизирует ее прибыль при данном объеме производства второй фирмы, и наоборот. Следовательно, равновесием будет являться любое решение системы уравнений

$$\check{q}_1(q_2) = q_1, \qquad \check{q}_2(q_1) = q_2. \tag{1.13}$$

Графики функций реакции и равновесия для разных значений c_1 и c_2 представлены на рис. 1.3.

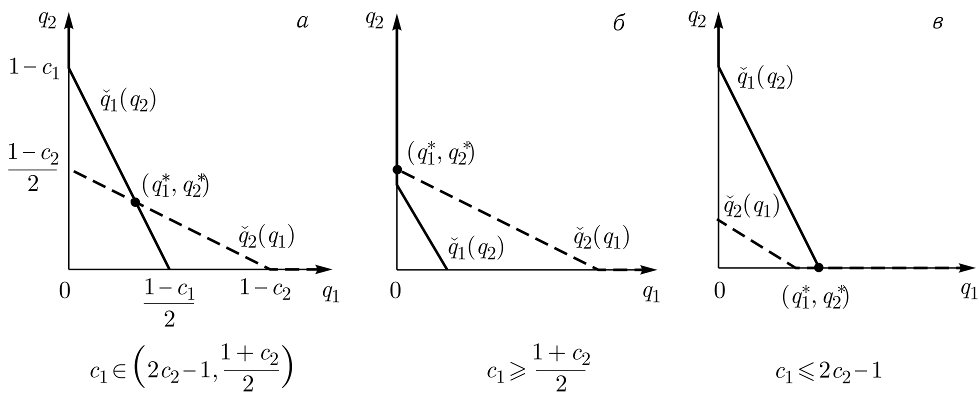


Рис. 1.3. Равновесие в модели дуополии Курно для разных значений c_1 и c_2

На каждом из трех рисунков сплошная линия изображает график функции реакции для фирмы 1, прерывистая линия — график функции реакции для фирмы 2. В точке пересечения этих графиков располагается равновесие.

Равновесие составит

$$q_1^* = \frac{1-2c_1+c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{1-2c_2+c_1}{3} \ \text{ для } \ c_1 \in \left(2c_2-1, \frac{1+c_2}{2}\right), \quad (1.14)$$

$$q_1^* = \frac{1-c_1}{2}, \quad q_2^* = 0 \ \text{ для } \ c_1 \leqslant 2c_2 - 1 \quad (1.15)$$

и

$$q_1^* = 0, \quad q_2^* = \frac{1-c_2}{2} \ \text{ для } \ c_1 \geqslant \frac{1+c_2}{2}. \quad (1.16)$$

1.1.6. РАВНОВЕСИЕ НЭША И ДОМИНИРОВАНИЕ

Очевидно, что равновесие в доминирующих стратегиях обязательно является равновесием Нэша (но никак не наоборот).

Лемма 1.2. *Пусть $s^* \in S$ — равновесие в доминирующих стратегиях. Тогда s^* — равновесие Нэша.*

Действительно, доминирующая стратегия должна давать игроку наилучший выигрыш вне зависимости от того, какие стратегии выбирают остальные игроки. Равновесная (по Нэшу) стратегия удовлетворяет более слабому условию: она должна быть оптимальной при условии, что остальные игроки выбирают свои равновесные стратегии.

Может ли в равновесии играться доминируемая стратегия? Если это — сильно доминируемая стратегия, то нет:

Лемма 1.3. *Пусть s^* — равновесие Нэша. Тогда s^* не содержит сильно доминируемых стратегий.*

Игрок по определению не может в равновесии играть стратегию при существовании альтернативы, которая всегда — при любых стратегиях остальных игроков — дает больший выигрыш. Однако вполне может быть так, что слабо доминируемая стратегия является равновесной. Рассмотрим следующую игру:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1; 1	0; 0
	M	1; 1	2; 1

В этой игре два равновесия: $(\mathtt{U}, \mathtt{L})$ и $(\mathtt{M}, \mathtt{R})$. В первом из них игрок 1 играет слабо доминируемую стратегию U.

Равновесие Нэша и множество S^∞ взаимосвязаны.

Во-первых, при последовательном удалении сильно доминируемых стратегий мы не можем удалить равновесную стратегию:

Лемма 1.4. *Пусть в игре $G = \langle I, S, u\rangle$ профиль стратегий $s^* \in S$ является равновесием Нэша. Тогда $s^* \in S^\infty$.*

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть s^* — равновесие Нэша, не содержащееся в S^∞. Пусть равновесие s^* удаляется на шаге n. Пусть s_i^* — любая стратегия, удаляемая на этом шаге. Тогда существует стратегия $s_i' \in S_i^n$, такая, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$ мы имеем

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i}). \tag{1.17}$$

Но это противоречит утверждению, что s^* — равновесие:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*) \tag{1.18}$$

для всех $s_i \in S_i$, ибо по построению s_i^* удаляется первой из стратегий игроков, входящих в равновесие, т.е. $s_{-i}^* \in S_{-i}^n$. ■

Во-вторых, если у игры есть решение по доминированию, то оно обязано быть равновесием Нэша (из предыдущей леммы должно следовать то, что это равновесие — единственное). Верен следующий результат:

Лемма 1.5. *Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — игра с конечным множеством профилей стратегий S. Пусть s^∞ — решение этой игры по доминированию. Тогда s^∞ — единственное равновесие Нэша.*

Доказательство. Докажем это утверждение для конечных игр. Пусть $S^\infty = \{s'\}$ — не равновесие Нэша. Тогда существуют $i \in I$ и $s_i \in S_i$, такие, что

$$u_i(s_i, s_{-i}') > u_i(s_i', s_{-i}'), \tag{1.19}$$

причем существует шаг n такой, что некоторый $s_i'' \in S_i^n$ строго доминирует s_i в игре G^n, т.е. для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$ мы имеем

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}). \tag{1.20}$$

Так как $s_{-i}' \in S_{-i}^n$ для всех шагов n, получаем

$$u_i(s_i'', s_{-i}') > u_i(s_i, s_{-i}'). \tag{1.21}$$

Рассмотрим два случая:

1. $s_i'' = s_i'$. Тогда (1.19) противоречит (1.21).
2. $s_i'' \neq s_i'$. Тогда существует $m > n$ и стратегия $s_i''' \in S_i^m$, которая строго доминирует s_i'' в игре G^m. Заменим s_i'' на s_i''' в неравенствах (1.20) и (1.21). Если $s_i''' = s_i'$, то утверждение доказано. Если $s_i''' \neq s_i'$, то повторим шаг (2).

Так как множества S_i конечны, то мы таким образом в конце концов придем к противоречию. ■

Какова ценность доказанных выше лемм? И множество равновесий Нэша, и множество S^∞ являются *концепциями решений* — т.е. способами выделить из множества стратегий S некоторые подмножества (желательно, состоящие из небольшого числа элементов), которые будут являться прогнозами действий игроков. Мы показали, что эти две концепции решений взаимосвязаны: равновесная по Нэшу стратегия не может быть удалена как сильно доминируемая, в то время как единственность решения по доминированию гарантирует существование (и единственность) равновесия Нэша.

1.1.7. ПРИМЕРЫ

«Лобовая атака». В игре с несколькими равновесиями выбор стратегий может быть обусловлен историей поведения игроков в подобных игровых взаимодействиях — друг с другом или с другими игроками.

Два автомобиля едут навстречу друг другу. Каждый водитель решает, свернуть ему или нет. Если один водитель свернул (T), а второй — нет (N), то свернувший водитель считается трусом, а не свернувший — крутым и заслуживающим уважения парнем. Если свернули оба, то каждый остается «при своих». Если не свернул ни один из них, то происходит столкновение и оба водителя погибают. Предпочтения каждого водителя (в порядке убывания выигрышей) выглядят так: стать крутым, остаться «при своих», стать трусом, погибнуть. Эти предпочтения могут быть выражены, например, такой функцией выигрышей:

		Игрок 1	
		T	N
Игрок 2	T	0; 0	−5; 10
	N	10; −5	−10; −10

В этой игре два равновесия: (T, N) и (N, T).

Какое из двух равновесий будет реализовано? Возможно, ответ зависит от репутации каждого из игроков. Если про первого игрока известно, что в прошлых игровых взаимодействиях он никогда не сворачивал, а второй игрок не имеет такой репутации, то следует ожидать, что второй игрок свернет, а первый — нет. В таких играх с несимметричными равновесиями репутация будет самоподдерживаться от одной игры к другой.

Дележ ста рублей. Представления игроков о равенстве и справедливости тоже могут иметь значение при определении равновесия. Рассмотрим, например, следующую игру.

В копилке лежат 100 руб. Каждый из двух игроков называет сумму, которую он хотел бы забрать из копилки. Если сумма заявок не превосходит 100 руб., то их заявки исполняются. Если в сумме было заявлено более 100 руб., то каждый получает нуль. Формально, $s_1 = s_2 = [0, 100]$,

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1, & s_1 + s_2 \leqslant 100; \\ 0, & s_1 + s_2 > 100; \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2, & s_1 + s_2 \leqslant 100; \\ 0, & s_1 + s_2 > 100. \end{cases} \tag{1.22}$$

В этой игре существует *континуум*[6] равновесий. Любое равновесие имеет вид $(s_1^*, s_2^*) = (s, 100-s)$ при $s \in [0, 100]$.

Если два незнакомых человека сядут играть в эту игру, то какими будут их стратегии? Вероятнее всего, они предложат $(s_1, s_2) = (50, 50)$. Это — одно из многих равновесий, но оно наиболее очевидно и является фокальной точкой в силу своей симметричности. Какое-нибудь другое, несимметричное равновесие, например, $(s_1, s_2) = (30, 70)$, может быть реализовано, только если у каждого игрока есть основание полагать, что другой игрок будет придерживаться именно этой равновесной стратегии.

Банковская паника. Вот еще один пример, взятый из книги Гиббонса [Gibbons, 1992]. Каждый из двух вкладчиков имеет D долларов на счете в банке. Банк использовал эти средства для того, чтобы профинансировать некий инвестиционный проект продолжительностью два года. Если банк попытается отозвать средства через год после начала проекта, то сможет вернуть $2r$, где $D > r > D/2$. Если банк дожидается окончания проекта, то получает $2R$, где $R > D$. Через один год каждый из двух вкладчиков решает, забрать ли ему свой вклад из банка (W) или нет (H). Если хотя бы один вкладчик забирает вклад, то банк вынужден прекратить финансирование проекта. Забравший свои средства вкладчик получает сумму D, другой вкладчик получает $2r - D$. Если оба вкладчика забрали средства, то каждый получает r. Если оба вкладчика не забрали свои средства, то проект успешно реализуется и каждый получает по R. Матрица выигрышей в этой игре такая:

		2 вкладчик	
		H	W
1 вкладчик	H	$R;\ R$	$2r-D;\ D$
	W	$D;\ 2r-D$	$r;\ r$

В этой игре существуют два равновесия: (H, H), в котором оба вкладчика дожидаются окончания проекта, и (W, W), в котором оба вкладчика забирают свои средства раньше срока, реализуя сценарий банковской паники.

Списывание на экзамене. N студентов пишут экзамен по теории игр. Каждый студент i имеет возможность списать ($s_i = 1$) или не списывать ($s_i = 0$). Все списывающие студенты будут наказаны. Однако тяжесть наказания, понесенная списывающим студентом, будет обратно пропорциональна числу списывающих. Так, например, если на списывании попался только

[6] *Континуумом* в математике называется множество чисел, содержащее все значения в каком-нибудь отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Например, отрезок $[0, 1]$ является континуумом: он содержит все числа от 0 до 1. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, с другой стороны, континуумом не является, хотя и содержит бесконечное число элементов.

один студент, то он может быть отчислен. Если на списывании попалась половина потока, то наказание для каждого студента будет более легким: по административным причинам, преподавателю будет трудно отчислить всех нарушителей. Пусть выигрыш студента i будет

$$U_i(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{C}{\sum_{j=1}^{N} s_j}, & s_i = 1; \\ 0, & s_i = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Здесь чистый выигрыш от списывания равен 1; суммарный объем наказания составляет C. Найдем равновесия в этой игре. Функция реакции студента i будет

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \sum_{j\neq i} s_j < C-1; \\ \{0,1\}, & \sum_{j\neq i} s_j = C-1; \\ 1, & \sum_{j\neq i} s_j > C-1. \end{cases} \tag{1.24}$$

Легко убедиться, что в этой игре, в зависимости от значения параметра C, может быть несколько равновесий:

Случай 1: $C < 1$**.** Существует одно равновесие: все списывают.

Случай 2: $1 \leqslant C \leqslant N$**.** Существуют два равновесия: никто не списывает и все списывают.

Случай 3: $C > N$**.** Существует одно равновесие: никто не списывает.

Получается, что списывание может быть вызвано не институциональными причинами (такими как тяжестью наказания C, числом студентов N или их отношением к списыванию), а ожиданиями студентов относительно действий их товарищей. Если студент считает, что его товарищи списывать не будут, то его выигрыш от списывания будет меньше, чем тяжесть наказания, которую он понесет. Следовательно, он не станет списывать. Если у остальных студентов имеются такие же прогнозы относительно действий своих товарищей, то списывать не будет никто. Однако если же студент ожидает, что все остальные будут списывать, то ему будет выгодно списать: наказание будет достаточно легким по сравнению с выигрышем. Оба равновесия являются в своем роде фокальными точками — т.е. в каждом из них все игроки действуют одинаково. В таком случае уместно говорить о *самосбывающихся прогнозах*.

Несуществование равновесия в игре «инспекция». На железнодорожной платформе в электричку заходят двое: безбилетник и контролер. Если они заходят в один и тот же вагон, то контролер ловит безбилетника и штрафует его на 100 руб. Если они садятся в разные вагоны, то безбилетник выходит на следующей станции, ничего не заплатив. Свое моральное удовлетворение от поимки безбилетника контролер оценивает в 50 руб. Предположим, для простоты, что электричка состоит всего из двух вагонов. Тогда матрица выигрышей имеет следующий вид:

		Контролер	
		1 вагон	2 вагон
Безбилетник	1 вагон	-100; 50	0; 0
	2 вагон	0; 0	-100; 50

Эта игра не имеет равновесия Нэша. Если безбилетник едет в 1-м вагоне, то проводник максимизирует свой выигрыш, если сядет в 1-й вагон. Если же безбилетник знает, что проводник едет в 1-м вагоне, то сам переберется во 2-й.

Массовые протесты. В конце декабря 2010 г. в Тунисе, арабском государстве в Северной Африке, вспыхнули массовые протесты. Менее чем через месяц президент Бен Али, пробывший у власти 23 года, был вынужден бежать из страны. Так началась «Арабская весна» — волна революций на Ближнем Востоке, приведшая к смене власти в нескольких странах и гражданским войнам в нескольких других. Почему протесты возникают так внезапно — ведь казалось, что политический режим в Тунисе и других странах устойчив, как никогда, народ пассивен и не заинтересован в политике, а гражданское общество сла́бо и не развито?

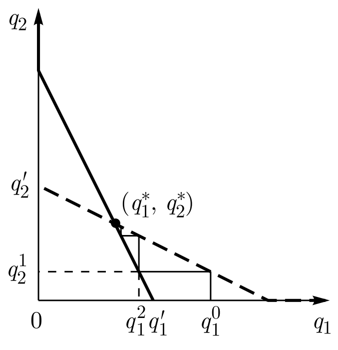
Попробуем объяснить происходящее при помощи теоретико-игровой модели. Предположим, что в некотором городе живет N жителей; каждый из них должен принять решение, принять или не принять участие в намеченной на следующий день массовой протестной акции. Предположим, что на решение каждого отдельно взятого человека участвовать или не участвовать в публичной акции, влияет его оценка возможной массовости этого мероприятия. Действительно, не так много людей способно выступать открыто, в одиночку и без оглядки на последствия — как в 1968 г. это сделала небольшая группа советских диссидентов, вышедших на Красную площадь в знак протеста против вторжения советских войск в Чехословакию. Однако участвовать в крупной акции готово большее число людей: это не так страшно из-за небольшой вероятности быть репрессированным и просто более комфортно психологически.

Предположим, что выигрыш жителя i от участия в акции протеста равен 1, если совокупное число участников акции равно или превосходит K_i, и нулю, если число участников меньше, чем K_i. Пусть выигрыш от неучастия равен $c \in (0, 1)$.

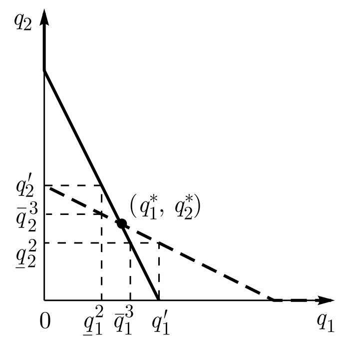
Легко подобрать такие параметры K_i, при которых равновесий в этой игре будет несколько. Пусть, например, $N = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 3$, $K_4 = K_5 = 5$. В таком случае у нас есть три равновесия. В первом из них в протестах участвует один человек, во втором — трое, в третьем — пятеро.

Из такой логики следует то, что крупные протесты скорее всего будут происходить в больших городах, причем чем крупнее город, тем больше населения города будет принимать участие в акциях протеста. Согласно нашим предположениям, на решение отдельно взятого человека выйти на улицу влияет абсолютное число единомышленников, а оно будет выше в большом городе. Поэтому в крупных городах протесты, как правило, более масштабны — даже в процентном соотношении. Высокий риск возникновения массовых гражданских акций в густонаселенных городах — это фактор, существенно влияющий на ход мировой истории. Государства переносили столицы из крупных городов на новые места (Турция — в 1924 г., Бразилия — в 1960 г., Казахстан — в 1997 г.); есть свидетельства того, что в странах с авторитарными режимами высокая концентрация населения оказывает положительное влияние на качество государственного управления. Возможно, это происходит в силу того, что в таких странах правителям приходится действовать осторожнее и лучше учитывать интересы населения, по крайней мере, жителей столиц.

Последовательное удаление доминируемых стратегий в дуополии Курно. Вернемся к задаче конкуренции двух фирм на с. 25. Данный пример показывает, как может выглядеть динамика поиска равновесия двумя фирмами. Например, предположим, что фирмы взаимодействуют друг с другом в течение нескольких периодов; в четные периоды возможность изменить объем производства имеет фирма 1; в нечетные периоды — фирма 2. Пусть $c_1 = c_2$. Если в момент времени $t = 0$ фирма 1 произведет объем товара q_1^0, то в момент времени $t = 1$ фирма 2 произведет $q_2^1 = \check{q}_2(q_1^0)$, в момент времени $t = 2$ фирма 1 произведет $q_1^2 = \check{q}_1(q_2^1)$, и т. д. (рис. 1.4, a). Последовательности объемов производств $q_1^0, q_1^2, \ldots$ и $q_2^1, q_2^3, \ldots$ сойдутся к q_1^* и q_2^* при любом начальном значении q_1^0. Таким образом, равновесие (q_1^*, q_2^*) будет устойчивым — если один из игроков отклонится от своей равновесной стратегии, то поведение игроков довольно быстро вернется к равновесию (доказать это предлагается в качестве отдельной задачи).



a) Существование равновесия и его устойчивость



$б$) Удаление доминируемых стратегий

Рис. 1.4. Дуополия Курно

На примере дуополии Курно можно проиллюстрировать процедуру последовательного удаления доминируемых стратегий. Предположим, что у фирмы 2 множество стратегий $S_2^t = [\underline{q}_2, \overline{q}_2]$. Какие стратегии для первой фирмы будут доминируемы? Во-первых, заметим, что если $q_2 \in [\underline{q}_2, \overline{q}_2]$ и $q_1 > \check{q}_1(\underline{q}_2)$, то $u_1(q_1, q_2) < u_1(\check{q}_1(\underline{q}_2), q_2)$. То есть $q_1(\underline{q}_2)$ сильно доминирует все стратегии $q_1 > \check{q}_1(\underline{q}_2)$. Во-вторых, $\check{q}_1(\overline{q}_2)$ доминирует все стратегии $q_1 < \check{q}_1(\overline{q}_2)$.

Попробуем для данной задачи построить последовательность множеств стратегий в соответствии с определением 1.6. Возьмем $S_1^0 = S_2^0 = [0, \infty)$. Стратегия $q_1' = \check{q}_1(0)$ доминирует все $q > q_1'$. Следовательно, $S_1^1 = [0, q_1']$. Аналогично, $S_2^1 = [0, q_2']$. На следующей итерации получим $S_1^2 = [\check{q}_1(q_2'), q_1']$, $S_2^2 = [\check{q}_2(q_1'), q_2']$. Мы получаем последовательность множеств стратегий $S_1^t = [\underline{q}_1^t, \overline{q}_1^t]$, $S_2^t = [\underline{q}_2^t, \overline{q}_2^t]$, где

$$\underline{q}_2^{t+1} = \check{q}_2(\overline{q}_1^t), \quad \overline{q}_1^{t+1} = \overline{q}_1^t, \quad \underline{q}_1^{t+1} = \check{q}_1(\overline{q}_2^t), \quad \overline{q}_2^{t+1} = \overline{q}_2^t \quad \text{для четных } t \geqslant 2 \tag{1.25}$$

и

$$\underline{q}_1^{t+1} = \underline{q}_1^t, \quad \overline{q}_2^{t+1} = \check{q}_2(\underline{q}_1^t), \quad \underline{q}_2^{t+1} = \underline{q}_2^t, \quad \overline{q}_1^{t+1} = \check{q}_1(\underline{q}_2^t) \quad \text{для нечетных } t \tag{1.26}$$

при начальных значениях $\underline{q}_1^1 = \underline{q}_2^1 = 0$, $\overline{q}_1^1 = q_1'$ и $\overline{q}_2^1 = q_2'$. Заметим, что для $i = 1, 2$ выполнено $\underline{q}_i^t \leqslant \underline{q}_i^{t+1}$, $\overline{q}_i^t \geqslant \overline{q}_i^{t+1}$ для всех $t \geqslant 0$. При этом можно показать, что последовательности $\underline{q}_i^t$ и $\overline{q}_i^t$ сходятся к q_i^*. Получается результат, соответствующий лемме 1.5. Для каждой фирмы $i = 1, 2$ существует единственная стратегия q_i^*, которая содержится во всех множествах S_i^t. Отличие от конечной игры состоит в том, что сходимость множеств стратегий к q_i^* происходит только в пределе, в то время как для конечной игры множество S^∞ достигается за конечное число итераций[7].

Выборы — несколько кандидатов. Вернемся к задаче голосования, описанной на с. 17. Нахождение равновесия значительно усложняется, если кандидатов будет три или больше. Предположим, что на должность претендуют всего K кандидатов. При определении победителя действует правило простого большинства: кандидат, набравший большинство голосов, объявляется победителем. Если несколько кандидатов набрали максимальное число голосов, то каждый из этих кандидатов с равной вероятностью объявляется победителем. Каким условиям должны отвечать равновесные стратегии? Рассмотрим избирателя i.

[7] Следует сказать, что описанная в этом примере сходимость не имеет места при произвольной функции спроса $p(q_1, q_1)$. Это верно для линейных функций (в том числе и для нашей $p = 1 - q_1 - q_2$), но для других функций спроса это может быть не так. См., например, учебник: [Бусыгин и др., 2000, с. 94–97].

Пусть $D_1^i, \ldots, D_K^i$ — число голосов всех избирателей, за исключением избирателя i, поданое за кандидатов $1, \ldots, K$. Пусть $M^i = \max\{D_1^i, \ldots, D_K^i\}$, $K_1^i = \{k\colon |D_k^i| = M^i\}$, $K_2^i = \{k\colon |D_k^i| = M^i - 1\}$. То есть M^i — это максимальное число голосов, отданное за какого-то кандидата, K_1^i — все кандидаты, которые набирают это число голосов, K_2^i — все кандидаты, набирающие на голос меньше (это множество может быть пустым). Избиратель i может повлиять на исход выборов в двух случаях. Во-первых, если K_1^i содержит не менее двух кандидатов и если i голосует за кандидата $k_1 \in K_1$, то кандидат k_1 побеждает с вероятностью 1. Во-вторых, если множество K_2^i не пустое, и избиратель i голосует за кандидата $k_2 \in K_2^i$, то кандидат k_2 побеждает с вероятностью $\dfrac{1}{|K_1^i| + 1}$. Если множество K_1^i состоит из одного элемента и множество K_2^i пусто, то *любое* действие избирателя i будет равнозначным по результату! Например, если избирателей больше трех и все голосуют за одного кандидата, то ни один их них не может изменить свой выигрыш, проголосовав за другого.

Если кандидатов трое или больше, то стратегия «голосовать за наиболее предпочтительного кандидата» уже не будет слабо доминировать другие стратегии. Пусть, например, кандидатов трое, и у избирателя i следующие предпочтения: он получает 3 ед. полезности, если выбирают кандидата 1; 2 ед. полезности, если выбирают кандидата 2; и 1 ед., если выбирают кандидата 3. Если $D_1^i = 0$ и $D_2^i = D_3^i \geqslant 2$, то избирателю i следует проголосовать за кандидата 2. Этот избиратель вынужден голосовать *стратегически*, т.е. не за ту альтернативу, которая является наилучшей с его точки зрения. Неудивительно, что на выборах, в которых участвуют несколько кандидатов или партий, очень важную роль играют прогнозы — т.е. информация, которая доступна избирателю о стратегиях, которые могут быть выбраны другими избирателями.

Это свидетельствует о том, что на выборах, в которых участвуют несколько кандидатов или партий, очень важную роль играют прогнозы — т.е. информация, которая доступна избирателю о стратегиях, которые могут быть выбраны другими избирателями.

Недопроизводство общественных благ. К числу общественных благ относятся бесплатные дороги, свет, произведенный уличными фонарями, национальная оборона, радиоэфир, знания и правовая система, обеспечивающая всем гражданам низкие издержки при заключении контрактов. Все эти вещи отличают два свойства. Во-первых, они являются *неисключаемыми*: никто не может запретить мне пользоваться светом от уличного фонаря; в то же самое время, для того, чтобы пользоваться автомобилем, мне необходимо сначала его купить. Во-вторых, общественные блага отвечают свойству *неистощаемости*. Автомобилем не могут одновременно пользоваться несколько человек; в то время как сразу несколько человек могут, не мешая друг другу, слушать одну и ту же радиопередачу; затраты на национальную оборону почти не зависят от числа граждан, которых необходимо оборонять. Иными словами, предельные издержки распространения общественного блага на еще одного потребителя равны нулю.

Рассмотрим такую задачу производства общественных благ. В Австралии по соседству находятся два фермерских участка. Каждый фермер может поставить на своем участке пу́гало для отпугивания ворон и кроликов, грозящих уничтожить его посевы. Урожайность каждого участка зависит от наличия пугала как на этом, так и на соседнем участке. Пусть a — прибыль каждого фермера, если пугала стоят на обоих участках, $b < a$ — прибыль, если пугало стоит только на одном участке, 0 — прибыль, если пугал нет. Если стоимость установки пугала равна 100, то между фермерами может возникнуть такая игра:

		Фермер 2	
		Ставить	Не ставить
Фермер 1	Ставить	$a-100$; $a-100$	$b-100$; b
	Не ставить	b; $b-100$	0; 0

При $b < 100$, $a < b + 100$ и $a > 100$ мы имеем игру, аналогичную дилемме заключенного. Доминирующая стратегия у каждого фермера — не ставить пугало, но результат Парето-неэффективен: если оба фермера поставят пугала, то обоим будет лучше. Пугала в этой игре являются общественными благами, так как от того, что один из фермеров поставил пугало, выигрывает и другой. Другому фермеру может захотеться стать «зайцем» — бесплатно воспользоваться общественным благом, производимым соседом, не производя самому[8].

Проблемы неэффективности равновесия не существовало бы, если бы фермеры могли принимать решения коллективно — т.е. если можно было бы заставить каждого фермера не отклоняться от принятого коллективного решения ставить пугало. Существование общественных благ, требующих решения проблемы коллективных действий, есть одна из основных причин возникновения государств. Значительная часть государственных бюджетов

[8] Величина b отражает технологию производства общественных благ. Если $b = a$, то наличие пугала хотя бы на одном участке гарантирует урожай на обоих участках. Возможная аналогия — производство знаний, например, если две фирмы разрабатывают новую технологию производства виджетов или если два ученых независимо друг от друга доказывают одну и ту же теорему. Если $b = a/2$, то мы говорим о линейной технологии, когда каждая дополнительная единица произведенного общественного блага увеличивает выигрыш игроков на одинаковую величину. Наконец, если $b = 0$, то мы имеем технологию «слабое звено», когда производство общественного блага невозможно без участия всех заинтересованных сторон.

большинства стран тратится именно на производство общественных благ [Мюллер, 2007, гл. 2–3; Hindricks, Myles, 2006, ch. 5].

Нормы поведения. Давным-давно, в далекой-далекой губернии, среди бескрайних глухих лесов, вдали от дорог и другого человеческого жилья стояла деревня Гадюкино. А времена были страшные, не то, что сейчас. По лесам и по дорогам шастали банды разбойников — лихих людей, зарабатывавших себе на жизнь грабежом и насилием. И вот, в Гадюкино пришла беда. Несколько разбойников зашли в деревню в надежде поживиться чем-нибудь. В деревне стояли всего два дома, их хозяев звали Петр и Фома. Когда пришли нехорошие люди, каждый хозяин сидел у себя дома. Что делать Петру и Фоме? Если они оба выйдут разбираться с бандитами, то у них должно хватить сил прогнать непрошенных гостей. Если выйдет кто-то один, то его убьют, а его дом разграбят (зато дом другого останется нетронутым). Если оба останутся сидеть дома, то бандиты сначала разграбят дом Петра, а потом примутся за Фому. Бандиты знали, что функции полезностей у двух деревенских жителей дают им такую матрицу выигрышей:

		Фома	
		Сидеть дома	Выйти разбираться
Петр	Сидеть дома	1; 1	4; 0
	Выйти разбираться	0; 4	3; 3

Получается, что Петр и Фома стоят перед дилеммой заключенного, и будут вынуждены остаться дома и дать себя ограбить. Таков и был расчет бандитов — как этих, так и всех других преступников и до, и после. Те, за чей счет живут преступники, могут быть сильны и многочисленны, но часто бывают неспособны организованно противостоять чужому произволу.

Однако на этот раз бандиты ошиблись. Отец Петра всегда учил своего сына, что стыдно и нехорошо оставлять своего друга в беде. «Умирай, а товарища выручай» — так говорил великий полководец Александр Васильевич Суворов, в чьих войсках когда-то служил Петров дедушка, передавший эту военную мудрость своим потомкам. Петр понимает, что если Фома выйдет на улицу разбираться с бандитами, то его долг — помочь своему соседу. Если он не станет помогать, то он, Петр, будет не мужик. Моральный ущерб от такого неблагородного поступка Петр оценивает в 2 ед. полезности. Фома получил точно такое же воспитание, так что теперь матрица выигрышей у двух соседей такова (изменения выделены жирным шрифтом):

		Фома	
		Сидеть дома	Выйти разбираться
Петр	Сидеть дома	1; 1	**2**; 0
	Выйти разбираться	0; **2**	3; 3

На этот раз в игре существуют два равновесия. В одном оба соседа остаются дома, в другом — помогают друг другу; в последнем случае бандитов может ожидать неприятный сюрприз в виде организованного сопротивления со стороны жителей деревни.

Это — простой пример того, как человеческие представления о правильном и неправильном поведении, влияя на выигрыши людей, в итоге могут оказывать влияние и на их равновесное поведение. Все люди в той или иной степени следуют *нормам поведения* — негласным правилам, нарушение которых несет внутренний дискомфорт.

Очень часто эти правила помогают обществу более эффективно функционировать. В общественном транспорте принято уступать место пожилым людям. Любому автовладельцу знакомо понятие «культуры вождения» — негласных правил, которые принято соблюдать на дороге для того, чтобы облегчать жизнь себе и другим участникам движения, и делать вождение более безопасным. В некоторых странах (в большей степени, чем в некоторых других) принято не врать, не давать или не брать взятки, платить налоги, возвращать владельцу потерянные вещи. Экономическое благополучие страны напрямую связано с тем, насколько каждый ее гражданин готов ограничивать свое сиюминутное желание обогатиться за счет другого. Если люди готовы друг друга не обманывать, то транзакционные издержки при ведении совместных проектов ниже: не надо тратить время и силы на то, чтобы друг друга контролировать и друг за другом следить. При низких транзакционных издержках людям легче решать проблему коллективных действий.

С нормами поведения связано *доверие* людей друг к другу. Процент людей, которые в данной стране положительно отвечают на вопрос: «Считаете ли вы, что большинству людей можно доверять или надо быть осторожными в отношениях с людьми?» — положительно связан с тем, насколько в ней соблюдаются различные нормы поведения.

Следование нормам поведения, наряду с доверием, является одним из индикаторов *социального капитала* — способности людей действовать организованно в общих интересах. Другие важные компоненты социального капитала — вовлеченность людей в различные добровольные ассоциации: клубы по интересам, религиозные общины, неправительственные организации и т.д.

Почему в одних странах социальный капитал выше, чем в других? Скорее всего, важны как исторические и культурные факторы, так и недавние экономические и политические события. В пользу первого свидетельствует, например, хорошо изученный пример Италии. На более развитом и более преуспевающем севере страны граждане больше доверяют друг другу и чаще участвуют в политической и гражданской жизни страны, чем на юге. На севере выше и различные показатели качества работы государства [9].

Одна из возможных причин отставания юга Италии от севера — разная история. Юг в течение долгого времени, начиная с Раннего Средневековья, был частью различных централизованных монархических государств. В свою очередь, в истории севера Италии был период, когда крупные города являлись центрами республик, в которых часть населения была вовлечена в политическую жизнь. Люди были вынуждены учиться друг с другом договариваться. Это, по всей видимости, оставило отпечаток на культуре, который мы видим и по сей день.

С другой стороны, есть свидетельства, что социальный капитал накапливается (или, напротив, исчезает) под действием экономических обстоятельств. Высокий уровень благосостояния может заставить человека считать, что мир справедлив, и, как следствие, люди заслуживают доверия. Кроме того, более обеспеченный человек может меньше бояться рисковать — так как потеря части дохода не приведет к серьезной угрозе его личной безопасности. В целом, ученые пока не понимают до конца, как формируется культура человеческих взаимоотношений в обществе и насколько быстро она может меняться. Это — очень интересная область современной науки.

1.2. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Вспомним игру «камень-ножницы-бумага». В такой игре на каждую чистую стратегию имеется своя «оборотка». «Камень» бьет «ножницы», «ножницы» — «бумагу». Следовательно, если я буду знать, что мой соперник собирается выбросить «ножницы», то я должен сыграть «камень». Зная это, он сыграет «бумагу», на что я должен ответить, сыграв «ножницы». Равновесия Нэша в такой игре, очевидно, нет. Что делать игрокам? Можем ли мы как-то прогнозировать их действия? Для анализа таких игр необходимо расширить определение игры, разрешив *смешанные стратегии*.

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ

Предположим теперь, что у каждого игрока есть генератор случайных чисел, который говорит ему, какую из стратегий ему следует выбрать. Например, при наличии двух стратегий человек может подбрасывать монетку; в таком случае, вероятность того, что он сыграет каждую стратегию, равна 50%. Другим игрокам известна эта вероятность, однако наблюдать,

[9] Классическая работа, в которой сравниваются север и юг Италии — книга американского социолога Роберта Патнэма [1996]. Пример Италии рассматривался и во многих последующих научных работах.

как упала монета — орлом или решкой — они не могут. В этом случае мы говорим, что игрок i пользуется смешанной стратегией. Игрок решает, с какой вероятностью он должен выбрать каждую из своих стратегий из множества S_i, которые мы будем теперь называть *чистыми стратегиями*. Заметим сразу, что чистая стратегия — это частный случай смешанной стратегии, в котором один из элементов S_i выбирается с вероятностью 100%. Как мы опишем множество смешанных стратегий игрока? Например, в игре «камень-ножницы-бумага» у каждого игрока есть всего три чистых стратегии. Если p_1 — вероятность, с которой играется «камень», а p_2 и p_3 — вероятности для «ножниц» и «бумаги» соответственно, то мы должны иметь $p_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Формально, множество всех (p_1, p_2, p_3), удовлетворяющих этим свойствам, называется *двумерным симплексом*. Дадим два определения.

Определение 1.9. Пусть N — натуральное число. Тогда *симплекс* размерности $N-1$ есть множество $\Delta^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$, состоящее из всех $(p_1, \ldots, p_N) \in \Delta^{N-1}$ таких, что $\sum_j p_j = 1$, $p_j \geqslant 0$.

Получается, что $(N-1)$-мерный симплекс описывает все возможные распределения вероятностей на множестве из N элементов. Размерность Δ^{N-1} на единицу меньше N из-за ограничения $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Одномерный симплекс — это отрезок $[0, 1]$. Если $x \in [0, 1]$, то первый элемент множества выбирается с вероятностью x, второй элемент — с вероятностью $1 - x$.

Определение 1.10. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — конечная игра. Назовем $\Delta^{|S_i|-1}$ множеством *смешанных стратегий* игрока i, $\prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ — множеством профилей смешанных стратегий. Элементы $\sigma_i \in \Delta^{|S_i|-1}$, $\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta^{|S_j|-1}$ и $\sigma \in \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ будут называться смешанными стратегиями и профилями (во втором и третьем случаях) смешанных стратегий.

Иными словами, смешанная стратегия — это распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. Мы предполагаем, что игрок имеет возможность предоставить выбор чистой стратегии (или действия) воле случая, но при этом контролировать вероятность, с которой реализуется та или иная чистая стратегия. Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что действия любых двух игроков являются независимыми событиями. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_N)$ — профиль чистых стратегий, σ — профиль смешанных стратегий, в котором игрок i играет чистую стратегию s_i с вероятностью $\sigma_i(s_i)$. Тогда вероятность того, что при профиле смешанных стратегий σ будет сыгран профиль чистых стратегий s, будет

$$\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} \sigma_i(s_i), \tag{1.27}$$

а математическое ожидание выигрыша игрока i —

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\, u_i(s). \tag{1.28}$$

Теперь мы можем определить игру, в которой игроки могут пользоваться смешанными стратегиями.

Определение 1.11. Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Назовем игру $\left\langle I,\ \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1},\ u\right\rangle$ *смешанным расширением* игры G. Тогда равновесие в смешанных стратегиях в игре G — это равновесие Нэша в ее смешанном расширении $\big($и функция $u\colon \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1} \to \mathbb{R}$ является продолжением функции $u\colon S \to \mathbb{R}\big)$.

В нашем определении u обозначает функцию выигрышей в игре как с чистыми стратегиями, так и со смешанными стратегиями. В этом нет противоречия, так как чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

1.2.2. РАВНОВЕСИЕ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Существует следующий результат, принадлежащий американскому математику Джону Нэшу, одному из основателей теории игр.

Теорема 1.1 [Nash, 1950]. *Пусть G — конечная игра. Тогда в игре G существует равновесие в смешанных стратегиях.*

Эта теорема — один из наиболее важных результатов в современной науке об обществе. Фактически он означает, что равновесие Нэша является универсальным инструментом, который можно использовать для анализа любого игрового взаимодействия с конечным числом игроков и стратегий [10].

Доказательство этой теоремы содержится в приложении к этой главе. Рассмотрим, какие равновесия в смешанных стратегиях существуют для различных игр 2×2.

Пример нахождения смешанного равновесия в игре типа «инспекция». Финал Уимблдонского турнира, Роджер Федерер против Рафаэля Надаля. Федерер стоит на задней линии и собирается отбить мяч, посланный ему Надалем. Федерер решает, в какую сторону ему отбить мяч: направо вдоль края корта (DL) или налево наискосок (CC). Одновременно Надаль пытается угадать направление, в котором полетит мяч. Он также может побежать отбивать подачу прямо, вдоль края корта (DL) или наискосок налево (CC, см. рис. 1.5).

[10] Мы предположили, что игроки разыгрывают чистые стратегии независимо друг от друга. Если ослабить это предположение, то можно сформулировать так называемое *коррелированное равновесие*, частным случаем которого является равновесие Нэша.

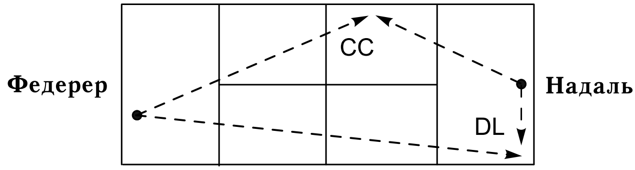


Рис. 1.5. Игра в теннис

Оба очень хорошо играют в теннис. Пока Федерер не ударит, Надаль не побежит отбивать: иначе Федерер ударит в другую сторону и выиграет гейм. Но если Надаль будет ждать, пока Федерер нанесет удар, то он тоже проиграет, так как удары в профессиональном теннисе очень сильные. Таким образом, оба игрока одновременно решают, что им делать. При этом множества чистых стратегий у Федерера и у Надаля одинаковы: $S_1 = S_2 = \{\mathtt{CC}, \mathtt{DL}\}$. Выигрыш Федерера равен вероятности того, что он выиграет розыгрыш, выигрыш Надаля равен вероятности того, что этого не произойдет. Следовательно, сумма выигрышей обоих игроков не зависит от профиля стратегий. Записывая матрицу выигрышей в такой игре, для каждого профиля стратегий достаточно указать только выигрыш первого игрока. В нашем случае матрица будет такой:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0,5	0,8
	CC	0,9	0,2

Если Надаль правильно угадывает направление удара, то он имеет хорошие шансы отбить мяч — очень хорошие, если Федерер бьет наискосок. Но если Надаль не угадывает, то вероятность того, что он сумеет «догнать» мяч и спасти игру, невелика. Эта игра не имеет равновесий в чистых стратегиях и принадлежит к тому же классу игр, как и игра контролера с зайцем.

Найдем равновесие в смешанных стратегиях. Пусть $p \in [0,1]$ — смешанная стратегия Федерера, т.е. вероятность того, что он ударит вдоль края корта (DL). Аналогично, обозначим через $q \in [0,1]$ вероятность того, что Надаль побежит отбивать в этом же направлении. Найдем математическое ожидание выигрышей обоих игроков:

$$u_F(p,q) = \quad 0{,}5\,p\,q + 0{,}8\,p\,(1-q) + 0{,}9\,(1-p)\,q + 0{,}2\,(1-p)(1-q), \quad (1.29)$$

$$u_N(p,q) = -0{,}5\,p\,q - 0{,}8\,p\,(1-q) - 0{,}9\,(1-p)\,q - 0{,}2\,(1-p)(1-q). \quad (1.30)$$

Найдем равновесие в этой игре. Предположим, что q известно Федереру. Тогда его максимизационная задача будет

$$\max_{p\in[0,1]} u_F(p,q), \qquad (1.31)$$

а ее решение —

$$\check{p}(q) = \begin{cases} 1, & q < 0{,}6; \\ [\,0{,}1], & q = 0{,}6; \\ 0, & q > 0{,}6. \end{cases} \tag{1.32}$$

Аналогично для Надаля: задача

$$\max_{q \in [0,1]} u_N(p, q) \tag{1.33}$$

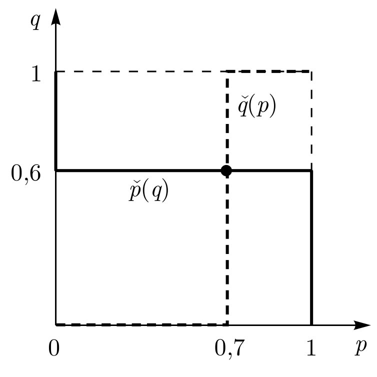
имеет решение

$$\check{q}(p) = \begin{cases} 1, & p > 0{,}7; \\ [\,0{,}1], & p = 0{,}7; \\ 0, & p < 0{,}7. \end{cases} \tag{1.34}$$

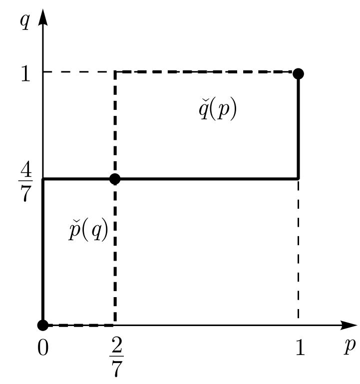
Функции $\check{p}(q)$ и $\check{q}(p)$ являются функциями реакции двух игроков. Равновесие Нэша будет являться решением системы

$$\begin{aligned} \check{p}(q) &= p, \\ \check{q}(p) &= q. \end{aligned} \tag{1.35}$$

На рис. 1.6, *а* изображены графики функций реакции обоих игроков. Эти графики имеют единственную точку пересечения $(p^*, q^*) = (0{,}7; 0{,}6)$. Это и есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Таким образом, Федерер в равновесии будет играть DL с вероятностью 0,7 и CC с вероятностью 0,3, а Надаль — DL с вероятностью 0,6 и CC с вероятностью 0,4.



а) Игра в теннис



б) Битва полов

Рис. 1.6. Функции реакции для различных игр 2×2

Равновесие в смешанных стратегиях в игре «семейный спор». Муж и жена решают, как им следует провести вечер. Обсуждаются два варианта: футбол и балет. Мужу больше нравится футбол, жене — балет. При этом они хотят быть вместе: если они идут в разные места, то вечер пропадает. Матрица выигрышей в нашей игре будет

		Жена балет	футбол
Муж	балет	3; 5	0; 0
	футбол	0; 0	4; 2

Этот классический пример, называющийся «семейный спор», является координационной игрой: сразу видно, что существуют два равновесия в чистых стратегиях. Но существуют ли равновесия в смешанных стратегиях? Пусть p и q — вероятности, с которыми муж и жена выбирают балет. Тогда их выигрыши будут

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= 3\,p\,q + 4\,(1-p)(1-q), \\ u_2(p,q) &= 5\,p\,q + 2\,(1-p)(1-q), \end{aligned} \tag{1.36}$$

а их функции реакции —

$$\check{p}(q) = \begin{cases} 1, & q > 4/7; \\ [\,0{,}1], & q = 4/7; \\ 0, & q < 4/7; \end{cases} \qquad \check{q}(p) = \begin{cases} 1, & p > 2/7; \\ [\,0{,}1], & p = 2/7; \\ 0, & p < 2/7. \end{cases} \tag{1.37}$$

У этой игры три равновесия: два в чистых стратегиях ($p = 1$, $q = 1$ и $p = 0$, $q = 0$) и одно равновесие в смешанных стратегиях: $p = 2/7$, $q = 4/7$ (рис. 1.6, *б*). Отметим, что небольшие изменения матрицы выигрышей не влияют на существование равновесий в чистых стратегиях. В частности, профиль стратегий (балет; балет) перестанет быть равновесием, если выигрыш мужа при этом профиле стратегий будет меньше нуля. В общем случае существование равновесия в чистых стратегиях определяется условиями типа неравенств (см. задачу 1.3); для того чтобы (балет; балет) являлся равновесием в чистых стратегиях, нам необходимо и достаточно, чтобы выигрыш мужа был выше, чем при (футбол; балет), и выигрыш жены был выше, чем при (балет; футбол). В то же время для того, чтобы найти равновесие в смешанных стратегиях, нам необходимо знать точные значения выигрышей обоих игроков.

Важные свойства равновесия. В смешанном расширении конечной игры выигрыш каждого игрока является линейной функцией от вероятности сыграть ту или иную стратегию. Благодаря этому факту равновесие в смешанных стратегиях обладает свойствами, которые могут пригодиться при его нахождении в некоторых играх. Во-первых, игроку безразлично, какую из своих чистых стратегий играть в равновесии:

Лемма 1.6. *Пусть* $G = \langle I, S, u\rangle$ *— игра,* σ^* *— равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Пусть* $S_i^{\sigma_i^*} \subseteq S_i$ *— носитель стратегии* σ_i^**,* *т.е. множество всех чистых стратегий, играемых с положительной вероятностью при смешанной стратегии* σ_i^*. *Тогда для всех* $s_i \in S_i^{\sigma_i^*}$

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*), \tag{1.38}$$

а для всех $s_i' \notin S_i^{\sigma_i^*}$

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) \leqslant u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*). \tag{1.39}$$

Действительно, допустим, что это не так. Пусть σ^* — равновесие в смешанных стратегиях, причем стратегии $s_1, s_1' \in S_i$ играются с вероятностями $p > 0$, $p' > 0$. Пусть $u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) > u_i(s_1', \sigma_{-i}^*)$. Легко проверить, что стратегия σ_i', которая отличается от σ_i^* тем, что s_1 играется с вероятностью $p + p'$, а s_1' — с вероятностью 0, дает выигрыш, больший на $p'(u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) - u_i(s_1', \sigma_{-i}^*))$. Это противоречит предположению о том, что σ^* — равновесие Нэша.

Во-вторых, при переходе от игры к ее смешанному расширению равновесия в чистых стратегиях сохраняются:

Лемма 1.7. *Пусть в конечной игре* G *существует равновесие* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_N^*)$. *Тогда в смешанном расширении игры* G *существует равновесие, в котором игрок* i *играет стратегию* s_i^* *с вероятностью 1.*

В задаче 1.9 предлагается доказать это утверждение.

Игра «выбор чисел». С Курского вокзала отправляется электричка, состоящая из K вагонов. В игре участвуют два игрока: безбилетник и контролер. Каждый выбирает целое число от 1 до K и заходит в вагон с соответствующим номером. При совпадении вагонов контролер штрафует безбилетника, получая одну условную единицу выигрыша (безбилетник проигрывает столько же). Если выбранные двумя игроками вагоны не совпадают, то безбилетник благополучно выходит на следующей остановке. При этом и безбилетник, и контролер получают по 0 единиц.

Найдем равновесие в смешанных стратегиях (сразу заметив, что чистых равновесий в этой игре нет). Пусть $\sigma_1 = (p_1, \ldots, p_K)$ — смешанная стратегия игрока 1 (контролера), где p_l — вероятность того, что он проверит вагон $1 \leqslant l \leqslant K$. Аналогично определим $\sigma_2 = (q_1, \ldots, q_K)$ — смешанную стратегию безбилетника (по определению смешанной стратегии $\sum_i p_i = 1$, $\sum_i q_i = 1$). Выигрыши игроков в зависимости от их смешанных стратегий будут

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=1}^{K} p_l\, q_l, \tag{1.40}$$

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = -\sum_{l=1}^{K} p_l\, q_l. \tag{1.41}$$

Найдем функцию наилучшего отклика для игрока 1. Если $q_1 = \ldots = q_K$, то игроку 1 все равно, какую стратегию выбрать. Пусть для каких-то l, k выполняется $q_l > q_k$. Тогда если $p \in \check{p}(q)$, то мы не можем иметь $p_k > 0$, ибо стратегия p', в которой $p'_l = p_k + p_l$, $p'_k = 0$ и $p'_j = p_j$ для $j \neq k, l$, будет давать игроку 1 больший выигрыш. В то же время, если для k, l мы имеем $q_k = q_l = \max_i q_i$, то выигрыш игрока 1 будет одинаков для стратегий p и p' таких, что $p_j = p'_j$ для всех $j \neq k, l$. То есть функция реакции игрока 1 будет

$$\check{p}(q) = \left\{ p \,\Big|\, \sum p_k = 1,\, p_k \geqslant 0;\ \text{причем } p_k = 0, \text{ если } \ q_k < \max_j q_j \right\}. \quad (1.42)$$

Аналогично, игрок 2 назовет число l с положительной вероятностью, только если игрок 1 играет это число с минимальной вероятностью:

$$\check{q}(p) = \left\{ q \,\Big|\, \sum q_k = 1,\, q_k \geqslant 0;\ \text{причем } q_k = 0, \text{ если } \ p_k > \min_j p_j \right\}. \quad (1.43)$$

Можно доказать (задача 1.8), что у системы $p \in \check{p}(q)$, $q \in \check{q}(p)$ есть единственное решение: $p = q = \left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right)$. В равновесии и безбилетник, и контролер с равной вероятностью будут посещать все вагоны.

1.2.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ И РАВНОВЕСИЙ

Понятие смешанной стратегии — одно из часто критикуемых мест теоретико-игрового подхода к анализу человеческого поведения. Почему мы вообще имеем право предполагать, что люди (или организации) принимают решения случайным образом? В нашем понимании место генераторов случайных чисел — настольные игры и казино; за их пределами все наши решения кажутся продуманными, а не продиктованными кубиком или колесом рулетки. Однако существует несколько причин, оправдывающих использование смешанных стратегий при моделировании поведения людей и организаций. Во-первых, существуют доказательства использования смешанных стратегий людьми. Во-вторых, смешанные стратегии можно интерпретировать как чистые статегии в играх с большим числом игроков. И в-третьих, мы будем расценивать чье-то поведение как случайное тогда, когда мы не обладаем всей полнотой информации о целевой функции этого человека; с его же собственной точки зрения, его поведение будет детерминировано[11].

Примеры использования смешанных стратегий в жизни. Бересфорд и Пестон [1955] приводят пример использования смешанной стратегии одним британским офицером. Во время колониальной войны в Малайзии

[11] См. статью Рубинштейна [Rubinstein, 1991], где обсуждается интерпретация смешанных равновесий.

в конце 1940-х годов британские войска несли потери от партизанских атак на их сухопутные конвои с продовольствием и оружием. Партизаны могли либо устроить конвою крупную засаду, либо подвергнуть его нескольким мелким снайперским атакам с целью деморализации водителей, которых британцы набирали из местного населения. Соответственно, британцы могли либо сосредоточить свои силы посередине конвоя (что было более эффективно при отражении крупных атак), либо рассредоточиться (что было более эффективно в борьбе против снайперов). Каждый раз перед отправкой конвоя командир тянул жребий, с вероятностью 50% выбирая каждую из двух возможных тактик[12]. Хотя британский офицер не знал теории игр, он понимал необходимость быть непредсказуемым, чтобы не дать партизанам возможность прогнозировать действия британцев и оптимально реагировать на них.

Случаи, когда использование смешанных стратегий было задокументировано, довольно редки. Можно ли доказать использование смешанных стратегий, основываясь на наблюдениях за стратегиями, выбираемыми игроками, а не за механизмом принятия решения, как это было в случае, описанном выше? Для этого необходим большой объем наблюдений. Нужно, чтобы действия двух или более игроков наблюдались в похожих условиях много раз подряд. Хорошим источником таких данных является спортивная статистика.

Уокер и Вудерс [Walker, Wooders, 2002] исследовали игру теннисистов в 10 матчах — финалах турниров Большого шлема. Насколько поведение элитных игроков, среди прочих, Андре Агасси, Пита Сампраса, Бьерна Борга, соответствует нашему представлению о равновесных стратегиях? Авторы изучили, как вероятность выиграть подачу в отдельно взятом матче зависит от направления подачи: под правую руку или под левую. Если гипотеза о равновесном поведении подающего и принимающего игроков верна, то вероятность выиграть должна быть одинаковой для обоих направлений подачи. К такому выводу и пришли авторы.

Чиапоре, Левитт и Гросеклоуз [Chiappore, Levitt, Groseclose, 2002] провели анализ поведения голкиперов и форвардов во время исполнения пенальти. Большинство голкиперов не успевает реагировать на направление полета мяча; как и при теннисной подаче, голкипер вынужден угадывать, в какой угол (или, может быть, в центр ворот) полетит мяч. В этой работе использовались иные статистические методы, ибо в теннисе один матч между двумя игроками создает достаточно наблюдений для статистически значимых выводов, в то время как в футболе количество взаимодействий между каждой парой форвард–голкипер весьма невелико, даже на протяжении нескольких сезонов. Тем не менее авторы показали, что стратегии и вратарей, и форвардов близки к равновесным.

[12] Эта история также приводится в работе [Dixit, Skeath, 2004].

Смешанные стратегии в лабораторных экспериментах. В ходе экономического эксперимента подопытные добровольцы много раз подряд играют в одну и ту же игру в тщательно контролируемых условиях; на основе стратегий, выбираемых субъектами эксперимента, можно сделать вывод о виде стратегий, которые они используют. Полфри и Арагонес [Aragones, Palfrey, 2004] исследовали поведение субъектов в игре, моделирующей поведение политиков, претендующих на президентский пост на демократических выборах. У каждого из двух игроков было по три стратегии: предложить избирателям центристскую, левую, или правую политическую программу (задача 1.18). Игра не была симметричной: каждый из кандидатов являлся либо «сильным», либо «слабым». Если оба кандидата выбирали одинаковые стратегии, то слабый кандидат проигрывал выборы вчистую. Если стратегии у кандидатов были разные, то слабый кандидат мог проиграть с меньшим отставанием (что подразумевало больший выигрыш) или даже выиграть выборы (если он занимал центристскую позицию, а сильный кандидат — одну из двух крайних). В этой игре, как и в игре «инспекция», не существует равновесий в чистых стратегиях; оставалось выяснить, будут ли субъекты эксперимента действительно играть смешанные стратегии.

Субъектами эксперимента являлись студенты Калифорнийского технологического института и Института экономического анализа в Барселоне; участие в эксперименте оплачивалось наличными. В каждой экспериментальной сессии участвовало от 8 до 16 человек, поделенных на две группы — сильные и слабые кандидаты. В каждом из первых 50 раундов каждый слабый кандидат проводил одну игру с выбранным наугад (и неизвестным ему) сильным кандидатом. Далее сильные и слабые кандидаты менялись местами, и разыгрывалось еще 50 раундов. В конце сессии каждый из субъектов получал денежный выигрыш, равный сумме выигрышей, полученных им в 100 раундах (для американских вузов средний выигрыш от участия в экономических экспериментах составляет порядка 25 долларов). Эксперимент показал, что игроки действительно используют смешанные стратегии; при этом, однако, частота использования различных чистых стратегий не всегда была равна равновесной, в особенности для слабых кандидатов (которые чаще, чем было предсказано равновесием Нэша, выбирали центристскую стратегию).

Отмечено, что и в спортивных соревнованиях, и в экспериментах игроки скорее чередуют стратегии, нежели каждый раз делают действительно случайный выбор, независимый от сделанного в предыдущий раз. Например, анализ теннисных подач показал, что если игрок в предыдущий раз подавал налево, то в следующий раз он с большей вероятностью подаст направо. Однако их противники тоже ошибались, воспринимая это как случайное поведение. Они не эксплуатировали тот факт, что направление каждой подачи отрицательно коррелирует с направлением предыдущей подачи: им самим казалось, что никакой корреляции не было.

Большое число игроков. Смешанные равновесия в игре с небольшим числом игроков могут описывать равновесия в чистых стратегиях в тех случаях, когда игроков на самом деле много. Рассмотрим, например, игру между безбилетником и контролером на с. 32. Напомним, что в этой игре существует единственное равновесие в смешанных стратегиях, в котором каждый из двух игроков с равной вероятностью выбирает одно из двух действий (садиться в первый или во второй вагон поезда). Предположим, что и безбилетник, и контролер могут играть только чистые стратегии, но безбилетников и контролеров много — скажем, несколько тысяч. Если в один поезд садятся один безбилетник и один контролер, то для безбилетника, столкнувшегося с неизвестным ему контролером, эта ситуация эквивалентна встрече с контролером, играющим равновесную смешанную стратегию. То же самое верно и для контролера; с точки же зрения стороннего наблюдателя, и безбилетник, и контролер оба играют смешанные стратегии. Такая интерпретация удобна, но не всегда уместна: иногда число игроков в моделируемой ситуации действительно мало́ (например, если речь идет о международном конфликте), либо мы не имеем права предполагать, что игроки сталкиваются друг с другом впервые («семейный спор»).

Смешанные стратегии как следствие ненаблюдаемых выигрышей игроков. Смешанные стратегии могут быть следствием того, что выигрыш игрока в зависимости от реализуемой им стратегии может быть известен ему одному. Рассмотрим пример на с. 22. Маша и Андрей должны выбрать одно из двух мест встречи; если их выбор совпадает, то каждый из них получает единичный выигрыш, если выбор не совпадает, то выигрыш каждого равен нулю. В этой игре существуют три равновесия: два — в чистых стратегиях (каждое из которых соответствует одному из мест встречи) и одно — в смешанных (в нем каждый из двух игроков выбирает одно из двух мест встречи с равной вероятностью). Как можно объяснить существование третьего равновесия? Предположим, что итоговый выигрыш Андрея от места встречи, которое он выбрал, зависит от ненаблюдаемых Машей вещей — например, от того, с какой ноги Андрей встал сегодня утром. Если Андрей встал с левой ноги, то он будет отдавать предпочтение встрече у метро, если с правой — то встрече у театра. В таком случае с точки зрения Маши он будет играть смешанную стратегию, а со своей собственной точки зрения — чистую. Маша действует точно так же; оба игрока при этом поступают рационально, но (с точки зрения стороннего наблюдателя) при этом действуют случайным образом. Более подробно об этом примере и об играх с ненаблюдаемыми выигрышами мы будем говорить в третьей главе этой книги.

1.2.4. СМЕШАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЕ $2\times M$

Важный подкласс игр составляют игры, в которых сумма выигрышей игроков одинакова, вне зависимости от профиля стратегий, выбираемого игроками.

Определение 1.12. Игра $G = \langle I, S, u\rangle$ является *игрой с постоянной суммой*, если

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(s) = c \tag{1.44}$$

для некоторого c и всех $s \in S$. Если $N = 2$, то такая игра называется *антагонистической*.

Такие игры часто также называют *играми с нулевой суммой*. Действительно, если мы вычтем c из функции выигрыша одного из игроков, то игра почти не изменится, так как не изменится функция реакции этого игрока. В то же время сумма выигрышей всех игроков будет равна нулю. В данном случае название — это вопрос вкуса; примерами игр с нулевой суммой являются салонные игры, игры типа «инспекция», предвыборная борьба (в том случае, если издержки политиков не зависят от их действий), заключение опционных контрактов на фондовом рынке. Существование равновесия и многие другие результаты для этого класса игр были получены великим математиком Джоном фон Нейманом (см. книгу [Фон Нейман, Моргенштерн, 1970]).

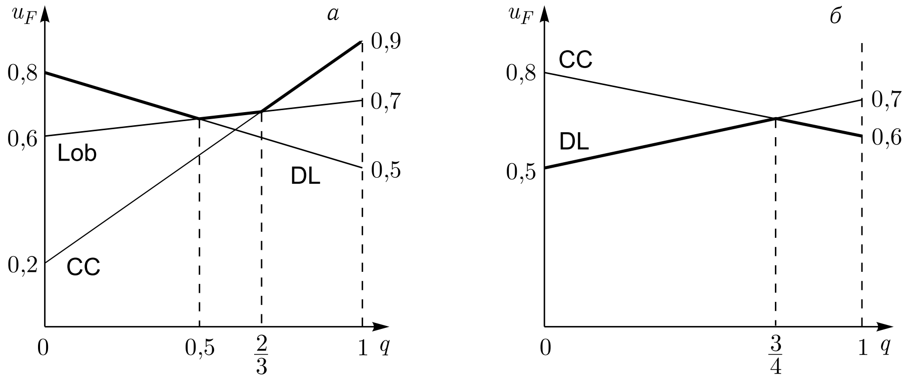
Рассмотрим пример с игрой в теннис. Пусть в арсенале у Федерера есть еще один удар: Lob («свеча»). Матрица игры теперь такая:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0,5	0,8
	CC	0,9	0,2
	Lob	0,7	0,6

На рис. 1.7, *а* показано, как выигрыш Федерера зависит от смешанной стратегии Надаля q для каждой из трех чистых стратегий Федерера, где q, как и раньше, есть вероятность того, что Надаль сыграет DL.

Жирная ломаная линия показывает максимальный выигрыш, который может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля q. По этому графику можно построить функцию реакции Федерера. Если $q < 1/2$, то Федерер играет DL; если $q = 1/2$ — то любую смесь DL и Lob; если $q \in \left(1/2; 2/3\right)$ — то Lob; если $q = 2/3$ — то смесь Lob и CC, если $q > 2/3$ — то CC.

Так как эта игра является антагонистической, то в равновесии стратегия Надаля должна минимизировать максимальный выигрыш Федерера.



а) Для смешанной стратегии Надаля q и разных чистых стратегий Федерера

б) Для смешанной стратегии Федерера p и разных чистых стратегий Надаля

Рис. 1.7. Нахождение равновесия при трех чистых стратегиях у Федерера

Действительно, предположим, что в равновесии $q \neq 1/2$. Тогда (предполагая равновесие) выигрыш Федерера будет максимальным для данного q, например, при $q < 1/2$ Федерер будет играть DL. Но это означает, что Надаль может увеличить свой выигрыш, выбрав стратегию $q = 1/2$. Таким образом, $q = 1/2$. Нам остается найти пропорции, в которых Федерер играет DL и Lob. На рис. 1.7, *б* показан выигрыш Федерера (равный единице минус проигрыш Надаля) в зависимости от p — вероятности, с которой Федерер играет Lob при разных чистых стратегиях Надаля. Жирная линия — минимальный выигрыш Федерера (и, соответственно, максимальный выигрыш Надаля) в зависимости от p. Из графика видно, что $p = 3/4$.

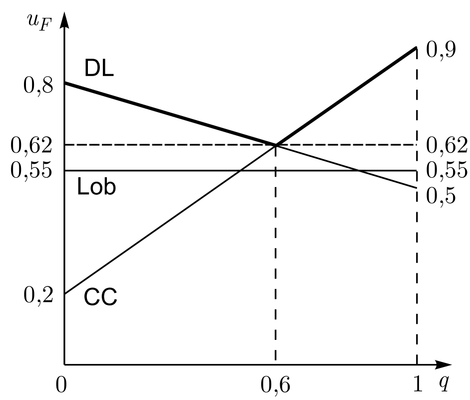


Рис. 1.8. Смешанная стратегия доминирует чистую стратегию

Давайте немного изменим выигрыши игроков:

		Надаль	
		`DL`	`CC`
Федерер	`DL`	0,5	0,8
	`CC`	0,9	0,2
	`Lob`	0,55	0,55

Выигрыш Федерера в зависимости от q показан на рис. 1.8.

Как мы видим, Федерер не станет использовать стратегию `Lob` ни при каких q. Стратегия `Lob` не доминируется ни одной из двух других чистых стратегий; однако она доминируется некоторыми смешанными стратегиями — например, смесью из 70% `DL` и 30% `CC`, которая дает Федереру ожидаемый выигрыш 0,62 вне зависимости от стратегии Надаля. Поэтому мы поступаем с ней, как и с любой другой доминируемой стратегией — вычеркиваем. Она не будет играться ни в одном равновесии, чистом или смешанном (см. задачи 1.7, 1.23).

1.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ

Теорема о существовании равновесия в смешанных стратегиях была доказана для конечных игр: мы предполагали, что у каждого игрока имеется конечное число стратегий. Во многих играх, напротив, удобно считать, что множество стратегий не является конечным или даже счетным. Например, в дуополии Курно стратегия каждой из двух фирм — какое-то неотрицательное действительное число. Это предположение облегчает нам анализ задачи, так как (предполагая дифференцируемость функций выигрышей) мы можем находить равновесия, анализируя локальные максимумы функций выигрышей игроков. Дуополия Курно соответствует следующему определению.

Определение 1.13. Игра $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *непрерывной игрой*, если для всех i множество стратегий S_i является выпуклым подмножеством конечномерного евклидового пространства $\mathbb{R}^{d_i}$, а функция выигрышей $u_i(s)$ является непрерывной по s.

Мы говорим, что множество $X \subset \mathbb{R}^d$ при некотором d является *выпуклым*, если для всех $x, y \in X$ и для всех $\alpha \in (0, 1)$ мы имеем $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X$.

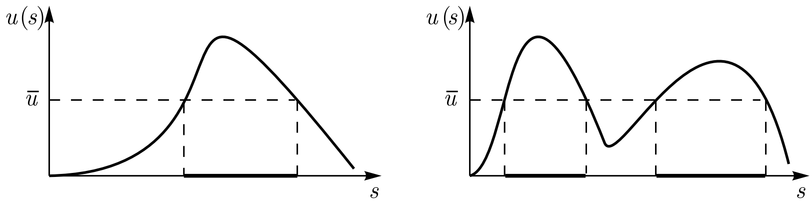
1.3.1. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ

Можем ли мы что-нибудь сказать о существовании равновесий в чистых и смешанных стратегиях в таких играх? Существует несколько теорем, которые обозначают необходимые условия существования равновесий в непрерывных играх. Определим квазивогнутую функцию.

Определение 1.14. Пусть X — выпуклое подмножество конечномерного евклидова пространства. Функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ является *квазивогнутой*, если для всех $\overline{u}$ множество $\{x \mid u(x) \geqslant \overline{u}\}$ является выпуклым.

Легко показать, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой, но не наоборот. Также верно то, что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой (см. задачу 1.10).

Примеры квазивогнутой и не квазивогнутой функций приведены на рис. 1.9.



а) Квазивогнутая функция *б*) Не квазивогнутая функция

Рис. 1.9. Примеры квазивогнутости и ее отсутствия

На рис. 1.9, *а* функция удовлетворяет следующему условию: для данного $\overline{u}$ (как и для любого другого) множество $\{s \mid u(s) \geqslant \overline{u}\}$ (показанное на рисунке) является выпуклым. На рис. 1.9, *б* условия квазивогнутости нарушаются: для данного $\overline{u}$ множество $\{s \mid u(s) \geqslant \overline{u}\}$ является объединением двух отрезков — т.е. оно не выпукло.

На свойство квазивогнутости опирается следующая теорема, доказанная Гликсбергом [Glicksberg, 1952].

Теорема 1.2. *Рассмотрим непрерывную игру $G = \langle I, S, u\rangle$, в которой множества стратегий S_i являются выпуклыми компактами. Предположим, что для каждого игрока i функция выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ является квазивогнутой по s_i для всех $s_{-i} \in S_{-i}$. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.*

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы Нэша (с. 62–64): мы показываем, что точечно-множественное отображение, построенное из функций реакций игроков, удовлетворяет условиям теоремы Какутани и имеет неподвижную точку. Более того, теорема о существовании смешанного равновесия в конечных играх является частным случаем этой теоремы. Действительно, смешанное расширение любой конечной игры является непрерывной игрой, удовлетворяющей условиям теоремы 1.2.

Посмотрим, что произойдет, если условие квазивогнутости функции выигрышей будет нарушено[13].

[13] Точнее, речь идет о полунепрерывности сверху.

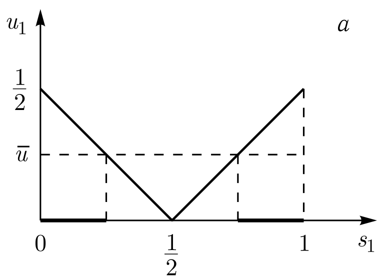
Рассмотрим такой пример. Пусть $S_1 = S_2 = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2) &= |s_1 - s_2|, \\ u_2(s_1, s_2) &= -s_2^2 + \Big(\frac{1}{2} + s_1\Big) s_2. \end{aligned} \tag{1.45}$$

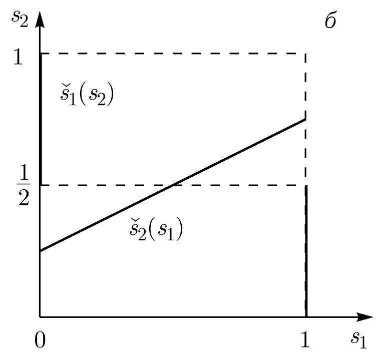
Обе функции выигрышей непрерывны по s_1 и s_2. Однако функция выигрышей первого игрока не является квазивогнутой: из рис. 1.10, *а* видно, что множество значений s_1, при которых $u_1 \geqslant \overline{u}$, не является выпуклым. Функция реакции первого игрока не является непрерывной:

$$\check{s}_1(s_2) = \begin{cases} 0, & s_2 > 1/2; \\ \{0, 1\}, & s_1 = 1/2; \\ 1, & s_2 < 1/2, \end{cases} \qquad \check{s}_2(s_1) = 0{,}25 + 0{,}5\, s_1. \tag{1.46}$$

Графики функций реакции не пересекаются (рис. 1.10, *б*), следовательно, равновесие в чистых стратегиях не существует.



а) Функция выигрышей игрока 1 не является квазивогнутой $\left(s_2 = \frac{1}{2}\right)$



б) Функции реакции игроков не пересекаются

Рис. 1.10. Пример отсутствия равновесия в непрерывной игре

Можем ли мы рассчитывать на существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в бесконечных играх? Оказывается, что для существования равновесия в бесконечных играх нужны дополнительные условия.

Теорема 1.3. *Рассмотрим игру $G = \langle I, S, u \rangle$, в которой множества стратегий S_i являются выпуклыми и компактными подмножествами конечномерных евклидовых пространств $\mathbb{R}^{d_i}$. Предположим, что для каждого игрока i функция выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ является непрерывной по $s = (s_i, s_{-i})$. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.*

Доказательство этой теоремы технически более сложно, чем доказательства предыдущей теоремы и теоремы Нэша, ибо множество смешанных стратегий в непрерывной игре является бесконечномерным. Здесь необходим более сильный результат, чем теорема Какутани. Формулировка и доказательство последнего выходят за рамки этой книги (см. [Glicksberg, 1952]).

1.3.2. ПРИМЕРЫ

Борьба за ренту. Две фирмы соревнуются за право построить магазин на центральной площади города. Для того чтобы получить контракт, необходимо потратить некоторую сумму денег на лоббирование органов власти. Успех не гарантирован — но чем больше денег будет потрачено каждой из фирм, тем больше вероятность того, что именно эта фирма получит контракт. Пусть прибыль, которую может приносить магазин, равна R. Предположим, что вероятность того, что фирма $i = 1, 2$ получит контракт, равна

$$p_i = \frac{r_i^{\gamma}}{r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma}}, \tag{1.47}$$

где r_i — количество средств, потраченное фирмой i, $\gamma \geqslant 0$ — параметр, отражающий эффективность лоббирования. При $r_1 = r_2 = 0$ положим $p_1 = p_2 = 1/2$. Чем выше γ, тем больше преимущество фирмы, затратившей на лоббирование больше средств. Действительно, рассмотрим два крайних случая. Если $\gamma = 0$, то вероятность получить контракт всегда равна $1/2$, вне зависимости от объема средств, потраченных на лоббирование. Если же $\gamma \to \infty$, то контракт с вероятностью 1 достается фирме, которая затратила больше средств на лоббирование.

Получается, что функция выигрышей фирмы $i = 1, 2$ будет

$$u_i(r_1, r_2) = R\,\frac{r_i^{\gamma}}{r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma}} - r_i, \tag{1.48}$$

где $r_i \in [0, \infty)$ — стратегия фирмы i.

В более общем случае мы рассматриваем задачу состязательного распределения ресурса, в которой вероятность приобретения ресурса одной из сторон (либо, в другой постановке, количества ресурса) является функцией от усилий, затраченных в борьбе за этот ресурс. Большой объем литературы в области моделирования состязаний восходит к работам Таллока [Tullock, 1967], Крюгер [Krueger, 1974] и Познера [Posner, 1975]. Лоббирование, коррупция, патентные гонки, спортивные состязания и войны — все это является примерами состязаний, *борьбы за ренту*, или *рентоориентированного поведения*. В таких играх вероятность успеха возрастает с увеличением затрат, однако сами затраты являются *невозвратными* и не возмещаются игроку в случае проигрыша.

Функции выигрышей являются дифференцируемыми по r_1 и r_2. Соответственно, если (r_1, r_2) — равновесие, то в нем должны выполняться необходимые условия первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &= 0 \quad \text{при} \quad r_i > 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &\leqslant 0 \quad \text{при} \quad r_i = 0 \end{aligned} \tag{1.49}$$

для $i = 1, 2$. Второе условие было записано, ибо мы рассматриваем задачу условной максимизации при $r_i \geqslant 0$.

Мы имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = R\,\frac{\gamma\, r_1^{\gamma-1} r_2^{\gamma}}{(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})^2} - 1, \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_2} = R\,\frac{\gamma\, r_2^{\gamma-1} r_1^{\gamma}}{(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})^2} - 1. \tag{1.51}$$

Условия первого порядка дают нам единственное решение:

$$r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}. \tag{1.52}$$

Легко проверить, что условия максимума второго порядка в этой точке будут выполнены. Однако $(r_1^*, r_2^*) = \left(\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4}\right)$ будет равновесием Нэша только при $\gamma \leqslant 2$. В ином случае равновесие не существует, так как $u_1(r_1^*, r_2^*) = \frac{R}{2} - \frac{\gamma R}{4} < 0 = u_1(0, r_2^*)$ (при том, что $(r_1^*, r_2^*) = \left(\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4}\right)$ является *необходимым* условием равновесия). Если $\gamma > 0$, то (r_1^*, r_2^*) является *локальным* равновесием, т.е. в этой точке функция выигрышей каждого игрока имеет локальный (но не обязательно глобальный) максимум на множестве стратегий этого игрока. Функции выигрышей являются квазивогнутыми только при $\gamma \in [0, 1]$. При $\gamma \in (1, 2]$ выигрыши не являются квазивогнутыми (рис. 1.11), но равновесие существует: квазивогнутость функций выигрышей является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия.

Тем не менее равновесие при $\gamma \in (1, 2]$ существует: квазивогнутость функций выигрышей является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия.

Что же происходит? При борьбе за приз оба игрока тратят значительные ресурсы. Например, при $\gamma = 1$, что соответствует обычной лотерее, общий объем затрачиваемых ресурсов будет равен половине от стоимости ресурса. Можно показать (см. задачу 1.30), что при увеличении числа игроков общий объем затрат на лоббирование стремится к ценности самого приза, за который ведется борьба (R в нашей модели). Также объем ресурсов, затрачиваемых на состязательную деятельность, возрастает при улучшении

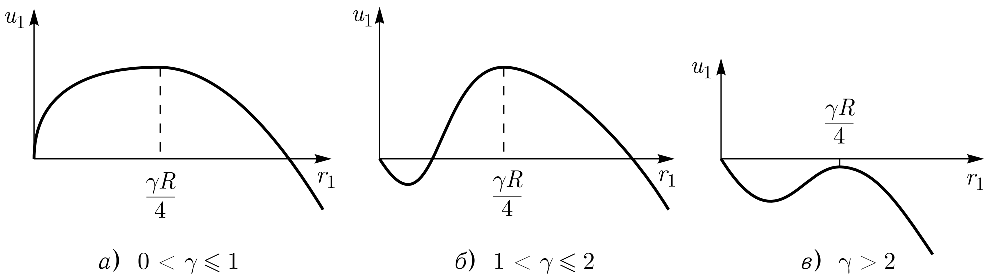


Рис. 1.11. Функция выигрышей игрока 1 в игре «борьба за ренту» при условии, что $r_2 = \dfrac{\gamma R}{4}$

технологии лоббирования (величины γ). Все это — свидетельство того, что при отсутствии прозрачных механизмов распределения лицензий на ведение многих прибыльных видов экономической деятельности (импортные квоты, строительство в условиях ограниченного предложения земли и т.д.) общество несет значительные (и часто невидимые стороннему наблюдателю) потери.

Конкуренция на рынке с горизонтально дифференцированным товаром. Вот пример, восходящий к классической работе Гарольда Хотеллинга [Hotelling, 1929]. На южном морском курорте есть пляж длиной 1 км. На пляже расположены отдыхающие. Будем считать, что отдыхающих — континуум, а их общая масса равна единице. Будем считать, что отдыхающие распределены равномерно: т.е. для каждого $x \in [0, 1]$ доля отдыхающих с координатами $v \leqslant x$ равна x. На пляже находятся два продавца с мороженым. Стратегия каждого продавца i — координата $s_i \in [0, 1]$ расположения тележки, с которой он продает мороженое. Цена у обоих продавцов одинаковая и не зависит от их местоположения.

Предположим, что каждый покупатель в течение дня купит ровно один стакан мороженого. При этом покупатель купит мороженое у того продавца, чья тележка расположена ближе. В случае, если продавцы равноудалены от покупателя, он с равной вероятностью выберет любого из двух продавцов. Пусть выигрыш продавца равен доле покупателей, которые приобрели у него мороженое. Таким образом, выигрыш продавца $i = 1, 2$ равен

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} \dfrac{s_1 + s_2}{2}, & s_1 < s_2, \\ 1/2, & s_1 = s_2, \\ 1 - \dfrac{s_1 + s_2}{2}, & s_1 > s_2. \end{cases} \tag{1.53}$$

Выигрыш второго продавца определяется аналогично. Распределение покупателей между продавцами показано на рис. 1.12.

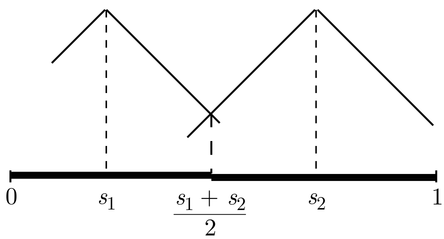


Рис. 1.12. Горизонтальная конкуренция и доли рынка продавцов

На этом рисунке показаны графики двух функций: выигрыш покупателя с данным расположением при покупке у первого и второго продавцов. Покупатель с расположением $(s_1 + s_2)/2$ безразличен к выбору между двумя продавцами; при $s_1 < s_2$ все покупатели с расположением $v < (s_1 + s_2)/2$ приобретут мороженое у продавца 1, все покупатели с расположением $v > (s_1 + s_2)/2$ — у продавца 2.

Легко проверить, что в этой игре существует единственное равновесие, в котором $s_1 = s_2 = 1/2$. Действительно, в равновесии мы не можем иметь $s_1 \neq s_2$. Если без потери общности, $s_1 < s_2$, то любой продавец i может увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s_1, s_2)$. Следовательно, в равновесии $s_1 = s_2 = s$. Но если $s > 1/2$, то любой продавец сможет увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s, 1 - s)$; то же самое верно при $s < 1/2$. Таким образом, мы должны ожидать, что тележки продавцов расположатся рядом, причем их положение будет совпадать с расположением *медианного* покупателя, т.е. такого, что равное число покупателей располагается справа и слева от него.

История с двумя продавцами мороженого — хорошая метафора для рынка с *горизонтально дифференцированным товаром*, или *горизонтальной конкуренции*. Например, главный параметр, по которому отличаются друг от друга современные пассажирские самолеты — это соотношение стоимости самолета и удельных издержек перевозки одного пассажира. С одного конца спектра мы имеем небольшие региональные самолеты; с другого — вместительные и дорогие авиалайнеры, но с низкими эксплуатационными расходами в расчете на одного пассажира. Авиакомпании — потребители самолетов — тоже отличаются друг от друга отчасти по тому, какие самолеты им нужны. Одни компании обслуживают большое число маршрутов с небольшим пассажиропотоком; для таких компаний предпочтительны небольшие самолеты. Другие авиакомпании, эксплуатирующие более загруженные маршруты, предпочтут закупать вместительные самолеты.

Модель предвыборной конкуренции. Модель горизонтальной конкуренции используется при моделировании поведения политических партий или кандидатов на выборах, начиная с известной книги американского политолога Энтони Даунса [Downs, 1957]. Предположим, что в некоторой стране президентский пост оспаривают два кандидата. Стратегией каждого кандидата является его предвыборная программа. Будем считать, что программа описывается одним параметром — степенью ее левизны или правизны. Левая политика означает высокие налоги, значительные затраты на производство общественных благ и социальные программы (такие, как пенсии или помощь малоимущим) за счет налогов, собранных с более состоятельных граждан. Правая политика — низкие налоги и малые затраты на социальную сферу. Пусть $s_1, s_2 \in [0,1]$ — политические программы кандидатов, где $s = 0$ — крайне левая программа, $s = 1$ — крайне правая.

Выигрыш кандидата равен доле голосов избирателей, полученных им на выборах. Пусть для каждого избирателя существует величина $v \in [0,1]$ — политическая программа, которая больше всего ему нравится, или его *наилучшая альтернатива*. Избиратели отличаются друг от друга своими предпочтениями относительно политических программ. Например, наилучшая альтернатива человека со средним достатком будет правее наилучшей альтернативы мало зарабатывающего пенсионера, но левее, чем наилучшая альтернатива бизнесмена. Предположим, что наилучшие альтернативы избирателей равномерно распределены на $[0,1]$.

Будем считать, что избиратель v проголосует за кандидата 1 в том случае, если $|s_1 - v| < |s_2 - v|$ и проголосует за кандидата 2 при $|s_1 - v| \geqslant |s_2 - v|$. В таком случае модель политической конкуренции между двумя кандидатами ничем не будет отличаться от конкуренции между двумя продавцами мороженого, рассмотренной в предыдущем примере. В равновесии оба кандидата станут центристами: $s_1^* = s_2^* = 1/2$. В более общей постановке, когда наилучшие альтернативы избирателей распределены на $[0,1]$ с функцией распределения $F(\cdot)$, т.е. если доля избирателей с наилучшими альтернативами $v \leqslant x$ равна $F(x)$, в равновесии предвыборные программы избирателей будут $s_1^* = s_2^* = F^{-1}(1/2) = v^m$, где программа v^m является наилучшей альтернативой *медианного избирателя*, т.е. это такая альтернатива, что одна половина избирателей имеет более левые взгляды, а другая половина — более правые.

Модель предвыборной конкуренции с идейными кандидатами. В середине 1950-х годов, когда политологи впервые попытались объяснить поведение кандидатов на выборах при помощи теоретико-игровых моделей, полученный выше результат (согласно которому в ходе избирательной кампании оба кандидата принимают одну и ту же политическую программу) достаточно хорошо соответствовал реальной политической обстановке. В США (а именно там была сосредоточена деятельность значительной части исследователей) программы представителей двух основных политических партий — республиканцев и демократов — не слишком сильно отличались друг от друга по основным вопросам, касающимся национальной экономики. В частности, большинство республиканцев приняло так называемый «Новый курс» президента от демократической партии Франка Рузвельта, предполагавший значительное перераспределение доходов от более состоятельных граждан к бедным. Однако на протяжении последующих десятилетий позиция республиканцев поменялась; она стала в значительной мере отражать интересы наиболее обеспеченной части населения. Наблюдавшееся расхождение политических программ партий (и кандидатов, которые представляли их на выборах) бросило вызов ученым: как можно при помощи формальной логики объяснить наблюдавшиеся тенденции? Очевидно, что предпосылок, заложенных в самую простую модель политической конкуренции, описанную выше, было недостаточно.

Возможное объяснение состоит в том, что сами кандидаты могут быть заинтересованы в реализации каких-то конкретных политических программ. Такая модель была рассмотрена в работах Уиттмена [Wittman, 1977] и Кальверта [Calvert, 1985]. Обозначим через $a_i \in [0,1]$ наилучшую альтернативу кандидата $i = 1, 2$ (которая является параметром модели). Пусть, как и раньше, стратегия каждого кандидата i — его политическая программа $s_i \in [0,1]$ (которая может отличаться от a_i). Обозначим через p_i вероятность того, что кандидат i выиграет выборы, $p_i \geqslant 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Пусть выигрыш кандидатов составляет

$$u_1 = \lambda p_1 - \big(p_1|a_1 - s_1| + p_2|a_1 - s_2|\big), \tag{1.54}$$

$$u_2 = \lambda p_2 - \big(p_1|a_2 - s_1| + p_2|a_2 - s_2|\big). \tag{1.55}$$

Здесь мы предполагаем, что кандидату небезразлична как сама победа на выборах, так и политическая программа победившего кандидата (кем бы он ни был). Второе слагаемое в функции выигрышей — ожидаемый ущерб кандидата i от реализации победителем программы, возможно отличающейся от его собственной наилучшей альтернативы a_i. Параметр $\lambda \in [0,1]$ отражает относительную важность победы на выборах по сравнению с реализацией наилучшей политической программы.

Осталось определить вероятности победы кандидатов p_1, p_2. Пусть кандидат побеждает на выборах только в том случае, когда он набирает больше половины голосов. Пусть $s_1 < s_2$. Избиратель с наилучшей альтернативой $\overline{v} = (s_1 + s_2)/2$ будет безразличен в выборе между программами двух кандидатов. Все избиратели с позициями $v < \overline{v}$ проголосуют за кандидата 1, с позициями $v > \overline{v}$ — за кандидата 2. Следовательно, при $v^m < \overline{v}$ побеждает кандидат 1, при $v^m > \overline{v}$ побеждает кандидат 2, при $v^m = \overline{v}$ каждый побеждает с вероятностью 1/2.

Предположим, что кандидаты знают об избирателях следующее: наилучшая альтернатива медианного избирателя — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\right]$. Величина $b \geqslant 1$ отражает степень информированности кандидатов о своем электорате. Чем она выше, тем сильнее изменения политических программ влияют на вероятности победы p_1, p_2. Это предположение дает нам следующие вероятности побед кандидатов при $s_1 < s_2$:

$$p_1 = \begin{cases} 0, & \dfrac{s_1+s_2}{2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2b}; \\ \dfrac{b(s_1+s_2-1)}{2} + \dfrac{1}{2}, & \dfrac{s_1+s_2}{2} \in \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2b}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2b}\right]; \\ 1, & \dfrac{s_1+s_2}{2} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2b}; \end{cases} \qquad p_2 = 1 - p_1. \tag{1.56}$$

Найдем равновесие в этой модели для $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Предположим, что в равновесии[14] $0 < s_1 < s_2 < 1$.

Мы обязаны иметь $\dfrac{s_1+s_2}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2b}$, иначе кандидат 2 может выбрать $s_2' > s_2$, при котором мы будем продолжать иметь $p_2 = 1$. Следовательно, кандидат 2 сможет увеличить свой выигрыш. Аналогично, в равновесии обязано выполняться $\dfrac{s_1+s_2}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2b}$. Это дает нам следующие условия первого порядка максимизации выигрыша кандидатов:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1} = -p_1 + (\lambda - s_1 + s_2)\frac{\partial p_1}{\partial s_1} = 0, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial s_2} = 1 - p_1 - (\lambda - s_1 + s_2)\frac{\partial p_1}{\partial s_2} = 0. \tag{1.58}$$

При $\lambda = 0$ получим

$$s_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, \qquad s_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}. \tag{1.59}$$

Выходит так: чем выше b, тем ближе позиции кандидатов к ожидаемой позиции медианного избирателя $1/2$. Действительно, предположим, что кандидата i интересует только реализация программы, наиболее близкой к своей наилучшей альтернативе a_i. Кандидат стоит перед дилеммой. С одной стороны, чем ближе его позиция y_i к ожидаемой позиции медианного избирателя, тем выше вероятность, что он выиграет выборы. С другой стороны, это снижает его выигрыш в случае победы. Чем выше неопределенность относительно позиции медианного избирателя, тем ближе будет политическая программа кандидата к его наилучшей альтернативе. Отметим, что в пределе при $b \to \infty$ равновесные политические программы совпадут с наилучшей альтернативой медианного избирателя, несмотря на то, что в их функции выигрышей напрямую не входит победа на выборах. Это будет верно при любом $\lambda \in [0, 1]$ и при любых $a_1 < 1/2 < a_2$.

[14] Убедитесь самостоятельно, что в равновесии не может быть иначе.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЭША

Данное доказательство теоремы Нэша является неконструктивным. Мы показываем, что у некоторого точечно-множественного отображения (определяемого через наилучшую реакцию игроков на действия остальных) существует неподвижная точка. Та же идея используется и при доказательстве многих других результатов в теории игр.

Сформулируем сначала вспомогательный результат. Если S — некоторое множество, то через 2^S обозначим множество всех подмножеств S.

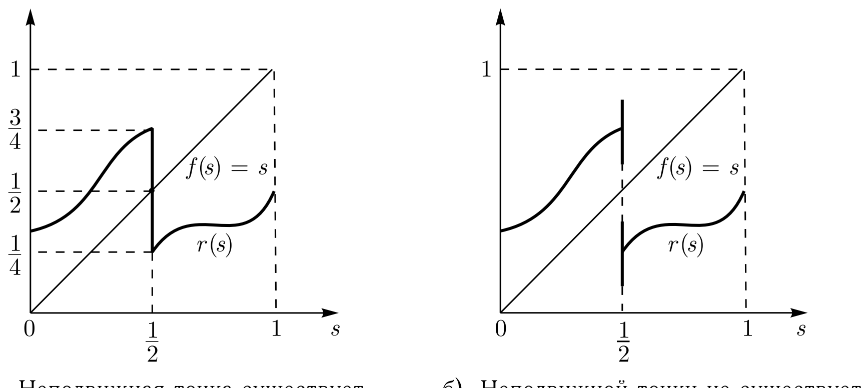
Теорема 1.4 [Kakutani, 1941]. *Пусть S — непустое, компактное и выпуклое подмножество евклидова пространства. Пусть $r\colon S \to 2^S$ — точечно-множественное отображение, такое что*

1. *$r(s)$ является непустым, выпуклым и компактным для всех $s \in S$.*
2. *$r(\cdot)$ имеет замкнутый график. То есть если $(s^n, \widehat{s}^n) \to (s, \widehat{s})$ — последовательность, такая что $\widehat{s}^n \in r(s^n)$ для всех n, то $\widehat{s} \in r(s)$.*

Тогда $r(\cdot)$ имеет неподвижную точку.

На рис. 1.13 представлены два примера точечно-множественных отображений. В обоих случаях $S = [0, 1]$. Функция $r(\cdot)$, изображенная на рис. 1.13, a, удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. Для $s \neq 1/2$ множества $r(s)$ состоят из единственного элемента, в то время как $r\left(1/2\right) = \left[1/4; 3/4\right]$. Это отображение имеет неподвижную точку $s^* = 1/2$, так как $1/2 \in r\left(1/2\right)$. Это видно из графика: именно в этой точке график $r(\cdot)$ пересекается с графиком функции $f(s) = s$.

На рис. 1.13, $б$ неподвижная точка отсутствует. Здесь $r\left(1/2\right) = [0{,}2; 0{,}4] \cup [0{,}6; 0{,}8]$, т.е. функция $r(\cdot)$ не является выпуклозначной. Это позволяет графику $r(\cdot)$ не пересекаться с $f(s) = s$.



a) Неподвижная точка существует $б$) Неподвижной точки не существует

Рис. 1.13. Существование неподвижной точки для точечно-множественного отображения

Теперь докажем теорему о существовании равновесия.

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим игру в нормальной форме: $G = \langle I, S, u\rangle$. Определим функцию реакции игрока i для смешанных стратегий:

$$\check{\sigma}_i(\sigma) = \arg\max_{\sigma'_i \in \Delta^{|S_i|-1}} u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}). \tag{1.60}$$

Функции $\check{\sigma}_i(\sigma)$ определяют, какие смешанные стратегии максимизируют выигрыш игрока i при условии, что задан профиль смешанных стратегий остальных игроков. Функция реакции является точечно-множественным отображением, т.е. каждому профилю смешанных стратегий может соответствовать несколько стратегий игрока i, ибо максимальное значение выигрыша игрока i достигаться при разных σ_i. Определим точечно-множественное отображение

$$\check{\sigma}(\sigma) = \prod_{i=1}^{N} \check{\sigma}_i(\sigma). \tag{1.61}$$

Если σ^* является неподвижной точкой отображения $\check{\sigma}(\cdot)$, то σ^* — равновесие; действительно, для всех i в этом случае σ^*_i будет являться наилучшей реакцией игрока i на σ^*_{-i}. Нам остается показать, что $\check{\sigma}(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани.

Множество профилей смешанных стратегий выпукло, так как оно является декартовым произведением симплексов. Так как функции выигрышей $u_i(\sigma)$ линейны по σ_i, то $\check{\sigma}_i(\sigma) \neq \varnothing$, так как любая линейная функция непрерывна, а непрерывная функция должна достигать максимума на компактном множестве. Следовательно, $\check{\sigma}(\sigma)$ непусто для всех профилей смешанных стратегий σ.

Покажем, что $\check{\sigma}(\sigma)$ выпукло. Действительно, пусть $\sigma', \sigma'' \in \check{\sigma}(\sigma)$. Тогда для всех $\lambda \in (0,1)$ и для всех i получаем

$$u_i\big(\lambda\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i, \sigma_{-i}\big) = \lambda\, u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)\, u_i(\sigma''_i, \sigma_{-i}). \tag{1.62}$$

Так как $u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i})$, то

$$u_i\big(\lambda\,\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i, \sigma_{-i}\big) = u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i}), \tag{1.63}$$

т.е. $\lambda\,\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i \in \check{\sigma}_i(\sigma)$, следовательно, $\lambda\,\sigma' + (1-\lambda)\,\sigma'' \in \check{\sigma}(\sigma)$.

Теперь покажем, что $\check{\sigma}(\cdot)$ имеет замкнутый график. Пусть это не так, т.е. существует последовательность $(\sigma^n, \widehat{\sigma}^n) \to (\sigma, \widehat{\sigma})$ такая, что $\widehat{\sigma}^n \in \check{\sigma}(\sigma^n)$ для всех n, но $\widehat{\sigma} \notin \check{\sigma}(\sigma)$. Тогда для некоторого i имеем $\widehat{\sigma}_i \notin \check{\sigma}_i(\sigma)$. Пусть $\sigma'_i \in \check{\sigma}_i(\sigma)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такой, что

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\,\varepsilon. \tag{1.64}$$

Так как u_i непрерывна по σ и $(\sigma^n, \widehat{\sigma}^n) \to (\sigma, \widehat{\sigma})$, то для достаточно большого n мы имеем

$$u_i(\sigma'_i, \sigma^n_{-i}) > u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - \varepsilon > u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\,\varepsilon > u_i(\widehat{\sigma}^n_i, \sigma^n_{-i}) + \varepsilon. \tag{1.65}$$

Первое неравенство выполнено в силу того, что $u_i(\sigma'_i, \sigma^n_{-i}) \to u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$, третье — в силу $u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma^n_{-i}) \to u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i})$. Следовательно, $\widehat{\sigma}^n_i \notin \check{\sigma}_i(\sigma^n)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\check{\sigma}(\cdot)$ имеет замкнутый график и удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. ■

1.4. ЗАДАЧИ

1.1. Рассмотрим следующую игру:

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	u	4; 1	0; 0	0; 3
	s	1; 6	5; 5	4; 3
	d	2; 5	7; 3	6; 0

Найдите все равновесия Нэша (в чистых и смешанных стратегиях).

1.2. При записи антагонистических игр в матричной форме для каждой пары стратегий достаточно указать одно число — выигрыш первого игрока, выбирающего строки. Выигрыш второго игрока определяется автоматически как выигрыш первого игрока, взятый со знаком минус. Найдите все равновесия в следующей антагонистической игре:

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	u	3	0	2
	s	5	1	4
	d	2	6	5
	g	3	5	5

1.3. Рассмотрим симметричную игру

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	X	0; 0	A; B
	Y	B; A	C; C

Симметричным равновесием в этой игре будем называть такое равновесие, в котором оба игрока играют X с равными вероятностями. При каких значениях параметров $B \neq 0$, $A \neq C$, мы имеем

(a) доминирующую стратегию у каждого игрока (дилемма заключенного)?

(b) два симметричных равновесия в чистых стратегиях и одно — в смешанных (координационная игра)?

(c) единственное равновесие в смешанных стратегиях («инспекция»)?

(d) два несимметричных равновесия в чистых стратегиях («лобовая атака»)?

Является ли данный список исчерпывающим? То есть верно ли, что приведенный список является классификацией игр 2×2 с симметричной матрицей выигрышей? Что будет, если мы откажемся от предположения, что $B \neq 0$, $A \neq C$?

1.4. Постройте пример игры 2×2, в которой есть равновесие $(1, 0)$, а также равновесием является $(0, q)$ для всех $q \in \left[{}^1\!/\!_2, 1\right]$.

1.5. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ является *строго квазивогнутой*, если для всех x, y и $\alpha \in (0, 1)$ верно, что $f(\alpha x + (1-\alpha) y) > \min\{f(x), f(y)\}$. Пусть G — непрерывная игра, в которой для всех i функции выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ — строго квазивогнуты по s_i. Докажите, что графики функций реакции $\check{s}_i(s_{-i})$ являются непрерывными по s_{-i}.

1.6. Рассмотрим игру с нулевой суммой между двумя игроками, в которой первый игрок использует две стратегии, а второй — три или больше ($M \geqslant 3$), причем выигрыши игроков разные для разных профилей стратегий. Каково максимальное число чистых стратегий, которые могут входить в равновесную смешанную стратегию 2-го игрока?

1.7. Докажите, что если чистая стратегия s_i является доминируемой (сильно или слабо), то любая смешанная стратегия, в которую s_i входит с положительным весом, также является доминируемой.

1.8. Докажите, что в задаче с контролером и безбилетником (см. с. 45) существует единственное равновесие: $p = q = \left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right)$.

1.9. Докажите лемму 1.7.

1.10. Докажите, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой и что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой.

1.11. Докажите, что при итеративном удалении строго доминируемых стратегий множество S^{∞} не зависит от порядка игроков, доминируемые стратегии которых мы удаляем.

1.12. N человек решают, как провести вечер. Каждый выбирает, к кому из своих $N-1$ друзей отправиться в гости или же остаться дома и самому ждать гостей. Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на μ меньше ($\mu > 0$). Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен $-\mu$. Постройте математическую модель данной ситуации в виде игры в нормальной форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в зависимости от μ при N, равном 3. А что будет при произвольном N?

1.13. Два джентльмена решили устроить дуэль. У каждого есть пистолет с одним патроном. По правилам дуэли оба соперника стоят в 40 шагах друг от друга и должны синхронно двигаться навстречу друг другу. В любой момент каждый из них может произвести выстрел. Вероятность того, что он попадет и убьет своего соперника, равна $p(x)$, где $x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ — число шагов, которое сделал дуэлянт. Пусть p — возрастающая функция, $p(0) = 0$, $p(20) = 1$. Каждый дуэлянт $i = 1, 2$ решает, на каком шаге $s_i \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ ему сделать выстрел. Если один из дуэлянтов первым делает выстрел и промахивается, то оба дуэлянта продолжают двигаться друг навстречу другу, после чего другой дуэлянт убивает его в упор с вероятностью 1 (вне зависимости от того, на каком шаге другой дуэлянт собирался выстрелить первым). Если дуэлянты решили стрелять одновременно, выстрел все равно делает один из двух дуэлянтов (первый и второй стреляют с равными вероятностями). Если выстреливший промахнулся, то они продолжают двигаться друг к другу, после чего промахнувшегося убивает другой дуэлянт. Найдите равновесие в этой игре, если известно, что выигрыш дуэлянта равен 0, если он умер, и 1, если он выжил.

1.14. Вы ехали с работы домой на своем автомобиле, когда загорелась красная лампочка «проверьте двигатель». Вы повезли машину в мастерскую. Вам известно, что с вероятностью p у вас серьезная поломка, требующая замены двигателя; с вероятностью $1 - p$ у вас всего лишь испортился датчик системы диагностики. Вы показали машину механику, который (в отличие от вас) может определить истинную причину неисправности. У механика есть две стратегии: вести себя честно (т.е. рекомендовать замену двигателя, если нужно заменить двигатель, и рекомендовать замену датчика, если нужно заменить датчик), и вести себя нечестно (т.е. всегда рекомендовать замену двигателя). Зарплата механика составит r, если ремонт соответствует поломке, и $R > r$ если он заменит двигатель при сломанном датчике (так как он может продать ваш двигатель «налево»). У вас тоже две стратегии. Во-первых, вы можете всегда доверять механику (и согласиться на ремонт в любом случае). Во-вторых, вы можете не доверять — т.е. соглашаться на ремонт, только если механик предлагает заменить датчик. Стоимость ремонта составляет C для замены двигателя и $c < C$ для замены датчика. Если вы отказываетесь от услуг механика, то ваши издержки равны c' в том случае, если у вас сломался датчик, и C' в том случае, если у вас сломался двигатель. Пусть $c < c' < C < C'$.

(a) Формализуйте эту ситуацию как игру 2×2 и найдите равновесие.

(b) Что еще вам напоминает эта игра?

1.15. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним расположены три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять аналогичное решение. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником.

(a) Сколько чистых стратегий у каждого игрока? Какие будут равновесия?

(b) Как изменится ваш ответ, если у Блотто четыре отряда, а у Балони — три? Если у каждого полководца по четыре отряда?

1.16. Три избирателя, 1-й, 2-й и 3-й, решают, за кого из трех кандидатов, A, B или C, следует проголосовать. Для победы кандидату необходимо получить минимум 2 голоса. Если все кандидаты набирают поровну голосов, то побеждает кандидат A. Функции выигрышей избирателей выглядят так: $u_1(\mathrm{A}) > u_1(\mathrm{B}) > u_1(\mathrm{C})$, $u_2(\mathrm{B}) > u_2(\mathrm{C}) > u_2(\mathrm{A})$, $u_3(\mathrm{B}) > u_3(\mathrm{A}) > u_3(\mathrm{C})$.

(a) Найдите все равновесия Нэша.

(b) Найдите все равновесия Нэша, в которых избиратели не голосуют за свои наихудшие альтернативы.

(c) Существуют ли *сильные равновесия Нэша*? Сильным равновесием называется такой профиль стратегий s, что не существует подмножества игроков $I' \subseteq I$ и профиля стратегий s', таких, что

i. $s'_i = s_i$, если $i \notin I'$, и

ii. $u_i(s') > u_i(s)$ для всех $i \in I'$.

То есть сильное равновесие устойчиво по отношению как к групповым, так и к индивидуальным отклонениям.

1.17. [Basu, 1994]. У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому пассажиру. Для того чтобы определить размер компенсации, каждого пассажира просят сообщить, во сколько он оценивает содержимое своего чемодана. Каждый пассажир может назвать целочисленную сумму размером не менее 2 долл. и не более 100 долл. Условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и ту же сумму, то каждый получит эту сумму в качестве компенсации. Если же заявленный одним из пассажиров ущерб окажется меньше, чем заявленный ущерб другого пассажира, то каждый пассажир получит компенсацию, равную меньшей из заявленных сумм. При этом тот, кто заявил меньшую сумму, получит дополнительно 2 долл., тот, кто заявил бóльшую сумму — дополнительно потеряет 2 долл.

(a) Найдите равновесие Нэша.

(b) Повторите решение, последовательно удаляя доминируемые стратегии. Почему вы думаете, что в реальности стратегии пассажиров будут отличаться от равновесных?

1.18. [Aragones, Palfrey, 2004]. В стране N проходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата — сильный и слабый. Стратегией кандидата является его предвыборная программа — левая `L`, центристская `C` или правая `R`. Матрица выигрышей такова:

		Слабый		
		`L`	`C`	`R`
Сильный	`L`	$1;\ 0$	$\alpha;\ 1-\alpha$	$1-\alpha;\ \alpha$
	`C`	$1-\alpha;\ \alpha$	$1;\ 0$	$1-\alpha;\ \alpha$
	`R`	$1-\alpha;\ \alpha$	$\alpha;\ 1-\alpha$	$1;\ 0$

Здесь $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше) или даже может выиграть. Найдите равновесие.

1.19. Нефтяная компания X в трех регионах имеет монополию на поставку бензина. Компания Y собирается построить сеть своих заправок в одном из этих регионов; компания X намерена ей помешать. Компания Y выбирает, в каком из регионов строить заправки; компания X выбирает, в каком из регионов бороться с компанией Y путем административного ресурса. Если компания Y выбрала регион i, а компания X — другой регион, то Y выигрывает v_i, X проигрывает ту же величину. Если обе компании выбрали одинаковые регионы, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях при условии, что $v_1 > v_2 > v_3 > 0$.

1.20. Дана игра в нормальной форме:

$$G = \Big\langle \{1,2\},\ \{X=\mathbb{R}, Y=\mathbb{R}\},\\ \{u_1 = -x^2 - x\,y + \beta\,x,\ u_2 = -y^2 + \alpha\,x\,y + y\}\Big\rangle,$$

здесь $x \in X$ — стратегия первого игрока, $y \in Y$ — стратегия второго. При каких значениях параметров α и β существует равновесие по Нэшу? При каких значениях параметров оно будет единственным? В каком случае в равновесии будет максимизирован суммарный выигрыш игроков?

1.21. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ — некий профиль стратегий в следующей игре:

$$\Big\langle \{1,2\},\ X \times Y,\ (f(x,y), g(x,y))\Big\rangle.$$

Будем говорить, что на профиле x_0, y_0 выполнены *условия индивидуальной рациональности для игроков*, если:

$$f(x_0,y_0) \geqslant \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y), \qquad g(x_0,y_0) \geqslant \max_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x,y).$$

(a) Поясните смысл этих условий. Выполняются ли они для равновесия по Нэшу?
(b) Выполняются ли эти условия, если (x_0, y_0) — оптимум по Парето?

1.22. N избирателей должны выбрать одну из K альтернатив. Для каждого избирателя существует наилучшая альтернатива, следующая наилучшая, и т.д. Действует правило одобряющего голосования, при котором каждый из избирателей может проголосовать за любое число альтернатив. Побеждает та альтернатива, которая набрала большинство голосов. Докажите, что любая стратегия голосования, при которой избиратель не голосует за наилучшую альтернативу или голосует за наихудшую, является слабо доминируемой.

1.23. Рассмотрим конечную игру в нормальной форме $G = \langle I, S, u \rangle$ и последовательность множеств смешанных стратегий $(S^0, S^1, \ldots)$, такую, что
(a) $S^0 = S$,
(b) S^n получается из S^{n-1} (для всех $n \geqslant 1$) путем удаления (для одного или нескольких игроков) всех строго доминируемых чистых стратегий (в том числе и тех стратегий, которые доминируются смешанными стратегиями).

Покажите, что
(a) $\widetilde{S}^\infty$ — предельный элемент последовательности $S^1, \ldots$ — не зависит от порядка, в котором удалялись доминируемые стратегии,
(b) $\widetilde{S}^\infty$ содержит в себе все равновесия Нэша. Если $\widetilde{S}^\infty$ содержит единственный элемент, то это — единственное равновесие Нэша.

1.24. На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство — бананы. У каждого туземца i имеется w_i бананов, $w_i = 4$. Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божку, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i — количество съеденных бананов, g_i — количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $u_i = \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$.
(a) Выпишите максимизационную задачу каждого туземца.
(b) Найдите функции реакции.
(c) Найдите равновесие Нэша.
(d) Будет ли равновесие Парето-оптимальным? То есть можно ли выбрать такие x_1, x_2, g_1, g_2, что выигрыш обоих туземцев будет выше, чем в равновесии Нэша? Сформулируйте задачу максимизации $u_1 + u_2$ и решите ее. В каком случае $g_1 + g_2$ будет выше? Прокомментируйте результат.

1.25. [Osborne, Slivinski, 1996]. В некоторой стране живет континуум граждан с наилучшими альтернативами, равномерно распределенными на $[0, 1]$ (см. пример на с. 59). Каждый гражданин решает, стоит ли ему выдвинуть свою кандидатуру на предстоящих президентских выборах. Если гражданин с наилучшей альтернативой v выдвигается и становится кандидатом, то v автоматически становится его избирательной программой (например, потому, что избиратели не будут верить никаким другим его обещаниям). На выборах каждый избиратель голосует за кандидата с самой близкой к нему избирательной программой. Победителем становится кандидат, набравший больше голосов, чем любой другой кандидат (т.е. действует правило *относительного большинства*). Если гражданин с наилучшей альтернативой v решил стать кандидатом и выиграл выборы, его выигрыш равен

$$u_v = b - c, \tag{1.66}$$

где c — стоимость выдвижения, b — ценность победы. Если гражданин выдвинул свою кандидатуру, но проиграл, его выигрыш составит

$$u_v = -|y - v| - c, \tag{1.67}$$

где y — программа победившего кандидата. Если кандидат разделил первое место с $k-1$ другими кандидатами, то его выигрыш будет

$$u_v = \frac{1}{k} \sum_{i:\ V_i = \max\limits_j V_j} |y_i - v| + \frac{b}{k} - c, \tag{1.68}$$

здесь V_i обозначает долю голосов, поданых за кандидата i, так как мы предполагаем, что в таком случае каждый становится победителем с вероятностью $1/k$. Если гражданин решил не становиться кандидатом, то его выигрыш составит

$$u_v = -|y - v| \tag{1.69}$$

в том случае, если первое место на выборах досталось одному кандидату с программой y, и

$$u_v = -\frac{1}{k} \sum_{i:\ V_i = \max\limits_j V_j} |y_i - v|, \tag{1.70}$$

если первое место разделили k кандидатов с программами y_i. Если не выдвигается ни один кандидат, то все избиратели получают выигрыш $-\infty$.

(a) При каких значениях b, c существует равновесие, в котором выдвигается ровно один кандидат? Какой будет программа этого кандидата?

(b) При каких значениях b, c существует равновесие, в котором выдвигаются два кандидата? Какими будут их программы?

1.26. На рынке мобильной телефонной связи присутствуют две фирмы. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом путем объявления цен p_1, p_2 (в рублях за минуту) на свои услуги. Фирма $i = 1, 2$ дальше обязуется обслужить всех клиентов, желающих приобрести ее услуги по ее цене p_i. Пусть рыночный спрос задан как $q = 1 - p$, где p — наименьшая из предложенных цен, q — количество услуг, приобретенных покупателями. Таким образом, количество услуг, приобретенных у фирмы $i = 1, 2$, равно

$$q_i = \begin{cases} 1 - p_i, & p_i < p_{-i}; \\ \dfrac{1 - p_i}{2}, & p_i = p_{-i}; \\ 0, & p_i > p_{-i}. \end{cases}$$

Выигрыш фирмы i равен ее прибыли:

$$u_i = q_i p_i - c(q_i),$$

где $c(q_i)$ — издержки фирмы i. Такая модель конкуренции, когда фирмы объявляют цены, а затем берут на себя обязательства удовлетворять весь спрос по этим ценам, называется *моделью конкуренции Бертрана*.

(a) Найдите равновесие, если $c(q_i) = c_i q_i$, где $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2$.

(b) Найдите равновесие, если $c(q_i) = a\dfrac{q_i^2}{2}$, $a > 0$. Будет ли равновесие единственным?

1.27. Найдите равновесие в модели дуополии Курно (с. 25–27) при условии, что функция спроса задана как $p = 1 - q_1 - q_2$ и прибыль фирмы i равна $q_i p - c_i(q_i)$, где

(a) издержки фирм квадратичны: $c_i(q_i) = c_i q_i^2$, где $c_i \geqslant 0$,

(b) предельные издержки постоянны, но есть фиксированные издержки: $c_i(q_i) = f_i + c_i q_i$ при $q_i > 0$ и $c_i(0) = 0$, где $f_i \geqslant 0$.

1.28. В модели дуополии Курно (с. 25–27) докажите, что равновесие является устойчивым, т.е. если мы рассмотрим последовательность (q_1^t, q_2^t), такую, что $q_1^{t+1} = \check{q}_1(q_2^t)$ и $q_2^{t+1} = \check{q}_2(q_1^t)$, то эта последовательность сойдется к (q_1^*, q_2^*).

1.29. В задаче конкуренции продавцов мороженого на пляже (см. с. 57):

(a) Докажите, что если продавцов трое, то равновесия в чистых стратегиях не существует.

(b) Найдите равновесие, если продавцов четверо, пятеро или шестеро, или докажите, что равновесий не существует.

(c) Пусть множество покупателей (и множество стратегий каждого продавца) — единичная окружность (например, продавцы конкурируют на пляже вокруг озера). Опишите все равновесия, когда продавцов двое или трое.

1.30. Каждая из N фирм решает, сколько средств следует вложить в разработку новой технологии обработки данных. Пусть r_i — количество средств, затраченное фирмой i. Пусть

$$p_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^{N} r_j} \tag{1.71}$$

есть вероятность того, что фирма i успеет первой получить патент на изобретение. Ожидаемый выигрыш фирмы i будет

$$u_i = Rp_i - r_i, \tag{1.72}$$

где R — ценность патента для его обладателя.

(a) Найдите, чему равны r_i^* в равновесии. Как r_i^* зависит от N?

(b) Как суммарные расходы $\sum_i r_i$ будут зависеть от N?

(c) Предположим, что издержки входа на рынок равны $c \geqslant 0$. Чему будет равно N?

1.31. [Nash, 1953]. Есть покупатель и продавец некого товара. Покупатель оценивает товар в $v \in [0, 1]$ единиц, продавец — в $c \in [0, 1]$ единиц. Покупатель и продавец одновременно называют цену, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 — цена продавца, p_2 — цена покупателя. Обмен происходит только тогда, когда $p_1 \leqslant p_2$, и проводится по цене $p = (p_1 + p_2)/2$. Найдите равновесие. Правда ли, что в равновесии будет максимизирована сумма выигрышей продавца и покупателя?

1.32. [Palfrey, Rosenthal, 1984]. N человек решают, стоит ли им производить общественное благо. Решение каждого человека i есть $d_i \in \{0, 1\}$ — стоит ли участвовать в производстве блага или нет. Выигрыш каждого человека в том случае, когда благо произведено, равен 1, а в том случае, когда благо не произведено — 0. Дополнительно к этому человек, участвующий в производстве блага, несет издержки $c < 1$. Пусть для производства блага необходимо, чтобы $1 \leqslant K < N$ человек участвовало в производстве. Найдите все равновесия в чистых стратегиях. Найдите симметричное равновесие в смешанных стратегиях. Почему равновесия в смешанных стратегиях могут выглядеть предпочтительней? Есть ли еще равновесия в этой игре?

1.33. В некоторой стране проходят президентские выборы, в которых участвуют два политика: A и B. Каждый политик решает, какую программу ему предложить избирателям. Пусть $y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} \in [0, 1]$ — избирательные программы политиков. Можно считать, что 0 — это крайне левая программа («все отнять и поделить»), 1 — крайне правая (никаких налогов, пусть каждый тратит только то, что зарабатывает). В стране существует континуум избирателей; каждый избиратель представлен своей наилучшей альтернативой v. Наилучшие альтернативы равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Пусть выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v в случае избрания кандидата A равен $u_{\mathrm{A}}(v) = e - (v - y_{\mathrm{A}})^2$, где $e > 0$. В случае избрания кандидата B его выигрыш будет $u_{\mathrm{B}}(v) = -(v - y_{\mathrm{B}})^2$. То есть каждый избиратель предпочитает, чтобы политическая программа кандидата была по возможности ближе к собственной наилучшей альтернативе. При этом кандидат A обладает дополнительным преимуществом; при прочих равных условиях, избиратель, голосующий за этого кандидата, получает дополнительный выигрыш e по сравнению с другим кандидатом (источником этого преимущества может быть, например, управленческий опыт или бóльшая известность). Предположим, что выигрыш каждого кандидата равен доле избирателей, которая за него голосует. Иначе говоря, если все избиратели с наилучшей альтернативой $v \leqslant 0{,}7$ голосуют за кандидата A и все избиратели с $v > 0{,}7$ — за кандидата B, то выигрыш кандидатов будет, соответственно, $U_{\mathrm{A}} = 0{,}7$ и $U_{\mathrm{B}} = 0{,}3$.

(a) Найдите, при каком $\overline{v}$ мы будем иметь $u_{\mathrm{A}}(\overline{v}) = u_{\mathrm{B}}(\overline{v})$ при данных y_{A}, y_{B}? За какого кандидата будут голосовать избиратели с наилучшей альтернативой $v < \overline{v}$? С наилучшей альтернативой $v > \overline{v}$?

(b) Покажите, что при $e \geqslant 1/4$ в данной игре существует равновесие в чистых стратегиях. Найдите все такие равновесия. Чему будет равен равновесный выигрыш кандидатов?

(c) Покажите, что при $e < 1/4$ равновесие в чистых стратегиях не существует.

(d) Пусть $e < 1/4$. Предположим, что кандидат B реализует смешанную стратегию, в которой с вероятностью $1/2$ выбирается либо $1/2 - \sqrt{e}$, либо $1/2 + \sqrt{e}$. Покажите, что $y_{\mathrm{A}} = 1/2$ максимизирует выигрыш кандидата A при данной смешанной стратегии кандидата B. Покажите, что кандидат B также не может получить больший выигрыш, если $y_{\mathrm{A}} = 1/2$.

1.34. В некоторой стране проходят президентские выборы, в которых участвуют два политика: 1-й и 2-й. Каждый политик решает, какую программу ему предложить избирателям. Пусть $y_A, y_B \in [0,1]$ — политические программы политиков. В стране живет континуум избирателей. Наилучшие альтернативы избирателей равномерно распределены на $[0,1]$. Пусть $u(v,y) = -|v-y|$ будет выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой $v \in [0,1]$ при голосовании за кандидата с позицией y. Выигрыш кандидата равен доле избирателей, проголосовавших за него, от общего числа избирателей. Найдите все равновесия Нэша в следующих двух случаях.

(a) Избиратель с наилучшей альтернативой v голосует следующим образом:

i. За кандидата 1, если $u(v, y_1) > u(v, y_2)$ и $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| \geqslant b$, где $0 < b < 1/2$.
ii. За кандидата 2, если $u(v, y_1) < u(v, y_2)$ и $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| \geqslant b$.
iii. Не голосует, если $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| < b$.

То есть избиратель не голосует, если он в достаточной степени безразличен в выборе между двумя кандидатами.

(b) Избиратель с наилучшей альтернативой v голосует следующим образом:

i. За кандидата 1, если $u(v, y_1) > u(v, y_2)$ и $u(v, y_1) \geqslant c$, где $-1/2 \leqslant c \leqslant -1/4$.
ii. За кандидата 2, если $u(v, y_1) < u(v, y_2)$ и $u(v, y_2) \geqslant c$.
iii. Не голосует, если $\max\{u(v, y_1), u(v, y_2)\} < c$.

То есть избиратель не голосует, если ему достаточно сильно не нравятся оба кандидата.

1.35. [Selten, Pool, 1991]. По соседству расположены два государства населением V_1 и V_2, в каждом государстве проживает большое число граждан. Пусть $V_1 \geqslant V_2$. Граждане каждого государства говорят на своем национальном языке. Рассмотрим однопериодную игру, в которой гражданин каждого государства принимает решение, следует ли ему выучить язык другого государства. Например, если он знает язык другого государства, то число людей, с которыми он может общаться, равно $V_1 + V_2$. Пусть выигрыш каждого гражданина равен числу людей (в обоих государствах), с которыми он может общаться. Если при этом он решил изучить иностранный язык, то он несет издержки $c > 0$ на изучение иностранного языка. Пусть P_1 и P_2 — доли граждан в каждом государстве, выучивших иностранный язык. Решение отдельно взятого гражданина не влияет на эти величины. Найдите равновесные P_1^* и P_2^* — такие, при которых ни один гражданин не желает пересматривать свое решение, учить ему иностранный язык или нет. Найдите оптимальные P_1^o и P_2^o — такие, которые максимизируют суммарное благосостояние граждан обоих государств. Почему они могут отличаться от равновесных значений?

1.36. [Gradstein, Kondar, 1999]. Четыре спортсмена готовятся к соревнованию по бегу. Каждый атлет i до начала соревнований решает, сколько усилий x_i может потратить на подготовку. Во время соревнований спортсмены не принимают никаких решений. Турнир состоит из двух этапов: полуфинала и финала. В полуфинале спортсмен 1 соревнуется со спортсменом 2 и спортсмен 3 со спортсменом 4. В финале бегут победители полуфиналов. Если i соревнуется с j (либо в полуфинале, либо в финале), то вероятность того, что i победит, есть $p_i(x_i, x_j) = \dfrac{x_i}{x_i + x_j}$.

(a) Пусть R — приз за первое место, r — приз за второе место. За третье и четвертое места приза нет. Выигрыш атлета i равен R, помноженному на вероятность получить первое место, плюс r, помноженному на вероятность получить второе место, минус x_i. Выпишите математические ожидания выигрышей для всех атлетов.

(b) Найдите симметричное равновесие Нэша в этой игре (т.е. такое, в котором $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$. Существуют ли еще равновесия?

(c) Вы — устроитель турнира. Ваша задача — обеспечить его зрелищность, т.е. максимизировать $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ при данном размере призового фонда $r + R = \overline{R}$. Решите эту задачу.

(d) Что лучше для организатора турнира — такая схема или один забег, где участвуют все четыре спортсмена, вероятность победы каждого равна $p_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$ и приз дается только за первое место?

1.37. [Murphy, Shleifer, Vishnu, 1993]. Население в стране N может заниматься одним из двух видов деятельности: работать либо воровать у тех, кто работает. Пусть $V \in [0, 1]$ — доля работающего населения. Пусть α — максимальный доход работающего человека, $\gamma < \alpha$ — его гарантированный доход. Таким образом, максимальная сумма, которую можно украсть у работающих, равна $(\alpha - \gamma) V$. Пусть β — максимальная сумма, которую один человек может украсть. Следовательно, всего может быть украдено не более $\beta (1 - V)$. Если $V > \beta/(\alpha + \beta - \gamma)$, то количество украденного будет меньше, чем $(\alpha - \gamma) V$; при $V \leqslant \beta/(\alpha + \beta - \gamma)$ оно будет равно $(\alpha - \gamma) V$.

(a) Как выигрыши работающего и ворующего зависят от V?

(b) Найдите равновесие в игре, в которой каждый человек решает, чем ему заняться в жизни: работой или воровством. Как количество равновесий будет зависеть от значений параметров? Почему, по-вашему, равновесий может быть два?

1.38. [Holmstrom, 1992]. Владелец мастерской нанял N работников. Количество товара, производимого мастерской, есть функция от усилий, прилагаемых работниками:

$$Y(q_1, \ldots, q_N) = \sqrt{q_1 + \ldots + q_N}\,,$$

где q_i — усилие, прилагаемое работником i. Пусть выигрыш каждого работника есть

$$u_i = W_i - q_i,$$

где W_i — зарплата работника; последнее слагаемое отражает издержки работника i.

(a) Пусть хозяин не имеет права ставить зарплату работника в зависимость от q_i. Зарплата каждого работника есть равная доля от выпуска: $W_i = Y/N$. Найдите равновесные объемы выпуска $q_1^*, \ldots, q_N^*$. Найдите Парето-оптимальные объемы выпуска $q_1^o, \ldots, q_N^o$, максимизирующие выпуск Y минус суммарные издержки $q_1 + \ldots + q_N$. Почему равновесные усилия не равны оптимальным?

(b) Пусть теперь хозяин предлагает следующую схему оплаты:

$$W_i = Y(q_1, \ldots, q_N) - \frac{N-1}{N} Y(q_1^o, \ldots, q_{i-1}^o, q_i, q_{i+1}^o, \ldots, q_N^o).$$

Будет ли такая схема оплаты Парето-оптимальной? Будет ли она сбалансированной, т.е. такой, что всегда выполняется $q_1 + \ldots + q_N = Y$? Объясните, почему Парето-оптимальная схема оплаты не может быть сбалансированной.

1.39. [Acemoglu, Robinson, 2006]. В некоторой стране живут N капиталистов-товаропроизводителей. Они решают, сколько средств надо потратить на разгон профсоюза рабочих. Пусть $s_i \geqslant 0$ — количество средств, потраченных капиталистом i. Будем считать, что профсоюз удалось уничтожить, если $\sum_{i=1}^{N} s_i > \omega$, ω — случайная величина, распределенная на $[0, \infty)$ с ненулевой убывающей плотностью $f(\cdot)$ и функцией распределения $F(\cdot)$. Выигрыш капиталиста i составляет $R - s_i$, если профсоюз разогнан, и $-s_i$, если нет.

(a) Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша.

(b) В стране принят закон в защиту профсоюзов. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\omega + \eta$, где $\eta > 0$ — детерминированная величина. Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша. Изменится ли равновесная вероятность того, что профсоюз будет разогнан?

(c) Принят другой закон. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\alpha\omega$, где $\alpha > 1$. Как изменится ваш ответ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 1

Бусыгин В.П., *Желободько Е.В.*, *Коковин С.Г.*, *Цыплаков А.А.* Микроэкономический анализ несовершенных рынков. Учеб. пособ. Ч.1. Новосибирск: НГУ, 2000.

Мюллер Д. Общественный выбор III. М.: ГУ ВШЭ, 2007.

Нейман Дж., *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

Патнэм Р. Чтобы демократия сработала: Гражданские традиции в современной Италии. М.: Изд. фирма «Ad Marginem», 1996.

Печерский С.А., *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Шагин В.Л. Теория игр: С экон. прил. Учеб. пособ. М.: ГУ ВШЭ, 2003.

Acemoglu D., *Robinson J.A.* De Facto Political Power and Institutional Persistence // AEA Papers and Proceedings. 2006. Vol. 96. No. 2. P. 325–330.

Aragones E., *Palfrey Th.R.* The Effect of Candidate Quality on Electoral Equilibrium: An Experimental Study // The American Political Science Review. 2004. Vol. 98. No. 1. P. 77–90.

Basu K. The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory // American Economic Review. 1994. Vol. 84. No. 2. P. 391–395.

Bereford R.S., *Person M.H.* A Mixed Strategy in Action // Operations Research. 1955. Vol. 6. No. 4. P. 173–176.

Binmore K.G. Fun and Games: A Text of Game Theory. D.C. Hearth, 1992.

Calvert R.L. Robustness of Multidimensional Voting Model: Candidate Motivations, Uncertainty and Convergence // Americal Journal of Political Science. 1985. Vol. 29. P. 69–95.

Chiappori P.A., *Levitt S.*, *Groseclose T.* Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer // The American Economic Review. 2002. Vol. 92. No. 4. P. 1138–1151.

Davis D.D, *Holt C.A.* Experimental Economics. Princeton University Press, 1993.

Dixit A.K., *Skeath S.* Games of Strategy: 2nd edition. W.W. Norton & Company, 2004.

Downs A. An Economic Theory of Democracy. Harper & Row, 1957.

Fudenberg D., *Tirole J.* Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.

Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, 1992.

Glicksberg I.L. A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Applications to Nash Equilibrium Points // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. Vol. 38. P. 170–174.

Gradstein M., *Kondar K.A.* Orchestrating Rent-Seeking Contests // Economic Journal. 1999. Vol. 109. P. 536–545.

Hindricks J., *Myles G.D.* Intermediate Public Economics. The MIT Press, 2006.

Holmstrom B. Moral Hazard in Teams // Bell Journal of Economics. 1982. Vol. 13. No. 2. P. 324–340.

Hotelling H. Stability in Competition // Economic Journal. 1929. Vol. 39. No. 153. P. 41—57.

Kakutani S. A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem // Duke Mathematical Journal. 1941. Vol. 8. No. 3. P. 457–459.

Krueger A.O. The Political Economy of the Rent-Seeking Society // The American Economic Review. 1974. Vol. 64. No. 3. P. 291–303.

MasCollel A., *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomics Theory. Oxford University Press, 1995.

Murphy K.M., *Shleifer A.*, *Vishnu R.W.* Why is Rent-Seeking so Costly to Growth? // The American Economic Review. 1993. Vol. 83. No. 2. P. 40–414.

Myerson R.B. Game theory: Analysis of Conflict. Harvard University Press, 1991.

Nash J. Equilibrium Points in n-Person Games // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1950. Vol. 36. No. 1. P. 48–49.

Nash J.E. Two-Person Cooperative Games // Econometrica. 1953. Vol. 21. No. 1. P. 128–140.

Osborne M.J., *Slivinski A.* A Model of Political Competition With Citizen-Candidates // Quarterly Journal of Economics. 1996. Vol. 111. P. 65–96.

Palfrey Th.R., *Rosenthal H.* Participation and the Provision of Public Goods: A Strategic Analysis // Journal of Public Economics. 1984. Vol. 24. No. 2. P. 171–193.

Posner R. The Social Costs of Monopoly and Regulation // The Journal of Political Economy. 1975. Vol. 83. No. 4.

Rubinstein A. Comments on the Interpretation of Game Theory // Econometrica. 1991. Vol. 59. No. 4. P. 909–924.

Schelling T.C. The Strategy of Conflict. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1960.

Selten R., *Pool J.* The Distribution of Foreign Language Skills as a Game Equilibrium / R. Selten (ed.) // Game Equilibrium Models. Vol. 4. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 64–84.

Tullock G. The Welfare Costs of Tariffs, Monopolies, and Theft // Western Economic Journal. 1967. Vol. 5. No. 3. P. 224—232.

Walker M., *Wooders J.* Minimax play at Wimbledon // American Economic Review. 2001. Vol. 91. No. 5. P. 1521–1538.

Wittman D. Candidates With Policy Preferences: A Dynamic Model // Journal of Economic Theory. 1977. Vol. 14. P. 180–189.

2 ГЛАВА

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

На улице — прекрасный летний день, и вы вышли немного погулять[1]. Светит солнце, поют птицы, легкий ветерок играет в ваших волосах. У вас в кармане кошелек, в котором 1000 руб. К вам подходит хулиган с гранатой в руках и предлагает вам такой выбор: либо вы отдаете ему кошелек, либо он взрывает гранату, и вы оба погибаете. Ваши предпочтения (в порядке убывания) таковы: остаться в живых с кошельком, остаться в живых без кошелька, быть взорванным. Предпочтения хулигана точно такие же. Больше всего ему понравится, если вы сразу отдадите ему кошелек. На втором месте альтернатива, когда вы отказываетесь отдавать кошелек, но он не взрывает гранату и остается в живых, но без кошелька. Наконец, меньше всего, как и вам, ему хочется быть взорванным.

Станете ли вы отдавать кошелек? Если вы не отдадите, то у хулигана будет нелегкий выбор. Он угрожал вам взорвать гранату, но теперь предпочтет не реализовывать эту угрозу. Если он недостаточно принципиален, то он передумает и не станет выдергивать чеку после того, как вы отказались отдавать ему кошелек. В этом случае вы должны ответить ему отказом, так как его угроза нереализуема. Однако если он принципиален и никогда не меняет своих решений, то вам лучше сделать так, как он говорит, и отдать кошелек. Если вы не отдадите, то будете взорваны, и вряд ли вас утешит тот факт, что хулиган взлетит на воздух вместе с вами.

Этот маленький пример показывает важность порядка, в котором принимаются решения. Угроза хулигана взорвать гранату является невыполнимой, если хулиган имеет возможность пересмотреть свое решение *после* того, как вы окончательно и безповоротно отказались делиться с ним своими заработанными деньгами. Ситуация приобретает совершенно иной характер, если хулиган запрограммирован выполнять данные ранее обещания.

[1] Пример взят из книги [Gibbons, 1992].

2.1. ИГРЫ В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ

Динамическая игра — более сложный объект, чем статическая игра. Для того чтобы описать динамическое игровое взаимодействие нескольких субъектов, нам нужны две вещи. Нам надо знать последовательность действий игроков при возможных сценариях развития событий в игре, а также выигрыши, получаемые игроками в зависимости от произошедших в игре событий. Мы также должны знать, что каждому игроку может быть известно относительно ходов, уже сделанных другими игроками. В первом случае мы говорим о *дереве игры*; во втором — об *информационных множествах* игроков.

2.1.1. ДЕРЕВО ИГРЫ

Для того чтобы описать динамическую игру, нам нужно следующее.

Во-первых, нам (как и в статической игре) нужно определить множество игроков. Для того чтобы моделировать случайные события, влияющие на выигрыш игроков, нам необходимо ввести еще одного игрока — *природу*. Таким образом, мы имеем $I = \{1, \ldots, N\} \cup \{\text{природа}\}$.

Во-вторых, нужно определить, в каком порядке игроки ходят, и какие действия им доступны на каждом ходе. Например, в игре «хулиган с гранатой» первый ход делает прохожий; ему доступны действия «отдать» и «не отдавать». В случае если выбрано действие «не отдать», делает ход хулиган; его возможные действия — «взорвать» и «не взорвать». Эту информацию мы можем представить в виде следующего *дерева* (или *графа*) игры, изображенного на рис. 2.1. Дерево игры состоит из *вершин* и соединяющих их отрезков. Каждая вершина обозначает либо момент принятия решения одним из игроков, либо момент окончания игры. Моменты принятия решения обозначены кружочками; их на нашем дереве два — принятие решения прохожим (пустой внутри) и принятие решения хулиганом (сплошной). Всего существуют три варианта окончания игры: если прохожий отдает кошелек, если прохожий не отдает кошелек и хулиган взрывает гранату и если прохожий не отдает кошелек и хулиган не взрывает. В дереве игры всегда существует одна вершина, соответствующая началу игры. В нашем случае это — вершина, в которой делает ход прохожий.

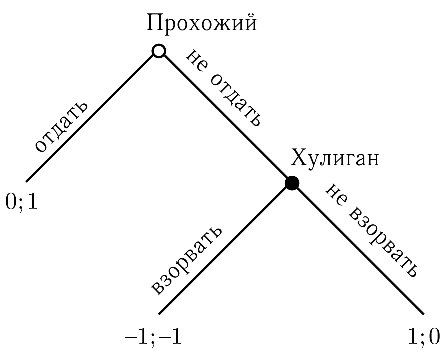


Рис. 2.1. Игра «хулиган с гранатой»

Наконец, в-третьих, нам надо определить, как выигрыши игроков зависят от ходов, которые были сделаны. Формально в каждой конечной вершине дерева игры мы определяем выигрыши для каждого игрока. Мы предполагаем, что выигрыш каждого игрока равен -1 в случае взрыва гранаты; 0 в случае, если взрыва нет, но игрок остался без кошелька; и 1, если взрыва не было и кошелек остался у игрока.

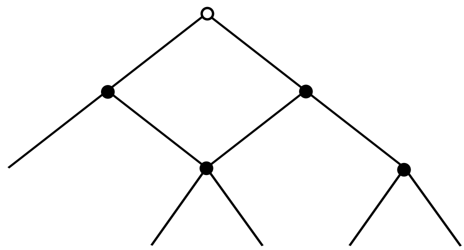


Рис. 2.2. Граф, не являющийся деревом игры: у одной вершины существует несколько вершин, непосредственно предшествующих ей

Каждому ходу, который игрок делает в какой-то вершине, соответствует вершина, в которой игра оказывается после сделанного хода. Например, после хода прохожего «отдать», игра переходит в конечную вершину с выигрышем $(0,1)$. После хода «не отдать» игра переходит в вершину, в которой ход делает хулиган. Будем говорить, что вершина, в которой делает ход прохожий, лежит выше, чем вершина, в которой делает ход хулиган. В любом дереве игры для любой вершины, кроме начальной, однозначно задается *история игры* — т.е. последовательность вершин, через которые игра уже успела пройти. В частности, для любой вершины (опять же, кроме начальной) существует ровно одна вершина, непосредственно предшествующая данной. Это исключает графы вроде изображенных на рис. 2.2.

2.1.2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА И СТРАТЕГИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Рассмотрим задачу «встреча в городе» из гл. 1 (с. 22). Напомним, что в исходной задаче речь шла об игре 2×2 со следующей матрицей выигрышей:

		Андрей	
		М	Т
Маша	М	1; 1	0; 0
	Т	0; 0	1; 1

Мы предполагали, что когда Маша и Андрей принимают решения, между ними отсутствует связь; следовательно, на момент принятия решения

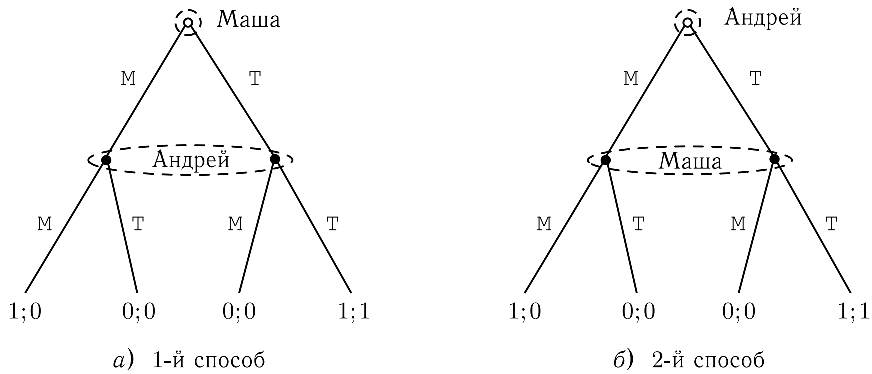


Рис. 2.3. Встреча в городе — два способа записать статическую игру как динамическую

Андрей не знает о решении Маши, и наоборот. На рис. 2.3 показаны два эквивалентных способа записать эту игру как развернутую.

На рис. 2.3, *а* нарисовано дерево игры, в которой Маша делает первый ход, но Андрей не знает, какой ход сделала Маша, т.е. на момент принятия решения, Андрей не может сказать, в какой из двух своих вершин он находится. Это предположение достигается объединением двух вершин, в которых Андрей принимает решения, в одно *информационное множество*. На рис. 2.3, *б* показан второй вариант записи той же игры в развернутой форме (как правило, выигрыши игроков в конечных вершинах игры указываются в порядке, приблизительно соответствующем очередности ходов игроков).

Каждое информационное множество содержит одну или несколько вершин, в которых принимает решения какой-нибудь один игрок. Если несколько вершин находятся в одном информационном множестве, то игрок, принимающий решения в этих вершинах, не знает, в какой именно вершине он находится. Например в игре, изображенной на рис. 2.4, игрок 2 не может сказать, какой из двух ходов — `M` или `L` — сделал игрок 1, поскольку вершины, в которых игрок 2 принимает решение после этих

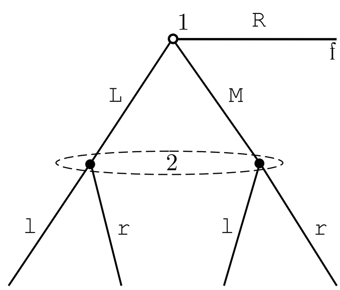


Рис. 2.4. Информационное множество игрока 2 содержит две вершины

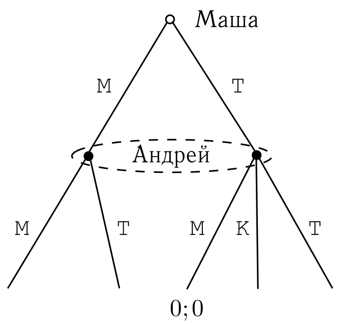
ходов игрока 1, лежат в одном информационном множестве. Однако если игрок 1 сделает ход R, то игра закончится и игрок 2 об этом узнает.

По определению, каждая вершина в игре должна принадлежать к какому-то информационному множеству. Если информационное множество содержит несколько вершин, то на рисунке их обычно обводят пунктирной линией. Если оно содержит всего одну вершина, то эта вершина пунктиром не обводится.

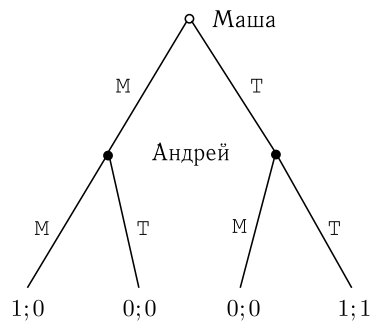
Мы требуем, чтобы во всех вершинах, принадлежащих к одному информационному множеству, каждому игроку были доступны одни и те же действия. В противном случае — как, например, на рис. 2.5, *а* — игрок сможет определить вершину, в которой он находится, по числу доступных ему действий, что противоречит предположению о том, что две вершины принадлежат к одному информационному множеству.

В тех играх, в которых игроки могут наблюдать за предыдущими действиями всех других игроков — включая «природу» — каждое информационное множество содержит ровно одну вершину. Если в нашем примере между Машей и Андреем имеется односторонняя связь — например, если Маша может скидывать Андрею СМСки, но Андрей не может на них отвечать — информационное множество Андрея разбивается на два множества (рис. 2.5, *б*), каждое из которых соответствует одному из выбранных Машей действий. У Маши, как и прежде, — всего одно информационное множество, так как при наличии односторонней связи она принимает решение раньше Андрея. У Андрея информационных множеств два, каждое из которых соответствует одной вершине, в которой он принимает решение (когда в информационном множестве всего одна вершина, мы не обводим ее пунктиром на рисунке).

Какие стратегии доступны игрокам в игре, изображенной на рис. 2.5, *б*? У Маши всего два варианта действий: M или T. Выбор Андрея, однако,



а) Пример несуществующей игры



б) Игра «встреча в городе» с односторонней связью

Рис. 2.5. Игра «встреча в городе»

является более богатым. У него могут быть разные планы в зависимости от хода, сделанного Машей. Перечислим все стратегии Андрея:

`TT` Играть `T`, если Машин ход был `T`; играть `T`, если Машин ход был `M`.
`TM` Играть `T`, если Машин ход был `T`; играть `M`, если Машин ход был `M`.
`MT` Играть `M`, если Машин ход был `T`; играть `T`, если Машин ход был `M`.
`MM` Играть `M`, если Машин ход был `T`; играть `M`, если Машин ход был `M`.

Получается, что у Андрея имеются всего 4 стратегии. Каждая стратегия предписывает, что делать в *каждом* информационном множестве. Дадим определение.

Определение 2.1. В игре Γ в развернутой форме *множество чистых стратегий игрока i* есть

$$S_i = \prod_{h_i \in H_i} A(h_i),$$

где H_i содержит все информационные множества, в которых делает ход игрок i, а $A(h_i)$ обозначает все действия, доступные игроку i в информационном множестве h_i.

При этом число чистых стратегий у игрока i будет

$$N_i = \prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)|. \tag{2.1}$$

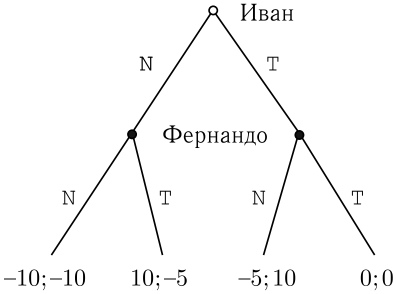
Например, если в некой игре у некого игрока есть три информационных множества, в которых возможно по 3, 4 и 5 действий, то число его чистых стратегий равно $3 \times 4 \times 5 = 60$.

Совокупность дерева игры и информационных множеств игроков позволяет нам определить множество стратегий для каждого игрока. Так как выигрыш каждого игрока однозначно определяется стратегиями, выбранными игроками, то это позволяет нам говорить о равновесии Нэша в играх в развернутой форме. Однако, как мы убедимся на следующем примере, в динамических играх далеко не все равновесия соответствуют нашему представлению о рациональности игроков.

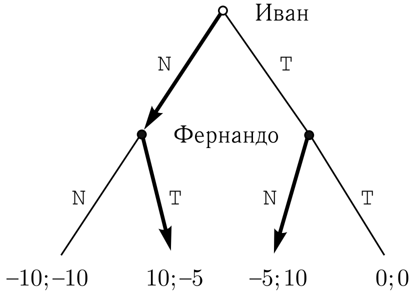
Динамическая игра в «лобовую атаку». Рассмотрим задачу «лобовая атака», приведенную на с. 29. Два автомобиля едут навстречу друг другу. За рулем первой машины Иван — водитель со среднестатистическими навыками вождения. За рулем второй машины сидит Фернандо Алонсо, двукратный обладатель чемпионского титула и трижды вице-чемпион гонок Формулы-1. Каждый водитель может свернуть (`T`) или не свернуть — (`N`). Пусть, как и в прошлой главе, выигрыши игроков заданы такой матрицей:

		Фернандо	
		T	N
Иван	T	0; 0	−5; 10
	N	10; −5	−10; −10

Реакция Фернандо Алонсо намного лучше, чем у Ивана. Поэтому решение о том, свернуть ему или нет, Иван принимает первый. После того, как Иван определился со своим выбором (и не в состоянии его изменить), Алонсо все еще имеет в запасе несколько долей секунды, достаточных для принятия решения. У нас получается динамическая игра, в которой Иван делает первый ход (рис. 2.6, a).



a) Исходная игра



$б$) Равновесие (N, NT)

Рис. 2.6. Динамическая игра в «лобовую атаку»

У Ивана в этой игре две стратегии: $S_1 = \{\mathtt{T}, \mathtt{N}\}$, у Фернандо — четыре: $S_2 = \{\mathtt{TT}, \mathtt{TN}, \mathtt{NT}, \mathtt{NN}\}$ (первая буква означает действие Фернандо в том случае, если Иван свернул, вторая — действие Фернандо, если Иван не свернул). Какие профили стратегий будут равновесными? Запишем матрицу выигрышей в этой игре.

		Фернандо			
		TT	TN	NT	NN
Иван	T	0; 0	0; 0	−5; 10	−5; 10
	N	10; −5	−10; −10	10; −5	−10; −10

Попробуем проанализировать эту игру как статическую. Формально, мы получим три равновесия Нэша: $(\mathtt{N}, \mathtt{TT})$, $(\mathtt{N}, \mathtt{NT})$ и $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$. Однако в двух из них — $(\mathtt{N}, \mathtt{TT})$ и $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$ — Фернандо принимает неоптимальные для него действия вне *траектории игры*. Рассмотрим, например, $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$. Эта пара стратегий предписывает Фернандо никогда не сворачивать — даже в том случае, если Иван по какой-то причине отклонится от своей равновесной стратегии T и не свернет. У Фернандо будет еще несколько долей секунды для того, чтобы передумать. Следуя стратегии NN, Фернандо будет вынужден разбить машину и получить выигрыш -10, имея возможность увернуться и получить всего -5.

Зато пара стратегий (N, NT) предписывает Фернандо оптимально, с его точки зрения, реагировать на любой первый ход Ивана. Фернандо сворачивает, если Иван не свернет, и едет прямо, если Иван уступает ему дорогу (рис. 2.6, *б*). Зная, что Фернандо действует таким образом, Иван фактически выбирает между выигрышами в -5 (если он свернет) и 10 (если он не свернет).

Это равновесие, полученное «задом наперед» — нахождением оптимальной стратегии сначала для Фернандо, делающего последний ход, затем для Ивана, ходящего первым — выдерживает нашу критику. Как мы увидим в следующем разделе, такой алгоритм позволяет найти равновесие в любой конечной игре, в которой игроки обладают всей информацией о всех сделанных ранее ходах.

2.1.3. ИГРЫ С СОВЕРШЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Наиболее простым для изучения подклассом динамических игр являются игры, в которых игроки делают свои ходы строго по очереди, причем в каждый момент времени каждому игроку известны все ходы, сделанные предыдущими игроками. Дадим определение.

Определение 2.2. Пусть каждое информационное множество в игре Γ содержит ровно одну вершину. Такая игра называется *игрой с совершенной информацией*.

Игра «лобовая атака» между Иваном и Фернандо и игра «хулиган с гранатой» являются примерами игр с совершенной информацией. К этому же классу относятся такие настольные игры, как шашки, шахматы и крестики-нолики. Подкидной дурак, напротив, не является игрой с совершенной информацией: игрок не видит руки других игроков; следовательно, в этой игре некоторые (на самом деле, почти все) информационные множества содержат более одного элемента[2].

Мы показали, что в игре «лобовая атака» можно построить равновесие, найдя сначала оптимальное действие игрока, делающего последний ход. Аналогичный алгоритм можно применить и к любой игре с совершенной информацией, если количество ходов в этой игре конечно.

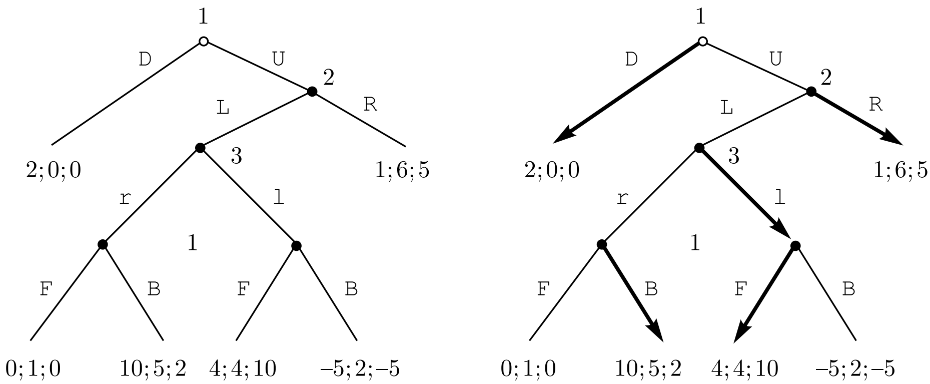
Теорема 2.1 [Kuhn, 1953]. *В любой конечной игре с совершенной информацией есть равновесие в чистых стратегиях.*

Полное доказательство этой теоремы, использующее формальное определение игры в развернутой форме, содержится в приложении Б, однако

[2] Совершенная информация — более серьезное ограничение, чем полная информация. Во втором случае достаточно, чтобы игроки знали выигрыши друг друга в зависимости от принятых ими действий. В первом случае мы также требуем, чтобы игроки ходили строго по очереди, а ходы были наблюдаемы.

сама идея доказательства очень проста. Мы действуем методом *обратной индукции*. Нам нужно построить профиль стратегий — т.е. для каждого информационного множества (или для каждой вершины, так как речь идет об игре с совершенной информацией) найти действие игрока в этом множестве. Возьмем все вершины, такие, что *ниже этих вершин игра заканчивается*. Найдем оптимальное действие каждого игрока в каждой такой вершине. Если оптимальных действий несколько, то возьмем любое из них. Далее рассмотрим вершины одним уровнем выше и найдем оптимальные действия игроков в них; так как игра является конечной, мы рано или поздно придем к начальной вершине.

Пример использования этого алгоритма показан на рис. 2.7.



а) Исходная игра

б) Решение игры методом обратной индукции

Рис. 2.7. Обратная индукция в игре с совершенной информацией

На рис. 2.7, *а* показано дерево игры. В каждой конечной вершине показан выигрыш игроков (первого, второго, третьего). Если первый ход игрока 1 будет `U`, а ходы игроков 2 и 3 — соответственно `L` и `r`, то второй ход игрока 1 должен быть `B`. Если игрок 3 сделает ход `l`, то следующий ход игрока 1 должен быть `F`. Если эти планы известны игроку 3, то его ход должен быть `l`. Игрок 2 сделает ход `R`, а первый ход игрока 1 будет `D`. *Траектория игры* — т.е. последовательность ходов, которые предпримут игроки — будет короткой: игра закончится с первым же ходом `D` игрока 1. Однако равновесие определяет не только те ходы, которые игроки в реальности сделают, но и те, которые они могли бы сделать во всех возможных случаях. Совокупность равновесных ходов, полученных методом обратной индукции, показана на рис. 2.7, *б*.

Шахматы. К классу конечных игр с совершенной информацией принадлежат такие известные игры, как крестики-нолики, шашки и шахматы. Эти игры являются конечными (по правилам шахмат, при троекратном повторении позиции объявляется ничья) и могут быть решены методом обратной индукции. Между крестиками-ноликами, шашками и шахматами нет принципиальной разницы, однако практическая возможность нахождения такого решения зависит от числа ходов в игре. Легко проверить, что в «крестиках-ноликах» каждый игрок может обеспечить себе ничью (или выигрыш, если его противник ошибется и отклонится от равновесной стратегии). Недавно таким же образом была решена одна из разновидностей шашек. Компьютерная программа `Chinook`, созданная профессором Джонатаном Шейфером из канадского Университета штата Альберта, реализует равновесную стратегию, обеспечивающую как минимум ничью при любой стратегии противника [Schaeffer et al., 2007]. Теоретически, похожий результат должен существовать и для шахмат. Однако решение шахмат пока не представляется возможным, так как дерево этой игры слишком велико. В шашках существует порядка 10^{20} возможных позиций; при этом решение шашек потребовало несколько месяцев работы сотен персональных компьютеров. В шахматах число позиций превышает 10^{40}, так что с точки зрения сложности стратегий, шахматы настолько сложнее шашек, насколько шашки сложнее игры «крестики-нолики». Вряд ли шахматы будут решены в обозримом будущем.

Сжигание мостов. Генерал командует армией, которая защищает город, находящийся на берегу реки. Между городом и другим берегом проложен мост, по которому армия может, при необходимости, отступить.

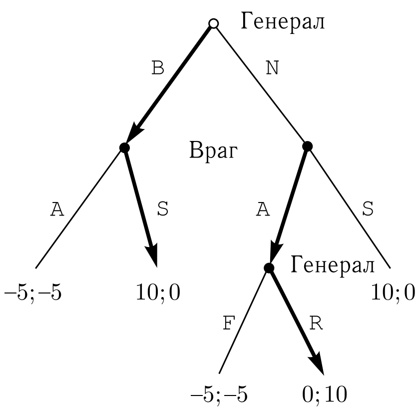


Рис. 2.8. Сжигание мостов

На город готовится напасть вражеская армия. Генерал имеет возможность уничтожить мост до того, как враг решится атаковать (B), или не уничтожать мост (N). После того, как враг наблюдает действие генерала, он решает, атаковать город (A) или нет (S). Если враг напал и мост не уничтожен, то генерал может либо принять решение сражаться (F), либо отступить (R). Если мост уничтожен и враг напал, то генерал может только сражаться. Выигрыш каждой стороны составляет 10, если на конец игры она обладает городом, но сражения не произошло; 0, если сражения не было, но сторона осталась без города; и -5, если было сражение. Дерево этой игры и его решение показано на рис. 2.8.

В нашей игре генерал примет решение сжечь мост для того, чтобы перекрыть себе возможность к отступлению. Такое равновесие возможно, если обе стороны считают, что ущерб от сражения выше, чем ценность обладания городом.

Русская рулетка. Поручик Ржевский и корнет Оболенский поспорили из-за дамы. Они договорились решить этот вопрос игрой в русскую рулетку. Правила игры такие: в револьвер заряжается ровно один патрон, после чего на револьвере вращается барабан. Далее г-н Ржевский берет револьвер и решает, что ему делать: выстрелить себе в висок или сдаться и проиграть спор. Если он решит выстрелить, то с вероятностью $1/6$ в стволе окажется патрон, и Ржевский погибнет (а Оболенский — выиграет спор). С вероятностью $5/6$ патрона в стволе не будет. В этом случае револьвер переходит к г-ну Оболенскому, который также должен решить, что ему делать: стрелять или сдаваться. При передаче хода барабан не крутится, так что вероятность погибнуть при втором выстреле при условии, что первый выстрел был холостой, равна $1/5$. Револьвер переходит из рук в руки до тех пор, пока после пятой попытки в стволе не остается ровно один патрон. Каждый из господ гусаров оценивает победу в 1 ед., смерть — в 0 ед., поражение — в $2/3$ ед. Дерево этой игры изображено на рис. 2.9.

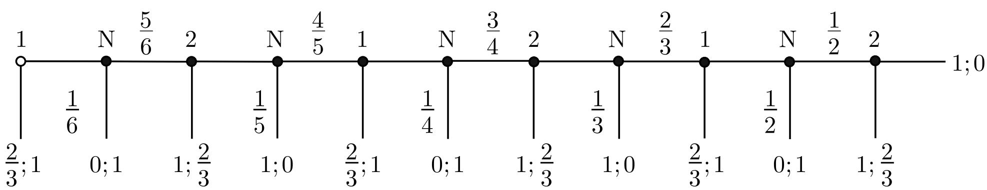


Рис. 2.9. Игра в русскую рулетку

Первым игроком в этой игре является поручик Ржевский; далее (при условии, что Ржевский решает стрелять) делает ход природа, которая с вероятностью $1/6$ решает, что должен произойти выстрел; далее (при условии, что Ржевский остается жив) ходит Оболенский. Решение[3] этой игры показано на рис. 2.10.

На последнем ходе корнет Оболенский предпочтет сдаться, так как в случае нажатия на курок он погибнет с вероятностью 1. Следовательно, при условии, что Оболенский сдастся на последнем ходу, ожидаемый выигрыш игроков при нажатии Ржевским на курок будет $\left(1/2; 5/6\right) = 1/2 \times (0;1) + 1/2 \cdot \left(1; 2/3\right)$. Аналогично, при нажатии на курок Оболенским на предыдущем ходе выигрыши будут $\left(7/9; 2/3\right) = 1/3 \cdot (1;0) + 2/3 \cdot \left(2/3; 1\right)$. Продолжая решение таким способом, получим, что Ржевский сдастся при первом же ходе.

[3] Это — всего лишь одно из равновесий, которые можно получить при помощи обратной индукции, так как на четвертом ходе корнет Оболенский получает один и тот же выигрыш, если он сдается и если он продолжает игру. В равновесии на рис. 2.10 он продолжает игру, но существует также равновесие, в котором Оболенский на четвертом ходе сдается (или сдается с любой вероятностью $p \in [0, 1]$).

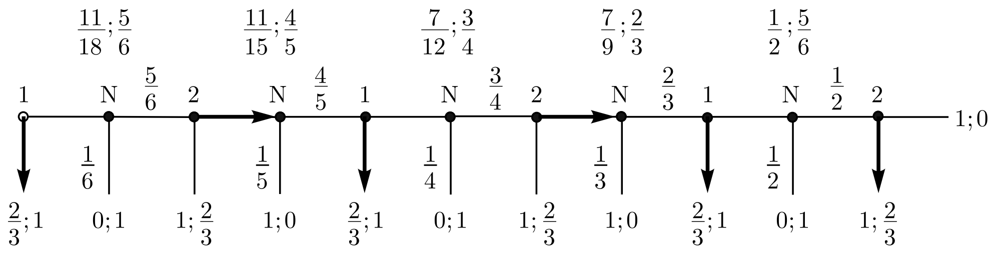


Рис. 2.10. Игра в русскую рулетку — решение

Обратная индукция в телеигре **Survivor.** Передача Survivor[4] была одним из самых популярных «реалити шоу» на американском телевидении. Первый сезон был показан телекомпанией CBS летом 2000 г. Участники шоу («племя») находились на необитаемом острове. Задачей каждого было найти себе пропитание и ночлег. Каждые 3 дня участники на «совете племени» решали, кого следует изгнать из племени (изгоняемый покидал игру). Перед советом племени все участники проходили испытание на силу, смекалку или выдержку. Победитель испытания не мог быть изгнан из племени на ближайшем совете. После последнего совета, когда участников осталось всего двое, победителя выбирали последние 10 выбывших участников.

В конце первого сезона в игре оставалось трое человек: Руди, Рич и Келли. Руди, самый старший из участников, был очень популярен и рассчитывал выиграть итоговое голосование вне зависимости от того, кто (Келли или Рич) будет изгнан на последнем совете племени. Рич и Келли были моложе и имели гораздо больше шансов выиграть последнее перед советом испытание (надо было простоять как можно дольше в неудобной позе, держась одной рукой за тотемный столб). Победитель испытания получал иммунитет и фактическую возможность решать, кого из оставшихся двух участников следует изгнать с острова.

Проблема победителя заключалась в том, что, голосуя против Руди, он рисковал проиграть итоговое голосование, так как Руди был очень популярен среди выбывших игроков. Лучше было вообще не побеждать в итоговом испытании! Рассмотрим динамическую игру, в которой на первом этапе один из участников — Рич — решает, стоит ли ему сдаться и намеренно проиграть испытание. Дерево этой игры изображено на рис. 2.11; знак «—» означает удаление.

В этой игре на последнем ходе Келли и Рич проголосуют против Руди. Если Рич на первом этапе решит «стоять», то его ожидаемый выигрыш (с учетом равновесных действий на последнем ходе) будет равен $0{,}5 \times \times\, 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}48$. Если Рич решает «сдаться», то его ожи-

[4] Этот случай взят из книги [Dixit, Skeath, 2004, p. 72–77].

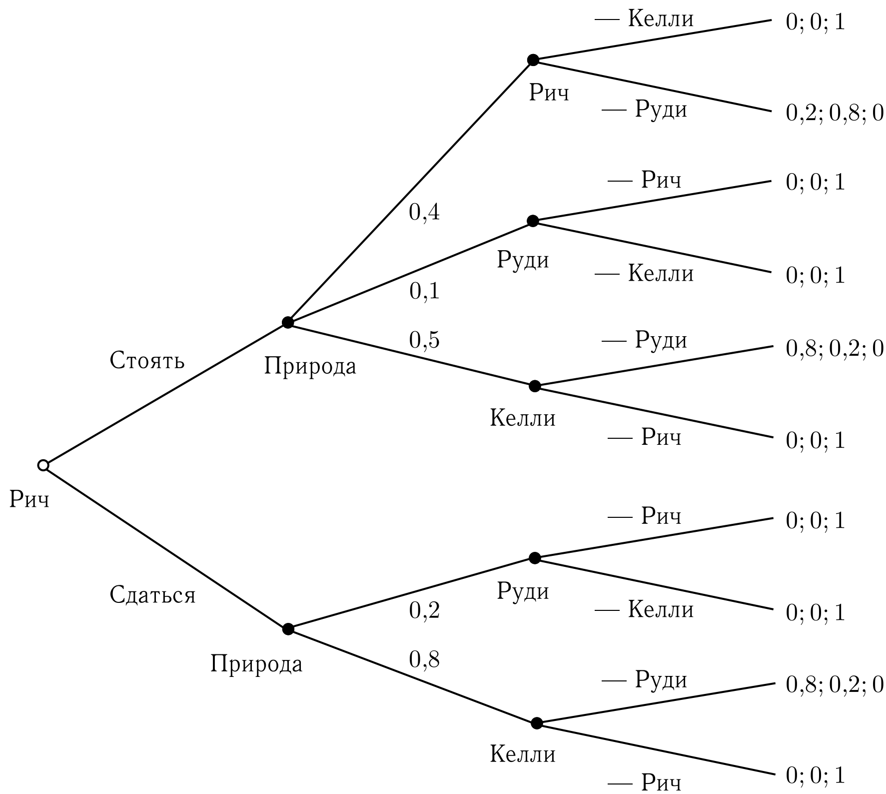


Рис. 2.11. Дерево в игре «Survivor»

даемый выигрыш будет $0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}64$. Рич должен уступить для того, чтобы не быть поставленным перед неудобным выбором. Если бы Рич выиграл последнее испытание, то он был бы вынужден либо проголосовать против Келли (и затем проиграть Руди на финальном голосовании), либо проголосовать против Руди (что также настроило бы против него большинство выбывших членов племени). Рич поступил единственным верным образом — сдался. Самое примечательное, что Рич не изучал теорию игр и проделал весь путь размышлений под палящим солнцем, стоя в неудобной позе. Расчет оказался правильным: соревнования выиграла Келли, которая затем проголосовала против Руди. Выбывшие члены племени проголосовали против Келли, что сделало Рича победителем всей игры.

Ограничение метода обратной индукции*: *игры «сороконожка» и «ультиматум». Следующие два примера — «паталогические» динамические игры, в которых предсказанное равновесие, полученное обратной индукцией, не соответствует как нашим представлениям о том, как будут вести себя люди в аналогичных ситуациях, так и данным, полученным в ходе экономических экспериментов. В каждой из игр причина расхождения между теорией и действительностью разная. В первом случае — игра «сороконожка» — поведение игроков отличается от равновесного, по-видимому, из-за того, что нахождение равновесия требует слишком большого числа шагов алгоритма обратной индукции. Во втором случае — игра «ультиматум» — денежные выигрыши игроков не отражают их истинных предпочтений, на которые могут влиять такие факторы, как представления о справедливости, зависть или альтруизм.

«Сороконожка». Богатый мизантроп позвал в гости двух студентов: Вову и Диму. Он предлагает Вове взять 100 руб. Если он отказывается, то Диме предлагается 200 руб. Если Дима отказывается, то Вове предлагается взять 400 руб., и т.д. Наконец, Вове предлагается либо забрать 1600 руб., либо поделить эту сумму поровну между собой и Димой. Дерево этой игры представлено на рис. 2.12.

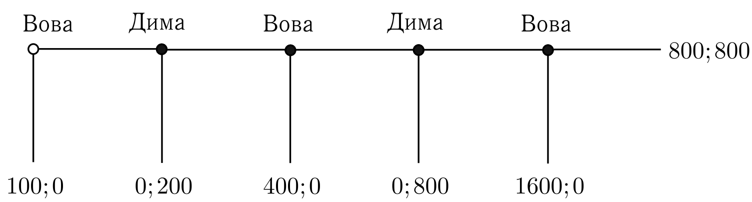


Рис. 2.12. Игра «сороконожка»

Решая игру методом обратной индукции, мы приходим к неутешительному выводу: в самом начале игры Вова заберет 100 руб.; Дима не получит ничего.

Игра «сороконожка» показывает, что обратная индукция не всегда дает хороший прогноз человеческого поведения. Действительно, если бы вам предложили поиграть в «сороконожку», то вы вряд ли бы остановили игру на первом ходе. В ходе эксперимента, проведенного Маккельви и Полфри [McKelvey, Palfrey, 1992], более 60% игроков останавливались на 3 или на 4 ходе из 7 возможных в эксперименте.

Однако дальнейшие исследования показали, что результат эксперимента сильно зависит от интеллектуального уровня игроков. Обычно в качестве субъектов экперимента используют университетских студентов. Паласиос-Уэрта и Волиш [Palacios-Huerta, Volij, 2009] провели тот же эксперимент с шахматистами высокого уровня. Результаты разительно отличались: в большинстве случаев игра останавливалась на первом же ходе; при этом вероятность остановки на первом ходе возрастала с шахматным рейтингом игроков (гроссмейстеры всегда прекращали игру при первой же возможности). Показательно, что склонность играть равновесные стратегии зависит не только от собственного уровня, но и от уровня соперника: если обычный игрок знает, что он играет против профессионального шахматиста, то его собственное поведение будет больше соотвествовать равновесному, чем в том случае, когда он играет против другого обычного игрока.

«Ультиматум». Олег предлагает Михаилу пропорции, в которых можно поделить 100 рублей. Пусть Олег предлагает $p \in [0, 100]$ руб. оставить себе и $(100 - p)$ руб. передать Михаилу. Если Михаил соглашается (A), то эти платежи реализуются. Если он отказывается (D), то каждый игрок получает 0 руб. На рис. 2.13 изображено дерево этой игры.

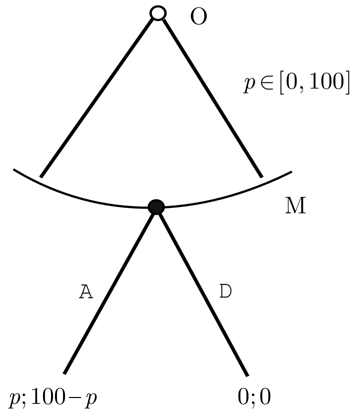


Рис. 2.13. Игра «ультиматум»

Как поступит Михаил в ответ на выбранное Олегом p? Если $p < 100$, то Михаил согласится, так как $100 - p > 0$. Если $p = 100$, то Михаил может и согласиться, и отказаться (его выигрыш будет равен нулю в обоих случаях). Обратная индукция дает нам одно равновесие — когда Олег предлагает $p = 100$, а Михаил соглашается на любой дележ, в том числе, на $p = 100$.

Игра «ультиматум» — еще один пример того, как результат, полученный методом обратной индукции, не реализуется в реальной игре. Эта игра, так же как и «сороконожка», часто исследуется в экономических экспериментах, и результаты, как правило, также разительно отличаются от полученного выше равновесия. Первая причина состоит в том, что второй игрок, как правило, отвергает дележ, который он считает несправедливым. В некоторых экспериментах вторые игроки отвергали дележи, предлагавшие им вплоть до половины от имевшейся у первого игрока суммы. Первый игрок, предвидя это, «делится» [Camerer, 2003].

Второй причиной, почему экспериментальные результаты отличаются от предсказанных моделью $p = 100$, является альтруизм. Хоффман и др. [Hoffman, McCabe, Smith, 1996] в числе первых исследовали так называемую «игру диктатора», в которой игрок, обладающий определенной суммой денег, может поделиться частью этой суммы с неизвестным ему реципиентом. При этом реципиент, в отличие от второго игрока в «ультиматуме», не имеет возможности отказаться или заблокировать дележ. В эксперименте 46% диктаторов пожертвовали не менее 3 долл. из имеющихся у них 10 долл., при том, что им не была известна личность реципиентов. В той же работе, однако, было показано, что при альтернативных условиях эксперимента, когда личности «диктаторов» неизвестны экспериментаторам, пожертвования резко сокращаются (до 16%). Авторы мотивируют это тем, что когда человеку известно, что за его альтруистическими действиями никто не наблюдает, у человека меньше стимулов делиться с неизвестным ему человеком. Однако в других работах было показано, что на степень альтруизма влияет большое число факторов — таких, как ожидаемое состояние реципиента (бедным дают больше), восприятие средств, имеющихся у диктатора (человек с меньшей вероятностью поделится, если воспринимает свои деньги как заработанные, а не как подарок), и т.д. Человеческое поведение в играх типа «ультиматум» и «диктатор» до конца не изучено и продолжает оставаться актуальной темой для исследований.

2.1.4. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Как нам определить смешанные стратегии для игр в развернутой форме? Конечно же, можно просто расширить множество чистых стратегий до множества распределений вероятностей на нем. Как мы помним, множество чистых стратегий в игре в развернутой форме есть $\prod_{h_i \in H_i} A(h_i)$, т.е. это множество всех возможных комбинаций действий игрока во всех его информационных множествах. Формально, множеством смешанных стратегий игрока i будет $\Delta^{|\prod_{h_i \in H_i} A(h_i)|-1}$, где Δ^n означает симплекс размерности n.

Какой длины вектор вероятностей необходим, чтобы задать смешанную стратегию? В игре «лобовая атака» смешанная стратегия для Фернандо Алонсо будет состоять из вероятностей p_1, p_2, p_3 и $1 - p_1 - p_2 - p_3$, с которыми он будет играть свои чистые стратегии (см. рис. 2.14). Для Ивана смешанная стратегия будет определяться вероятностями q и $1 - q$.

		Фернандо				
		TT	TN	NT	NN	
Иван	T	$0;\ 0$	$0;\ 0$	$-5;\ 10$	$-5;\ 10$	q
	N	$10; -5$	$-10; -10$	$10; -5$	$-10; -10$	$1-q$
		p_1	p_2	p_3	$1-p_1-p_2-p_3$	

Рис. 2.14. Иван и Фернандо: смешанные стратегии

В общем случае длина вектора вероятностей, определяющего смешанную стратегию, будет равна числу чистых стратегий минус 1:

$$\dim\left(\Delta^{|\prod_{h_i \in H_i} A(h_i)|-1}\right) = \prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)| - 1. \tag{2.2}$$

Здесь $\dim(\cdot)$ означает размерность множества. Так, у Фернандо смешанная стратегия задается тремя параметрами: p_1, p_2 и p_3.

Однако случайное поведение игроков можно задать и более простым способом. Предположим, что Фернандо и Иван играют смешанные стратегии $(p_1; p_2; p_3; 1 - p_1 - p_2 - p_3)$ и $(q; 1 - q)$. Давайте подсчитаем вероятность того, что Фернандо свернет (т.е. выберет действие T) *в том случае, если*

Иван свернет (*выберет действие* T). Легко проверить, что эта величина есть

$$p_1' = p_1 + p_2. \tag{2.3}$$

Аналогично, в том случае, если Иван не свернет, Фернандо сворачивает с вероятностью

$$p_2' = p_1 + p_3. \tag{2.4}$$

Вероятности $(p_1'; p_2')$ являются *поведенческой стратегией* Фернандо.

Дадим формальное определение.

Определение 2.3. *Множество поведенческих стратегий игрока i есть*

$$B_i = \prod_{h_i \in H_i} \Delta^{|A(h_i)|-1}. \tag{2.5}$$

Поведенческая стратегия для каждого информационного множества предписывает, с какой вероятностью нужно выбирать каждое из действий. Исследовать игру с помощью поведенческих стратегий значительно проще, чем с помощью смешанных. Действительно,

$$\dim(B_i) = \sum_{h_i \in H_i} \big(|A(h_i)| - 1\big). \tag{2.6}$$

Если у игрока — три информационных множества, в которых имеется, соответственно, по 3, 4 и 5 действий, то размерность вектора поведенческой стратегии будет равна $3 + 4 + 5 - 3 = 9$, а размерность вектора смешанной стратегии будет равна $3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$.

Определим, как в общем случае получать поведенческие стратегии из смешанных. Если $R_i(h_i)$ — множество чистых стратегий игрока i, допускающих прохождение игры через информационное множество h_i при каких-то s_{-i}, то вероятность того, что игрок i выберет действие a_i в информационном множестве h_i, есть

$$b_i(a_i|h_i) = \frac{\sum_{s_i \in R_i(h_i), s_i(h_i) = a_i} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in R_i(h_i)} \sigma_i(s_i)}. \tag{2.7}$$

Здесь $\sigma_i(s_i)$ — вероятность сыграть чистую стратегию s_i при смешанной стратегии σ_i. Обозначим через $b_i(\sigma_i)$ поведенческую стратегию, полученную таким образом из смешанной стратегии σ_i (скажем, как $(p_1'; p_2')$ были получены $(p_1; p_2; p_3)$ в предыдущем примере). Обозначим через $\Omega_i(b_i)$ множество всех смешанных стратегий, приводящих к поведенческой стратегии b_i.

Можно показать, что для широкого класса игр — *игр с совершенной памятью* (включающий все игры, рассматриваемые в этом учебнике) —

мы можем искать равновесие как в смешанных, так и в поведенческих стратегиях[5]. Имеется следующий результат.

Теорема 2.2 [Kuhn, 1953]. *Для всех игр с совершенной памятью смешанные и поведенческие стратегии эквивалентны. То есть для всех* b_i, b_{-i} *и всех* $\sigma_i \in \Omega_i(b_i)$, $\sigma_{-i} \in \Omega_{-i}(b_{-i})$ *мы имеем*

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(b_i, b_{-i}), \tag{2.8}$$

где u_i *— функция выигрышей.*

В игре с совершенной памятью каждый игрок в каждом информационном множестве помнит всю последовательность сделанных им ходов, а также не забывает все однажды увиденные им ходы других игроков.

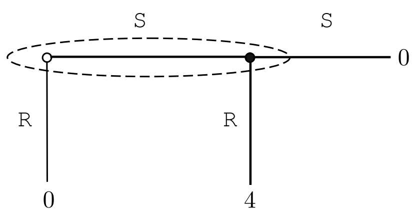


Рис. 2.15. Незадачливый шофер

Рассмотрим ***пример игры без совершенной памяти***. Водитель едет домой в слегка нетрезвом состоянии (рис. 2.15). На дороге два поворота, на которых можно повернуть направо (R) или поехать прямо (S). Водителю нужно повернуть направо на втором повороте. Но проехав первый поворот, он тут же забывает, что его проехал.

В игре две чистые стратегии: R и S. Обе приносят нулевой выигрыш. Соответственно, выигрыш при любой смешанной стратегии тоже будет нулевым: если игрок с вероятностью p сразу сворачивает на первом повороте (т.е. играет чистую стратегию R) и с вероятностью $1-p$ никогда не сворачивает (чистая стратегия S), то его ожидаемый выигрыш будет $0 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 0$. Если же игрок принимает поведенческую стратегию «при любой возможности поворачивать направо с вероятностью p», то его ожидаемый выигрыш будет $0 \cdot p + (1-p) \cdot (4 \cdot p + 0 \cdot (1-p)) = 4p(1-p)$. В этом случае поведенческая стратегия при $p = 1/2$ принесет ему ожидаемый выигрыш, равный 1. Следовательно, в этой игре смешанные и поведенческие стратегии не эквивалентны.

«***Верю — не верю***». В колоде, рубашкой кверху, лежат две карты: шестерка и туз. Первый игрок берет одну карту, смотрит на нее и называет ее достоинство (6 или туз). Если первый игрок сказал «6», то он проигрывает второму игроку 1 руб. Если первый игрок сказал «туз», то второй игроков может поверить или не поверить. Если второй игрок поверил, то он проигрывает первому игроку 1 руб. Если второй игрок не поверил, то первый игрок открывает карту. Если это туз, то первый выигрывает 2 руб. Если это шестерка, то первый игрок проигрывает 2 руб.

[5] Определение игры с совершенной памятью можно найти, например, в учебнике Майерсона [Myerson, 1991, p. 43].

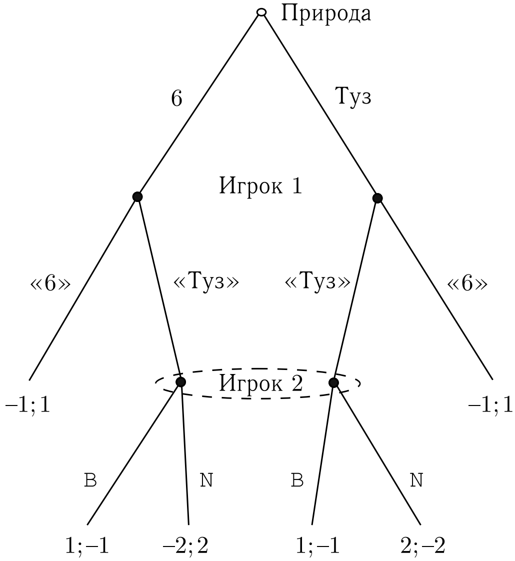


Рис. 2.16. Игра «верю — не верю»

Дерево этой игры показано на рис. 2.16. Первый ход делает природа — она решает, какую карту получит первый игрок. У первого игрока два информационных множества и, соответственно, четыре стратегии. Однако любая стратегия, которая предписывает заявлять «6» при наличии туза, доминируется стратегией, которая при наличии туза предписывает говорить «туз». Поэтому поведенческой стратегией игрока 1 будем считать величину p, равную вероятности того, что этот игрок заявит «туз» при условии, что у него на руках шестерка. Стратегия игрока 2 — вероятность q сказать «не верю». Выразим ожидаемые выигрыши обоих игроков через p и q:

$$\begin{aligned} &u_1(p,q) = -\frac{1-p}{2} - 2\,q\,\frac{p}{2} + (1-q)\,\frac{p}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\,q + \frac{1}{2}\,(1-q) = p - \frac{3}{2}\,p\,q + \frac{q}{2},\\ &u_2(p,q) = -u_1(p,q). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Равновесием Нэша в этой игре является $\left(p^* = 1/3;\ q^* = 2/3\right)$.

Равновесные стратегии в игре «верю — не верю» являются смешанными. Действительно, если второй игрок всегда верит, то первому игроку будет выгодно всегда говорить «туз». В таком случае второй игрок должен все время проверять карту первого игрока. Однако же если второй игрок всегда проверяет, то первый игрок должен всегда говорить «6», получив шестерку. Но тогда, если первый игрок никогда не врет, второму нет смысла проверять его карту! По сути, мы имеем игру типа однопериодной игры «инспекция». Очередность ходов здесь компенсируется асимметричной информацией: первый игрок знает, какая карта у него на руках, а второй — нет.

2.1.5. СОВЕРШЕНСТВО ПО ПОДЫГРАМ

Метод обратной индукции можно использовать не только для игр с совершенной информацией. Дадим такое определение.

Определение 2.4. Пусть Γ — игра в развернутой форме. *Подыгра* $\Gamma(x)$ — это часть дерева игры, которая начинается с некоторой вершины x и удовлетворяет следующим свойствам:

1. x — единственный элемент в своем информационном множестве.
2. Информационные множества, содержащие вершины из подыгры $\Gamma(x)$, не содержат вершин, лежащих вне дерева подыгры $\Gamma(x)$.

Приведем пример — вариацию на тему игры «сжигание мостов». Генерал должен защищать город на берегу реки. До того как враг нападает, генерал принимает решение, сжигать мост, соединяющий город с другим берегом (B) или нет (N). На этот раз враг не является игроком и нападает автоматически. Далее командиры двух отрядов (подчиненные генерала) принимают решение: бежать с поля боя (R) или нет (F). В случае, когда мост не разрушен, выигрыши командиров в зависимости от принимамых ими решений таковы:

		Командир 2	
		R	F
Командир 1	R	3; 3	5; 2
	F	2; 5	4; 4

Если мост уничтожен, то отступающему отряду придется наводить переправу во время боя. Выигрыши командиров тогда будут

		Командир 2	
		R	F
Командир 1	R	1; 1	3; 2
	F	2; 3	4; 4

Наконец, выигрыш генерала равен 1, если город остался защищать хотя бы один отряд, и 0, если оба отряда бежали. Дерево этой игры показано на рис. 2.17.

Формально, эта игра не является игрой с совершенной информацией, так как после первого хода генерала два командира принимают решения одновременно. Однако эту игру можно решить способом, очень похожим на метод обратной индукции, используемый нами для решения игр с совершенной информацией. У нас две подыгры, соответствующие каждому из двух возможных действий генерала. В первой подыгре, когда мост не сожжен, равновесный профиль стратегий первого и второго командира будет (R, R). Во второй подыгре, когда мост сожжен, равновесие будет (F, F).

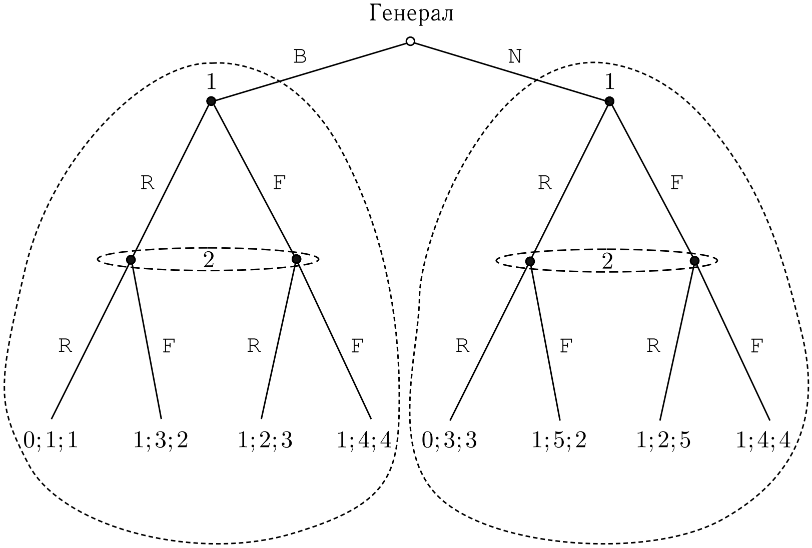


Рис. 2.17. Сжигание мостов — 2. Подыгры выделены пунктиром

Следовательно, генерал получает выигрыш 0, если делает ход N, и 1, если делает ход B. Дадим определение равновесия, которое мы получили.

Определение 2.5. Пусть Γ — динамическая игра. Профиль стратегий является *совершенным по подыграм*, если он является равновесным для каждой из подыгр Γ.

Любое равновесие, полученное методом обратной индукции, является совершенным по подыграм.

В игре «лобовая атака» — две подыгры. В каждой подыгре Фернандо Алонсо принимает решение, свернуть ему или нет. Каждая подыгра соответствует одному из решений Ивана (свернуть/не свернуть).

В игре «ультиматум» — континуум подыгр, по одной для каждого $p \in [0, 100]$. В каждой подыгре Михаил решает, согласиться ему с предложенным дележом или отказаться от него.

На рис. 2.18 показана игра из работы Рабина [Rabin, 1988] и учебника Фаденберга и Тироля [Fudenberg, Tirole, 1991, p. 99–100].

У этой игры имеются две подыгры (показаны пунктиром).

Подыгра 2 является игрой в координацию между игроками 1 и 3. У этой игры имеются три равновесия. Два из них — в чистых стратегиях, дающие выигрыш (7; 10; 7), и одно — в смешанных, которое дает выигрыш (3,5; 5; 3,5). Если в подыгре 2 играется одно из двух координационных равновесий ((F, G) либо (G, F)), то игрок 2 должен делать ход L. Если в подыгре 2 играется равновесие в смешанных стратегиях (т.е. игроки 1 и 3 не координируют свои действия), то игрок 2 должен сделать ход R.

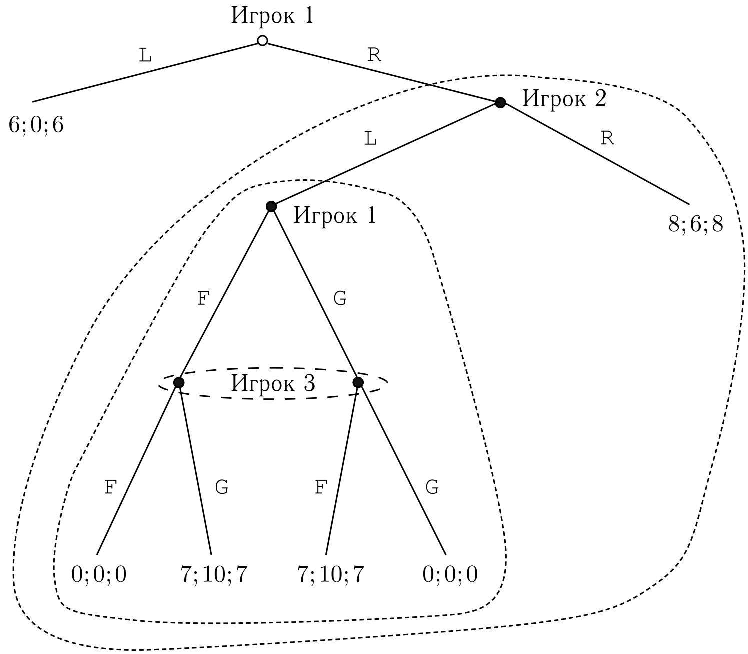


Рис. 2.18. Координация или нет?

Следовательно, в подыгре 1 выигрыш игрока I составит либо 7, либо 8, т.е. его первый ход всегда будет R. В итоге это дает нам три совершенных по подыграм равновесия:

$$((\mathtt{R},\mathtt{G}),\mathtt{L},\mathtt{F}), \quad ((\mathtt{R},\mathtt{F}),\mathtt{L},\mathtt{G}) \quad \text{и} \quad \big((\mathtt{R},\ 0{,}5\,\mathtt{G}+0{,}5\,\mathtt{F}),\mathtt{R},\ 0{,}5\,\mathtt{G}+0{,}5\,\mathtt{F}\big).$$

Может ли ход L быть разумным с точки зрения игрока 1? Пусть, например, игрок 1 не может координировать свои действия с игроком 3 в подыгре 2. Если игрок 2 об этом не знает (и думает, что 1 и 3 будут координироваться), то в итоге выигрыши игроков в подыгре 1 составят (3,5; 5; 3,5). В этом случае игроку 1 в начале игры надо сделать ход L. Таким образом, понятие совершенства по подыграм предполагает не только то, что все игроки ожидают, что во всех подыграх будут реализовываться равновесия Нэша, но и то, что игроки во всех подыграх ожидают реализации одних и тех же равновесий [Fadenberg, Tirole, 1991, p. 100].

2.1.6. ПРИМЕРЫ

Модель конкуренции Штакельберга. Рассмотрим модель конкуренции из гл. 1. В стране N есть два производителя виджетов. Обе фирмы должны решить, сколько штук виджетов произвести в течение ближайшего месяца. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — объем производства второй.

Пусть взаимодействие фирм реализуется в два этапа.

Этап 1. Фирма 1 выбирает q_1.
Этап 2. Фирма 2 выбирает q_2.

Как и раньше, функция спроса на виджеты имеет вид $p = 1 - q_1 - q_2$, где p — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течение месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы i равны $c\,q_i$, где $0 \leqslant c < 1$. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 p - c\,q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c\,q_1, \\ u_2 &= q_2 p - c\,q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c\,q_2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Найдем совершенное по подыграм равновесие. В этой игре для каждого q_1, выбранного первой фирмой, определяется подыгра, в которой фирма 2 выбирает q_2. Решением максимизационной задачи фирмы 2 будет

$$\check{q}_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1 - q_1 - c}{2}, & q_1 < 1 - c; \\ 0, & q_1 \geqslant 1 - c. \end{cases} \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) задает стратегию фирмы 2 в совершенном по подыграм равновесии. Теперь необходимо найти q_1, который максимизирует выигрыш первой фирмы при условии, что вторая фирма выбирает стратегию (2.11). Подставим $\check{q}_2(q_1)$ в u_1:

$$u_1(q_1, \check{q}_2(q_1)) = \begin{cases} \dfrac{q_1}{2}(1 - q_1 - c), & q_1 < 1 - c; \\ q_1(1 - q_1 - c), & q_1 \geqslant 1 - c. \end{cases} \tag{2.12}$$

Максимизируя $u_1(q_1, \check{q}_2(q_1))$ по q_1, получим $q_1^* = (1-c)/2$, $\check{q}_2(q_1^*) = (1-c)/4$. Заметим, что это решение отличается от равновесия в игре Курно, в которой обе фирмы одновременно принимают решения о производстве (тогда было бы $q_1^* = q_2^* = (1-c)/3$). Возможность делать первый ход дает фирме 1 преимущество: в модели Штакельберга ее прибыль выше, чем в модели Курно. При этом прибыль фирмы 2 будет ниже.

Модель конкуренции с инвестициями в производственные мощности. Постановка модели Штакельберга вызывает ряд вопросов. Почему в какой-нибудь отрасли у одной из фирм будет преимущество, позволяющее ей первой решать, сколько производить? Что вообще означает «выбор объемов производства»? В долгосрочной перспективе количество товара, производимого фирмой, определяется ее производственными мощностями. Если фирма хочет увеличить объем производства, то она должна построить новый завод. При этом начальные условия у фирм могут быть разными. Одна из фирм может обладать преимуществом, позволяющим ей первой принимать решение относительно того, какого размера завод следует построить. Например, фирма может первой разработать технологию производства нового товара; обладать бóльшими финансовыми возможностями; обладать необходимым административным ресурсом. Фирма, которая уже построила завод, обладает более низкими предельными издержками по сравнению с фирмой, которой только предстоит принять решение о том, какого размера завод ей предстоит построить (и, соответственно, сколько товара производить). Такова интерпретация классической [Stackelberg, 1934] модели конкуренции, предложенная Спенсом [Spence, 1977] и Декситом [Dixit, 1979, 1980]. Ниже представлена модель конкуренции между двумя фирмами, взятая из работы Диксита [Dixit, 1980]. Обзоры таких работ содержатся в книге Тироля [Tirole, 1987, p. 314] и Вивеса [Vives, 1999, ch. 7].

Предположим, что две фирмы играют в динамическую игру со следующим порядком ходов.

Этап 1. Фирма 1 выбирает $\overline{q}_1$ — установленную мощность перед тем, как на рынок войдет фирма 2.

Этап 2. Фирмы 1 и 2 выбирают объемы производства q_1 и q_2 соответственно.

Функции выигрышей двух фирм при этом будут

$$\begin{aligned} u_1 &= p\,q_1 - c\,\overline{q}_1 - c \cdot \max\{0, q_1 - \overline{q}_1\}, \\ u_2 &= p\,q_2 - c\,q_2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где c, $0 < c \leqslant 1/2$, — стоимость установленной мощности, позволяющей производить 1 ед. товара за указанный период. Пусть, как и прежде, $p = 1 - q_1 - q_2$. Таким образом, мы предполагаем, что на втором этапе предельные издержки фирмы 1 равны 0 при $q_1 < \overline{q}_1$ и c при $q_1 > \overline{q}_1$, так как затраты на строительство завода на первом этапе являются невозвратными. Предельные издержки фирмы 2 всегда равны c.

Решение задачи максимизации выигрыша на втором этапе дает нам следующую функцию реакции для первой фирмы:

$$\check{q}_1(q_2) = \begin{cases} 0, & q_2 \geqslant 1; \\ \dfrac{1 - q_2}{2}, & q_2 \in [1 - 2\,\overline{q}_1, 1); \\ \overline{q}_1, & q_2 \in [1 - 2\,\overline{q}_1 - c, 1 - 2\,\overline{q}_1); \\ \dfrac{1 - q_2 - c}{2}, & q_2 < 1 - 2\,\overline{q}_1 - c. \end{cases} \tag{2.14}$$

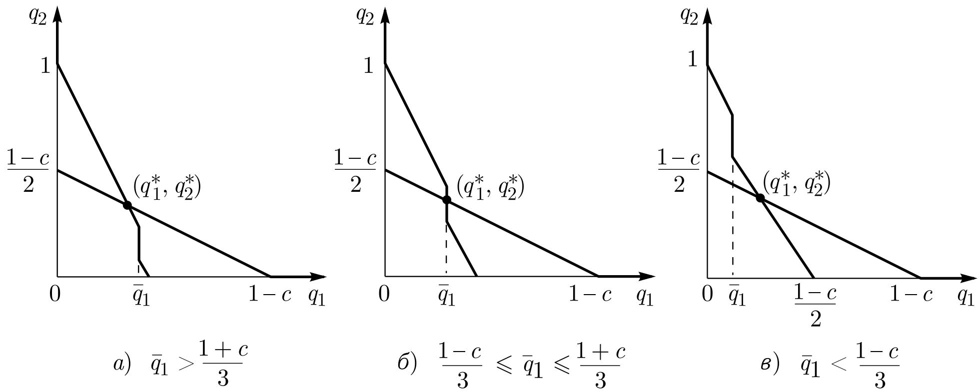


Рис. 2.19. Равновесие на втором этапе, в зависимости от $\overline{q}_1$

Для второй фирмы функция реакции будет такой же, как и в задачах Курно и Штакельберга:

$$\check{q}_2(q_1) = \begin{cases} 0, & q_1 \geqslant 1-c; \\ \dfrac{1-q_1-c}{2}, & q_1 < 1-c. \end{cases} \tag{2.15}$$

Нам нужно найти решение системы

$$\check{q}_1(q_2) = q_1, \qquad \check{q}_2(q_1) = q_2 \tag{2.16}$$

для всех возможных значений $\overline{q}_1$. Так как графики функций реакции пересекаются ровно в одной точке, решение единственно. Всего возможны три случая (рис. 2.19).

1. $q_1 < \overline{q}_1$. Равновесные q_1, q_2 являются решением системы

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-q_2}{2}, \\ q_2 &= \frac{1-q_1-c}{2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Решая эту систему, получаем $q_1 = (1+c)/3$, $q_2 = (1-2\,c)/3$. Это решение существует при $\overline{q}_1 > (1+c)/3$.

2. $\overline{q}_1 < q_1$. Равновесные q_1, q_2 являются решением системы

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-q_2-c}{2}, \\ q_2 &= \frac{1-q_1-c}{2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Решая эту систему, получаем $q_1 = (1-c)/3$, $q_2 = (1-c)/3$. Это решение существует при $\overline{q}_1 < (1-c)/3$.

3. $\overline{q}_1 = q_1$. Тогда мы будем иметь $q_2 = \dfrac{1-\overline{q}_1-c}{2}$. Это решение существует при $\overline{q}_1 \in \left[\dfrac{1-c}{3}, \dfrac{1+c}{3}\right]$.

Мы нашли закон, по которому q_1, q_2, реализуемые в совершенном по подыграм равновесии на втором этапе игры, зависят от $\overline{q}_1$. Можно подставить эти значения в u_1 и получить зависимость u_1 от $\overline{q}_1$. Для того чтобы найти равновесие во всей игре, нам достаточно найти, при каком $\overline{q}_1$ достигается максимум выигрыша первой фирмы u_1. При данном $\overline{q}_1$ рыночная цена будет определяться уравнением

$$p = 1 - q_1 - q_2 = \begin{cases} \dfrac{1+2c}{3}, & \overline{q}_1 < \dfrac{1-c}{3}; \\ \dfrac{1-\overline{q}_1+c}{2}, & \overline{q}_1 \in \left[\dfrac{1-c}{3}, \dfrac{1+c}{3}\right]; \\ \dfrac{1+c}{3}, & \overline{q}_1 > \dfrac{1+c}{3}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Функция выигрышей фирмы 1 будет

$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{(1-c)^2}{9}, & \overline{q}_1 < \dfrac{1-c}{3}; \\ \dfrac{1-\overline{q}_1-c}{2}\overline{q}_1, & \overline{q}_1 \in \left[\dfrac{1-c}{3}, \dfrac{1+c}{3}\right]; \\ \dfrac{(1+c)^2}{9} - c\overline{q}_1, & \overline{q}_1 > \dfrac{1+c}{3}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Максимизируя u_1 по $\overline{q}_1$, получим

$$\overline{q}_1 = \begin{cases} \dfrac{1+c}{3}, & c \leqslant \dfrac{1}{5}; \\ \dfrac{1-c}{2}, & c > \dfrac{1}{5}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Что мы видим? Фирма 1 будет стараться строить свои производственные мощности на первом этапе — т.е. до момента принятия решения фирмой 2. Делая это, фирма 1 рассчитывает получить преимущество в конкурентной борьбе с фирмой 2 на втором этапе. Насколько серьезным будет это преимущество? Найдем равновесные объемы выпуска каждой фирмы и цену в зависимости от c:

	$\overline{q}_1$	q_1	q_2	p
$c \leqslant \frac{1}{5}$	$\frac{1+c}{3}$	$\frac{1+c}{3}$	$\frac{1-2c}{3}$	$\frac{1+c}{3}$
$c > \frac{1}{5}$	$\frac{1-c}{2}$	$\frac{1-c}{2}$	$\frac{1-c}{4}$	$\frac{1+3c}{4}$

Сравним эти результаты с тем случаем, когда обе фирмы находятся в равных условиях и принимают решения одновременно (эта модель была рассмотрена на с. 25–27). В обоих случаях возможность инвестировать в установленную мощность дает преимущество первой фирме. Однако при меньших издержках выпуск первой фирмы больше, а выпуск второй фирмы меньше, чем в исходном случае. Рыночная цена p будет ниже, если одна из фирм может заранее инвестировать в производственные мощности. Стратегическое поведение первой фирмы не только приводит к большей прибыли для этой фирмы, но и к большему благосостоянию потребителей, так как в итоге они получат больший объем товара по меньшей штучной цене.

Насколько распространено такое стратегическое поведение? Согласно Гхемавату [Ghemawat, 1997, ch. 3], в начале 1970-х годов компания Du Pont могла вводить новые мощности по производству диоксида титана именно для того, чтобы повлиять на стимулы конкурентов и не допустить увеличения их рыночной доли.

Диктатура, демократия и революция. Почему революции происходят в одних странах, а в других нет? Разберем модель[6] из известной книги Дарона Асемоглу и Джеймса Робинсона [Acemoglu, Robinson, 2005].

В некотором государстве общество разделено на два класса: богатых и бедных. Исторически в стране существовал авторитарный режим: все ключевые решения принимал диктатор и небольшая кучка богачей, которые его поддерживали. Неудивительно, что в этой стране богатые не платили налоги; бедные всегда были возмущены этим фактом. За последний год возмущение достигло предела, и над обществом нависла угроза революции — насильственного свержения власти и национализации всей собственности богатого класса.

Богатые понимают, что должны идти на уступки. У них есть два варианта. При первом варианте богатые обещают бедным более справедливое распределение доходов, но сохраняют политический контроль и возможность самим устанавливать ставку налогообложения в будущем (в том числе, и через несколько лет, когда угроза революции пройдет). При втором варианте проходит демократизация общества. Бедные получают избирательные права (и юридические, и фактические), и богатые навсегда теряют контроль над экономической политикой (хотя, в отличие от революционного сценария, они сохраняют бóльшую часть своей собственности). Какой вариант выберут богатые? Станут ли бедные устраивать революцию?

Представим взаимодействие богатых и бедных в виде динамической игры. Первый ход делают богатые, которые решают, стоит ли вводить демократию (D) или нет (N). На следующем ходе устанавливается ставка

[6] Данный пример также разобран в книге Маккарти и Мейровица [McCarthy, Meirowitz, 2007].

налогообложения. При демократии налоги определяют бедные (так как их большинство). При авторитарном строе налоги определяют богатые. После того как ставка налогообложения установлена, бедные решают, устроить революцию (R) или нет (NR). Наконец, если на первом ходе не была введена демократия и если на третьем ходе не произошла революция, то возможны два варианта развития событий. С вероятностью $1 - q$ игра заканчивается и реализуется ставка налогообложения, выбранная богатыми на предыдущем ходе. С вероятностью q богатые снова устанавливают ставку налогообложения, после чего игра заканчивается. Дерево этой игры показано на рис. 2.20.

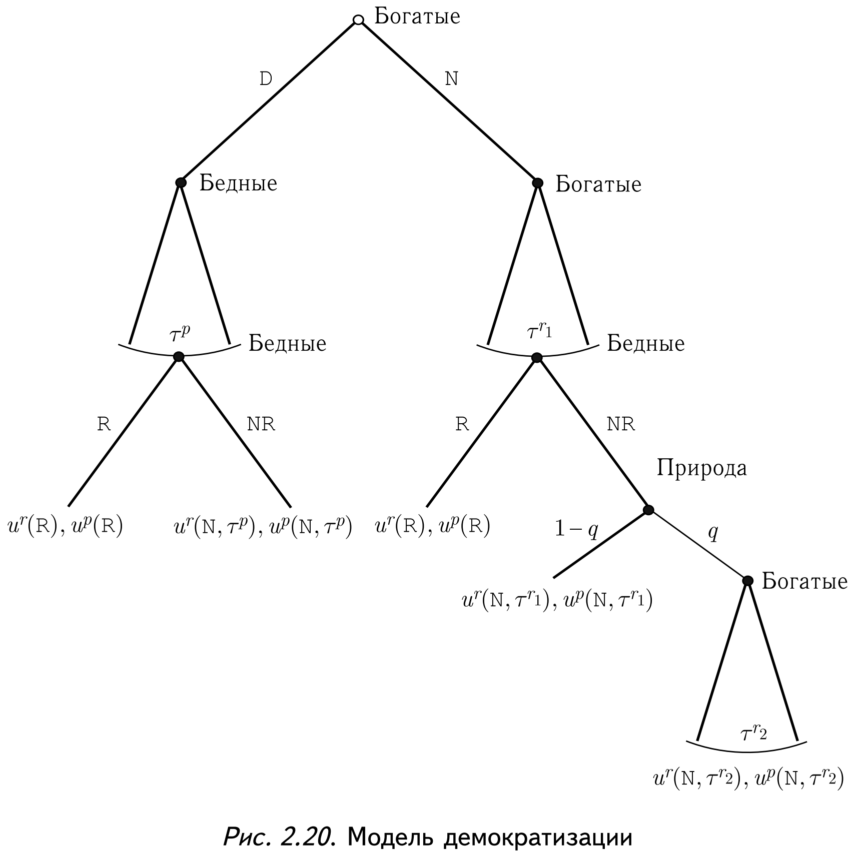


Рис. 2.20. Модель демократизации

Формально, стратегией бедных[7] будет (τ^p, d_D^p, d_R^p), где $\tau^p \in [0, 1]$ — ставка налогообложения, устанавливаемая бедными (в том случае, если первый ход богатых будет D); $d_D^p \in \{\mathrm{R}, \mathrm{NR}\}$ и $d_R^p \colon [0, 1] \to \{\mathrm{R}, \mathrm{NR}\}$— решения, устра-

[7] Мы предполагаем, что и бедные, и богатые смогли решить проблему коллективных действий; поэтому все богатые (как и все бедные) у нас представлены одним игроком.

ивать ли революцию при первом ходе богатых D и N соответственно. Последнее решение также зависит от τ^r. Стратегия богатых есть $(d^r, \tau^{r_1}, \tau^{r_2})$, где $\tau^{r_1}, \tau^{r_2} \in [0,1]$ — ставки налогооблажения, устанавливаемые богатыми в первый и во второй раз, $d^r \in \{\mathtt{D}, \mathtt{N}\}$ — решение богатых о том, проводить демократизацию или нет.

Предположим, что при отсутствии революции выигрыш элиты и народа будет зависеть от ставки налогообложения таким образом:

$$u^r(\mathtt{N}, \tau) = (1-\tau)\, y^r + \left(\tau - 0{,}5\,\tau^2\right) \overline{y}, \tag{2.22}$$

$$u^p(\mathtt{N}, \tau) = (1-\tau)\, y^p + \left(\tau - 0{,}5\,\tau^2\right) \overline{y}. \tag{2.23}$$

Здесь y^r — доход богатого гражданина, y^p — доход бедного гражданина, $\overline{y}$ — средний доход. Мы предполагаем, что налогообложение связано с издержками. При ставке налогообложения τ с каждого рубля дохода в бюджет попадает $\tau - 0{,}5\,\tau^2$ руб.; последний член и есть издержки налогообложения. Пусть $y^r > y^p$ и $\overline{y} = \lambda\, y^p + (1-\lambda)\, y^r$, где $\lambda \geqslant 0{,}5$ — доля бедных в общем числе граждан.

Предположим, что в случае революции бедные отбирают у богатых весь их доход. При этом часть совокупного дохода $1-\mu$ уничтожается. Выигрыши богатых и бедных в случае революции будут такими:

$$u^r(\mathtt{R}) = 0, \tag{2.24}$$

$$u^p(\mathtt{R}) = \frac{\mu\,\overline{y}}{\lambda}. \tag{2.25}$$

Найдем совершенное по подыграм равновесие.

Максимизируя $u^r(\mathtt{N}, \tau)$ по τ, получим, что оптимальная ставка налогообложения для богатых равна нулю. Следовательно, в любом совершенном по подыграм равновесии мы имеем $\tau^{r_2^*} = 0$, так как на последнем этапе игры богатые установят наилучшую, со своей точки зрения, ставку налогообложения.

Максимизируя $u^p(\mathtt{N}, \tau)$ по τ, получим оптимальную ставку налогообложения для бедных:

$$\tau^{p^*} = \frac{\overline{y} - y^p}{\overline{y}}. \tag{2.26}$$

Подставим $\tau^{r_2^*}$ и τ^{p^*} в целевые функции народа и элиты. После раскрытия скобок мы получим

$$u^r(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) = y^r, \tag{2.27}$$

$$u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) = y^p, \tag{2.28}$$

$$u^r(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) = \frac{1}{2\,\overline{y}}\left(2\, y^p y^r + \overline{y}^2 - (y^p)^2\right), \tag{2.29}$$

$$u^p(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) = \frac{1}{2\,\overline{y}}\left(\overline{y}^2 + (y^p)^2\right). \tag{2.30}$$

Посмотрим, каким будет d^p_D — т.е. решение бедных относительно революции при демократическом режиме. Мы имеем $u^p(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) \geqslant u^p(\mathtt{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\mu \leqslant \overline{\mu} = \frac{\lambda}{2\,\overline{y}^2}\big((y^p)^2 + \overline{y}^2\big). \tag{2.31}$$

Следовательно, в любом равновесии $d^{p\,*}_D = \mathtt{NR}$, если $\mu \leqslant \overline{\mu}$, и $d^{p\,*}_D = \mathtt{R}$, если $\mu > \overline{\mu}$.

Революция не произойдет, если величина μ достаточно мала (т.е. если в ходе революции будет уничтожен достаточно большой процент благосостояния государства) либо если доля бедного населения достаточно близка к 0,5. Революция произойдет, если средний доход бедного y^p достаточно низок либо если величина μ высока (т.е. издержки экспроприации богатых низки).

Теперь найдем равновесный d^p_R. При недемократическом режиме революция не произойдет в том случае, когда

$$(1-q)\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_1}) + q\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) \geqslant u^p(\mathtt{R}). \tag{2.32}$$

Заметим, что это условие зависит от τ^{r_1} (произвольной ставки налогообложения, предложенной богатыми на предыдущем этапе игры) и $\tau^{r_2^*}$ (ставки налогообложения, предлагаемой богатыми на следующем этапе игры в совершенном по подыграм равновесии). Преобразуя это условие, получим

$$\begin{aligned} q\,y^p + (1-q)\Big(y^p(1-\tau^{r_1}) + \Big(\tau^{r_1} - 0{,}5\,(\tau^{r_1})^2\Big)\overline{y}\Big) = \\ = y_p + (1-q)\Big((\overline{y} - y^p)\,\tau^{r_1} - 0{,}5\,\overline{y}\,(\tau^{r_1})^2\Big) \geqslant \frac{\mu\,\overline{y}}{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

или

$$d^{p\,*}_R(\tau^{r_1}) = \begin{cases} \mathtt{R}, & \mu > \dfrac{\lambda\,y_p + \lambda\,(1-q)\,\big((\overline{y} - y^p)\,\tau^{r_1} - 0{,}5\,\overline{y}\,(\tau^{r_1})^2\big)}{\overline{y}}; \\ \mathtt{NR}, & \mu \leqslant \dfrac{\lambda\,y_p + \lambda\,(1-q)\,\big((\overline{y} - y^p)\,\tau^{r_1} - 0{,}5\,\overline{y}\,(\tau^{r_1})^2\big)}{\overline{y}}, \end{cases} \tag{2.34}$$

Возможны три случая.

Во-первых, при $\mu \leqslant \mu_0 = \dfrac{\lambda y_p}{\overline{y}}$ условие (2.33) будет верно при $\tau^{r_1} = 0$. Следовательно, мы будем иметь $\tau^{r_1 *} = 0$. Богатые смогут установить наиболее выгодные для себя налоги и при этом избежать революции.

Во-вторых, при $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ условие (2.33) будет верно для некоторых $\tau^{r_1} > 0$. Ожидаемый выигрыш $(1-q)\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_1}) + q\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2 *})$ достигает максимума по τ^{r_1} при $\tau^{r_1} = \tau^{p*}$. Следовательно, если

$$(1-q)\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{p*}) + q\,u^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2 *}) = y_p + (1-q)\,\frac{(\overline{y} - y^p)^2}{2\,\overline{y}} \geqslant \frac{\mu\,\overline{y}}{\lambda} = u^p(\mathtt{R}), \tag{2.35}$$

или

$$\mu \leqslant \mu_1 = \frac{\lambda\, y^p}{\overline{y}} + \lambda\,(1-q)\,\frac{(\overline{y}-y^p)^2}{2\,\overline{y}^2}, \tag{2.36}$$

то мы будем иметь $\tau^{r_1 *} \leqslant \tau^{p*}$ (рис. 2.21).

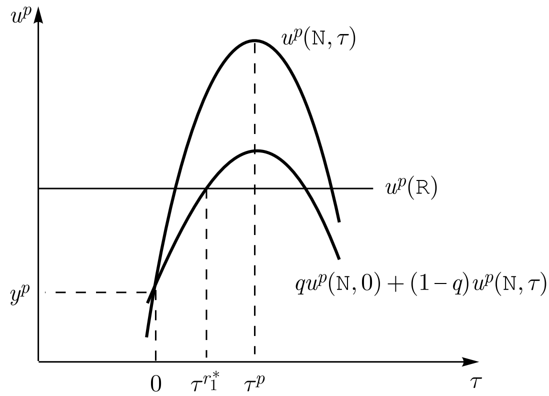


Рис. 2.21. Равновесная стратегия при $\mu < \underline{\mu}$

В-третьих, при $\mu \geqslant \mu_1$ для всех $\tau^{r_1} \in [0,1]$ мы имеем $d_R^{p\,*}(\tau^{r_1}) = \mathrm{R}$. Богатые могут выбрать любой τ^{r_1}, так как в любом случае на следующем ходу произойдет революция, и они получат нулевой выигрыш.

Наконец, найдем равновесное решение о демократизации d^r. Заметим, что $\mu_0 < \mu_1 < \overline{\mu}$. Возможны три случая.

1. $\mu > \overline{\mu}$. Тогда вне зависимости от d^r происходит революция. Следовательно, d^{r*} может быть любым.
2. $\mu \in [\overline{\mu}, \mu_1)$. Революция происходит только при $d^r = \mathrm{N}$. Следовательно, богатые выбирают $d^{r*} = \mathrm{D}$.
3. $\mu \leqslant \mu_1$. Революция не происходит ни при каком d^r. Богатые выбирают $d^{r*} = \mathrm{N}$, так как в этом случае $\tau^{r_1 *} \leqslant \tau^{p*}$.

Из трех перечисленных случаев наибольший интерес представляет второй. Почему богатые соглашаются ввести демократию, т.е. навсегда отказаться от политического контроля над экономикой? Действительно, с их стороны было бы лучше, если они могли бы предложить бедным ставку налогообложения, достаточно высокую для того, чтобы предотвратить революцию, но ниже той, которая установилась бы при демократическом режиме. Однако это не всегда возможно. С вероятностью q богатые смогут нарушить данное ими обещание τ^{r_1} и установить ставку налогообложения $\tau^{r_2} = 0$ после того, как угроза революции исчезнет. Понимая это, бедные могут совершить революцию, даже если богатые предложат им $\tau^{r_1} = \tau^{p*}$. Богатым не остается ничего, кроме как отказаться от возможности в дальнейшем устанавливать налоги.

Согласно Асемоглу и Робинсону невозможность элит сдерживать данные народу обещания является одной из основных причин как для революций, так и для мирных и ненасильственных демократизаций во всем мире. Именно такой механизм, согласно Асемоглу и Робинсону, привел к демократизации и падению режима апартеида в Южно-Африканской Республике. Исторически, территория ЮАР была заселена темнокожими африканскими племенами. В XVII в. появились первые европейские поселенцы, потомки которых в начале XX в. образовали независимое государство. Темнокожие, составлявшие более 90% населения страны, были практически полностью лишены политических и экономических прав. У них не было права свободно передвигаться по территории страны и занимать государственные должности выше определенного уровня; возможность голосовать была сильно ограничена. К середине 1980-х годов угроза гражданской войны побудила правительство, представлявшее интересы белого меньшинства, пойти на уступки. Непреклонным условием, поставленным Африканским Национальным Конгрессом под предводительством Нельсона Манделы, были равные избирательные права для всего населения ЮАР. В итоге белое правительство согласилось, что привело к первым в истории этой страны свободным выборам в 1994 г. и избранию правительства, представляющего интересы темнокожего большинства.

Борьба за ренту в динамике. Вернемся к модели борьбы за ренту[8] на с. 55–57. Две фирмы конкурируют за право построить магазин на центральной площади города; вероятность того, что фирме будет предоставлено право это сделать, зависит от потраченных ею усилий на лоббирование местной администрации. Пусть $r_i \geqslant 0$ — усилия, потраченные фирмой $i = 1, 2$. Предположим, что вероятность победы пропорциональна собственным усилиям и обратно пропорциональна усилиям, затраченным обеими фирмами. Предположим, однако, что количество прибыли, которое может быть извлечено из построенного магазина, разное для разных фирм. Пусть

$$u_1(r_1, r_2) = R\,\frac{r_1}{r_1 + r_2} - r_1, \tag{2.37}$$

$$u_2(r_1, r_2) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} - r_2, \tag{2.38}$$

где $R > 0$ — ценность приза для первой фирмы (для второй фирмы мы предполагаем, что ценность приза равна единице). Найдем сначала равновесие Нэша в игре, в которой фирмы одновременно выбриают r_1 и r_2. Мы имеем

$$\frac{\partial u_1(r_1, r_2)}{\partial r_1} = R\,\frac{r_2}{(r_1 + r_2)^2} - 1, \tag{2.39}$$

[8] Предложенная здесь модель взята из работ Линстера [Linster, 1993] и Лейнингера [Leininger, 1993].

$$\frac{\partial u_2(r_1, r_2)}{\partial r_2} = \frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} - 1. \tag{2.40}$$

По условиям первого порядка максимизации выигрышей при $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ мы должны иметь $\frac{\partial u_1(r_1, r_2)}{\partial r_1} = \frac{\partial u_2(r_1, r_2)}{\partial r_2} = 0$, или $R r_2 = r_1$. Подставляя это выражение в первое условие, мы получим

$$r_1^* = \frac{R^2}{(1 + R)^2}, \tag{2.41}$$

$$r_2^* = \frac{R}{(1 + R)^2} \tag{2.42}$$

и равновесные выигрыши

$$u_1^* = \frac{R^3}{(1 + R)^2}, \tag{2.43}$$

$$u_2^* = \frac{1}{(1 + R)^2}. \tag{2.44}$$

В такой игре издержки, выигрыш и вероятность победы выше у того игрока, у которого выше оценка приза, за который идет борьба. При $R > 1$ таким игроком является первая фирма, при $R < 1$ — вторая.

Величина R имеет и другую интерпретацию. Она определяет то, насколько игрок «сильный» — т.е. насколько эффективно его усилия трансформируются в вероятность победы. Действительно, мы имеем

$$\frac{u_1(r_1, r_2)}{R} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_1}{R}. \tag{2.45}$$

Следовательно, рассматриваемая игра эквивалентна той, при которой оба игрока одинаково ценят приз, но издержки борьбы за этот приз у них разные. При $R > 1$, например, фирма 1 имеет преимущество.

Что произойдет, если у одного из двух игроков есть стратегическое преимущество? Фирма 1 первой успела подсуетиться и потратить r_1. Фирма 2, принимая решение о том, сколько потратить на лоббирование, уже знает, сколько потратила фирма 1. Как будет выглядеть игра и приведет ли стратегическое преимущество первой фирмы к дополнительному выигрышу?

В силу условий первого порядка для фирмы 2 мы должны иметь $\frac{\partial u_2(r_1, r_2)}{\partial r_2} = 0$ при $r_2 > 0$, или $\frac{\partial u_2(r_1, r_2)}{\partial r_2} \leqslant 0$ при $r_2 = 0$. Это дает нам функцию реакции для этой фирмы:

$$\check{r}_2(r_1) = \begin{cases} \sqrt{r_1} - r_1, & r_1 \leqslant 1; \\ 0, & r_1 > 1. \end{cases} \tag{2.46}$$

Подставляя (2.46) в (2.39), получим

$$u_1(r_1, \check{r}_2(r_1)) = \begin{cases} R\sqrt{r_1} - r_1, & r_1 \leqslant 1; \\ R - r_1, & r_1 > 1. \end{cases} \tag{2.47}$$

Максимизируя (2.47) по r_1 и подставляя результат в (2.46), мы получим равновесные затраты на лоббирование для обеих фирм. При $R < 2$ мы получим

$$r_1^{1*} = \frac{R^2}{4}, \tag{2.48}$$

$$r_2^{1*} = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{R}{2}\right), \tag{2.49}$$

а также

$$u_1^{1*} = \frac{R^2}{4}, \tag{2.50}$$

$$u_2^{1*} = \left(1 - \frac{R}{2}\right)^2. \tag{2.51}$$

Сравнивая u_1^* и u_1^{1*}, мы видим, что $u_1^* < u_1^{1*}$ при $R \geqslant 1$; фирма 1 выигрывает от того, что ей принадлежит первый ход. Мы имеем $u_2^* < u_2^{1*}$ при $R < 1$ и $u_2^* > u_2^{1*}$ при $R > 1$. Так что фирма, делающая второй ход, получит больший выигрыш, чем в однопериодной игре, только если она сильнее конкурента.

Фирма 2, напротив, получает больший выигрыш в том случае, если обе фирмы делают свой ход одновременно. Но что если первый ход делает фирма 2? Функция реакции фирмы 1 будет

$$\check{r}_1(r_2) = \sqrt{R r_2} - r_2 \tag{2.52}$$

при $R > 1$, а выигрыш фирмы 2 при условии, что фирма 1 будет оптимально реагировать на ход фирмы 2:

$$u_2(\check{r}_1(r_2), r_2) = \sqrt{\frac{r_2}{R}} - r_2. \tag{2.53}$$

Максимизируя это выражение по r_2, получим

$$r_2^{2*} = \frac{1}{2R}, \tag{2.54}$$

а также

$$r_1^{2*} = \check{r}_1(r_2^{2*}) = 1 - \frac{1}{2R}. \tag{2.55}$$

Подставляя эти величины в функции выигрышей двух фирм, мы получим

$$u_1^{2*} = R - 1 + \frac{1}{4R}, \tag{2.56}$$

$$u_2^{2*} = \frac{1}{4R}. \tag{2.57}$$

Можно ли понять, какая из двух фирм захочет сделать первый ход? Вот, два предпринимателя-конкурента сидят в приемной у чиновника и ждут. Кто пойдет первым — при том условии, что тот, кто пойдет вторым, будет наблюдать действия первого? Предположим, что очередность хода определяется в результате однопериодной игры, в которой каждая из двух фирм заявляет, хочет ли она ходить первой или второй. Если фирмы заявляют одинаковый порядок ходов (например, фирма 1 хочет ходить первой, а фирма 2 хочет ходить второй), то реализуется этот порядок. Если обе фирмы хотят ходить первыми или последними, то они ходят одновременно. Матрица выигрышей в этой игре такова:

		Фирма 2	
		Ходить первой	Ходить второй
Фирма 1	Ходить первой	u_1^* ; u_2^*	u_1^{1*}; u_2^{1*}
	Ходить второй	u_1^{2*}; u_2^{2*}	u_1^* ; u_2^*

Равновесие в этой игре будет зависеть от R. В любом случае верно, что $u_1^* < u_1^{2*}$ и $u_2^* < u_2^{2*}$. При $R > 1$ — т.е. если фирма 1 слабее фирмы 2 — мы имеем $u_2^{1*} > u_2^*$; это дает нам равновесие, в котором фирма 1 решает делать первый ход, а фирма 2 — второй. При $R > 1$ мы имеем $u_1^{2*} > u_1^*$, что дает нам равновесие с обратной очередностью ходов. Более слабый из двух соперников всегда решает первым «броситься в драку», в то время как тот, кто сильнее, предпочитает выждать, чтобы нанести ответный удар.

Конкуренция на рынке с горизонтально дифференцированым товаром со входом. Рассмотрим задачу конкуренции продавцов мороженого на пляже из гл. 1. Как и раньше, предположим, что цены, по которым продавцы реализуют мороженое, являются фиксированными (и равны между собой). Пусть каждый отдыхающий покупает ровно одну единицу мороженого от ближайшего продавца; координаты покупателей равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Предположим, что продавцов трое. Мы знаем (задача 1.29), что в игре, в которой продавцы одновременно выбирают местоположение своих тележек с мороженым, равновесие не существует. Рассмотрим вариант игры, в котором выбор местоположения тележек происходит по очереди. В момент времени $t = 1$ продавцы 1 и 2 выбирают $s_1, s_2 \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ продавец 3 выбирает $s_3 \in [0, 1]$. Затем реализуются выигрыши. Как и раньше, выигрыш продавца равен доле покупателей, приобретающих у него товар (рис. 2.22).

Что является равновесием в этой игре? Стратегии продавцов 1 и 2 — это местоположения их тележек s_1, s_2. Стратегия продавца 3 есть функция $s_3(s_1, s_2)$, предписывающая продавцу, где ставить тележку в зависимости от s_1 и s_2. В совершенном по подыграм равновесии стратегия $s_3(s_1, s_2)$ при любых s_1, s_2 должна доставлять максимум покупателей, приобретающих

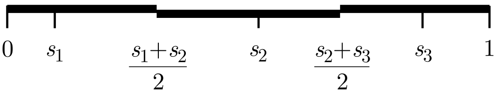


Рис. 2.22. Горизонтальная конкуренция с тремя продавцами

товар у продавца 3. Пусть $s_1 < s_2$. Если координаты покупателей равномерно распределены на $[0, 1]$, то выигрыш продавца 3 будет

$$\frac{s_1 + s_3}{2} \text{ при } s_3 < s_1; \quad \frac{s_1 + s_2}{4} \text{ при } s_3 = s_1; \quad \frac{s_2 - s_1}{2} \text{ при } s_3 \in (s_1, s_2);$$

$$\frac{1 - \frac{s_1 + s_2}{2}}{2} \text{ при } s_3 = s_2 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{s_2 + s_3}{2} \text{ при } s_3 > s_2.$$

Следовательно, продавец 3 максимизирует свой выигрыш, выбирая

$$s_3 = s_1 - \varepsilon \quad \text{при} \quad s_1 > \max\left\{1 - s_2, \frac{s_2 - s_1}{2}\right\};$$

$$s_3 = s_2 + \varepsilon \quad \text{при} \quad 1 - s_2 > \max\left\{s_1, \frac{s_2 - s_1}{2}\right\};$$

$$s_3 \in (s_1, s_2) \quad \text{при} \quad \frac{s_2 - s_1}{2} > \max\{s_1, 1 - s_2\}.$$

Здесь ε — минимальная величина, на которую позиция третьего продавца может приблизиться к позиции первого или второго продавца. Мы предполагаем, что эта величина очень мала. В принципе, нас устроит любая функция $s_3(s_1, s_2)$, удовлетворяющая данным условиям. Однако равновесные s_1 и s_2 зависят от того, как конкретно мы определим $s_3(s_1, s_2)$ в том случае, если $\frac{s_2 - s_1}{2} > \max\{s_1, 1 - s_2\}$. Предположим, что в этом случае $s_3 = \frac{s_2 + s_1}{2}$. Тогда легко убедиться, что в равновесии будет $s_1^* = 1/4$, $s_2^* = 3/4$ и $s_3^*(s_1^*, s_2^*) = 1/2$. При этом выигрыши продавцов 1 и 2 будут равны 3/8, выигрыш продавца 3 окажется равным 1/4.

Нам остается показать, что в равновесии мы не можем иметь $s_1 = s_2$. Но это просто: если $s_1 = s_2 \leqslant 1/2$, то третий продавец максимизирует свой выигрыш, выбрав $s_3 = s_1 + \varepsilon$. В свою очередь, первый продавец сможет увеличить свой выигрыш, выбрав $s_1' = s_1/2$ и получив при этом $3/4 \cdot s_1$ вместо $(s_1 + \varepsilon)/2$. Получается, что два продавца, имеющих возможность первыми выбрать места для своих тележек, не станут располагаться слишком близко друг к другу. Причина тому — наличие третьего продавца, который в таком случае может захватить бóльшую часть рынка.

Лоббирование в парламенте и покупка сверхбольшинства голосов. Конгресс США характеризуется слабой партийной дисциплиной. Политические партии — республиканцы и демократы — не обладают значительным контролем над тем, как голосуют отдельные конгрессмены. Причин этому несколько, в первую очередь — наличие одномандатных округов и необходимость конгрессмена отчитываться перед своими избирателями о своей успешной работе. Для того чтобы конгрессмена переизбрали, ему необходимо время от времени голосовать за законопроекты, перераспределяющие средства его избирателям (например, за такие законопроекты, которые предполагают реализацию некоторых проектов на территории его округа за федеральные деньги). Это делает голос конгрессмена в определенном смысле «продаваемым».

Предположим, что группа конгрессменов, представляющая чьи-то интересы (возможно, свои собственные), продвигает какой-то законопроект. Для того чтобы заручиться голосом конгрессмена A, нужно пообещать ему, что в будущем на повестку дня будет вынесен вопрос о выделении округу конгрессмена A дополнительных средств и что за этот вопрос проголосует большинство. Таким образом, проведение любого законопроекта связано с издержками на покупку голосов конгрессменов — т.е. с некоторым набором обещаний, которые надо будет потом выполнить.

Гросеклоуз и Снайдер [Groseclose, Snyder, 1996] обращают внимание на то, что, как правило, значительная часть законопроектов принимается *сверхбольшинством* конгрессменов, в то время как для прохождения достаточно простого большинства. Зачем лоббисты тратят излишние ресурсы на покупку больших коалиций, несмотря на то, что минимальной коалиции — половины конгрессменов плюс один голос — достаточно для прохождения законопроекта? Например, при голосовании за Североамериканское соглашение о свободной торговле в нижней палате конгресса (Палате представителей), 234 голоса было отдано «за» и 200 голосов «против». Почему демократическая партия и администрация президента Клинтона (лоббировавшие этот проект) не удовлетворились минимальной коалицией в 218 представителей? Зачем нужно было тратить ресурсы на приобретение лишних голосов? Ответ таков: для того, чтобы эти голоса не были перекуплены республиканской партией, которая была противником заключения соглашения о свободной торговле с Мексикой и Канадой.

Рассмотрим такую игру. Нечетное число $N \geqslant 5$ депутатов должны проголосовать за или против некоего законопроекта. Два лоббиста, A и B, пытаются склонить их на свою сторону. Первый лоббист поддерживает законопроект, второй препятствует ему. Пусть игра происходит следующим образом.

$t = 1$. Лоббист A решает, сколько ресурсов ему следует потратить на покупку голосов. Пусть a_i — сумма, которую он обещает депутату i, если тот проголосует за законопроект. Будем считать, что $a_i \geqslant 0$.

$t = 2$. Лоббист B решает, сколько ресурсов ему следует потратить на покупку голосов. Пусть b_i — сумма, которую он обещает депутату i, если тот проголосует против законопроекта. Будем считать, что $b_i \geqslant 0$.

$t = 3$. Депутаты голосуют. Депутат i голосует за законопроект, если

$$a_i \geqslant b_i, \tag{2.58}$$

и голосует против в обратном случае.

Выигрыш лоббиста А равен $W_{\text{A}} - \sum_{i=1}^{N} a_i$, если законопроект принят (т.е. если за него проголосовало большинство депутатов), и равен $-\sum_{i=1}^{N} a_i$, если нет. Выигрыш лоббиста В составляет $W_{\text{B}} - \sum_{i=1}^{N} b_i$, если законопроект не принят, и равен $-\sum_{i=1}^{N} b_i$, если он принят, где величины W_{A} и W_{B} отражают степень заинтересованности лоббистов в этом законопроекте.

Пусть, без потери общности, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_N$. Рассмотрим, каким должно быть действие $b_1, \ldots, b_N$ лоббиста В при данном наборе предложений $a_1, \ldots, a_N$. Для того чтобы заблокировать законопроект с наименьшими издержками, он должен скупить $(N+1)/2$ наиболее дешевых голосов. Лоббист В так поступит, если $\sum_{i=(N+1)/2}^{N} a_i < W_{\text{B}}$.

Каким будет действие лоббиста А в момент времени $t = 1$? Его задача — сделать невозможной скупку голосов лоббистом В, потратив при этом по возможности минимум средств.

Во-первых, будет верно то, что лоббист А не станет переплачивать. При $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_N$ мы должны иметь

$$\sum_{i=(N+1)/2}^{N} a_i = W_{\text{B}}, \tag{2.59}$$

иначе суммарные издержки лоббиста можно будет снизить.

Во-вторых будет верно, что $a_1 = \ldots = a_{(N+1)/2} \geqslant \ldots \geqslant a_N$. Иначе, если $a_1 > a_{(N+1)/2}$, то можно снизить a_1, увеличив при этом выигрыш лоббиста А, но при этом (2.59) будет продолжать выполняться.

Наконец, в-третьих, давайте покажем, что $a_1 = \ldots = a_N$. Пусть это не так, т.е. $a_{(N+1)/2} > a_N$. Предположим без потери общности, что $a_1 = \ldots = a_{(N+1)/2} = \ldots = a_K > a_{K+1} \geqslant \ldots \geqslant a_N$, где $K \geqslant (N+1)/2$. Пусть $M = K - (N-1)/2 \geqslant 1$. Возьмем

$$\varepsilon < \min\left\{a_K - a_{K+1},\ \frac{a_K - a_N}{M}\right\}.$$

Рассмотрим $a'_1, \ldots, a'_N$, такие, что $a'_i = a_i - \varepsilon$ при $i = 1, \ldots, K$, $a'_N = a_N + M\varepsilon$ и $a'_i = a_i$ при $K + 1 \geqslant i \geqslant N - 1$. Тогда верно, что $a'_1 \geqslant \ldots \geqslant a'_K > a'_{K+1} \geqslant \ldots \geqslant a'_N$, причем $\sum_{i=(N+1)/2}^{N} a'_i = W_{\text{B}}$. Однако в сумме лоббист А теперь тратит меньше: $\sum_{i=1}^{N} a'_i = \sum_{i=1}^{N} a_i - \varepsilon(K - M)$. Так что стратегия $a_1, \ldots, a_N$ не является равновесной в силу того, что $a_{(N+1)/2} > a_N$.

Следовательно, в равновесии мы должны иметь $a_1 = \ldots = a_N$, причем $a_i = \dfrac{2\,W_{\text{B}}}{N+1}$, чтобы обеспечить выполнение (2.59). Как следствие, суммарные зартаты лоббиста А в том случае, если он не хочет допустить перекупки голосов со стороны лоббиста B, будут равны $\dfrac{2\,N\,W_{\mathrm{B}}}{N+1}$. То есть для того, чтобы гарантировать прохождение законопроекта, нужны примерно вдвое большие ресурсы, чем у тех, кто потенциально хочет сорвать голосование и сохранить статус-кво.

2.2. ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ

Очень часто игровые взаимодействия между одними и теми же игроками повторяются. Противостояние между упрямым ребенком и его родителями продолжается изо дня в день. Две фирмы, конкурирующие друг с другом, рассчитывают на то, что их конкуренция продлится и в следующем году, и через два года. Люди, отвечающие за кредитно-денежную политику в центральном банке, скорее всего, будут отвечать за нее и через год. Может ли повторяющийся характер игровых взаимодействий влиять на стратегии, реализуемые игроками? Как правило, ответ на этот вопрос зависит от того, является ли горизонт планирования игроков конечным или нет; результаты нашего анализа будут качественно различаться для конечно и бесконечно повторяющихся игр.

2.2.1. ИГРЫ, ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО РАЗ

Рассмотрим игру «дилемма заключенного» с такой матрицей выигрышей:

		Вася	
		молчать D	сознаться H
Петя	молчать D	3; 3	0; 5
	сознаться H	5; 0	1; 1

Как поведут себя Петр и Василий, если им придется сыграть в «дилемму заключенного» два раза подряд? На рис. 2.23 показано (без выигрышей) дерево этой игры.

Цифрами 1–5 обозначены информационные множества второго игрока (Васи). Множество 1 соответствует принятию решения: молчать (D) или сознаться (H) в момент времени 1, т.е. когда Вася и Петя играют «дилемму заключенного» в первый раз. Множества 2–5 соответствуют принятию решения в момент времени 2, для каждого из четырех возможных вариантов исхода игры на первом этапе. Следуя формальному определению чистой стратегии в динамической игре, получается, что у Васи (и, соответственно, у Пети) $2^5 = 32$ чистых стратегий. Некоторые из этих стратегий являются эквивалентными. Действительно, рассмотрим Васины стратегии DDHDH и DDDDD. Они отличаются друг от друга только инструкцией относительно действий в информационных множествах 3 и 5. Однако каждая из этих

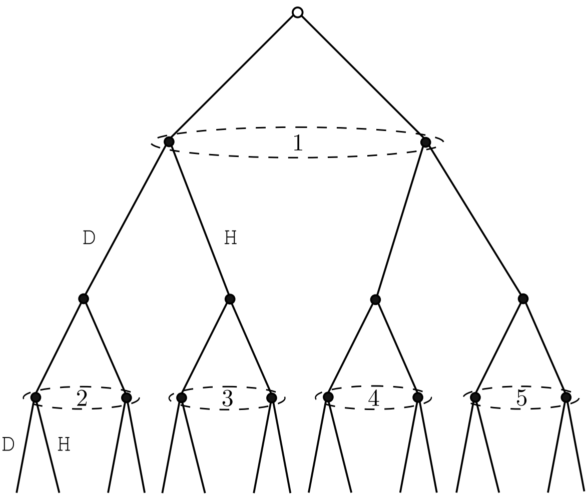


Рис. 2.23. Дилемма заключенного, повторенная два раза. Игрок 2 ходит в информационных множествах 1–5

стратегий предполагает действие D в информационном множестве 1, что делает достижение множеств 3 и 5 невозможным, вне зависимости от стратегии, выбранной другим игроком. Формально, DDHDH и DDDDD соответствуют следующему определению:

Определение 2.6. Пусть Γ — игра в развернутой форме. Стратегии σ_i, σ_i' игрока i являются *эквивалентными*, если $u_j(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_j(\sigma_i', \sigma_{-i})$ для всех j, σ_{-i}.

Можно подсчитать, что в дилемме заключенного, повторенной 2 раза, у каждого игрока 8 неэквивалентных стратегий. При этом совершенное по подыграм равновесие в этой игре одно. Действительно, в каждой из четырех подыгр на втором этапе в равновесии оба игрока выберут H. Это означает, что выигрыш каждого игрока во всей игре равен его выигрышу на первом этапе плюс единица (выигрыш на втором этапе). Следовательно, в момент времени 1 игроки также выберут H. Если «дилемма заключенного» повторяется конечное число раз, то равновесие, совершенное по подыграм, все равно единственно: $(\mathtt{H}, \mathtt{H})$ в каждый момент времени.

Определение 2.7. Пусть G — игра в нормальной форме, $T > 1$ — натуральное число. Определим как $G(T)$ динамическую игру, в которой игра G повторяется T раз, а выигрыш игрока i составляет

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} u_i(a_t), \tag{2.60}$$

где $a_t \in A$ — действия игроков в момент времени $t = 1, \ldots, T$.

Саму игру G мы будем называть *шаговой игрой*, а элементы множества стратегий шаговой игры $a \in A$ — действиями. Что мы можем сказать про множество совершенных равновесий в повторяющейся игре?

Теорема 2.3. *Пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — игра в нормальной форме с единственным равновесием a^*, $T > 1$. Тогда в игре $G(T)$ существует единственное совершенное по подыграм равновесие Нэша, такое, что в каждой подыгре, начинающейся с $t \geqslant 1$, игроки выберут действия a^*.*

Доказательство этой теоремы проводится по индукции. Все подыгры $G(T)$, начинающиеся в момент времени $t = T$, совпадают с шаговой игрой G. Следовательно, все подыгры, начинающиеся в момент времени $t = T - 1$, совпадают с шаговой игрой G с точностью до прибавления $u(a^*)$ к функциям выигрышей, и равновесные действия в момент $t = T - 1$ тоже будут a^*. Согласно принципу индукции, это верно для всех $t = 1, \ldots, T$.

Что изменится, если в шаговой игре будет несколько равновесий? Заметим, что каждому равновесному профилю стратегий в шаговой игре соответствует совершенное равновесие в повторяющейся игре, в котором этот профиль играется в каждый момент времени, в том числе и во всех вершинах, лежащих вне траектории игры (доказательство этого утверждения предлагается в качестве задачи). Однако, как видно из следующего примера, могут существовать и другие равновесия.

Повторяющаяся игра с несколькими равновесиями. Если шаговая игра имеет единственное равновесие Нэша, то в конечно повторенной игре на каждом этапе в любой подыгре реализуется профиль действий, соответствующий равновесию в шаговой игре. Убедимся, что для игр с несколькими равновесиями это не так. Рассмотрим следующую игру, повторенную два раза.

		Игрок 2		
		A	B	C
Игрок 2	A	1; 1	5; 0	0; 0
	B	0; 5	4; 4	0; 0
	C	0; 0	0; 0	3; 3

Как построить множество совершенных по подыграм равновесий в этой игре? В момент времени $t = 2$ игроки должны реализовывать равновесные стратегии: либо $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$, либо $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$. При этом профиль действий, сыгранных в момент $t = 2$, может зависеть от действий, сыгранных в момент $t = 1$. Всего в шаговой игре возможны 9 профилей действий; каждому профилю действий в момент $t = 1$ соответствует одно из двух равновесий в момент $t = 2$. Следовательно, для того, чтобы найти все совершенные равновесия в игре, повторенной 2 раза, нам необходимо найти все равновесия в каждой из $2^9 = 512$ игр, образованных таким образом. Пусть, например, игроки в момент $t = 2$ реализуют $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$, только если в момент $t = 1$ было реализовано $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$. Это соответствует следующей игре в момент времени $t = 1$:

		Игрок 2		
		A	B	C
Игрок 1	A	2; 2	6; 1	1; 1
	B	1; 6	7; 7	1; 1
	C	1; 1	1; 1	4; 4

У этой игры — три равновесия: $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$, $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ и $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$. При этом профиль действий $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ не является равновесием в шаговой игре. Однако он может быть реализован в момент времени $t = 1$ повторяющейся игры — если игроки ожидают, что только в этом случае они сыграют Парето-эффективное равновесие $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ в момент времени $t = 2$. Это — еще одно свидетельство того, что ожидания относительно поведения в будущем могут влиять на поведение в настоящем.

Однако данный подход к конструированию совершенных по подыграм равновесий в конечно повторяющихся играх может быть подвергнут критике. Предположение о том, что каждому из профилей действий в первый момент времени может быть присвоено любое из возможных равновесий во второй момент времени, может показаться слишком смелым, так как в исходной игре одни равновесия могут Парето-доминировать другие; если мы предположим, что игроки в подыграх не будут играть Парето-доминируемые равновесия (т.е. будут «передоговариваться»), то множество совершенных по подыграм равновесий сузится (см. задачу 2.19).

2.2.2. БЕСКОНЕЧНО ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ

Если всем игрокам известно, что игра закончится через T периодов, то на последнем этапе будут сыграны какие-то равновесные стратегии; используя обратную индукцию, мы получим равновесные стратегии на всех этапах повторяющейся игры.

А если горизонт планирования бесконечен? Предположим, что в любой момент времени существует положительная вероятность того, что в следующий момент времени игра повторится. Такое предположение в ряде случаев вполне уместно. К примеру, вряд ли в планах компании `Pepsico` — одного из двух основных производителей безалкогольных напитков — предполагается, что к какой-то определенной дате компания должна выйти из бизнеса и прекратить конкуренцию с `The Coca-Cola Company`. Однако, без сомнения, компания `Pepsico` будет предпринимать какие-то ответные действия, если, например, `The Coca-Cola Company` развяжет очередную ценовую или рекламную войну.

Игровое взаимодействие в таком случае можно моделировать в виде игры, повторяющейся бесконечное число раз, при условии, что выигрыш в каждом следующем периоде дисконтируется с определенной ставкой. В такой постановке использование обратной индукции невозможно. Как мы увидим, множество равновесий в бесконечно повторяющейся игре принципиально отличается от совершенных по подыграм равновесий в той же игре, повторенной конечное число раз.

Для начала дадим определение бесконечно повторяющейся игры.

Определение 2.8. Пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Пусть $0 \leqslant \delta < 1$. Обозначим моменты времени через $t = 0, 1, \ldots$. Пусть $a_t \in A$ — действия игроков в момент времени[9] t. Введем обозначение:

$$\overline{u}_i(\tau) = (1 - \delta) \sum_{t=\tau}^{\infty} \delta^{t-\tau} u_i(a_t). \tag{2.61}$$

Обозначим через $G(\delta)$ игру G, повторяемую бесконечное число раз, в которой выигрыш игрока i равен $\overline{u}_i(0)$.

Величина $0 \leqslant \delta < 1$ — *дисконт*. Чем эта величина меньше, тем меньше игроки ценят будущие выигрыши по сравнению с текущими выигрышами. Величину $\overline{u}_i(\tau)$ будем называть усредненным дисконтированным выигрышем. Эта величина есть средний выигрыш игрока i, начиная с момента времени τ.

Предположим, что игрок i в каждый момент времени $t = \tau, \tau + 1, \ldots$ получает выигрыш $\overline{u}_i(\tau)$. Тогда его *приведенный* или *дисконтированный* выигрыш на момент времени $t = \tau$ как раз будет равен его дисконтированному выигрышу в случае, когда игрок в момент времени $t \geqslant \tau$ получил бы[10] $u_i(a_t)$:

$$\sum_{t=\tau}^{\infty} \delta^{t-\tau} \overline{u}_i(\tau) = \frac{\overline{u}_i(\tau)}{1 - \delta} = \sum_{t=\tau}^{\infty} \delta^{t-\tau} u_i(a_t). \tag{2.62}$$

Множество стратегий (пусть даже чистых) в бесконечно повторяющейся игре очень громоздко. Действительно, стратегия должна предписывать, как действовать каждому игроку в зависимости от всех возможных действий всех игроков в предшествующие периоды — для каждого момента времени $t \geqslant 0$. В бесконечно повторяющейся игре любая подыгра эквивалентна самой игре. Поэтому мы будем ограничиваться стратегиями, в которых действие игрока в текущий период зависит от действий всех игроков за какое-то конечное число предыдущих периодов.

[9] В бесконечных играх будем считать, что время начинается с момента $t = 0$.

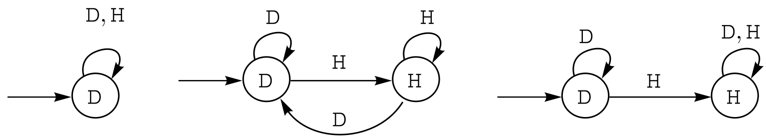
[10] Введение функции дисконтированного выигрыша — на самом деле один из нескольких способов сравнить выигрыш игрока в бесконечно повторяющейся игре при разных профилях стратегий. Этот способ не является единственным. В учебнике Осборна и Рубинштейна [Osborne, Rubinstein, 1994] приводятся версии результатов о существовании равновесия для еще двух критериев сравнения выигрышей в бесконечной игре.

Определение 2.9. Пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда *марковская стратегия* с памятью T для игрока i есть функция

$$m_i \colon A^T \to A_i, \tag{2.63}$$

которая определяет a_{it} для каждой истории игры длиной T.

На рис. 2.24 показаны примеры различных марковских стратегий с памятью длиной $T = 1$ для игры «дилемма заключенного» [11] на с. 117:



а) Всегда играть D *б*) Око за око *в*) Триггер

Рис. 2.24. Различные марковские стратегии с памятью $T = 1$

Стратегия на рис. 2.24, *а* предписывает сделать первый ход `D`, затем все время повторять его, вне зависимости от последующих ходов соперника. На рис. 2.24, *б* показана стратегия «око за око», согласно которой первый ход должен быть `D`, затем каждый раз надо повторять ход, сделанный соперником в предыдущий момент времени. Наконец, на рис. 2.24, *в* изображена так называемая «триггерная» или «мрачная» стратегия: в начальный момент времени игрок делает ход `D`, затем повторяет его, пока соперник не сделает ход `H`. После этого триггерная стратегия предписывает все время ходить `H`, вне зависимости от дальнейших действий соперника.

Пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — игра в стратегической форме. Обозначим через $u(a)$ вектор выигрышей всех игроков. Пусть

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; x = \sum_{a \in A} \alpha_a u(a), \quad \sum_{a \in A} \alpha_a = 1, \quad \alpha_a \geqslant 0 \right\}. \tag{2.64}$$

Любой вектор из этого множества есть выпуклая комбинация выигрышей игроков при каких-то чистых стратегиях. Можно доказать (подробности мы опускаем), что при достаточно большом δ любой вектор $x \in X$ будет являться вектором приведенных выигрышей игроков (2.61) для каких-то действий игроков $a_0, a_1, \ldots$.

Обозначим через

$$\underline{u}_i = \min_{a_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}) \tag{2.65}$$

минимаксный выигрыш — минимальный выигрыш, который может себе гарантировать игрок i в игре G. В любом равновесии в повторяющейся

[11] Эти рисунки не говорят, как следует вести себя игроку, если он отклонился от своей собственной стратегии. Однако они исчерпывающе описывают, как ему следует реагировать на действия другого игрока.

игре $G(\delta)$ приведенный выигрыш игрока i не может быть меньше, чем $\underline{u}_i$. Действительно, в момент времени $t = 0$ игрок i может выбрать действие a_{i0}, максимизирующее $u_i(a_i, a_{-i0})$, в момент времени $t = 1$ — действие a_{i1}, максимизирующее $u_i(a_i, a_{-i1})$, и т.д. В каждом периоде его выигрыш не будет меньше, чем $\underline{u}_i$.

Пусть
$$Y = \{y \in \mathbb{R}^N \mid y_i > \underline{u}_i\}. \tag{2.66}$$

Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $G = \langle I, A, u\rangle$ — игра в стратегической форме. Пусть $u \in X \cap Y$. Тогда существует $\overline{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\overline{\delta}, 1)$ в повторяющейся игре $G(\delta)$ существует равновесие в чистых стратегиях, в котором приведенный выигрыш каждого игрока i равен u_i.*

Этот результат носит название *народной теоремы*, так как его авторство не установлено[12] (сам результат известен с конца 1950-х годов).

Приведем пример того, как в повторяющейся игре «дилемма заключенного» можно реализовать приведенные выигрыши, соответствующие действиям $(\mathtt{D}, \mathtt{D})$. Пусть оба игрока играют триггерную стратегию. Если ни один из них не отклоняется от своей стратегии, то в каждый момент времени каждый игрок делает ход $\mathtt{D}$, а приведенный выигрыш каждого игрока равен 3. Предположим, что в момент времени[13] $t = 0$ игрок 1 выбрал ход $\mathtt{H}$. Его усредненный дисконтированный выигрыш будет не выше, чем

$$\overline{u}_1' = (1-\delta)\left(u_1(\mathtt{H},\mathtt{D}) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u_1(\mathtt{H},\mathtt{H})\right) = (1-\delta)\left(5 + \frac{\delta}{1-\delta}\right), \tag{2.67}$$

так как игрок 2, следуя триггерной стратегии, начиная с момента $t = 1$ будет непременно делать ход $\mathtt{H}$ (равно как и игрок 1, который также будет вынужден делать ход $\mathtt{H}$, начиная с $t = 1$). Условием равновесности триггерной стратегии будет

$$(1-\delta)\left(5 + \frac{\delta}{1-\delta}\right) \leqslant 3, \quad \text{или} \quad \delta \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.68}$$

Если игрок отклоняется от триггерной стратегии, то он получает моментальный выигрыш, так как обманывает второго игрока, который продолжает играть кооперативную стратегию $\mathtt{D}$. Однако начиная со следующего момента времени игрок 2 начинает ему мстить, делая ходы $\mathtt{H}$, — и продолжает делать это до бесконечности! Игроку 1 будет выгодно такое развитие событий только в том случае, если его дисконт δ достаточно мал; в таком

[12] Формулировку этой теоремы можно найти, например, в работе Фаденберга и Маскина [Fudenberg, Maskin, 1986].

[13] Или в любой другой момент.

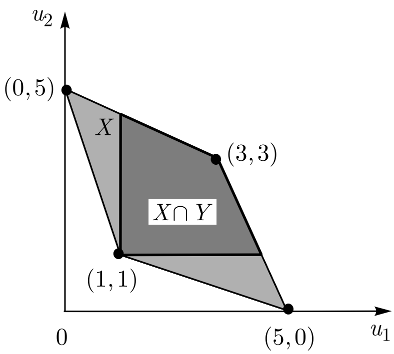


Рис. 2.25. Множества X и Y

случае сиюминутный выигрыш в первом периоде перевешивает наказание, которое он понесет в последующих периодах.

Для игры «дилемма заключенного» множества X и Y показаны на рис. 2.25 Согласно теореме, равновесные векторы выигрышей будут находиться произвольно близко от любой точки из $X \cap Y$. Рассмотрим, например, пару марковских стратегий, изображенных на рис. 2.26.

Согласно этой паре стратегий, первый ход в игре должен быть D у первого игрока, H у второго игрока. Второй ход будет H у первого игрока и D у второго, и т.д. Если один из игроков отклонится от своей стратегии, то оба игрока (начиная со следующего хода) будут играть H до бесконечности. Приведенные выигрыши двух игроков при условии, что они играют эти стратегии, будут

$$\begin{aligned} \overline{u}_1(0) &= (1-\delta)\left(0\,(1+\delta^2+\delta^4+\ldots)+5\,(\delta+\delta^3+\delta^5+\ldots)\right) = 5\,\frac{\delta}{1+\delta}, \\ \overline{u}_2(0) &= (1-\delta)\left(5\,(1+\delta^2+\delta^4+\ldots)+0\,(\delta+\delta^3+\delta^5+\ldots)\right) = 5\,\frac{1}{1+\delta}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

т.е. $(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \dfrac{1}{1+\delta}(0;\ 5) + \dfrac{\delta}{1+\delta}(5;\ 0)$.

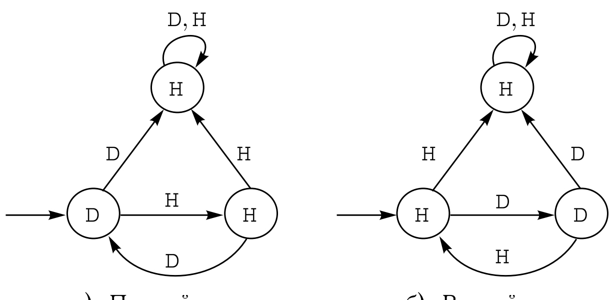


Рис. 2.26. Пара марковских стратегий с памятью $T = 2$

При $\delta = 0{,}8$ это дает нам выигрыш $(2{,}222;\ 2{,}777)$, при $\delta = 0{,}9$ — выигрыш $(2{,}368\ldots;\ 2{,}631\ldots)$ и т.д. По-разному чередуя ходы игроков, мы можем таким образом получить любой вектор выигрышей [14].

[14] Формально, если δ достаточно велик, то для любого данного ε и для любого $u \in X$ существует такая память T, что некоторая марковская стратегия с памятью T дает нам дисконтированные выигрыши, которые для каждого игрока i отличаются от u_i не более, чем на ε.

Доказательство народной теоремы основано на том факте, что при достаточно большом δ аналогичным способом можно составить профиль стратегий, обеспечивающих выигрыш, произвольно близкий к любой точке из множества X. Если игрок i отклонится от данной стратегии, то все остальные игроки во все последующие периоды будут выбирать профиль действий

$$\mu_{-i}^{i} = \arg \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \max_{a_i\in A_i} u_i(a_i, a_{-i}), \tag{2.70}$$

т.е. они не будут давать игроку i возможность в каждом периоде получить выигрыш, больший, чем его минимаксный выигрыш $\underline{u}_i$.

Для того чтобы завершить доказательство народной теоремы, нужно найти δ, при которых существует равновесие. Пусть $m = (m_1, \ldots, m_N)$ — марковские стратегии, дающие средний выигрыш $u \in X \cap Y$ и построенные по типу стратегий, изображенных на рис. 2.26.

Обозначим через $u_{i,max}$ максимальный однопериодный выигрыш, который игрок i может получить:

$$u_{i,\max} = \max_{a\in A} u_i(a). \tag{2.71}$$

По построению, если игрок i отклонится от стратегии m_i в момент времени t, то его выигрыш в каждый последующий момент времени не может превышать $\underline{u}_i$. Однако игрок всегда может обеспечить себе выигрыш, не меньший, чем $\underline{u}_i$. Следовательно, он равен $\underline{u}_i$. Так что игроку не будет выгодно отклониться от стратегии m_i ни в один из моментов времени $\tau \geqslant 0$, если

$$\widetilde{u}_i = \min_{\tau\geqslant 0} \overline{u}_i(\tau) \geqslant (1-\delta)\Big(u_{i,\max} + \frac{\delta}{1-\delta}\,\underline{u}_i\Big), \quad \text{откуда} \quad \delta \geqslant \frac{u_{i,\max}-\widetilde{u}_i}{u_{i,\max}-\underline{u}_i}. \tag{2.72}$$

Так как $\widetilde{u}_i > \underline{u}_i$, то существуют $\delta < 1$, удовлетворяющие этому условию. Выполнение неравенства

$$\delta \geqslant \max_i \frac{u_{i,\max}-\widetilde{u}_i}{u_{i,\max}-\underline{u}_i} \tag{2.73}$$

обеспечивает нам равновесность всех стратегий из профиля m. Теорема доказана. ■

Равновесие, полученное при использовании триггерных стратегий, не является совершенным по подыграм. Однако это не является слишком серьезной проблемой, так как условия существования совершенного по подыграм равновесия в бесконечно повторяющейся игре очень похожи на условия теоремы 2.4.

Допустим, что при некотором δ в повторяющейся дилемме заключенного существует равновесие в триггерных стратегиях, обеспечивающее ходы $(\mathtt{D}, \mathtt{D})$ в каждый момент времени. Предположим, что в момент времени $t = 1$ игрок 2 в повторяющейся дилемме заключенного выбрал следующую стратегию: играть H в этот момент времени и играть триггерную стратегию во все последующие периоды.

Каковы будут действия первого игрока? Если он будет продолжать следовать триггерной стратегии, то он должен, начиная с момента времени $t = 2$, все время играть H. Однако у него есть и такая стратегия: в момент времени $t = 1$ сыграть D и играть триггерную стратегию во все последующие периоды. Какой из двух вариантов для него более выгоден? Рисунок 2.27 показывает, какими будут действия игроков в зависимости от стратегии игрока 1 в момент времени $t = 2$. Верхние две строки соответствуют случаю, когда игрок 1, начиная с момента времени $t = 2$, будет придерживаться триггерной стратегии; нижние две строки соответствуют случаю, когда игрок 1 отказывается наказывать игрока 2 и вместо этого играет D в $t = 2$.

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
1	D	H	H	H
2	H	D	H	H
1	D	D	D	D
2	H	D	D	D

Рис. 2.27. Стратегии игроков при отклонении игроком 2 от триггерной стратегии в момент времени $t = 1$

Мы видим, что если дисконт таков, что он обеспечивает триггерное равновесие с (D, D), то в нашем случае выигрыш 1-го игрока будет больше, если он отклонится от триггерной стратегии в момент времени $t = 2$ и не будет наказывать игрока 2. Зная это, игрок 2 в момент времени $t = 1$ может сыграть H: триггерное равновесие не является совершенным по подыграм. И если мы хотим, чтобы в совершенном по подыграм равновесии в бесконечно повторяющейся дилемме заключенного в каждый момент времени оба игрока выбирали кооперативные стратегии D, нам необходимы более сложные стратегии, чем триггерные.

Равновесная стратегия должна предписывать не только наказание для отклонившегося игрока. Если игрок A отклонился, а игрок B не стал наказывать игрока A, то также следует наказать и игрока B, и т.д.[15]

Равновесные стратегии строятся по такому принципу: если игрок A отклонится от равновесной стратегии, то он подвергается суровому наказанию (остальные игроки делают так, чтобы выигрыш игрока A был не больше, чем минимаксный). Это наказание длится достаточно долго для того, чтобы сделать отклонение невыгодным. После того, как игрок A наказан, игрокам предписывается делать ходы, дающие каждому игроку i

[15] Эта проблема стара, как мир. Еще древнеримский поэт Ювенал задавался этим далеко идущим вопросом: «Кто будет сторожить сторожей?» (Сатиры 6, с. 346–348).

усредненный дисконтированный выигрыш u_i^{A}, который у каждого игрока больше, чем его минимаксный выигрыш. Если игрок B отказывается наказывать игрока A (или если он первым отклонился от предписанной ему равновесной стратегии, или если он отклонится от предписанной ему стратегии уже после того, как игрок A наказан), то аналогичному наказанию подвергается он сам. После того, как наказан игрок B, игрокам предписывается играть делать ходы, дающие каждому игроку i усредненный дисконтированный выигрыш u_i^{B}, который для каждого игрока также больше его минимаксного выигрыша. Аналогично равновесные стратегии строятся для всех остальных игроков.

В каком случае такой профиль стратегий будет равновесным (для достаточно большого δ)? Можно показать, что для этого должны соблюдаться два условия. Во-первых, игроку C должно быть все равно, какого игрока он наказывает — игрока A или игрока B. То есть для равновесности необходимо, чтобы $u_i^{\mathrm{A}} = u_i^{\mathrm{B}}$ при $i \neq \mathrm{A}, \mathrm{B}$. Во-вторых, надо, чтобы наказуемый в долгосрочной перспективе получал меньше, чем если наказывают какого-то другого игрока, т.е. $u_i^i < u_i^{\mathrm{A}}$ для $i \neq \mathrm{A}$. Эти два условия и объясняют требование размерности множества $X \cap Y$ — в таком случае мы можем изменить выигрыш каждого из игроков, не выходя за пределы этого множества.

Фаденберг и Маскин [Fudenberg, Maskin, 1986] показали, что условия существования совершенного по подыграм равновесия практически не отличаются от условий народной теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть $G = \langle I, A, u\rangle$ — игра в нормальной форме. Пусть выигрыши $u \in X \cap Y$, размерность множества $X \cap Y$ равна числу игроков N. Тогда существует дисконт $\overline{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\overline{\delta}, 1)$ в повторяющейся игре $G(\delta)$ существует совершенное по подыграм равновесие, в котором усредненные дисконтированные выигрыши игроков равны u.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Фаденберга и Тироля [Fudenberg, Tirole, 1991, p. 158–160].

Рассмотрим пример совершенного равновесия в следующей игре, повторяемой бесконечное число раз:

		Игрок 2			
		A	B	C	D
Игрок 1	A	4; 4	0; 5	3; 2	2; 2
	B	5; 0	1; 1	1; 4	2; 3
	C	2; 1	0; 0	2; 0	0; 0

На рис. 2.28 показано совершенное по подыграм равновесие, в котором выигрыш игроков будет $u = (4; 4)$, что соответствует действиям $a = (\mathtt{A}; \mathtt{A})$ в каждом периоде.

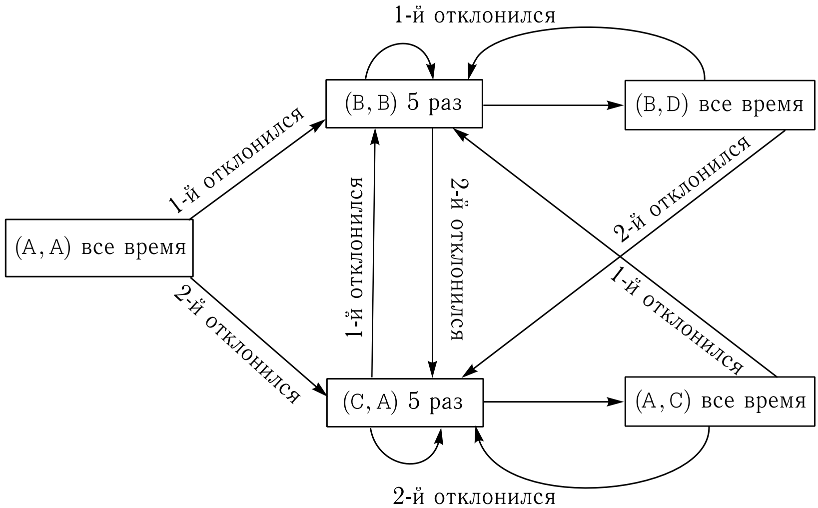


Рис. 2.28. Совершенное по подыграм равновесие

Если игрок 1 отклоняется, то игрок 2 делает ход B в течение нескольких периодов (в течение которых игрок 1 будет получать не более 1 — своего минимаксного выигрыша). В каждом последующем периоде игроки делают ходы (B, D). Если же отклоняется игрок 2, то игрок 1 наказывает его, несколько раз делая ход C, после чего в каждом последующем периоде реализуется (A, C).

2.2.3. ПРИМЕРЫ

Кредитно-денежная политика и инфляционные ожидания. Какая связь между законодательством, регулирующим деятельность центрального банка, и уровнем инфляции? В своей знаменитой работе Кидленд и Прескотт [Kydland, Prescott, 1977] предложили элегантную динамическую модель взаимодействия центрального банка, контролирующего кредитно-денежную политику, и всей остальной экономики.

Основная задача центрального банка — контроль за предложением денег в экономике, который осуществляется путем установки различных процентных ставок, операций с государственным долгом и установки резервных требований для банков. Предложение денег в экономике напрямую связано с уровнем инфляции. Центральный банк, таким образом, вынужден находить компромисс между общественными издержками, вызванными инфляцией, и экономическим ростом, к которому может привести увеличение предложения денег.

Взаимосвязь между инфляцией (или предложением денег) и ВВП можно задать с помощью так называемого уравнения Филипса:

$$y = \overline{y} + b\,(\pi - \pi^e). \tag{2.74}$$

Здесь y — ВВП, π — инфляция, π^e — ожидаемый (*e*xpected) уровень инфляции, $\overline{y}$ — уровень ВВП при уровне инфляции, равном ожидаемому, $b > 0$ — коэффициент, показывающий, на сколько рублей увеличивается ВВП при превышении инфляции над ожидаемой на 1%. Почему на ВВП влияет только разница между реализованной и ожидаемой инфляцией? Одно из объяснений состоит в том, что цены на факторы производства (в первую очередь, на труд) обладают определенной жесткостью, т.е. не способны немедленно подстраиваться под изменения рыночной конъюнктуры. Контракты на поставку факторов производства (и цены на них) формируются заранее; в них закладываются инфляционные ожидания. Если же инфляция окажется выше, чем предполагалось на момент заключения контракта, то происходит снижение реальных цен на факторы производства, что приводит к увеличению объема продукции, производимого фирмами. Согласно другой теории увеличение спроса на продукцию отдельного производителя может быть вызвано как ростом денежной массы, так и изменениями предпочтений населения в пользу производимого товара. Производитель должен увеличить планируемый объем выпускаемой продукции только во втором случае (так как в первом случае также должны будут вырасти цены на факторы производства); однако он не знает причин видимого увеличения цен на свою продукцию и поэтому будет вынужден среагировать, даже если цены на самом деле выросли в результате денежной эмиссии центральным банком.

Будем считать, что инфляция и ВВП определяются в ходе следующей динамической игры. На первом этапе публика формирует инфляционные ожидания π^e. После того, как эти ожидания сформированы, центральный банк определяет предложение денег и, соответственно, уровень инфляции π (для простоты будем предполагать, что инфляция и предложение денег взаимно однозначны).

Функция выигрышей центрального банка есть

$$u_b = -(y - y^o)^2 - a\,(\pi - \pi^o)^2, \tag{2.75}$$

где y^o — целевой (*o*ptimal) уровень ВВП. Будем предполагать, что $\overline{y} < y^o$, т.е. желаемый объем производства в экономике выше того, который будет достигнут при инфляции, равной ожидаемой (возможно, из-за того, что рынки факторов производств товаров не являются полностью конкурентными). Величина $\pi^o = 0$ отражает целевой уровень инфляции, $a > 0$ — то, насколько контроль над инфляцией важен для центрального банка по сравнению со стимулированием ВВП. Функция выигрышей банка квадратична по $\pi - \pi^o$, что отражает наши предположения о возрастающих предельных издержках инфляции: увеличение инфляции с 0% до 1% общество может не заметить, в то время как увеличение инфляции с 10% до 11% будет воспринято как крайне негативное событие.

Выигрыш публики зависит от того, насколько точен оказался ее прогноз инфляции:
$$u_p = -(\pi - \pi^e)^2. \tag{2.76}$$

Найдем равновесие в этой игре при $\pi^o = 0$. Сначала решим максимизационную задачу центрального банка при данном π^e. Максимизируя
$$u_b = -\big(\overline{y} + b\,(\pi - \pi^e) - y^o\big)^2 - a\,\pi^2 \tag{2.77}$$
по π, получим стратегию центрального банка, соответствующую совершенному по подыграм равновесию:
$$\pi(\pi^e) = \frac{b}{b^2 + a}\,(y^o - \overline{y} + b\,\pi^e)\,. \tag{2.78}$$
Максимизируя u_p по π^e при $\pi = \pi(\pi^e)$, мы получим, что в равновесии
$$\pi^e = \pi = \frac{b}{a}\,(y^o - \overline{y}) \tag{2.79}$$
и
$$y = \overline{y}. \tag{2.80}$$

Последний результат показывает наличие *рациональных ожиданий* у публики: уровень инфляции, который установится в результате проводимой центральным банком кредитно-денежной политики, не может отличаться от ожидаемого (за исключением возможных случайных колебаний, которые не были учтены в этой модели). То есть, например, не может быть так, что ожидаемая инфляция равна 10%, а инфляция, реализуемая центральным банком равна 15%. Публика будет предвидеть действия центрального банка и скорректирует свои ожидания.

Полученное равновесие не является Парето-оптимальным. Действительно, того же объема ВВП $\overline{y}$ можно было бы добиться и при $\pi = \pi^o$. Однако этот уровень инфляции *динамически несостоятелен*. Предположим, например, что центральный банк обещает $\pi = \pi^o$ и публика сформирует свои ожидания на уровне $\pi^e = \pi^o$. Тогда у центрального банка будет стимул эти ожидания обмануть. Мы предположили, что небольшое отклонение инфляции от целевого уровня снижает значение целевой функции центрального банка только на очень небольшую величину, так как $\left.\dfrac{\partial u_b}{\partial \pi}\right|_{\pi=\pi^o} = 0$. В то же время выигрыш центрального банка от стимулирования экономики будет более значительным, ибо $\dfrac{\partial u_b}{\partial y} > 0$ при $y < y^o$. В результате мы получим $\pi(\pi^o) > \pi^o$. Если мы предполагаем, что не существует институциональных факторов, которые могли бы заставить центральный банк сдержать свое обещание относительно уровня инфляции, то уровень инфляции $\pi = \pi^o$ не может быть реализован.

Какие механизмы могут сдерживать оппортунистическое поведение центрального банка? В первую очередь, банк должен быть огражден от влияния политической конъюнктуры. Законодательная или исполнительная власть может оказывать давление на центральный банк с целью стимулировать экономический рост ценой высокой инфляции; если банк способен противостоять такому давлению, то его обещания сдерживать инфляцию будут более достоверными. В ряде работ (см., например, [Alesina, Summers, 1993]) обнаружили статистически значимую взаимосвязь между низким уровнем инфляции и высокой степенью независимости центрального банка. Столь же важны правила, регулирующие работу банка. Чем выше a — вес инфляции в целевой функции банка — тем ниже будет инфляция в равновесии. Поэтому так низка была инфляция на протяжении второй половины XX в. в Германии, где была сильна память о гиперинфляции 1922–1923 годов, и в Новой Зеландии, где законодательно установлено, что глава центрального банка должен уйти в отставку при превышении инфляцией некого заданного барьера.

Согласно Бэрро и Гордону [Barro, Gordon, 1983], центральный банк может придерживаться низкого уровня инфляции, если между ним и публикой существует определенный уровень доверия. Если изначально публика доверяет банку и считает, что в ближайшем будущем он не станет преследовать инфляционную политику, то банку может быть невыгодно обманывать ожидания публики, так как это повлечет потерю доверия и рост инфляционных ожиданий.

Этот аргумент можно формализовать в виде бесконечно повторяющейся игры. Пусть на протяжении моментов времени $t = 0, 1, 2, \dots$ два игрока — банк и публика — играют в такую однопериодную игру. Изначально публика ожидает, что банк будет придерживаться политики низкой инфляции: $\pi^e = 0$. Банк в каждый момент времени выбирает, какой уровень инфляции — низкий $\pi_L = \pi^o = 0$ или высокий $\pi_H = \pi(0) = \dfrac{b}{b^2 + a}\,(y^o - \overline{y})$ — следует реализовывать. Если банк обманывает ожидания публики и реализует $\pi = \pi_H$, то, начиная со следующего момента времени, публика ожидает уровень инфляции, соответствующий равновесию в рассмотренной выше динамической модели: $\pi^e = \dfrac{b}{a}\,(y^o - \overline{y})$.

Возможно ли, что в бесконечно повторяющейся игре мы будем иметь $\pi = \pi_L$, $\pi^e = \pi_L$ в каждый момент времени? Пусть δ — фактор дисконта для центрального банка. Рассмотрим дисконтированный выигрыш банка в двух случаях: когда он все время придерживается политики низкой инфляции и когда он отклоняется в момент времени $t = 0$. В первом случае дисконтированный выигрыш центрального банка составит

$$W_{b1} = -\frac{1}{1-\delta}\,(y^o - \overline{y})^2,$$

во втором —

$$W_{b2} = -(y^o - \overline{y})^2 \frac{a}{b^2 + a} - \frac{\delta}{1-\delta}\,(y^o - \overline{y})^2 \Big(1 + \frac{b^2}{a}\Big).$$

Равновесие с низкой инфляцией возможно, если $W_{b1} \geqslant W_{b2}$, т.е.

$$\delta \geqslant \frac{a}{2\,a + b^2}. \tag{2.81}$$

При прочих равных центральный банк будет придерживаться политики низкой инфляции при достаточно высоком b или при достаточно малом a, так как в таких случаях равновесная инфляция будет слишком высока.

Практическая ценность стратегии «око за око».

> Жен и детей в таких случаях не переселяют, так как даже в случае «войны» им опасность не угрожает. В другом случае это стало бы наиболее уязвимым местом каждого семейства, и любая подобная операция привела бы к такой же ответной. (М. Пьюзо «Крестный отец».)

В своей ставшей знаменитой книге «Эволюция кооперации» профессор Мичиганского университета Роберт Аксельрод [Axelrod, 1984] описывает турнир между компьютерными программами, соревновавшимися в повторяющейся игре «дилемма заключенного». Каждая программа реализовывала какую-то марковскую стратегию. В первом турнире участвовало 15 программ, представленных различными специалистами в области экономических наук, математики, психологии, информационных технологий. Каждая программа пять раз играла против каждой другой программы, по типу футбольного чемпионата. Число ходов в каждой игре было случайным и в среднем равнялось 150. Успех программы в каждой игре равнялся ее среднему выигрышу за ход. Так же определялся и итоговый рейтинг программы.

Наиболее успешным алгоритмом оказалась самая простая программа — стратегия «око за око». Она сочетала в себе три качества. Во-первых, эта стратегия являлась «хорошей», т.е. первый ход был кооперативным; эта программа первой не начинала войну. Во-вторых, если программа-соперник играла некооперативную стратегию H, то стратегия «око за око» немедленно отвечала тем же. Таким образом, эта стратегия не давала себя эксплуатировать. Наконец, в-третьих, стратегия «око за око» обладала короткой памятью. Если соперник переключался с некооперативной стратегии на кооперативную, то «око за око» тоже переключалась на кооперативную стратегию и забывала о прошедшем конфликте. Это позволяло избегать затяжных конфликтов и позволило стратегии выиграть не только этот турнир, но и следующий, в котором участвовали 63 программы (некоторые из них содержали более 100 строк кода).

У стратегии «око за око» есть еще одно преимущество, не реализуемое при игре между компьютерными программами, но крайне важное в человеческих отношениях: эта стратегия является понятной другим игрокам. В качестве примера Аксельрод приводит систему негласных договоренностей между отдельными подразделениями враждующих армий, которая существовала на Западном фронте во время Первой мировой войны. На Западном фронте бóльшую часть времени враждующие армии проводили в окопах, разделенные несколькими сотнями метров нейтральной территории. Во время активных боевых действий обе стороны несли огромные потери; однако во времена затишья солдаты враждующих армий избегали стрелять друг в друга [Axelrod, 1984, p. 74]. Мало того, командиры небольших подразделений часто не позволяли артиллерийским батареям стрелять на поражение, ибо точное попадание во вражеский объект вызывало немедленную ответную реакцию со стороны противника; артиллерийский огонь был предназначен для того, чтобы создать видимость ведения боевых действий и отчитаться перед вышестоящим начальством (которое было расквартировано на достаточном удалении от линии фронта и чья жизнь не находилась в непосредственной опасности). Эта негласная система — получившая название «живи и дай жить другим» — просуществовала почти до конца войны. Британские военачальники стали требовать от своих подчиненных проводить небольшие рейды на вражескую территорию и в качестве отчета о проделанной работе предъявлять либо захваченных в плен солдат противника, либо собственные человеческие потери. Это разрушило систему взаимного доверия, существовавшую между солдатами противоборствующих сторон. При достаточно большой вероятности нападения со стороны противника наилучшей стратегией будет вести упреждающий огонь на поражение вместо того, чтобы стрелять мимо в надежде, что противник не станет потом стрелять в вас. Такое изменение тактики со стороны британского руководства сделало войну более кровопролитной и ускорило ее конец.

2.2.4. МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТОРГА

Повторяющиеся игры могут быть использованы для моделирования процесса принятия компромиссных решений — например, раздела имущества.

Последовательный торг двух игроков. Рассмотрим задачу, предложенную Ариэлем Рубинштейном [Rubinstein, 1982]. Два игрока нашли некоторую сумму денег (скажем, 1 долл.). Они решили, что будут по очереди делать предложения о том, как поделить эту сумму, до тех пор, пока, наконец, не договорятся. То есть в момент времени $t = 0$ первый игрок предлагает поделить эту сумму: взять r_0^1 себе и отдать $(1-r_0^1)$ второму игроку. Второй игрок наблюдает предложенный дележ $(r_0^1, 1-r_0^1)$ и либо соглашается (A), либо отказывается (R). Если второй игрок соглашается, то игра заканчивается. Если он отказывается, то наступает момент времени $t=1$. В момент времени $t=1$ приходит очередь второго игрока предлагать дележ. Пусть r_1^2 и $1-r_1^2$ — пропорции, в которых второй игрок предлагает поделить исходную сумму. Первый игрок может либо согласиться, либо отказаться. Если первый игрок отказывается, то при $t=2$ снова наступает его очередь предлагать дележ. Пусть r_t^j — доля исходной суммы, которую игрок $j=1,2$ предложил игроку 1 в момент времени t ($j=1$, если t четное, и $j=2$, если t нечетное).

Будем считать, что оба игрока ценят свое время. Дисконт для игрока j составляет $\delta_j \in (0,1)$. То есть если в момент времени T игроки договорятся, то выигрыш игрока 1 составит $u_1 = \delta_1^T r_T^j$, а выигрыш игрока 2 составит $u_2 = \delta_2^T(1-r_T^j)$, где $j=1$, если T четное, и $j=2$, если T нечетное.

Описанная выше игра является бесконечной игрой, однако она имеет два принципиальных отличия от исследованной ранее повторяющейся дилеммы заключенного. Во-первых, каждая подыгра повторяющейся дилеммы заключенного идентична самой игре, т.е. она также является бесконечно повторяющейся дилеммой заключенного. В случае с последовательным торгом это не так. В этой игре существуют две разновидности подыгр. В первой из них дележ предлагает первый игрок, во второй — второй игрок. Мы говорим, что в игре последовательного торга есть *два состояния*. Во-вторых, в игре с дележом есть конечные вершины: мы предполагаем, что игра может закончиться в случае, если один из игроков одобрит дележ.

Найдем совершенное по подыграм равновесие в этой игре. Будем искать равновесные стратегии среди *марковских стратегий с памятью* 0, т.е. когда действия игроков зависят только от состояния игры, а не от предыстории ходов. Марковская стратегия игрока 1 — это сумма r^1, которую он предложит оставить себе в том случае, когда настанет его очередь предлагать дележ, а также его ответ (согласиться/отказаться) на все возможные суммы, предлагаемые игроком 2. Игрок 1 в каждой подыгре, в которой он делает ход, предлагает один и тот же дележ, и во всех подыграх, в которых делает ход игрок 2, по-одинаковому реагирует на каждое из возможных предложений игрока 2.

Так как стратегии игроков являются марковскими, мы можем определить V_i — дисконтированный выигрыш игрока i в подыгре, в которой игрок i предлагает дележ, $i=1,2$. Данная величина определяется как минимальная сумма, которую надо предложить игроку i для того, чтобы он отказался от дальнейшего участия в игре.

Посмотрим, может ли пара стационарных стратегий быть совершенным по подыграм равновесием в этой игре, т.е. *совершенным марковским* *равновесием*. Пусть $1 - r^1$ — сумма, которую в стационарном равновесии первый игрок предлагает второму. Найдем оптимальный ответ игрока 2 на предложение игрока 1. Если игрок 2 откажется принять предложенные ему $1 - r^1$, то в следующем периоде его выигрыш, с учетом дисконта, составит $\delta_2 V_2$. Он согласится с предложенным дележом, если

$$1 - r^1 \geqslant \delta_2 V_2. \tag{2.82}$$

Аналогично, если игрок 2 предложит дележ $(r^2, 1 - r^2)$, то игрок 1 согласится на него при

$$r^2 \geqslant \delta_1 V_1. \tag{2.83}$$

Покажем, что пара марковских стратегий, таких, что ни один игрок не принимает предложение[16] другого игрока, не может быть совершенным марковским равновесием.

Если ни один игрок не принимает предложения другого, то игра продолжается бесконечно долго, и мы имеем $V_1 = V_2 = 0$ в силу того, что $\delta_i < 1$ для $i = 1, 2$. Но тогда игрок 2 согласится на любой дележ $(r^1, 1 - r^1)$ при $r^1 < 1$. Это позволит игроку 1 сделать, например, предложение $r^1 = 1/2$, которое примет второй игрок; но из этого будет следовать, что $V_1 \geqslant 1/2$, что противоречит изначальному предположению.

Далее покажем, что в совершенном марковском равновесии игрок 2 принимает предложение игрока 1 и игрок 1 принимает предложение игрока 2. Предположим обратное: один из игроков (например, игрок 2) принимает предложение игрока 1, но игрок 1 не принимает предложение игрока 2. Тогда мы получим

$$V_1 = r^1 \quad \text{и} \quad V_2 = \delta_2(1 - r^1), \tag{2.84}$$

ибо в следующий период игрок 2 соглашается и получает $1 - r^1$. Но тогда для любого $r^1 < 1$ можно взять $r' > r^1$, такой, что $1 - r' \geqslant \delta_2 V_2$. Следовательно, в таком равновесии $r^1 = 1$, $V_2 = 0$, $V_1 = 1$. Но пусть теперь $r^2 > \delta_1$. Тогда игрок 1 согласится с дележом, предложенным игроком 2. Мы получим $V_2 \geqslant 1 - r^2 > 0$, что противоречит предыдущему выводу.

Следовательно, если пара марковских стратегий образует равновесие, то игрок 2 принимает предложение игрока 1 и игрок 1 принимает предложение игрока 2. Из последнего следует, что

$$V_2 = 1 - r^2. \tag{2.85}$$

Таким образом, в совершенном марковском равновесии обязаны выполняться условия (2.82)–(2.85). Рассуждая далее, мы придем к выводу, что неравенства (2.82) и (2.83) должны выполняться как равенства. Пусть, например, $1 - r^1 > \delta_2 V_2$. Это не может быть равновесием, так как существует

[16] Имеется в виду только то предложение, которое предписывает другому игроку сделать *его* стратегия.

$r^{1'} > r^1$ такой, что $1 - r^{1'} > \delta_2 V_2$. Предложение $r^{1'}$ принимается игроком 2 и приносит больший выигрыш игроку 1, следовательно, r^1 не может быть равновесным. В совокупности с (2.84), (2.85) это дает систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Ее решение и дает нам совершенное по подыграм равновесие. Игрок 1 предлагает дележ

$$(r^1, 1 - r^1) = \left(\frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1 - \delta_1)}{1 - \delta_1\delta_2}\right) \tag{2.86}$$

и принимает предложение игрока 2, только если

$$r^2 \geqslant \frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{1 - \delta_1\delta_2}. \tag{2.87}$$

Игрок 2 предлагает дележ

$$(r^2, 1 - r^2) = \left(\frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{1 - \delta_1\delta_2}, \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2}\right) \tag{2.88}$$

и принимает предложение игрока 1, только если

$$1 - r^1 \geqslant \frac{\delta_2(1 - \delta_1)}{1 - \delta_1\delta_2}. \tag{2.89}$$

Можно сделать несколько выводов. Выигрыш игрока в том случае, когда он предлагает дележ первым, будет больше, чем тогда, когда он предлагает дележ вторым. Так как оба игрока ценят время, упущенное в процессе торга ($\delta_i < 1$), то игрок, предлагающий дележ, обладает преимуществом.

Действительно, пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Тогда выигрыш первого игрока будет $1/(1 + \delta)$, выигрыш второго игрока $\delta/(1 + \delta)$. Величина этого преимущества возрастает при убывании δ: при $\delta = 0$ первый игрок забирает себе все; при $\delta = 1$ оба игрока достаточно терпеливы для того, чтобы делящий сразу предложил равный дележ. Терпение всегда приносит свои плоды: при разных δ_i, выигрыш как первого, так и второго игрока возрастает с собственной δ и падает с δ другого игрока.

Такая же игра, но с конечным числом периодов, была рассмотрена Стаалом [Stahl, 1972]. Решение в конечной игре, полученное методом обратной индукции, обладает теми же свойствами сравнительной статики, что и в игре с бесконечным горизонтом планирования. В равновесии в момент времени $t = 1$ игрок 1 предлагает некий дележ, на который соглашается второй игрок. При увеличении числа периодов равновесный дележ стремится к равновесному дележу в задаче с бесконечным числом периодов, решенной выше.

Данная пара стратегий является совершенным по подыграм равновесием по построению. Но существуют ли другие совершенные по подыграм равновесия? Может ли совершенное по подыграм равновесие предполагать, что в разные моменты времени игроки предлагают разные дележи? Оказывается, что нет.

Докажем, что представленное равновесие является единственным. Предположим, что существует другое равновесие, в котором у игроков $i = 1, 2$ разные выигрыши в разных подыграх V_i. Обозначим через $\underline{V}_i = \inf V_i$ и $\overline{V}_i^t = \sup V_i$ верхнюю и нижнюю границы выигрышей обоих игроков по всем подыграм. Пусть предложение делает игрок 1. С одной стороны, если он предлагает второму игроку $\delta_2 \overline{V}_2$, то игрок 2 обязательно примет его предложение. Следовательно, $\underline{V}_1 \geqslant 1 - \delta_2 \overline{V}_2$. С другой стороны, если первый игрок предлагает второму меньше, чем $\delta_2 \underline{V}_2$, то второй игрок наверняка откажется. Следовательно, мы имеем $\overline{V}_1 \leqslant 1 - \delta_2 \underline{V}_2$. Получив аналогичные ограничения для второго игрока, мы приходим к системе неравенств

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &\geqslant 1 - \delta_2 \overline{V}_2, \\ \overline{V}_1 &\leqslant 1 - \delta_2 \underline{V}_2, \\ \underline{V}_2 &\geqslant 1 - \delta_1 \overline{V}_1, \\ \overline{V}_2 &\leqslant 1 - \delta_1 \underline{V}_1. \end{aligned} \tag{2.90}$$

У этой системы существует единственное решение:

$$\underline{V}_1 = \overline{V}_1 = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \qquad \underline{V}_2 = \overline{V}_2 = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1 \delta_2},$$

что соответствует дележам (2.86) и (2.88). Таким образом, единственное совершенное по подыграм равновесие в этой игре является совершенным марковским равновесием.

Проверяя марковские стратегии на равновесность, мы ограничиваемся только рассмотрением одномоментных отклонений от марковских стратегий. Например, мы предполагаем, что игрок 1 может решить единожды отклониться от своей стратегии, предлагая дележ $r^{1'}$ вместо r^1. Такое отклонение не повлияет на стоимость игры в последующих подыграх: если игра через два периода не закончится, то стоимость игры для первого игрока снова составит V_1. Можно доказать, что при проверке профиля стратегий на равновесность мы имеем право ограничиться рассмотрением только таких одномоментных отклонений (не предполагая, например, что игрок 1 может отклониться в данном периоде, через два периода и через восемь периодов). Этот факт известен как *принцип однократных отклонений* (см., например, [Mailath, Samuelson, 2006] и является следствием принципа оптимальности Беллмана [Sundaram, 2006], известного из динамического программирования. Если профиль стратегий (в конечной игре или в бесконечной игре с дисконтированием) является устойчивым относительно одномоментных отклонений, то он является полноценным совершенных по подыграм равновесием (задача 2.3).

Модель последовательного торга при принятии решений несколькими игроками. В предыдущей задаче мы моделировали поведение двух индивидов, по очереди предлагающих дележ некоторого ресурса. Похожий подход применим и в более сложных ситуациях. Бэрон и Фереджон [Baron, Ferejohn, 1989] предложили рассмотреть задачу дележа единицы ресурса между N игроками.

Пусть в каждый момент времени дележ предлагает игрок, выбираемый наугад с равной вероятностью $1/N$. Далее каждый из игроков голосует за или против предложенного дележа. Если за предложенный дележ проголосовало не менее $K \leqslant N$ игроков, то игра заканчивается. Если нет, то право предлагать дележ переходит к следующему наугад выбранному игроку. Пусть дисконт у всех игроков одинаков и равен δ. Мы будем решать эту игру способом, аналогичным использованному в предыдущей задаче.

В отличие от предыдущей задачи в рассматриваемом случае совершенное марковское равновесие не будет единственным равновесием, совершенным по подыграм. В этой игре существует N состояний, соответствующих игрокам, предлагающим дележ. Предположим, что равновесие симметричное: в любой подыгре ожидаемый выигрыш игрока зависит только от того, предлагает ли он дележ, или нет. Пусть R — ожидаемый выигрыш игрока, предлагающего дележ; r — ожидаемый выигрыш игрока, не предлагающего дележ *до того, как дележ предложен*.

Чему равен выигрыш каждого из игроков в подыгре при условии, что предложенный в данный момент времени дележ не принят?

С вероятностью $1/N$ игрок предложит дележ и получит выигрыш R. С вероятностью $(N-1)/N$ его выигрыш составит r. Так что для того, чтобы игрок согласился на предлагаемый дележ в данный момент времени, необходимо, чтобы ему предложили как минимум $\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right)$.

Таким образом, предложенный дележ будет:

$$1 - (K-1)\,\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right)$$

предлагающему игроку;

$$\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right)$$

каждому из остальных $K-1$ игроков, которые должны одобрить дележ; 0 каждому из оставшихся $N-K$ игроков.

Симметричность этой игры требует предположения о том, что каждый из $N-1$ игроков, не предлагающих дележ на данном этапе, должны иметь одинаковую вероятность быть включенным в число $K-1$ игроков, которые одобрят дележ. Эта вероятность равна $\frac{K-1}{N-1}$. Следовательно, мы имеем систему уравнений, описывающих симметричное, совершенное марковское равновесие в этой модели:

$$
\begin{aligned}
R &= 1 - (K-1)\,\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right), \\
r &= \delta\,\frac{K-1}{N-1}\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right).
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

Эта система уравнений имеет решение

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{N - \delta\,(K-1)}{N}, \\
r &= \frac{\delta\,(K-1)}{N\,(N-1)}.
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

Выигрыш игрока, которому будет предложено одобрить дележ, составит

$$
\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r\,(N-1)}{N}\right) = \frac{\delta}{N}. \tag{2.93}
$$

Как и при последовательном торге двух игроков, равновесный выигрыш предлагающего дележ снижается при увеличении дисконта δ (а выигрыши других игроков возрастают). Однако даже при $\delta = 1$ у предлагающего игрока может остаться преимущество:

$$
R = \frac{N-K+1}{N} > \frac{K-1}{N\,(N-1)} = r.
$$

Это происходит, если для одобрения дележа не требуется единогласия ($K < N$), так как в случае недостижения согласия в данный момент времени существует положительная вероятность, что в следующий момент времени игроку будет предложен 0. Выигрыши предлагающего дележ игрока и всех остальных игроков сравняются только в одном случае: если игроки максимально терпеливы ($\delta = 1$) и дележ требует единогласного одобрения ($K = N$).

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИГРЫ В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ

Определение 2.10. *Игра в развернутой форме* есть совокупность Γ следующих объектов:

1. Множества игроков $I = \{1, \ldots, N\} \cup \{\text{природа}\}$.
2. Дерева игры — $(X, \vdash)$, где

   (a) X — множество вершин.

   (b) $\vdash$ — отношение наследования: $x \vdash y$ означает «x происходит раньше, чем y» или «y лежит ниже, чем x». Пусть это отношение обладает следующими свойствами:
      i. $\vdash$ транзитивно: если $x' \vdash x$, $x \vdash x''$, то $x' \vdash x''$.
      ii. $\vdash$ антисимметрично: не выполняется $x \vdash x$. Антисимметричность и транзитивность определяют $\vdash$ как частичный порядок на X.
      iii. Если $x' \vdash x$ и $x'' \vdash x$, то либо $x' \vdash x''$, либо $x'' \vdash x'$.
   (c) Множестно конечных вершин $Z \subset X$: для $z \in Z$ не существует вершины $x \in X$, такой, что $z \vdash x$.
   (d) Начальная вершина $o \in X$, такая, что $o \vdash x$ для всех $x \in X$.
3. Функций выигрышей $u_i \colon Z \to \mathbf{R}$ для $i = 1, \ldots, N$.
4. Очередности ходов $\ell \colon X \setminus Z \to I$.
5. Множества действий A. Пусть $A(x)$ — действия, доступные в вершине $x \in X \setminus Z$.
6. Информационных множеств. Пусть H — разбиение $X \setminus Z$ на подмножества, такое, что
   (a) для всех $h \in H$, если $x \in h$ и $x' \in h$, то $i(x) = i(x')$, т.е. каждое информационное множество содержит вершины, в которых ходит только один игрок, и
   (b) если $x, x' \in h$, то $A(x) = A(x')$. То есть во всех вершинах, входящих в информационное множество, игроку доступен один и тот же набор действий.

Множество X и отношение $\vdash$ определяет направленный граф. Условия на отношение $\vdash$ гарантируют, что граф является *деревом*. Начальная вершина o соответствует моменту начала игры. Каждая вершина, которая не является конечной, означает либо принятие решения одним из игроков, либо случайный ход, который делает природа. Каждая конечная вершина соответствует окончанию игры и какому-то вектору выигрышей игроков. Информационные множества показывают, что известно игрокам о ходах, сделанных ранее другими игроками.

Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ С СОВЕРШЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Доказательство этой теоремы проводится по индукции. Пусть Γ — динамическая игра, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_T$ — следующее семейство игр:
1. $\Gamma_1 = \Gamma$.
2. Γ_{t+1} получается из игры Γ_t следующим образом:
   (a) Возьмем вершину $x \in \Gamma_t$, такую, что все вершины, следующие за x, являются конечными. Пусть i — игрок, делающий ход

в вершине x. Пусть $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$ — конечные вершины, соответствующие ходам игрока i в вершине x.

(b) Пусть в вершине $z^* \in Z$ выигрыш игрока i максимален среди всех $z \in Z$. Пусть $s(x)$ — соответствующее действие игрока i. Удалим вершины Z из дерева игры. Объявим x конечной вершиной с выигрышами игроков $u(x) = u(z^*)$.

(c) Повторяем эту процедуру до тех пор, пока от игры не останется одна начальная вершина o.

Так как игра является конечной, то данная процедура определяет ход $s(x)$ для всех вершин x исходной игры Γ. По построению, профиль стратегий s образует равновесие. Действительно, пусть игрок i в вершине x выберет действие $s'(x) \neq s(x)$. Если Γ — игра, s — профиль стратегий и $x \in \Gamma$ — одна из вершин графа игры, то будем говорить, что x лежит на траектории игры при стратегиях s, если существует положительная вероятность того, что игра пройдет через вершину x. Если x лежит на траектории игры, то выигрыш игрока i снизится или останется неизменным. Если x не лежит на траектории игры, то выигрыш игрока i останется неизменным.

B. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДЫГРЫ

Определение 2.11. Пусть Γ — игра в развернутой форме, x — неконечная вершина дерева игры. *Поддеревом игры* Γ из вершины x назовем совокупность всех вершин, лежащих ниже x, и самой вершины x. Поддерево называется *подыгрой*, если любое информационное множество игры Γ либо целиком содержится в поддереве, либо не пересекается с ним.

2.3. ЗАДАЧИ

2.1. Используя обратную индукцию, докажите, что в игре «крестики-нолики» каждая из сторон может добиться ничьей.

2.2. «Девятнадцать» — детская игра, в которой два игрока по очереди называют числа от 1 до 3. Все названные числа суммируются. Когда сумма становится равной или превышающей 19, игра останавливается. Игрок, на котором остановилась игра, объявляется проигравшим, другой игрок — победителем. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Как изменятся стратегии игроков, если игрок, на котором остановилась игра — победитель? Кто выигрывает в каждой игре — тот, кто делает первый ход, или другой игрок?

2.3. Три негодяя — Блондин (Хороший, G), Ангельские Глазки (Плохой, B), и Туко (Злой, U) устроили дуэль на кладбище, где зарыто миллион долларов. Туко попадает в цель с вероятностью 0,4. Ангельские Глазки попадает с вероятностью 0,8. Блондин никогда не промахивается. Дуэль реализуется как двухпериодная игра. Каждый выбирает, в кого выстрелить, и стреляет. Оставшиеся в живых после первого выстрела делают еще один выстрел. Затем те, кто остался жив, делят золото поровну между собой. Ценность всего золота для одного игрока равна единице. Выигрыш погибшего равен нулю. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Почему Блондину так не везет в равновесии?

2.4. N голодных львов готовятся съесть антилопу. В львиной стае заведен такой порядок дележа добычи: сначала, в момент времени $t = 1$, самый старый лев решает, съесть ему антилопу или нет. Если он отказывается есть, то игра заканчивается. Если он съедает антилопу, то в момент времени $t = 2$ следующий по старшинству лев решает: съесть ли первого льва или нет. Если он отказывается есть, то игра заканчивается. Если он решит съесть первого льва, то третий лев решает, стоит ли ему съесть второго. Так игра продолжается до момента времени $t = N$, когда приходит очередь кормиться самому молодому льву. Предпочтения каждого льва ранжированы следующим образом: поесть и остаться живым, остаться голодным и живым, быть съеденым. Найдите совершенное по подыграм равновесие.

2.5. Маша и Саша нашли под новогодней елкой 4 подарка: футбольный мяч, куклу Барби, коробку конфет и конструктор «Лего». Им нужно поделить подарки. Они договорились, что дележ происходит так: сначала Маша берет себе один подарок, потом Саша, потом снова Маша. Саша забирает себе оставшийся подарок. Ценность подарков для Саши и Маши такая:

	конфеты	мяч	конструктор	кукла
Маша	1	2	3	4
Саша	2	3	4	1

(a) Нарисуйте дерево игры.
(b) Сколько стратегий у каждого игрока?
(c) Найдите равновесие в игре, используя обратную индукцию.
(d) Повторите решение для обратного порядка дележа (когда первый ход делает Саша). Какой порядок более выгоден каждому из игроков?

2.6. Фирма «Рога и Копыта» готовится стать банкротом. Все имущество фирмы будет продано. Сумма, за которую удастся реализовать имущество, равна 5 млн долл. с вероятностью $2/3$ и 8 млн долл. с вероятностью $1/3$. У фирмы имеются три нейтральных к риску кредитора — A, B и C; каждому из них она должна по 3 млн долл. Фирма делает каждому кредитору предложение перевести долг в priority bond —

облигации, дающие преимущество при выплате долга. Если кредитор принимает это предложение, то задолженность фирмы перед ним снижается до 2 млн долл. Порядок погашения долга такой: сначала выплачивается долг владельцам облигаций с преимуществом, затем — всем остальным. Внутри каждой категории кредиторов приоритет имеет кредитор A, затем B, затем C. То, что остается после уплаты долга (если что-то вообще остается), получает владелец фирмы.

(a) Пусть фирма делает предложение сначала кредитору A, затем кредитору B, затем кредитору C. Найдите равновесные действия трех кредиторов.
(b) Пусть фирма делает предложение сначала кредитору C, затем кредитору B, затем кредитору A. Найдите равновесные действия трех кредиторов. Какой из двух перечисленных порядков предложений более выгоден для фирмы?

2.7. Рассмотрим конечную игру, аналогичную задаче, разобранной на с. 133–137. Два игрока нашли 1 долл. Они по очереди делают предложения о том, как поделить эту сумму. В момент времени $t = 1$ первый игрок предлагает поделить эту сумму следующим образом: взять r_1^1 себе и отдать $(1 - r_1^1)$ второму игроку. Второй игрок наблюдает предложенный вариант r_1 и либо соглашается (A), либо отказывается (R). Если второй игрок соглашается, то игра заканчивается. Если он отказывается, то наступает момент времени $t = 2$. В момент времени $t = 2$ приходит очередь второго игрока предлагать дележ. Пусть r_2^2 и $1 - r_2^2$ — пропорции, в которых второй игрок предлагает поделить исходную сумму. Первый игрок может либо согласиться, либо отказаться. Если первый игрок отказывается, то в момент времени $t = 3$ снова наступает его очередь предлагать дележ. Так происходит до тех пор, пока в момент времени T игрок, который должен предложить дележ в этот момент времени, не забирает всю сумму себе, после чего игра заканчивается. Пусть с каждым ходом размер делимой суммы уменьшается с коэффициентом $\delta < 1$: в момент времени $t = 2$ игроки делят δ, в момент времени $t = 3$ они делят δ^2, и т.д. Найдите совершенное по подыграм равновесие.

2.8. В игре «верю — не верю», представленной на рис. 2.16, нарисуйте дерево игры и найдите совершенное по подыграм равновесие для каждого из следующих вариантов игры:

(a) Первый игрок не видит карту, которую берет из колоды; второй игрок не видит карту первого игрока.
(b) Первый игрок не видит карту, которую берет из колоды; второй игрок видит карту первого игрока.

(c) Все как в изначальном варианте игры, только теперь в колоде имеются N тузов и K шестерок.

2.9. «Сжигание денег» [Ben-Porath, Dekel, 1992]. Два человека готовятся играть в игру «координация» со следующей матрицей выигрышей:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	L	9; 6	0; 4
	R	4; 0	6; 9

До того как они начинают играть, игрок 1 принимает решение: стоит ли ему сжечь 2 ед. собственного выигрыша или нет. После того, как его выбор наблюдает игрок 2, они играют в однопериодную «координацию».

(a) Перечислите все стратегии обоих игроков.
(b) Нарисуйте дерево игры и найдите все равновесия.
(c) Представьте игру в нормальной форме. Найдите все равновесия, используя итеративное удаление строго и слабо доминируемых стратегий. Как Вы можете прокомментировать результат?

2.10. На кафедре экономики в некотором университете работают пять профессоров. Секретарь кафедры просит каждого скинуться по 1000 руб. для фуршета после заседания кафедры. Для того чтобы фуршет состоялся, необходимо, чтобы скинулись как минимум три профессора. Деньги, отданные на организацию фуршета, профессорам не возвращаются. Ценность фуршета для каждого профессора — 5000 руб. Найдите совершенные по подыграм равновесия для каждого из следующих двух случаев:

(a) Профессоры по очереди решают, сдавать деньги или нет. Каждый профессор наблюдает решение всех предыдущих.
(b) Профессоры 1 и 2 сдают деньги первыми (по очереди, второй наблюдает выбор первого). Затем решение (сдавать или не сдавать) одновременно принимают профессоры 3–5, причем они не наблюдают решения профессоров 1 и 2.

2.11. У Петра Ивановича есть любимый внук, Вовочка. Текущий доход Вовочки — I_C руб., Петра Ивановича — I_P руб. Рассмотрим такую динамическую игру.

Этап 1. Вовочка решает, сколько из текущего дохода сберечь на завтрашний день (S).

Этап 2. Петр Иванович решает, какого размера наследство оставить Вовочке (B).

Выигрыш Вовочки таков:

$$U_1 = \ln(I_C - S) + \ln(B + S),$$

где $I_C - S$ — его потребление в текущем году, $B + S$ — его потребление в будущем. Выигрыш Петра Ивановича:

$$U_2 = \ln(I_P - B) + k\big(\ln(I_C - S) + \ln(B + S)\big),$$

где $k > 0$ отражает степень заботы Петра Ивановича о своем внуке. Решите игру методом обратной индукции. Покажите, что равновесие Парето-неэффективно, т.е. можно увеличить выигрыш обоих, увеличив S и снизив B.

2.12. [Weingast, 1997]. Общество состоит из диктатора (R) и двух групп граждан (A и B). На первом этапе диктатор решает, стоит ли ему экспроприировать доход одной из групп, и если да, то какой. Если экспроприации нет, то выигрыш всех трех игроков равен 0. Если диктатор решил провести экспроприацию, то на втором этапе каждая из групп решает, стоит ли ей бунтовать против диктатора. Бунт удается, только если обе группы решают бунтовать. В таком случае экспроприации не происходит, диктатор несет издержки k, каждая из двух групп получает выигрыш b. Если бунтует только одна группа, то она несет издержки $c > 0$. В добавок к этому диктатор экспроприирует $x > 0$ у одной из групп (т.е. выигрыш диктатора составит x, выигрыш экспроприируемой группы составит $-x$ либо $-c - x$. Нарисуйте дерево игры. Найдите все совершенные по подыграм равновесия.

2.13. Рассмотрим такую динамическую игру.

(a) Игрок 1 выбирает одно из чисел $\{1, 2\}$.
(b) Бросают монету, если выпал «Орел», то второму игроку сообщают, что выбрал первый.
(c) Игрок 2 выбирает одно из чисел $\{3, 4\}$.
(d) Выбирается наугад одно из чисел $\{1, 2, 3\}$ с вероятностями 0,4; 0,2; 0,4 соответственно.

В результате игры числа, полученные на 1, 3 и 4 ходах складываются. Если полученная сумма нечетная, то первый игрок выплачивает ее второму игроку. Если сумма четная, то второй игрок платит первому. Покажите игру в нормальной и развернутой форме. Найдите равновесия.

2.14. На некотором рынке конкурируют N фирм. Процесс ценообразования устроен следующим образом: в момент времени $t = 1$ фирма 1 выбирает $q_1 \in [0, 100]$, затем в $t = 2$ фирма 2 выбирает $q_2 \in [0, 100]$, и т.д., вплоть до фирмы N в момент времени $t = N$. Выигрыш фирмы i равен $u_i = q_i p - q_i c$, где $p = 100 - \sum_i q_i$. Найдите равновесие, совершенное по подыграм, в котором $q_i > 0$ для всех i. Сравните выигрыши игроков и цену в этом равновесии и равновесии в однопериодной игре, в которой все q_i выбираются одновременно.

2.15. Пусть Γ — динамическая игра с совершенной информацией, причем для всех игроков i и для любых двух конечных вершин z, z' выполнено $u_i(z) \neq u_i(z')$. Докажите, что в этой игре существует единственное совершенное по подыграм равновесие.

2.16. Пусть s_i — чистая стратегия игрока i в динамической игре. Будем говорить, что s_i' является *однократным отклонением* от стратегии s_i, если s_i' предписывает делать такие же ходы, как и s_i, во всех информационных множествах, кроме какого-то одного. Пусть Г — конечная динамическая игра с совершенной информацией, s — профиль стратегий в этой игре. Пусть для каждого игрока i не существует такого однократного отклонения s_i', которое увеличивало бы выигрыш игрока i в какой-нибудь подыгре. Докажите, что s — совершенное по подыграм равновесие.

2.17. Пусть G — игра, в которой имеется K равновесий Нэша, причем выигрыши каждого игрока во всех равновесиях одинаковы. Сколько существует совершенных по подыграм равновесий в игре G, повторенной T раз?

2.18. Пусть G — игра, в которой имеется несколько равновесий Нэша. Докажите, что каждое равновесие в игре G (с равновесным профилем стратегий a) соответствует совершенному по подыграм равновесию в игре G, повторенной конечное число раз, в котором на каждом этапе игроки реализуют a.

2.19. Докажите следующую версию «народной теоремы». Пусть игра G — игра в нормальной форме, $\widehat{a}$ — профиль действий, такой, что для всех i верно $u_i(\widehat{a}) > \underline{u}_i$, где $\underline{u}_i$ — минимаксный выигрыш, определенный в уравнении (2.69). Пусть в игре G существуют два равновесия Нэша, таких, что равновесные выигрыши не совпадают ни для одного из игроков. Пусть существуют N профилей стратегий a^i, $(a^i)\big|_{i=1}^{N}$, таких, что для каждого игрока i мы имеем $u_i(a^i) < u_i(\widehat{a})$ и $u_i(a^j) > u_i(\widehat{a}_i)$ для всех $j \neq i$. Докажите, что для всех ε существует $T^* < \infty$, такое, что для всех $T > T^*$ в игре $G(T)$ существует равновесие Нэша, в котором выигрыш каждого игрока отличается от $u_i(\widehat{a})$ не более, чем на ε. Считайте, что выигрыш в конечно повторяющейся игре задан уравнением (2.61).

2.20. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2				
		a	b	c	d	e
Игрок 1	A	1; 1	5; 0	0; 0	0; 0	0; 0
	B	0; 5	4; 4	0; 0	0; 0	0; 0
	C	0; 0	0; 0	3; 3	0; 0	0; 0
	D	0; 0	0; 0	0; 0	4; 0,5	0; 0
	E	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	0,5; 4

(a) Существует ли в этой игре, повторенной два раза, совершенное по подыграм равновесие, в котором на первом ходе игроки реализуют профиль действий $(\mathtt{B}, \mathtt{b})$?

(b) Ужесточим требования к равновесию. Пусть теперь равновесие не только обязано быть совершенным по подыграм. Потребуем, чтобы в каждой подыгре равновесие не было Парето-доминируемым другим равновесием. То есть, будем считать, что в каждой подыгре игроки могут *передоговориться* — перейти к любому другому равновесию, если это устроит обоих игроков. Как изменится ваш ответ? Объясните, как дополнительное требование Парето-эффективности равновесий в подыграх сужает множество выигрышей, которые можно реализовать в совершенном по подыграм равновесии.

2.21. Иван и Никифор играют в «дилемму заключенных» со следующей матрицей выигрышей:

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	X	1; 1	0; 5
	Y	5; 0	4; 4

Вне зависимости от исхода игры на следующий день игра повторяется, и так до бесконечности. Пусть $\delta < 1$ — дисконт. Определим средний выигрыш игрока i как

$$U_i = (1 - \delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{it},$$

где u_{it} — выигрыш i в период t.

(a) Покажите, какие средние выигрыши реализуемы в равновесии (когда оба игрока играют триггерные стратегии) при достаточно больших δ, а какие — нет.

(b) При каком δ можно реализовать в равновесии средний выигрыш $(4, 4)$?

2.22. Рассмотрим задачу бесконечно повторяющейся дуополии Курно. Пусть q_{1t}, q_{2t} — количество товара, произведенного фирмами 1 и 2 в момент времени $t = 1, 2, \ldots$; $p_t = a - q_{1t} - q_{2t}$ — функция спроса,

$$U_{it} = p_t q_{it} - c\, q_{it}$$

есть прибыль фирмы $i = 1, 2$ в момент времени t, где $c \geqslant 0$ — предельные издержки фирмы.

(a) Найдите q^m — объем производства каждой фирмы при условии картельного сговора между фирмами, предполагая, что объемы производств обоих фирм равны.

(b) Найдите $\check{q}_1(q_2)$ и $\check{q}_2(q_1)$ — функции реакции для каждой из фирм в однопериодной игре. Найдите q^c — равновесный выпуск каждой из фирм при конкуренции Курно.

(c) Пусть между фирмами существует следующее негласное соглашение: в каждый момент времени каждая фирма производит q^m ед. товара. Если в момент времени t какая-нибудь из фирм произведет другое количество товара, то, начиная с момента времени $t+1$, негласное соглашение перестает существовать и выпуск каждой фирмы будет равен q^c. При каком дисконте δ такое соглашение будет устойчивым, т.е. возможно ли равновесие в бесконечно повторяющейся игре, в которой $q_1 = q_2 = q^m$ во все моменты времени?

2.23. В автомобильной промышленности имеются два производителя: фирмы 1 и 2. Кроме того, существует профсоюз автомобильных рабочих. В момент времени 1 профсоюз устанавливает заработную плату w, которую будет получать работник. В момент времени 2 каждая фирма $i = 1, 2$ решает, какое количество q_i машин ей следует произвести. Предположим, что для производства машины требуется один рабочий. Рыночная цена автомобиля равна $p = 1 - q_1 - q_2$. Прибыль каждой фирмы равна $u_i = p\,q_i - w\,q_i$, выигрыш профсоюза равен суммарной зарплате всех рабочих $u_w = (q_1 + q_2)\,w$. Найдите совершенное по подыграм равновесие Нэша.

2.24. [Zakharov, 2009]. Два политика соревнуются друг с другом на президентских выборах. В момент времени $t = 1$ каждый политик $i = 1, 2$ выбирает политическую программу $y_i \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ политики решают, сколько средств следует потратить на избирательную кампанию: e_1, e_2. Далее каждый из избирателей голосует за одного из политиков. Пусть существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется своей наилучшей альтернативой v. Пусть наилучшие альтернативы избирателей распределены равномерно на $[-w, w]$. Предположим, что выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v при голосовании за кандидата i равен

$$u_i(v) = -(y_i - v)^2 + \sqrt{e_i}\,.$$

Будем считать, что избиратель голосует за того кандидата, кто приносит ему бо́льший выигрыш.

(a) При данных y_1, y_2, e_1, e_2 найдите V_1, V_2 — доли голосов (от общего числа избирателей), получаемые кандидатами.

(b) Пусть выигрыш кандидата i равен $V_i - e_i$. Найдите, какими будут e_1, e_2 в совершенном по подыграм равновесии при данных y_1, y_2 (предполагая, без потери общности, что $y_1 \leqslant y_2$). Объясните зависимость e_1, e_2 от w и от $y_2 - y_1$.

(c) Найдите, чему будут равны y_1, y_2 в совершенном по подыграм равновесии. Почему не будет выполняться $y_1 = y_2$?

2.25. [Austen-Smith, Banks, 1988]. В парламенте некоторой страны есть три партии, которым надо избрать коалиционное правительство. Процедура формирования правительства выглядит следующим образом. Сначала партия 1 выносит на голосование предложение, состоящее из величины $y_1 \in [-1, 1]$ и вектора $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$, где $v_{11} \geqslant 0$, $v_{12} \geqslant 0$, $v_{13} \geqslant 0$ и $v_{11} + v_{12} + v_{13} = 1$. Далее все три партии голосуют за это предложение; если оно получает голоса как минимум двух партий из трех, то оно принимается и игра заканчивается. Выигрыш партии i при этом составляет $u_i = v_{1i} - (y_1 - a_i)^2$, где a_i — параметр, определяющий позицию партии i. Величина y_1 является предложением партии 1 по экономической политике (-1 — левая политика, «все отнять и поделить», 1 — правая политика, «каждый сам за себя»). Вектор v_1 — предложение по распределению министерских портфелей между партиями. Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$. Если предложение, выдвинутое партией 1, отвергается, то следующее предложение y_2, v_2 делает партия 2. Если отвергается и оно, то предложение y_3, v_3 делает партия 3. Наконец, если не принимается предложение партии 3, то объявляются новые выборы, игра заканчивается, и каждая партия получает нулевой выигрыш. Предположим, что если партии все равно, принимать предложение или нет, то она его принимает.

(a) Найдите y_3, v_3. Будут ли все три партии иметь неотрицательный выигрыш после предложения, сделанного партией 3? Будет ли это предложение принято?

(b) Найдите предложения y_2, v_2 и y_1, v_1. Какие партии в совершенном по подыграм равновесии будут иметь ненулевой выигрыш?

2.26. (По мотивам [Akerlof, 1970]). Каждая из двух строительных фирм в городе N собирается нанять рабочего. В момент времени $t = 1$ каждая фирма $i = 1, 2$ объявляет зарплату w_i, которую она готова платить за день работы. В городе проживает один рабочий, который в момент времени $t = 2$ решает, на какую фирму ему стоит работать (и стоит ли работать вообще). Пусть выигрыш рабочего при работе на фирму i равен w_i. Считаем, что выигрыш рабочего, если он не работает ни на одну фирму, равен его резервной зарплате $r \in [0, 1]$. Если рабочий согласился работать на фирму, то она не может ему отказать. Будем считать, что фирмам не известна резервная зарплата r; с их точки зрения, эта величина равномерно распределена на $[0, 1]$. Если $w_1 = w_2 \geqslant r$, то рабочий с равной вероятностью работает на каждую из двух фирм.

(a) Пусть w_1, w_2 — заработная плата, предлагаемая фирмами. Пусть $f(r) = \dfrac{3\alpha}{2}\sqrt{r}$ — производительность труда рабочего с резервной зарплатой r. Найдите $\overline{f}(r) = \mathsf{E}(f(\rho) \mid \rho \leqslant r)$ — среднюю производительность рабочего, при условии, что его резервная зарплата равна r или ниже.

(b) Пусть целевая функция фирмы, нанявшей рабочего, равна производительности рабочего минус его зарплата. Будем предполагать, что если фирма не наняла рабочего, то она несет небольшие издержки ε:

$$U_i = \begin{cases} \overline{f}(w_i) - w_i, & w_i \geqslant w_{-i}; \\ -\varepsilon, & w_i < w_{-i}. \end{cases}$$

Найдите равновесные w_1, w_2.

(c) Какие рабочие работают в Парето-оптимуме? Почему при некоторых значениях α производство в равновесии ниже, чем в Парето-оптимуме? Почему, в частности, самые производительные рабочие не будут работать? Почему фирмы неспособны платить бóльшую зарплату более производительным рабочим?

2.27. [Groseclose, Snyder, 1996]. Рассмотрим пример на с. 114–117. Пусть депутат i голосует за предлагаемый лоббистом A законопроект, если $a_i + v \geqslant b_i$, где $v > 0$ — выигрыш депутата от реализации этого закона. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Чему будет равен размер коалиции лоббиста A?

2.28. [Rosenthal, 1990]. Парламент некоторой страны представлен континуумом депутатов. Парламент должен принять решение по некоторому одномерному вопросу (например, установить уровень затрат на некоторый проект). Законотворческий процесс происходит следующим образом. В момент времени $t = 1$ глава парламентского комитета предлагает принять решение $s_1 \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ депутаты голосуют («за» либо «против»). Выигрыш парламентария составляет $-(s_1 - v)^2$, если проект принимается, и $-(s_0 - v)^2$, если проект не принимается. Здесь $s_0 \in [0, 1]$ — статус кво, v — наилучшая альтернатива парламентария. Будем предполагать, что v равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите совершенное по подыграм равновесие в этой игре, если

(a) выигрыш главы комитета равен s_1, если проект принят, и s_0, если проект не принят. То есть глава комитета заинтересован в высоком уровне затрат на проект;

(b) выигрыш главы комитета равен $-(s_1 - \overline{s})^2$, если проект принимается, и $-(s_0 - \overline{s})^2$, если нет, где $\overline{s} \in [0, 1]$ — наилучшая альтернатива главы комитета. Как равновесный s_1 зависит от $\overline{s}$, s_0? Почему в обоих случаях решение будет неоптимальным с точки зрения парламентариев? Как изменится ваш ответ, если для принятия предложения s_1 необходима поддержка 2/3 парламентариев?

2.29. N свиней толкаются у корыта с кормом. В каждый момент времени у корыта может находиться только одна свинья. У этой свиньи есть два варианта действий: пассивный (быстро поесть и отбежать в сторону, получив выигрыш V за этот момент времени), либо агрессивный (защищать свое место у корыта от посягательства соседей, получив выигрыш $V - c > 0$). Другие свиньи в этот момент времени не предпринимают никаких действий (и получают нулевой выигрыш). Если свинья выбирает агрессивный вариант действий, то в следующий момент времени с вероятностью 1 она снова окажется у корыта. Если нет, то с вероятностью $1/N$ у корыта окажется одна из N свиней. Игра повторяется бесконечное число периодов; фактор дисконта равен $\delta \in (0, 1)$. Найдите условия существования каждого из двух возможных совершенных марковских равновесий в чистых стратегиях (в первом таком равновесии свиньи всегда ведут себя агрессивно, во втором — всегда пассивно). Объясните, почему при некоторых значениях параметров δ, N, V, c будут существовать оба равновесия.

2.30. [Berger, Munger, Potthoff, 2000]. В некоторой республике проходят президентские выборы, в которых принимают участие два кандидата: бывалый и новичок. Стратегия каждого кандидата — это программа, с которой он идет на выборы (см. пример на с. 58). Пусть $s_1 \in [0, 1]$ — программа бывалого, $s_2 \in [0, 1]$ — программа новичка. Например, можно считать, что $s = 0$ — крайне левая программа (высокие налоги, высокие затраты на социальную сферу), $s = 1$ — крайне правая политика (низкие налоги). Существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется наилучшей альтернативой $v \in [0, 1]$. Величина v равномерно распределена на $[0, 1]$. Пусть выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v при победе бывалого равен

$$U_1(v) = e - \beta\,(v - s_1)^2,$$

при голосовании за новичка —

$$U_2(v) = -\beta\,(v - s_2)^2.$$

Величина $e > 0$ отражает то, насколько, при равных политических программах, бывалый кандидат лучше новичка. Пусть $\beta > 0$. Каждый избиратель (по определению) голосует за того кандидата, кто приносит ему бóльший выигрыш. Пусть выигрыши кандидатов равны V_1, V_2 — долям голосов, которые они получают на выборах.

(a) Найдите, как V_1 и V_2 зависят от s_1, s_2. Подсказка: найдите сначала позицию $\widetilde{v}$ безразличного избирателя — т.е. решение уравнения $u_1(\widetilde{v}) = u_2(\widetilde{v})$.

(b) Пусть кандидаты выбирают s_1, s_2 одновременно. Будет ли в этой игре существовать равновесие в чистых стратегиях?

(c) Пусть бывалый кандидат выбирает s_1, затем новичок выбирает s_2. Найдите равновесие. Почему в равновесии программа бывалого кандидата будет близка к центру?

2.31. Рассмотрим модель последовательного торга на с. 133–137. Пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Предположим, что размер суммы денег x, которую надо поделить, равен 1 с вероятностью 1/2 и $R > 1$ с вероятностью 1/2. Пусть эта величина статистически независима как от личности предлагающего дележ игрока, так и от истории игры.

(a) Сколько состояний в этой игре?

(b) При каком R возможно совершенное марковское равновесие, в котором предлагаемый дележ одобряется при любом x? Каким будет это равновесие?

(c) При каком R возможно совершенное марковское равновесие, в котором предлагаемый дележ одобряется только при $x = R$? Каким будет это равновесие?

(d) Возможны ли другие совершенные по подыграм равновесия, помимо совершенных марковских?

2.32. Найдите совершенное по подыграм равновесие в задаче последовательного торга с конечным числом периодов (с. 133). Предположим, что если игроки не приходят к согласию к моменту времени T, то предлагающий дележ игрок забирает себе весь товар. Покажите, что при $T \to \infty$ равновесие сходится к равновесию в задаче с бесконечным числом периодов.

2.33. Пусть в модели последовательного торга Бэрона–Фереджона (с. 137) все игроки-парламентарии делятся на две группы, A и B, численностью $N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}} = N$. В каждом периоде вероятность того, что игрок из первой группы будет предлагать дележ, равняется p, $1/N < p < 1/N_{\mathrm{A}}$; вероятность того, что дележ предложит кто-нибудь из второй группы есть $q = (1 - N_{\mathrm{A}} \cdot p)/N_{\mathrm{B}}$. Пусть для того, чтобы дележ был утвержден, достаточно поддержки $(N+1)/2$ парламентариев. Выпишите систему уравнений относительно R_{A}, r_{A}, R_{B}, r_{B} — стоимостей игры для предлагающего и не предлагающего дележ игрока из каждой группы. Какой дележ будет предложен каждым игроком? Найдите совершенное марковское равновесие. Объясните, почему мы можем иметь $r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}$.

2.34. [Smith, 1974]. Два самца дерутся из-за партнерши. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ каждый из них решает: продолжить ли борьбу, или сдаться. Если в какой-то момент времени один из самцов сдался, а другой — нет, то игра заканчивается и сдавшийся самец объявляется проигравшим, не сдавшийся — победителем. Если оба самца сдались, то оба проиграли. Если никто не сдался, то игра переходит в следующий период с дисконтом $\delta < 1$. Ценность победы равна 1, издержки в каждом периоде равны c, $0 < c < 1$. Найдите все совершенные марковские равновесия в смешанных стратегиях (в которых каждый игрок продолжает борьбу с какой-то вероятностью). Как изменится ваш ответ, если издержки самцов не равны: $0 < c_1 < c_2 < 1$?

2.35. [Ferejohn, 1986]. В некоторой стране только что выбрали президента. Действия президента на посту определяются величиной $r \in [0, 1]$. Выигрыш президента равен r, выигрыш публики $1 - r$. Например, r может отражать долю своего личного времени, которую президент тратит на негосударственные дела, или количество денег, которое он ворует из государственного бюджета (чем больше ворует, тем больше r). Сразу после выборов публика ставит президенту следующее условие: он будет переизбран, только если $r \leqslant \overline{r}$.

(a) Рассмотрим следующую двухпериодную игру. Сначала публика устанавливает $\overline{r}$. Затем президент выбирает r. Если $r > \overline{r}$, то президент проигрывает следующие выборы и его выигрыш составляет r. Если $r \leqslant \overline{r}$, то президент выигрывает следующие выборы и его суммарный выигрыш составляет $r + \delta R$, где $R > 0$ — выигрыш от переизбрания, $\delta > 0$ — дисконт. Найдите совершенное по подыграм равновесие в этой игре.

(b) Теперь рассмотрим такую бесконечную игру: если президента переизбирают, то публика снова устанавливает $\overline{r}$, после чего президент выбирает r. Если президента не переизбирают, то игра заканчивается. Пусть выигрыш президента равен $u_p = \sum_{t=0}^{\infty} r_t \delta^t$, где r_t — действие президента в момент времени t. Выигрыш избирателей в момент времени t есть $1 - r_t$. Найдите совершенное марковские равновесие, т.е. такое, в котором $\overline{r}$ и r одинаковы во всех периодах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 2

Abreu D. On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting // Econometrica. 1988. Vol. 56. No. 2. P. 383–396.

Acemoglu D., *Robinson J.A.* The Economic Origins of Democracy and Dictatorship. New York: Oxford University Press, 2005.

Akerlof G. A. The Market for «lemons»: Quality Uncertainty and the Market Mechanism // The Quarterly Journal of Economics. 1970. Vol. 84. No. 3. P. 488–500.

Alesina A., *Summers L.H.* Central Bank Independence and Macroeconomic Performance // Journal of Money, Credit, and Banking. 1993. Vol. 25. P. 151–162.

Austen-Smith D., *Banks J.* Elections, Coalitions, and Legislative Outcomes // American Political Science Review. 1988. Vol. 82. No. 2. P. 405–422.

Axelrod R.M. Evolution of Cooperation. Basic Books, 1984.

Baron D.P., *Ferejohn J.A.* Bargaining in Legislatures // The American Political Science Review. 1989. Vol. 83. No. 4. P. 1181–1206.

Barro R.J., *Gordon D.B.* A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural Rate Model // Journal of Moneraty Economics. 1983. Vol. 23. P. 3–30.

Ben-Porath E., *Dekel E.* Signaling Future Actions and the Potential for Sacrifice // Journal of Economic Theory. 1992. Vol. 57. No. 1. P. 36–51.

Benoit J.P., *Krishna V.* The Folk Theorems for Repeated Games: A Synthesis // Discussion Papers: New York University, 1994.

Berger M.M., *Munger M.C.*, *Potthoff R.F.* The Downsian Model Predicts Divergence // Journal of Theoretical Politics. 2000. Vol. 12. No. 2. P. 228–240.

Camerer C.F. Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction. Princeton: Princeton, NJ, 2003.

D' Aspremont C., *Gabszewicz J.J.*, *Thisse J.-F.* On Hotelling's «Stability in Competition» // Econometrica. 1979. Vol. 50. P. 1431–1452.

Dixit A. A Model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers // Bell Journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 20–32.

Dixit A. The Role of Investment in Entry Deterrence // Economic Journal. 1980. Vol. 90. P. 95–106.

Dixit A., *Skeath S.* Games of Strategy. 2nd ed. W.W.Norton & Company, 2004.

Ferejohn J. Incumbent Performance and Electoral Control // Public Choice. 1986. Vol. 50. No. 1–3. P. 2–25.

Friedman D.W. Non-cooperative Equilibrium for Supergames // Review of Economic Studies. 1971. Vol. 38. P. 1–12.

Fudenberg D., *Maskin E.* The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and Incomplete Information // Econometrica. 1986. Vol. 54. No. 3. P. 533–554.

Fudenberg D., *Tirole J.* Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.

Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, 1992.

Ghemawat P. Games Businesses Play: Cases and Models. The MIT Press, 1997.

Groseclose T., *Snyder J.M.* Buying Supermajorities // American Political Science Review. 1996. Vol. 90. No. 2. P. 303–315.

Hoffman E., *McCabe K.*, *Smith V.L.* Social Distance and Other-Regarding Behavior in Dictator Games // American Economic Review. 1996. Vol. 86. No. 3. P. 653–660.

Kuhn H. Extensive Games and the Problem of Information // *H.Kuhn*, *A.Tucker* (eds). Contributions to the Theory of Games. 2nd ed. Vol. 2. Princeton, NJ. Princeton Univ. Press. P. 193–216.

Kydland F.E., *Prescott E.C.* Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans // The Journal of Political Economy. 1977. Vol. 85. P. 473–492.

Leininger W. More Efficient Rent-Seeking: a Munchhausen Solution // Public Choice. 1993. Vol. 75. P. 43-62.

Linster B.G. Stackelberg Rent-Seeking // Public Choice. 1993. Vol. 77. No. 2. P. 307–321.

Mailath G., *Samuelson L.* Repeated Games and Reputations: Long-Run Relationships. Oxford University Press, 2006.

McCarthy N., *Meirowitz A.* Political Game Theory: An Introduction. Cambridge University Press, 2007.

McKelvey R.D., *Palfrey Th.R.* An Experimental Study of the Centipede Game // Econometrica. 1992. Vol. 60. No. 4. P. 803–836.

Myerson R.B. Game theory: Analysis of Conflict. Harverd University Press, 1991.

Osborne M.J., *Rubinstein A.* A Course in Game Theory. The MIT Press, 1994.

Palacios-Huerta I., *Volij O.* Field Centipedes // The American Economic Review. 2009. Vol. 99. No. 4. P. 1619–1635.

Rabin M. Consistency and Robustness Criteria for Game Theory. Mimeo, MIT, 1988.

Rosenthal H. The Setter Model // *Enelow J.M.*, *Hinich M.J.* Advances in the Spatial Theory of Voting. Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1990.

Rubinstein A. Perfect equilibrium in a bargaining model // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 97–109.

Schaeffer J., *Burch N.*, *Bjornsson Y.*, *Kishimoto A.*, *Muller M.*, *Lake R.*, *Lu P.*, *Sutphen S.* Checkers Is Solved // Science. 2007. 317 (5844).

Smith J.M. The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflict // Journal of Theoretical Biology. 1974. Vol. 47. No. 1. P. 209–221.

Spence A.M. Entry, Capacity, and Oligopolistic Pricing // Bell Journal of Economics. 1977. Vol. 10. P. 1–19.

Stackelberg H. Marktform und Gleichgewicht. Vienna: Springer, 1934.

Stahl I. Bargaining Theory. Stockholm School of Economics, 1972.

Sundaram R. A First Course in Optimization Theory. Cambridge University Press, 1996.

Tirole J. The Theory of Industrial Organization. The MIT Press, 1988.

Vives X. Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. The MIT Press, 1999.

Weingast B.R. Political Foundations of Democracy and the Rule of Law // American Political Science Review. 1997. Vol. 91. No. 2. P. 245–263.

Zakharov A.V. A model of candidate location with endogenous valence // Public Choice. 2009. Vol. 138. No. 3–4. P. 347–366.

3

ГЛАВА

СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Теплым июньским вечером вы снова вышли погулять в парк. Навстречу вам приближается субъект, угрожающий взорвать и вас, и себя, если вы не отдадите ему свой кошелек. Стоит ли вам отдавать кошелек или нет? Если хулиган из второй главы принимает окончательное решение — взрывать или не взрывать гранату — после того, как вы решили, отдавать ему кошелек или нет, и если хулиган предпочитает остаться в живых и без денег, то вы можете не отдавать ему ваши деньги. Но что, если хулиган — сумасшедший, «уличный самурай», для которого смерть представляет бóльшую ценность, чем жизнь без кошелька? Вы заглядываете в бездонные голубые глаза хулигана, но не можете прочесть его мыслей. Кто он — нормальный человек или псих? Целевая функция хулигана известна только ему самому. Это — его *частная информация*. Игры, в которых целевая функция одного игрока может не быть известна другим игрокам, называются *играми с неполной информацией*.

3.1. БАЙЕСОВЫ ИГРЫ

Два производителя безалкогольных напитков — Coca-Cola и Pepsico — должны принять решение, стоит ли им осваивать новую рыночную нишу — производство энергетических напитков. Pepsico может либо войти на рынок (A), либо нет (B). У Coca-Cola уже освоена часть рынка; она может попытаться расширить свое присутствие (A), или не расширять (B). Издержки компании Coca-Cola при расширении могут быть либо высокими, либо низкими. Матрицы выигрышей для двух фирм, в зависимости от уровня издержек Coca-Cola, следующие.

Высокие издержки Coca-Cola

Coca-Cola \ **Pepsico**	A	B
A	0; −1	2; 0
B	2; 1	3; 0

Низкие издержки Coca-Cola

Coca-Cola \ **Pepsico**	A	B
A	3; −1	5; 0
B	2; 1	3; 0

В первой игре мы имеем единственное равновесие $(\mathtt{B}, \mathtt{A})$; во второй — единственное равновесие $(\mathtt{A}, \mathtt{B})$. Однако как поведут себя игроки, если `Pepsico` не знает уровень издержек компании `Coca-Cola`? Например, ей известно лишь то, что издержки могут быть высокими с вероятностью θ и низкими с вероятностью $1-\theta$. Сама `Coca-Cola`, конечно же, знает свои издержки. Вероятость θ является *общим знанием* — она известна обоим игрокам, каждый игрок знает, что другой игрок знает θ, и т.д. Что будет являться описанием равновесия в этой модели?

Поскольку `Pepsico` не может наблюдать издержки своего конкурента, в равновесии она будет придерживаться какой-то (возможно, смешанной) стратегии q (вероятности, с которой она выберет `A`). Равновесная стратегия компании `Coca-Cola` будет описываться двумя величинами: p_1 — вероятностью выбрать `A` в случае, если издержки низкие, и p_2 — вероятностью выбрать `A` при высоких издержках. Равновесные стратегии q^*, p_1^* и p_2^* должны отвечать следующим условиям. Во-первых, `Pepsico` не сможет выбрать q', который принесет ей более высокий выигрыш при данных p_1^* и p_2^*. Во-вторых, `Coca-Cola` не сможет выбрать p_1', который принесет ей больший выигрыш при низких издержках, и не сможет выбрать p_2', который принесет ей больший выигрыш при высоких издержках.

Функция реакции для `Pepsico` будет такой:

$$\check{q}(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \theta p_1 + (1-\theta) p_2 > 0{,}5; \\ [0,1], & \theta p_1 + (1-\theta) p_2 = 0{,}5; \\ 1, & \theta p_1 + (1-\theta) p_2 < 0{,}5. \end{cases} \tag{3.1}$$

Для `Coca-Cola` мы имеем $p_1^* = \check{p}_1(q^*) = 0$ и $p_2^* = \check{p}_2(q^*) = 1$, так как при обоих уровнях издержек у этой фирмы есть доминирующие стратегии. В итоге мы имеем

$$q^* = \check{q}(p_1^*, p_2^*) = \begin{cases} 0, & \theta < 0{,}5; \\ [0,1], & \theta = 0{,}5; \\ 1, & \theta > 0{,}5. \end{cases} \tag{3.2}$$

Решение `Pepsico` входить на рынок зависит от вероятности того, насколько у `Coca-Cola` высоки издержки. Если эта вероятность велика, то `Pepsico` войдет на рынок. Если вероятность низка, то `Pepsico` входить не будет.

3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим игру между $I = \{1, \ldots, N\}$ игроками. Пусть T_i — множество типов для игрока i. Обозначим через $T = \prod_{i=1}^{N} T_i$ — множество профилей типов, $T_{-i} = \prod_{j \neq i} T_j$ — множество профилей типов для всех игроков, кроме i. Соответственно обозначим элементы этих множеств: $t_i \in T_i$, $t \in T$, $t_{-i} \in T_{-i}$. Пусть P — распределение вероятностей на множестве T. Мы предполагаем, что игроку i известен его собственный тип t_i. Свое представление о типах остальных игроков игрок i формирует согласно формуле Байеса, наблюдая свой собственный тип:

$$\mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i) = \frac{\mathsf{P}(t_i, t_{-i})}{\mathsf{P}(t_i)} = \frac{\mathsf{P}(t_i, t_{-i})}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mathsf{P}(t_i, t_{-i})}. \tag{3.3}$$

Обозначим через A_i множество действий игрока i, $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ — множество профилей действий. Тогда функция выигрышей для игрока i должна определять его выигрыш в зависимости от его типа и от профиля действий, выбранного игроками, т.е. $u_i \colon A \times T_i \to \mathbb{R}$. Обозначим через $u \colon A \times T \to \mathbb{R}^N = (u_1, \ldots, u_N)$ профиль функций выигрышей игроков. В этом определении мы снова (как и в динамических играх) проводим различие между стратегией и действием. Действие игрока — это один из возможных доступных ему ходов. Стратегия — это зависимость хода, который сделает игрок, от его типа.

Пусть $s_i \colon T_i \to A_i$ — стратегия игрока i, определяющая, какой ход он должен совершить в зависимости от его типа t_i. Обозначим через $s = (s_1, \ldots, s_N)$ профиль стратегий игроков. При данном профиле стратегий s ожидаемый выигрыш игрока i, имеющего тип t_i, равен

$$\widetilde{u}_i(s, t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i)\, u_i\big(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i\big). \tag{3.4}$$

Мы теперь можем дать определение игры.

Определение 3.1. Набор $\langle I, A, T, \mathsf{P}, u \rangle$ называется *игрой с неполной* (*или асимметричной*) *информацией* или *байесовой игрой*.

Понятие байесовой игры было введено Харшаньи [Harsanyi, 1967–1968]. Он предложил интерпретировать игру с неполной информацией как игру с полной информацией с большим количеством игроков, в которой каждый игрок соответствует одному типу игрока в исходной игре. Первый ход делает «природа», определяя, какой тип каждого игрока будет задействован. Например, если каждый из двух игроков имеет два типа, то такую статическую игру можно представить как динамическую игру между *четырьмя* игроками. Первые два игрока в такой динамической игре будут соответствовать двум типам первого игрока в исходной статической игре, третий и четвертый игроки будут соответствовать второму игроку в исходной игре. Дадим определение равновесия в байесовой игре.

Определение 3.2. Пусть $\langle I, A, T, \mathsf{P}, u\rangle$ — игра с неполной информацией. Равновесием в этой игре является набор стратегий s^*, такой, что для всех i, для всех $a_i' \in A_i$, $t_i \in T_i$

$$\widetilde{u}_i(s^*, t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i)\, u_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i) \geqslant \\ \geqslant \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i)\, u_i(a_i', s_{-i}^*(t_{-i}), t_i). \quad (3.5)$$

Равновесие в такой игре называется *байесовым равновесием* или *равновесием Байеса–Нэша.*

Это определение для конечных игр эквивалентно определению равновесия Нэша для динамической игры с множеством игроков T, в которой первой ход делает природа, выбирая тип игроков. Из теоремы о существовании равновесия в конечных играх следует:

Теорема 3.1. *Пусть $G = \langle I, A, T, \mathsf{P}, u\rangle$, причем множества I, A и T конечны. Тогда в этой игре существует равновесие s^*.*

Доминирование для игр с неполной информацией определяется отдельно для каждого типа игрока. Действие a_i при типе t_i строго доминирует действие a_i', если для всех $a_{-i} \in A_i$ мы имеем $\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i)u_i(a_i, a_{-i}, t_i) > \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mathsf{P}(t_{-i} \mid t_i)u_i(a_i', a_{-i}, t_i)$. Слабое доминирование определяется аналогично.

Дуополия Курно с неполной информацией. Вернемся к задаче конкуренции двух фирм, рассмотренной в первой главе. Две фирмы решают, сколько товара произвести на продажу. Прибыль каждой фирмы равна ее выручке за вычетом издержек:

$$u_1 = p\, q_1 - c_1 q_1, \quad (3.6)$$

$$u_2 = p\, q_2 - c_2 q_2, \quad (3.7)$$

где $p = 1 - q_1 - q_2$ — функция спроса. Пусть c_1 известен обеим фирмам. Напротив, c_2 является частной информацией. Он известен только фирме 2. Первой фирме известно лишь то, что эта величина принимает значение c_H с вероятностью θ и c_L с вероятностью $1 - \theta$. Мы предполагаем, что θ является общим знанием.

В этой игре мы имеем $T = \{H, L\}$. Дерево игры представлено на рис. 3.1.

Что является равновесием в этой игре? Фирма 1 обладает только одним возможным уровнем издержек. Следовательно, в равновесии в чистых стратегиях она будет производить какое-то количество товара q_1^*. У фирмы 2

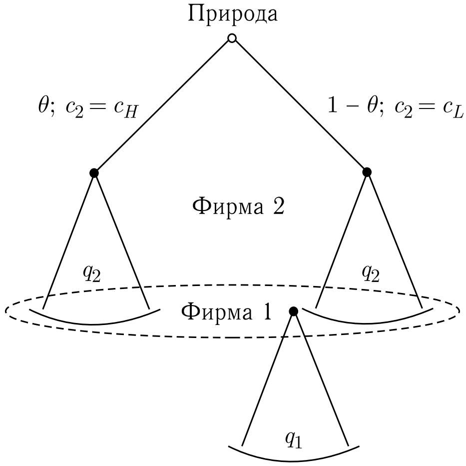


Рис. 3.1. Дерево игры в дуополии Курно с неполной информацией

возможны два уровня издержек; следовательно, нам необходимо найти $q_2^*(H)$ и $q_2^*(L)$ — равновесные выпуски второй фирмы в том случае, когда ее издержки высокие и низкие соответственно.

Согласно определению равновесное действие каждой фирмы должно удовлетворять следующим условиям:

1. $q_2^*(H)$ есть решение задачи
$$\max_{q_2} u_2(q_1^*, q_2, H) = (1 - q_1^* - q_2 - c_H)\, q_2.$$
2. $q_2^*(L)$ есть решение задачи
$$\max_{q_2} u_2(q_1^*, q_2, L) = (1 - q_1^* - q_2 - c_L)\, q_2.$$
3. q_1^* есть решение задачи
$$\max_{q_1} \widetilde{u}_1(q_1, q_2^*(L), q_2^*(H)) = \theta\,(1 - q_1 - q_2^*(H) - c_1)\, q_1 + \\ + (1-\theta)(1 - q_1 - q_2^*(L) - c_1)\, q_1.$$

Решая эти максимизационные задачи, получим условия первого порядка
$$q_2^*(H) = \frac{1 - q_1^* - c_H}{2}, \tag{3.8}$$
$$q_2^*(L) = \frac{1 - q_1^* - c_L}{2}, \tag{3.9}$$
$$q_1^* = \frac{1 - \theta\cdot q_2^*(H) - (1-\theta)\, q_2^*(L) - c_1}{2}. \tag{3.10}$$

Решение этих уравнений дает нам
$$q_2^*(H) = \frac{1 - 2\,c_H + c_1}{3} + \frac{1-\theta}{6}\,(c_H - c_L), \tag{3.11}$$

$$q_2^*(L) = \frac{1 - 2\,c_L + c_1}{3} - \frac{\theta}{6}\,(c_H - c_L), \tag{3.12}$$

$$q_1^* = \frac{1 - 2\,c_1 + \theta\,c_H + (1-\theta)\,c_L}{3}. \tag{3.13}$$

Интересно сравнить равновесный объем производства каждой из фирм в случае полной и неполной информации. Как мы помним, при полной информации в равновесии в модели Курно мы имеем

$$q_2 = \frac{1 - 2\,c_2 + c_1}{3}.$$

Таким образом, объем производства второй фирмы в случае, если ее издержки высокие, будет выше при неполной информации:

$$q_2^*(H) > \frac{1 - 2\,c_H + c_1}{3}.$$

Получается, что на равновесие влияют не только издержки фирмы 2, но и тот факт, известно ли фирме 2, что фирма 1 знает издержки фирмы 2. Если фирма 1 не знает точного значения c_2, то ее равновесный выпуск будет ниже, чем в том случае, когда ей известно, что $c_2 = c_H$ (так как в первом случае фирма 1 будет ожидать, что с вероятностью $1 - \theta$ издержки фирмы 2 будут низкими, а ее выпуск — высоким). Фирма 2, предвидя это, будет производить больше, чем в случае с полной информацией.

Электоральная активность. Почему люди голосуют на выборах? Ведь голосование сопряжено с издержками — потерей времени, которое можно потратить на работу или отдых, а шансов как-то реально повлиять на исход выборов очень мало. Тем не менее явка на выборах федерального уровня в большинстве стран превышает 50%, т.е. люди идут голосовать вопреки теоретическим прогнозам. Этот факт продолжает доставлять много неудобства исследователям, так как теоретико-игровые модели предсказывают, что явка на выборах должна быть крайне низкой. Построение адекватной модели принятия решения «голосовать или остаться дома» остается пока нерешенной теоретической задачей, показывающей ограничения теоретико-игрового анализа человеческого поведения [1].

Действительно, пусть в выборах участвуют два кандидата, и избиратель решает, голосовать на выборах за своего любимого кандидата или нет. Пусть b — дополнительный выигрыш, который избирателю сулит победа его любимого кандидата, p — вероятность того, что голос избирателя будет решающим (т.е. голоса всех остальных избирателей будут поровну отданы за обоих кандидатов — будем считать, что других избирателей четное число и все они голосуют за того или другого кандидата). Наконец,

[1] Обзор литературы по этой теме можно найти, например, в учебнике Мюллера [2007, гл. 14].

пусть c — издержки, связанные с голосованием. В таком случае избиратель должен проголосовать, только если

$$u = p\,b - c \geqslant 0. \tag{3.14}$$

На настоящих выборах величина b может составлять существенную часть дохода избирателя на протяжении следующего электорального цикла — т.е. равняться его заработной плате за несколько недель или даже месяцев (в особенности, если разные кандидаты предлагают разную налоговую политику и разный объем субсидий различным группам граждан). Так как в большинстве случаев голосование не требует много времени, величина c не должна превышать значения часовой зарплаты человека. Однако простые расчеты показывают, что при реалистичных предположениях значение p настолько мало́, что участие избирателя в выборах не будет оправдано. Получается так называемый «парадокс голосования»[2].

Рассмотрим одномериодную игру, в которой участвуют $N_1 + N_2$ индивидов-избирателей. Каждый избиратель решает, стоит ли ему проголосовать за одного из двух кандидатов (A или B), либо остаться дома: $S_i = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, o\}$. Предположим, что избиратели делятся на две группы численностью N_1 и N_2. Каждый избиратель, принадлежащий к первой группе, в случае победы на выборах кандидата A получает выигрыш, равный 1, а в случае победы кандидата B не получает ничего. Каждый избиратель второй группы аналигичным образом предпочтет, чтобы победил кандидат B. Таким образом, вероятность победы кандидата A есть

$$p_A = \begin{cases} 1, & \#\{i|s_i = \mathtt{A}\} > \#\{i|s_i = \mathtt{B}\}; \\ 0{,}5, & \#\{i|s_i = \mathtt{A}\} = \#\{i|s_i = \mathtt{B}\}; \\ 0, & \#\{i|s_i = \mathtt{A}\} < \#\{i|s_i = \mathtt{B}\}, \end{cases} \tag{3.15}$$

где знак # означает число элементов множества. Вероятность победы второго кандидата равна $p_{\mathrm{B}} = 1 - p_{\mathrm{A}}$. В случае, если избиратель i голосует за одного из двух кандидатов, он несет издержки $c_i < 1/2$.

Мы попробуем найти равновесие в этой игре для двух случаев — когда издержки каждого избирателя являются публичной информацией и когда они известны только самому избирателю. Мы покажем, что хотя в первом

[2] Если предположить, что каждый из остальных избирателей голосует с вероятностью q за первого кандидата, то вероятность того, что голос данного избирателя будет решающим, будет составлять приблизительно $p = \dfrac{3\,e^{-2(N-1)(q-0{,}5)^2}}{2\sqrt{2\pi(N-1)}}$ (так называемая *формула Стирлинга*, см.: [Owen, Grofman, 1984]). Если $q = 1/2$, то эта величина будет пропорциональна $1/\sqrt{N}$, т.е. при миллионе избирателей вероятность стать голосу решающим будет одна тысячная. Это не так мало; однако если $q \neq 1/2$, то картина резко меняется: уже при $q = 0{,}505$ и $N = 1\,000\,000$ мы будем иметь $p \sim 10^{-25}$ — нулевая вероятность со всех практических точек зрения.

случае и может существовать равновесие, в котором вероятность явки каждого избирателя высока, во втором случае явка будет обязательно низка[3].

Рассмотрим сначала случай с полной информацией. Пусть издержки у всех избирателей одинаковы: $c_i = c$. Предположим также, что обе группы избирателей имеют одинаковый размер: $N_1 = N_2 = N$. Заметим, что для избирателей первой группы стратегия $s_i = ttB$ слабо доминируется стратегией $s_i = \mathtt{A}$, а для избирателей второй группы, наоборот, $s_i = \mathtt{A}$ слабо доминируется $s_i = \mathtt{B}$. Следовательно, мы будем предполагать, что у каждого избирателя есть только две стратегии: голосовать за своего кандидата или не голосовать.

Будем искать симметричное равновесие в смешанных стратегиях, в котором вероятность, что каждый избиратель проголосует, равна q. Обозначим за $\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid q)$ вероятность того, что победу одержит кандидат A при условии, что один избиратель из первой группы проголосовал, а все остальные избиратели проголосовали с вероятностью q. Пусть $\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid q)$ — вероятность победы кандидата A при условии, что один избиратель из первой группы не проголосовал, а все остальные проголосовали с вероятностью q. Таким образом, выигрыш избирателя равен $\mathsf{P}_{\mathtt{A}}(1 \mid q) - c$, если он голосует, и $\mathsf{P}_{\mathtt{A}}(0 \mid q)$, если он не голосует. В силу леммы 1.6 в равновесии мы обязаны в этом случае иметь

$$\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid q) - c = \mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid q). \tag{3.16}$$

Вероятности $\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid p)$ и $\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid p)$ задаются следующими комбинаторными формулами:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid p) = \sum_{i=0}^{N-1} \Big(C_{N-1}^{i}\, p^{i}(1-p)^{N-i-1} \sum_{j=0}^{i} C_{N}^{j}\, p^{j}(1-p)^{N-j} \Big) + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(C_{N-1}^{i} C_{N}^{i+1} p^{2i+1}(1-p)^{2N-2i-2} \right), \\
\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid p) = \sum_{i=1}^{N-1} \Big(C_{N-1}^{i}\, p^{i}(1-p)^{N-i-1} \sum_{j=0}^{i-1} C_{N}^{j}\, p^{j}(1-p)^{N-j} \Big) + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(C_{N-1}^{i} C_{N}^{i}\, p^{2i}(1-p)^{2N-2i-1} \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Можно показать, что для любого $c < 1/2$ при достаточно большом N уравнение (3.16) имеет два решения, причем при увеличении N одно

[3] Первая постановка была рассмотрена Полфри и Розенталем [Palfrey, Rosenthal, 1983], вторая — Полфри и Розенталем [Palfrey, Rosenthal, 1985].

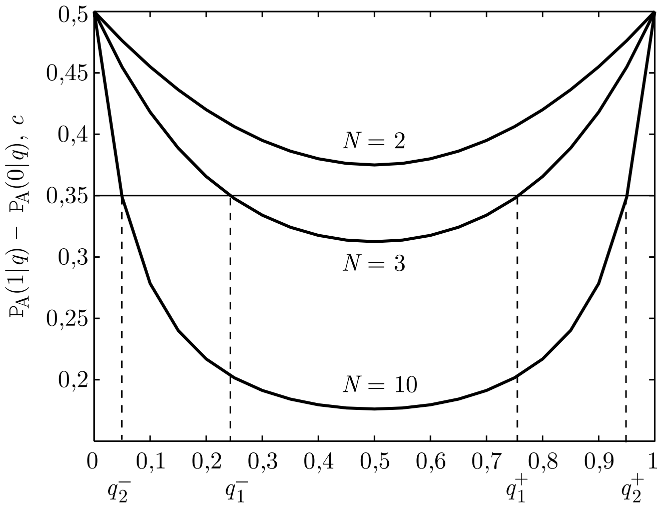


Рис. 3.2. Решение уравнения (3.16) для $c = 0{,}35$ и разных N

решение приближается к нулю, другое — к единице. На рис. 3.2 показаны решения для $c = 0{,}35$ и различных N.

Получается, что существуют два симметричных смешанных равновесия: с высокой и с низкой явкой. В данном примере для $c = 0{,}35$ и $N = 2$ равновесий нет. Для больших N существуют два равновесия: q_1^- и q_1^+ для $N = 3$ и q_2^- и q_2^+ для $N = 10$. Наличие равновесия с высокой явкой интуитивно понятно: если избиратель знает, что остальные избиратели почти наверняка проголосуют, и если две группы избирателей примерно одинаковы по размерам, то его голос с большой вероятностью может стать решающим. Получается, что при помощи теоретико-игрового анализа мы нашли объяснение «парадоксу голосования».

Однако, к сожалению, эти выводы рушатся, если мы предположим, что издержки избирателей c_i есть их частная информация. Предположим, что у каждого избирателя c_i — это случайная величина, распределенная на $[0, 1]$ с распределением $F(\cdot)$. Стратегией избирателя теперь будет его решение — голосовать или нет — в зависимости от его издержек c_i. Попробуем найти для этой игры симметричное равновесие — т.е. равновесие, в котором у всех избирателей одинаковые стратегии — голосовать, если издержки не больше некоторой пороговой величины $\overline{c}$.

Посмотрим, каким условиям должно удовлетворять это равновесие. Во-первых, вероятность того, что отдельно взятый избиратель проголосует, должна быть равна вероятности, что его издержки не больше пороговых:

$$q = F(\overline{c}). \tag{3.18}$$

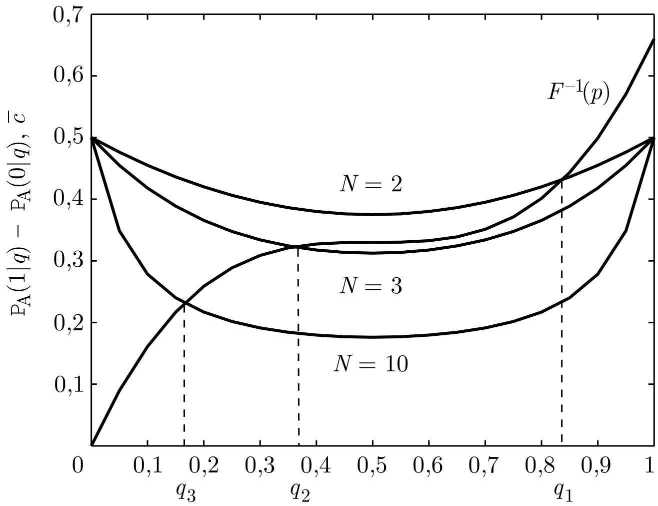


Рис. 3.3. Решение системы уравнений (3.18), (3.19) для разных N

Во-вторых, избирателю с издержками голосования, равными пороговым, должно быть все равно, голосовать или нет:

$$\mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid q) - \overline{c} = \mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid q). \tag{3.19}$$

Решение этих двух уравнений изображено на рис. 3.3.

На рисунке изображены графики двух функций от q. Во-первых, это функция $\overline{c} = F^{-1}(q)$, соответствующая уравнению (3.18). Во-вторых, это функция $\overline{c} = \mathsf{P}_{\mathrm{A}}(1 \mid q) - \mathsf{P}_{\mathrm{A}}(0 \mid q)$, соответствующая (3.19) для разных значений N. Равновесие достигается при таком q, при котором графики этих двух функций пересекаются. Можно доказать, что для любой функции распределения $F(\cdot)$ существует хотя бы одно симметричное равновесие при $N \geqslant 2$. Также можно доказать, что при достаточно большом N существует только одно равновесие, причем при $N \to \infty$ мы имеем $\overline{c} \to 0$ и $p \to 0$, т.е. голосуют только избиратели со все более низкими издержками, и доля активных избирателей стремится к нулю.

Тем не менее теория дает нам несколько эмпирически проверяемых гипотез. Во-первых, явка должна быть выше при маленьком размере электората, так как это влияет на вероятность того, что голос избирателя окажется ключевым. Во-вторых (и по той же причине), явка должна быть выше, если у одного из кандидатов нет явного преимущества. Явка должна быть меньше, если высоки издержки голосования (например, если есть правила регистрации избирателей, и выше в том случае, если голосование обязательно (в некоторых странах гражданин, не проголосовавший на выборах, платит штраф). Наконец, когда дело касается парламентских выборов, явка должна быть выше в странах с пропорциональной системой [4]. Все эти выводы находят эмпирическое подтверждение [5].

Приближение смешанных равновесий чистыми. Как мы заметили в первой главе, существует определенная проблема интерпретации смешанных равновесий в играх с полной информацией. Почему игроки будут принимать случайные решения? Ведь в любом равновесии в смешанных стратегиях выигрыш каждого игрока от реализации каждой из его чистых стратегий (играемых с положительной вероятностью) одинаков. Равновесие требует, чтобы каждый игрок смешивал свои чистые стратегии в определенной пропорции; отклонение от этой пропорции сделает этого игрока уязвимым для действий других игроков. Однако проблема состоит в том, что порой бывает трудно придумать пример реалистичного поведения, в котором чистые стратегии сознательно смешивались бы.

Харшаньи [Harsanyi, 1973] доказал, что практически в любой игре с полной информацией равновесие в смешанных стратегиях можно рассматривать как предельный случай равновесия в чистых стратегиях в некоторой сходящейся последовательности игр с неполной информацией. Действительно, если в некоторой игре выигрыш игрока i при выборе чистой стратегии s_i является для второго игрока случайной величиной, то любая чистая стратегия первого игрока (т.е. решение, какое действие выбрать, в зависимости от собственного типа) покажется второму игроку реализацией некоторой смешанной стратегии.

Рассмотрим, как можно реализовать приближение смешанных равновесий чистыми на примере игры «встреча в метро» из гл. 1. Пусть в исходной одноериодной игре с полной информацией матрица выигрышей, определяющая функции выигрыша, такова:

		Игрок 2	
		A	B
Игрок 1	A	2; 2	0; 0
	B	0; 0	1; 2

Рассмотрим следующую игру с неполной информацией. Пусть $\varepsilon > 0$. Выигрыш игрока i в зависимости от его действий a_i и действий другого игрока a_{-i} равен $u_i(\mathtt{A}, a_{-i}) + \varepsilon t_i$ при $a_i = \mathtt{A}$ и $u_i(\mathtt{B}, a_{-i})$ при $a_i = \mathtt{B}$. Пусть t_1, t_2 — случайные величины, независимо и равномерно распределенные на $[-1, 1]$. Найдем равновесие в этой игре.

Пусть p_1, p_2 — вероятности того, что игроки 1 и 2 будут реализовывать действие A. При данном значении p_2 игрок 1 сыграет $a_1 = \mathtt{A}$ тогда и только

[4] В странах с пропорциональной избирательной системой число мест в парламенте, получаемых партией на выборах, пропорционально числу голосов, отданных за эту партию.

[5] Например, см. работу Хесса [Geys, 2006].

тогда, когда

$$p_2 \cdot (2 + \varepsilon\, t_1) + (1 - p_2)\, \varepsilon\, t_1 \geqslant p_2 \cdot 0 + (1 - p_2) \cdot 1. \tag{3.20}$$

Аналогично, игрок 2 сыграет $a_2 = A$ тогда и только тогда, когда

$$p_1 \cdot (2 + \varepsilon\, t_2) + (1 - p_1)\, \varepsilon\, t_2 \geqslant p_1 \cdot 0 + (1 - p_1) \cdot 2. \tag{3.21}$$

Можно переписать эти условия как условия на t_1 и t_2:

$$\varepsilon\, t_1 \geqslant 1 - 3\, p_2, \tag{3.22}$$

$$\varepsilon\, t_2 \geqslant 2 - 4\, p_1. \tag{3.23}$$

Учитывая наши предположения о распределении величин t_1 и t_2, можно вывести зависимость $\check{p}_1(p_2)$, соотвествующую наилучшей реакции первого игрока на стратегию второго игрока, дающую вероятность p_2, и наоборот:

$$\check{p}_1(p_2) = \mathsf{P}(\varepsilon\, t_1 \geqslant 1 - 3\, p_2) = \begin{cases} 0, & p_2 \leqslant \dfrac{1-\varepsilon}{3}; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1 - 3\, p_2}{2\,\varepsilon}, & p_2 \in \left(\dfrac{1-\varepsilon}{3}, \dfrac{1+\varepsilon}{3}\right); \\ 1, & p_2 \geqslant \dfrac{1+\varepsilon}{3}; \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\check{p}_2(p_1) = \mathsf{P}(\varepsilon\, t_2 \geqslant 2 - 4\, p_1) = \begin{cases} 0, & p_1 \leqslant \dfrac{2-\varepsilon}{4}; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1 - 2\, p_1}{\varepsilon}, & p_1 \in \left(\dfrac{2-\varepsilon}{4}, \dfrac{2+\varepsilon}{4}\right); \\ 1, & p_1 \geqslant \dfrac{2+\varepsilon}{4}. \end{cases} \tag{3.25}$$

При $\varepsilon < \sqrt{2}$ у этой системы есть три решения. Во-первых, это $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0)$. Во-вторых, $(p_1^*, p_2^*) = (1, 1)$. В-третьих, p_1^* и p_2^* являются решениями уравнений

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1 - 3\, p_2}{2\,\varepsilon}, \tag{3.26}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\, p_1}{\varepsilon}, \tag{3.27}$$

или

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{1{,}5 + 0{,}25 \cdot \varepsilon - 0{,}5 \cdot \varepsilon^2}{3 - \varepsilon^2}, \\ p_2^* &= \frac{1 - 0{,}5 \cdot \varepsilon^2}{3 - \varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Каждое из трех решений соответствует одному равновесию в чистых стратегиях в игре с неполной информацией (см. рис. 3.4).

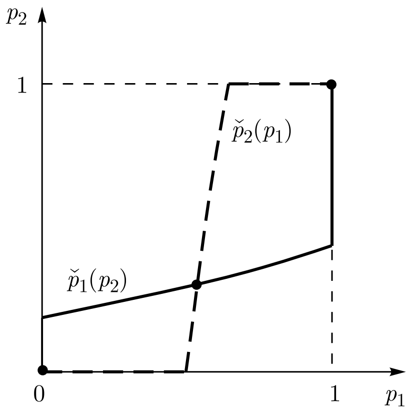


Рис. 3.4. Равновесия в чистых стратегиях в игре с неполной информацией

В равновесии $(p_1^*, p_2^*) = (0,0)$ оба игрока всегда выбирают $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$. В равновесии $(p_1^*, p_2^*) = (1,1)$ они выбирают $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$. В равновесии, определенном системой (3.27), стратегии выбираются, исходя из (3.22) и (3.23), при $p_1 = p_1^*$, $p_2 = p_2^*$. При этом решение системы (3.27) при $\varepsilon \to 0$ сходится к равновесию в смешанных стратегиях в исходной игре с полной информацией $(p_1, p_2) = \left(1/2, 1/3\right)$. Таким образом, при снижении степени неполноты информации ε чистые стратегии в игре с неполной информацией все больше и больше приближают смешанное равновесие в игре с полной информацией. Подобные примеры можно построить почти для каждой игры с полной информацией.

3.1.2. ПРИМЕРЫ

Производство общественного блага. Рассмотрим задачу производства общественного блага двумя лицами. Предположим, что для производства блага достаточно, чтобы любой из двух игроков принял решение участвовать в его производстве. Матрица выигрышей игроков, в зависимости от их действий, будет такой:

		Игрок 2	
		Производить	Не производить
Игрок 1	Производить	$1 - c_1;\ 1 - c_2$	$1 - c_1;\ 1$
	Не производить	$1;\ 1 - c_2$	$0;\ 0$

Предположим, что c_i является случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке $[\underline{c}_i, \overline{c}_i]$, $0 \leqslant \underline{c}_i < \overline{c}_i \leqslant 1$, $i = 1, 2$. Пусть издержки игроков c_1, c_2 являются частной информацией. Значение величины c_1 известно игроку 1. Второму игроку известно лишь то, как c_1 распределена (однако распределение величины c_1 является общим знанием — игрок 1 знает, что игроку 2 известно это распределение, и т.д.). Аналогично, c_2 известна только игроку 2. Найдем равновесие Байеса–Нэша в этой игре.

Рассмотрим, как выглядят равновесные стратегии для обоих игроков. Пусть вероятность того, что игрок i станет участвовать в производстве блага, равна p_i. Выигрыш игрока i равен $1 - c_i$, если он производит благо, и p_{-i}, если не производит. Следовательно, вероятность $\check{p}_i$ определяется как

$$\check{p}_i(p_{-i}) = \mathsf{P}(1 - c_i \geqslant p_{-i}) = \mathsf{P}(c_i \leqslant 1 - p_{-i}) =$$
$$= \begin{cases} 0, & p_{-i} \geqslant 1 - \underline{c}_i; \\ \dfrac{1 - p_{-i} - \underline{c}_i}{\overline{c}_i - \underline{c}_i}, & p_{-i} \in (1 - \overline{c}_i, 1 - \underline{c}_i); \\ 1, & p_{-i} \leqslant 1 - \overline{c}_i. \end{cases} \tag{3.29}$$

Система уравнений
$$p_1 = \check{p}_1(p_2), \qquad p_2 = \check{p}_2(p_1) \tag{3.30}$$
имеет три решения: $(p_1^*, p_2^*) = (1, 0)$, $(p_1^*, p_2^*) = (0, 1)$ и пара (p_1^*, p_2^*), удовлетворяющая условиям
$$p_1 = \frac{1 - p_2 - \underline{c}_1}{\overline{c}_1 - \underline{c}_1}, \tag{3.31}$$
$$p_2 = \frac{1 - p_1 - \underline{c}_2}{\overline{c}_2 - \underline{c}_2}. \tag{3.32}$$

Решением этой системы будет
$$p_1^* = \frac{1 - \overline{c}_2 + \underline{c}_1(\overline{c}_2 - \underline{c}_2)}{1 - (\overline{c}_1 - \underline{c}_1)(\overline{c}_2 - \underline{c}_2)}, \tag{3.33}$$
$$p_2^* = \frac{1 - \overline{c}_1 + \underline{c}_2(\overline{c}_1 - \underline{c}_1)}{1 - (\overline{c}_1 - \underline{c}_1)(\overline{c}_2 - \underline{c}_2)}. \tag{3.34}$$

Полученные вероятности соответствуют следующим равновесным стратегиям:

1. Игрок 1 всегда производит общественное благо, игрок 2 никогда не производит.
2. Игрок 2 всегда производит общественное благо, игрок 1 никогда не производит.
3. Игрок i производит общественное благо тогда и только тогда, когда
$$c_i \leqslant \widetilde{c}_i = \frac{\overline{c}_i - \overline{c}_{-i}(\overline{c}_i - \underline{c}_i)}{1 - (\overline{c}_1 - \underline{c}_1)(\overline{c}_2 - \underline{c}_2)}. \tag{3.35}$$

В этой задаче существует единственное равновесие, при котором $p_1^*, p_2^* \in$ $\in (0, 1)$, т.е. оба игрока с положительной вероятностью выбирают каждое из двух своих действий. Это — следствия нашего предположения о том, что c_1 и c_2 распределены равномерно. При других распределениях этих величин возможно несколько равновесий.

Двойной аукцион. В тóрговой задаче Нэша[6] (см. задачу 1.31) продавец и покупатель одновременно называют цены, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 — цена, которую назвал продавец, p_2 —

[6] Эта задача разбиралась также у Гиббонса [Gibbons, 1992] и Фаденберга и Тироля [Fudenberg, Tirole, 1991].

цена, названная покупателем. В случае, когда $p_1 \leqslant p_2$, происходит обмен по цене $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$; выигрыши продавца и покупателя составят

$$u_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} - c \quad \text{и} \quad u_2 = v - \frac{p_1 + p_2}{2}. \tag{3.36}$$

При $p_1 > p_2$ торговля не происходит и выигрыши обеих сторон равны нулю.

Четерджи и Сэмюэльсон [Chatterjee, Samuelson, 1983] проанализировали вариант этой задачи для того случая, когда v и c — частная информация. Предположим, что эти величины равномерно и независимо распределены на отрезке $[0, 1]$. Стратегиями продавца и покупателя будут зависимости их заявок от оценок: $p_1(c)$ и $p_2(v)$. Ожидаемый выигрыш продавца при данных c и p_1 равен

$$\widetilde{u}_1 = \mathsf{P}(p_1(c) \leqslant p_2)\Big(\frac{p_1(c) + \mathsf{E}(p_2 \mid p_1(c) \leqslant p_2)}{2} - c\Big), \tag{3.37}$$

где $\mathsf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание. Соответственно, для любого $c \in [0, 1]$ величина $p_1(c)$ должна максимизировать u_1. Аналогично, для любого $v \in$ $\in [0, 1]$ величина $p_2(v)$ должна максимизировать

$$\widetilde{u}_2 = \mathsf{P}(p_1 \leqslant p_2(v))\Big(v - \frac{\mathsf{E}(p_1 \mid p_1 \leqslant p_2(v)) + p_2(v)}{2}\Big). \tag{3.38}$$

Можно убедиться, что $p_1(c)$ и $p_2(v)$ будут возрастающими функциями. Действительно, возьмем два уровня издержек: c' и c''. Тогда, исходя из оптимальности $p_1(c)$, мы должны иметь

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(p_1(c') \leqslant p_2)\Big(\frac{p_1(c') + \mathsf{E}(p_2 \mid p_1(c') \leqslant p_2)}{2} - c'\Big) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(p_1(c'') \leqslant p_2)\Big(\frac{p_1(c'') + \mathsf{E}(p_2 \mid p_1(c'') \leqslant p_2)}{2} - c'\Big)\end{aligned} \tag{3.39}$$

и

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(p_1(c'') \leqslant p_2)\Big(\frac{p_1(c'') + \mathsf{E}(p_2 \mid p_1(c'') \leqslant p_2)}{2} - c''\Big) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(p_1(c') \leqslant p_2)\Big(\frac{p_1(c') + \mathsf{E}(p_2 \mid p_1(c') \leqslant p_2)}{2} - c''\Big),\end{aligned} \tag{3.40}$$

что дает нам

$$(c'' - c')\big(\mathsf{P}(p_1(c') \leqslant p_2) - \mathsf{P}(p_1(c'') \leqslant p_2)\big) \geqslant 0, \tag{3.41}$$

т.е. $p_1(c'') \geqslant p_1(c')$, если $c'' \geqslant c'$.

Сразу отметим, что в этой игре много равновесий. Существует, например, вырожденное равновесие, в котором $p_1^* = 1$ и $p_2^* = 0$. Легко заметить, что и $p_1 = 1$, и $p_2 = 0$ являются достаточными условиями для того, чтобы обмен никогда не происходил (и оба игрока получали нулевой выигрыш). Есть и такое равновесие:

$$p_1 = \begin{cases} \widetilde{p}, & c \leqslant \widetilde{p}; \\ 1, & c > \widetilde{p}, \end{cases} \quad \text{и} \quad p_2 = \begin{cases} \widetilde{p}, & v \geqslant \widetilde{p}; \\ 0, & v < \widetilde{p}, \end{cases} \tag{3.42}$$

для любого $\widetilde{p} \in (0,1)$. В таком равновесии обмен происходит по цене $\widetilde{p}$ либо (если он убыточен хотя бы для одного из игроков) не происходит вообще.

Попробуем ограничить наше внимание линейными стратегиями, когда заявляемая цена является линейной функцией от v или c:

$$p_1 = \alpha_1 + \beta_1 c, \tag{3.43}$$

$$p_2 = \alpha_2 + \beta_2 v. \tag{3.44}$$

Таким образом, стратегия игрока $i = 1, 2$ сводится к параметрам (α_i, β_i). Найдем ожидаемые выигрыши покупателя и продавца в зависимости от их стратегий.

Пусть покупатель играет линейную стратегию $p_2 = \alpha_2 + \beta_2 v$. Мы имеем

$$\widetilde{u}_1 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 - p_1}{\beta_2} \left(\frac{p_1 + 0{,}5 \cdot (p_1 + \alpha_2 + \beta_2)}{2} - c \right), \tag{3.45}$$

так как p_2 равномерно распределена на $[\alpha_2, \alpha_2 + \beta_2]$. Максимизируя $\widetilde{u}_1$ по p_1, получим наилучший ответ игрока 1 на линейную стратегию игрока 2 при данном c:

$$p_1^*(c) = \frac{2}{3}\, c + \frac{1}{3}\, (\alpha_2 + \beta_2). \tag{3.46}$$

Аналогично, максимизируя

$$\widetilde{u}_2 = \frac{p_2 - \alpha_1}{\beta_1} \left(v - \frac{0{,}5 \cdot (p_2 + \alpha_1) + p_2}{2} \right) \tag{3.47}$$

по p_2, получим наилучший ответ игрока 2 на линейную стратегию игрока 1 при данном v:

$$p_2^*(v) = \frac{2}{3}\, v + \frac{1}{3}\, \alpha_1. \tag{3.48}$$

Таким образом, наилучший отклик игрока 1 на линейную стратегию игрока 2 — также играть линейную стратегию. Так что мы нашли пару линейных стратегий, которая является равновесием — учитывая, что каждый из игроков может выбрать любую другую стратегию, не только линейную.

Из соотношения (3.48) следует, что $\beta_2 = 2/3$ и $\alpha_2 = \alpha_1/3$. Из соотношения (3.46) следует $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{\alpha_1}{3} + \dfrac{2}{3}\Big)$, $\beta_1 = 2/3$ и $\alpha_2 = 1/12$. Это дает нам

$$p_1^*(c) = \frac{2}{3}\, c + \frac{1}{4}, \tag{3.49}$$

$$p_2^*(v) = \frac{2}{3}\, v + \frac{1}{12}. \tag{3.50}$$

Мы можем убедиться, что полученное равновесие не будет Парето-эффективным. Торговля происходит только в том случае, когда цена продавца выше, чем цена покупателя: $p_1 \leqslant p_2$, т.е. если $c \leqslant v - 1/4$. В то же время Парето-эффективное решение предполагает обмен во всех случаях, если $c < v$. Однако при $c \in \left[v - 1/4, v\right)$ в равновесии обмен не происходит и оба игрока — продавец и покуптель — страдают от того, что их оценки товара являются частной информацией.

Предвыборная конкуренция с идеологическими кандидатами. Два кандидата принимают участие в выборах. Предположим, что каждый кандидат может предложить избирателям одну из трех программ: левую, правую или центристскую. Соответственно, множество действий для каждого кандидата $i = 1, 2$ будет $A_i = \{\mathtt{L}, \mathtt{C}, \mathtt{R}\}$, где L — левая программа, C — центральная, R — правая. Кандидаты не знают предпочтений избирателей. Им известно, что с вероятностью α медианный избиратель будет центристом, с вероятностью $(1-\alpha)/2$ — левым или правым. Следовательно, вероятность того, что первый кандидат выиграет выборы, зависит от программ кандидатов следующим образом:

		Кандидат 2		
		L	C	R
Кандидат 1	L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$
	C	$\frac{1+\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\alpha}{2}$
	R	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$

Мы предполагаем, что если у кандидатов программы одинаковы, то любой избиратель с равной вероятностью голосует за каждого из кандидатов. Также, если один кандидат левый, а другой — правый, то медианный избиратель голосует с равной вероятностью за обоих.

Будем считать, что выигрыш каждого кандидата зависит только от того, какой будет программа победившего кандидата. Кандидат 1 может быть двух типов: центрист или левый, $T_1 = \{\mathtt{L}, \mathtt{C}\}$. Кандидат 2 может быть центристом или правым: $T_2 = \{\mathtt{C}, \mathtt{R}\}$. Пусть β — вероятность того, что каждый из кандидатов является центристом. Будем считать, что типы кандидатов независимы. Выигрыш каждого кандидата составляет 0, если реализуется программа, равная его типу; составляет -1, если реализуется программа, отличающаяся от его типа на один шаг (например, если кандидат — центрист, а побеждает кандидат с левой программой); и равен $-c$, если реализуется программа, отличающаяся от его типа на два шага (если кандидат — левый, а победил правый, или наоборот), где $c \geqslant 2$.

Кандидат 1 не станет выбирать $a_1 = \mathtt{R}$, так как это действие доминируется (причем строго) действием $a_1 = \mathtt{C}$ при обоих типах кандидата 1.

Аналогично, второй кандидат не будет играть $\mathtt{L}$. Стратегией кандидата 1 в этой модели будет пара $(p_{\mathtt{L}}, p_{\mathtt{C}})$ — вероятности, что кандидат 1 выберет действие $a_1 = \mathtt{L}$ в случае, если его тип $\mathtt{L}$ или $\mathtt{C}$. Аналогично, стратегией кандидата 2 будет пара $(q_{\mathtt{R}}, q_{\mathtt{C}})$ — вероятности выбрать действие $a_2 = \mathtt{R}$ в зависимости от собственного типа.

Продолжим удалять доминируемые стратегии. Мы знаем, что кандидат 2 никогда не выбирает программу $\mathtt{L}$. Но в таком случае, если $t_1 = \mathtt{C}$, то ожидаемый выигрыш кандидата 1 при $a_1 = \mathtt{C}$ всегда будет не ниже, чем при $a_1 = \mathtt{L}$. Следовательно, $p^*_{\mathtt{C}} = 0$. Аналогично, мы имеем $q^*_{\mathtt{C}} = 0$.

Найдем равновесные $p^*_{\mathtt{L}}$ и $q^*_{\mathtt{R}}$. Пусть $\widetilde{q} = q_{\mathtt{R}}(1-\beta)$ — вероятность того, что кандидат 2 выберет программу $a_2 = \mathtt{R}$ при условии, что его тип неизвестен. Если $t_1 = \mathtt{L}$, то выигрыши кандидата 1, в зависимости от a_1, будут

$$u_1(\mathtt{L}, \widetilde{q}, t_1 = \mathtt{L}) = (1-\widetilde{q})\Big(-\frac{1-\alpha}{2}\cdot 0 - \frac{1+\alpha}{2}\cdot 1\Big) + \widetilde{q}\Big(-\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot c\Big) = \\ = -\frac{1}{2}\big((1+\alpha)(1-\widetilde{q}) + c\,\widetilde{q}\big) \quad (3.51)$$

и

$$u_1(\mathtt{C}, \widetilde{q}, t_1 = \mathtt{L}) = (1-\widetilde{q})(-1) + \widetilde{q}\Big(-\frac{1+\alpha}{2}\cdot 1 - \frac{1-\alpha}{2}\cdot c\Big) = \\ = -\frac{1}{2}\big(2 + \widetilde{q}\,(\alpha + c - c\alpha - 1)\big). \quad (3.52)$$

Мы получаем функцию реакции для первого кандидата:

$$\check{p}_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{R}}) = \begin{cases} 0, & q_{\mathtt{R}} > \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}; \\ [\,0{,}1], & q_{\mathtt{R}} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}; \\ 1, & q_{\mathtt{R}} < \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Для второго кандидата аналогичным способом полученная функция реакции будет

$$\check{q}_{\mathtt{R}}(p_{\mathtt{L}}) = \begin{cases} 0, & p_{\mathtt{L}} > \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}; \\ [\,0{,}1], & p_{\mathtt{L}} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}; \\ 1, & p_{\mathtt{L}} < \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}. \end{cases} \quad (3.54)$$

В зависимости от значений параметров, в игре будет либо три, либо одно, либо континуум равновесий. Наибольший интерес, с точки зрения анализа сравнительной статики, представляет смешанное равновесие $p^*_{\mathtt{L}} = q^*_{\mathtt{R}} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)}$, которое существует при $\dfrac{1-\alpha}{\alpha\,(c-2)(1-\beta)} < 1$.

В этом равновесии кандидат 1, имеющий тип $t_1 = L$, иногда выбирает политическую программу C, которая не является наилучшей с его точки зрения. Делается это потому, что с программой L может быть трудно выиграть выборы. Так что кандидат вынужден приносить свою идейность в жертву политической целесообразности.

Если предположить, что игроки будут реализовывать именно это равновесие, то можно сделать следующие выводы относительно $\frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)}$ — вероятности того, что кандидат 1, имея тип $t_1 = \mathtt{L}$, будет реализовывать крайнюю (левую, в его случае) программу:

1. При увеличении α вероятность того, что левый кандидат $(t_1 = \mathtt{L})$ предложит левую программу, уменьшится.
2. При увеличении c вероятность того, что левый кандидат $(t_1 = \mathtt{L})$ предложит левую программу, уменьшится.
3. При увеличении β вероятность того, что левый кандидат $(t_1 = \mathtt{L})$ предложит левую программу, увеличится.

Последнее наблюдение представляется наиболее интересным. Получается, что кандидат будет чаще предлагать крайнюю программу (L или R), если выше вероятность того, что другой кандидат является центристом. Это происходит отчасти потому, что в силу $c \geqslant 2$ проигрыш центристу менее болезнен, чем проигрыш с вероятностью $1/2$ другому крайнему кандидату.

Смена политического режима. Для того чтобы в обществе произошли глобальные перемены, иногда требуется участие большого числа людей, превышающего некоторую критическую массу. Например, если в некоторой стране происходят демонстрации с призывом к правящему страной президенту уйти в отставку, то они будут успешными только в том случае, если в них примет участие достаточно большое число людей. Если участников будет слишком мало, то они зря потратят свое время — и, возможно, навлекут на свою голову неприятности после того, как массовые протесты окончатся, не достигнув своей цели. Однако никто не знает, насколько массовыми должны быть выступления граждан, чтобы в стране произошла смена режима. Достаточно ли будет усилий ста тысяч протестующих на улицах столицы? Или сто тысяч — слишком мало, нужно полмиллиона или миллион? Этого не знает никто — ни протестующие, ни полиция, ни сам президент. В конце 2004 г. на улицах Киева было достаточно протестующих для того, чтобы сделать возможной «оранжевую революцию». Однако история знает много случаев, когда при столь же многочисленных протестах смены режима не происходило. При этом у каждого человека было свое представление о том, достаточно ли протестующих на улицах города, или нет.

Пусть в стране живет континуум граждан[7]. Каждый решает, стоит ли ему принять участие в протестной акции или нет. Акция будет успешной только в том случае, если в ней приняло участие не менее, чем доля θ от всех граждан. Выигрыш принявшего участие в акции равен $1 - c$, если акция прошла успешно, и составляет $-c$, если акция не удалась, где $c \in \in (0, 1)$ — издержки участия в акции, одинаковые для всех и известные всем. Выигрыш человека, не принимавшего участие в акции, равен 0 вне зависимости от того, была ли акция успешной или нет. Предположим, что граждане не наблюдают величину θ напрямую. Им известно, что θ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием z и стандартным отклонением α.

Будем предполагать, что у каждого гражданина имеется свое представление о том, какое количество протестующих необходимо для смены режима. Пусть каждый игрок i получает сигнал x_i, который является случайной величиной, распределенной согласно нормальному распределению с математическим ожиданием θ и стандартным отклонением β. Таким образом, параметрами в данной модели являются величины c (издержки участия в массовой акции), α (насколько велика неопределенность относительно силы политического режима), β (насколько точны сигналы относительно устойчивости режима, получаемые отдельными людьми) и z (математическое ожидание устойчивости режима).

Найдем симметричное равновесие Байеса–Нэша. Предположим, что игроки используют пороговые стратегии. Каждый игрок i принимает участие в протесте только в том случае, если $x_i \leqslant \widehat{x}$. Игрок с $x_i = \widehat{x}$ будет безразличен в выборе между участием и неучастием. При данном значении θ доля игроков, принимающих участие в протесте, будет равна доле игроков, получивших сигнал $x_i \leqslant \widehat{x}$:

$$\mathsf{P}(x \leqslant \widehat{x} \mid \theta) = \Phi\Big(\frac{\widehat{x} - \theta}{\beta}\Big), \tag{3.55}$$

где Φ — функция распределения для стандартной нормальной случайной величины.

В каком случае протест будет успешным? Это произойдет при таких реализациях случайной величины θ, когда число протестующих будет не меньше, чем само значение θ:

$$\theta \leqslant \Phi\Big(\frac{\widehat{x} - \theta}{\beta}\Big). \tag{3.56}$$

[7] Здесь мы рассматриваем модель из работы Ангелетос, Хеллуига и Павана [Angeletos, Hellwig, Pavan, 2007].

Неравенство (3.56) можно переписать как $\theta \leqslant \widehat{\theta}$, где $\widehat{\theta}$ является решением уравнения

$$\widehat{\theta} = \Phi\Big(\frac{\widehat{x} - \widehat{\theta}}{\beta}\Big). \tag{3.57}$$

Это верно в силу того, что правая сторона неравенства (3.56) убывает с ростом θ.

Пусть игрок i получил сигнал x_i. Как этот игрок оценивает вероятность, с которой протест будет успешным, т.е. условную (при данном x_i) вероятность того, что $\theta \leqslant \widehat{\theta}$? Нам известно, что θ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием z и стандартным отклонением α, в то время как x_i имеет нормальное распределение с математическим ожиданием θ и стандартным отклонением β. Условное распределение θ также будет нормальным с математическим ожиданием $\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x_i + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,z$ и стандартным отклонением $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}$. Следовательно, мы будем иметь

$$\mathsf{P}(\theta \leqslant \widehat{\theta} \mid x_i) = 1 - \Phi\bigg(\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}}\,\Big(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x_i + \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,z - \widehat{\theta}\Big)\bigg). \tag{3.58}$$

Найдем теперь, чему должен быть равен $\widehat{x}$. В каком случае игрок i, получивший сигнал x_i, примет участие в протесте? Только тогда, когда его собственная оценка $\mathsf{P}(\theta \leqslant \widehat{\theta} \mid x_i)$ вероятности успеха протеста не превышает издержек c. Так как $\mathsf{P}(\theta \leqslant \widehat{\theta} \mid x_i)$ убывает с ростом x_i, мы можем сделать вывод, что в протесте примут участие все игроки, получившие сигналы $x_i \leqslant \widehat{x}$, где $\widehat{x}$ является решением уравнения

$$1 - \Phi\bigg(\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}}\,\Big(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,\widehat{x} + \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,z - \widehat{\theta}\Big)\bigg) = c. \tag{3.59}$$

Для того чтобы вывести уравнение (3.57), мы предположили, что в протесте принимают участие только игроки с $x_i \leqslant \widehat{x}$ для некоторого $\widehat{x}$. Из уравнения (3.59) мы видим, что это предположение является верным, по крайней мере, в том случае, если мы предположим, что протест оказывается успешным при $\theta \leqslant \widehat{\theta}$ для некоторой $\widehat{\theta}$.

Следовательно, равновесии $\widehat{\theta}$ и $\widehat{x}$ будут решением системы уравнений (3.57), (3.59). Можно попробовать исследовать, как решение этой системы зависит от значений параметров. При достаточно малом β мы будем иметь значение $\widehat{\theta}$, близкое к $1 - c$. Для всех $\theta < 1 - c$ число участвующих в протесте будет невелико (оно будет стремиться к нулю при β, стремящемся к нулю); при $\theta > 1 - c$ в протесте будет принимать участие большое число граждан (оно будет стремиться к 1 при β, стремящемся к нулю). Так что если качество сигналов, получаемых гражданами, достаточно высоко (т.е. дисперсия случайной величины β мала), то малые изменения в θ могут вызвать резкие колебания в численности вышедших на улицу разгневанных горожан.

Помимо смены политических режимов еще ряд других явлений следует логике, описанной в этой модели. По похожему сценарию развиваются спекулятивные атаки на обменные курсы валют. Многие страны поддерживают фиксированные обменные курсы своих национальных валют; если курс упадет слишком низко, то центральный банк такой страны будет обязан вмешаться и купить определенное количество своей валюты; это позволит ему поддержать курс на нужном уровне. Однако если количество инвесторов, желающих избавиться от этой валюты, слишком велико, то банк может и не справиться со своей задачей, так как у него не хватит иностранных валютных резервов. Произойдет валютный кризис, результатом которого станет девальвация валюты и переход к плавающему или более низкому обменному курсу. Все инвесторы, принявшие участие в атаке, смогут заработать — но только в том случае, если атака будет успешной. Если в ней примет участие слишком малое число инвесторов, то центральному банку должно хватить резервов, чтобы поддержать обменный курс на заданном уровне, а пытавшиеся продать валюту инвесторы потеряют деньги. Как и революции, валютные кризисы часто происходят внезапно.

Агрегирование информации. Двое судей должны решить, оправдать или обвинить подсудимого. Подсудимый либо совершал преступление, в котором его обвиняют ($t = G$), либо нет ($t = I$). Каждый судья получает сигнал, совершал ли подсудимый вменяемое ему преступление или нет. Пусть $\theta_i \in \{I, G\}$ — сигнал, полученный судьей $i = 1, 2$. Судья не может наблюдать, какой сигнал получил другой судья; если угодно, то сигнал, получаемый судьей — это его субъективное мнение, основанное на его опыте разбора подобных дел.

Сигналы, получаемые судьями, зависят от истинного положения дел t. Если подсудимый не совершал преступления, то каждый судья i получает сигнал $\theta_i = I$ с вероятностью 1. Если подсудимый совершил преступление, то $\theta_i = I$ с вероятностью $1/2$ и $\theta_i = G$ с вероятностью $1/2$, причем сигналы судей статистически независимы друг от друга. Пусть $p = \mathsf{P}(t = I)$ — *априорная вероятность* того, что подсудимый не совершал преступления. То есть это — вероятность, которую каждый судья i приписывает событию $t = I$ до того, как он ознакомился с делом и получил свой сигнал θ_i.

Ознакомившись с материалами дела и получив свой сигнал, каждый судья i должен вынести свой вердикт: $a_i = \mathtt{C}$ или $a_i = \mathtt{A}$ («виновен» или «невиновен»). Если оба судьи вынесли вердикт «виновен», то подсудимый признается виновным. Если хотя бы один судья вынес вердикт «невиновен», то подсудимый признается невиновным. Выигрыш каждого судьи равняется 1, если принято верное решение (осужден виновный или оправдан невиновный), и 0, если решение было неверным (оправдан виновный или осужден невиновный).

Найдем равновесие Байеса–Нэша, т.е. то, как вердикт судьи a_i зависит от θ_i. По правилу Байеса мы можем найти условные вероятности того, что подсудимый виновен, в зависимости от получаемого судьей сигнала. Сигнал $\theta_i = I$ возможен в двух случаях: если подсудимый не совершал преступления (что бывает с вероятностью p), либо если он совершил преступление но судья получил неверный сигнал (это происходит с вероятностью $(1-p)/2$). По правилу Байеса получим

$$\mathsf{P}(t = I \mid \theta_i = I) = \frac{p}{p + 0{,}5 \cdot (1-p)} = \frac{2p}{1+p}. \tag{3.60}$$

Если судья получил сигнал $\theta_i = G$, то это может означать только то, что подсудимый совершил преступление; соотвественно,

$$\mathsf{P}(t = I \mid \theta_i = G) = 0. \tag{3.61}$$

Сразу заметим, что если $\theta_i = G$, то слабо доминирующей стратегией судьи будет вынести вердикт $a_i = \mathtt{C}$. Действительно, решение $a_i = \mathtt{A}$ может только навредить судье i (в том случае, если второй судья вынесет вердикт $\mathtt{C}$). Следовательно, нам надо найти q_i — вероятность, с которой судья i выносит вердикт $a_i = A$ при получении им сигнала $\theta_i = I$.

Пусть q_2 — стратегия второго судьи. Пусть первый судья получил сигнал $\theta_1 = I$. Его интересует, с какой вероятностью могли иметь место следующие события:

1. $t = I$ и $a_2 = \mathtt{A}$.
2. $t = I$ и $a_2 = \mathtt{C}$.
3. $t = G$ и $a_2 = \mathtt{A}$.
4. $t = G$ и $a_2 = \mathtt{C}$.

Если $t = I$, то второй судья получит сигнал $\theta_2 = I$ с вероятностью 1. Получив такой сигнал, он с вероятностью q_2 сыграет $a_2 = \mathtt{A}$. В результате мы получим

$$\mathsf{P}(t = I,\ a_2 = \mathtt{A} \mid \theta_1 = I) = \frac{2p}{1+p} q_2. \tag{3.62}$$

Аналогично мы выводим

$$\mathsf{P}\big(t = I \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I\big) = \frac{2p}{1+p}(1 - q_2), \tag{3.63}$$

$$\mathsf{P}\big(t = G \text{ и } a_2 = \mathtt{A} \mid \theta_1 = I\big) = \frac{1-p}{1+p}\,\frac{q_2}{2}, \tag{3.64}$$

$$\mathsf{P}\big(t = G \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I\big) = \frac{1-p}{1+p}\left(1 - \frac{q_2}{2}\right). \tag{3.65}$$

Если первый судья выносит вердикт A, а второй судья выносит вердикт A, то он получает единичный выигрыш в том случае, если подсудимый невиновен:

$$\widetilde{u}_1(\mathtt{A}, q_2 \mid \theta_1 = I) = \mathsf{P}(t = I \text{ и } a_2 = \mathtt{A} \mid \theta_1 = I) + \\ + \mathsf{P}(t = I \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I) = \frac{2p}{1+p}. \quad (3.66)$$

Пусть первый судья выносит вердикт C. Тогда он получает выигрыш 1 в двух случаях: если $t = I$ и $a_2 = \mathtt{A}$ и если $t = G$ и $a_2 = \mathtt{C}$. Это дает нам

$$\widetilde{u}_1(\mathtt{C}, q_2 \mid \theta_1 = I) = \mathsf{P}(t = I \text{ и } a_2 = \mathtt{A} \mid \theta_1 = I) + \\ + \mathsf{P}(t = G \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I) = \frac{2p}{1+p} q_2 + \frac{1-p}{1+p}\frac{2-q_2}{2}. \quad (3.67)$$

Таким образом, первый судья получит больший выигрыш при $a_1 = \mathtt{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{P}(t = I \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I) > \mathsf{P}(t = G \text{ и } a_2 = \mathtt{C} \mid \theta_1 = I), \quad (3.68)$$

или

$$q_2(1 - 5p) > 2 - 6p. \quad (3.69)$$

Данное неравенство может быть верным хотя бы для какого-то $q_2 \in [0, 1]$ тогда и только тогда, когда $p > 1/3$. Как следствие, мы получаем следующую функцию реакции судьи 1 для $p \geqslant 1/3$:

$$\check{q}_1(q_2) = \begin{cases} 0, & q_2 > \dfrac{6p-2}{5p-1}; \\ [0,1], & q_2 = \dfrac{6p-2}{5p-1}; \\ 1, & q_2 < \dfrac{6p-2}{5p-1}. \end{cases} \quad (3.70)$$

При $p < 1/3$ доминирующей стратегией судьи 1 будет $q_1 = 0$. Поскольку функция реакции второго судьи строится аналогично (3.70), мы приходим к выводу, что в этой игре есть единственное равновесие Байеса–Нэша:

$$q_1 = q_2 = q^* = \begin{cases} 0, & p \leqslant 1/3; \\ \dfrac{6p-2}{5p-1}, & p > 1/3. \end{cases} \quad (3.71)$$

При малых p судьи игнорируют получаемые ими сигналы $\theta_i = I$. Действительно, представим себе, что интуиция подсказывает судье, что подсудимый не совершал преступления. Что ему делать? При малом p судья будет думать, что скорее всего он ошибается. В таком случае он проигнорирует сигнал, так как при вердикте $a_i = \mathtt{C}$ вероятность случайно наказать человека, не совершавшего преступление, будет ниже, чем вероятность случайно отпустить на свободу преступника при $a_i = \mathtt{A}$.

Насколько эффективно судьи будут принимать решения? Нас интересует то, с какой вероятностью подсудимый, не совершавший преступления, будет оправдан, и с какой вероятностью совершивший преступление будет осужден. Ответим сначала на первый вопрос. Если подсудимый не совершал преступления, то каждый судья получит сигнал $\theta_i = I$. Вероятность того, что ни в чем не повинный человек будет отправлен за решетку, равна

$$\mathsf{P}(a_1 = \mathtt{C} \text{ или } a_2 = \mathtt{C} \mid t = I) = \begin{cases} 1, & p \leqslant 1/3; \\ \dfrac{(1-p)^2}{(5p-1)^2}, & p > 1/3. \end{cases} \tag{3.72}$$

Если же подсудимый на самом деле совершил преступление, то каждый судья $i = 1, 2$ получает сигнал $\theta_i = G$ с вероятностью $1/2$ при $t = G$. Такой сигнал получит хотя бы один судья с вероятностью $3/4$. С вероятностью $1/4$ оба судьи получат сигнал $\theta_i = I$. В итоге вероятность того, что преступник будет отпущен на свободу, равна

$$\mathsf{P}(a_1 = \mathtt{A} \text{ или } a_2 = \mathtt{A} \mid t = G) = \frac{q^* - q^{*2}}{2}. \tag{3.73}$$

Как бы повели себя судьи, если бы получаемые ими сигналы θ_1 и θ_2 были публичной информацией? У обоих судей одинаковые интересы (чтобы в итоге было принято правильное решение), так что нам достаточно изучить, как поведет себя любой из этих двух судей. Нам нужно рассчитать вероятность того, что подсудимый не совершал преступления, для трех случаев: когда оба сигнала равны G, когда один сигнал равен G, а второй равен I и когда оба сигнала равны I. Обозначим за $\widetilde{a} \in \{\mathtt{A}, \mathtt{C}\}$ вердикт такого судьи. Очевидно, что при $\theta_1 = G$ или $\theta_2 = G$ подсудимый должен был совершить преступление и $\widetilde{a} = \mathtt{C}$. Для третьего случая мы находим

$$\mathsf{P}(t = I \mid \theta_1 = I \text{ и } \theta_2 = I) = \frac{p}{p + 0{,}25 \cdot (1-p)} = \frac{4p}{3p+1}. \tag{3.74}$$

Судья, увидевший сигналы $\theta_1 = \theta_2 = I$, вынесет вердикт «невиновен» тогда и только тогда, когда эта вероятность превышает $1/2$, или $p > 1/5$. Несовершавший преступления человек будет осужден со следующей вероятностью:

$$\mathsf{P}(\widetilde{a} = \mathtt{C} \mid t = I) = \begin{cases} 1, & p \leqslant 1/5; \\ 0, & p > 1/5. \end{cases} \tag{3.75}$$

Сравним вероятности (3.72) и (3.75). Получается, что при $p > 1/5$ вероятность отправить не совершавшего преступления человека за решетку выше, если сигналы судей не наблюдаемы. Причина этого лежит в стратегическом взаимодествии двух игроков. Голос судьи является решающим только в том случае, если другой судья получил сигнал «виновен» — что, в свою очередь, возможно только если обвиняемый действительно совершил преступление. Можно показать, что такой «обвинительный уклон» будет усиливаться при увеличении числа присяжных (см. работу Феддерсена и Пезендорфера [Feddersen, Pesendorfer, 1998]).

3.1.3. РАВНОВЕСИЕ ДИСКРЕТНОГО ОТКЛИКА

Идея Харшаньи о соответствии между смешанными стратегиями в играх с полной информацией и чистыми стратегиями в играх с неполной информацией недавно нашла применение при анализе данных, полученных в ходе экономических экспериментов. Известно, что довольно часто в реальных ситуациях люди ведут себя иначе, нежели предсказывает экономическая теория. Можно ли расхождение между теорией и действительностью объяснить наличием «дрожащей руки» — ненаблюдаемых изменений функций выигрышей игроков? Например, в игре «сороконожка» в равновесии первый игрок сразу забирает минимальный возможный выигрыш (с. 92). В настоящей игровой ситуации игроки забирают выигрыши ближе к середине игры. Можно ли это объяснить тем, что каждый игрок ожидает, что у другого игрока может «дрогнуть рука» (т.е. другой игрок сделает неоптимальный ход)? И, наконец, можно ли оценить, насколько сильны на самом деле случайные колебания функций выигрышей? На эти вопросы можно ответить при помощи анализа *равновесий дискретного отклика*, впервые предложенного Маккельви и Полфри [McKelvey, Palfrey, 1995].

Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Предположим, что с этой игрой ассоциируется игра с неполной информацией, в которой выигрыш каждого игрока i при каждом профиле чистых стратегий s равен

$$\widehat{u}_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i, s_{-i}) + \varepsilon_{s_i}, \tag{3.76}$$

где ε_{s_i} — случайная величина с нулевым математическим ожиданием, отражающая дополнительный выигрыш, который игрок i получает от игры стратегии s_i. Мы предполагаем, что значение величины ε_{s_i} известно только игроку i.

Для каждого игрока i мы можем определить *функцию дискретного отклика* $\check{p}_i(\cdot)$, которая отражает вероятности, с которыми игрок i будет играть каждую из своих чистых стратегий для каждого возможного профиля смешанных стратегий σ_{-i}. Формально, вероятность того, что игрок i сыграет чистую стратегию s_i, есть

$$\check{p}_{s_i} = \mathsf{P}\big(\widehat{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i'} \widehat{u}_i(s_i', \sigma_{-i})\big). \tag{3.77}$$

Следовательно, если остальные игроки не могут наблюдать значения случайных величин ε_{s_i} для игрока i, то функция $\check{p}_i(\cdot)$ — это их прогноз относительно того, как поведет себя игрок i в зависимости от σ_{-i}. Теперь можно дать определение и самого равновесия.

Определение 3.3. Пусть G — конечная игра в нормальной форме, $\check{p}_i$ — соответствующие функции дискретного отклика. Тогда *равновесие дискретного отклика* — это $p^* = (p_1^*, \dots, p_N^*)$, такое, что $\check{p}_i^* = p_i(p_{-i}^*)$.

Существует ли это равновесие для произвольной конечной игры? Маккельви и Полфри [McKelvey, Palfrey, 1995] показали, что при условии, что распределение величин ε имеет плотность, то функции $\check{p}_i(\cdot)$ являются непрерывными и равновесие дискретного отклика существует.

Логистическое распределение ошибок. Рассмотрим важный частный случай, когда все случайные величины ε независимы и имеют функцию распределения Гумбеля:

$$\mathsf{P}(\varepsilon_{s_i} \leqslant x) = e^{-e^{-\lambda x}}. \tag{3.78}$$

Такая случайная величина будет иметь математическое ожидание, равное $0{,}5772/\lambda$, и стандартное отклонение, равное $\pi/(\lambda\sqrt{6}\,)$.

Известно, что в таком случае функции $\check{p}_i$ могут быть выписаны в явном виде[8]:

$$\check{p}_{s_i} = \frac{e^{\lambda u_i(s_i, \sigma_{-i})}}{\sum_{s' \in S_i} e^{\lambda u_i(s_i', \sigma_{-i})}}. \tag{3.79}$$

Это задает систему уравнений для нахождения вероятностей p^*.

Рассмотрим упрощенный пример из работы Полфри, Гоури и Хольта [Goeree, Holt, Palfrey, 2001]. Есть такая игра 2×2:

		Игрок 2	
		H	L
Игрок 1	H	$1-c; 1-c$	$-c; 0$
	L	$0; \; -c$	$0; 0$

Это — игра производства общественного блага при технологии «слабое звено». Два игрока решают, сколько усилий — 0 единиц (L) или 1 единицу (H) — потратить на производство общественного блага. Количество произведенного блага равняется минимуму затраченных усилий. Издержки одной единицы усилия равны $c \leqslant 1$.

В этой игре имеются два равновесия в чистых стратегиях: (H, H) и (L, L), и одно равновесие в смешанных стратегиях, в котором каждый игрок выбирает H с вероятностью c. То есть в смешанном равновесии высокий уровень производства общественного блага тем вероятней, чем выше издержки его производства. Этот результат контринтуитивен. Эксперименты с такими

[8] Это — следствие фундаментального результата, доказанного МакФадденом [McFadden, 1973].

играми (например, [Goeree, Holl, 2005]) показывают, что частота, с которой игроки выбирают низкие уровни усилий, возрастает с уровнем издержек c.

Рассмотрим теперь модифицированную игру, в которой к выигрышу каждого игрока $i = 1, 2$ при выборе стратегии $s = \mathtt{H}, \mathtt{L}$ прибавляется случайная величина ε_{is}, распределенная согласно (3.78). Пусть p и q — вероятности, с которыми игроки 1 и 2 выбирают H. Из (3.79) мы получим функции дискретного отклика

$$\check{p}(q) = \frac{e^{\lambda(1+q-2c)}}{e^{\lambda(1-c)} + e^{\lambda(1+q-2c)}} = \frac{1}{1 + e^{\lambda(c-q)}}, \tag{3.80}$$

$$\check{q}(p) = \frac{e^{\lambda(1+p-2c)}}{e^{\lambda(1-c)} + e^{\lambda(1+p-2c)}} = \frac{1}{1 + e^{\lambda(c-p)}}. \tag{3.81}$$

У системы $\check{p}(q) = p$, $\check{q}(p) = q$ есть единственное решение, которое симметрично ($p = q$) и задано уравнением

$$p + p\, e^{\lambda(c-p)} = 1. \tag{3.82}$$

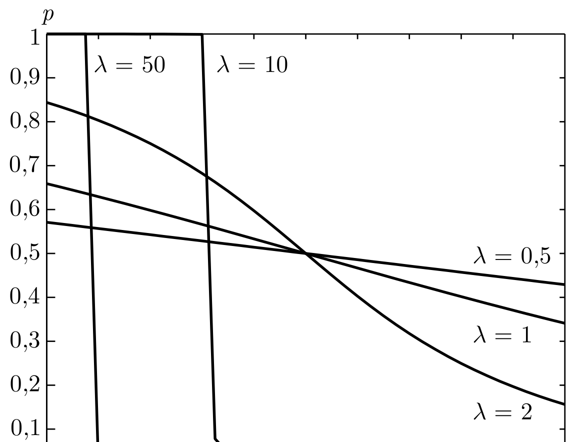


Рис. 3.5. Равновесие дискретного отклика в игре с производством общественных благ

На рис. 3.5 показана зависимость равновесного p от c при разных значениях λ. Действительно, при более высоком значении c каждый игрок с большей вероятностью выберет L. Таким образом, переход к модели, в которой у выигрышей игроков есть случайная (и ненаблюдаемая) компонента ε, позволяет нам получить сравнительную статику, которая соответствует как нашей интуиции, так и экспериментальным данным.

При $\lambda \to \infty$ для любого $c > 0$ мы имеем $p \to 0$. Таким образом, в предельном случае мы имеем равновесие, в котором оба игрока реализуют чистые стратегии $(\mathtt{L}, \mathtt{L})$. Это примечательно, поскольку предельный случай для модели со случайным выигрышем (одно равновесие) отличается от исходной игры 2×2 (два равновесия).

Оценка параметра λ методом максимального правдоподобия. Наличие экспериментальных данных позволяет численно оценивать значение параметра λ, определяющего, насколько часто каждый из игроков будет реализовывать разные чистые стратегии. Например, предположим, что был поставлен эксперимент, в котором два игрока N раз подряд играли в игру 2×2, в которой денежные платежи обоим игрокам соответствовали матрице выигрышей из предыдущего примера. Пусть $a_{it} \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$ — действие игрока i, наблюдаемое в момент времени t. Насколько вероятно, что мы увидим именно такую последовательность действий игроков при данном значении параметра λ? Пусть $p(\lambda)$ — равновесная вероятность игрока сыграть H, полученная из уравнения (3.82). Пусть игроку 1 известно, что игрок 2 выберет H с этой вероятностью. Тогда вероятность того, что игрок 1 выберет действие $a \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$, будет равна

$$\mathsf{P}_1(a, \lambda) = \begin{cases} p\,(\lambda), & a = \mathtt{H}; \\ 1 - p\,(\lambda), & a = \mathtt{L}. \end{cases} \tag{3.83}$$

Аналогично определим $\mathsf{P}_2(a, \lambda)$.

Если мы предположим, что все величины ε независимы, то вероятность, или *правдоподобие* наблюдения последовательности действий $(a_{1t}, a_{2t})\big|_{t=1}^{N}$, будет равна

$$L(\lambda) = \prod_{t=1}^{N} \prod_{i=1}^{2} \mathsf{P}_i(a_{it}, \lambda). \tag{3.84}$$

Максимизируя эту *функцию правдоподобия* по λ, мы получим оценку этого параметра, дающую наибольшее значение функции правдоподобия для наблюдаемых действий игроков [9].

Равновесие дискретного отклика в динамических играх. Понятие равновесия дискретного отклика (см. с. 181–184) можно обобщить и для динамических игр. Маккельви и Полфри [McKelvey, Palfrey, 1998] предложили такую схему: пусть для игры в развернутой форме σ — профиль поведенческих стратегий, h_i — информационное множество игрока i, σ_{-h_i} — поведенческие стратегии всех игроков, кроме игрока i, во множестве h_i. Тогда для каждого действия $a \in A(h_i)$ определим $u_{i,h_i}(a, \sigma_{-h_i})$ — математическое ожидание выигрыша игрока i при условии, что он нахо-

[9] Метод максимального правдоподобия широко используется в эконометрике для анализа моделей бинарного или множественного выбора. См., например, учебник Магнуса, Катышева и Пересецкого [2005, гл. 12].

дится в информационном множестве h_i, выбирает действие a, а во всех остальных информационных множествах игроки реализуют стратегии σ_{-h_i}.

Теперь допустим, что в результате действия a, выбранного игроком i в информационном множестве h_i, к выигрышу игрока i прибавляется случайная величина ε_a. Тогда поведенческая стратегия в информационном множестве h_i определяется стратегиями игроков в остальных информационных множествах:

$$b_i(a \mid h_i, \sigma_{-h_i}) = \mathsf{P}\Big(u_{i,h_i}(a, \sigma_{-h_i}) + \varepsilon_a = \max_{a' \in A(h_i)} u_{i,h_i}(a', \sigma_{-h_i}) + \varepsilon_{a'}\Big). \quad (3.85)$$

Равновесием будет профиль поведенческих стратегий, в котором стратегия в каждом информационном множестве определяется соотношением (3.85). Нам остается предположить, что каждый игрок знает свои величины ε только для того информационного множества, в котором он находится. Для информационных множеств, лежащих ниже по траектории игры, игроку известно лишь распределение величин ε.

Маккельви и Полфри показали, что равновесие, определенное таким образом, всегда существует. Для случая, когда ошибки распределены согласно (3.78), получен ряд дополнительных результатов. В частности, было показано, что при $\lambda \to \infty$ равновновесие единственно, причем его пределом является секвенциальное равновесие в исходной игре (см. гл. 4).

Приведем пример использования равновесия дискретного отклика в игре «сороконожка», изображенной на рис. 3.6.

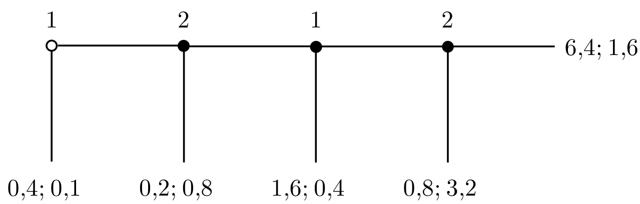


Рис. 3.6. Игра «сороконожка»

В этой игре игрокам по очереди предлагается выбрать между T (завершить игру) и Q (передать ход другому игроку). На последнем этапе, когда ход во второй раз делает игрок 2, ход Q также завершает игру, но с другими выигрышами.

Пусть (p_1, p_2) — поведенческая стратегия игрока 1, где p_1 — вероятность сделать ход T в момент времени $t = 1$, p_2 — вероятность сделать ход T в момент времени $t = 3$ при условии, что игра не останавливается ранее. Аналогично, обозначим за (q_1, q_2) вероятности, с которыми игрок 2 делает ход T в моменты времени $t = 2$ и $t = 4$ соответственно.

Предположим, что выигрыш игрока 1 в момент времени $t = 1$ составляет, в зависимости от хода,

$$u_{11}(\mathtt{T}) = 0{,}4 + \varepsilon_{1T}, \tag{3.86}$$

$$u_{11}(\mathtt{Q}) = 0{,}2\, q_1 + (1 - q_1)\big(1{,}6\, p_2 + (1 - p_2) \times \times (0{,}8\, q_2 + 6{,}4\,(1 - q_2))\big) + \varepsilon_{1Q}. \tag{3.87}$$

Предположим, что величины ε_{1T} и ε_{1P} распределены согласно функции распределения (3.78) с параметром λ. Тогда мы имеем

$$p_1 = \frac{1}{1 + \exp\lambda\,[0,2q_1 + (1 - q_1)\,(1,6p_2 + (1 - p_2)\,(0,8q_2 + 6,4(1 - q_2))) - 0,4]}. \tag{3.88}$$

Аналогично, выигрыш игрока 1 в момент времени $t = 3$ составит

$$u_{13}(\mathtt{T}) = 1{,}6 + \varepsilon_{3T}, \tag{3.89}$$

$$u_{13}(\mathtt{Q}) = 0{,}8\, q_2 + 6{,}4\,(1 - q_2) + \varepsilon_{3Q}, \tag{3.90}$$

где ε_{3T} и ε_{3Q} имеют функцию распределения (3.78) с параметром λ. Тогда получаем

$$p_2 = \frac{1}{1 + \exp\lambda\,[0,8q_2 + 6,4(1 - q_2) - 1,6]}. \tag{3.91}$$

Для игрока 2 мы имеем

$$u_{22}(\mathtt{T}) = 0{,}8 + \varepsilon_{2T}, \tag{3.92}$$

$$u_{22}(\mathtt{Q}) = 0{,}4\, p_2 + (1 - p_2)\,(3{,}2\, q_2 + 1{,}6\,(1 - q_2)) + \varepsilon_{2Q} \tag{3.93}$$

и

$$u_{24}(\mathtt{T}) = 3{,}2 + \varepsilon_{4T}, \tag{3.94}$$

$$u_{24}(\mathtt{Q}) = 1{,}6 + \varepsilon_{4Q}. \tag{3.95}$$

Если случайные ошибки для игрока 2 распределены так же, как и для игрока 1, то мы имеем

$$q_1 = \frac{1}{1 + \exp\lambda[0,4p_2 + (1 - p_2)\,(3,2q_2 + 1,6(1 - q_2)) - 0,8]} \tag{3.96}$$

и

$$q_2 = \frac{1}{1 + \exp\lambda[1,6 - 3,2]}. \tag{3.97}$$

Система (3.88), (3.91), (3.96), (3.97) имеет единственное решение. Зависимость решения от λ показана на рис. 3.7.

Можно сделать несколько наблюдений. Во-первых, в этой игре для большинства значений λ верно соотношение $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$, т.е. вероятность того, что игрок выберет действие T и заберет приз тем выше, чем ближе к концу игры мы подходим. Это соответствует тому, что мы наблюдаем в большинстве экономических экспериментов с игрой «сороконожка».

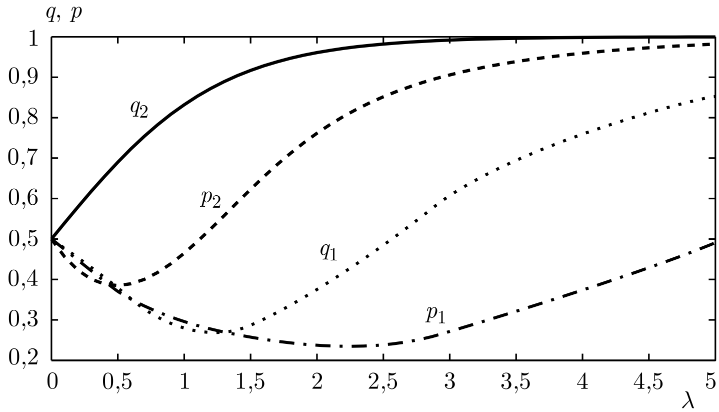


Рис. 3.7. Равновесие в игре «сороконожка» со стохастическими функциями выигрышей

Во-вторых, при увеличении λ — т.е. при снижении дисперсии функции выигрышей — поведенческие стратегии игроков стремятся к равновесию в игре с совершенной информацией, в которой игроки всегда забирают приз во всех вершинах игры. Наконец, в-третьих (и это наиболее интересно), при малых значениях λ вероятности p_1, p_2 и q_1 *убывают* с ростом λ. Прочему это происходит? При λ, равном нулю, оба игрока в каждый момент времени делают ход `Q` с вероятностью $1/2$. Рассмотрим игрока 2, делающего ход в момент времени $t = 4$. При увеличении λ вероятность того, что игрок 2 делает ход `Q`, снижается. Но если $0 < \lambda \leqslant 0{,}68$, то он всен равно делает ход `T` вероятностью $q_2 \leqslant 4/5$. При таком q_2 мы будем иметь $1{,}6 \leqslant 0{,}8\, q_2 + 6{,}4\,(1 - q_2)$, так что в этом случае игрок 1 в момент времени $t = 3$ сделает ход `Q` с вероятностью большей, чем $1/2$.

3.2. ДИЗАЙН МЕХАНИЗМОВ

Находя равновесие в теоретико-игровой модели, мы даем ответ на вопрос: «Как поведут себя игроки, будучи поставленными в определенные условия?» *Дизайн механизмов* или *построение механизмов* — это раздел теории игр, который изучает обратную задачу: «Какие правила игры необходимо создать для того, чтобы в равновесии игроки реализовывали данный профиль действий?» Задача дизайна механизмов имеет большое практические значение.

Проведение аукционов — первый пример, приходящий в голову. Мировой объем торгов на аукционах (как по продажам товаров частным лицам, так и по государственным закупкам) исчисляется сотнями миллиардов долларов в год. Как правильно прописать правила аукциона, чтобы товар был продан по наибольшей цене, а возможность сговора между покупателями была минимальна?

Другой пример, в котором дизайн механизмов играет важную роль — раздел имущества во время бракоразводных процессов. Бывшие супруги должны договориться, как поделить совместное имущество, которое состоит из большего количества разных предметов. Каждый по-разному ценит разные предметы, и хотелось бы (с точки зрения максимизации суммарного благосостояния), чтобы каждая вещь досталась тому, кто ее больше ценит. Задача состоит в том, чтобы так построить процесс раздела имущества, что каждый супруг на вопрос «во сколько вы оцениваете этот предмет» станет отвечать правдиво.

3.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть, как и раньше, T — множество типов игроков, P — распределение вероятностей на T. Обозначим через C *множество исходов* (или состояний). Пусть $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$ — множество действий игроков, $g\colon A \to C$ — функция исхода. Дадим определение.

Определение 3.4. Набор $M = \langle A, g\rangle$ называется *механизмом*.

Механизм — это правила игры. Например, рассмотрим аукцион первой цены, в котором участвуют два покупателя. Каждый покупатель может сделать любую неотрицательную заявку; товар приобретается покупателем с наибольшей заявкой, по цене этой заявки. Множество действий в таком аукционе будет $A = A_1 \times A_2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Исходом аукциона будет пара (сумма, заплаченная победителем; победитель), принадлежащая множеству $C = (0, \infty) \times \{0, 1, 2\} = C$, где «*победитель* $=0$» означает, что заявки были одинаковые и товар достался каждому покупателю с вероятностью 50%.

Для того чтобы при данном механизме определить игру с неполной информацией, необходимо знать, как выигрыш игроков зависит от исходов и, в итоге, от действий, которые они предпринимают. Дадим определение.

Определение 3.5. Пусть $\overline{u}_i\colon C \times T_i \to \mathbb{R}$ — функция, определяющая выигрыш игрока i в зависимости от его типа и от исхода (или состояния). Тогда механизм M определяет игру $G(M) = \langle I, A, T, \mathsf{P}, u\rangle$, где $u_i\colon A \times T_i \to$ $\to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$u_i(a, t_i) = \overline{u}_i(g(a), t_i). \tag{3.98}$$

Вернемся к примеру с аукционом первой цены. Если покупателей всего двое и тип каждого покупателя соответствует максимальной сумме, которую он готов заплатить за продаваемый товар, то получается, что $T = T_1 \times T_2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Выигрыш покупателя i с типом $v_i = t_i \in T_i$ будет

$$u_i = \begin{cases} t_i - a_i, & a_i > a_{-i}; \\ \dfrac{t_1 - a_1}{2}, & a_i = a_{-i}; \\ 0, & a_i < a_{-i}. \end{cases} \tag{3.99}$$

Теперь представьте себя на месте продавца. Ваша задача — придумать правила аукциона, такие, что товар будет продан тому покупателю, который готов заплатить больше других, и, по возможности, по максимальной цене, которую он готов заплатить. Иными словами, вы хотите, чтобы при каждом данном профиле типов игроков в игре с неполной информацией, которая соответствует аукциону с участием этих игроков, реализовывался какой-то конкретный исход. Формализуем вашу задачу.

Определение 3.6. Назовем функцию $f\colon T \to C$ *функцией общественного выбора*.

Функция общественного выбора определяет исход, реализации которого мы хотим добиться в зависимости от состояния природы (которое определяет типы игроков). В принципе, мы можем предъявлять разные требования к нашим результатам. Во-первых, мы можем захотеть, чтобы при каждом профиле типов игроков нужный нам профиль действий являлся равновесием Нэша (возможно, не единственным) в соответствующей игре с неполной информацией. Во-вторых, мы можем ужесточить требования и захотеть, чтобы нужный нам профиль действий являлся равновесием в доминирующих стратегиях. Условия существования механизма, реализующего данную функцию общественного выбора, зависят от того, какой из этих двух критериев мы применим.

3.2.2. НЭШ-РЕАЛИЗУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ

Посмотрим, в каких случаях мы можем ожидать, что значения данной функции общественного выбора будут являться одним из равновесий Байеса–Нэша в игре с неполной информацией.

Определение 3.7. Механизм M *Нэш-реализует* правило общественного выбора f, если для всех $t \in T$ мы имеем $g(s^*(t)) = f(t)$, где s^* — равновесие Байеса–Нэша в игре $G(M)$.

Рассмотрим в качестве примера задачу продажи товара на аукционе с двумя покупателями. Пусть действует правило аукциона второй цены: покупатели одновременно делают заявки, товар продается покупателю с наибольшей заявкой, причем платит он сумму, равную наименьшей заявке. В первой главе на с. 16 мы доказали, что в равновесии в этом аукционе заявка каждого покупателя равна его оценке стоимости товара. То есть если t_1, t_2 — типы покупателей, соответствующие их оценкам стоимости товара, то механизм «аукцион второй цены» Нэш-реализует[10] следующую функцию общественного выбора: если $t_1 > t_2$, то продать товар покупателю 1 по цене t_2; если $t_1 = t_2$, то продать товар каждому из двух покупателей с равной вероятностью по цене $t_1 = t_2$; и если $t_1 < t_2$, то продать покупателю 2 по цене t_1.

Аукцион второй цены эффективен — т.е. он справляется с задачей продажи товара тому покупателю, который готов заплатить больше других. Однако, к сожалению для продавца, в аукционе второй цены покупатель практически всегда недоплачивает. Можно ли придумать правила, при которых аукцион принесет продавцу бóльшую прибыль? Возможно ли придумать такой аукцион, в котором покупатель будет отдавать продавцу все, что он готов заплатить?

На первый взгляд, задача дизайна такого механизма выглядит очень сложной. Существует множество различных вариантов организации аукциона: спускающаяся и поднимающаяся торговля, аукционы первой и второй цены и т. д. Можно ли их всех описать математически? К счастью, оказывается, что можно. Дадим такое определение.

Определение 3.8. Пусть T — множество типов игроков, C — множество исходов. Механизм $M = \langle A, g\rangle$ является *прямым механизмом*, если $A = T$.

Если продолжить пример с продажей товара, то любой прямой механизм будет предполагать, что участие покупателя в аукционе ограничивается сообщением продавцу максимальной суммы, которую он готов заплатить за товар. Следующий результат, полученный, в том числе, Майерсоном [Myerson, 1979], показывает, что в задаче поиска механизма нам достаточно рассматривать только прямые механизмы.

Теорема 3.2. *Пусть f — функция общественного выбора. Пусть существует механизм M, который Нэш-реализует f. Тогда существует прямой механизм $\overline{M}$, который Нэш-реализует f. При этом в игре $G(\overline{M})$, образованной механизмом $\overline{M}$, в равновесии все игроки правдиво сообщают свой тип: $s_i^* = t_i$ для всех i.*

Этот результат получил название *принципа выявления*. Доказательство совсем простое. Если существует механизм M, то можно добиться такого же исхода и при прямом механизме $\overline{M}$, когда ведущий говорит каждому игроку: «Скажи мне свой тип, и я сам сыграю за тебя твою равновесную стратегию в механизме M». Каждый игрок честно сообщит ведущему свой тип — иначе, если игрок соврет, то ведущий сыграет за него стратегию, которая может отличаться от равновесной.

Доказательство. Пусть механизм $M = \langle A, g\rangle$ Нэш-реализут функцию общественного выбора f. Пусть s^* — равновесие в игре $G(M)$, u_i — функ-

[10] Более того, реализует по доминированию — см. п. 3.2.3.

ции полезности в этой игре, соответствующие механизму M согласно (3.98). Возьмем прямой механизм $\overline{M} = \langle T, g' \rangle$, где $g'(t) = g(s^*(t))$. Для всех i, для всех $a'_i \in A_i$ и для всех $t \in T$ мы имеем

$$u_i\big(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\big) \geqslant u_i\big(a'_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\big). \tag{3.100}$$

Из этого по определению $\overline{u}_i$ следует, что

$$\overline{u}_i\big(g(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})), t_i\big) \geqslant \overline{u}_i\big(g(a'_i, s_{-i}^*(t_{-i})), t_i\big). \tag{3.101}$$

Возьмем $t'_i \neq t_i$ и $a'_i = s_i^*(t'_i)$. Тогда

$$\overline{u}_i\big(g'(t_i, t_{-i}), t_i\big) \geqslant \overline{u}_i\big(g'(t'_i, t_{-i}), t_i\big). \tag{3.102}$$

Следовательно, t^* является равновесием Нэша в игре $G(\overline{M})$. ■

Монотонность по Маскину. Что мы можем сказать о том, какие функции общественного выбора можно Нэш-реализовать при помощи какого-то механизма? Дадим такое определение.

Определение 3.9. Правило общественного выбора f является *монотонным*, если для любых $t, t' \in T$ таких, что $c = f(t) \neq f(t')$, существует игрок i и исход $b \in C$, такие, что

$$\overline{u}_i(c, t_i) \geqslant \overline{u}_i(b, t_i) \quad \text{и} \quad \overline{u}_i(c, t'_i) < \overline{u}_i(b, t'_i). \tag{3.103}$$

Иными словами, если при изменении профилей типов меняется исход, который предписан функцией общественного выбора, то должно быть так, что по крайней мере для одного из игроков предписываемый ранее исход стал менее предпочтительным относительно какого-то другого варианта. Это свойство получило названия монотонности по Маскину, по имени Эрика Маскина, нобелевского лауреата. Им же [Maskin, 1977, 1985] был доказан такой результат:

Теорема 3.3. *Пусть f — Нэш-реализуемое правило общественного выбора. Тогда f является монотонным.*

Доказательство. Пусть правило f является Нэш-реализуемым при помощи механизма $M = \langle A, g \rangle$, причем $f(t) = c$ и $f(t') \neq c$ для некоторых $t, t' \in T$. Тогда профиль действий $a \in A$, такой что $g(a) = c$, реализуется в равновесии в игре $G(M)$ при типах игроков t, т.е.

$$\overline{u}_i\big(g(a_i, a_{-i}), t_i\big) \geqslant \overline{u}_i\big(g(a'_i, a_{-i}), t_i\big) \tag{3.104}$$

для всех i и для всех $a'_i \in A_i$. Однако a не является равновесием в игре $G(M)$ при типах игроков t', ибо $f(t') \neq f(t) = c$. Значит, хотя бы для одного i существует $a'_i \in A_i$, такой, что

$$\overline{u}_i\big(g(a_i, a_{-i}), t'_i\big) < \overline{u}_i\big(g(a'_i, a_{-i}), t'_i\big). \tag{3.105}$$

Следовательно, f является монотонным. ■

Достаточные условия Нэш-реализуемости механизма. Монотонность является необходимым условием Нэш-реализуемости механизма. Насколько сильными являются дополнительные условия, обеспечивающие достаточность? Оказывается, что функция общественного выбора должна удовлетворять следующему условию:

Определение 3.10. Пусть f — функция общественного выбора. Пусть $f(t) = c$, если $\overline{u}_i(c, t_i) > \overline{u}_i(c', t_i)$ для всех $c' \in C$ и для всех игроков, кроме (возможно) одного. Будем говорить, что f обладает *свойством отсутствия вето*.

Был доказан следующий результат.

Теорема 3.4. *Пусть f монотонна и обладает свойством отсутствия вето. Тогда она Нэш-реализуема.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в учебнике Осборна и Рубинштейна [Osborne, Rubinstein, 1994, p. 187–189].

Пример. Соломонов суд. Библейская легенда о суде мудрого царя Соломона — ранний и очень известный пример попытки решить задачу дизайна механизма:

> Мудрость свою Соломон показал прежде всего на суде. Вскоре по воцарении его пришли к нему на суд две женщины. Они жили в одном доме, и у каждой было по младенцу. Ночью одна из них своего младенца задавила и подложила его к другой женщине, а живого у той взяла себе. Утром женщины стали спорить: «Живой ребенок мой, а мертвый твой», говорила каждая. Так спорили они и пред царем. Выслушав их, Соломон приказал: «Принесите меч». И принесли меч к царю. Соломон сказал: «Рассеките живого ребенка пополам и отдайте половину одной и половину другой». Одна из женщин при этих словах воскликнула: «Отдайте лучше ей младенца, но не убивайте его!» Другая же, напротив, говорила: «Рубите, пусть не достанется ни ей, ни мне». Тогда Соломон сказал: «Не убивайте ребенка, а отдайте его первой женщине: она его мать». Народ услышал об этом и стал бояться царя, потому что все увидели, какую мудрость дал ему Бог. [Ветхий Завет: Третья книга Царств, гл. 3, ст. 16–28].

Попробуем формализовать задачу, стоявшую перед Соломоном. Итак, к царю пришли две женщины. Одна из них — мать ребенка. Возможны два состояния природы: $T = \{1, 2\}$, где $t = i$ означает, что i-я женщина является матерью[11].

[11] В этой задаче мы отступаем от предположения о том, что типы игроков распределены независимо. У каждого игрока два типа, но в первом состоянии природы оба игрока имеют тип 1, во втором состоянии оба игрока имеют тип 2. Однако теорема 3.3 не требует независимости типов игроков.

Всего возможны три исхода судебного спора: $C = \{0, 1, 2\}$, где $c = i > 0$ означает, что ребенок отдан i-й женщине, $c = 0$ — ребенок разрублен пополам. Функция общественного выбора, которую необходимо реализовать, такова: $f(t) = t$.

Предположим, что предпочтения женщин таковы:

$$\begin{aligned} t = 1\textbf{:}\quad & \overline{u}_1(1,1) > \overline{u}_1(2,1) > \overline{u}_1(0,1),\;\; \overline{u}_2(2,1) > \overline{u}_2(0,1) > \overline{u}_2(1,1); \\ t = 2\textbf{:}\quad & \overline{u}_1(1,2) > \overline{u}_1(0,2) > \overline{u}_1(2,2),\;\; \overline{u}_2(2,2) > \overline{u}_2(1,2) > \overline{u}_2(0,2). \end{aligned}$$

т.е. каждая женщина больше всего хочет, чтобы ребенка оставили ей. При этом наихудший вариант для настоящей матери — гибель ребенка, а для обманщицы — проигрыш в суде.

Легко убедиться, что свойство монотонности по Маскину в этой задаче не выполняется. Пусть $t = 1$ и $c = f(t) = 1$. Свойство монотонности будет выполняться, если для $t' = 2$ существует какое-то $b \in C$, такое, что $\overline{u}_i(c, t) \geqslant \overline{u}_i(b, t)$ и $\overline{u}_i(c, t') < \overline{u}_i(b, t')$ для какого-нибудь $i = 1, 2$. Иначе говоря, игрок i предпочитал альтернативу c какой-то другой альтернативе b, но потом (в состоянии природы t_2) альтернатива b стала нравиться ему больше. Легко убедиться, что это условие не выполняется.

Более наглядно в этом можно убедиться, ограничив внимание прямыми механизмами, в которых Соломон требует каждую женщину назвать свой тип: $A_i = \{1, 2\}$ (мы имеем право так сделать, исходя из принципа выявления). Механизмом в данном случае будет игра 2×2, в которой при каждой паре стратегий $s_1, s_2 \in A_1 \times A_2$ реализуется один из элементов C. При этом в случае $t = 1$ в равновесии мы должны иметь $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, а при $t = 2$, наоборот, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Можно проверить, что такую игру построить нельзя.

Почему же в библейском примере царю Соломону удалось принять справедливое решение? Очевидно из-за того, что обманщица просто не догадалась (или не смогла) имитировать реакцию настоящей матери на предложение разрубить ребенка пополам! Так она смогла бы избежать наихудшего для себя исхода, а царь Соломон был бы поставлен в неловкое положение. Мудрость Соломона заключалась не в умении выстраивать механизмы (что в данном случае, как мы видим, ему не помогло бы), а в умении прогнозировать и различать человеческие эмоции.

Пример. Раздел имущества. В своей популярной книге «Взаимовыгодное решение» политолог Стив Брамс и математик Алан Тейлор описывают различные механизмы раздела имущества — например, при бракоразводном процессе или при заключении мирного соглашения между двумя воющими сторонами. Задача дизайна механизма в таких случаях возникает, как мы говорили, из-за того, что делимое имущество неоднородно: у разных сторон могут быть разные оценки предметов, подлежащих разделу. Авторы выделили три критерия, которым должна отвечать процедура раздела.

Во-первых, это критерий отсутствия зависти. Не должно быть такого, чтобы одной из сторон казалось, что для каждого предмета, которой достался ей в результате дележа, существует предмет, который нравится ей еще больше и который достался другой стороне. Этому критерию не удовлетворяет «балансированное чередование», когда две стороны по очереди берут по одному предмету из общей кучи. Если у обеих сторон одинаковые предпочтения, то вторая сторона будет завидовать первой. Во-вторых, это критерий справедливости. Выигрыш одной стороны после дележа не должен быть намного больше, чем выигрыш другой стороны. «Разделяй и выбирай» — классический способ раздела — не отвечает этому критерию. Согласно этому правилу одна из двух сторон делит все имущество на две кучи; вторая сторона выбирает, какую из куч взять себе, а какую — оставить первой стороне. Если первой стороне известны предпочтения второй, то она должна предложить дележ, который максимизирует выигрыш второй кучи для первой стороны, при условии, что ценность первой кучи для второй стороны равна 51%. В реальной жизни, такая эксплуататорская стратегия раздела может породить обратную реакцию. Видя, как его предпочтениями пытаются манипулировать, вторая сторона может поступить «назло» и взять худшую (со своей точки зрения) кучу, только для того, чтобы отомстить первой стороне за попытку получить слишком большой куш. По словам авторов, консультировавших юристов, подобная логика принятия решений при бракоразводных процессах возникает очень часто.

В-третьих, дележ должен быть эффективным. Не должно существовать способа поделить предметы так, чтобы увеличить выигрыш одной стороны, не снижая выигрыша другой. Если используется способ «разделяй и выбирай», но первая сторона не знает предпочтения второй, то, скорее всего, дележ будет неэффективным.

Авторы доказали, что если сторон всего две, то существует способ, удовлетворяющий всем трем перечисленным выше критериям. Согласно предложенному механизму, дележ начинается с того, что каждая сторона заявляет, во сколько баллов (из 100 возможных в сумме) она оценивает каждый предмет. При определенном способе раздела, основанном на заявленных сторонами значениях, доминирующей стратегией для каждой стороны является заявить свои истинные предпочтения. Авторы успешно используют это теоретическое знание в юридической практике, консультируя в реальных спорах о разделе имущества.

3.2.3. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ В ДОМИНИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЯХ

В первой главе было дано определение *равновесия в доминирующих стратегиях* — такого профиля стратегий, что для каждого игрока его равновесная стратегия доминирует все остальные его стратегии. Такие равновесия существуют не во всех играх; этому свойству удовлетворяет, например, «дилемма заключенного», но не координационная игра. Посмотрим, в каких случаях мы можем требовать от функции общественного выбора, чтобы ее значения реализовывались через такие равновесия.

Определение 3.11. Механизм M *реализует в доминирующих стратегиях* правило общественного выбора f, если для всех $t \in T$ мы имеем $g(s^*(t)) = f(t)$, где s^* — равновесие в слабо доминирующих стратегиях в игре $G(M)$.

Очевидно, что здесь тоже действует принцип выявления: если какой-то механизм реализует правило общественного выбора в доминирующих стратегиях, то существует прямой механизм, реализующий то же правило в доминирующих стратегиях. Формулировка и доказательство этого утверждения эквивалентны теореме 3.2, с одной лишь разницей: реализуемость в доминирующих стратегиях предполагает, что неравенство (3.100) должно выполняться для всех $a_{-i} \in A_{-i}$, а не только для $s^*_{-i}(t_{-i})$.

Реализуемость в доминирующих стратегиях — очень желанное качество механизма и функции общественного выбора. Ведь если это требование выполняется, то в любом состоянии t каждый из игроков i будет максимизировать свой выигрыш, правдиво называя свой тип t_i, причем ему будет все равно, играют ли другие игроки свои равновесные стратегии, или нет.

Как мы сейчас убедимся, реализуемость в доминирующих стратегиях есть сильное требование, которое выполняется далеко не всегда. Дадим такое определение:

Определение 3.12. Пусть f — функция общественного выбора. Пусть существует такой игрок i, что для всех $t \in T$, для всех $c' \in C$ мы имеем $\overline{u}_i(f(t), t_i) \geqslant \overline{u}_i(c', t_i)$. Тогда функция f называется *диктаторской*, а игрок i — *диктатором*.

Диктаторская функция общественного выбора всегда реализует наилучшую альтернативу какого-то одного игрока, называемого диктатором. Следующая теорема является фундаментальным результатом в теории игр. Эта теорема (называемая по работам Гиббарда [Gibbard, 1973] и Саттерсуэйта [Satterthwaite, 1975], в которых она была доказана) утверждает, что в общем случае — когда множество типов игроков достаточно велико — реализуемость в доминирующих стратегиях можно ожидать только от диктаторских функций общественного выбора.

Теорема 3.5. *Пусть f — функция общественного выбора. Пусть верно следующее*:

1. $|C| \geqslant 3$.
2. *Для любого i и для любой функции $\psi\colon C \to \mathbb{R}$ существует $t_i \in T_i$, такой, что для всех $c, c' \in C$ мы имеем $\overline{u}_i(c, t_i) \geqslant \overline{u}_i(c', t_i)$ тогда и только тогда, когда $\psi(c) \geqslant \psi(c')$.*

3. *Для любого* $c \in C$ *существует такой* $t \in T$, *что* $f(t) = c$.

4. *Функция* f *реализуема в доминирующих стратегиях.*

Тогда функция f *является диктаторской.*

Первое требование гласит, что альтернатив должно быть больше двух. Если их всего две, то задача дизайна механизма существенно упрощается. Пусть, например, существуют две альтернативы — A и B. Мы можем реализовать следующую функцию: всегда выбирать ту альтернативу, которую строго предпочитает большее число игроков (а при равных числах выбирать альтернативу A). Легко убедиться в том, что такая функция общественного выбора реализуется в доминирующих стратегиях при помощи правила простого большинства: мы спрашиваем каждого игрока его голос («за A», «за B» или «воздержался»), складываем голоса за каждую альтернативу и объявляем победителя (а в случае ничьей — объявляем победителем альтернативу A).

Согласно второму требованию, у нас не может быть ограничений на предпочтения игроков. Это означает то, что для любых трех альтернатив A, B и C и для любого игрока i при разных типах этого игрока возможны все порядки предпочтений на этих трех альтернативах. Иначе, конечно же, задача дизайна механизма существенно упрощается. Совсем простой пример нарушения этого требования — когда у нас все игроки всегда предпочитают одну и ту же альтернативу всем остальным; но существуют и более реалистичные ситуации, когда функция общественного выбора реализуема из-за того, что игроки обладают специфичными предпочтениями (см. рассмотренную ниже задачу).

Третье требование этой теоремы необходимо для того, чтобы исключить тривиальные функции общественного выбора. Действительно, если для всех типов игроков функция предписывает выбирать одну и ту же альтернативу x, то такая функция будет реализована при помощи столь же тривиального механизма, предписывающего выбирать x вне зависимости от действий игроков. Мы же хотим, чтобы разные профили предпочтений игроков обязывали нас реализовывать разные решения.

Доказательство этой теоремы использует другой знаменитый результат в теории игр и теории общественного выбора — теорему Эрроу о диктаторе. Формулировка теоремы Эрроу содержится в приложении к данной главе.

Пример. Принятие коллективных решений путем опроса.

Вот задача, поставленная Муленом [Moulin, 1980]. Необходимо принять решение, учитывающее интересы нечетного числа N человек. Пусть множество возможных решений — единичный отрезок $C = [0, 1]$. Множество типов для каждого человека $i = 1, \ldots, N$ — также единичный отрезок $T_i = [0, 1]$. Пусть выигрыш человека i в том случае, если реализовано решение $c \in C$, равен

$$\overline{u}_i(c, t_i) = -\psi(|c - t_i|), \tag{3.106}$$

где $\psi(\cdot)$ — какая-то возрастающая функция. То есть мы предполагаем, что каждый $i = 1, \ldots, N$ обладает однопиковыми предпочтениями на множестве C, где t_i — его наилучшая альтернатива. Это предположение, как мы помним по предыдущим примерам, лежит в основе многих моделей как в политологии (C — множество политических программ), так и в экономике (C — множество способов произвести горизонтально дифференцированый товар).

Согласно принципу выявления, каждому механизму, Нэш-реализующему какую-то функцию общественного выбора $f\colon [0,1]^N \to [0,1]$, должен соответствовать прямой механизм $g\colon [0,1]^N \to [0,1]$, т.е. правило, согласно которому мы просим каждого человека назвать его тип $t_i \in [0,1]$, а затем на основании сделанных заявлений принять решение.

Предположим, что мы хотим, чтобы принятое решение было равно медианному значению наилучших альтернатив. Функции выигрышей игроков (3.106) не выполняют второго требования теоремы 3.5 — т.е. мы в принципе не можем иметь, например, $\overline{u}_i(a,t_i) < \overline{u}_i(b,t_i) < \overline{u}_i(c,t_i)$ при $b < a < c$. Поэтому теорема Гиббарда–Саттерсуэйта здесь не действует, и это дает надежду на то, что функция общественного выбора $f(t) = \mathrm{med}(t_i)$ может быть реализуема в доминирующих стратегиях. В задаче 3.3 предлагается доказать, что это можно сделать при помощи медианного механизма $g(t) = \mathrm{med}(t_i)$.

Пример. Механизм Викри–Гровса–Кларка. Предположим, что выигрыш каждого из N человек определяется тремя вещами: объемом произведенного общественного блага k, собственным типом t_i и денежным трансфером m_i, который может быть как положительным, так и отрицательным [12]. Пусть

$$\overline{u}_i = v_i(k, t_i) + m_i. \tag{3.107}$$

Такие функциональные формы в экономической теории называются *квазилинейными* [13]. В нашем случае выигрыш игрока квазилинеен по m_i, из чего следует, что m_i не влияет на то, какое k максимизирует v_i при данном t_i. Пусть $k(t)$ — социально оптимальный объем производства общественного блага для данного t:

$$k(t) = \arg\max_k \sum_{i=1}^{N} v_i(k, t_i). \tag{3.108}$$

Наша задача — добиться того, чтобы общественное благо производилось в социально оптимальном объеме. Следуя принципу выявления, мы

[12] Этот механизм был предложен независимо Викри [Vickrey, 1961], Гровсом [Groves, 1973] и Кларком [Clarke, 1971].

[13] Функция $f(x, y_1, \ldots, y_k)$ является квазилинейной по x, если $f(x, y_1, \ldots, y_k) = v(y_1, \ldots, y_k) + \alpha x$ для некоторого $\alpha \neq 0$ и некоторой функции $v(\cdot)$.

можем ограничиться прямым механизмом, при котором мы спрашиваем у каждого игрока его тип t_i. После этого мы должны произвести общественное благо в объеме $k(t)$. Трансфер m_i, получаемый каждым игроком, может также зависеть от типов $t = (t_1, \dots, t_N)$, сообщаемых игроками. Можно ли поставить трансферы в такую зависимость от сообщаемых игроками типов, чтобы для каждого игрока было доминирующей стратегией правдиво сообщать свой тип?

Механизм Викри–Гровса–Кларка предполагает следующие трансферы:

$$m_i(t) = \sum_{j \neq i} v_j(k(t), t_j) + \theta_i(t_{-i}), \tag{3.109}$$

где θ_i — некоторая функция от t_{-i}. При применении этого механизма выигрыш каждого игрока i складывается из двух частей. Во-первых, это $\sum_{j=1}^{N} v_j(k(t), t_j)$, т.е. суммарный выигрыш всех игроков от общественного блага, причем предполагается, что объем производства общественного блага оптимален при условии, что все остальные игроки правдиво сообщили свои типы t_{-i}. Во-вторых, он дополнительно некоторым образом зависит от t_{-i}. В такой ситуации для игрока i правдиво сообщить свой тип будет доминирующей стратегией.

Допустим, что это не так и существует некоторый $t'_i \neq t_i$, который игрок с типом t_i сочтет выгодным сообщить. Это означает, что для некоторого t_{-i} верно

$$\sum_{i=1}^{N} v_i(k(t), t_i) + \theta_i(t_{-i}) < \sum_{i=1}^{N} v_i(k', t_i) + \theta_i(t_{-i}), \tag{3.110}$$

где $k' = k(t'_i, t_{-i})$. Этого, однако, не может быть, так как согласно (3.108) $k(t)$ определялся как социально оптимальный объем производства общественного блага для данного t.

К сожалению, мы не можем ожидать, что этот механизм будет удовлетворять условию *сбалансированности бюджета*:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{3.111}$$

Грин и Лаффонт [Green, Laffont, 1979] показали, что это условие может удовлетворяться только для весьма ограниченного класса функций $v_i(k, t_i)$. Можно построить пример таких функций выигрышей v_i, при которых (3.111) не будет выполняться ни при каких t_i. Таким образом, механизм не будет бесплатным: для того, чтобы добиться социально оптимального производства общественного блага, обязательно придется доплачивать игрокам из внешних источников или, наоборот, списывать с них лишнее.

Рассмотрим такой пример. Пусть $N = 2$ и $v_i(k, t_i) = t_i\sqrt{k} - \frac{k}{4}$. Тогда получается, что

$$k(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2. \tag{3.112}$$

В механизме Викри–Гровса–Кларка мы должны иметь

$$\begin{aligned} m_1 &= t_2\sqrt{k(t_1, t_2)} - \frac{k(t_1, t_2)}{4} + \theta_1(t_2), \\ m_2 &= t_1\sqrt{k(t_1, t_2)} - \frac{k(t_1, t_2)}{4} + \theta_2(t_1), \end{aligned} \tag{3.113}$$

откуда

$$m_1 + m_2 = \frac{(t_1 + t_2)^2}{2} + \theta_1(t_2) + \theta_2(t_1). \tag{3.114}$$

Легко убедиться в том, что не существует функций θ_1, θ_2, обеспечивающих $m_1 + m_2 = 0$ при всех t_1, t_2. Действительно, достаточно продифференцировать $m_1 + m_2$ по t_1. Мы получим, что $2\,(t_1 + t_2) + \theta_2'(t_1) = 0$. Это выражение не может быть тождественно равно нулю ни при какой функции $\theta_2(\cdot)$.

3.2.4. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АУКЦИОНОВ

Зачем вообще товары продаются с аукционов? Если бы продавец точно знал, сколько каждый покупатель готов заплатить за его товар, то аукцион был бы не нужен. Было бы достаточно подойти к покупателю, который готов предложить самую большую цену, и продать товар именно ему — по максимальной цене, которую этот покупатель готов заплатить. Но души покупателей не прозрачны для глаз продавцов. Глядя в глаза пришедшему по моему объявлению о продаже садового участка человеку, я не могу понять, сколько именно он готов выложить. Это — его частная информация. Ценность участка для покупателя зависит от его вкусов, места проживания, другой его собственности — т.е. от вещей, мне неизвестных. Мало того, если я спрошу его, сколько он готов заплатить за мой участок, то потенциальный покупатель, скорее всего, соврет. Он назовет цену, более низкую, чем его истинная оценка, если он будет знать, что именно по этой цене я готов продать ему участок. Единственное, что его сдерживает — это то, что может найтись другой покупатель, который предложит более высокую цену. Итак, налицо игра с неполной информацией между несколькими покупателями, исходом которой является факт продажи (или непродажи) предмета, и продажная цена.

Перед вами стоит задача дизайна механизма продажи имеющегося у вас товара. Существуют два критерия, по которым можно оценивать, насколько хорошо работает каждый отдельно взятый механизм: ожидаемый доход продавца и эффективность (т.е. достается ли продаваемый товар покупателю, имеющему наибольшую оценку). Первый критерий преобладает при устройстве аукционов, на которых продаются товары частных продавцов (например, предметы искусства), а также закупочных аукционов. Второй критерий преобладает при продаже государством лицензий: экономике страны в целом будет выгодно, если, например, право на разработку нефтяного месторождения достанется фирме с наименьшими издержками.

С решениями этих и похожих задач связана теория аукционов — важная и бурно развивающаяся область экономической науки, уже успевшая дать миру нескольких нобелевских лауреатов. Даже краткий обзор литературы в этой области лежит за пределами возможностей данного учебника; желающие могут прочитать книги Кришны [Krishna, 2009], Милгрома [Milgrom, 2004] или Клемперера [Klemperer, 2004].

Описание некоторых типов аукционов. Начнем с того, что перечислим основные виды аукционных механизмов.

Аукцион с повышением цены (или английский аукцион). Спросите у обывателя: что он представляет себе в первую очередь при слове «аукцион»? Скорее всего, ваш собеседник скажет вам, что видит перед собой переполненный зал. Солидные покупатели в котелках сидят на обитых кожей стульях и потягивают сигары. Продавец, стоя лицом к публике и держа в правой руке молоток, выкрикивает последнюю ставку: «Пятьсот долларов раз... Пятьсот долларов два...» И вот один из джентльменов в зале поднимает руку и произносит: «Пятьсот пятьдесят!»

Именно таким образом до сих пор устроена продажа большинства товаров — например, этим правилом пользуются знаменитые аукционные дома Сотби и Кристи. Продавец объявляет стартовую цену (ниже которой продать товар будет нельзя). Каждый покупатель может объявить более высокую, чем текущая, цену; товар продается после того, как желающих поднимать цену больше не осталось. Покупателем является тот, кто назвал самую высокую цену (которую он в итоге и заплатит). В том случае, когда продается не предмет, которым можно пользоваться, а обязательство выполнить какую-либо работу (например, при распределении строительных контрактов), цена в ходе торговли понижаетя, пока не остается одного генерального подрядчика, готового выполнить работу за наименьшую названную цену.

Аукцион со снижением цены (или голландский аукцион). Альтернативный способ продавать товар «с молотка» — объявить за продаваемый товар очень высокую стартовую цену, затем постепенно снижать ее, пока не найдется покупатель, готовый купить товар по названной цене. Этот вид аукциона использовался в Голландии при продаже луковиц тульпана во время знаменитой «тюльпаномании» — пузыря на рынке этих цветов в первой половине XVII века.

Аукцион первой цены. Каждый покупатель, участвующий в аукционе, делает одну заявку в тайне от остальных покупателей. Тот, чья заявка была выше, объявляется победителем; при этом он уплачивает цену, указанную в его заявке.

Аукцион второй цены. Как и при аукционе первой цены каждый покупатель, участвующий в аукционе, делает одну тайную заявку. Тот, чья заявка была выше, объявляется победителем; но при этом он уплачивает цену, указанную в *следующей* заявке. Как мы уже убедились в первой главе (см. с. 16), в таком аукционе каждый участник имеет доминирующую стратегию: заявить свою истинную оценку продаваемого товара. Для случая, когда продается один товар, а оценки покупателей статистически независимы, этот вид аукциона также известен как «аукцион Викри», по имени нобелевского лауреата Уильяма Викри.

Насколько сильно будут отличаться результаты этих четырех аукционов? Легко убедиться в том, что аукцион первой цены и голландский аукцион на самом деле приведут нас к одному и тому же результату. Например, представим себе, что вы хотите купить картину, которая продается при помощи голландского аукциона. Допустим, вы желаете остаться инкогнито и ваши интересы на аукционе представляет адвокат. Какие инструкции вы ему оставите? Вам достаточно сообщить ему всего одну цифру — цену, при которой следует остановить торговлю. Инструкции для участия в аукционе первой цены будут выглядеть так же: цена, которую нужно указать в заявке. При одинаковых инструкциях результаты двух аукционов будут одинаковы. Например, если при голландском аукционе покупатели решили остановить торговлю на 1000, 800 и 500 долл., то товар будет продан за 1000 долл. покупателю, сделавшему такую заявку. Если при аукционе первой цены заявки равны 1000, 800 и 500 долл., то товар также будет продан покупателю, указавшему в заявке 1000 долл., по той же цене. Будем говорить, что аукцион первой цены *стратегически эквивалентен* голландскому аукциону.

Можно ли провести те же параллели между аукционом второй цены и английским аукционом? И да, и нет. Стратегию торговли на английском аукционе можно формулировать по-разному. Однако при данных стратегиях остальных каждому отдельно взятому покупателю будет выгодно поднять цену, если названная цена ниже его оценки и если последним цену поднимал другой покупатель. Таким образом, стратегию покупателя можно свести к одной-единственной цифре — сумме, при которой стоит прекращать торговлю. Легко убедиться, что результат английского аукциона будет эквивалентен результату аукциона второй цены, если суммы, при которых покупатели прекращают торговлю в английском аукционе, равны заявкам, сделанным в аукционе второй цены. Данное утверждение, однако, верно только в том случае, когда каждому покупателю известна собственная оценка продаваемого товара.

Предположим, что это не так. Пусть данному покупателю неизвестна даже собственная оценка продаваемого товара; перед аукционом он получает некоторый сигнал относительно этой величины. Такая ситуация может возникнуть, например, при продаже прав на разработку месторождения полезных ископаемых. Каждая фирма, участвующая в тендере, провела геологоразведку и, как следствие, имеет какой-то сигнал относительно доходности этого месторождения. Эти сигналы, очевидно, коррелированы. В таком случае оптимальная стратегия покупателя будет более сложной, чем «торговаться, пока цена не достигнет величины X». Ведь, наблюдая заявки других покупателей, можно получить дополнительную информацию о ценности продаваемого товара.

Дизайн оптимального аукциона для покупателей с конечным множеством типов. Вы разбирали старые вещи в прабабушкином шкафу, и обнаружили картину[14]. При ближайшем рассмотрении оказалось, что это полотно кисти Пабло Пикассо.

Вы объявили о своем желании продать эту картину. С вами связалось два покупателя, готовых ее купить. Из разговоров со специалистами вы поняли, что все потенциальные покупатели делятся на две категории: те, кто готов заплатить не более 3 млн долл., и те, кто готов заплатить не более 4 млн долл. Оценка покупателем картины — частная информация. Вы не можете, глядя ему в глаза, понять, сколько он готов отдать за эту картину. В противном случае вам оставалось бы найти покупателя с большей оценкой картины и продать картину именно ему по его максимальной цене. Но сейчас перед вами стоит непростая задача — выработать правила, которые принесут вам максимальный ожидаемый доход.

Принцип выявления гласит, что достаточно спросить каждого из покупателей, сколько — 3 или 4 млн долл. — он готов отдать за эту картину. Так что достаточно придумать правило, согласно которому вы будете решать, кому (и за какую цену) вы продадите картину, в зависимости от того, какие заявки поступили от двух покупателей.

Каким условиям должно удовлетворять ваше правило? Во-первых, вы не можете продать картину двум покупателям сразу (хотя, возможно, картина может и не быть продана). Во-вторых, это правило должно принуждать покупателей правдиво сообщать вам свою оценку продаваемой картины. Согласно принципу выявления любой результат, который можно реализовать в ходе аукциона, можно реализовать и в качестве равновесия в игре, в которой покупатели сообщают продавцу свои оценки стоимости продаваемого товара — при условии, что это равновесие правдивое.

[14] Взято из книги Бинмора [Binmore, 1992, p. 532–536].

Наконец, ваше правило должно максимизировать ожидаемую стоимость продажи картины.

Выигрыш нейтрального к риску покупателя при его участии в аукционе определяется двумя величинами: вероятностью, с которой он выиграет аукцион, и математическим ожиданим суммы, которую ему придется заплатить. Пусть p_H — вероятность того, что покупатель, оценивающий картину в 4 млн долл., станет победителем аукциона (при условии, что оба покупателя играют свои равновесные стратегии и что покупателю не известно, во сколько оценивает картину другой покупатель). Аналогично определим p_L — вероятность победы покупателя, оценивающего картину в 3 млн долл. Пусть c_H — ожидаемая сумма, которую заплатит покупатель с высокой оценкой картины. Будем считать, что c_H учитывает и возможность не выиграть аукцион. Например, если покупатель с вероятностью $1 - p_H = 0{,}5$ не побеждает, с вероятностью 0,25 побеждает и платит 3 млн долл., и с вероятностью 0,25 побеждает и платит 4 млн долл., то $c_H = 0 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}25 = 1{,}75$. Аналогично определим c_L для покупателя с низкой оценкой.

Выигрыш продавца равен математическому ожиданию суммы, которую заплатят покупатели. Покупателей двое, каждый из них с вероятностью θ готов заплатить 3 млн долл. и с вероятностью $1 - \theta$ готов заплатить 4 млн долл. Сумма, заплаченная обоими покупателями, равна

$$R = 2\,(1 - \theta)\,c_H + 2\,\theta\,c_L. \tag{3.115}$$

Величины c_H, c_L, p_H и p_L определяются правилами, по которым проходит аукцион. Какие существуют ограничения на эти четыре величины? Во-первых, это бюджетное ограничение. У нас всего одна картина. Следовательно, вероятность того, что ее приобретет покупатель, оценка которого неизвестна — т.е. равна $(1 - \theta)\,p_H + \theta\,p_L$ — не может превышать 0,5. Очевидно, что максимум, на что может рассчитывать покупатель с высокой оценкой — это с гарантией купить картину, если у второго покупателя оценка низкая, и купить картину с вероятностью 0,5, если оценка второго покупателя тоже высокая. Следовательно, $p_H \leqslant \theta + 0{,}5\,(1 - \theta)$. Аналогично, $p_L \leqslant 0{,}5\,\theta$, ведь мы хотим, чтобы покупатель с низкой оценкой приобретал картину только в том случае, если другой покупатель также имеет низкую оценку. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned} p_H &\leqslant 0{,}5\,(1 + \theta), \\ p_L &\leqslant 0{,}5\,\theta, \end{aligned} \tag{3.116}$$

так как условие $(1 - \theta)\,p_H + \theta\,p_L \leqslant 0{,}5$ вместе с (3.116) является избыточным.

Условия (3.116) описывают всю полноту исходов различных аукционов. Приведем несколько примеров.

1. Картина продается по фиксированной цене 4 млн долл. Тогда $p_L = 0$, $c_L = 0$, $p_H = \theta + 0{,}5\,(1-\theta) = 0{,}5\,(1+\theta)$, $c_H = 2\,(\theta+1)$.
2. Аукцион второй цены (он же аукцион Викри). Покупатели делают заявки. Затем тот покупатель, чья заявка была самая высокая, покупает картину по цене предыдущей заявки. Это дает нам (при условии, что заявки делаются правдиво) $p_L = 0{,}5\,\theta$, $p_H = 0{,}5\,(1+\theta)$, $c_L = 1{,}5\,\theta$, $c_H = 2+\theta$ (в таком аукционе делать правдивые заявки, как мы скоро убедимся, действительно является равновесной стратегией).
3. Модифицированный аукцион второй цены. Покупатели делают заявки. Затем тот покупатель, чья заявка была самая высокая, покупает картину по цене, равной среднему арифметическому цен двух заявок. Это соответствует $p_L = 0{,}5\,\theta$, $p_H = 0{,}5\,(1+\theta)$, $c_L = 1{,}5\,\theta$, $c_H = 2 + 1{,}5\,\theta$.

Второй набор ограничений связан с тем, что оба покупателя должны правдиво сообщить продавцу свои оценки продаваемой картины. Поэтому мы вводим условия *совместимости со стимулами*:

$$\begin{aligned} 4\,p_H - c_H &\geqslant 4\,p_L - c_L, \\ 3\,p_L - c_L &\geqslant 3\,p_H - c_H. \end{aligned} \tag{3.117}$$

В первом неравенстве левая часть соответствует выигрышу покупателя с оценкой 4 млн долл., если он сделает заявку 4 млн долл.; правая часть — если он сделает заявку 3 млн долл. Во втором неравенстве левая часть соответствует выигрышу покупателя с оценкой 3 млн долл., если он сделает заявку 3 млн долл.; правая часть — если его заявка будет 4 млн долл.

Кроме того, ожидаемый выигрыш покупателя каждого типа должен быть неотрицательным. Соответствующие ограничения — так называемые *условия участия* или *условия индивидуальной рациональности* — таковы:

$$\begin{aligned} 4\,p_H - c_H &\geqslant 0, \\ 3\,p_L - c_L &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Если, например, $4\,p_H - c_H < 0$, то покупатель с высокой оценкой просто пройдет мимо и не станет участвовать в аукционе.

Это позволяет нам формально описать задачу: максимизировать (3.115) при ограничениях (3.116)–(3.118). На первый взгляд это — довольно трудная задача линейного программирования. Однако ее можно существенно облегчить. Обратим внимание на ограничения (3.118). Очевидно, что одно из них должно удовлетворяться со знаком равенства. Предположим обратное. Допустим, что c_H, c_L, p_H, p_L максимизируют (3.115), причем $4\,p_H - c_H > 0$ и $3\,p_L - c_L > 0$. Возьмем $\varepsilon < \min\{4\,p_H - c_H, 3\,p_L - c_L\}$. Возьмем $c'_H = c_H + \varepsilon$, $c'_L = c_L + \varepsilon$. Мы видим, что ни ограничения (3.117), ни ограничения (3.118) при этом не нарушаются, но значение целевой функции R возрастает. Это противоречит предположению об оптимальности c_H и c_L.

Если одно из условий (3.118) выполняется как равенство, то одно из условий (3.117) тоже должно выполняться как равенство.

Действительно, мы имеем $3\,(p_H - p_L) \leqslant c_H - L \leqslant 4\,(p_H - p_L)$. Если оба неравенства выполняются строго, то можно увеличить выигрыш (увеличив c_H либо c_L в зависимости от того, какое из неравенств (3.118) выполняется со знаком равенства).

Можно легко убедиться, что

$$4\,p_H - c_H = 4\,p_L - c_L \tag{3.119}$$

и

$$3\,p_L - c_L = 0. \tag{3.120}$$

В обратном случае мы имеем противоречие. Действительно, пусть $4\,p_H - c_H = 0$ и $3\,p_L - c_L > 0$. Тогда $4\,p_L - c_L \leqslant 0$ в силу (3.117). Следовательно, $0 \geqslant 3\,p_L - c_L$, что противоречит изначальному предположению. Интуитивно это понятно: ограничение совместимости со стимулами должно жестко выполняться именно для того покупателя, который выше ценит продаваемый актив — ведь потенциальный выигрыш от вранья у него выше, чем у покупателя с низкой оценкой.

Уравнения (3.119) и (3.120) сильно упрощают задачу. Целевую функцию мы можем переписать как

$$G = 8\,(1 - \theta)\,p_H + 2\,(4\theta - 1)\,p_L, \tag{3.121}$$

подставив $c_L = 3\,p_L$ и $c_H = 4\,p_H - p_L$ в (3.115).

Нам нужно найти максимум функции (3.121) на множестве S, описываемом ограничениями (3.116). Если линейная функция максимизируется на многоугольнике, то решения почти всегда будут лежать в вершинах этого многоугольника. Возможны два случая.

$\theta \geqslant 0{,}25$: Максимум достигается в точке m на рис. 3.8. Соответственно, мы имеем $\widetilde{p}_H = 0{,}5\,(1+\theta)$, $\widetilde{p}_L = 0{,}5\,\theta$, $\widetilde{c}_H = 1{,}5\,\theta + 2$, $\widetilde{c}_L = 1{,}5\,\theta$. Выигрыш продавца составляет $\widetilde{R} = 8 - 2\,\theta$. Такой выигрыш достижим при модифицированном аукционе Викри.

$\theta \leqslant 0{,}25$: Максимум достигается в точке n на рис. 3.8. Соответственно, мы имеем $\widetilde{p}_H = 0{,}5\,(1+\theta)$, $\widetilde{p}_L = 0$, $\widetilde{c}_H = 2\,(\theta+1)$, $\widetilde{c}_L = 0$. Выигрыш продавца составляет $\widetilde{R} = 8 - 8\theta^2$. Такой выигрыш достижим при продаже дома по фиксированной цене 4 млн долл. При $\theta = 0{,}25$ в решении мы будем иметь $\widetilde{p}_H = 0{,}5\,(\theta+1)$ при любом $\widetilde{p}_L \in [0; 0{,}5\,\theta]$.

Мы получили так называемое *второе наилучшее* решение задачи аукционера. Выигрыш акционера максимизируется, если учитывается тот факт, что оценки продаваемого товара покупателями остаются частной информацией, и ни один из покупателей не может быть принужден к участию

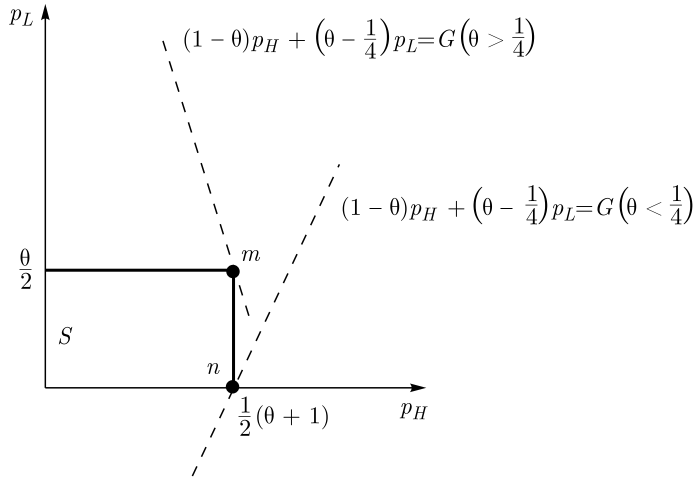


Рис. 3.8. Множество допустимых p_H, p_L и решение задачи в зависимости от θ

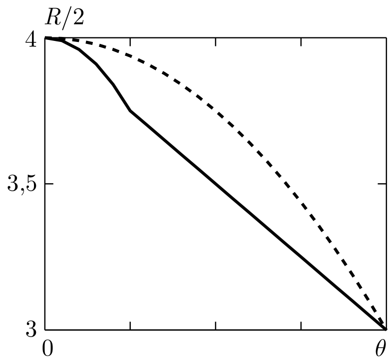


Рис. 3.9. Выигрыш продавца в идеальном случае (пунктирная линия) и в наилучшем реализуемом случае (сплошная линия)

в аукционе. Выигрыш в *первом наилучшем* случае, когда товар всегда продается покупателю с наибольшей оценкой по максимальной цене, составляет $R^* = 8 - 2\theta^2$. На рис. 3.9 показаны выигрыши в первом и втором наилучшем случае.

Как мы видим, разница в выигрышах максимальна в том случае, когда вероятность θ равна 0,5, т.е. когда неопределенность относительно типа покупателя максимальна.

Аукцион первой цены с континуумом типов. Выше мы рассмотрели задачу дизайна аукциона. Вы продавали картину, на которую претендовали два типа покупателей. Решением задачи стало оптимальное правило продажи картины в зависимости от распределения оценок среди покупателей. Однако насколько предположение о наличии только двух видов покупателей соответствует действительности? На самом деле это предположение означает, что продавцу известно довольно много: покупатель может быть готов заплатить *либо* 3 млн долл., *либо* 4 млн долл., но не копейкой больше или меньше. Что еще важнее, мы предположили, что то же самое известно и самим покупателям.

Обычно продавец не может рассчитывать на то, что покупатель обязательно будет обладать одним из двух или нескольких типов. Более вероятно, что его оценка может принимать любое значение; в таком случае при моделировании аукциона мы предположим, что множество оценок является отрезком, а представления продавца о типах покупателей описываются функцией распределения на этом отрезке.

Предположим, что в аукционе первой цены участвуют N покупателей. Пусть у каждого покупателя оценка продаваемого товара известна ему одному. С точки зрения других покупателей, она равномерно распределена на промежутке $[0,1]$. Найдем равновесные стратегии покупателей, т.е. зависимость покупателя от его оценки.

Пусть $b_i(v_i)$ — стратегия покупателя i. Предположим, что $b_i(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые и строго возрастающие фунции. Будем считать, что покупатели нейтральны к риску. Тогда для данного значения v_i выигрыш покупателя i равен

$$\widetilde{u}_i = (v_i - b_i(v_i))\,\mathsf{P}\big(b_i(v_i) > \max_{j\neq i} b_j(v_j)\big) = \\ = (v_i - b_i(v_i))\prod_{j\neq i}\mathsf{P}(b_i(v_i) > b_j(v_j)). \quad (3.122)$$

Эта величина равна вероятности того, что оценка покупателя окажется наибольшей (и, соответственно, что покупатель выиграет аукцион), помноженной на разницу между оценкой покупателя и его заявкой. Используя предположение о том, что $b_j(\cdot)$ являются строго возрастающими и что v_j равномерно распределены на $[0,1]$, получим

$$\widetilde{u}_i = (v_i - b_i(v_i))\prod_{j\neq i}\mathsf{P}(b_j^{-1}(b_i(v_i)) > v_j) = (v_i - b_i(v_i))\prod_{j\neq i} b_j^{-1}(b_i(v_i)). \quad (3.123)$$

Теперь сделаем предположение, что равновесие симметрично, т.е. для всех игроков $j \neq i$ мы имеем $b_j(\cdot) = b(\cdot)$. Для всех значений $v_i \in [0,1]$ мы должны найти, какая заявка покупателя $b_i(v_i)$ максимизирует его функцию выигрыша (3.123). Мы получим

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial b_i(v_i)} = (N-1)(v_i - b_i(v_i))\,\frac{db^{-1}(b_i(v_i))}{db_i(v_i)}\,[b^{-1}(b_i(v_i))]^{N-2} - \\ - [b^{-1}(b_i(v_i))]^{N-1} = 0 \quad (3.124)$$

для $v_i \in [0,1]$. Эта величина отражает то, насколько изменится выигрыш $\widetilde{u}_i$ игрока i (имеющего оценку v_i) при изменении его заявки $b_i(v_i)$. Наша задача — найти симметричное равновесие. В таком равновесии условие

(3.124) будет выполняться, если функции заявок всех игроков одинаковы. Далее, предполагая $b_i(\cdot) = b(\cdot)$ в (3.124), мы получим

$$(N-1)(v_i - b(v_i))\,\frac{db^{-1}(b(v_i))}{db(v_i)} = b^{-1}(b(v_i)). \tag{3.125}$$

Это выражение можно упростить. Так как $\dfrac{db^{-1}(b(v_i))}{db(v_i)} = \dfrac{1}{b'(v_i)}$ и $b^{-1}(b(v_i)) = v_i$, получим дифференциальное уравнение

$$v_i = (N-1)(v_i - b(v_i))\,\frac{1}{b'(v_i)}, \tag{3.126}$$

откуда следует

$$b'(v_i)v_i = (N-1)(v_i - b(v_i)). \tag{3.127}$$

Решением этого уравнения будет

$$b(v_i) = v_i\,\frac{N-1}{N}. \tag{3.128}$$

Таким образом, стратегии покупателей будут линейными относительно их оценок, причем при увеличении числа покупателей равновесная заявка каждого покупателя будет приближаться к его собственной оценке продаваемого товара.

Так как заявка $b(v_i)$ возрастает с оценкой, в аукционе побеждает покупатель с наибольшей оценкой. Вероятность победить в аукционе при собственной оценке v_i равна

$$p(v_i) = \mathsf{P}(v_i = \max_j v_j) = \prod_{j\neq i}\mathsf{P}(v_j \leqslant v_i) = v_i^{N-1}. \tag{3.129}$$

Математическое ожидание суммы, которую заплатит покупатель с оценкой v, равно вероятности того, что он окажется победителем аукциона, помноженной на его заявку:

$$c(v) = p(v)\,b(v) = v^N\,\frac{N-1}{N}. \tag{3.130}$$

Найдем теперь ожидаемый выигрыш продавца. Он, в свою очередь, равен сумме математических ожиданий платежей всех участвующих в аукционе игроков:

$$R = N\int\limits_0^1 c(v)\,dv = \frac{N-1}{N+1}. \tag{3.131}$$

Ожидаемый доход стремится к максимальной оценке (единице в нашем случае) при увеличении числа покупателей [15].

[15] Ожидаемый доход продавца можно получить и как математическим ожидание значения победившей заявки. Наибольшая оценка распределена следующим

Аукцион второй цены с континуумом типов. Итак, если оценки покупателей распределены равномерно на $[0, 1]$, то при каком из двух правил — аукционе первой или второй цены — вам удастся продать товар за бо́льшую цену?

Рассмотрим аукцион второй цены между N покупателями. Мы помним (см. пример на с. 16), что заявка в таком аукционе равна собственной оценке, так как это — слабо доминирующая стратегия: $b_i = v_i$. Так что в аукционе второй цены, как и в аукционе в первой цены, вероятность победы равна вероятности иметь самую высокую оценку среди всех покупателей:

$$p(v_i) = v_i^{N-1}. \tag{3.132}$$

Найдем ожидаемый платеж покупателя с оценкой v_i. Он равен произведению вероятности победить в аукционе и максимальной оценки среди остальных игроков при условии, что игрок i с оценкой v_i является победителем:

$$c(v_i) = p(v_i)\,\mathsf{E}\Big(\max_{j\neq i} v_j \,\Big|\, \max_{j\neq i} v_j \leqslant v_i\Big). \tag{3.133}$$

По условию задачи v_j равномерно распределена на $[0, 1]$ для всех j. Если нам дополнительно известно, что $v_j \leqslant v_i \leqslant 1$, то условное распределение v_j будет равномерным на $[0, v_i]$. Следовательно, условная функция распределения v_j будет

$$\mathsf{P}(v_j \leqslant x \mid v_j \leqslant v_i) = \frac{x}{v_i} \tag{3.134}$$

при $0 \leqslant x \leqslant v_i$. Условная функция распределения $\max\limits_{j\neq i} v_j$ будет

$$\mathsf{P}\big(\max_{j\neq i} v_j \leqslant x \,\big|\, \max_{j\neq i} v_j \leqslant v_i\big) = \frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}} \tag{3.135}$$

для $0 \leqslant x \leqslant v_i$. Найдем теперь условное математическое ожидание $\max\limits_{j\neq i} v_j$, т.е. следующей наибольшей после v_i заявки:

$$\mathsf{E}\big(\max_{j\neq i} v_j \mid \max_{j\neq i} v_j \leqslant v_i\big) = \int\limits_0^{v_i} x\, d\Big(\frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}}\Big) = \int\limits_0^{v_i} \frac{N-1}{v_i^{N-1}}\, x^{N-1}\, dx = v_i\,\frac{N-1}{N}. \tag{3.136}$$

Вместе с (3.132) это дает нам

$$c(v_i) = p(v_i)\, v_i\, \frac{N-1}{N} = v_i^N\, \frac{N-1}{N}. \tag{3.137}$$

образом: $\mathsf{P}\,(\max\limits_i v_i \leqslant x) = \prod_{i=1}^N \mathsf{P}\,(v_i \leqslant x) = x^N$. Отсюда мы получаем математическое ожидание наибольшей оценки: $\mathsf{E}\,(\max\limits_i v_i) = \int_0^1 x\, d\,(x^N) = N/(N{+}1)$. Так как $b(v_i) = (N{-}1)/N \cdot v_i$, то ожидаемый доход будет равен $R = (N{-}1)/N \times$ $\times\, \mathsf{E}\,(\max\limits_i v_i) = (N{-}1)/(N{+}1)$.

В аукционе второй цены как равновесные издержки покупателей $c(v)$, так и их равновесные выигрыши $p(v)\,v - c(v)$ будут такими же, как и в аукционе первой цены. Выигрыши продавца в обоих аукционах также будут одинаковы, так как они выводятся из функций $c(v)$ согласно (3.131). Получается, что с точки зрения исхода оба аукциона будут эквивалентны.

3.2.5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДОХОДОВ В АУКЦИОНАХ

Совпадение ожидаемых доходов (как продавцов, так и покупателей) в аукционах первой и второй цены была подмечена еще в основополагающей работе Викри [Vickrey, 1961]. Однако в дальнейшем было показано, что это — частный случай более общей закономерности. На самом деле выигрыши покупателей совпадают для многих аукционов. Этот результат, носящий название *теоремы об эквивалентности доходов*, является ключевым в теории аукционов и был впервые сформулирован в работах Майерсона [Myerson, 1981] и Райли и Сэмюэльсона [Riley, Samuelson, 1981].

Теорема 3.6. *Пусть в аукционе участвуют N покупателей, нейтральных к риску. Оценки покупателей v_i независимо и одинаково распределены на промежутке $[\underline{v}, \overline{v}]$ с ненулевой плотностью $f(v)$ и функцией распределения $F(v)$. Пусть для каждого из двух прямых аукционных механизмов в равновесии верно следующее*:

1. *Если $v_i > \max\limits_{j \neq i} v_j$, то товар достается покупателю i.*
2. *Если $v_i = \underline{v}$, то ожидаемый выигрыш покупателя i равен нулю.*

Тогда в этих двух аукционах ожидаемые выигрыши продавца и покупателя с данной оценкой v будут одинаковы.

Доказательство. Пусть $p_i(v)$ — вероятность того, что покупатель i с оценкой v станет победителем аукциона при условии, что все покупатели используют свои равновесные стратегии. Согласно предположению 1 мы имеем

$$p_i(v_i) = \mathsf{P}\big(\max_{j \neq i} v_j \leqslant v_i\big) = F^{N-1}(v_i) = p(v_i), \tag{3.138}$$

т.е. для любых двух аукционов, удовлетворяющих условиям теоремы, эти величины совпадают.

Обозначим через $S_i(v)$ выигрыш покупателя i с оценкой v. Согласно принципу выявления мы можем ограничиться рассмотрением прямых механизмов, в которых покупатель i в равновесии сообщает продавцу свою оценку v_i. Аукцион второй цены является таким прямым механизмом; в аукционе первой цены в равновесии заявка монотонно возрастает с оценкой, т.е. фактически покупатель также сообщает свою оценку продавцу.

Мы предполагаем, что покупатели нейтральны к риску. Следовательно, выигрыш покупателя i можно записать следующим образом:

$$S_i(v) = v\,p(v) - c_i(v), \tag{3.139}$$

где $c_i(v)$ — математическое ожидание суммы, которую покупатель i с оценкой v выплатит в ходе аукциона.

Если покупатель i с оценкой v сообщит продавцу, что его оценка равна $\widetilde{v}$, то его выигрыш будет

$$\widetilde{S}_i(v, \widetilde{v}) = v\, p(\widetilde{v}) - c_i(\widetilde{v}). \tag{3.140}$$

Согласно принципу выявления мы предполагаем, что в равновесии покупатель правдиво сообщает продавцу свою оценку. То есть функция $\widetilde{S}_i(v, \widetilde{v})$ достигает максимума по $\widetilde{v}$ при $\widetilde{v} = v$. Так как мы предполагаем, что распределение типов игроков имеет ненулевую плотность на $[\underline{v}, \overline{v}]$, то функция $p(v)$ является дифференцируемой. Тогда получим

$$\left.\frac{\partial \widetilde{S}_i(v, \widetilde{v})}{\partial \widetilde{v}}\right|_{\widetilde{v}=v} = v\, p'(v) - c_i'(v) = 0. \tag{3.141}$$

С другой стороны, из определения (3.139) мы имеем

$$S_i'(v) = v\, p'(v) + p(v) - c_i'(v). \tag{3.142}$$

Подставив (3.141) в (3.142), получаем

$$S_i'(v) = p(v). \tag{3.143}$$

Интегрируя (3.143), мы можем в явном виде выписать функцию выигрыша:

$$S_i(v) = S_i(\underline{v}) + \int\limits_{\underline{v}}^{v} p(x)\, dx. \tag{3.144}$$

Так как мы предполагаем, что $S_i(\underline{v}) = 0$, то выигрыш каждого покупателя зависит только от $p(v_i)$, т.е. он не зависит от аукционного механизма. Подставляя (3.138) в (3.144), мы выписываем функцию ожидаемого выигрыша для покупателя с оценкой v:

$$S(v) = \int\limits_{\underline{v}}^{v} F^{N-1}(x)\, dx. \tag{3.145}$$

Остается показать то же самое для ожидаемого дохода продавца R. Уравнения (3.144) и (3.138) дают нам ожидаемую сумму, которую платит покупатель с оценкой v:

$$c(v) = v\, p(v) - S(v) = v\, F^{N-1}(v) - \int\limits_{\underline{v}}^{v} F^{N-1}(x)\, dx. \tag{3.146}$$

Ожидаемый доход продавца равен сумме математических ожиданий этих величин:

$$R = N \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} c(x)\, dF(x). \tag{3.147}$$

Эта величина зависит только от функции распределения типов $F(v)$. Теорема доказана. ■

Пример. Аукцион первой цены формата «платят все». Используем теорему об эквивалентности для нахождения равновесных стратегий в следующем аукционе. Пусть N — число покупателей. Оценка v_i ценности продаваемого товара для каждого покупателя i равномерно распределена на промежутке $[0,1]$. Пусть b_i — заявка покупателя i. Пусть выигрыш покупателя i равен

$$\widetilde{u}_i = v_i\, \mathsf{P}\big(b_i(v_i) > \max_{j \neq i} b_j(v_j)\big) - b_i(v_i), \tag{3.148}$$

т.е. победителем аукциона объявляется игрок с максимальной заявкой, причем *все* игроки (в том числе и проигравшие) платят свои заявки.

Такие механизмы распределения ресурсов наблюдаются, например, при лоббировании. Допустим, что несколько желающих получить некий ресурс. Каждый соискатель прикладывает определенный объем усилий для его получения. Победитель — тот, кто приложил больше усилий. При этом проигравшие не получают компенсации за те усилия, которые они потратили[16].

Найдем равновесные стратегии в такой игре. Мы можем использовать теорему об эквивалентности доходов, так как, во-первых, игрок с нулевой заявкой получает гарантировано нулевой выигрыш и, во-вторых, игрок с наибольшей заявкой (и наибольшей оценкой) будет объявлен победителем и получит ресурс с вероятностью 1.

Уравнение (3.130) дает нам ожидаемую сумму, которую заплатит покупатель с оценкой v в аукционе первой цены, в котором N покупателей, и оценки каждого покупателя равномерно распределены на $[0,1]$. Согласно теореме об эквивалентности, это же уравнение должно давать нам ожидаемую сумму, которую заплатит покупатель и в аукционе первой цены «платят все». Поскольку в таком аукционе покупатель платит вне зависимости от того, победил он или нет, то эта величина и будет его

[16] Эта постановка похожа на задачу о борьбе за ренту, рассмотренную на с. 55. В отличие от задачи о борьбе за ренту мы предполагаем, что приложение наибольшего усилия гарантирует победу ($\gamma = \infty$), однако оценка каждого игрока является его частной информацией.

равновесной заявкой:

$$b(v) = v^N \frac{N-1}{N}. \tag{3.149}$$

Таким образом, мы решили задачу, не прибегая к решению дифференциальных уравнений, что было бы необходимо, если бы мы не знали теоремы об эквивалентности.

Аукционы с резервной ценой. Вы продаете картину, но хотите, чтобы сумма, заплаченная победителем аукциона, не была меньше, чем некоторая минимальная цена $r > 0$. Рассмотрим, как выигрыши покупателей и продавца в таком аукционе зависят от резервной цены r.

Пусть вы решили, что на аукционе должно действовать правило второй цены, с поправкой на минимальную цену r. Например, если покупателей всего двое и их заявки $b_1 \leqslant b_2 < r$, то картина не продается. Если их заявки $b_1 < r \leqslant b_2$, то покупатель 2 платит r. И если $r \leqslant b_1 < b_2$, то покупатель 2 платит b_1. Рассуждая аналогично задаче на с. 16, убедимся, что равновесные (по слабому доминированию) заявки будут $b_i = v_i$, как и при $r = 0$. Очевидно, что таких же стратегий покупатели будут придерживаться и при английском аукционе с повышением заявок: продолжать торговаться, пока текущая цена не превысит собственную оценку.

Пусть на картину претендуют всего N покупателей; оценка каждого равномерно распределена на $[0, 1]$. Какими будут ожидаемые выигрыши продавца и покупателей? Для решения этой задачи мы не можем использовать теорему об эквивалентности доходов и сказать, что выигрыши будут такими же, как и при отсутствии резервной цены. Причина тому — нарушение одного из условий теоремы об эквивалентности, а именно, что товар с вероятностью 1 достается покупателю с наибольшей оценкой. Если все оценки меньше, чем r, то товар не достанется никому.

Какая резервная цена принесет продавцу максимальный ожидаемый доход? С одной стороны, при высокой r велика вероятность, что картина останется непроданной. С другой, чем выше r, тем больше ожидаемая цена, которую заплатит победитель (если он будет).

Найдем ожидаемую сумму, выплачиваемую покупателем i с оценкой v_i. Она равна

$$c_i(v_i) = \mathsf{P}\big(v_i \geqslant \max_{j \neq i} v_j, v_i \geqslant r\big)\,\mathsf{E}\Big(\max\{\max_{j\neq i} v_j, r\} \mid v_i \geqslant \max_{j \neq i}, v_i \geqslant r\Big). \tag{3.150}$$

Эта сумма равна вероятности того, что покупатель станет победителем, помноженной на условное математическое ожидание выплачиваемой суммы. Выплачиваемая сумма равна максимуму из следующей набольшей заявки и r. Получим

$$\mathsf{P}\big(v_i \geqslant \max_{j \neq i} v_j, v_i \geqslant r\big) = \begin{cases} v_i^{N-1}, & v_i \geqslant r; \\ 0, & v_i < r. \end{cases} \tag{3.151}$$

Найдем условное математическое ожидание суммы, заплаченной победителем. Теперь эта величина не может быть меньше r. Мы имеем

$$\mathsf{E}\Big(\max\{\max_{j\neq i} v_j, r\} \;\Big|\; v_i \geqslant \max_{j\neq i}, v_i \geqslant r\Big) =$$

$$= r \cdot \frac{r^{N-1}}{v_i^{N-1}} + \int\limits_r^{v_i} x\, d\left(\frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}}\right) = \frac{r^N}{v_i^{N-1}} + \frac{N-1}{Nv_i^{N-1}}\left(v_i^N - r^N\right). \quad (3.152)$$

Здесь $\dfrac{r^{N-1}}{v_i^{N-1}}$ — вероятность того, что $\max\limits_{j\neq i} v_j \leqslant r$ при условии, что $v_i \geqslant \max\limits_{j\neq i} v_j$, т.е. это вероятность того, что игрок с оценкой $v_i > r$, победивший в аукционе, заплатит резервную цену r. Второе слагаемое — это математическое ожидание следующей наибольшей заявки в том случае, когда $\max\limits_{j\neq i} v_j$ превышает r. Таким образом,

$$c_i(v_i) = c(v_i) = \begin{cases} \dfrac{N-1}{N}\, v_i^N + \dfrac{r^N}{N}, & v_i \geqslant r; \\ 0, & v_i < r. \end{cases} \quad (3.153)$$

Как и в задаче с $r = 0$, ожидаемый выигрыш продавца будет равен сумме математических ожиданий платежей всех игроков:

$$R = N \cdot \int\limits_r^1 c(v)\, dv = r^N(1-r) + \frac{N-1}{N+1}\left(1 - r^{N+1}\right) =$$

$$= \frac{N-1}{N+1} + r^N\left(1 - \frac{2N}{N+1} r\right). \quad (3.154)$$

Максимизируем это выражение по r:

$$\frac{dR}{dr} = Nr^{N-1} - 2Nr^N = Nr^{N-1}(1 - 2\,r) = 0. \quad (3.155)$$

Получается, что выигрыш продавца максимизируется при

$$r^* = \frac{1}{2}. \quad (3.156)$$

При равномерно распределенных оценках приход дополнительного покупателя не влияет на оптимальную резервную цену. Важно ли, какой тип аукциона — первой или второй цены, или какой-то другой — выберет продавец при условии, что резервная цена одинакова для обоих аукционов? Нет, не важно: это следует из теоремы об эквивалентности доходов. Немного модифицируя теорему, можно показать, что во всех аукционах, в которых покупатель с наибольшей оценкой приобретает товар с вероятностью 1 при условии, что его оценка выше резервной, доходы покупателей и продавца одинаковы (см. задачу 3.16).

Интересное наблюдение можно сделать, сравнивая доходы продавца в аукционе с резервной ценой и без нее. Максимальный ожидаемый доход, который продавец получит при $r = 1/2$, составляет

$$R^* = \frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{2^N}\frac{1}{N+1}. \qquad (3.157)$$

Очевидно, что при увеличении числа покупателей дополнительный выигрыш от введения резервной цены снижается, так как при увеличении числа покупателей возрастает математическое ожидание второй заявки. Кроме того, увеличение числа покупателей на одного дает больший эффект, чем введение резервной цены. Для случая с равномерно распределенными оценками в этом легко убедиться; для общего случая это было доказано Буловым и Клемперером [Bulow, Klemperer, 1996].

***Применение аукционов на практике*: *опыт продажи частот для связи* 3G.** В 2000–2001 годах прошли первые в Европе государственные аукционы по продаже частот на мобильную связь третьего поколения. Покупателями на этих аукционах были операторы мобильной связи, продавцами — государства. Итоги аукционов показывают, насколько велико может быть влияние правил аукциона на итоговую цену, по которой продается товар, и на то, кто в итоге окажется покупателем. В табл. 3.1 показано, какую сумму выручило правительство каждой из стран.

Таблица 3.1

Выручка от продажи частот 3G (евро на душу населения) и индекс Dow Jones European Telecom Index на момент аукциона

Страна	Цена, евро/чел.	Индекс	Страна	Цена, евро/чел.	Индекс
Великобритания	650	1200	Швейцария	20	700
Нидерланды	170	900	Бельгия	45	600
Германия	615	900	Дания	95	400
Австрия	100	750	Греция	45	500
Италия	240	750			

При том, что подушевой доход в этих странах отличается не более чем в полтора раза, поступления в государственный бюджет отличались более чем в 10 раз. Самая большая выручка — 650 евро на одного потенциального абонента в Великобритании — более чем в 30 раз превышала 20 евро за абонента, вырученные в Швейцарии. Это очень много, даже несмотря на то, что на момент проведения аукциона в Швейцарии цены на акции телекоммуникационных компаний сильно упали (индекс, отражающий цены на эти акции, составлял 1200 на момент проведения аукциона в Великобритании и 700 на момент проведения аукциона в Швейцарии).

Согласно мнению Поля Клемперера, известного ученого, консультировавшего организаторов аукциона в Великобритании, существуют два наиболее важных момента, которые необходимо учитывать при организации аукциона. Во-первых, это привлечение покупателей. Правила аукциона не должны быть такими, чтобы у «слабых» покупателей (т.е. у покупателей с низкой оценкой) не было шансов на победу. Иначе такие покупатели (например, маленькие фирмы, или фирмы, для которых мобильная связь не является профильным бизнесом) вообще не примут решение об участии в аукционе. Это снизит конкуренцию для «сильных» игроков, т.е. в нашем случае — для крупных телекоммуникационных компаний, уже имеющих развитую инфраструктуру (и потому несущих более низкие издержки при освоении лицензии). Во-вторых, правила аукциона должны затруднять возможность сговора между покупателями; в частности, аукцион не должен давать покупателю возможность подавать своими заявками сигналы другим покупателям. Например, при наличии возможности приобретения одного лота сразу несколькими покупателями покупатель может указать, за какой лот он готов торговаться, а за какой — нет (аукцион с повышением цены, таким образом, более уязвим, чем аукцион с закрытыми заявками).

Клемперер приписывает успех британского аукциона наличию пяти неделимых лицензий и наличию правила, по которому одна из лицензий обязательно должна достаться фирме, не присутствовавшей ранее на рынке мобильной связи. Аукцион в Великобритании был таким успешным во многом еще и потому, что он был первым в своем роде. На каждом следующем аукционе покупатели — телекоммуникационные компании — учитывали ошибки своих предшественников в других странах и находили способы торговаться более консервативно, что приводило к снижению цен, по которым продавались лицензии. Также потенциальные покупатели стали более трезво оценивать свои шансы на победу, что привело к снижению числа участников в последующих аукционах.

Организаторы аукциона в Швейцарии допустили роковую ошибку, разрешив совместные заявки со стороны нескольких фирм. В результате совместных заявок число претендентов сократилось с 9 до 4 при наличии всего 4 лицензий! В итоге все лоты ушли по резервной цене, которая была очень низкой.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТЕОРЕМА ЭРРОУ О ДИКТАТОРЕ

Самый важный результат, о котором мы успели рассказать — теорема о существовании равновесий Нэша. Он дает нам уверенность в том, что мы можем найти равновесие в любой игре — это позволяет использовать равновесие (или какие-то его частные случаи) как инструмент для прогнозирования поведения индивидов в игре. Результат, о котором пойдет речь, пожалуй, не менее важен. Но он носит противоположный характер; он доказывает, что в общем случае интересы нескольких человек — т.е. общества — не могут быть представлены функцией выигрыша; мы не имеем права рассуждать об «обществе» и общественных интересах так же, как мы рассуждаем об интересах частных. Автором этого результата является американский экономист Кеннет Эрроу.

Пусть существуют N индивидов; у каждого индивида есть предпочтения на множестве альтернатив C. Эти предпочтения определяются его типом $t_i \in T_i$. Пусть $\overline{u}(c, t_i)$ — выигрыш индивида i при альтернативе $c \in C$. Напомним, что если индивид i считает, что альтернатива c является вариантом, не худшим, чем альтернатива c', то мы по определению имеем $\overline{u}(c, t_i) \geqslant \overline{u}(c', t_i)$. Дадим следующее определение.

Определение 3.13. Пусть T — множество профилей типов индивидов. Назовем $\overline{U}\colon T \times C \to \mathbb{R}$ *функцией общественного благосостояния*.

Данная функция должна сказать нам, как общество, состоящее из N индивидов, будет сравнивать различные альтернативы в множестве C. Если $\overline{U}(c, t) > \overline{U}(c', t)$, то при профиле индивидов t с общественной точки зрения альтернатива c лучше альтернативы c'. Если $\overline{U}(c, t) = \overline{U}(c', t)$, то общество безразлично в выборе между этими двумя альтернативами.

Попробуем сформулировать определенные разумные требования к функции $\overline{U}(c, t)$.

Определение 3.14. Функция общественного благосостояния обладает следующими свойствами.

1. *Паретовость*. Если для некоторых c, c' и при некотором t мы имеем $\overline{u}(c, t_i) > \overline{u}(c', t_i)$ для всех i, то мы должны иметь $\overline{U}(c, t) > \overline{U}(c', t)$.
2. *Независимость от посторонних альтернатив*. Если для некоторых $t, t' \in T$ выполняется [17]
$$\operatorname{sign}(\overline{u}(c, t_i) - \overline{u}(c', t_i)) = \operatorname{sign}(\overline{u}(c, t'_i) - \overline{u}(c', t'_i))$$
для всех i, то
$$\operatorname{sign}(\overline{U}(c, t) - \overline{U}(c', t)) = \operatorname{sign}(\overline{U}(c, t') - \overline{U}(c', t')).$$
3. *Существование диктатора*. Для некоторого игрока i, именуемого *диктатором*, для всех $c, c' \in C$ и для всех $t \in T$ верно следующее: $\overline{U}(c, t) \geqslant \overline{U}(c', t)$ тогда и только тогда, когда $\overline{u}(c, t_i) \geqslant \overline{u}(c', t_i)$. Такая функция общественного выигрыша называется *диктаторской*.

Паретовость означает, что интересы общества не могут противоречить интересам всех индивидов. Если все считают, что c лучше, чем c', то общество тоже должно так считать. Если это свойство нарушается, то возможна такая ситуация: все единогласно считают, что c лучше, чем c' — однако общество по какой-то причине не выбирает c. Независимость от посторонних альтернатив означает, что на общественные предпочтения относительно

[17] По определению функция $\operatorname{sign}(x)$ принимает значение -1, если $x < 0$; 0, если $x = 0$, и 1, если $x > 0$.

двух альтернатив влияют предпочтения индивидов только относительно этих двух альтернатив. Если индивиды не меняют свое мнение относительно того, что лучше — c или c' — то, как бы не поменялись их предпочтения относительно других альтернатив, общество тоже не должно изменить свое мнение относительно сравнения c и c'. Существование диктатора означает, что общественные предпочтения соответствуют предпочтениям одного из игроков, который и есть диктатор.

Перечисленные требования позволяют нам сформулировать теорему Эрроу о диктаторе[18].

Теорема 3.7. *Пусть верно следующее*:

1. $|C| \geqslant 3$.
2. *Для любого* i, *для любой функции* $\psi\colon C \to \mathbb{R}$ *существует* $t_i \in T_i$ *такой, что для всех* $c, c' \in C$ *мы имеем* $\overline{u}(c, t_i) \geqslant \overline{u}(c', t_i)$ *тогда и только тогда, когда* $\psi(c) \geqslant \psi(c')$.
3. *Функция общественного благосостояния* $\overline{U}$ *отвечает свойствам паретовости и независимости от посторонних альтернатив*.

Тогда функция $\overline{U}$ *является диктаторской*.

Получается, что единственный способ придумать функцию выигрыша, удовлетворяющую первым двум нашим требованиям — это объявить одного из игроков диктатором, т.е. позволить ему от имени общества сравнивать различные предложенные ему альтернативы.

Иллюстрацией к теореме Эрроу служит знаменитый *парадокс Кондорсе*. Предположим, что у нас есть три альтернативы — A, B и C, и есть три игрока — 1, 2 и 3. Пусть $\overline{u}_1(A) > \overline{u}_1(B) > \overline{u}_1(C)$, $\overline{u}_2(B) > \overline{u}_2(C) > \overline{u}_2(A)$ и $\overline{u}_3(C) > \overline{u}_3(A) > \overline{u}_3(B)$.

Альтернитива A победит альтернативу B двумя голосами против одного, т.е. мы должны иметь $\overline{U}(A) > \overline{U}(B)$. Но в то же время альтернатива B на голосовании побеждает C, а C побеждает A; следовательно, $\overline{U}(A) > \overline{U}(B) > \overline{U}(C) > \overline{U}(A)$, что является противоречием. Искомой функции выигрышей не существует! Теорема Эрроу говорит нам, что проблема не в том, что мы взяли неправильный способ сравнивать альтернативы (попарно вынося их на голосование), а в том, что такого «правильного» способа вовсе не существует.

3.3. ЗАДАЧИ

3.1. Рассмотрим такую игру. Первый ход делает «природа», которая решает, в какую из двух игр 2×2 будут играть два игрока. Пусть

[18] Данный результат используется для доказательства теоремы Гиббарда–Саттеруэйта. Доказательство можно найти, например, в книге МасКоллеля, Уинстона и Грина [MasCollel, Whinston, Green, 1995, p. 873–875].

p — вероятность, с которой «природа» выбирает игру 1. Потом игрок 1 (но не игрок 2) узнает тип игры. Затем игрок 1 и игрок 2 одновременно выбирают $a_1, a_2 \in \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$.

Первый случай:

Игрок 1 \ Игрок 2	A	B
A	2; 2	0; 0
B	0; 0	0; 0

Второй случай:

Игрок 1 \ Игрок 2	A	B
A	0; 0	0; 0
B	0; 0	1; 1

Найдите все равновесия Байеса–Нэша.

3.2. [Peters, 2008, p. 67]. Игрок 1 может быть игроком одного из двух типов: t_1 и t_1'. Игрок 2 может иметь типы t_2 либо t_2'. Каждому игроку известен только собственный тип. Условные вероятности двух типов таковы: $\mathsf{P}(t_2 \mid t_1) = 1$, $\mathsf{P}(t_2 \mid t_1') = 0{,}75$, $\mathsf{P}(t_1 \mid t_2) = 0{,}75$, $\mathsf{P}(t_1 \mid t_2') = 0$. Пусть у игрока 1 два действия: T и B, действиями игрока 2 являются L и R. Выигрыши игроков в зависимости от их типов и действий таковы:

t_1, t_2

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2; 2	0; 0
B	3; 0	1; 1

t_1', t_2

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2; 2	0; 0
B	0; 0	1; 1

t_1', t_2'

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2; 2	0; 0
B	0; 0	1; 1

Найдите все равновесия в этой игре.

3.3. «Меньше знаешь — крепче спишь» [Osborne, 2009, p. 283]. Пусть существуют два состояния природы, t_1 и t_2. Оба состояния равновероятны. Состояние игры не известно ни одному из игроков. Выигрыши игроков, в зависимости от их стратегий и от состояния природы, таковы:

t_1

Игрок 1 \ Игрок 2	L	M	R
T	2; $2x$	1; 0	1; $3x$
B	3; 2	0; 0	0; 3

t_2

Игрок 1 \ Игрок 2	L	M	R
T	2; $2x$	1; $3x$	1; 0
B	0; 0	1; 3	0; 0

Пусть $0 < x < 1/2$.

(a) Найдите равновесие.

(b) Найдите равновесие, если игроку 2 известно состояние природы. В каком равновесии ожидаемый выигрыш игроков будет выше? Почему?

3.4. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2	
		I	N
Игрок 1	I	$-1; \quad -1$	$1+\theta_1; 0$
	N	$0; 1+\theta_2$	$0; 0$

где θ_1, θ_2 — независимы и равномерно распределены на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Мы предполагаем, что θ_1 известно только игроку 1, θ_2 — только игроку 2. Найдите равновесие в этой игре. С какой вероятностью игроки будут выбирать действие I? Найдите предел этой вероятности при $\varepsilon \to 0$.

3.5. [Goeree, Holt, Palfrey, 2003]. Рассмотрим игру «инспекция» с такой матрицей выигрышей ($x > 0$):

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	L	$x; -1$	$-1; \quad 1$
	R	$-1; \quad 1$	$1; -1$

(a) Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях для $x = 1$ и $x = 9$. Как вы думаете, будет ли равновесие Нэша давать разумный прогноз поведения игроков при $x > 0$? В частности, будет ли на самом деле вероятность того, что игрок 1 сыграет L, не зависеть от x?

(b) Теперь пусть игрок i, выбирая действие $s_i \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, получает дополнительный выигрыш ε_{s_i}, распределенный согласно (3.78). Найдите равновесие дискретного отклика для нескольких значений $x > 1$ и $\lambda > 0$. Почему теперь вероятность того, что игрок 1 сыграет L, будет положительно зависеть от x?

3.6. В деревне проживают 3 жителя. Для производства общественного блага необходимо участие как минимум двух из них. Если общественное благо произведено, то выигрыш каждого составит 1 единицу. Издержки участия в производстве блага составляют c_i единиц для i-го участника. Пусть c_i независимо и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите равновесие.

3.7. [Fudenberg, Tirole, 1991, p. 237–238]. Каждая из двух фирм решает, входить ли ей на рынок или нет. Издержки входа на рынок для фирмы i составляют $c_i \in [0, \infty)$, распределенные согласно функции распределения $F(\cdot)$ с плотностью $f(\cdot)$. Выигрыш каждой фирмы составит $\Pi_m - c_i$, если она одна вошла на рынок, $\Pi_d - c_i$, если на рынке присутствуют две фирмы, и 0, если фирма не вошла на рынок, где $\Pi_m > \Pi_d > 0$. Найдите равновесие Байеса–Нэша.

3.8. [Остен-Смит, Бэнкс, 1996]. Трибунал из трех судей должен решить, виновен подсудимый ($\omega = G$) или нет ($\omega = I$). До начала процесса каждому судье известно, что подсудимый виновен с вероятностью $\pi > 1/2$. В ходе процесса каждый судья получает сигнал относительно виновности подсудимого $\theta_i \in \{I, G\}$. Пусть $p \geqslant 1/2$ — вероятность того, что судья получит верный сигнал. То есть $\mathsf{P}(\omega = G \mid \theta_i = G) = \mathsf{P}(\omega = I \mid \theta_i = I) = p$. После получения сигналов каждый из судей выносит вердикт v_i: виновен или невиновен. Решение суда определяется правилом простого большинства. Выигрыш каждого из судей равен 1, если в итоге принято правильное решение, и 0, если решение было неправильным. Найдите, при каких значениях p и π в равновесии возможно «честное» голосование, когда $v_i(\theta_i = I) = I$ и $v_i(\theta_i = G) = G$.

3.9. На рынке мобильной телефонной связи присутствуют две фирмы. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом путем объявления цен p_1, p_2 (в рублях за минуту) на свои услуги (см. задачу 1.4 к гл. 1). Фирма $i = 1, 2$ дальше обязуется обслужить всех клиентов, желающих приобрести ее услуги по ее цене p_i. Спрос на продукцию фирмы i есть $q_i = a - p_i - b_i p_j$. Издержки производства нулевые для обеих фирм. Чувствительность спроса i-й фирмы к цене j-й фирмы либо низка, либо высока, т.е. b_i равен либо b_L, либо b_H, где $b_H > b_L$. Вероятность того, что $b_i = b_H$, равна θ. Типы фирм — независимые случайные величины. Найдите равновесие Байеса–Нэша.

3.10. Рассмотрим задачу с конкуренцией Курно на с. 159–161. Пусть издержки фирмы 1 равны c_1 и известны всем, а издержки c_2 фирмы 2 равны c_H с вероятостью θ и c_L с вероятностью $1 - \theta$. Пусть с вероятностью π фирма 1 узнает c_2 (при этом фирма 2 не знает, известно ли c_2 фирме 1). Найдите равновесие, которое будет состоять из $q_1(0)$ (выпуск фирмы 1, если ей не известен c_2), $q_1(H)$ (выпуск фирмы 1, если ей известно, что $c_2 = H$), $q_1(L)$ (выпуск фирмы 1, если ей известно, что $c_2 = L$), $q_2(H)$ и $q_2(L)$.

3.11. Три деревни решают, строить ли плотину на порядком обмелевшей местной речке. Множество исходов C выглядит так:

(a) Оставить все как есть. Издержки этого варианта равны $c_a = 0$.

(b) Построить маленькую плотину, это позволит решить проблемы с водой для орошения полей. Издержки этого варианта равны $c_b = 60$.

(c) Построить маленькую плотину и шлюз для небольших судов. Это не только решает проблему с орошением, но и позволяет без проблем подниматься вверх по реке на лодке. Издержки этого варианта равны $c_c = 120$.

(d) Построить большую плотину и поставить мини-электростанцию. Большая плотина в довесок к орошению и судоходству позволяет производить электричество в достаточном количестве для всех трех деревень, но часть ценных полей оказывается затопленными. Издержки этого варианта равны $c_d = 300$.

У каждого игрока существуют два типа: $T_1 = T_2 = T_3 = \{1, 2\}$. Типы игроков равновероятны и распределены независимо. Пусть $R_i(j, t)$ — доход игрока $i = 1, 2, 3$ при реализации варианта $j = a, b, c, d$, если тип этого игрока равен $t = 1, 2$. Нам известно следующее:

i. Первый вариант приносит нулевой выигрыш всем игрокам.

ii. Первая деревня находится непосредственно около предполагаемой области затопления и ясно, что для них важно нормальное судоходство и пойменные луга. Но непонятно, насколько они готовы променять луга на электричество. Так что

$$(R_1(a, 1), R_1(b, 1), R_1(c, 1), R_1(d, 1)) = (0;\ 15;\ 30;\ 81)$$

и

$$(R_1(a, 2), R_1(b, 2), R_1(c, 2), R_1(d, 2)) = (0;\ 15;\ 30;\ 57).$$

iii. Вторая деревня находится далеко от реки и для них очень критично орошение, от дешевого электричества они тоже не откажутся, но вот нужно ли им судоходство? Таким образом,

$$(R_2(a, 1), R_2(b, 1), R_2(c, 1), R_2(d, 1)) = (0;\ 30;\ 63;\ 105)$$

и

$$(R_2(a, 2), R_2(b, 2), R_2(c, 2), R_2(d, 2)) = (0;\ 30;\ 42;\ 105).$$

iv. Третья деревня — самая большая и успешная, поэтому всем очевидно, что и судоходство, и дешевое электричество важны для ее жителей, но вот готовы ли они в поте лица работать ради орошения полей при том, что у них самих есть озеро под боком — большой вопрос. Соответственно,

$$(R_3(a, 1), R_3(b, 1), R_3(c, 1), R_3(d, 1)) = (0;\ 30;\ 45;\ 135)$$

и

$$(R_3(a, 2), R_3(b, 2), R_3(c, 2), R_3(d, 2)) = (0;\ 12;\ 45;\ 135).$$

Предположим, что мы хотим реализовать функцию общественного выбора, максимизирующую суммарный доход деревень, минус издержки:

$$f(t_1, t_2, t_3) = \arg \max_{j \in \{a,b,c,d\}} R_1(j, t_1) + R_2(j, t_2) + R_3(j, t_3) - c_j.$$

При определении индивидуальных выигрышей деревень от выбора проекта предполагаем, что издержки от строительства распределяются поровну между деревнями.

(a) Определите оптимальный исход для каждого набора типов игроков.

(b) Пусть для принятия решения используется «наивный» механизм: т.е. каждую деревню спрашивают, во сколько они ценят каждый исход (или какой из двух типов истинный), после чего реализуется заданная выше функция общественного выбора. Выгодно ли хоть какой-то из деревень сообщать неправду, если все остальные сообщают правду?

(c) Пусть выбор проекта осуществляется в соответствии с механизмом Кларка (издержки по-прежнему делятся поровну):

i. Найдите дополнительные платежи для каждого набора типов игроков.

ii. Найдите вероятности реализации каждого из 4-х исходов.

iii. Все ли деревни согласятся участвовать в таком механизме, по сравнению с «наивным» механизмом?

3.12. Пусть множество альтернатив задано как $C = \{a, b, c\}$, множество состояний природы есть $T = \{1, 2\}$. Пусть существуют два индивида со следующими предпочтениями:

$$\overline{u}_1(a,1) > \overline{u}_1(c,1) > \overline{u}_1(b,1), \quad \overline{u}_2(c,1) > \overline{u}_1(b,1) > \overline{u}_1(a,1),$$
$$\overline{u}_1(c,2) > \overline{u}_1(a,2) > \overline{u}_1(b,2), \quad \overline{u}_2(b,2) > \overline{u}_2(c,2) > \overline{u}_2(a,2).$$

Рассмотрим следующее правило общественного выбора: $f(1) = a$, $f(2) = b$. Покажите, что f удовлетворяет свойству монотонности по Маскину, но не является Нэш-реализуемым.

3.13. [Moulin, 1980]. Рассмотрим задачу принятия коллективного решения путем опроса, приведенную на с. 196. Докажите, что функция общественного выбора $f(t) = \mathrm{med}(t)$ реализуема в доминирующих стратегиях при помощи механизма $g(\theta) = \mathrm{med}(\theta)$, т.е. при использовании этого механизма $\theta_i = t_i$ является слабо доминирующей стратегией для всех i и для всех $t_i \in [0, 1]$.

3.14. Пусть $M = \langle A, g \rangle$ — механизм. Пусть $f_M(t) \subset C$ — множество исходов, которые достигаются как равновесие в доминирующих стратегиях при механизме M для данного t. Докажите, что для всех t множество $f_M(t)$ содержит не более одного элемента.

3.15. Докажите **теорему Мэя** [May, 1952]. *Пусть* $C = \{-1, 1\}$. *Пусть для каждого игрока* i *мы имеем* $T_i = \{-1, 1\}$, *где* $t_i = -1$ *означает, что игрок* i *предпочитает исход* -1 *исходу* 1. *Пусть* $f\colon T \to C$ — *функция общественного выбора, обладающая следующими свойствами*:

(a) *Симметричность*: $f(t_1, \ldots, t_N) = -f(-t_1, \ldots, -t_N)$ *для всех* $t \in T$.

(b) *Анонимность*: $f(t_1, \ldots, t_N) = \overline{f}(\sum_i t_i)$, *т.е. от перестановки игроков исход не меняется.*

(c) *Существует* $t \in T$ *такое, что* $f(t) = 1$, *и существует* $t' \in T$ *такое, что* $f(t') = -1$.

Тогда при нечетном N *единственная функция, удовлетворяющая этим свойствам — это правило большинства*: $f(t)$ *равна знаку* $\sum_i t_i$, *а при четном* N *таких функций общественного выбора не существует.*

3.16. Докажите, что во всех аукционах с резервной ценой, в которых покупатель с наибольшей оценкой приобретает товар с вероятностью 1 при условии, что его оценка выше резервной, доходы покупателей и продавца одинаковы.

3.17. Решите задачу аукциона третьей цены для N покупателей с оценками, равномерно распределенными на $[0, 1]$.

3.18. Рассмотрим аукцион первой цены, в котором участвуют два покупателя. Оценки продаваемого товара для двух покупателей равномерно распределены на $[0, 1]$ и $[0, V]$, где $V > 0$.

(a) Найдите равновесные заявки покупателей.

(b) Будет ли аукцион первой цены в таком случае эффективен — т.е. будет ли товар всегда продан покупателю с наибольшей оценкой?

3.19. Пусть в аукционе участвуют N покупателей. Каждый покупатель делает заявку b_i. Продаваемый товар отдается покупателю с самой высокой заявкой. Каждый покупатель платит продавцу сумму, указанную у него в заявке, кроме победителя, который не платит ничего. Пусть оценки покупателей независимо и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите, как заявка b_i покупателя зависит от v_i. Почему заявка может превышать оценку? Пусть $N = 2$. При каком v мы будем иметь $b(v) = v$?

3.20. Городская администрация продает с аукциона 2 земельных участка. Участки совершенно одинаковы. На аукционе присутствуют 3 покупателя. Каждый покупатель готов купить ровно один участок. Заявка каждого покупателя — сумма, которую он готов заплатить за участок. Оценка каждого участника аукциона — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. Аукцион идет сразу на два участка. Найдите равновесные заявки, если

(a) Участки продаются покупателям с двумя самыми высокими заявками, по цене третьей заявки.

(b) Участки продаются покупателям с двумя самыми высокими заявками, по цене этих заявок.

3.21. Рассмотрим игру «война на выживание». Два человека дерутся друг с другом. Каждый человек, $i = 1, 2$, до начала драки решил, какое максимальное время s_i он готов драться. Следовательно, если $s_1 < s_2$, то побеждает второй человек, причем они дерутся в течение времени s_1. Если игрок i — победитель, то он получает приз θ_i, где θ_i — частная информация. Величины θ_i равномерно распределены на $[0, \overline{\theta}]$. В добавок, каждый человек несет издержки, равные времени, которое он дрался. Используя теорему об эквивалентности доходов в аукционе, найдите, как равновесное s_i зависит от θ_i. Что, если игроков $N > 2$?

3.22. [Klemperer, 2004]. В 1991 г. вице-президент США Дэниэл Куэйл предложил реформировать юридическую систему этой страны. Целью заявленной реформы было уменьшить количество средств, которые американцы тратили на судебные разбирательства. По новым правилам, проигравшая гражданский процесс сторона должна была выплатить выигравшей стороне сумму, равную определенному проценту собственных издержек (по старым правилам после окончания процесса компенсаций не было). Будем моделировать гражданский судебный процесс как аукцион с двумя участниками. Предположим, что победителем процесса является сторона с более высокими издержками b_i. Пусть ценность победы v_i для каждой стороны — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. Выигрыш победившей стороны равен $v_i - b_i + k\, b_{-i}$, проигравшей стороны равен $-(1 + k)\, b_i$, где $k > 0$ — процент от судебных издержек, выплачиваемый проигравшей стороной победителю (при старых правилах было $k = 0$).

(a) Скажите, приведут ли новые правила к снижению судебных издержек?

(b) Найдите, чему равны затраты стороны в зависиомсти от ее оценки $v \in [0, 1]$.

(c) В некоторых европейских странах проигравшая сторона должна компенсировать часть издержек победителю. Будут ли затраты в таком случае выше или ниже, чем в системе без компенсации?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 3

Магнус Я.Р., *Катышев П.К.*, *Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: Учебник. М.: Дело, 2005.

Мюллер Д. Общественный выбор III. М.: ГУ ВШЭ, 2007.

Печерский С.А., *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учебное пособие. СПб.: Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Токарев В.В. Модели и решения: Исследование операций для экономистов, политологов и менеджеров. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.

Anderson S.P., *Goeree J.K.*, *Holt Ch.A.* Minimum-Effort Coordination Games: Stochastic Potential and Logit Equilibrium // Games and Economic Behavior. 2001. Vol. 34. No. 2. P. 177–199.

Angeletos G.-M., *Hellwig Ch.*, *Pavan Al.* Dynamic Global Games of Regime Change: Learning, Multiplicity, and the Timing of Attacks // Econometrica. 2007. Vol. 75. No. 3. P. 711–756.

Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. 2nd ed. New York: Wiley, 1963.

Austen-Smith D., *Banks J.S.* Information Aggregetion, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem // American Political Science Review. 1996. Vol. 90. P. 34–45.

Binmore K. Fun and Games: A Text of Game Theory. D.C. Hearth, 1992.

Brams S.J., *Taylor A.D.* The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody. W.W. Norton. New York, 2000.

Bulow J., *Klemperer P.* Auctions Versus Negotiations // The American Economic Review. 1996. Vol. 86. No. 1. P. 180–194.

Chatterjee K., *Samuelson W.* Bargaining under Incomplete Information // Operations Research. 1983. Vol. 31. P. 835–851.

Clarke E.H. Multipart Pricing of Public Goods // Public Choice. 1971. Vol. 11. P. 17–33.

Feddersen T., *Pesendorfer W.* Convicting the Innocent: The Inferiority of Unanimous Jury Verdicts under Strategic Voting // The American Political Science Review. 1998. Vol. 92. No. 1. P. 23–35.

Fudenberg D., *Tirole J.* Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.

Geys B. Explaining Voter Turnout: A Review of Aggregate-Level Research // Electoral studies. 2006. Vol. 25. No. 4. P. 637–663.

Gibbard A. Manipulation of Voting Schemes // Econometrica. 1973. Vol. 41. P. 587–601.

Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton: Princeton University Press, 1992.

Goeree J.K., *Holt Ch.A.* An Experimental Study of Costly Coordination // Games and Economic Behavior. 2005. Vol. 51. No. 2. P. 349–364.

Goeree J.K., *Holt Ch.A.*, *Palfrey Th.R.* Risk Averse Behavior in Asymmetric Matching Pennies Game // Game and Economic Behavior. 2003. Vol. 45. P. 97–113.

Green J.R., *Laffont J.-J.* Incentives in Public Decision Making. Amsterdam: North-Holland, 1979.

Groves Th. Incentives in Teams // Econometrica. 1973. Vol. 41. No. 4. P. 617–631.

Harsanyi J.C. Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players // Management Science. 1967–1968. Vol. 14. P. 159–182, 320–334, 486–502.

Harsanyi J.C. Games with Randomly Disturbed Payoffs: A new Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points // International Journal of Game Theory. 1973. Vol. 2. No. 1. P. 1–23.

Krishna V. Auction Theory. 2nd ed. Academic Press, 2009.

Klemperer P. Auction Theory: A Guide to Literature // Journal of Economic Surveys. 1999. Vol. 13. No. 3. P. 227–286.

Klemperer P. Auctions: Theory and Practice. Princeton: Princeton University Press, 2004.

May K.O. A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision // Econometrica. 1952. Vol. 20. No. 4. P. 680–684.

MasCollel A., *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomics Theory. Oxford University Press, 1995.

Maskin E. Nash Equilibrium and Welfare Optimality. Mimeo, MIT, 1977.

Maskin E. The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey. P. 177–204 in Social Goals and Social Organization // L. Hurwitz, D. Schmeidler, H. Sonnenschein (eds). Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

McFadden D. Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior // P. Zarembeka (ed.). Frontiers in Econometrics. New York: Academic Press, 1974.

McKelvey R.D., *Palfrey Th.R.* Quantal Response Equilibria for Normal Form Games // Games and Economic Behavior. 1995. Vol. 10. No. 1. P. 6–38.

McKelvey R.D., *Palfrey Th.R.* Quantal Response Equilibria for Extensive Form Games // Experimental Economics. 1998. Vol. 1. No. 1. P. 9–41.

Milgrom P.R. Putting Auction Theory to Work. Cambrige: Cambridge University Press, 2004.

Moulin H. On strategy-proofness and single-peakedness // Public Choice. 1980. Vol. 35. No. 4. P. 437–455.

Myerson R.B. Incentive Compatibility and the Bargaining Problem // Econometrica. 1979. Vol. 56. P. 1191–1220.

Myerson R.B. Optimal Auction Design // Mathematics of Operations Research. 1981. Vol. 6. P. 58–73.

Osborne M.J. Introduction to Game Theory: International Edition. New York: Oxford University Press, 2009.

Osborne M.J., *Rubinstein A.* A Course in Game Theory. The MIT Press, 1994.

Owen G., *Grofman B.* To Vote or not to Vote: The Paradox of Nonvoting // Public Choice. 1984. Vol. 42. No. 3. P. 311–325.

Palfrey Th.R., *Rosenthal H.* A Strategic Calculus of Voting // Public Choice. 1983. Vol. 41. No. 1. P. 7–53.

Palfrey Th.R., *Rosenthal H.* Voter Participation and Strategic Uncertainty // The American Political Science Review. 1985. Vol. 79. No. 1. P. 62–78.

Peters H. Game Theory: A Multi-Leveled Approach. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.

Riley J.F., *Samuelson W.F.* Optimal Auctions // The American Economic Review. 1981. Vol. 71. No. 3. P. 381–392.

Satterthwaite M.A. Strategy-proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10. No. 2. P. 187–217.

Vickrey W. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders // The Journal of Finance. 1961. Vol. 16. No. 1. P. 8–37.

4

ГЛАВА

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Представьте себя в роли сотрудника крупной компании, который должен принять решение, взять или не взять на работу молодого университетского выпускника. Вы провели собеседование; соискатель вам понравился, однако вы до конца не можете понять, насколько хорошо он сможет подойти Вашей компании. Возможно, этот молодой человек трудолюбив и готов работать ночи напролет; в таком случае, он со временем сможет принести компании солидную прибыль. Но он может оказаться и лентяем, не желающим ответственно подходить к выполнению своих обязанностей; в таком случае он будет обузой. К тому моменту, когда выяснится, насколько этот человек подходит вашей компании, будет потеряно много времени. Правильным решением будет принять соискателя на работу, если он трудолюбив, и не принимать, если он — лентяй. К сожалению, характер соискателя вам неизвестен; вы не можете выяснить этот вопрос за то короткое время, которое вам отпущено на собеседование.

К счастью, вам известно, что соискатель закончил очень престижный вуз. Вы знаете, что этот вуз не позволяет «халявы» и закончить его можно, только если студент потратит очень много времени на учебу, отказывая себе в вечеринках, гулянках и прочих различных соблазнах, которые жизнь ставит перед людьми в дни их юности. Вы знаете, что ленивый студент не станет поступать в такой вуз, *даже если* ему известно, что диплом этого вуза необходим для того, чтобы получить хорошую работу (например, такую работу, какую предлагаете вы). Ленивый студент, учась в таком вузе, будет нести слишком высокие издержки, связванные с тем, что ему придется все время заставлять себя учиться. В то же время трудолюбивый студент может учиться, учиться и учиться, не испытывая при этом слишком большего дискомфорта. Для такого человека издержки учебы в приличном вузе не слишком высоки; возможность получить хорошую работу после окончания оправдывает эти издержки. Получается так, что в данном престижном вузе учатся только самые талантливые и трудолюбивые студенты; мало того, наличие диплома этого вуза *сигнализирует* стороннему наблюдателю ненаблюдаемую частную информацию относительно обладателя диплома — его трудолюбие. Еще раз посмотрев резюме, вы принимаете решение взять молодого человека на работу.

Приведенный выше пример является динамической игрой, поскольку студент, выбирая вуз для поступления, делает это раньше, чем работодатель решает, принять его на работу или нет. Однако это также и игра с неполной информацией: тип студента (трудолюбивый или ленивый) неизвестен работодателю. Многие другие игровые взаимодействия также обладают этими атрибутами. Инвесторам и обывателям может быть неизвестно, насколько власти (в особенности, центральный банк страны) действительно заинтересованы в контроле над инфляцией. Лоббист знает больше о последствиях продвигаемой им политики, чем парламентарий, который должен принять решение, продвигать ли предлагаемые лоббистом меры в обмен на его поддержку. Избиратели не знают, насколько соответствует действительности желание кандидата в президенты бороться с коррупцией, демонстрируемое ими с экранов телевизоров. Рассмотрение игровых моделей таких задач потребует от нас новых аналитических методов.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ И ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ

При анализе динамической игры с неполной информацией мы сталкиваемся с проблемой, как правильно определить равновесие. В динамических играх с полной информацией мы были вынуждены ввести понятие совершенного по подыграм равновесия, так как нахождение всех «простых» равновесий Нэша в динамической игре иногда давало нам слишком много решений. Некоторые из них были для нас неприемлемы, ибо предполагали наличие заведомо невыполнимых угроз со стороны некоторых игроков. Однако в играх с неполной информацией совершенное по подыграм равновесие нас уже не устраивает. Рассмотрим игру, представленную на рис. 4.1.

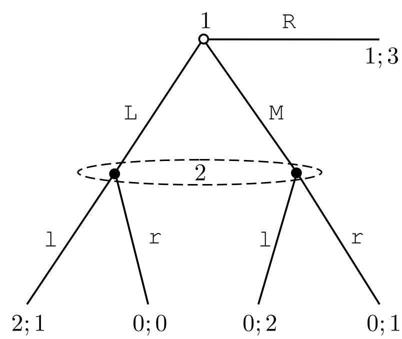


Рис. 4.1. Равновесие $(\mathtt{R}, \mathtt{r})$ не является рациональным

С формальной точки зрения в этой игре всего одна подыгра, соответствующая всему дереву игры. Таким образом, любое равновесие в этой игре будет совершенным по подыграм, в том числе и равновесие $(\mathtt{R}, \mathtt{r})$. Однако очевидно, что это равновесие неадекватно. Почему игрок 2 сделает ход $\mathtt{r}$ в своем информационном множестве? Конечно, это информационное множество лежит вне траектории игры, которая заканчивается на первом же ходе игрока 1. Однако будет ли игрок 2 делать ход $\mathtt{r}$, если по какой-то причине игрок 1 не сыграет R? Пусть μ — вероятность того, что игрок 1 сделал ход L при условии того, что он сделал либо ход L, либо ход M. Тогда условное математическое ожидание выигрыша игрока 2 при ходе l будет равно $\mu + 2(1-\mu)$, при ходе r равно $1-\mu$. Выходит, что при любом $\mu \in [0,1]$ игроку 2 выгодно делать ход l в том случае, если игрок 1 все-таки не сыграл R. Равновесие $(\mathtt{R}, \mathtt{r})$ не соответствует критерию, очень похожему на критерий совершенства по подыграм. Обещая играть r, игрок 2 фактически выставляет игроку 1 невыполнимую угрозу; при этом формально равновесие является совершенным по подыграм. Очевидно, что нам необходимо более сильное условие равновесности для того, чтобы отсечь такие нежелательные «равновесия».

Вот еще один пример игры, в которой существуют нехорошие (с точки зрения интуитивного соответствия рациональности игроков), но, формально, совершенные по подыграм равновесия. В игре «Лошадка Зелтена» (рис. 4.2) есть нежелательное равновесие $(\mathtt{D}, \mathtt{a}, \mathtt{L})$. Действительно, если игрок 1 отклонится от равновесной стратегии и сделает — пусть даже с очень небольшой вероятностью — ход A, то ход a перестанет быть оптимальным для игрока 2. Равновесие $(\mathtt{A}, \mathtt{a}, \mathtt{R})$ отвечает нашему критерию. Игра проходит через все информационные множества, в каждом из которых соответствующий игрок делает оптимальный для себя ход при данных ходах остальных игроков. Для того чтобы анализировать динамические игры с неполной информацией, нам необходимо решить три теоретические задачи. Во-первых, необходимо сформулировать концепцию равновесия, более строгую, чем совершенное по подыграм равновесие Нэша. Это равновесие должно исключать нерациональное поведение игроков в информационных множествах, лежащих вне траектории игры (как, например, $(\mathtt{R}, \mathtt{r})$ в игре на рис. 4.1). Во-вторых, необходимо выяснить вопрос существования такого равновесия для какого-то максимально широкого класса игр — например, для конечных игр. Наконец, нужно получить удобный способ проверки равновесий на соответствие этому критерию.

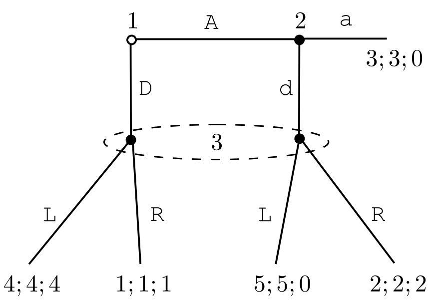


Рис. 4.2. Лошадка Зелтена

В этом разделе мы решим все три обозначенные задачи. Сначала мы введем понятия сильного и слабого секвенциальных равновесий. Далее мы докажем существование сильного секвенциального равновесия, введя еще одно — более строгое — понятие совершенного равновесия и доказав его сущестование[1]. Наконец, мы определим важный подкласс игр — игры с наблюдаемыми действиями — и удобное, с точки зрения анализа, понятие совершенного баейсового равновесия для этих игр и сформулируем условия его эквивалентности секвенциальному равновесию.

Почему нам необходимо проделать все эти действия? Очень многие задачи в экономике и политической науке можно свести к играм с наблюдаемыми действиями. Проделанная работа даст нам возможность анализировать эти задачи, используя удобное в работе определение совершенного байесового равновесия. При этом мы будем уверены, что, с одной стороны, такое равновесие всегда существует и, с другой стороны, определение такого равновесия является достаточно строгим для того, чтобы исключить возможность нерационального поведения.

4.1.1. СИЛЬНОЕ И СЛАБОЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Каким формальным критериям не удовлетворяют примеры на рисунках 4.1 и 4.2? Дадим определение.

Определение 4.1. Пусть Γ — игра в развернутой форме, h — информационное множество в этой игре. Назовем *верой* μ_h распределение вероятностей на вершинах, входящих в h. Обозначим через $\mu = (\mu_h)$ *систему вер* в игре Γ — распределение вероятностей для всех информационных множеств.

Вера игрока в информационном множестве отражает его представление о том, в какой именно вершине множества он в данный момент находится с какой вероятностью. В тех случаях, когда это возможно, вера должна быть согласована с его представлениями о стратегиях других игроков.

Определение 4.2. Пусть Γ — игра в развернутой форме, σ — профиль поведенческих стратегий в этой игре. Пусть μ — система вер. Будем говорить, что μ *слабо согласована* с σ, если для всех информационных множеств h таких, что при σ существует положительная вероятность попадания игры в h, и для всех вершин $a \in h$ верно следующее:

$$\mu_h(a) = \frac{\mathsf{P}(a \mid \sigma)}{\mathsf{P}(h \mid \sigma)}, \tag{4.1}$$

где $\mathsf{P}(a \mid \sigma)$ — вероятность того, что траектория игры пройдет через вершину a, $\mathsf{P}(h \mid \sigma) = \sum_{b \in h} \mathsf{P}(b \mid \sigma)$ — вероятность того, что траектория игры пройдет через информационное множество h.

[1] Определение секвенциального равновесия и доказательство большинства связанных с ним утверждений принадлежит Крепсу и Уилсону [Kreps, Wilson, 1982]. Определение совершенного байесового равновесия в достаточно общей форме можно найти в книге Фаденберга и Тироля [Fudenberg, Tirole, 1991].

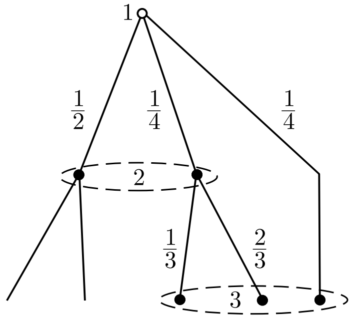


Рис. 4.3. Пример игры и поведенческих стратегий

Если система вер согласована с поведенческой стратегией, то для всех информационных множеств, через которые траектория игры проходит с положительной вероятностью, вера вычисляется по правилу Байеса. На рис. 4.3 показан пример игры в развернутой форме с поведенческими стратегиями.

Построим систему вер, согласованную с этой стратегией. Для информационного множества игрока 2 вера будет

$$\mu_2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}; \; \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{2}{3}; \; \frac{1}{3} \right). \tag{4.2}$$

Для информационного множества игрока 3 мы имеем

$$\mu_3 = \left(\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}; \; \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}; \; \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{1}{6}; \; \frac{1}{3}; \; \frac{1}{2} \right). \tag{4.3}$$

В каждом информационном множестве оптимальное действие игрока должно зависить от его веры в этом информационном множестве. Пусть σ — профиль поведенческих стратегий, μ — система вер. Пусть h — информационное множество, в котором игрок i делает ход. Обозначим через $u_{i,h}(\sigma \mid \mu_h)$ ожидаемый выигрыш игрока i при условии, что игра достигла множества h. Эта величина равна сумме выигрышей данного игрока во всех вершинах информационного множества h, помноженной на вероятности оказаться в этих вершинах, определяемые μ_h. Будем говорить, что σ_i *секвенциально рациональна* относительно μ, если для всех σ'_i мы имеем $u_{i,h}(\sigma_i, \sigma_{-i} \mid \mu_h) \geqslant u_{i,h}(\sigma'_i, \sigma_{-i} \mid \mu_h)$. Можно дать следующее определение равновесия.

Определение 4.3. Пара (σ, μ) является *слабо секвенциальным равновесием*, если σ секвенциально рациональна относительно μ и μ слабо согласована с σ.

В примере на рис. 4.1 профиль стратегий $(\mathtt{R},\mathtt{r})$ не согласован ни с какой системой вер: при любом μ игрок 2 должен выбрать действие $\mathtt{l}$. Однако определение слабой согласованности вер ничего не говорит о тех случаях, когда одно из информационных множеств лежит вне траектории игры. Такое может произойти только в том случае, если в некоторых информационных множествах какие-то действия играются с нулевой вероятностью; соответственно, потребуется сформулировать более жесткий критерий в отношении системы вер, чем слабая согласованность.

Назовем σ *вполне смешанным* профилем стратегий, если в каждом информационном множестве каждое действие реализуется с положительной вероятностью. Для такого σ уравнение (4.1) определяет веру для каждого информационного множества. Дадим определение.

Определение 4.4. Пусть σ — профиль поведенческих стратегий. Будем говорить, что система вер μ является *сильно согласованной* с σ, если существует последовательность вполне смешанных профилей $\sigma^n \to \sigma$, таких, что $\mu^n \to \mu$, где μ^k — система вер, слабо согласованная с профилем стратегий σ^k.

Сильная согласованность требует, чтобы вера являлась пределом последовательности вер, полученных из сходящихся к стратегии σ профилей стратегий.

Дадим определение, аналогичное определению 4.3.

Определение 4.5. Пара (σ,μ) является *сильно секвенциальным равновесием* или просто *секвенциальным равновесием*, если σ секвенциально рациональна относительно μ и μ сильно согласована с σ.

На рис. 4.4 приведен пример игры, для которой существует равновесие, которое является слабо секвенциальным, однако условие сильной секвенциальности не выполняется.

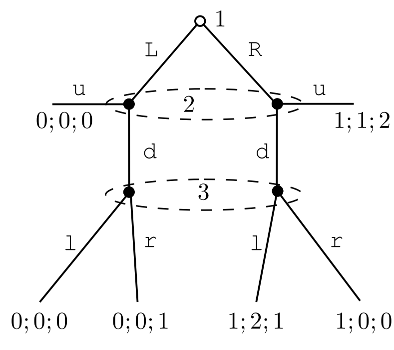


Рис. 4.4. Пример игры, для которой слабо секвенциальное равновесие не является сильно секвенциальным

Профиль стратегий $(\mathtt{R},\mathtt{u},\mathtt{r})$ является слабо секвенциальным равновесием в совокупности с системой вер $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 > 0{,}5$ (вера указывает вероятность оказаться в левой вершине информационного множества). Действительно, информационное множество игрока 3 лежит вне траектории игры, так что мы можем придумать любую веру для этого множества.

Почему слабо секвенциальное равновесие в этой игре плохо соотносится с предположением о рациональности игроков? Как говорилось выше, игрок 3 выберет действие $\mathtt{r}$ только в том случае, если $\mu_3 > 0{,}5$. Если первый игрок выбирает $\mathtt{R}$, а второй — $\mathtt{u}$, то вероятность попадания в информационное множество 3 равна нулю, так что по правилу Байеса в качестве веры в этом информационном множестве мы можем выбрать любое распределение вероятностей на его вершинах. Однако какова вероятность оказаться в левой вершине множества 3 *при условии, что один из игроков* 1 *и* 2 *отклонится от заданной стратегии*? Для того чтобы мы оказались в правой вершине множества 3, достаточно, чтобы дрогнула рука у игрока 2 и он сыграл $\mathtt{d}$ вместо $\mathtt{u}$. Однако для того, чтобы мы оказались в левой вершине, необходимо, чтобы и игрок 1, и игрок 2 отклонились от заданных стратегий. Если вероятности того, что каждый из первых двух игроков отклонится, малы и если отклонения независимы друг от друга, то скорее всего мы окажемся в правой вершине, т.е. мы должны иметь $\mu_3 = 0$.

Обозначим через $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ профиль поведенческих стратегий в игре, где σ_1 — вероятность того, что игрок 1 выберет $\mathtt{L}$, σ_2 — вероятность того, что игрок 2 выберет $\mathtt{d}$, σ_3 — вероятность того, что игрок 3 выберет $\mathtt{r}$. Формально, пусть $\{(\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \sigma_{3k})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность поведенческих стратегий, сходящаяся к $(\mathtt{R}, \mathtt{u}, \mathtt{r})$, т.е. $\sigma_{1k} \to 0$, $\sigma_{2k} \to 0$ и $\sigma_{3k} \to 1$, причем $\sigma_{ik} \in (0, 1)$ для $i = 1, 2, 3$. Согласно правилу Байеса мы имеем

$$\mu_{3k} = \frac{\sigma_{2k}\sigma_{1k}}{\sigma_{2k}\sigma_{1k} + \sigma_{2k}(1-\sigma_{1k})} = \sigma_{1k} \to 0. \tag{4.4}$$

Так что вера $\mu_3 \geqslant 0{,}5$ не является пределом последовательности вер, полученных из (4.4). Как следствие, в секвенциальном равновесии $(\mathtt{R}, \mathtt{u}, \mathtt{r})$ не может быть профилем стратегий игроков. Однако существует сильно секвенциальное равновесие, в котором игроки выбирают $(\mathtt{R}, \mathtt{d}, \mathtt{l})$: в этом равновесии игра проходит через все информационные множества, а веры игроков определяются однозначно.

4.1.2. СОВЕРШЕННОЕ (ОТНОСИТЕЛЬНО «ДРОЖАЩЕЙ РУКИ») РАВНОВЕСИЕ

Мы сформулировали понятие сильно секвенциального равновесия. Это более строгий, чем совершенство по подыграм, критерий для динамических игр с неполной информацией. Однако пока не был затронут вопрос существования такого равновесия. Для того чтобы дать на него ответ, нам придется ввести еще одно определение равновесия, более строгое, чем секвенциальное равновесие, и доказать его существование.

Рассмотрим игру в нормальной форме. Потребуем от равновесия, чтобы стратегия каждого игрока была наилучшим ответом не только на профиль стратегий остальных игроков, но и на какой-то слегка видоизмененный профиль стратегий: игрок не должен отклоняться от своей стратегии, если у других игроков немного «задрожали руки». Вот соответствующее определение равновесия, предложенное Зелтеном [Selten, 1975]:

Определение 4.6. Пусть G — игра в нормальной форме. Пусть σ — профиль стратегий, причем существует последовательность σ^n вполне смешанных профилей стратегий, таких, что

1. $\sigma^n \to \sigma$,
2. Для всех k и для всех i стратегия σ_i является наилучшим ответом на σ^k_{-i}.

Будем называть σ *совершенным* (или *совершенным относительно дрожащей руки*) равновесием.

Верно следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть G — конечная игра в нормальной форме. Тогда в этой игре существует равновесие, совершенное относительно дрожащей руки.*

Доказательство этого утверждения достаточно длинное; полностью текст доказательства приведен в приложении на с. 281–284.

В приведенной ниже координационной игре каждое из трех равновесий является совершенным:

Игрок 2

Игрок 1	A	B
A	1; 1	0; 0
B	0; 0	1; 1

Пусть p и q — вероятности сыграть A для игроков 1 и 2. Возьмем равновесие $(p,q) = (0,0)$. Тогда последовательность $\sigma^k = (\varepsilon_k, \varepsilon_k)$ при $\varepsilon \to 0$ удовлетворяет условию определения 4.6. Аналогично, $\sigma^k = (1-\varepsilon_k, 1-\varepsilon_k)$ удовлетворяет тому же условию для равновесия $(p,q) = (1,1)$. Для равновесия $(p,q) = \Big(0{,}5; 0{,}5\Big)$ существует единственная такая последовательность $\sigma_k = \Big(0{,}5; 0{,}5\Big)$.

Совсем не обязательно, чтобы σ^* являлся наилучшим ответом на любую последовательность $\sigma^k \to \sigma^*$. Если мы потребуем этого, то равновесие, как правило, не будет существовать. Однако в следующем примере не все равновесия являются совершенными:

Игрок 2

Игрок 1	A	B
A	10; 0	1; 1
B	10; 10	0; 10

Здесь есть два равновесия в чистых стратегиях: (A, B) и (B, A). Второе из них предполагает, что игрок 2 реализует слабо доминируемую стратегию A. Оно не является совершенным относительно «дрожащей руки», так как если игрок 1 реализует A с положительной вероятностью, то игроку 2 выгодно отклониться и сыграть B. Верен следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть* $G = \langle I, S, u \rangle$ *— игра в нормальной форме,* σ^* *— совершенное равновесие в* G*. Пусть стратегия* s_i *для игрока* i *является слабо доминируемой. Тогда* $\sigma_i^*(s_i) = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть S_i — множество чистых стратегий игрока i, $s_i \in S_i$ — слабо доминируемая стратегия, которую мы предполагаем входящей в совершенное равновесие σ_i^* с положительной вероятностью, $s_i' \in S_i$ слабо доминирует s_i, т.е. для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем $u_i(s_i, s_{-i}) \leqslant u_i(s_i', s_{-i})$ и для некоторого s_{-i}' неравенство строгое. Тогда стратегия s_i может быть наилучшим ответом на некоторый смешанный профиль стратегий σ_{-i} только в том случае, если s_{-i}' играется с нулевой вероятностью. Это противоречит предположению о том, что существует последовательность вполне смешанных профилей $\sigma^k \to \sigma^*)$ такая, что $\sigma_i \in \check{\sigma}_i(\sigma_{-i}^k)$ для всех k. Лемма доказана. ■

Справедливо следующее утверждение[2].

Теорема 4.2. *Пусть* Γ *— игра в развернутой форме,* G *— игра в нормальной форме, соответствующая ей. Пусть* σ^* *— совершенное равновесие в* G*. Тогда существует вера* μ*, такая, что* (μ, σ^*) *— сильно секвенциальное равновесие в* Γ.

Таким образом, любое совершенное равновесие является сильно секвенциальным. Обратное неверно: существуют случаи, когда равновесие является сильно секвенциальным, но не совершенным.

Как следствие теорем 4.1 и 4.2, мы доказали еще одну теорему:

Теорема 4.3. *Пусть* Γ *— игра с совершенной памятью. Тогда в ней существует сильно секвенциальное равновесие.*

Теперь мы вправе требовать от равновесия, чтобы оно было секвенциальным.

4.1.3. ИГРЫ С НАБЛЮДАЕМЫМИ ДЕЙСТВИЯМИ

Рассмотрим такой класс игр с несовершенной информацией. Игроки ходят по очереди, причем все ходы всех игроков наблюдаемы; при этом частной информацией является только тип игрока, определяющий его предпочтения относительно различных исходов игры. В такой игре порядок ходов определяется так же, как и в игре с совершенной информацией, причем множество ходов, доступных игроку на каждом этапе игры, не зависит от его типа. Предположим также, что типы игроков независимы.

[2] См., например, Фаденберг и Тироль [Fudenberg, Tirole, 1991].

Формально мы можем дать такое определение:

Определение 4.7. Пусть Γ — игра в развернутой форме с совершенной информацией, $T = T_1 \times \ldots \times T_N$ — множество типов игроков, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \ldots \times \mathsf{P}_N$ — распределение вероятностей на T, u_i — функция выигрышей игрока i, определяющая его выигрыш в зависимости от конечной вершины и его типа t_i, $u = (u_i)_{i=1}^N$. Тогда $\langle \Gamma, T, \mathsf{P}, u \rangle$ — *игра с наблюдаемыми действиями*.

Чему соответствуют вершины в информационных множествах в такой игре? Пусть в информационном множестве h делает ход игрок i. Ему известна предыстория игры, но неизвестны типы остальных игроков. Соответственно, каждая вершина информационного множества h соответствует множеству остальных игроков T_{-i}, где T_{-i} — множество профилей типов всех игроков, кроме i-го; аналогично определяется P_{-i}. Вера μ_h в информационном множестве h — это распределение вероятностей на множестве игроков T_{-i}. Пусть μ_{hj} — распределение вероятностей на множестве T_j типов j-го игрока в информационном множестве h.

Следуя Фаденбергу и Тиролю [Fudenberg, Tirole, 1991], дадим такое определение.

Определение 4.8. Пусть (μ, σ) — система вер и профиль поведенческих стратегий для игры с наблюдаемыми действиями. Назовем систему вер μ *разумной* относительно σ, если выполняется следующее:

1. μ слабо согласована с σ.
2. Пусть h и h' — информационные множества такие, что в множество h' можно попасть одним ходом из множества h. Пусть игрок i не делает ход ни в h, ни в h'. Тогда $\mu_{hi} = \mu_{h'i}$.
3. Пусть h — информационное множество, в котором делает ход игрок i. Тогда $\mu_h = \prod_{j \neq i} \mu_{hj}$. Если o — начальная вершина, i — игрок, делающий первый ход, то $\mu_o = \mathsf{P}_{-i} = \prod_{j \neq i} \mathsf{P}_j$.

Третье требование означает, что в каждом информационном множестве веры игрока i относительно типов остальных игроков являются независимыми. В совокупности со вторым требованием это означает, что пока какой-то игрок не делает ход, остальные игроки не узнают про него ничего нового; таким образом, делая ход, игрок может менять представления игроков только о своем типе, но не о типах остальных игроков.

Определение 4.9. Пусть (σ, μ) — профиль поведенческих стратегий и система вер такие, что μ является разумной относительно σ, а σ — секвенциально рациональна относительно μ. Тогда (σ, μ) называется *совершенным байесовым равновесием*.

Байесово равновесие — намного более удобное для работы понятие, чем сильное секвенциальное равновесие. Доказать, что система вер μ является разумной относительно σ, гораздо легче, нежели доказать сильную согласованность, так как нам не требуется доказывать что-то относительно сходящихся последовательностей. С другой стороны, сильное секвенциальное равновесие отвечает довольно строгому критерию реализма: если равновесие является сильно секвенциальным, то оно не будет «паталогическим» — как, например, слабо секвенциальное равновесие $(\mathtt{R}, \mathtt{u}, \mathtt{r})$ на рис. 4.4. Поэтому представляется интересным такой вопрос: в каком случае мы, найдя совершенное байесово равновесие, можем быть уверены, что это равновесие является сильно секвенциальным, и в каком случае верно обратное — то, что секвенциальное равновесие является совершенным байесовым равновесием?

Тироль и Фаденберг [Fudenberg, Tirole, 1991] доказали такой результат:

Теорема 4.4. *Пусть* Γ *— игра с наблюдаемыми действиями, для которой выполнено одно из двух следующих условий:*

1. *У каждого игрока не более двух типов.*
2. *В игре не более двух периодов.*

Тогда (σ, μ) *является совершенным байесовым равновесием в том и только в том случае, когда оно является сильно секвенциальным равновесим.*

Если у какого-то игрока — больше двух типов, а периодов больше двух, то для некоторых (но не для всех) таких игр существуют (σ, μ), которые являются совершенными байесовыми равновесиями, но при этом не являются секвенциальными равновесиями.

4.2. СИГНАЛЬНЫЕ ИГРЫ

На окраине рабочего квартала большого города есть заведение, в котором можно вкусно поесть и выпить. За столиком у окна сидит хулиган — наглый и невоспитанный молодой человек, любящий приставать к проходящим мимо него людям. В заведение заходит человек средних лет и направляется к барной стойке. Хулиган смотрит на него, пытаясь понять, какой характер у пришельца и какой жизненный опыт у него за плечами. Если он слабак — интеллигент, выросший в центре города, в тепличных условиях — то хулиган с удовольствием нахамит ему и попытается с ним подраться. Но что, если пришелец крутой и сам вырос на рабочих окраинах? В таком случае хулиган знает, что лучше с ним не связываться: можно получить сдачи. Вошедший подходит к барной стойке. Хулиган знает, что крутой парень с рабочих окраин в такой ситуации обычно заказывает бутылку пива, а интеллигент из центра города — чашку кофе. Вошедший заказал пиво. Означает ли это, что вошедший — крутой парень, с которым лучше не связываться? Или, может быть, это — интеллигент, который заказал нелюбимый напиток для того, чтобы походить на крутого и ввести хулигана в заблуждение?

4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Данная ситуация является частным случаем игры с наблюдаемыми действиями с двумя игроками, последовательно делающими ходы. Она соответствует вот такому определению:

Определение 4.10. *Сигнальная игра* — это игра с наблюдаемыми действиями, в которой

1. Два игрока — отправитель S и получатель R.
2. У получателя один тип, у отправителя — больше одного.
3. Первый ход делает отправитель, второй ход — получатель.

Действительно, отправитель — тип которого неизвестен — может сигнализировать свой тип второму игроку, выбирая какое-то наблюдаемое действие. Как, например, напиток, выбранный вошедшим в кафе посетителем, сигнализирует хулигану тип посетителя, или как наличие или отсутствие престижного диплома у соискателя может на самом деле давать сигнал относительно его трудолюбия.

Мы знаем, что наличие только двух периодов в игре с наблюдаемыми действиями — достаточное условие для того, чтобы совершенное байесово равновесие было секвенциальным. Переформулируем определение равновесия для сигнальной игры. Обозначим через T множество типов игрока S. Пусть M — множество действий (или сигналов) для этого игрока. Пусть $m\colon T \to M$ — стратегия игрока S, предписывающая определенное действие в зависимости от типа.

Информационные множества игрока R будут соответствовать сигналам, которые может послать игрок S. Пусть $\mu(t \mid m)$ — вера игрока R относительно того, что игрок S имеет тип $t \in T$ при условии, что его первый ход был $m \in M$. Обозначим через A множество действий игрока R. Пусть $a\colon M \to A$ — стратегия игрока R, предписывающая действие в зависимости от сигнала, испущенного игроком S. Обозначим через $u_S(t,m,a)$ и $u_R(t,m,a)$ выигрыши двух игроков.

Совершенное байесово равновесие, введенное в определении 4.9, можно переформулировать следующим образом.

Определение 4.11. *Совершенное байесово равновесие* в чистых стратегиях[3] в сигнальной игре есть набор $(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|\cdot))$, такой, что

1. Для любого $m \in M$ действие $a^*(m)$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока R при системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$, т.е. для всех $a' \in A$ выполнено

$$\sum_{t\in T} \mu(t \mid m) u_R(t,m,a^*(m)) \geqslant \sum_{t\in T} \mu(t \mid m) u_R(t,m,a'). \tag{4.5}$$

[3] Определить совершенное байесово равновесие в смешанных стратегиях почти так же просто; потребуется только немного иначе определить понятие согласованности системы вер, что мы и сделаем в одном из последующих примеров.

2. Для всех $t \in T$ действие $m^*(t)$ игрока S максимизирует его выигрыш при условии, что игрок R будет играть равновесную стратегию $a^*(\cdot)$:
$$u_S(t, m^*(t), a^*(m^*(t))) \geqslant u_S(t, m', a^*(m')) \tag{4.6}$$
для всех $m' \in M$.
3. Для всех $m \in M$ таких, что существует $\widetilde{t} \in T$ со свойством $m^*(\widetilde{t}) = m$, вера игрока R после хода m определяется по правилу Байеса:
$$\mu(t \mid m) = \frac{\mathsf{P}(t)}{\sum_{t' \in T_m} \mathsf{P}(t')}, \tag{4.7}$$
где $\mathsf{P}(t)$ — вероятность того, что игрок S имеет тип $t \in T$, а T_m — все типы игроков t', такие, что $m^*(t') = m$.

Первые два требования в этом равновесии — секвенциальная рациональность игроков. Третье требование — согласованность системы вер со стратегиями игроков.

4.2.2. ПРОСТОЙ ПРИМЕР СИГНАЛЬНОЙ ИГРЫ

Вернемся к игре, описанной в начале данного раздела. Хулиган является игроком R, пришелец — игроком S. Хулиган обладает единственным типом, у пришельца два типа: 1 (крутой, с вероятностью p) и 2 (слабак, с вероятностью $1 - p$). Шаговая игра состоит из двух этапов: сначала пришедший решает, какой напиток ему заказать — H (пиво) или L (кофе), затем хулиган решает, драться с пришедшим или нет (h или l). Выигрыш пришедшего (вне зависимости от его типа) равен 1, если ему удалось избежать драки, и 0, если ему пришлось драться. Дополнительно, он несет издержки $c > 0$ в том случае, если ему приходится пить нелюбимый напиток (кофе для крутого и пиво для слабака). Хулиган получает выигрыш 1 в том случае, если он дерется со слабаком или не дерется с крутым, и выигрыш 0 в противном случае. Дерево этой игры изображено на рис. 4.5.

Пусть $m(1)$, $m(2) \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$ — ходы первого игрока в зависимости от его типа. Пусть $a(\mathtt{H})$, $a(\mathtt{L}) \in \{\mathtt{h}, \mathtt{l}\}$ — ходы второго игрока в зависимости от того, каким был ход первого игрока. Найдем совершенное байесово равновесие и выпишем условия, которым оно должно удовлетворять.

1. Для нахождения равновесия в этой игре мы должны ввести веры μ_H, $\mu_L \in [0, 1]$. Первая из этих двух величин — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он купил пиво. Вторая величина — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он купил кофе. Система вер является согласованной со стратегией игрока S, если она удовлетворяет следующим условиям:
   (a) $\mu_H = p$, $\mu_L \in [0, 1]$, если $m(1) = \mathtt{H}$, $m(2) = \mathtt{H}$;
   (b) $\mu_H = 1$, $\mu_L = 0$, если $m(1) = \mathtt{H}$, $m(2) = \mathtt{L}$;

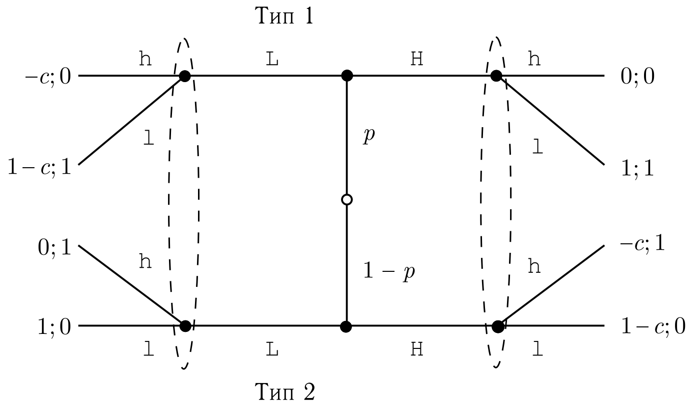


Рис. 4.5. Игра «пиво или кофе?»

(c) $\mu_H = 0$, $\mu_L = 1$, если $m(1) = \mathtt{L}$, $m(2) = \mathtt{H}$;

(d) $\mu_H \in [0,1]$, $\mu_L = p$, если $m(1) = \mathtt{L}$, $m(2) = \mathtt{L}$.

2. Найдем, каким условиям удовлетворяет стратегия игрока R, если она рациональна относительно системы вер (μ_H, μ_L). Ожидаемый выигрыш хулигана *в информационном множестве H* — т.е. если ход игрока S был H — при собственном ходе h равен

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(u_R(\cdot, \mathtt{H}, \mathtt{h})) &= \mu_H \cdot u_R(1, \mathtt{H}, \mathtt{h}) + (1-\mu_H) \cdot u_R(2, \mathtt{H}, \mathtt{h}) = \\ &= \mu_H \cdot 0 + (1-\mu_H) \cdot 1 = 1 - \mu_H, \end{aligned} \tag{4.8}$$

а при собственном ходе l —

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(u_R(\cdot, \mathtt{H}, \mathtt{l})) &= \mu_H \cdot u_R(1, \mathtt{H}, \mathtt{l}) + (1-\mu_H) \cdot u_R(2, \mathtt{H}, \mathtt{l}) = \\ &= \mu_H \cdot 1 + (1-\mu_H) \cdot 0 = \mu_H. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Аналогично получим выигрыши в информационном множестве L. Следовательно, для $m \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$ мы должны иметь

$$a(m) = \begin{cases} \mathtt{h}, & \mu_m < 0{,}5; \\ \{\mathtt{h}, \mathtt{l}\}, & \mu_m = 0{,}5; \\ \mathtt{l}, & \mu_m > 0{,}5. \end{cases} \tag{4.10}$$

3. Какой должна быть стратегия игрока S в зависимости от стратегии игрока R? При $c < 1$ мы получим

$$(m(1), m(2)) = \begin{cases} (\mathtt{H}, \mathtt{L}), & a(\mathtt{H}) = \mathtt{h}, a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}; \\ (\mathtt{L}, \mathtt{L}), & a(\mathtt{H}) = \mathtt{h}, a(\mathtt{L}) = \mathtt{l}; \\ (\mathtt{H}, \mathtt{H}), & a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}, a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}; \\ (\mathtt{H}, \mathtt{L}), & a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}, a(\mathtt{L}) = \mathtt{l}. \end{cases} \tag{4.11}$$

При $c > 1$ мы будем иметь $(m(1), m(2)) = (\mathtt{H}, \mathtt{L})$ вне зависимости от $a(\mathtt{H})$ и $a(\mathtt{L})$.

Равновесием в этой игре является набор $(m^*(1),\ m^*(2),\ a^*(\mathtt{H}),\ a^*(\mathtt{L}),$ $\mu^*_H,\ \mu^*_L)$, удовлетворяющий всем трем перечисленным выше условиям. Число и тип равновесий зависят от значения параметра c:

1. Если $c < 1$ и $p \geqslant 0{,}5$, то равновесий два:
   (a) $m^*(1) = m^*(2) = \mathtt{H},\ a^*(\mathtt{H}) = \mathtt{l},\ a^*(\mathtt{L}) = \mathtt{h},\ \mu^*_H = p,\ \mu^*_L \in [0; 0{,}5]$.
   (b) $m^*(1) = m^*(2) = \mathtt{L},\ a^*(\mathtt{H}) = \mathtt{h},\ a^*(\mathtt{L}) = \mathtt{l},\ \mu^*_L = p,\ \mu^*_H \in [0; 0{,}5]$.
2. Если $c < 1$ и $p < 0{,}5$, то равновесия в чистых стратегиях нет.
3. Если $c > 1$, то равновесие в чистых стратегиях одно: $m^*(1) = \mathtt{H}$, $m^*(2) = \mathtt{L}$, $a^*(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$, $a^*(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$, $\mu^*_H = 1$, $\mu^*_L = 0$.

Мы видим, что возможны два типа равновесий. Первые два равновесия являются *смешивающими*, в которых игроки S разных типов выбирают одно и то же действие. То есть в нашей истории это означает, что и крутой, и слабак будут заказывать один и тот же напиток. В каком случае это возможно? Во-первых, необходимо, чтобы число крутых было достаточно большим $\big(p \geqslant 0{,}5\big)$. В таком случае хулиган, видя, что вошедший заказывает «то же, что и все», поостережется нападать, так как вероятность нарваться на «крутого» будет слишком велика. Во-вторых, необходимо, чтобы издержки от употребления нелюбимого напитка были ниже, чем издержки от драки. Если оба типа игроков заказывают один и тот же напиток, то обязательно получится так, что для одного из них этот напиток будет нелюбимым.

Второй тип равновесий — *разделяющие*, в которых игроки S разных типов выбирают разные действия. В нашем случае такое равновесие одно, в котором крутой будет выбирать пиво, а слабак — кофе. Такое равновесие будет возможным, если издержки от употребления нелюбимого напитка более высоки, чем издержки от драки.

Что же происходит в том случае, если $c < 1$ и $p < 0{,}5$? Равновесия в чистых стратегиях нет, однако согласно теореме должно существовать совершенное равновесие, которое обязательно будет предполагать наличие хотя бы у одного из игроков смешанных стратегий. Попробуем найти равновесие в смешанных стратегиях в этой игре. Пусть $q_1, q_2 \in [\,0, 1]$ — вероятности, с которыми игрок S выбирает действие $\mathtt{H}$ в том случае, когда его тип равен 1 или 2 соответственно. Если $p\,q_1 > 0$ или $(1-p)\,q_2 > 0$, то по правилу Байеса вера игрока R в информационном множестве H будет равна

$$\mu_H = \frac{p\,q_1}{p\,q_1 + (1-p)\,q_2}. \tag{4.12}$$

Если $p\,q_1 = (1-p)\,q_2 = 0$, возьмем любой $\mu_H \in [0, 1]$. Аналогично получим

$$\mu_L = \frac{p\,(1-q_1)}{p\,(1-q_1) + (1-p)(1-q_2)} \tag{4.13}$$

при условии того, что $p(1-q_1) > 0$ или $(1-p)(1-q_2) > 0$, и $\mu_L \in [0,1]$ в обратном случае.

Пусть v_H, v_L — вероятности, с которыми игрок R выберет действие $\mathtt{h}$ в информационных множествах H и L соответственно. Найдем функцию реакции игрока R. Эта функция будет определена относительно вер μ_H, μ_L:

$$v_H = \begin{cases} 1, & \mu_H < 0{,}5; \\ [0{,}1], & \mu_H = 0{,}5; \\ 0, & \mu_H > 0{,}5; \end{cases} \tag{4.14}$$

$$v_L = \begin{cases} 1, & \mu_L < 0{,}5; \\ [0{,}1], & \mu_L = 0{,}5; \\ 0, & \mu_L > 0{,}5. \end{cases} \tag{4.15}$$

Наконец, найдем ожидаемый выигрыш игрока S в зависимости от его типа и выбираемого им действия. При типе 1 и действии $\mathtt{H}$ мы имеем

$$\mathsf{E}(u_S(1,\mathtt{H})) = 1 - v_H. \tag{4.16}$$

Аналогично,

$$\mathsf{E}(u_S(2,\mathtt{H})) = 1 - v_H - c, \quad \mathsf{E}(u_S(1,\mathtt{L})) = 1 - v_L - c, \quad \mathsf{E}(u_S(2,\mathtt{L})) = 1 - v_L. \tag{4.17}$$

В равновесии мы обязаны иметь

$$q_1 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H > 1 - v_L - c; \\ [0{,}1], & 1 - v_H = 1 - v_L - c; \\ 0, & 1 - v_H < 1 - v_L - c; \end{cases} \tag{4.18}$$

и

$$q_2 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H - c > 1 - v_L; \\ [0{,}1], & 1 - v_H - c = 1 - v_L; \\ 0, & 1 - v_H - c < 1 - v_L. \end{cases} \tag{4.19}$$

Равновесием будет любой вектор $(q_1, q_2, v_H, v_L, \mu_H, \mu_L)$, удовлетворяющий условиям (4.12)–(4.15), (4.18) и (4.19).

Посмотрим, существует ли равновесие, в котором $q_2 \in (0,1)$. В таком равновесии мы должны иметь $q_1 = 1$ согласно (4.18) и (4.19). Следовательно, мы имеем

$$\mu_H = \frac{p}{p + (1-p)\,q_2} \tag{4.20}$$

и $\mu_L = 0$. Из (4.15) и (4.19) получим, что $v_H = 1 - c$ и $v_L = 1$. Из (4.14) следует, что $\mu_H = 0{,}5$ и $q_2 = p/(1-p)$. Если $p < 0{,}5$, то $q_2 < 1$, как мы и предполагали. Такое равновесие называется *гибридным* — один тип игрока S играет чистую стратегию, другой — смешанную.

Войско в осажденном городе. Вот история из древнего Китая, описанная в комментариях к книге Сун Цзы «Искусство войны» [4]. Дело было давным-давно, в эпоху Троецарствия. Великий полководец Чжугэ Лян (реальная личность, годы жизни 181–234 гг. н.э.) оказался в одном пограничном городе с небольшим отрядом, когда ему доложили, что на город движется огромная вражеская армия, ведомая опытным военачальником Сыма И. Что сделал Чжугэ Лян? Вместо того, чтобы бежать, он приказал открыть ворота города. Своих немногих солдат он переодел в горожан и приказал им подметать улицы перед воротами, а сам, в сопровождении двух оруженосцев, поднялся на городскую стену и достал свой любимый музыкальный инструмент — цитру с выгнутой декой. Когда Сыма И во главе отряда разведчиков подъехал ближе, он увидел идиллическую картину — пустой город с открытыми воротами и Чжугэ Ляна, мирно играющего на цитре на городских стенах.

Сыма И подумал: «Это ловушка. Наверняка в городе прячется большое войско, и если мы войдем в город, то можем оказаться в западне. Не станет же такой хитрый и осторожный полководец, как Чжугэ Лян, вести себя столь безрассудно, чтобы с малым отрядом оставаться в городе. Нет, у него должно быть столь же большое войско, как и у меня!» Поразмышляв немного, он приказал отступить.

Эта история представима как игра двух игроков с неполной информацией. Первый игрок — Чжугэ Лян — может быть двух типов. Он может обладать большим войском (тип 1), либо маленьким отрядом (тип 2). Пусть λ — вероятность того, что Чжугэ Лян имеет тип 1. В начале игры у Чжугэ Ляна есть два варианта действий. Он может либо отступить (R), либо остаться с городе (D). Если он отступает, то теряет город, проигрывая c. Поскольку идет война, выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Если же первый игрок остается в городе, то второй игрок решает: атаковать ему, или отступать (a или r). Если он отступает, то оба игрока получают нулевой выигрыш. Если он атакует, то выигрыш игроков зависит от типа первого игрока. Если первый игрок имеет тип 2, то первый игрок проигрывает $x > c$ (так как помимо потери города гибнет его отряд, а он сам попадает в плен). Если же первый игрок имеет тип 1, то в сражении он одержит победу, и его выигрыш составит $w > 0$. Дерево этой игры представлено на рис. 4.6.

Найдем совершенное байесово равновесие в этой игре. Сразу заметим, что если первый игрок имеет тип 1, то его доминирующая стратегия — остаться в городе. Нам остается найти p — вероятность того, что игрок 1 сыграет D, имея тип 2, и q — вероятность того, что второй игрок выберет действие a. Вера второго игрока в его информационном множестве

[4] История взята из книги Х. фон Зенгера [Зенгер, 2004]. Теоретико-игровой пример разобран в статье Коттона и Ли [Cotton, Liu, 2011].

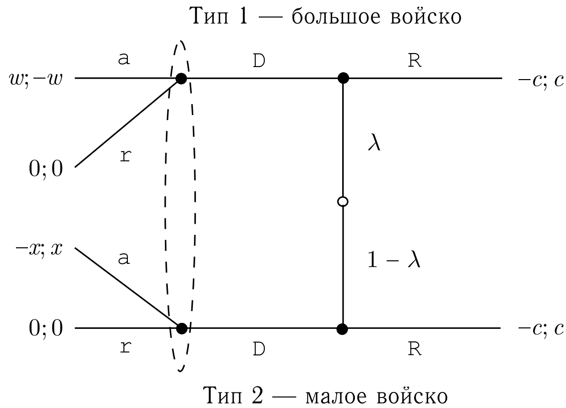


Рис. 4.6. Стратагема «открытый город»

всегда вычислима по правилу Байеса:

$$\mu_D = \frac{\lambda}{\lambda + p\,(1-\lambda)}. \tag{4.21}$$

Это — вероятность, которую второй игрок приписывает событию, что первый игрок имеет тип 1. Мы можем выписать функции выигрышей первого игрока, имеющего тип 2, и второго игрока в зависимости от p и q:

$$u_1(p,q,2) = -x\,q\,p - c\,(1-p), \tag{4.22}$$

$$u_2(p,q) = \big(\lambda + p\,(1-\lambda)\big)\,q\,\big(x\,(1-\mu_D) - w\,\mu_D\big) + c\,(1-p)(1-\lambda). \tag{4.23}$$

Найдем функции реакции игроков. Мы имеем

$$\check{p}(q) = \begin{cases} 1, & c > x\,q; \\ [\,0{,}1], & c = x\,q; \\ 0, & c < x\,q; \end{cases} \tag{4.24}$$

и

$$\check{q}(p) = \begin{cases} 1, & x\,p\,(1-\lambda) > w\lambda; \\ [\,0{,}1], & x\,p\,(1-\lambda) = w\lambda; \\ 0, & x\,p\,(1-\lambda) < w\lambda. \end{cases} \tag{4.25}$$

Здесь возможны три случая:

1. Если $\dfrac{w\,\lambda}{x\,(1-\lambda)} > 1$, то в равновесии мы имеем смешивающее равновесие $p = 1$ и $q = 0$. В таком случае, Чжугэ Лян принимает решение остаться в городе с малым отрядом. При этом вероятность того, что у него малый отряд, достаточно мала для того, чтобы Сыма И отступил, увидев Чжугэ Ляна на городских стенах.
2. Если $\dfrac{w\,\lambda}{x\,(1-\lambda)} < 1$, то у нас наблюдается *гибридное равновесие*. Чжугэ Лян всегда остается в городе с большой армией и остается

с вероятностью $p^* = \dfrac{w\,\lambda}{x\,(1-\lambda)}$ с малым отрядом. Сыма И нападает с вероятностью $q^* = c/x$.

3. Если $\dfrac{w\,\lambda}{x\,(1-\lambda)} = 1$, то у нас континуум равновесий. Мы всегда имеем $p^* = 1$, но нам подойдет любой $q^* \in [0;\, c/x]$.

Говорят, что Чжугэ Лян действовал безрассудно, но своим безрассудством смог обмануть противника. Однако в этой истории оба военачальника могли поступать абсолютно рационально. Сыма И, видя открытые городские ворота, понимал, что, скорее всего, Чжугэ Лян находится во главе большого войска и предлагает ему положить руку в капкан. Сыма И мог допускать возможность того, что Чжугэ Лян пытается его обмануть, но мог посчитать слишком малой вероятность того, что у Чжугэ Ляна окажется так мало солдат. Чжугэ Лян, предвидя стратегию Сыма И, решился остаться в городе с малым отрядом. Таково теоретико-игровое объяснение этой древней легендарной истории.

4.2.3. СИГНАЛИЗИРОВАНИЕ НА РЫНКЕ ТРУДА

В 1999 г. я закончил Российскую экономическую школу — весьма престижную магистерскую программу по экономике. Учиться там было непросто, и уровень моих однокурсников был также очень высок. Бóльшая часть из них за плечами имела хорошее техническое образование — механико-математический или физический факультеты МГУ, МФТИ, МИФИ. Остальные были лучшими выпускниками гуманитарных вузов: экономического факультета МГУ, ВШЭ. После окончания студент РЭШ может рассчитывать на высокую зарплату в частном секторе; средняя стартовая зарплата выпускника РЭШ намного превышает аналогичные показатели для других вузов с открытым набором. Почему работодатели готовы платить бóльшие деньги выпускнику престижного вуза? Это происходит из-за того, что образование является инвестицией в человеческий капитал и повышает производительность работника и, следовательно, его привлекательность для работодателя? Или это происходит потому, что в такой программе, как РЭШ, учиться очень сложно, и что туда изначально поступают только самые сильные студенты? Ответ, скорее всего, лежит где-то посередине. Однако последней из перечисленных двух причин может быть вполне достаточно. Таков был аргумент, впервые предложенный Майклом Спенсом [Spence, 1973]: образование служит сигналом того, что обладатель «корочек» является высокопроизводительным работником.

Рассмотрим такую игру.

1. В момент времени $t = 0$ «природа» определяет тип работника: высокопроизводительный $\theta = \theta_H$ или низкопроизводительный $\theta = \theta_L$. Пусть p — вероятность того, что $\theta = \theta_H$.

2. В момент времени $t = 1$ работник решает, сколько усилий ему следует потратить на приобретение образования. Пусть $e \geqslant 0$ — уровень образования работника. Эта величина является наблюдаемой в отличие от θ, которая является частной информацией, и известна только самому работнику.
3. В момент времени $t = 2$ каждая из двух фирм предлагает работнику контракт $w(e)$, увязывающий заработную плату с качеством полученного образования.
4. В момент времени $t = 3$ работник решает, предложение какой из двух фирм ему стоит принять. Будем считать, что если обе фирмы предложат ему равные зарплаты, то он выберет предложение каждой из двух фирм с вероятностью $1/2$.

Уровень усилий e можно интерпретировать как качество образования, получаемого работником. В наше время все заканчивают среднюю школу; вакансии требуют наличия высшего образования, продолжительность которого, как правило, стандартизирована и составляет от 4 до 6 лет. Однако качество образования может сильно отличаться от одного вуза к другому и, как правило, тесно связано с тем, насколько легко студенту учиться в этом вузе. Сложность учебной программы, мотивация преподавателей, лояльность преподавателей и учебной части к студентам, готовность отчислять неуспевающих, нетерпимость по отношению к списыванию — все это определяет, насколько много надо работать ради того, чтобы получить заветный диплом. А работать не хочется — ведь то же самое время можно потратить на клубы, кино, игру в преферанс и покер, поездки на море, и еще многое другое. Но надо учиться — не в последнюю очередь для того, чтобы «сойти за умного», тем более, если работодателям известно, в каких вузах учиться тяжело, а в каких — нет.

Пусть выигрыш фирмы, если она взяла на работу человека с производительностью θ на зарплату w, равен

$$U = \theta - w. \tag{4.26}$$

Прибыль равна нулю, если работник не принял ее предложение.

Будем считать, что выигрыш работника равен зарплате минус издержки на получение образования:

$$u\,(w, e, \theta) = w - c\,(e, \theta), \tag{4.27}$$

где e — уровень образования, θ — тип работника.

Сделаем два предположения относительно функции издержек $c\,(e, \theta)$. Во-первых, будем считать, что более производительный работник тратит меньше усилий на получение данного уровня образования[5]: $c\,(e, \theta_L) >$

[5] Здесь $c_e(e, \theta) = \partial\, c\,(e, \theta)/\partial\, e$.

$> c(e,\theta_H)$ для всех $e \geqslant 0$, причем $c(0,\theta_L) = c(0,\theta_H) = 0$. Во-вторых, предположим, что каждая дополнительная единица образования более затратна для менее производительного работника: $c_e(e,\theta_L) > c_e(e,\theta_H)$ для всех $e \geqslant 0$. Из последнего свойства следует, что в системе координат e–w кривые безразличия работников двух типов не будут пересекаться более одного раза, т.е. ни для каких (w,e) и (w',e') мы не можем иметь $u(w,e,\theta_L) = u(w',e',\theta_L)$ и $u(w,e,\theta_H) = u(w',e',\theta_H)$. Будем говорить, что функции выигрыша удовлетворяет *свойству однократного пересечения* (см. рис. 4.7).

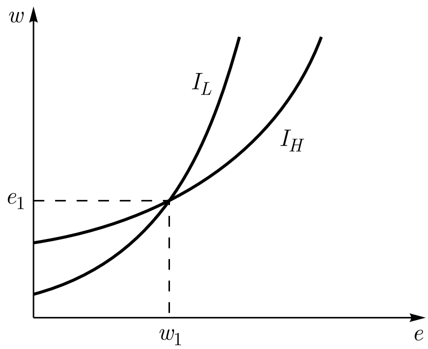


Рис. 4.7. Свойство однократного пересечения кривых безразличия

На данном рисунке показаны I_H и I_L — кривые безразличия производительного и непроизводительного работников, соответствующие уровням выигрыша $\overline{u}_H = u(w_1,e_1,\theta_H)$ и $\overline{u}_L = u(w_1,e_1,\theta_L)$.

Для нахождения байесова равновесия в этой игре нам необходимо знать

1. e_H, e_L — уровни образования, выбранные работниками с производительностью θ_H и θ_L.
2. $\mu(e) = \mu(\theta = \theta_H \mid e)$ — веру каждой из фирм при данном e.
3. $w_1(e)$, $w_2(e)$ — какую зарплату каждая фирма предложит в зависимости от уровня образования.

Пусть в момент времени $t = 1$ уровень образования работника составляет e. Покажем, что в равновесии в $t = 2$ мы должны иметь

$$w_1(e) = w_2(e) = \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L. \tag{4.28}$$

Для начала убедимся, что этот уровень зарплат является равновесным. Выигрыш каждой фирмы равен нулю. Пусть одна из двух фирм предложила зарплату $w' > \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L$. Тогда в момент времени $t = 3$ работник примет предложение этой фирмы, а ее ожидаемый выигрыш составит $u' = \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L - w' < 0$. Если же фирма предлагает $w' < \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L$, то работник не станет принимать ее предложение, так что выигрыш этой фирмы будет равен нулю.

Далее покажем, что равновесий с другими зарплатами не существует. В равновесии мы не можем иметь $w_1 \leqslant w_2$ при $w_2 > \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L$, ибо фирма 2 получит отрицательный выигрыш (она всегда может обеспечить себе нулевой выигрыш, выбрав w_2 согласно (4.28)). Следовательно, без потери общности мы имеем $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L$. Но если $w_1 < w_2$, то фирма 2 может увеличить свой выигрыш, предложив зарплату $(w_1{+}w_2)/2$. Также невозможно, чтобы $w_1 = w_2 < \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L$;

в таком случае фирма 1 может увеличить выигрыш, предложив, например, зарплату $w_1' = 0{,}1\, w_2 + 0{,}9\,\big(\mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L\big)$.

Рассмотрим сначала разделяющее равновесие, в котором $e_H \neq e_L$. Так как вера $\mu(e)$ должна находиться согласно правилу Байеса, мы должны иметь $\mu(e_H) = 1$ и $\mu(e_L) = 0$. Это позволяет нам установить истинность первой части следующего утверждения.

Утверждение 4.1. *В разделяющем равновесии мы имеем следующие чистые стратегии*:
1. $w_L = w(e_L) = \theta_L$ *и* $w_H = w(e_H) = \theta_H$.
2. $e_L = 0$.

Вторая часть утверждения следует из того, что если $e_L > 0$, то при любом $\mu(0)$ работник может увеличить свой выигрыш, взяв $e_L' = 0$:

$$u\,(w(e_L), e_L, \theta_L) = \theta_L - c\,(e_L, \theta_L) < \\ < \mu(0)\,\theta_H + (1-\mu(0))\,\theta_L - c\,(0, \theta_L), \qquad (4.29)$$

так как c убывает по e.

Чему равен уровень образования производительного работника e_H? Он должет отвечать двум условиям. Во-первых, он не должен быть слишком низким, иначе низкопроизводительный работник также захочет выбрать уровень образования e_H для того, чтобы получить зарплату θ_H, т.е. должно выполняться следующее неравенство:

$$\theta_L - c\,(0, \theta_L) \geqslant \theta_H - c\,(e_H, \theta_L). \qquad (4.30)$$

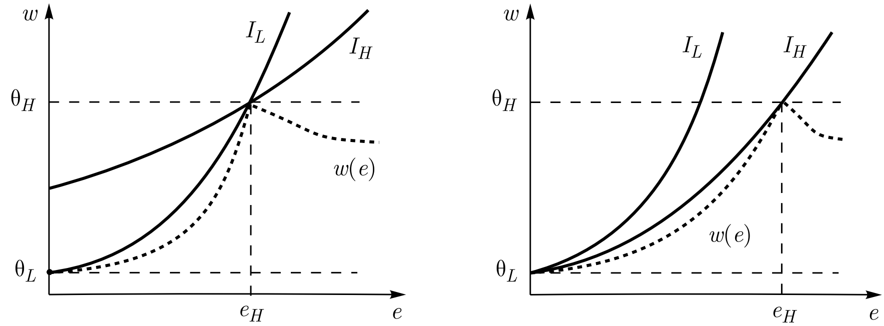
Во-вторых, e_H не должен быть слишком высоким, иначе высокопроизводительный работник предпочтет уровень образования $e_L = 0$ и зарплату θ_L. Это означает, что мы должны иметь

$$\theta_H - c\,(e_H, \theta_H) \geqslant \theta_L - c\,(0, \theta_H). \qquad (4.31)$$

Для того чтобы определить равновесие, нам осталось выбрать функцию веры $\mu(e)$. По правилу Байеса мы должны иметь $\mu(e_L) = 0$, $\mu(e_H) = 1$. Нам осталось определить, как должна выглядеть функция $\mu(e)$ для $e \neq 0$, $e \neq 1$, т.е. вне траектории игры. Для того чтобы $e_L = 0$ и e_H были равновесными стратегиями, нам необходимо, чтобы они максимизировали функции выигрышей работника с производительностью θ_L и θ_H при условии, что фирмы устанавливают зарплату согласно (4.28), т.е. для всех $e \geqslant 0$ значение $\mu(e)$ должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L - c\,(e, \theta_L) \leqslant \theta_L - c\,(0, \theta_L), \\ &\mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L - c\,(e, \theta_H) \leqslant \theta_H - c\,(e_H, \theta_H). \end{aligned} \qquad (4.32)$$

Графически весь диапазон возможных решений нашей задачи представлен на рис. 4.8.



а) Самый маленький возможный e_H *б*) Самый большой возможный e_H

Рис. 4.8. Разделяющие равновесия в сигнальной игре на рынке труда

На рис. 4.8, *а* неравенство (4.30) выполняется со знаком равенства. На рис. 4.8, *б* со знаком равенства выполняется неравенство (4.31). В обоих случаях нас устраивает любая вера $\mu(e)$, такая, что график функции $w(e)$ целиком лежит ниже кривых безразличия I_H и I_L.

В *смешивающем равновесии* работники обоих типов выберут один и тот же уровень образования e^*. Заработная плата в равновесии будет равняться

$$w^* = w(e^*) = p\,\theta_H + (1-p)\,\theta_L, \tag{4.33}$$

где p — доля высокопроизводительных работников. Заметим, что при нахождении разделяющего равновесия величина p нами не использовалась: если e_H удовлетворял условиям (4.30), (4.31), то для любого $p \in (0,1)$ существовала функция веры, которая давала нам разделяющее равновесие (например, если $\mu(e) = 0$ при $e < e_H$ и $\mu = 1$ при $e \geqslant e_H$).

Каким условиям должен удовлетворять уровень образования e^*? Необходимо, чтобы низкопроизводительный работник согласился бы на зарплату w^* и уровень образования e^* при возможности получить любой другой уровень образования e и равновесную зарплату (4.28), соответствующую этому e. Мы должны иметь

$$w^* - c\,(e^*, \theta_L) \geqslant \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L - c\,(e, \theta_L) \tag{4.34}$$

для всех e. Аналогичное условие

$$w^* - c\,(e^*, \theta_H) \geqslant \mu(e)\,\theta_H + (1-\mu(e))\,\theta_L - c\,(e, \theta_H) \tag{4.35}$$

должно выполняться для производительного работника.

Минимальный возможный уровень образования в смешивающем равновесии — нулевой. Действительно, возьмем, например, такую функцию веры:

$$\mu(e) = p, \tag{4.36}$$

т.е. когда уровень образования не дает работодателю никакой информации относительно качества работника. При такой вере работники обоих типов выберут $e_L = e_H = 0$. Таким образом, $\mu(0)$ будет соответствовать правилу Байеса.

Каков максимально возможный уровень образования в смешивающем равновесии? Предположим, что $\mu(e) = 0$ при $e < e^*$. Тогда условие (4.34) будет выполняться, если

$$w^* - c(e^*, \theta_L) \geqslant \theta_L - c(0, \theta_L). \quad (4.37)$$

На рис. 4.9 показано смешивающее равновесие для $e = \overline{e}$ — максимально возможного уровня образования в смешанном равновесии.

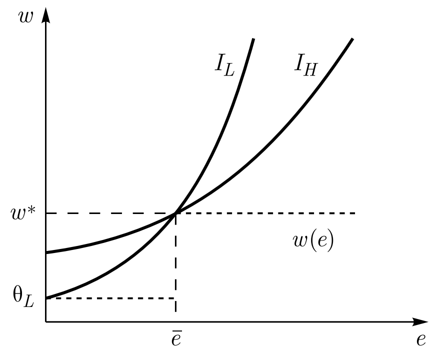


Рис. 4.9. Смешивающее равновесие с максимальным $e = \overline{e}$

При большем значении e смешивающее равновесие невозможно, так как низкопроизводительный работник предпочтет выбрать уровень образования $e_L = 0$ при заработной плате θ_L.

4.2.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА РАВНОВЕСИЯ В СИГНАЛЬНЫХ ИГРАХ

В прошлом примере мы рассмотрели возможность существования смешивающих равновесий в модели сигнализирования на рынке труда. Мы показали, что существует много таких равновесий для каждого $e \in [0, \overline{e}]$.

Разнообразие равновесий — как смешивающих, так и разделяющих — есть следствие того, что мы можем произвольно задавать функцию веры $\mu(e)$ для неравновесных значений e. Например, смешивающее равновесие, изображенное на рис. 4.9, перестает существовать, если мы зададим в качестве функции веры любую функцию, в которой $\mu(e) = 1$ при $e \in (\widehat{e}, \widetilde{e}]$, где $\widetilde{e}$ удовлетворяет условию $\theta_H - c(\widetilde{e}, \theta_H) = \theta_L - c(0, \theta_H)$ и $\widehat{e}$ удовлетворяет условию $\theta_H - c(\widehat{e}, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$. Пример такой функции веры изображен на рис. 4.10.

В этом конкретном примере функция веры имеет вид:

$$\mu(e) = \begin{cases} 0, & e < \overline{e}; \\ p, & e \in [\overline{e}, \widehat{e}); \\ 1, & e > \widehat{e}. \end{cases} \quad (4.38)$$

Почему такая функция веры более реалистична, чем та, которая приведена на рис. 4.9? Потому, что она лучше отражает наши предположения о рациональности игроков. Действительно, предположим, что мы наблюдаем работника с уровнем образования, превышающем $\widehat{e}$. Может ли это быть работник с низким уровнем производительности $\theta = \theta_L$? Скорее всего,

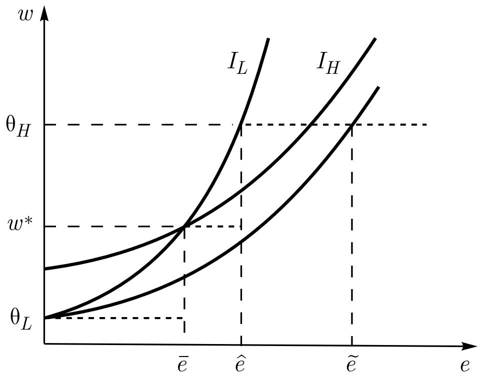


Рис. 4.10. Пример функции веры и зарплаты $w(e)$ [пунктир], которые не дают смешивающего равновесия при $e^* = \overline{e}$

нет. Даже если предположить, что работнику неизвестна функция веры работодателей $\mu(e)$ (и, соответственно, зависимость $w(e)$ заработной платы от уровня образования), он все равно никогда не выберет $e > \widehat{e}$. Это так, потому что образование $e = 0$ даст работнику более высокий уровень выигрыша, даже если ему предложат максимально возможную зарплату $w = \theta_H$, что соответствует вере $\mu(e) = 1$. Получается, что для низкопроизводительного работника любой уровень образования $e > \widehat{e}$ доминируется образованием $e = 0$.

Для высокопроизводительного работника любой уровень образования, превышающий $\widetilde{e}$, также доминируется $e = 0$. Следовательно, если работник демонстрирует уровень образования $e \in (\widehat{e}, \widetilde{e}]$, то разумно предположить, что он — высокопроизводительный, т.е. $\mu(e) = 1$. Иными словами, во всех случаях, когда образование e для одного типа работников является доминируемым, а для другого — нет, значение функции веры $\mu(e)$ задается однозначно. Но в таком случае $e = \overline{e}$ не может быть равновесием, так как высокопроизводительный работник сможет увеличить свой выигрыш, выбрав $e > \widehat{e}$ и получая зарплату $w(e) = \theta_H$.

Дадим формальное определение критерия, которому не удовлетворяет равновесие[6] $e^* = \overline{e}$:

Определение 4.12. Пусть G — сигнальная игра, A — множество действий игрока R. Определим множество $A^* \subseteq A$ действий a игрока R, максимизирующих ожидаемый выигрыш игрока R при какой-то системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$. Пусть $t \in T$, M_t — множество недоминируемых относительно A^* действий для игрока S типа t, т.е. $m \in M_t$, если не существует $m' \in M$, такого, что $u_S(t, m, a) < u_S(t, m', a)$ для всех $a \in A^*$. Будем говорить, что

[6] См., например, Гиббонс [Gibbons, 1992, p. 233–237].

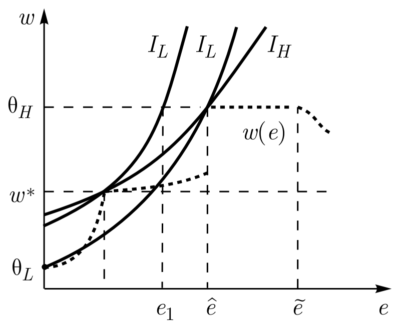
байесово равновесие $(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|\cdot))$ удовлетворяет *критерию доминирования*, если $\mu(t \mid m) = 0$ для всех t, m, таких, что

1. $m \notin M_t$.
2. Существует тип t' такой, что $m \in M_{t'}$.

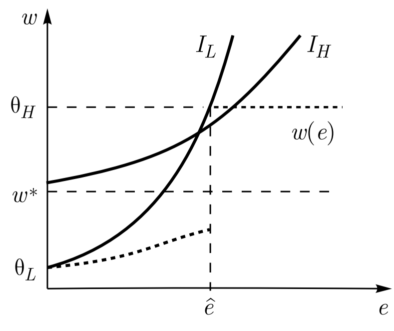
На рис. 4.11, *а* показано смешивающее равновесие с наибольшим возможным уровнем образования $e = \widetilde{e}$ при условии выполнения критерия доминирования. Для любых $e \leqslant \widetilde{e}$ и $e' > \widehat{e}$ будем иметь $w^* - c(e, \theta_H) > \theta_H - c(e', \theta_H)$. Следовательно, высокопроизводительный работник не станет выбирать уровень образования e', даже если он принесет ему максимально возможную зарплату θ_H. Так как критерий доминирования ничего не говорит нам о том, какой должна быть вера работодателя при $e \leqslant \widehat{e}$, мы вправе определить функцию веры таким образом, чтобы получить нужное нам равновесие (как, например, на данном рисунке).

На рис. 4.11, *б* показана ситуация, когда смешивающее равновесие, которое удовлетворяло бы критерию доминирования, не существует. Даже если $e = 0$, то все равно существует уровень образования $e' > \widehat{e}$, который, во-первых, дает высокопроизводительному работнику бóльший выигрыш при зарплате $w = \theta_H$, чем образование $e = 0$ и зарплата w^*, и, во-вторых, дает низкопроизводительному работнику *меньший* выигрыш (при зарплате $w = \theta_H$), чем образование $e = 0$ при зарплате $w = \theta_L$. Так как мы обязаны иметь $\mu(e) = 1$ при $e > \widehat{e}$ и $\theta_L \leqslant \theta_H - c(e, \theta_H)$, высокопроизводительный работник не станет соглашаться на зарплату w^*, даже если она дается ему при нулевых затратах на приобретение образования.

Критерий доминирования — не самое строгое ограничение, позволяющее отсеивать нежелательные равновесия. Например, вернемся к рис. 4.11, *а*. Предположим, что к работодателю приходит работник с неравновесным уровнем образования $e \in (e_1, \widehat{e}]$. Зачем этому человеку понадобилось получать образование e? Возможно, что этот человек не знает, как устроена система вер $\mu(e)$ у работодателя, за исключением



а) Равновесия существуют



б) Отсутствие равновесия, удовлетворяющего критерию

Рис. 4.11. Равновесия в сигнальной игре и критерий доминирования точки равновесия $\mu(\widetilde{e}) = p$. Таким образом, этот работник может иметь ошибочное представление о том, какую зарплату ему предложат, если он получит уровень образования e. Но тогда этот человек не может иметь тип θ_L. Даже если он рассчитывает получить максимальную возможную зарплату — θ_H — его выигрыш все равно будет выше при равновесном уровне образования e^* и равновесной зарплате w^*. Следовательно, для всех $e \in (e_1, \widehat{e}]$ мы должны иметь $\mu(e) = 1$.

Функция веры, изображенная на рис. 4.11, a, не удовлетворяет «интуитивному критерию» для байесова равновесия, сформулированному Чоу и Крепсом [Cho, Kreps, 1987]:

Определение 4.13. Пусть G — сигнальная игра, A — множество действий игрока R. Определим множество $A^* \subseteq A$ действий a игрока R, максимизирующих ожидаемый выигрыш игрока R при какой-то системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$. Пусть $E = (m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|\cdot))$ — байесово равновесие в игре G. Пусть $t \in T$, $m \in M$. Будем говорить, что *m доминируется в равновесии E для типа t*, если для всех $a \in A^*$ выполнено

$$u_S(t, m^*(t), a^*(m^*(t))) > u_S(t, m, a). \tag{4.39}$$

Пусть M_{Et} — множество действий для игрока типа t, недоминируемых в равновесии E. Будем говорить, что байесово равновесие E удовлетворяет *интуитивному критерию*, если $\mu(t|m) = 0$ для всех t, m, таких, что

1. $m \notin M_{Et}$.
2. Существует тип t' такой, что $m \in M_{Et'}$.

Никакое смешивающее равновесие в сигнальной игре на рынке труда не удовлетворяет этому критерию. Действительно зарплату w^* и образование e^*. Пусть $e' \in (e_1, \widehat{e})$ таковы, что $w^* - c(e^*, \theta_L) = \theta_H - c(e_1, \theta_L)$ и $w^* - c(e^*, \theta_H) = \theta_H - c(\widehat{e}, \theta_H)$, как на рис. 4.11. Работник с низкой производительностью может не знать, какова вера работодателя при образовании e'. Но даже в самом оптимистичном случае — когда $\mu(e') = 1$ и образование e' гарантирует зарплату θ_H — работник с низкой производительностью предпочтет иметь зарплату w^* при образовании e^*. Относительно высокопроизводительного работника это утверждение неверно; он-то предпочтет θ_H и e', нежели w^* и e^*. И если работодатель вдруг увидит человека, имеющего образование e' на своем резюме, он будет рассуждать следующим образом: «Это не может быть работник с производительностью θ_L. Он не стал бы получать такое образование, даже если бы он думал, что я готов платить людям с таким образованием максимально возможную зарплату θ_H. Нет, это должен быть высокопроизводительный работник. Он-то будет готов получить такое образование — в том случае, если он рассчитывает потом получить зарплату θ_H. Следовательно, я должен ожидать, что человек с образованием e' является высокопроизводительным с вероятностью $\mu(e') = 1$». Но если $\mu(e') = 1$, то в равновесии мы будем иметь $w(e') = \theta_H$. Работник с производительностью θ_H предпочтет получить образование e'; следовательно, e^* не является равновесным образованием для работников всех типов.

Рассмотрим еще один пример игры, в которой «интуитивный критерий» позволит нам избавиться от интуитивно нежелательного равновесия (которое при этом является совершенным байесовым). Диктатор одной маленькой банановой республики думает, как ему поступить с видным оппозиционным политиком. Он знает, что у политика может быть подпольный бизнес (1) — однако может быть так, что никакого бизнеса у оппозиционера нет (2). Диктатор решает, стоит ли ему завести уголовное дело на оппозиционера и посадить его (h) или оставить его в покое (l). Если у оппозиционера есть бизнес, то диктатору выгоднее посадить его; если бизнеса нет — то выгоднее оставить в покое (так как в таком случае уголовное дело будет выглядеть чисто политическим).

Оппозиционер имеет возможность, до того, как диктатор сделает свой ход, опубликовать декларацию, свидетельствующую об отсутствии скрытых доходов (H), либо не публиковать декларацию (L). Данные, указанные в декларации, будут подтверждены или опровергнуты только после того, как диктатор решит, что делать с политиком. Если у оппозиционера нет бизнеса, то его выигрыш увеличится на 1 в том случае, если он опубликует декларацию. Если же у политика бизнес есть, то его выигрыш будет на 1 больше в том случае, если он не будет публиковать декларацию (так как в обратном случае он будет пойман на вранье). Если оппозиционер остается на свободе, он дополнительно получает выигрыш, равный 2. Диктатор знает, что у оппозиционера бизнес есть с вероятностью $p = 1/4$. Дерево этой игры изображено на рис. 4.12.

Рассмотрим, какие смешивающие равновесия существуют в этой игре. Если в смешивающем равновесии мы имеем $m(1) = \mathtt{H}$ и $m(2) = \mathtt{H}$, то мы

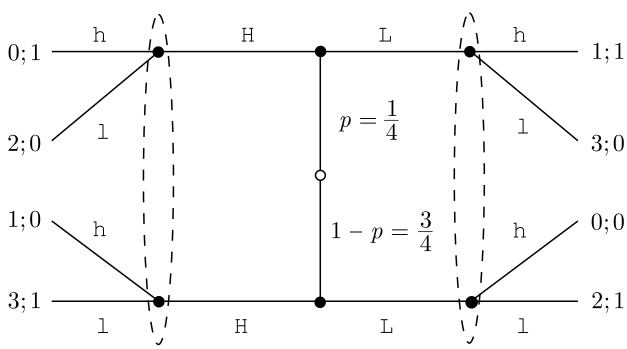


Рис. 4.12. Диктатор и оппозиционер

также должны иметь $\mu_H = 1/4$ и $a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$. Пусть μ_L — вера диктатора в информационном множестве L (т.е. вероятность того, что у оппозиционера есть бизнес при условии, что оппозиционер сделал ход $\mathtt{L}$). Равновесное действие диктатора будет $a(\mathtt{L}) = \mathtt{l}$ при $\mu_L \in \left[0, 1/2\right)$ и $a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$ при $\mu_L \in \left(1/2, 1\right]$. При $\mu_L = 1/2$ любое действие диктатора в информационном множестве L будет равновесным (в том числе когда диктатор играет $\mathtt{h}$ с какой-то вероятностью $q \in (0,1)$).

При $a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$ оппозиционер, имеющий тип 2, опубликует декларацию вне зависимости от $a(\mathtt{L})$. Однако если оппозиционер имеет тип 1, то он выберет $m(1) = \mathtt{H}$, только если $a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$ с вероятностью $1/2$ или более. Таким образом, в смешивающем равновесии с $m(1) = \mathtt{H}$, $m(2) = \mathtt{H}$, $\mu_H = 1/4$ и $a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$ мы будем иметь $\mu_L = 1/2$ при $a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$ с вероятностью $1/2$ или более, либо $\mu_L \in \left(1/2, 1\right]$ при $a(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$.

Допустим теперь, что в смешивающем равновесии мы имеем $m(1) = \mathtt{L}$ и $m(2) = \mathtt{L}$. Аналогично мы получаем $\mu_L = 1/4$ и $a(\mathtt{L})) = \mathtt{l}$. Пусть μ_H — вера диктатора в информационном множестве H. Равновесное действие диктатора будет $a(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$ при $\mu_H \in \left[0, 1/2\right)$ и $a(\mathtt{H}) = \mathtt{h}$ при $\mu_H \in \left(1/2, 1\right]$. При $\mu_H = 1/2$ любое действие диктатора в информационном множестве H будет равновесным. Мы будем иметь $m(1) = \mathtt{L}$ при любом $a(\mathtt{H})$ и $m(2) = \mathtt{L}$, если $a(\mathtt{H}) = \mathtt{h}$ с вероятностью $1/2$ или более.

Итак, смешивающее равновесие в чистых стратегиях должно удовлетворять одному из двух условий[7]:

1. $m^*(1) = \mathtt{H}$, $m^*(2) = \mathtt{H}$, $a^*(\mathtt{H}) = \mathtt{l}$, $a^*(\mathtt{L}) = \mathtt{h}$, $\mu_H^* = 1/4$, $\mu_L^* \in \left[0, 1/2\right]$

либо

2. $m^*(1) = \mathtt{L}$, $m^*(2) = \mathtt{L}$, $a^*(\mathtt{H}) = \mathtt{h}$, $a^*(\mathtt{L}) = \mathtt{l}$, $\mu_H^* \in \left[1/2, 1\right]$, $\mu_L^* = 1/4$.

Все эти равновесия — по построению — являются совершенными байесовыми равновесиями. Однако часть из них выглядит менее правдоподобно. Во втором равновесии оппозиционер отказывается от декларации о доходах вне зависимости от того, есть ли у него бизнес или нет. При этом диктатор будет готов посадить оппозиционера в тюрьму, если тот предъявит декларацию, так как сданная декларация о доходах будет расцениваться как сигнал, свидетельствующий о том, что у оппозиционера есть подпольный бизнес (ибо $\mu_H \geqslant 1/2$).

Последнее предположение кажется неестественным. Со стороны диктатора будет неразумным предполагать, что оппозиционер, имеющий подпольный бизнес, станет публиковать декларацию о своих доходах. Ведь для оппозиционера, имеющего тип 1 (т.е. подпольного коммерсанта) действие $\mathtt{H}$ (декларация) в равновесии доминируется действием $\mathtt{L}$ (не подавать декларацию), так как при действии $\mathtt{H}$ *любое* ответное действие диктатора

[7] Да, смешивающее равновесие в чистых стратегиях. Смешивающее — значит, оппозиционеры разных типов выбирают одно и то же дейстие. В чистых стратегиях — значит, что стратегии у игроков чистые.

принесет ему меньшую выгоду (2 или 0), чем ту, которую он будет иметь в равновесии (3). Равновесие не соответствует «интуитивному критерию», так как в этом равновесии $\mu_H > 0$, т.е. вера относительно доминируемого действия отлична от нуля.

4.2.5. ИГРЫ С СООБЩЕНИЯМИ

Сигнал сам по себе может не нести никаких издержек для игроков. Представьте себе, например, что вы стоите на железнодорожной станции и ждете электричку. Вместе с вами стоит большая толпа народа, стремящаяся попасть на тот же поезд. Все знают, что поезд придет на одну из двух платформ, но никто не знает, на какую; каждый должен решить, на какую из двух платформ ему бежать. Но вот на вокзале появляется пассажир, о котором известно, что он знает, куда придет электричка. Что он скажет? Выигрыш (как его, так и других пассажиров) будет зависеть только от того, куда придет поезд (т.е. от информации, известной вошедшему человеку), и от того, кто на какую платформу побежит (т.е. от действий пассажиров), но не от того, что скажет вошедший (если, конечно же, ему не грозит расправа за введение других людей в заблуждение). Эта ситуация удовлетворяет следующему определению.

Определение 4.14. *Игра с сообщениями* — это такая сигнальная игра, в которой участвуют два игрока и

1. Множество действий игрока S равно множеству его типов: $M = T$.
2. Выигрыши обоих игроков не зависят от сигналов (действий первого игрока): $u_S(t, m, a) = u_S(t, a)$, $u_R(t, m, a) = u_R(t, a)$.

Первым, наиболее очевидным, результатом является существование вполне смешивающего равновесия в любой игре с сообщениями:

Теорема 4.5. *Пусть G — игра с сообщениями. Тогда в ней существует совершенное байесово равновесие, в котором*

$$\mu(t \mid m) = p(t), \tag{4.40}$$

где $p(t)$ — вероятность, что игрок S имеет тип t,

$$a(m) = \arg\max_a \sum_t p(t)\, u_R(t, a), \tag{4.41}$$

и

$$m(t) = \overline{m} \tag{4.42}$$

для некоторой $\overline{m} \in M$.

Легко убедиться, что это действительно равновесие. Действие a является оптимальным по определению, а система вер для $m = \overline{m}$, т.е. на траектории игры, выводится по правилу Байеса. Так как для всех m, m' мы имеем $a(m) = a(m')$, то также верно, что $u_S(t, m', a(m')) = u_S(t, m, a(m))$, что соответствует определению равновесия.

Такое равновесие является неинформативным, так как вера игрока R не зависит от сообщений m. Все возможные отклонения от сигнала $\overline{m}$ воспринимаются как «пустой треп»: увидев сигнал $m \neq \overline{m}$, игрок R считает, что у каждого типа игрока S была одинаковая вероятность совершить такое отклонение. Таким образом, сообщения игрока S не оказывают влияния на веру игрока R, которая равна априорному распределению типов игроков $p(\cdot)$.

Однако в играх с сообщениями бывают и разделяющие равновесия, в которых разные игроки посылают разные сигналы. Вот пример такой игры:

		Игрок S	
		t_1	t_2
Игрок R	a_1	1; 1	0; 0
	a_2	0; 0	1; 1

Заметим, что это — не матричная запись статической игры, известная нам по гл. 1. Игроки ходят по очереди; каждый столбец соответствует одному из двух типов игрока S, каждая строка — одному из двух возможных действий игрока R. Множество возможных сигналов для игрока S совпадает с множеством его типов, но выигрыш игроков зависит только от типа игрока S, но не от его сигнала. Пусть $p(t_1) \in (0, 1)$. Очевидно, что равновесием[8] является $m(t_1) = t_1$, $m(t_2) = t_2$, $a(m_1) = a_1$, $a(m_2) = a_2$.

Рассмотрим теперь игру с сообщениями, в которой у игрока S есть три возможных типа, которые равновероятны, а у игрока R — три варианта действий. Пусть выигрыши игроков таковы:

		Игрок S		
		t_1	t_2	t_3
Игрок R	a_1	0; 1	0; 0	0; 0
	a_2	1; 0	1; 2	1; 0
	a_3	0; 0	0; 0	2; 1

В каждой ячейке этой матрицы указан выигрыш игрока S, затем выигрыш игрока R. В такой игре в равновесии информация не может раскрываться полностью. Действительно, пусть игрок S правдиво сообщает свои типы: $m(t_1) = t_1$, $m(t_2) = t_2$, $m(t_3) = t_3$. Тогда игрок R будет реагировать на эти сообщения следующим образом: $a(t_1) = a_1$, $a(t_2) = a_2$, $a(t_3) = a_3$.

[8] Можно убедиться, что есть еще одно равновесие, в котором $m(t_2) = t_1$, $m(t_1) = t_2$. Так что в этой игре четыре равновесия в чистых стратегиях: два разделяющих и два смешивающих, в которых игрок S всегда называет тип t_1 или t_2.

Однако $u_S(t_1, a(t_1)) < u_S(t_1, a(t_2))$, т.е. если игрок R верит в то, что игрок S правдиво сообщает свой тип, и игрок S имеет тип t_1, то игроку S выгодно соврать, назвавшись типом t_2.

Тем не менее существует равновесие, в котором происходит частичное раскрытие информации. Пусть $m(t_1) = t_2$, $m(t_2) = t_2$ и $m(t_3) = t_3$. Наилучшим ответом игрока R на такую стратегию игрока S будет $a(t_3) = a_3$ и $a(t_2) = a_2$. Данная стратегия игрока S, в свою очередь, будет наилучшим ответом на $a(t_3) = a_3$ и $a(t_2) = a_2$ при любом $a(t_1)$. Для того чтобы описать равновесие, нам остается выбрать некоторое $a(t_1)$ и подобрать веру $\mu_1 = (p_1, p_2, p_3)$, делающую этот ход рациональным. Например, для того чтобы игрок R выбрал $a(t_1) = a_2$, необходимо, чтобы $2p_2 \geqslant \max\{p_1, p_3\}$, иначе игрок R предпочтет выбрать a_1 либо a_3. Для того чтобы игрок R выбрал $a(t_1) = a_2$, необходимо, чтобы $2p_2 \geqslant \max\{p_1, p_3\}$ — иначе игрок R предпочтет выбрать a_1 либо a_3.

4.3. ПРИМЕРЫ

4.3.1. РАСКРЫТИЕ ИНФОРМАЦИИ В ИГРАХ С СООБЩЕНИЯМИ

В двух примерах на с. 257–259 мы рассмотрели простые примеры игр с сообщениями. В первой такой игре возможно равновесие с полным раскрытием информации, когда игрок R всегда узнает тип игрока S. Во второй игре этого не происходит — игрок R не может отличить t_1 от t_2. Почему в одних играх происходит раскрытие информации, а в других — нет? Общая закономерность здесь такова: чем сильнее совпадают интересы двух игроков, тем больше информации раскрывается. В первом примере мы видели полное совпадение интересов, во втором — частичное (если S имеет тип t_3, то выигрыши обоих игроков максимизируются при $a = a_3$, если t_1 или t_2 — то не все так просто). Однако интересы могут не совпадать — как, например, в следующем примере при равновероятных типах игрока S (строго доказать отсутствие любого равновесия, кроме смешивающего, предлагается в задаче 4.13):

		Игрок S		
		t_1	t_2	t_3
Игрок R	a_1	0; 0	0; 1	1; 0
	a_2	0; 1	1; 0	0; 0
	a_3	1; 0	0; 0	0; 1

Рассмотрим более общую модель, предложенную Кроуфордом и Собелем (1982). Пусть t — некая случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Значение этой величины известно игроку S, но не игроку R. Пусть $a \in [0,1]$ — действие, предпринимаемое игроком R. Выигрыши игроков зависят от t и a следующим образом:

$$\begin{aligned} u_S(t,a) &= -(a-(t+b))^2, \\ u_R(t,a) &= -(a-t)^2. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Таким образом, фукнция выигрыша каждого игрока является однопиковой по a, причем наилучшая альтернатива для каждого из них — величина, известная только игроку S. Наилучшие альтернативы игроков отличаются на величину b, известную обоим игрокам.

Можно привести много жизненных примеров, в которых возникают подобные ситуации. Например, игрок S может являться экспертом в одной из областей экономической политики, скажем, председателем соотвествующего парламентского комитета. Он мог потратить много времени на изучение своей предметной области, и поэтому именно ему известна величина t — оптимальная на данный момент времени политика. Игрок R в таком случае может быть представителем большинства в парламенте, который и определяет величину a — политику, которая будет реализована. Проблема состоит в том, что интересы парламентского большинства могут отличаться от интересов председателя комитета. Пусть, например, речь идет о необходимой величине сокращения или увеличения расходов на образование. Председатель комитета может сам быть из профессорской среды, что делает его склонным рекомендовать более высокие затраты на образование, чем порекомендовал бы человек с другим прошлым. Это не может не быть известно парламентскому большинству, которое обязано учитывать разницу во взглядах — выражаемую в нашей модели величиной b — при принятии решения. Получется так, что при $b > 0$ у нас не может быть полного раскрытия информации. Если мы предположим, что большинство верит председателю комитета и проводит ту политику, которую он рекомендует ($a = t$), то председатель комитета будет врать, максимизируя свой выигрыш при $m = t + b$. Но если он ведет себя таким образом, то большинство будет учитывать эту разницу во взглядах, выбирая действие $a = t - b$.

Найдем равновесие в этой сигнальной игре. Пусть $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$. Будем считать, что игрок S играет смешанную стратегию: если $t \in [x_{i-1}, x_i)$ для какого-то $1 \leqslant i < n$, то сигнал $m(t)$ игрока S будет случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $X_i = [x_{i-1}, x_i)$. Если $t \in [x_{n-1}, x_n]$, то $m(t)$ будет равномерно распределен на $X_n = [x_{n-1}, x_n]$. Обозначим через $\overline{x}_i$ математическое ожидание сигнала $m(t)$, если t попадает в интервал X_i:

$$\overline{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \tag{4.44}$$

Каким будет реакция игрока R на такую сигнальную стратегию? Вера игрока R определяется по правилу Байеса для всех $m \in [0,1]$: если m

принадлежит интервалу X_i, то тип игрока S (для игрока R) будет случайной величиной, равномерно распределенной на X_i. Тогда оптимизационная задача игрока R будет

$$\max_{a(m)} \mathsf{E}(u_R(t, a(m))|t \in X_i) = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int\limits_{t \in X_i} (a(m) - t)^2 dt, \qquad (4.45)$$

что дает нам решение

$$a(m) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int\limits_{t \in X_i} t\, dt = \overline{x}_i \qquad (4.46)$$

при $t \in X_i$.

Докажем, что при $t = x_i$ в равновесии должно выполняться равенство

$$u_s(t, \overline{x}_i) = u_s(t, \overline{x}_{i+1}). \qquad (4.47)$$

Заметим, что u_s непрерывна на всех интервалах X_i. Если (4.47) не выполняется, например, $u_S(x_i, \overline{x}_i) > u_S(x_i, \overline{x}_{i+1})$, то в силу непрерывности u_S существует $\varepsilon > 0$, такой, что $u_S(x_i + \varepsilon, \overline{x}_i) > u_S(x_i + \varepsilon, \overline{x}_{i+1})$. Следовательно, игрок S, имеющий тип $t = x_i + \varepsilon$, получит бо̀льший выигрыш в случае, если действие игрока R будет $a = \overline{x}_i$, чем в случае, если действие игрока R будет $a = \overline{x}_{i+1}$. Так что игроку S более выгодно сообщить сигнал $m \in [x_i, x_{i+1})$, чем сигнал $m \in [x_{i-1}, x_i)$. Такая стратегия не может быть равновесной.

Перепишем условие (4.47) как

$$x_i + b - \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i - b, \qquad (4.48)$$

откуда мы получим

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} + 4\,b. \qquad (4.49)$$

Получается, что каждый интервал X_{i+1} на $4\,b$ единиц длиннее предыдущего (рис. 4.13). Для того чтобы найти равновесие, нам необходимо найти $x_1, \ldots, x_{n+1}$, такие, что $x_n = 1$, и выполняется (4.49) для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Рис. 4.13. Соотношение x_i и x_{i+1} в игре с сообщениями

Если $x_0 = 0$, то мы получим $(x_2 - x_1) = x_1 + 4\,b$, $(x_3 - x_2) = x_1 + 8\,b$ и т.д., вплоть до $(1 - x_{n-1}) = x_1 + 4\,(n-1)\,b$. Суммируя, получаем

$$1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = n\,x_1 + 2\,n\,(n-1)\,b. \tag{4.50}$$

Равновесие с частичным раскрытием информации существует, если есть $x_1 \in (0,1)$ и целое число $n \geqslant 2$, которые удовлетворяют уравнению (4.50) для данного $b > 0$.

Мы можем изучить, как степень раскрытия информации в равновесии зависит от параметра b, определяющего соответствие интересов двух игроков. Чем выше n, тем больше информации раскрывается. Можно дать формальное определение «раскрытию информации» как математическому ожиданию разности между проводимой политикой a и сигналом t, получаемым игроком S. Формально, мы определим

$$I_r(n) = \int\limits_{t=0}^{1} |a(m(t)) - t|\,dt = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_1 + 4\,(i-1)\,b)^2. \tag{4.51}$$

Для равновесия, в котором $n = 1$, т.е. раскрытия информации не происходит, мы имеем $a(m(t)) = 1/2$ для всех t и соответственно $I_r(1) = 1/4$. Для $n = 2$ уравнение (4.50) дает нам $x_1 = (1-4\,b)/2$. Равновесие существует только при $b < 1/4$, т.е. даже для минимального уровня раскрытия информации необходимо, чтобы интересы двух игроков были достаточно схожи. В таком случае мы получим $I_r(2) = \frac{1}{4}\cdot(x_1^2 + (1-x_1)^2) = \frac{1}{8} + 2\,b^2 < \frac{1}{4}$. Очевидно, что чем больше n, т.е. чем больше число категорий сигналов t, между которыми может различать игрок R, тем меньше I_r. Однако равновесие с высоким n возможно только при достаточно малом b. Действительно, из (4.50) и $x_1 > 0$ мы получаем, что $2\,n\,(n-1)\,b < 1$. Равновесие с $n = 3$ возможно при $b < 1/12$, с $n = 4$ — при $b < 1/24$ и т.д. Можно получить и аналогичное условие на максимальное n, возможное в равновесии:

$$n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{b}}\,. \tag{4.52}$$

При $b \to 0$ мы получаем возможность все большего раскрытия информации. Будет ли исход игры оптимальным по Парето при достаточно малом b? Для оптимальности по Парето необходимо, чтобы ни для одного t не существовало такой политики $a' \in [0,1]$, что $u_R(t,a') \geqslant u_R(t, a(m(t)))$ и $u_S(t,a') \geqslant u_S(t, a(m(t)))$, хотя бы с одним строго выполняющимся неравенством. Это означает, что для всех t мы должны иметь $a(m(t)) \in [t, t+b]$. Но это условие не может выполняться при всех положительных b: например, мы всегда имеем $\overline{x}_{i-1} = a(x_i) < x_i < x_i + b$. Мы в очередной раз убеждаемся, что асимметрия информации вредит обоим игрокам.

4.3.2. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИТИЧЕСКОГО ПОПУЛИЗМА

Неравенство доходов свойственно большинству развивающихся стран. Неудивительно, что часто политическая программа президентского кандидата призывает к перераспределению доходов в пользу малоимущих слоев населения. Однако бывает так, что демократически выбранные политики-«популисты» принимают слишком жесткие меры, которые в краткосрочной перспективе действительно дают снижение неравенства, но в среднесрочной — приводят к макроэкономическому кризису. Как правило, такая «популистская» политика состоит в чрезмерном росте государственных расходов. Этот рост финансируется за счет двух источников. Во-первых, это рост налогообложения, создающий отрицательные стимулы для развития бизнеса. Во-вторых, это увеличение государственного долга, которое может привести к долговому кризису — дефолту на рынке государственных облигаций, снижению стоимости национальной валюты, и болезненному снижению государственных расходов либо включению «печатного станка» и высокой инфляции. В итоге положение широких слоев населения — во имя которых и проводились радикальные реформы — на самом деле ухудшается, хотя не настолько, насколько ухудшается положение элиты и среднего класса.

Если рассматривать политическую программу кандидата как точку на шкале «лево–право», где левая политика предполагает распределение от богатых к малоимущим, то по сути получается, что некоторые кандидаты занимают ультра-левую позицию, более левую, чем предпочтения большинства населения. При этом основой риторики таких политиков — как во время избирательной кампании, так и после нее — является проводимая ими борьба за интересы простого народа против небольшой и привилегированногй элиты. Одним из наиболее известных политиков такого плана был Уго Чавес в Венесуэле — однако список можно продолжить: Боливия (Эво Моралес), Перу (Алан Гарсиа), Эквадор (Рафаэл Коррера) и т.д.

Конечно же, такие вещи всегда имеют простое объяснение: народ (а, подчас, и сам политик) не имеет представления о том, какие последствия будут иметь предлагаемые реформы в ближайшем будущем. Возможно, что отчасти это так и есть. Однако такой ход рассуждения не приветствуется в академической среде. При помощи выборочных предположений о нерациональности тех или иных игроков можно объяснить практически все происходящее в нашем мире — однако на самом деле эти рассуждения не будут объяснять ничего, так как они не будут иметь предсказательной силы. Бо́льшим и более интересным вызовом всегда является нахождение формального объяснения. Как должна быть устроена система стимулов и информационная структура, чтобы такое могло произойти с рациональными, все понимающими избирателями и политиками?

Асемоглу, Егоров и Сонин [Acemoglu, Egorov, Sonin, 2011] объясняют этот феномен, не прибегая к предположению о нерациональности политиков или избирателей. Дело в том, что в странах Латинской Америки — как и во многих других странах — политики часто маскируют свои истинные интересы. Бывает так, что кандидат в президенты обещает проводить справедливую по отношению к большинству граждан политику, а в итоге оказывается агентом влияния небольшой и очень богатой элиты и проводит политику, направленную на обогащение немногих за счет большинства (как правило, это достигается за счет низких налогов, попустительства коррупции и поддержке монополий). Как политику убедить своих граждан, что он — не волк в овечьей шкуре, что его собственные предпочтения действительно совпадают с интересами граждан? Возможный способ это сделать — после избрания начать проводить политику, совершенно неприемлемую для потенциального представителя интересов элиты. Настолько неприемлемую, что публика станет рассуждать так: «Наш президент, господин X, действительно хочет того же, чего хотим мы. Если бы он представлял интересы ненавистных нам богачей, то не стал бы себя так вести — даже если это позволило бы ему нас обмануть и заставить нас избрать его на новый срок».

Рассмотрим формальную модель, воспроизводящую эту аргументацию. Пусть существуют три игрока — два политика (находящийся у власти президент и его конкурент) и граждане (представленные одним игроком — репрезентативным гражданином). В момент времени $t = 1$ президент выбирает, какую экономическую программу $y_{1I} \in \mathbb{R}$ ему следует проводить. В момент времени $t = 2$ происходят выборы: граждане решают, оставить президента у власти или избрать нового. В момент времени $t = 3$ переизбранный президент проводит политику: y_{2I}, если был переизбран старый президент, и y_{2C}, если был выбран новый. Затем реализуются выигрыши.

Выигрыш гражданина зависит от проводимой политики в обоих периодах. Он равен

$$u = -(y_{1I} - v_m)^2 - (y_2 - v_m)^2, \tag{4.53}$$

где $y_2 = y_{2I}$, если был переизбран старый президент, $y_2 = y_{2C}$, если был выбран новый, и $v_m = 0$ — наилучшая альтернатива гражданина.

Выигрыш президента равен

$$U_I = -(y_{1I} - a_I)^2 - (y_2 - a_I)^2 + b\,I, \tag{4.54}$$

где величина I равна 1, если президент был переизбран на второй срок, и 0, если он не был переизбран. Величина a_I отражает наилучшую альтернативу президента. Таким образом мы предполагаем, что президент заинтересован как в реализации какой-то конкретной политики, так и в должности как таковой; величина $b > 0$ отражает ценность президентского кресла.

Аналогично, выигрыш претендента равен

$$U_C = -(y_2 - a_C)^2 + b\,(1 - I), \tag{4.55}$$

где a_C — его наилучшая альтернатива. Мы будем считать, что в первом периоде выигрыш претендента равен нулю (так как он не делает в этом периоде никаких ходов).

Пусть наилучшая альтернатива каждого из двух кандидатов является частной информацией. Избирателю известно лишь, что a_I, a_C принимают значение $v_m = 0$ с вероятностью p и $v_e > 0$ с вероятностью $1 - p$. Это предположение можно интерпретировать так: с определенной вероятностью предпочтения политика совпадают с предпочтениями небольшой по численности (и поэтому не влияющей на выбор президента) элиты, предпочитающей меньшую степень перераспределения доходов. Будем считать, что случайные величины a_I и a_C являются независимыми.

Рассмотрим задачу максимизации выигрыша переизбранным или новоизбранным президентом в момент времени $t = 3$. Так как игра заканчивается в этот момент времени, мы имеем $y_{2I} = a_I$ для переизбранного президента и $y_{2C} = a_C$ для новоизбранного: каждый реализует политику, которая больше всего нравится ему самому.

Обозначим через $\mu\,(y_{1I})$ веру избирателей в то, что старый президент имеет наилучшую альтернативу $a_I = v_m$, после того, как избирателям стала известна его политика в первом периоде y_{1I}.

До того как y_2 станет известным, ожидаемый выигрыш гражданина будет равен

$$u_I = -(y_{1I} - v_m)^2 - \mu\,(y_{1I})(v_m - v_m)^2 - (1 - \mu\,(y_{1I}))(v_e - v_m)^2 \tag{4.56}$$

при переизбрании президента, и

$$u_C = -(y_{1I} - v_m)^2 - p\,(v_m - v_m)^2 - (1 - p)(v_e - v_m)^2 \tag{4.57}$$

при избрании нового. Таким образом, президент будет переизбран в том и только в том случае, если $\mu(y_{1I}) \geqslant p$.

Найдем разделяющее равновесие. Пусть y^*_{1m}, y^*_{1e} — равновесная политика президента во время первого президентского срока (в момент времени $t = 1$), в зависимости от его наилучшей альтернативы (v_m или v_e). В разделяющем равновесии мы обязаны иметь $\mu\,(y^*_{1m}) = 1$, $\mu\,(y^*_{1e}) = 0$. Следовательно. мы будем иметь $I = 1$ при $y_1 = y^*_{1m}$ и $I = 0$ при $y_1 = y^*_{1e}$.

Так как в разделяющем равновесии президент, имеющий наилучшую альтернативу $a_I = v_e$, не переизбирается, его политика в первом периоде должна соответствовать его наилучшей альтернативе: $y_{1I} = v_e$.

Равновесие ищем среди таких, что $y^*_{1m} < y^*_{1e} = v_e$. Возьмем следующую функцию веры:

$$\mu(y_{1I}) = \begin{cases} 1, & y_1 \leqslant y^*_{1m}; \\ 0, & y_1 > y^*_{1m}. \end{cases} \tag{4.58}$$

Посмотрим, при каком y_{1m}^* мы получим совершенное байесово равновесие с данной функцией веры и действиями президента в первом периоде: $y_{1m}^* < y_{1e}^* = v_e$. Ожидаемый выигрыш президента с наилучшей альтернативой $a_I = v_e$ составит

$$U_{Ie}^* = -p\, v_e^2, \tag{4.59}$$

так как он в первом периоде реализует политику v_e и затем не переизбирается.

Для существования разделяющего равновесия необходимо, чтобы выигрыш президента, имеющего $a_I = v_e$, был выше при $y_{1I} = v_e$ и его неизбрании на второй срок, чем максимальный выигрыш, который он может получить, реализуя политику, которая обеспечит ему переизбрание:

$$U_{Ie}^* \geqslant \max_{y_{1I} \leqslant y_{1m}^*} \left(-(y_{1I} - v_e)^2 - (v_e - v_e)^2 + b\right). \tag{4.60}$$

Так как U_I убывает по y_{1I} при $y_{1I} < a_I$, мы можем переписать (4.60) как

$$y_{1m}^* \leqslant v_e - \sqrt{b + p\, v_e^2}\,. \tag{4.61}$$

Мы получили следующий результат. При $b > (1-p)\, v_e^2$ в разделяющем равновесии политика президента, имеющего одинаковые предпочтения с избирателями, должна быть более левой, чем сами предпочтения избирателей $v_m = 0$. Это необходимо для того, чтобы политик мог убедить избирателей в том, что при наступлении второго президентского срока он внезапно не предаст их интересы, оказавшись, на самом деле, проводником интересов элит, «волком в овечьей шкуре» с $a_I = v_e$. Каков смысл условия $b > (1-p)\, v_e^2$? Во-первых, ценность президентского кресла b должна быть достаточно большой — иначе президент, имеющий $a_I = v_m$, не будет готов предлагать столь радикально левую политику для того, чтобы убедить избирателей и переизбраться. Во-вторых, вероятность p того, что предпочтения президента совпадают с предпочтениями большинства избирателей, должна быть низка. И наконец, в-третьих, предпочтения элиты не должны слишком сильно отличаться от предпочтений избирателей. Выигрыш избирателей и политиков убывает пропорционально квадрату расстояния между их наилучшей альтернативой и реализуемой политикой. Если разница между позициями элиты и большинства будет слишком большой, то издержки, связанные с имитацией поведения «народного» политика, будут слишком высоки.

Найдем второе условие для разделяющего равновесия. Политика y_{1I}^* не должна быть слишком левой, иначе «народный» президент с $a_I = v_m = 0$ просто предпочтет выбрать $y_{1I} = 0$, упуская возможность избраться на второй срок. Данное условие будет таким:

$$\begin{aligned} -(y_{1I}^* - v_m)^2 - (v_m - v_m)^2 + b \geqslant \\ \geqslant -(v_m - v_m)^2 - p\,(v_m - v_m)^2 - (1-p)(v_m - v_e)^2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

откуда при $v_m = 0$ получим

$$-y_{1m}^{*2} + b \geqslant -(1-p)\,v_e^2, \tag{4.63}$$

или, предполагая $y_{1m}^* < 0$:

$$y_{1m}^* \geqslant -\sqrt{b + (1-p)\,v_e^2}\,. \tag{4.64}$$

Условие

$$-\sqrt{b-(1-p)\,v_e^2} \leqslant v_e - \sqrt{p\,v_e^2 + b} \tag{4.65}$$

всегда выполняется. Следовательно, разделяющее равновесие с системой вер (4.58)и $y_{1m}^* < 0$ существует при $b > (1-p)\,v_e^2$. То есть политик, чьи интересы совпадают с интересами большинства избирателей, будет реализовывать политику более радикальную, чем та, которую предпочитает большинство избирателей и он сам [9].

4.3.3. РЕПУТАЦИЯ И КРЕДИТНО-ДЕНЕЖНАЯ ПОЛИТИКА ЦЕНТРАЛЬНОГО БАНКА

Вернемся к задаче установки кредитно-денежной политики центральным банком, рассмотренную на с. 128–132. Напомним, что в этой задаче рассмотрена двухпериодная игра, в которой сначала публика выбирает уровень инфляционных ожиданий, затем центральный банк реализует кредитно-денежную политику, определяющую уровень инфляции. Показано, что при определенных предположениях относительно целевых функций публики и центрального банка в совершенном по подыграм равновесии уровень инфляции будет неоптимально высок.

В рассмотренной задаче Парето-оптимальным уровнем инфляции является нулевая инфляция; однако если публика ожидает нулевую инфляцию, то у центрального банка будет стимул обмануть эти ожидания для того, чтобы добиться увеличения ВВП. Публика, зная, что центральный банк

[9] Приведенная здесь модель является адаптацией работы Асемоглу, Егорова и Сонина [Acemoglu, Egorov, Sonin, 2011]. В исходной работе модель строилась несколько иначе. Предполагалось, что избиратели не наблюдают политику y_1, реализуемую президентом в момент времени $t = 1$. Вместо этого им становится известна величина $z = y_1 + e$, где e — не наблюдаемая избирателями случайная величина, распределенная с нулевым математическим ожиданием и ненулевой плотностью $f(\cdot)$ на $(-\infty, \infty)$. Таким образом, если y_{1m} и y_{1e} — политика, реализуемая президентом каждого из двух типов, то для любого y_1 вера определяется однозначно по правилу Байеса: $\mu(z_1) = \dfrac{f(z-y_1)}{f(z-y_1)+f(z-y_2)}$. Это дает нам единственное равновесие, но несколько усложняет доказательство его существования и анализ сравнительной статики. В исходной формулировке качественная зависимость политики «народного» кандидата от параметров модели та же, что и для условия (4.61).

будет вести себя подобным образом, предвидит такой (положительный) уровень инфляции, при котором выигрыш центрального банка от установки уровня инфляции выше ожидаемого полностью компенсируется его проигрышем от высокой инфляции.

Существуют ли силы, могущие заставить центральный банк *достоверно* обещать публике низкую инфляцию?

Один из таких механизмов — репутационный. Если центральный банк обладает репутацией принципиального борца с высокой инфляцией, то публика может верить его обещаниям не поднимать цены. Обманув ожидания публики однажды, центральный банк сможет добиться временного повышения ВВП, но при этом потеряет репутацию: в будущем публика будет знать, что центральный банк будет пытаться стимулировать ВВП при помощи кредитно-денежной политики, и будет ожидать высокую инфляцию.

Таким образом, репутация принципиального сторонника низкой инфляции может быть выгодна для руководителя центрального банка, *даже если* эта репутация не соответствует его истинным предпочтениям. Это рассуждение впервые было предложено Бэрро [Barro, 1986] и Бакусои и Дриффилом [Backus, Drifill, 1985]. Теоретико-игровая модель, рассмотренная здесь и формализующая это рассуждение, взята из учебника Ромера [2006, с. 511–514].

Пусть взаимодействие центрального банка и публики происходит на протяжении двух периодов. В каждый момент времени $t = 1, 2$ публика формирует инфляционные ожидания π_t^e; затем центральный банк определяет уровень инфляции π_t. ВВП в момент времени t задается уравнением Филлипса:

$$y_t = \overline{y} + b\,(\pi_t - \pi_t^e). \tag{4.66}$$

В игре существуют два игрока: публика и центральный банк. Выигрыш публики в момент времени t определяется расхождением между прогнозируемой и реальной инфляцией. Он равен

$$u_{pt} = -(\pi_t^e - \pi_t)^2. \tag{4.67}$$

Публика заинтересована лишь в том, чтобы не ошибиться с прогнозом инфляции (на основании которого люди принимают экономические решения). Центральный банк может быть двух типов. Первый тип — оппортунист, имеющий функцию выигрыша

$$u_b = y_1 - \overline{y} - \frac{a}{2}\,(\pi_1 - \pi_o)^2 + \beta\left(y_2 - \overline{y} - \frac{a}{2}(\pi_2 - \pi_o)^2\right), \tag{4.68}$$

где $\pi^o = 0$ — оптимальный уровень инфляции[10], $\beta < 1$ — дисконт. Выигрыш определяется тем, насколько в каждом периоде велик ВВП, и насколько в каждом периоде инфляция отклоняется от оптимального с общественной точки зрения уровня. Величина $a > 0$ отражает то, насколько инфляция (по сравнению с ВВП) важна для центрального банка.

Второй тип центрального банка — принципиальный борец с инфляцией, который устанавливает $\pi_1 = \pi_2 = 0$ вне зависимости от того, каковы инфляционные ожидания публики. Пусть p — вероятность того, что центральный банк окажется оппортунистом.

Если центральный банк является принципиальным борцом с инфляцией, то его поведение не определяется внутри модели. Нас интересует, как поведет себя банк-оппортунист. Рассмотрим сначала поведение оппортуниста в момент времени $t = 2$. Подставив (4.66) в (4.68), перепишем его целевую функцию как

$$u_b = b\,(\pi_1 - \pi_1^e) - \frac{a}{2}\,\pi_1^2 + \beta\left(b\,(\pi_2 - \pi_2^e) - \frac{a}{2}\,\pi_2^2\right). \tag{4.69}$$

Максимизируя (4.69) по π_2, получим инфляцию, которая будет реализована во втором периоде банком-оппортунистом:

$$\pi_2^* = \frac{b}{a}. \tag{4.70}$$

Найдем теперь инфляционные ожидания публики во второй период π_2^e. Пусть λ — вера публики в то, что центральный банк является оппортунистом после момента времени $t = 1$. Математическое ожидание выигрыша публики в момент времени $t = 2$ будет равно

$$\mathsf{E}(u_{p2}) = -(1-\lambda)(\pi_2^e)^2 - \lambda\left(\pi_2^e - \frac{b}{a}\right)^2. \tag{4.71}$$

Соответственно, уровень ожидаемой инфляции, максимизирующий $\mathsf{E}(u_{p2})$, будет равен

$$\pi_2^e(\lambda) = \lambda\,\frac{b}{a}. \tag{4.72}$$

[10] Эта функция выигрышей немного отличается от функции (2.75), рассмотренной в примере на с. 128–132. В данном случае функция выигрышей центрального банка является линейной по ВВП (а не квадратичной, как в прошлом примере). Это упрощение не критично для основного результата, который основан на предположении, что целевая функция центрального банка нелинейно зависит от уровня инфляции. Мы предполагаем, что если инфляция не очень сильно отклоняется от целевого уровня, то дополнительное отклонение инфляции на 1% не должно нанести большого ущерба центральному банку, в то время как при большом отклонении инфляции последствия дополнительного отклонения на 1% будут более ощутимы.

Найдем λ. Очевидно, что если $\pi_1 \neq 0$, то $\lambda = 0$ (поскольку принципиальный борец с инфляцией всегда выбирает нулевую инфляцию). Очевидно, что для банка-оппортуниста любая стратегия, предполагающая $\pi_1 \notin \{0, b/a\}$, будет доминироваться стратегией, в которой $\pi_1 = b/a$. Следовательно, у такого банка π_1 может принимать только два значения: 0 и b/a. Пусть банк-оппортунист играет стратегию, которая предполагает выбор $\pi_1 = 0$ с вероятностью q. Вера публики может быть найдена по правилу Байеса:

$$\lambda = \frac{q\,p}{1 - p + q\,p}, \tag{4.73}$$

где $q\,p$ — вероятность того, что банк будет оппортунистом **и** выберет нулевую инфляцию, $1 - p$ — вероятность того, что банк будет принципиальным.

Найдем выигрыш центрального банка, если в момент времени $t = 1$ он выбирает $\pi_1 = 0$. Мы получим

$$W_0(q) = -b\,\pi_1^e + \beta\left(b\left(\frac{b}{a} - \lambda\frac{b}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = \\ = \beta\,\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{q\,p}{1 - p + q\,p}\right) - b\,\pi_1^e. \tag{4.74}$$

Если в момент времени $t = 1$ центральный банк выбирает $\pi_1 = b/a$, то его выигрыш будет равен

$$W_1 = \left(b\left(\frac{b}{a} - \pi_1^e\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) - \beta\,\frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}(1 - \beta) - b\,\pi_1^e. \tag{4.75}$$

Заметим, что $W_0(q)$ убывает по q, W_1 не зависит от q. Всего возможны три случая, в зависимости от значений параметров.

1. Равновесие, в котором $q = 0$, т.е. центральный банк-оппортунист всегда выбирает $\pi_1 = 0$. Это возможно, если для всех значений q центральный банк-оппортунист предпочтет выбрать нулевую инфляцию в момент времени $t = 1$. Поскольку $W_0(q)$ убывает по q, необходимым и достаточным условием для этого является $W_0(1) \geqslant W_1$, или

$$\beta \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1 - p}. \tag{4.76}$$

2. Равновесие, в котором $q = 1$, т.е. центральный банк всегда выбирает $\pi_1 = b/a$. Это возможно если $W_0(0) \leqslant W_1$, или

$$\beta \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.77}$$

3. Равновесие, в котором $q \in (0, 1)$, т.е. центральный банк играет смешанную стратегию. Вероятность q будет решением уравнения

$$W_0(q) = W_1(q), \tag{4.78}$$

или

$$q = \frac{1-p}{p}\,(2\,\beta - 1). \tag{4.79}$$

Такое равновесие возможно, если

$$\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}\frac{1}{1-p}. \tag{4.80}$$

Идея, изложенная в этой модели, достаточно проста (низкая инфляция сегодня означает низкие инфляционные ожидания на завтрашний день) и устойчива к альтернативным спецификацифям модели. Одним из выводов сравнительной статики состоит в том, что на инфляцию влияет дисконт центрального банка: низкоинфляционное равновесие возможно только при достаточно высоком β, т.е. если банк ценит будущий период достаточно высоко по сравнению с сегодняшним.

Эмпирические исследования подтверждают предположение о том, что предпочтения центрального банка могут влиять на уровень инфляции. Алесина и Саммерс [Alesina, Summers, 1993] показали, что инфляция значимо зависит от тепени независимости центрального банка. В тех странах, где председатель центрального банка назначается редко и на долгий срок, а также не вынужден отчитываться перед парламентом или исполнительной властью, инфляция ниже. Действительно, если центральный банк подвержен влиянию политической конъюнктуры (которая может требовать, например, краткосрочных мер по увеличению темпов роста экономики), то в таких случаях ожидаемый (и, следовательно, реальный) уровень инфляции будет выше.

4.3.4. БЛЕФ В ПОКЕРЕ

Покер [11] — одна из самых распространенных в мире карточных игр; в нее играют как миллионы любителей, так и профессионалы, зарабатывающие игрой на жизнь. По покеру проводятся многочисленные чемпионаты. Когда идет серьезная игра, то люди, сидящие за столом, стараются скрыть любые эмоции. Иногда игроки надевают темные очки специально для того, чтобы по выражению их лиц нельзя было понять совершенно ничего. Если игроку удается сделать «покерное лицо», то его карты известны только ему самому: покер — эталонная игра с неполной информацией. Может ли теория игр рассказать нам что-нибудь новое о покере?

Рассмотрим игру с двумя игроками. У каждого на руках пять карт; ценность руки определяется комбинацией из этих карт. Например, «трой-

[11] Этот пример взят из учебника Кеннета Бинмора [Binmore, 1992]. Авторство задачи приписывается великому математику Джону фон Нейману, одному из основоположников теории игр.

ка» — три карты одного достоинства (скажем, три валета) — это более высокая комбинация, чем «две двойки» (скажем, два короля и две девятки). Будем считать, что ценность карт у первого игрока — это величина u, известная ему одному. Второй игрок считает, что эта величина равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Аналогично, обозначим через v ценность карт у второго игрока; первый игрок также предполагает, что v равномерно распределена на $[0, 1]$.

Предположим, что в начале игры игрок 2 сделал ставку, равную 1 руб. Игрок 1 может либо уравнять эту ставку («чек»), либо поднять ставку до 2 руб. («рейз»). Если первый игрок уравнивает ставку, то торговля прекращается и игроки открывают карты; тот, у кого более сильная комбинация, выигрывает 1 руб., тот, у кого слабая комбинация — проигрывает. Конечно же, мы здесь рассматриваем сильно упрощенные правила. В настоящей игре второй игрок имел бы право поднять ставку после «чека» первого игрока.

Если первый игрок поднял ставку, то второй игрок может сделать одну из двух вещей: либо уравнять ставку («колл»), либо сбросить карты («фолд»).

Если второй игрок сбрасывает карты, то он проигрывает поставленный им 1 руб. Если он уравнивает ставку, то оба игрока вскрывают карты, и выигрывает игрок с более сильной комбинацией — но на этот раз размер выигрыша (и проигрыша) составит 2 руб. (опять же, в настоящей игре торговля могла бы продолжаться).

Обозначим за $p(u)$ поведенческую стратегию первого игрока — т.е. вероятность того, что он поднимет ставку в случае, если его комбинация составляет u. Аналогично определим $q(v)$ — вероятность того, что игрок 2 уравняет ставку в случае, если она была поднята первым игроком (и если комбинация второго игрока составляет v).

Найдем ожидаемые выигрыши каждого из игроков в зависимости от играемых ими стратегий. Если p — вероятность того, что первый игрок поднимет ставку и q — вероятность того, что второй игрок ее уравняет, то с вероятностью $p\,q$ оба игрока раскрывают карты при удвоенных ставках; с вероятностью $p\,(1-q)$ второй игрок сбрасывает карты при удвоенных ставках; и с вероятностью $(1-p)$ игроки раскрывают карты при обычной ставке. Ожидаемый выигрыш первого игрока составит $1 - p + p\,(1-q) + 2\,p\,q = 1 + p\,q$ при $v < u$ и $-(1-p) + p\,(1-q) - 2\,p\,q = 2\,p - 1 - 3\,p\,q$ при $u < v$. Следовательно, ожидаемый выигрыш первого игрока можно записать как

$$U_1 = \int\limits_0^u (1 + p(u)\,q(v))\,dv + \int\limits_u^1 (2\,p(u) - 1 - 3\,p(u)\,q(v))\,dv. \tag{4.81}$$

Обозначая

$$S_1(u) = 2\,(1-u) + \int\limits_0^u q(v)\,dv - 3\int\limits_u^1 q(v)\,dv, \tag{4.82}$$

$$T_1(u) = 2\,u - 1, \tag{4.83}$$

мы можем переписать

$$U_1 = p(u)\,S_1(u) + T_1(u). \tag{4.84}$$

Аналогично мы можем выписать функцию выигрыша второго игрока:

$$U_2 = -\int\limits_v^1 (1 + p(u)\,q(v))\,du - \int\limits_0^v (2\,p(u) - 1 - 3\,p(u)\,q(v))\,du. \tag{4.85}$$

Обозначая

$$S_2(v) = 3\int\limits_0^v p(u)\,du - \int\limits_v^1 p(u)\,du, \tag{4.86}$$

$$T_2(v) = 2\,v - 1 - 2\int\limits_0^v p(u)\,du, \tag{4.87}$$

мы можем переписать

$$U_2 = q(v)\,S_2(v) + T_2(v). \tag{4.88}$$

Так как функции U_1 и U_2 линейны по $p(u)$ и $q(v)$ соответственно, то в равновесии мы обязаны иметь $p(u) = 1$ при $S_1(u) > 0$, $p(u) = 0$ при $S_1(u) < 0$, $q(v) = 1$ при $S_2(v) > 0$, и $q(v) = 0$ при $S_2(v) < 0$.

Заметим, что в равновесии $S_2(v)$ является неубывающей функцией. Из соотношения (4.86) следует, что $S_2'(v) = 4\,p(v) \geqslant 0$, причем $S_2(0) \leqslant 0$ и $S_2(1) \geqslant 0$. Из непрерывности S_2 следует, что существуют η и ν, такие, что $q(v) = 0$ при $v < \eta$, $q(v) = 1$ при $v > \nu$ и $S_2(v) = 0$ при $v \in [\eta, \nu]$.

Из последнего утверждения следует, что $S_2'(v) = 0$, или $p(v) = 0$, при $v \in [\eta, \nu]$, причем $p(u) > 0$ при $u \notin [\eta, \nu]$.

Найдем, чему равен $p(u)$ при $u < \eta$. Мы знаем, что $S_1'(u) = -2 + 4\,q(u)$. Так как $q(u) = 0$ при $u < \eta$, то $S_1(u)$ является строго убывающей функцией на отрезке $[0, \eta]$. Из того, что $p(u) > 0$ на этом отрезке, следует то, что $S_1(u) \geqslant 0$. Но так как это — строго убывающая функция, то мы обязаны иметь $S_1(u) > 0$ и $p(u) = 1$ для $u < \eta$.

Аналогично, для $u > \nu$ имеем $q(u) = 1$ и, следовательно, $S_1(u)$ является строго возрастающей функцией. Так как $p(u) > 0$ при $u > \nu$, мы также обязаны иметь $S_1(u) > 0$ и $p(u) = 1$. Мы, таким образом, получили равновесную стратегию для первого игрока:

$$p(u) = \begin{cases} 0, & u \in [\eta, \nu]; \\ 1, & u \in [0, \eta) \cup (\nu, 1]. \end{cases} \tag{4.89}$$

Решая систему $S_1(\eta) = S_1(\nu) = S_2(\eta) = S_2(\nu)$, мы получим $\eta = 0{,}1$ и $\nu = 0{,}7$. Таким образом, во всех возможных равновесиях первый игрок реализует одну и ту же стратегию.

Нам остается описать равновесные стратегии второго игрока. В принципе их может быть много; давайте попробуем найти равновесие, в котором

$$q(v) = \begin{cases} 0, & v \leqslant \gamma; \\ 1, & v > \gamma. \end{cases} \tag{4.90}$$

В качестве самостоятельной задачи предлагается убедиться, что такая стратегия является равновесной при $\gamma = 2/5$.

Равновесная стратегия первого игрока весьма поучительна. В равновесии этот игрок систематически *блефует* — т.е. поднимает ставку при очень слабой карте. Делается это для того, чтобы заставить второго игрока уравнивать ставку. Действительно, если вы поднимаете ставки только при сильной карте, то с вами никто не будет торговаться — ведь при такой стратегии поднятие ставки сигнализирует другим игрокам, что у вас сильная карта и что торговаться с вами не имеет смысла. Для того чтобы вы могли время от времени выигрывать при сильной карте, вы должны блефовать при слабой карте. Причем блефовать надо при самой слабой карте из возможных! Эту важную деталь, известную профессионалам, часто упускают из внимания игроки более низкого уровня.

4.3.5. РИСК ОППОРТУНИСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ.

Вы — хозяин небольшой фирмы, торгующей воздушными шариками в парке Горького. Для того чтобы ваш павильон работал, вам необходим продавец. Однако, взяв на работу продавца, вы не можете контролировать качество его работы. Продавец может целый день спать за прилавком, а может и добросовестно относиться к своим обязанностям, зазывая покупателей и стараясь продать как можно больше шариков. Вам же будет известен только результат работы продавца: выручка. Как вам следует строить свои отношения с продавцом? Как компенсация, которую вы платите продавцу, должна зависеть от суммы выручки, которая определяется числом проданных воздушных шариков, если вы хотите максимизировать свою прибыль?

Существенная сложность этой задачи состоит в том, что количество проданных шариков зависит не только от добросовестности продавца, но и от других факторов, также не наблюдаемых вами: числа посетителей в парке, их настроения, погоды и т.д. Здесь существен следующий вопрос: существует ли такой (низкий) объем продаж, который ни при каких обстоятельствах не может быть достигнут, если продавец ведет себя добросовестно, но возможен, если продавец ленится? В таком случае вам, хозяину, достаточно назначить продавцу достаточно суровое наказание за объем продаж, который может быть достигнут *только* в случае недобросовестного исполнения продавцом своих обязанностей. Добросовестное исполнение продавцом своих обязанностей всегда связано с дополнительными издержками. Однако если возможна ситуация, в которой продавца можно уличить в недобросовестном поведении, то при достаточно суровом наказании он будет работать добросовестно. Конечно же, это возможно при дополнительном условии, что его ожидаемая зарплата будет не ниже, чем альтернативный выигрыш, который он может получить, вовсе отказавшись от работы.

Задача существено усложняется, если невозможно доказать, что работник вел себя недобросовестно, исходя только из результатов его работы. В таком случае мы не можем добиться добросовестного исполнения обязанностей работником, попросту назначив суровое наказание за низкий результат. Ведь если низкий результат может быть получен и в результате добросовестного исполнения обязанностей, то продавец может вовсе не согласиться на такую работу, так как есть вероятность быть сурово наказанным ни за что.

Итак, предположим [12], что игра между хозяином и продавцом имеет два периода. В момент времени $t = 1$ хозяин объявляет продавцу, сколько он ему заплатит в зависимости от того, какую выручку π он покажет в конце дня. В момент времени $t = 2$ продавец решает, стоит ли ему работать добросовестно ($e = \mathtt{H}$), работать недобросоветсно ($e = \mathtt{L}$) или не работать ($e = \mathtt{N}$). Прибыль, показанная продавцом в конце дня, есть случайная величина, распределение которой зависит от усилий продавца e. Пусть $F(\cdot|\mathtt{H})$ и $F(\cdot|\mathtt{L})$ — функции распределения выручки при добросовестном и недобросовестном поведении продавца. Мы будем считать, что в обоих случаях π распределен на $[0, 1]$, причем оба распределения имеют ненулевую плотность $f(\cdot|\mathtt{H})$ и $f(\cdot|\mathtt{L})$. Добросовестная работа приносит бóльшую выручку; это отражено в нашем предположении, что [13] $F(\pi|\mathtt{H}) \leqslant F(\pi|\mathtt{L})$ для всех $\pi \in [0, 1]$. Рассмотрим сначала наиболее простой вариант задачи, когда хозяин имеет возможность наблюдать за действиями продавца. В таком случае зарплата продавца может зависеть как от выручки, которую он

[12] Этот пример следует Масколлелю, Уинстону и Грину [MasCollel, Whinston, Green, 1995, ch. 14.B].

[13] В таком случае речь идет о *стохастическом доминировании первого порядка*.

показал, так и от его добросовестности. Пусть $w_H(\cdot)$ и $w_L(\cdot)$ — зарплаты (зависящие от π), которые хозяин выплачивает в том случае, если продавец выбирает $e = \mathtt{H}$ либо $e = \mathtt{L}$.

Выигрыш продавца зависит от его зарплаты и от его добросовестности. Пусть $v(w)$ — выигрыш продавца при зарплате w и недобросовестном поведении и составляет $v(w) - c$ — при зарплате w и добросовестном поведении. Будем считать, что $v' > 0$ и $v'' < 0$. Таким образом, ожидаемый выигрыш продавца равен

$$u_2 = \begin{cases} \displaystyle\int v(w_{\mathtt{H}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi - c, & e = \mathtt{H}; \\ \displaystyle\int v(w_{\mathtt{L}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi, & e = \mathtt{L}; \\ \overline{u}, & e = \mathtt{N}, \end{cases} \tag{4.91}$$

где $\overline{u}$ — гарантированный уровень зарплаты, которую продавец может получить на альтернативной работе. Выигрыш хозяина будет

$$u_1 = \begin{cases} \displaystyle\int (\pi - w_{\mathtt{H}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi, & e = \mathtt{H}; \\ \displaystyle\int (\pi - w_{\mathtt{L}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi, & e = \mathtt{L}; \\ 0, & e = \mathtt{N}. \end{cases} \tag{4.92}$$

Предположим, что хозяин хочет добиться уровня усилий $e = \mathtt{L}$. Его задача — найти $w_{\mathtt{L}}(\pi)$ и $w_{\mathtt{H}}(\pi)$, максимизирующие

$$\int (\pi - w_{\mathtt{L}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi \tag{4.93}$$

при ограничениях

$$\int v(w_{\mathtt{H}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi - c \leqslant \int v(w_{\mathtt{L}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi \tag{4.94}$$

и

$$\int v(w_{\mathtt{L}}(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi \geqslant \overline{u}. \tag{4.95}$$

Легко убедиться (что предлагается сделать в качестве упражнения), что решением этой задачи будет установление заработной платы, не зависящей от объема продаж: $w_{\mathtt{L}} = \overline{u}$ и $w_{\mathtt{H}} \leqslant \overline{u} + c$. Аналогично, если хозяин хочет, чтобы продавец выбрал $e = \mathtt{H}$, то он установит заработную плату $w_{\mathtt{H}} = \overline{u} + c$ и $w_{\mathtt{L}} \leqslant \overline{u}$. Таким образом, при наблюдаемых действиях продавца будет верно следующее:

1. Выигрыш продавца всегда равен выигрышу на альтернативной работе $\overline{u}$.
2. Предложенный хозяином контракт Парето-эффективен, т.е. он максимизирует суммарный выигрыш продавца и хозяина $u_1 + u_2$ по всем возможным $e \in \{\mathtt{L}, \mathtt{H}\}$, $w_{\mathtt{L}}(\cdot)$ и $w_{\mathtt{H}}(\cdot)$.

Намного интересней тот случай, когда любой уровень продаж, возможный при недобросовестном поведении, также возможен, если продавец ведет себя добросовестно. У него всегда есть «отмазка». Как бы мало товара он не продал, он всегда может сослаться на то, что он старался, как мог, но день выдался хуже некуда. В таком случае, если слишком сильно наказывать продавца за низкие продажи, то можно и вовсе лишиться работника, так как низкие продажи возможны и в том случае, если он работает добросовестно. Теперь заработная плата не может зависеть от прилагаемых продавцом усилий (так как последние ненаблюдаемы) и зависит только от показанной им выручки. Обозначим заработную плату, предлагаемую хозяином, через $w(\cdot)$. Ожидаемые выигрыши продавца и хозяина будут

$$u_2 = \begin{cases} \displaystyle\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi - c, & e = \mathtt{H}; \\ \displaystyle\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi, & e = \mathtt{L}; \\ \overline{u}, & e = \mathtt{N}, \end{cases} \tag{4.96}$$

где $\overline{u}$ — гарантированный уровень зарплаты, которую продавец может получить на альтернативной работе. Выигрыш хозяина будет

$$u_1 = \begin{cases} \displaystyle\int (\pi - w(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi, & e = \mathtt{H}; \\ \displaystyle\int (\pi - w(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi, & e = \mathtt{L}; \\ 0, & e = \mathtt{N}. \end{cases} \tag{4.97}$$

Сразу заметим, что хозяин всегда может предложить контракт, при котором работник выберет уровень усилий $e = \mathtt{L}$. Пусть зарплата не зависит от выручки и обеспечивает выигрыш, равный выигрышу на альтернативной работе: $\overline{w} = v^{-1}(\overline{u})$. При такой стратегии хозяина одним из равновесных ответов продавца будет $e = \mathtt{L}$.

Возможен ли контракт, при котором работник выберет уровень усилий $e = \mathtt{H}$? При данном $w(\pi)$ необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi - c \geqslant \int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi, \tag{4.98}$$

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi - c \geqslant \overline{u}. \tag{4.99}$$

Первое из этих двух условий является условием совместимости со стимулами: продавец должен захотеть выбрать действие $e = \mathtt{H}$ вместо действия $e = \mathtt{L}$. Второе условие является условием участия: выигрыш продавца должен быть не ниже, чем $\overline{u}$. Соответственно, в совершенном по подыграм равновесии хозяин должен решить следующую задачу: найти

$$\max_{w(\cdot)} \int (\pi - w(\pi)) f(\pi|\mathrm{H})\, d\pi \tag{4.100}$$

при условиях (4.98) и (4.99), которые должны выполняться при всех $\pi \in \in [0, 1]$. Выпишем лагранжиан для этой задачи:

$$\begin{aligned} L = \int (\pi - w(\pi)) f(\pi|\mathrm{H})\, d\pi + \\ + \lambda \left(\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathrm{H})\, d\pi - c - \int v(w(\pi)) f(\pi|\mathrm{L})\, d\pi \right) + \\ + \mu \left(\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathrm{H})\, d\pi - c - \overline{u} \right). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Условием первого порядка должно быть

$$\frac{\partial L}{\partial\, w(\pi)} = 0 \tag{4.102}$$

для всех $\pi \in [0, 1]$. Следовательно, в любом совершенном по подыграм равновесии, в котором $e = \mathrm{H}$, мы должны иметь

$$-f(\pi|\mathrm{H}) + \lambda\, v'(w(\pi)) \big(f(\pi|\mathrm{H}) - f(\pi|\mathrm{L}) \big) + \mu\, v'(w(\pi)) f(\pi|\mathrm{H}) = 0, \tag{4.103}$$

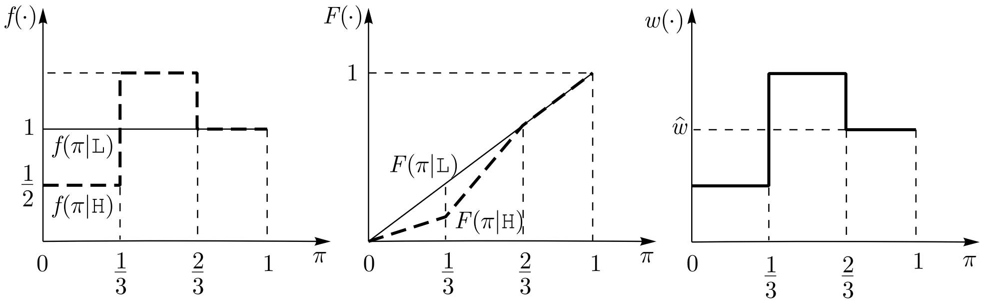
или

$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \mu + \lambda \left(1 - \frac{f(\pi|\mathrm{L})}{f(\pi|\mathrm{H})} \right), \tag{4.104}$$

для каких-то $\mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$.

Убедимся, что в любом равновесии мы должны иметь $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Так как $F(\pi|\mathrm{H}) \leqslant F(\pi|\mathrm{L})$ для всех $\pi \in [0, 1]$, причем $F(0|\mathrm{H}) = F(0|\mathrm{L}) = = 0$ и $F(1 \mid \mathrm{H}) = F(1|\mathrm{L}) = 1$, то для какого-то $\pi \in (0, 1)$ мы должны иметь $f(\pi|\mathrm{L}) > f(\pi|\mathrm{H})$. Но если $\mu = 0$, то в силу того, что $\lambda \geqslant 0$, мы получим $v'(w(\pi)) \leqslant 0$ для данного π, что противоречит нашему предположению, что $v' > 0$. Если же $\lambda = 0$, то w не зависит от π. Однако при фиксированной зарплате работник должен выбрать $e = \mathrm{L}$.

Получается, что оба условия (4.98) и (4.99) выполняются как равенства. Из того, что $\mu > 0$ и $\lambda > 0$, следует такой интересный факт. Пусть $\widehat{w}$ — решение уравнения $1/v'(w) = \lambda$, т.е. зарплата работника при π таком, что $f(\pi|\mathrm{H}) = f(\pi \mid \mathrm{L})$. Тогда получается, что $w(\pi) < \widehat{w}$, если $f(\pi|\mathrm{H}) < f(\pi|\mathrm{L})$, и $w(\pi) > \overline{w}$, если $f(\pi|\mathrm{H}) > f(\pi|\mathrm{L})$. Оптимальный контракт, предлагаемый владельцем, предлагает бóльшее вознаграждение за прибыль π *в том случае, если этот уровень прибыли более вероятен при добросовестном поведении продавца*. Уровень зарплаты при оптимальном контракте при прибыли π зависит от $\dfrac{f(\pi|\mathrm{H})}{f(\pi|\mathrm{L})}$ — отношения правдоподобия получения такого уровня прибыли при добросовестном и недобросовестном поведении продавца.



а) Функция плотности распределения прибыли

б) Функция распределения прибыли

в) Зарплата в зависимости от прибыли

Рис. 4.14. Равновесная зарплата и прибыль в модели занятости при риске оппортунистического поведения

Это не означает, что более высокая прибыль обязательно должна компенсироваться более высокой зарплатой. Напротив, рассмотрим пример на рис. 4.14, *а–в*.

В этом случае прибыль от 0 до $1/3$ более вероятна при низком уровне усилий, прибыль от $1/3$ до $2/3$ — при высоком и прибыль от $2/3$ до 1 равновероятна при обоих уровнях усилий. Соотвественно, вознаграждение за прибыль в диапазоне от $1/3$ до $2/3$ должно быть самым высоким, а за прибыль в диапазоне от 0 до $1/3$ — самым низким. Согласно условию (4.104) при равновесном контракте $w(\pi)$ зарплата есть линейная функция от отношения правдоподобия $\dfrac{f(\pi|\mathtt{H})}{f(\pi|\mathtt{L})}$. Монотонность этого отношения по π (см. [Milgrom, 1981]) не следует из того, что $F(\pi|\mathtt{H}) \leqslant F(\pi|\mathtt{L})$.

Мы пришли к следующему выводу: для того чтобы обеспечить добросовестность усилий со стороны продавца и при этом максимизировать свою прибыль, хозяин должен предложить контракт, который обеспечивает продавцу уровень выигрыша $\overline{u}$ и делает его безразличным между выбором $e = \mathtt{L}$ и $e = \mathtt{H}$. При этом ожидаемое значение заработной платы будет больше, чем в том случае, когда уровень усилий продавца наблюдаем. Будет ли при этом прибыль хозяина выше или ниже, чем в том случае, когда он просто предложит продавцу зарплату, равную $\overline{u}$ (и, таким образом, максимизирует свою прибыль при уровне усилий $e = \mathtt{L}$)? Это зависит от конкретных значений параметров нашей модели.

Рассмотрим пример. Пусть π принимает значения от 0 до 1, причем функции плотности распределения прибыли имеют вид

$$
\begin{aligned}
&f(\pi|\mathtt{L}) = 1,\\
&f(\pi|\mathtt{H}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \pi \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right); \\[2mm] \dfrac{3}{2}, & \pi \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

Пусть выигрыш продавца, в зависимости от его зарплаты, равен $v(w) = \sqrt{w}$.

Найдем ожидаемый доход хозяина при низком и высоком уровне усилий продавца. Мы имеем

$$R_L = \int \pi f(\pi|\mathtt{L}) d\pi = \frac{1}{2},$$
$$R_H = \int \pi f(\pi|\mathtt{H}) d\pi = \frac{5}{8}. \tag{4.106}$$

Пусть хозяин решает предложить продавцу контракт, обеспечивающий уровень усилий $e = \mathtt{L}$ и предусматривающий фиксированную зарплату $\overline{w}$. Мы будем иметь $v(\overline{w}) = \overline{u}$, или $\overline{w} = \overline{u}^2$. Такой контракт будет приносить продавцу ожидаемую прибыль

$$u_{\mathtt{L}} = R_{\mathtt{L}} - \overline{w} = \frac{1}{2} - \overline{u}^2, \tag{4.107}$$

причем прибыль будет неотрицательной при $\overline{u} \leqslant 1/\sqrt{2}$.

Пусть теперь хозяин решил предложить контракт, при котором продавец выберет уровень усилий $e = \mathtt{H}$. Согласно (4.104) он предложит зарплату w_1 в том случае, если продавец покажет прибыль $\pi \in \left[0, 1/2\right)$ и зарплату $w_2 > w_1$, если $\pi \in \left[1/2, 1\right]$. Так как оба условия (4.98) и (4.99) выполняются со знаком равенства, мы можем найти w_1 и w_2 напрямую. Мы имеем

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{H})\, d\pi = \frac{1}{4}\sqrt{w_1} + \frac{3}{4}\sqrt{w_2} \tag{4.108}$$

и

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|\mathtt{L})\, d\pi = \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2}. \tag{4.109}$$

Подставив полученные величины в (4.98) и (4.99), выполняемые со знаком равенства, получим

$$w_1 = (\overline{u} - 2\,c)^2,$$
$$w_2 = (\overline{u} + 2\,c)^2. \tag{4.110}$$

Ожидаемая прибыль хозяина при этом будет равна

$$u_{\mathtt{H}} = R_{\mathtt{H}} - \frac{1}{4}\,w_1 - \frac{3}{4}\,w_2 = \frac{5}{8} - \overline{u}^2 - 4\,c^2 - 2\,\overline{u}c. \tag{4.111}$$

Итак, в равновесии хозяин предложит следующий контракт, в зависимости от c и $\overline{u}$:

1. $\frac{1}{8} \geqslant 4\,c^2 + 2\,\overline{u}c$, $\frac{5}{8} - \overline{u}^2 - 4\,c^2 - 2\,\overline{u}\,c \geqslant \overline{u}^2$: контракт с $e = \mathtt{H}$, предлагающий w_1 при $\pi \in \left[0, 1/2\right)$ и w_2 при $\pi \in \left[1/2, 1\right]$.
2. $\frac{1}{8} \leqslant 4\,c^2 + 2\,\overline{u}\,c$, $\overline{u} \leqslant 1/\sqrt{2}$: контракт с $e = \mathtt{L}$, предлагающий $\overline{w}$ вне зависимости от прибыли.

3. Любой другой случай: хозяин не может обеспечить себе положительную прибыль. Например, он получает нулевую прибыль, предлагая зарплату, меньшую, чем $\overline{u}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1 О СУЩЕСТВОВАНИИ СОВЕРШЕННОГО РАВНОВЕСИЯ

Сначала дадим два альтернативных определения совершенного равновесия. Первое из них приводится у Зелтена [Selten, 1975], второе — у Майерсона [Myerson, 1978].

Пусть G — конечная игра в нормальной форме, $\varepsilon < \varepsilon_0 = \min\limits_i \frac{1}{|S_i|}$. Пусть Σ_i^ε — множество всех смешанных стратегий игрока i, в котором каждая чистая стратегия играется с вероятностью, не меньшей, чем ε.

Определение 4.15. Пусть G — игра в нормальной форме, $\varepsilon < \varepsilon_0$. Пусть $G^\varepsilon = \langle I, \Sigma^\varepsilon, u\rangle$, $\sigma^{*\varepsilon}$ — равновесие в игре G^ε. Назовем его ε-*ограниченным равновесием*.

Совершенное равновесие можно определить относительно σ^ε.

Определение 4.16. Пусть $\varepsilon_k \to 0$ — последовательность, $\varepsilon_k < \varepsilon_0$. Будем говорить, что σ — *совершенное равновесие*, если оно является пределом некоторой последовательности $\sigma^{*\varepsilon_k}$.

Для того чтобы ввести третье по счету определение совершенного равновесия, понадобится еще одно вспомогательное понятие.

Определение 4.17. Профиль стратегий σ^ε называется ε-совершенным равновесием, если он является вполне смешанным, и если для всех i, для всех $s_i \in S_i$, если существует такое $s_i' \in S_i$, что

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^\varepsilon) < u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon),$$

то $\sigma_i^\varepsilon(s_i) \leqslant \varepsilon$.

Здесь не задана минимальная вероятность, с которой играются чистые стратегии каждого из игроков, и не требуется, чтобы равновесная стратегия была наилучшим ответом на профиль стратегий других игроков (как в ε-ограниченном равновесии в определении 4.15), но требуется, чтобы «неэффективные» стратегии игрались с малой вероятностью. Определим совершенное равновесие как предел ε-совершенных.

Определение 4.18. Профиль стратегий σ^* называется *совершенным равновесием*, если существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$, $\varepsilon_k < \varepsilon_0$, такая что σ^* будет пределом последовательности ε_k-совершенных равновесий:

$$\sigma^* = \lim_{k\to\infty} \sigma^{\varepsilon_k}.$$

Опять же, выбирая разные последовательности, мы будем получать различные равновесия. Теперь докажем эквивалентность всех трех определений совершенных равновесий.

Лемма 4.2. *Определения* 4.6, 4.16, 4.18 *совершенного равновесия эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из определения 4.16 следует определение 4.18, из 4.18 следует 4.6 и, замыкая круг, из 4.6 следует 4.16.

1. **Определение 4.16 $\Rightarrow$ определение 4.18.** Пусть σ^ε — ε-ограниченное равновесие. Докажем, что оно будет ε-совершенным. Первое свойство определения 4.17 выполняется автоматически, а второе следует из свойств максимума линейной функции. Пусть для каких-то двух чистых стратегий i-го игрока s_i' и s_i'' верно, что $u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon) < u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\varepsilon)$. Пусть стратегия s_i' играется с вероятностью $\sigma_i(s_i')$, строго большей, чем ε. Определим

$$\overline{\sigma}_i(s_i) = \begin{cases} \sigma_i^\varepsilon(s_i), & \text{если} \;\; s_i \neq s_i', \; s_i \neq s_i''; \\ \varepsilon, & \text{если} \;\; s_i = s_i'; \\ \sigma_i^\varepsilon(s_i'') + \sigma_i^\varepsilon(s_i') - \varepsilon, & \text{если} \;\; s_i = s_i''. \end{cases}$$

Заметим, что $\overline{\sigma}_i \in \Sigma_i^\varepsilon$. Так как

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon) < u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\varepsilon) \;\; \text{и} \;\; \sigma_i^\varepsilon(s_i') > \varepsilon, \tag{4.112}$$

получим

$$(\sigma_i^\varepsilon(s_i') - \varepsilon)\, u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon) < (\sigma_i^\varepsilon(s_i') - \varepsilon)\, u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\varepsilon), \tag{4.113}$$

или

$$\sigma_i^\varepsilon(s_i')\, u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon) + \varepsilon\, u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\varepsilon) < \varepsilon\, u_i(s_i', \sigma_{-i}^\varepsilon) + \sigma_i^\varepsilon(s_i')\, u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\varepsilon), \tag{4.114}$$

из чего следует $u_i(\sigma^\varepsilon) < u_i(\overline{\sigma}_i, \sigma_{-i}^\varepsilon)$.

Это противоречит предположению о том, что σ_i^ε является наилучшим из множества Σ_i^ε ответом на σ_{-i}^ε. Следовательно, любое ε-ограниченное равновесие является ε-совершенным. Для завершения доказательства этого пункта остается лишь заметить, что в случае полного совпадения сходящихся последовательностей их пределы равны.

2. **Определение 4.18 $\Rightarrow$ определение 4.6.** Возьмем последовательность $\varepsilon_k \to 0$ и σ^{ε_k} — соотвествующую последовательность ε_k-совершенных

равновесий, удовлетворяющих определению 4.18. Тогда, используя свойства предела последовательности, разобьем все чистые стратегии i-го игрока на два класса: те, для которых $\sigma_i^{\varepsilon_k}(s_i) > d$ для всех $k \geqslant k_0$ и какой-то $d > 0$, не зависящей от k (обозначим этот класс как S_i'), и те, для которых $\sigma_i^{\varepsilon_k}(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ (обозначим этот класс как S_i''). Заметим, что в смешанной стратегии σ_i^* с положительной вероятностью играются только чистые стратегии из S_i'. Множество S_i' непусто в силу конечности числа стратегий i-го игрока и того, что $\sum\limits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. Тогда любая стратегия i-го игрока s_i' из множества S_i' должна быть наилучшим ответом на профиль смешанных стратегий других игроков $\sigma_{-i}^{\varepsilon_k}$ при $k \geqslant k_0$. Действительно, иначе существовала бы такая смешанная стратегия $\overline{\sigma}_i \in \Sigma_i$, что $u_i(\overline{\sigma}_i, \sigma_{-i}^{\varepsilon_k}) > u_i(s_i', \sigma_{-i}^{\varepsilon_k})$. Но отсюда следует существование чистой стратегии i-го игрока $\overline{s}_i \in S_i$, для которой выполнено:

$$u_i(\overline{s}_i, \sigma_{-i}^{\varepsilon_k}) > u_i(s_i', \sigma_{-i}^{\varepsilon_k}).$$

Тогда, согласно определению 4.18, выполняется $\sigma_i^{\varepsilon_k}(s_i') < \varepsilon_k$ и не может быть такого, что $\sigma_i^{\varepsilon_k}(s_i') > d$. Мы пришли к противоречию.
Так как любая стратегия из множества S_i' является наилучшим ответом на последовательность профилей $\sigma_{-i}^{\varepsilon_k}$ при $k \geqslant k_0$, то σ_i^* тоже является наилучшим ответом на любой элемент данной последовательности.

3. **Определение 4.6 $\Rightarrow$ определение 4.16.** Пусть σ_k — последовательность профилей вполне смешанных стратегий, отвечающих определению 4.6, σ^* — предел этой последовательности. Снова разобьем все стратегии i-го игрока на два класса. Пусть $s_i \in S_i'$, если $\sigma^*(s_i) > 0$, и $s_i \in S_i''$ в противном случае. Заметим, что множество S_i' непусто. Для каждого $s_i \in S_i$ определим последовательность $\varepsilon_k'(s_i)$ таким образом:

$$\varepsilon_k'(s_i) = \begin{cases} 1/k, & \text{если } \ s_i \in S_i'; \\ \sigma_k(s_i), & \text{если } \ s_i \in S_i''. \end{cases} \tag{4.115}$$

Возьмем

$$\varepsilon_k' = \max_{i, s_i \in S_i} \varepsilon_k'(s_i). \tag{4.116}$$

По нашему предположению, σ_i^* является наилучшим ответом на любой элемент последовательности σ_i^k, т.е. решением задачи

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^{\varepsilon}). \tag{4.117}$$

Из свойств максимальности линейной функции при линейных ограничениях следует существование такого $c > 0$, что для всех $s_i \in S_i'$

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^{\varepsilon}) = c \tag{4.118}$$

и
$$u_i(s_i, \sigma^{\varepsilon}_{-i}) \leqslant c \tag{4.119}$$
для всех $s_i \in S''_i$.

Тогда по крайней мере одно из решений исходной системы будет иметь вид (при достаточно больших k):
$$\sigma^{\varepsilon_k}(s_i) = \begin{cases} \sigma^*(s_i) - \dfrac{\sum\limits_{s_i \in S''_i} \varepsilon_k(s_i)}{|S'_i|}, & \text{если} \ \ s_i \in S'_i; \\ \varepsilon_k(s_i), & \text{если} \ \ s_i \in S''_i. \end{cases} \tag{4.120}$$
Для завершения доказательства остается лишь заметить, что $\varepsilon_k = \max\limits_{i, s_i \in S_i} \varepsilon_k(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\sigma^{\varepsilon_k} \to \sigma^*$ при $\varepsilon_k \to 0$. ■

Теперь мы готовы доказать теорему о существовании равновесия, совершенного относительно дрожащей руки. Для этого нам достаточно доказать существование равновесия, определенного любым из трех использованных нами способов. Проще всего это сделать, исходя из определения 4.16.

Лемма 4.3. *Пусть G — игра в нормальной форме. Тогда для любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$, $\varepsilon_k < \varepsilon_0$ существует совершенное равновесие согласно определению* (*4.16*).

Доказательство. Для любой конечной игры G и для любого ε существует равновесие $\sigma^{*\varepsilon}$ в игре G^{ε}. Действительно, множества стратегий Σ_i^{ε} являются выпуклыми и компактными; далее доказательство эквивалентно доказательству существования равновесия Нэша.

Множество всех смешанных профилей компактно (как декартово произведение конечного числа компактных множеств). По определению компактности из любой последовательности точек компактного множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Выбрав такую подпоследовательность из последовательности $\sigma^{*\varepsilon_k}$, получим σ^* качестве ее предела. Оно и будет равновесием по определению 4.16. ■

В силу леммы 4.2 это утверждение эквивалентно утверждению теоремы 4.1.

4.4. ЗАДАЧИ

4.1. Опишите множество всех слабо секвенциальных равновесий в игре «лошадка Зелтена» (рис. 4.2). Будут ли все эти равновесия сильно секвенциальными?

4.2. Докажите, что слабо доминируемые стратегии не могут входить в совершенное равновесие с положительной вероятностью.

4.3. Пусть G — игра в нормальной форме, причем ни у одного из игроков нет слабо доминируемых стратегий. Верно ли, что любое равновесие Нэша в игре G будет совершенным?

4.4. Пусть G — игра двух игроков с нулевой суммой, σ^* — равновесие Нэша. Верно ли, что σ^* — совершенное равновесие?

4.5. Рассмотрим игру на рис. 4.15. Найдите все равновесия Нэша. Найдите все слабо секвенциальные равновесия. Найдите все сильно секвенциальные равновесия.

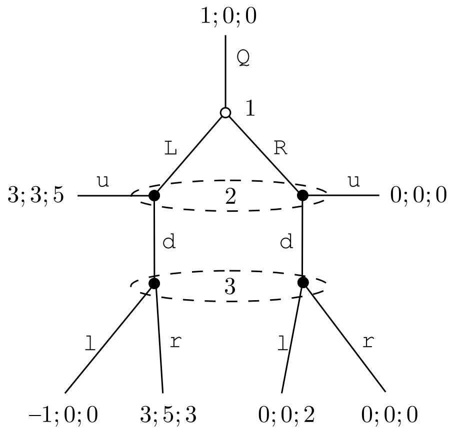


Рис. 4.15. Найдите все равновесия

4.6. Найти все равновесия по Нэшу и все совершенные равновесия в следующей игре:

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	U	2; 3	1; 1	1; 2
	M	0; 0	4; 2	1; 1
	D	1; 1	2; 1	1; 1

4.7. В игре, приведенной на с. 240–243, существует ли гибридное равновесие с $q_1 \in (0, 1)$? С $q_1 = 0$?

4.8. Найдите все совершенные байесовы равновесия для игры с сообщениями на с. 258–259:

		Игрок S		
		t_1	t_2	t_3
Игрок R	a_1	0; 1	0; 0	0; 0
	a_2	1; 0	1; 2	0; 0
	a_3	0; 0	0; 0	2; 1

Внимание: столбцы матрицы соответствуют *типам* игрока S. Все три типа игрока S равновероятны.

4.9. [Besley, Prat, 2006]. Глава некоторого государства — президент — избирается всенародным голосованием. Известно, что президент может быть одного из двух типов: честный ($\theta = g$) или жулик ($\theta = b$). Пусть $\gamma \in (0, 1)$ — вероятность того, что президент является жуликом. Выигрыш каждого избирателя от нахождения честного кандидата у власти равен 1 за каждый период. Выигрыш от нахождения у власти жулика равен 0. Пусть в стране также существуют n СМИ. Перед выборами каждое СМИ i получает сигнал $s_i \in \{b, g\}$. Известно, что сигналы независимы, причем $\mathsf{P}(s_i{=}g \mid \theta{=}g) = 1$ и $P(s_i = b \mid \theta = b) = q \in [0, 1]$. То есть q — вероятность того, что отдельно взятое СМИ получит достоверную информацию о том, что президент — жулик. Рассмотрим игру, происходящую в три этапа.

Этап 1. Президенту становится известен его тип θ. СМИ получают сигналы s_i. Президент наблюдает сигналы; затем каждому СМИ i, получившему сигнал $s_i = b$, президент предлагает сумму $t_i \in \in [0, \infty)$ в обмен на то, что это СМИ не опубликует имеющуюся у него информацию. Сумма t_i известна только СМИ i.

Этап 2. Каждое СМИ i, получившее сигнал $s_i = b$, решает, опубликовать имеющуюся информацию, или нет. Пусть I — все СМИ, получившие сигнал b, $\overline{I} \in I$ — все СМИ, получившие сигнал b и решившие опубликовать полученную информацию. Если $s_i = b$, то выигрыш СМИ i составит t_i/τ, если оно решит не публиковать информацию, и $a/|\overline{I}|$ в обратном случае. Здесь $\tau > 0$ отражает транзакционные издержки, связанные с попыткой президента установить контроль над СМИ. Если хотя бы одно СМИ публикует информацию, то всем избирателям становится известно, что президент — жулик.

Этап 3. Избиратели голосуют, решая, переизбрать президента или выбрать альтернативного кандидата, который является жуликом с вероятностью γ. Выигрыш президента составляет $r - \sum_{i \in I} t_i$, если его переизбирают, и $-\sum_{i \in I} t_i$, если нет. Найдите равновесие в этой игре для двух случаев: когда СМИ наблюдает сигнал, получаемый другим СМИ, и когда сигналы — частная информация.

4.10. Рассмотрим задачу риска оппортунистического поведения на с. 274–281.

(a) Пусть хозяин решил предложить контракт, при котором продавец выберет уровень усилий $e = H$. Покажите, что ожидаемая заработная плата будет выше, чем $\overline{u} + c$ — зарплата, которую продавец будет получать за $e = H$ в случае, если уровень его усилий наблюдаем.

(b) Пусть продавец нейтрален к риску: $v(w) = w$. Как изменится оптимальный контракт? Будет ли он всегда Парето-эффективным?

4.11. Рассмотрим задачу сигнализирования на рынке труда на с. 246–251. Предположим теперь, что производительность работника зависит от уровня образования, полученного им. Пусть работник, имеющий тип θ_H и уровень образования e, производит $y(e, \theta_H) = \theta_H + e\eta_H$, работник типа $\theta_L < \theta_H$ имеет тип $y(e, \theta_L) = \theta_L + e\eta_L$, где $\eta_H > \eta_L > 0$. Пусть издержки образования равны $c_H \cdot e^2$ для производительного работника и $c_L \cdot e^2$ для непроизводительного, где $c_L > c_H > 0$.

(a) Пусть $(e_L, e_H, \mu(e), w(e))$ — разделяющее равновесие. Чему равно e_L? Найдите максимальное и минимальное значения e_H. Какие ограничения накладываются на функцию веры $\mu(e)$?

(b) Найдите e, при которых возможны смешивающие равновесия в этой задаче.

4.12. Рассмотрим задачу сигнализирования на рынке труда на с. 246–251. Докажите, что существует единственное разделяющее равновесие, удовлетворяющее интуитивному критерию Чоу и Крепса [Cho, Kreps, 1987].

4.13. Докажите, что в игре с сообщениями на с. 259 существует только смешивающее равновесие.

4.14. Пусть в игре с сообщениями выигрыши игроков зависят от t и a следующим образом:

		Игрок S	
		t_1	t_2
Игрок R	a_1	x; 1	y; 0
	a_2	z; 0	w; 1

При каких значениях x, y, w, и z в этой игре существует разделяющее равновесие? Найдите его.

4.15. [Kreps, Milgrom, Roberts, Wilson, 1982]. Два человека, Петя и Вася, играют в дилемму заключенного два раза подряд. Их выигрыши на первом этапе и на втором этапе таковы:

1 этап		**Петя**	
		Молчать	Сдаться
Вася	Молчать	2; 2	0; 3
	Сдаться	3; 0	1; 1

2 этап		**Петя**	
		Молчать	Сдаться
Вася	Молчать	2; 2	0; x
	Сдаться	x; 0	1; 1

где $x > 2$.

Игроки могут быть двух типов:

(a) «Оппортунист» — обыкновенный стратегический игрок в нашем понимании.

(b) «Кремень» — в момент времени $t = 1$ молчит. В момент времени $t = 2$ сдается только тогда, когда другой игрок сдался в момент времени $t = 1$.

Вася является «оппортунистом». Петя — «кремень» с вероятностью p и «оппортунист» с вероятностью $1 - p$ (ему самому его тип известен). Найдите совершенное байесово равновесие в этой игре.

4.16. [Gibbons, 1992, p. 250]. Владимир и Михаил — партнеры по бизнесу. Доля Владимира составляет s, доля Михаила составляет $1 - s$. Они решили прекратить партнерство. Согласно договоренностям, сначала Владимир должен назвать Михаилу свою оценку стоимости всего бизнеса p. Затем Михаил должен решить — либо купить долю Владимира за $p\,s$ рублей, либо продать ему свою долю за $p(1-s)$ руб. Величина, в которую каждый партнер оценивает бизнес — частная информация, однако известно, что оценки — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$. Найдите совершенное байесово равновесие.

4.17. Рассмотрите модель политического популизма, приведенную на с. 263–267. Существуют ли в этой игре смешивающие равновесия?

4.18. [Nalebuff, 1987]. Иван Иванович думает, подать ли ему гражданский иск против Ивана Никифоровича. Если дело дойдет до суда, Иван Никифорович должен будет выплатить Ивану Ивановичу d руб. Эта величина известна только Ивану Никифоровичу; с точки зрения Ивана Ивановича, она равноверно распределена на $[0, 1]$. Судебные издержки составляют $c < 1/2$ для истца и 0 для защитника. Динамика игры такова.

Этап 1. Истец (Иван Иванович) предлагает защитнику (Ивану Никифоровичу) решить дело полюбовно и заплатить ему s.

Этап 2. Если защитник соглашается, то игра заканчивается. Выигрыши составляют s для истца и $-s$ для защитника.

Этап 3. Если защитник отказался уладить дело, то истец решает, подать ли дело в суд, или отказаться от претензий. В случае суда выигрыши сторон составляют $d - c$ для истца и $-d$ для защитника. Если истец отказывается судиться, то оба игрока получают нулевой выигрыш.

Найдите совершенное байесово равновесие, следуя такому плану:

(a) Рассмотрим третий этап игры. Предположим, что Иван Иванович считает, что Иван Никифорович согласится уладить дело, только когда $d > d^*$ для некоторой d^*. Как решение истца Ивана Ивановича зависит от d^*?

(b) Рассмотрим второй этап. Иван Никифорович получил предложение s и считает, что в случае отказа Иван Иванович подаст на него в суд с вероятностью p. Как решение Ивана Никифоровича зависит от p и s? Если игра начинается на втором этапе, то каким будет совершенное байесово равновесие при $s < 2c$? При $s > 2c$?

(c) Найдите равновесие во всей игре при $c < 1/3$ и при $1/3 < c < 1/2$.

4.19. В игре с сообщениями на с. 259–262, игрок R решил делегировать игроку S право принимать решение. То есть теперь мы имеем $a = t + b$. Увеличится ли выигрыш игрока R в результате такого перераспределения полномочий? Изменится ли ваш ответ, если $u_R = -|a - t|$?

4.20. [McCarthy, Meirowitz, 2007, p. 249].) Существуют два игрока: общество и правящий им диктатор. В каждый из моментов времени $t = 1, 2$ общество решает, стоит ли ему восставать против диктатора (R) либо не восставать (C). Если общество восстало (R), то диктатор принимает решение: r (применить репрессии) либо a (пойти на уступки). Если общество не восстает, то диктатор ничего не делает в этот момент времени. Выигрыш общества в каждый момент времени составляет 1, если диктатор идет на уступки, составляет -1, если он применяет репрессии, и 0, если восстания не происходит. Существуют два состояния «природы», соответствующие характеру диктатора: мягкому (M) или жесткому (H). Выигрыш мягкого диктатора составляет 0 в случае, если протесты не происходят, -2 в случае уступок и -3 в случае применения им репрессивных мер. Выигрыш жесткого диктатора в каждом из этих трех случаев составляет 0, -3 и -2. Пусть p_0 — вероятность того, что диктатор является мягким.

(a) Пусть p_1 — вера общества на начало момента времени $t = 2$ относительно того, что диктатор имеет тип M. Как действие общества в момент времени $t = 2$ зависит от p_1?

(b) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в обоих периодах идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество восстает в первом периоде и восстает во втором, только если в первом периоде не было репрессий.

(c) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в первом периоде применяет репрессии, а во втором — идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество восстает в первом периоде и восстает во втором, только если в первом периоде не было репрессий. Соответствует ли это равновесие «интуитивному критерию»?

(d) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в первом периоде применяет репрессии, а во втором — идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество не восстает в первом периоде и восстает во втором периоде, только если в первом периоде не было репрессий. Соответствует ли это равновесие «интуитивному критерию»?

4.21. Рассмотрим игру на рис. 4.16.

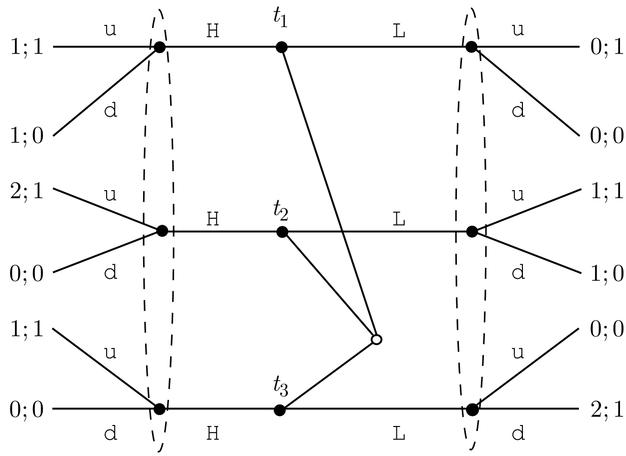


Рис. 4.16. Игра с тремя типами и двумя сигналами

Все три типа игрока 1 равновероятны. Найдите все совершенные байесовы равновесия.

4.22. [Munster, 2009]. Две фирмы решают, сколько средств вложить в разработку технологий, которые позволят ее обладателю получать патенты. Пусть a_{it} — количество средств, вложенное фирмой $i = 1, 2$ в момент времени $t = 1, 2$. Пусть вероятность того, что фирма i будет обладать патентом в момент времени t, равна $p_{it} = \dfrac{a_{it}}{a_{1t} + a_{2t}}$. Суммарный выигрыш фирмы i равен

$$u_i = V_i\,(p_{i1} + p_{i2}) - a_{i1} - a_{i2}.$$

Пусть $V_1 = 1$. Пусть $V_2 = 1$ с вероятностью p и $V_2 = R > 1$ с вероятностью $1 - p$.

(a) Убедитесь, что совершенное по подыграм секвенциальное равновесие есть набор $(a_{11},\, a_{12}(\cdot),\, a_{21}^1,\, a_{22}^1,\, a_{21}^R,\, a_{22}^R,\, \mu(\cdot))$, где $a_{12}(\cdot)$ — средства, вложенные фирмой 1 в момент времени $t = 2$ в зависимости от средств, вложенных фирмой 2 в момент времени $t = 1$, a_{2t}^v — средства, вложенные фирмой 2 в момент времени t в зависимости от ее оценки $v \in \{1, R\}$, и $\mu(\cdot)$ — вера фирмы 1 в то, что $V_2 = 1$, в зависимости от средств, вложенных фирмой 2 в момент времени $t = 1$.

(b) Пусть функция веры у фирмы 1 задана как

$$\mu(a_{21}) = \begin{cases} 0, & a_{21} \geqslant \overline{a}; \\ 1, & a_{21} < \overline{a}. \end{cases}$$

Пусть $R = 4$. Найдите p, при котором существует разделяющее равновесие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 4

Зенгер Х. Стратагемы. О китайском искусстве жить и выживать. Т. 1, 2. М.: Эксмо, 2004.

Acemoglu D., *Egorov G.*, *Sonin K.* A Political Theory of Populism. MIT Department of Economics Working Paper, 2011.

Alesina Al., *Summers L.H.* Central Bank Independence and Macroeconomic Performance // Journal of Money, Credit, and Banking. 1993. Vol. 20. P. 63–82.

Backus D., *Drifill J.* Inflation and Reputation // American Economic Review. 1985. Vol. 75. P. 530–538.

Barro R.J. The Control of Politicians: An Economic Model // Public Choice. 1973. Vol. 14. No. 1. P. 19–42.

Barro R.J. Reputation in a Monetary Policy with Incomplete Information // Journal of Monetary Economics. 1986. Vol. 17. P. 3–20.

Besley T., *Prat A.* Handcuffs for the Grabbing Hand? Media Capture and Government Accountability // American Economic Review. 2006. Vol. 96. No. 3. P. 720–736.

Besley T., *Smart M.* Fiscal Restraints and Voter Welfare // Journal of Public Economics. 2007. Vol. 91. No. 3–4. P. 755–773.

Binmore K. Fun and Games: A Text of Game Theory. D.C. Hearth, 1992.

Cho I.-K., *Kreps D.M.* Signaling Games and Stable Equilibria // Quarterly Journal of Economics. 1987. Vol. 102. No. 2. P. 179–221.

Cotton Ch., *Liu Ch.* 100 Horsemen and the Empty City: A Game Theoretic Examination of Deception in Chinese Military Legend // Journal of Peace Research. 2011. Vol. 48. No. 2. P. 217–223.

Crawford V.P., *Sobel J.* Strategic Information Transmission // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 6. P. 1431–1451.

Ferejohn J. Incumbent Performance and Electoral Control // Public Choice. 1986. Vol. 50. No. 1–3. P. 2–25.

Fudenberg D., *Tirole J.* Perfect Bayesian and Sequential Equilibrium // Journal of Economic Theory. 1991. Vol. 53. P. 236–250.

Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton: Princeton University Press, 1992.

Kreps D.M., *Milgrom P.R.*, *Roberts J.*, *Wilson R.* Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. No. 2. P. 245–252.

Kreps D.M., *Wilson R.* Sequential Equilibria // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. P. 863–894.

MasCollel A., *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomics Theory. Oxford University Press, 1995.

McCarthy N., *Meirowitz A.* Political Game Theory: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Milgrom P.R. Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications // The Bell Journal of Economics. 1981. Vol. 12. No. 2. P. 380–391.

Munster J. Repeated Contests with Asymmetric Information // Journal of Public Economic Theory. 2009. Vol. 11. No.1. P. 89–118.

Myerson R.B. Refinements of the Nash Equilibrium Concept // International Journal of Game Theory. 1978. Vol. 7. P. 73–80.

Nalebuff B. Credible Pretrial Negotiations // Rand Journal of Economics. 1987. Vol. 18. P. 198–210.

Romer D. Advanced Macroeconomics. 3nd ed. McGraw-Hill, 2006.

Selten R. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games // International Journal of Game Theory. 1975. Vol. 4. No. 1. P. 25–55.

Spence M. Job Market Signaling // Quarterly Journal of Economics. 1973. Vol. 87. No. 3. P. 355–374.

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Агрегирование информации Information aggregation
Антагонистическая игра Antagonistic game, zero-sum game
Априорная вероятность *A priori* probability, *Ex ante* probability
Асимметричная информация Asymmetric information
Аукцион Auction
  английский English auction, open ascending price auction
  второй цены Second-price auction, second-price sealed-bid auction
  голландский Dutch auction, open descending price auction
  первой цены First-price auction, first-price sealed-bid auction
  первой цены «платят все» First price all-pay auction
  с резервной ценой Auction with a reserve price
Байеса равновесие Bayesian equilibrium, Bayesian Nash equilibrium
Байеса формула Bayes rule, Bayes formula
Борьба за ренту Rent seeking
Бюджетное ограничение Budget constraint
Вера Belief
Викри–Гровса–Кларка механизм Vickrey–Groves–Clarke mechanism
Война на выживание (игра) War of attrition
Второе наилучшее решение Second-best solution, second-best outcome
Выпуклое множество Convex set
Гиббарда–Саттерсуэйта теорема Gibbard–Satterthwaite theorem
Горизонтальная конкуренция Horizontal competition
Граждане-кандидаты, модель Citizen-candidate model
Дерево игры Game tree
Дизайн механизмов Mechanism design
Диктатор (игра) Dictator game
Дилемма заключенного Prisoner's dilemma
Дисконт Discount rate, rate of time preference
Дисконтированный выигрыш см. *Приведенный выигрыш*
Доверие Trust
Доминирование Dominance
Дуополия Бертрана, конкуренция Бертрана Bertrand duopoly, Bertrand competition
Дуополия Курно, конкуренция Курно Cournot duopoly, Cournot competition
Дуополия Штекельберга, конкуренция Штекельберга Stackelberg duopoly, Stackelberg competition
Зависимость от истории Path dependence
Зависимость от траектории см. *Зависимость от истории*

Игра Game
- **в нормальной форме** Normal form game
- **в развернутой форме** Extensive form game
- **динамическая** Dynamic game
- **непрерывная** Continuous game
- **повторяющаяся** Repeated game
- **с наблюдаемыми действиями** Game with observable actions
- **с неполной информацией** Incomplete information game
- **с нулевой суммой** см. *Антагонистическая игра*
- **с полной информацией** Game of complete information
- **с совершенной информацией** Perfect information game
- **с совершенной памятью** Game of perfect recall
- **с сообщениями** Communication game
- **статическая** Static game

Инспекция (игра) Inspection game
Интуитивный критерий Intuitive criterion
Информационное множество Information set
Какутани теорема Kakutani theorem
Квазивогнутая функция Quaziconcave function
Квазилинейная функция Quazilinear function
Континуум Continuum
Концепция решения Solution concept
Координационная игра Coordination game
Критерий доминирования Dominance criterion
Лобовая атака (игра) Chicken game
Локальное равновесие см. *Равновесие, локальное*
Лошадка Зелтена (игра) Selten's horse
Метод максимального правдоподобия Maximum likelihood method, maximum likelihood estimation
Механизм Mechanism
Минимаксный выигрыш Minimax payoff
Множество стратегий Strategy set
Моральный риск см. *Риск оппортунистического поведения*
Мэя теорема May theorem
Народная теорема Folk theorem
Невозвратные издержки Sunk cost
Неполная информация Incomplete information
Нормальная форма (игры) Normal form (of a game)
Нормы поведения Social norms, norms of behavior
Обратная индукция Backward induction
Общее знание Common knowledge
Общественное благо Public good

Однократное пересечение (свойство) Single-crossing property
Око-за-око (стратегия) Tit-for-tat strategy
Относительного большинства правило Plurality rule
Парадокс голосования Paradox of voting
Парадокс Кондорсе Condorcet Paradox
Парето-доминирование Pareto dominance
Первое наилучшее решение First-best solution, first-best outcome
Подыгра Subgame
Последовательный торг Sequential bargaining
Построение механизмов см. *Дизайн механизмов*
Правило большинства Majority rule
Приведенный выигрыш Discounted payoff
Принцип выявления Revelation principle
Принцип однократного отклонения One-shot deviation principle
Природа Nature, chance moves
Профиль стратегий Strategy profile
Прямой механизм Direct mechanism
Равновесие Equilibrium, Nash equilibrium
  в доминирующих стратегиях Dominant-strategy equilibrium
  дискретного отклика Quantal response equilibrium
  коррелированное Correlated equilibrium
  локальное Local Nash equilibrium
  разделяющее Separating equilibrium
  секвенциальное (сильно секвенциальное) Sequential equilibrium
  сильное Strong Nash equilibrium
  смешивающее Pooling equilibrium
  совершенное (относительно «дрожащей руки») Perfect equilibrium, trembling-hand perfect equilibrium
  совершенное байесово Perfect Bayesian equilibrium
Развернутая форма (игры) Extensive form (of a game)
Рациональные ожидания Rational expectations
Реализуемость Implementation
  в доминирующих стратегиях Dominant strategy implementation
  Нэш-реализуемость Nash implementation
Рентоориентированнное поведение см. *Борьба за ренту*
Риск оппортунистического поведения Moral hazard
Самосбывающиеся ожидания Self-fulfilling beliefs
Сверхбольшинство Supermajority
Секвенциальная рациональность Sequential rationality
Сжигание денег (игра) Burning money game
Сигнализирование Signaling
Сигнальная игра Signaling game

Симплекс Simplex
Система вер Beliefs of players, system of beliefs
Смешанное расширение игры Mixed extension of a game
Совершенство по подыграм Subgame perfection
Совершенное по подыграм равновесие Subgame perfect equlibrium
Согласованная система вер Consistent system of beliefs
Сороконожка (игра) Centipede game
Социальный капитал Social capital
Стирлинга формула Stirling formula
Стохастическое доминирование Stochastic dominance
Стратегия Strategy
  гибридная Hybrid strategy
  доминируемая Dominated strategy
  доминирующая (все остальные стратегии) Dominant strategy
  доминирующая (другую стратегию) Dominating (another) strategy
  марковская Markovian strategy
  поведенческая Behavioral strategy
  смешанная Mixed strategy
  стационарная Stationary strategy
  чистая Pure strategy
Стратегическая эквивалентность Strategic equivalence
Теорема об эквивалентности доходов Revenue equivalence theorem
Тóрговая задача Нэша Nash bargaining problem
Транзитивность Transitivity
Триггерная стратегия Grim trigger strategy
Ультиматум (игра) Ultimatum game
Условие совместимости со стимулами Incentive compatibility constraint
Условие участия Participation constraint, individual rationality constraint
Фокальная точка Focal point
Функция выигрышей см. *Функция полезности*
Функция дискретного отклика Quantal response function
Функция общественного благосостояния Social welfare function
Функция общественного выбора Social choice function
Функция полезности Utility function, payoff function
Функция правдоподобия Likelihood function
Функция реакции Best response function
Частная информация Private information
Шаговая игра Stage game
Эквивалентные стратегии Equivalent strategies
Эрроу теорема Arrow theorem, Arrow impossibility theorem

Предметный указатель