А. В. Крушевский

ТЕОРИЯ ИГР

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономическая кибернетика»

ВШ

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1977

УДК 518 9(07)

Теория игр. К р у ш е в с к и й А В Киев, Издательское объединение «Вища школа», 1977, 216 с.

В пособии изложены осиовные положения и сведения из теории игр, рассмотрены теоретические вопросы решения игр, приведены примеры из различных сфер человеческой деятельности Поэтому в книге уделено большое внимание прикладной теории игр, и во многих случаях приведено строгое математическое обосноваиие. Приведены методы решения игр. Рассмотрены игры двух и более игроков. Основное внимаиие уделено наиболее разработанной теории игры двух игроков с нулевой суммой. Описаны позиционные, бесконечные, многошаговые игры, а также построеиие деловой игры.
Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономическая кнберистика», а также будет полезным для аспирантов, специалистов экономистов и управленческих работников.
Табл. 13. Ил. 48. Список лит. 21 назв.

Редакция литературы по кибернетике, электронике и энергетике.
Зав. редакцней *А. В. Дьячков*

К $\frac{20204-008}{М211(04)-77}$ 27—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Непрерывное и последовательное развитие социалистического общества, его производительных сил и производственных отношений, повышение эффективности общественного производства непрерывно связано с совершенствованием системы планирования и управления. Современные достижения науки и техники все шире используются в практике для получения научно обоснованных наиболее эффективных решений в сфере планирования и управления народным хозяйством.

В «Основных направлениях развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы» отмечается, что необходимо внедрять современные методы организации производства и труда в соответствии с требованиями научно-технического прогресса, предусмотреть дальнейшее совершенствование подготовки и повышения квалификации хозяйственных кадров.

Особенно большое значение приобретают научные разработки в области планирования и управления в народном хозяйстве, так как прежние методы оказываются несостоятельными в новых условиях научно-технической революции. Значительные достижения экономики, кибернетики, математики и других наук дали толчок быстрому развитию науки управления. Разработка экономико-математических моделей и методов решения народнохозяйственных задач на основе использования вычислительной техники позволили создать автоматизированные системы управления для получения лучших управленческих решений. Поэтому большое внимание уделяется подготовке квалифицированных кадров, владеющих экономико-математическими методами.

Интересным использованием экономико-математических методов является применение теории игр в экономических исследованиях и выработке плановых и управленческих решений. В теории игр рассматриваются процессы, в частности экономического характера, в которых требуется найти лучшее решение для поведения участников при столкновении интересов различных групп. Поэтому теория игр в последнее время стала шире проникать в экономические исследования. Особенно большое значение для совершенствования образования хозяйственных работников приобретают деловые игры. Современные достижения в теории игр уже сейчас позволяют использовать ее для решения многих народнохозяйственных задач с целью повышения эффективности плановых и управленческих решений. Так, применение теории игр в экономике дает возможность получить расчеты для обоснования поведения органов управления в конкретных условиях. Использование теории игр в международных экономических отношениях может оказать помощь в получении лучших стратегий поведения стран при решении конкретных вопросов торговли и размещения заказов. Применение деловых игр в учебном процессе и в практике производственно-хозяйственной деятельности дает возможность выработать навыки оптимального поведения человека в коллективе при выработке плановых решений в сложных условиях. Следует отметить, что в самых различных сферах деятельности человека возникает много ситуаций, которые формализуются в виде игры и затем становятся возможными их исследования. Можно рассматривать и несколько упрощенные модели конфликтных ситуаций, учитывая лишь самые главные аспекты, и получить приемлемые решения. В развитие теории игр внесли вклад многие ученые. Особенно следует отметить большие достижения зарубежных ученых О. Моргенштерна, Д. Неймана, Д. Нэша, А. Таккера, С. Шепли и советских ученых Н. Н. Воробьева, Ю. Б. Гермейера.

Разработок в области теории игр имеется много. Результаты опубликованы в многочисленных статьях и монографиях. Однако учебной литературы и приложений теории игр в экономике еще недостаточно. Так на русском языке имеется одна монография [13], в которой уделяется значительное место экономическим аспектам теории игр применительно к капиталистической системе хозяйствования. В книгах [2], [6] уделяется значительное внимание рассмотрению теории и примеров статистических игр. В настоящее время еще нет фундаментальной монографии и учебников по теории игр, в которых были бы изложены экономические аспекты применительно к условиям социализма.

Имеются два переводных учебника [12], [14], в которых приводится последовательное изложение теории игр, преимущественно с формальными абстрактными примерами. В 1974 году вышло учебное пособие [5] известного советского ученого в области теории игр профессора Н. Н. Воробьева, в котором много внимания уделяется, как последовательному строгому изложению теории игр, так и экономическим аспектам теории игр. В учебном пособии [20] под редакцией профессора И. И. Сыроежина излагаются учебные аспекты применения деловых игр. Однако этих книг недостаточно для того, чтобы обеспечить учебные процессы по вопросам теории игр и ее применениям.

Настоящее учебное пособие имеет сходство с имеющимися книгами в том, что в нем последовательно, со многими доказательствами излагается теория игр. Однако в нем имеются серьезные отличия — это преимущественное изложение примеров применения теории игр в экономике. Материал пособия содержит восемь глав, в которых изложены: основные положения теории игр, матричные и биматричные игры, позиционные, бесконечные антагонистические, многошаговые игры, игры с несколькими игроками и кооперативные, деловые игры.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономическая кибернетика», а также будет полезным для аспирантов, специалистов экономистов и управленческих работников. Для многих руководящих работников весьма полезным является материал восьмой главы по деловым играм, который можно изучить независимо от знания материала предыдущих глав и не имея специальной математической подготовки.

Автор благодарен рецензентам доктору физико-математических наук Н. В. Яровицкому и доктору экономических наук Л. Л. Терехову за полезные советы и замечания.

Пожелания и отзывы о книге просим посылать по адресу: 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа».

ВВЕДЕНИЕ

В практической деятельности людей часто возникают конфликтные ситуации, когда нескольким участникам приходится взаимодействовать при обстоятельствах, в которых каждый из участников старается достичь своей цели своим доступным ему способом, но никто из них полностью не влияет на ход событий, т. е. исход борьбы лишь частично зависит от действий каждого участника. В конфликтной ситуации имеются несколько заинтересованных сторон, каждая из которых старается получить максимальный выигрыш. Такие ситуации возникают во время проведения обычных салонных игр, спортивных состязаний, в военном деле, в торговых отношениях, в экономической, хозяйственной и политической деятельности, в медицинском обслуживании и т. д.

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются вопросы поведения и вырабатываются оптимальные правила (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной ситуации. Разрешение противоречий с помощью теории игр возможно лишь после проведения математического моделирования ситуаций в виде игры, а для их решения уже оказался недостаточным аппарат классического математического анализа нахождения экстремумов функций, и появилась необходимость развития новых математических методов нахождения оптимальных минимаксных решений, присущих теории игр.

Исследования игровых ситуаций проводились многими учеными, основное внимание которых было направлено на создание понятий оптимального поведения игроков и на методы отыскания лучших стратегий. Много внимания уделялось исследованию азартных игр. Лишь в 30-е годы XX ст. Дж. фон Нейман формулирует основные идеи современной теории игр и ее основополагающие результаты. Он доказывает основную теорему матричных игр. С этого времени теория игр стала развиваться более интенсивно. Особое внимание обращают на теорию игр военные специалисты и экономисты.

В решении игровых задач большую помощь оказывают электронные вычислительные машины. Однако в силу ограниченной возможности вычислительной техники и недостаточного развития теории игр для очень многих реальных конфликтных ситуаций невозможно найти оптимальное решение. Следовательно, методы решения игровых задач должны совершенствоваться вместе с развитием вычислительной техники. Несмотря на значительные достижения в теории игр, остается еще много неясных и спорных вопросов, для решения которых потребуется немало усилий. Основными проблемами, разрабатываемыми в теории игр, являются: выработка определений решения игр, доказательства теорем существования решений, разработка методов нахождения решений, практические аспекты использования теории игр.

Теория игр не охватывает все аспекты возникающих реальных ситуаций, тем не менее при определенном опыте многим ситуациям можно придать игровую схему и тем самым получить возможность ее исследования методами теории игр. В любой игровой схеме конкретной конфликтной ситуации каждый участник может выбирать по своему усмотрению те или иные действия, в зависимости от которых будет получаться тот или иной исход. Для анализа игры необходимо знать ее правила, количество игроков, их цели, возможные действия, последствия, выигрыши и т. д. Обычно анализ игры сводится к указанию наилучших стратегий и выигрышей для каждого игрока. Выигрышем, в частности, может быть эффективность использования дефицитных ресурсов, производственных фондов, экономических или политических рычагов в производственно-хозяйственной деятельности предприятий, министерств или в разработке стратегических планов развития общества.

Развитие теории игр, изучение ее методов и их применение в практике народно-хозяйственной деятельности оказывает помощь в совершенствовании системы подготовки и принятия решений, способствует научно-техническому прогрессу.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР

1.1. УЧАСТНИКИ ИГРЫ, ИГРОКИ, СТРАТЕГИИ, ВЫИГРЫШИ

Игра характеризуется системой правил, определяющих количество участников игры, их возможные действия и распределение выигрышей в зависимости от их поведения и исходов. Игроком принято считать одного участника или группу участников игры, имеющих одни общие для них интересы, не совпадающие с интересами других групп. Поэтому не каждый участник считается игроком.

Так, например, если в игре принимают участие четыре человека и каждый играет только за себя, то в ней имеется четыре игрока, если же четыре человека образовали две коалиции по два участника в каждой, т. е. играют двое на двое, то считается, что в этой игре участвуют два игрока. Во многих спортивных играх таких, как футбол, волейбол и других, состязаются две команды, в каждой из которых имеется несколько участников. Эти участники, объединенные в команды, образуют группы лиц: в каждой из этих групп они имеют единые цели, противоположные друг другу. Поэтому в таких играх следует рассматривать по два игрока. Игры в шашки, шахматы имеют двух игроков даже в том случае, когда играют команды, состоящие из нескольких лиц.

Пусть три фирмы, имеющие определенный капитал, хотят использовать его для получения возможности сбыта своей продукции на рынке. Каждая из этих фирм, вкладывая капитал, может сбывать свою продукцию с некоторой выгодой для себя. Эта выгода зависит не только от вклада одной фирмы, а от вкладов, сделанных другими фирмами. Ни одна из фирм не имеет полного влияния на рынок сбыта, т. е. каждая фирма только частично влияет на конечный результат — выгоду, получаемую ею. Рассматривая экономическую ситуацию, возникшую в результате взаимодействия трех фирм, как игру, можно допустить:

1) все три фирмы действуют самостоятельно, добиваясь наибольшей выгоды для себя за счет своих возможностей и учитывая возможные поведения других фирм, тогда это будет игра трех игроков;

2) какие-либо две фирмы объединились в коалицию и действуют совместно с единой целью достигнуть наибольшей выгоды для себя, учитывая возможные поведения третьей фирмы, тогда это будет игра двух игроков.

Две войсковых части, имеющие войсковые подразделения, желают овладеть определенной позицией. Первая часть имеет два подразделения, а вторая — три. Возможные действия частей — это выделение определенного количества подразделений для овладения позицией.

Каждое подразделение может иметь свои локальные цели, но все подразделения одной части имеют одну общую цель — овладение позицией. Поэтому, рассматривая сложившуюся ситуацию как игру, следует считать, что в ней имеется только два игрока — это войсковые части.

Правила или условия игры определяют возможные поведения, выборы и ходы для игроков на любом этапе развития игры. Сделать выбор игроку, это значит остановиться на одной из его возможностей поведения. Засем игрок осуществляет этот выбор с помощью ходов. Сделать ход — это значит на определенном этапе игры осуществить сразу весь выбор или его часть в зависимости от возможностей, предусмотренных правилами игры. Каждый игрок на определенном этапе игры делает ход согласно сделанному выбору. Другой игрок, зная или не зная о сделанном выборе первого игрока, также делает ход. Каждый из игроков старается учесть информацию о прошлом развитии игры, если такая возможность разрешается правилами игры.

Набор правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры, называется *стратегией* игрока. Стратегия в теории игр означает определенный законченный план действий игрока, показывающий, как надо действовать ему во всех возможных случаях развития игры. Стратегия означает совокупность всех указаний для любого состояния информации, имеющейся у игрока на любом этапе развития игры. Отсюда уже видно, что стратегии могут быть хорошими и плохими, удачными и неудачными и т. д.

При игре в шахматы стратегия должна указывать игроку какой ход он должен сделать в любом развитии игры. Очевидно, при таком подходе в шахматной игре имеется очень много стратегий, перечислить которые практически не представляется возможным и поэтому при анализе и изучении стратегий в этой игре выделяют главные и ими пользуются. Для разных игроков главными являются разные стратегии, как правило, известные только самому игроку, и поэтому игра в шахматы представляет интеллектуальный интерес, несмотря на то, что в ней нет случайных ходов.

При игре в футбол также имеется очень много стратегий и каждая команда применяет свой набор стратегий для того, чтобы достигнуть цели. В этой игре, конечно, большую роль играет и мастерство, которое также может входить в состав стратегии команд и игроков. В играх, отображающих экономические ситуации, стратегиями могут быть размеры вкладываемых в определенные мероприятия средств. Так, в игре трех фирм каждая из них может внести определенную долю своего капитала — это и есть ее стратегия. Очевидно, таких стратегий у каждой фирмы много. В военных играх в качестве стратегий может быть любое поведение подразделений.

Правилами игры предусматриваются определенные выигрыши для игроков в зависимости от применяемых ими стратегий и исходов игры. Выигрыш — это мера эффекта для игрока. Так, в покере, преферансе и других играх после игры обычно происходит обмен ценностями в виде денег, т. е. эффект от исхода этих игр измеряется в денежных единицах. В правилах игры четко сформулировано, сколько денег выиграет каждый игрок в зависимости от исхода игры.

В таких играх, как шашки, шахматы, исходом игры является выигрыш, ничья, проигрыш. Выигрыши здесь измеряются очками (выигрыш — одно очко, ничья — половина очка, проигрыш — нуль очков). При игре в футбол результат игры измеряется очками: выигрыш — два очка, ничья — одно очко, проигрыш — нуль очков. В играх, отображающих экономические ситуации, выигрыши почти всегда измеряются в стоимостном выражении: прибыль, себестоимость, амортизация и т. д. Так, в описанной выше ситуации трех фирм выигрыш может измеряться той прибылью, которую получит фирма в результате применения стратегий всеми фирмами. В военных играх выигрыш — это победа, взятие позиции, получение определенных преимуществ, получение оружия и т. д.

Бывают реальные ситуации, в которых выигрыш оценивается как чувство удовольствия или морального удовлетворения, а проигрыш как чувство угнетения. Так что не всякий выигрыш может измеряться количественно. В теории игр рассматриваются только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, очками, баллами и т. д. Очевидно, исход игры, а следовательно, и выигрыш игроков зависят от стратегий, которые применяют игроки. Однако выигрыш каждого игрока не полностью зависит от применяемой им стратегии, он зависит и от стратегий, применяемых другими игроками. В конечном счете в игре никакой игрок не может полностью контролировать свой выигрыш. Если же в реальной ситуации возникает случай, когда исход для участника полностью зависит от него, то такая ситуация не рассматривается для него как игровая. В дальнейшем будут рассматриваться выигрыши, измеряемые количественно (числами). Проигрыш выражается как отрицательный выигрыш. Поэтому речь в дальнейшем будет идти только о выигрышах.

Практически, при представлении конфликтной ситуации в виде игры возникает ряд трудностей в связи с описанием правил, условий, игроков, стратегий, ходов, выигрышей. Имеются также большие трудности при моделировании экономических ситуаций. Так, при описании наборов стратегий возникают трудности учета изменений стратегий во время игры, вызванные действием научно-технического прогресса (изобретение, открытие) и моментов времени применения стратегий. Формально эти факторы можно включать в стратегии (это не вызывает принципиальных возражений), однако такой подход ведет к значительному увеличению количества рассматриваемых стратегий, и это сильно затрудняет исследование игры. Имеются также трудности в определении выигрышей в зависимости от применяемых стратегий в связи с неясно определенными областями действия и сложностью соизмерения различных благ. Задача исследователя заключается в том, чтобы данную конфликтную ситуацию по возможности привести к формализованной игре без значительных потерь реальных целей и условий, найти метод решения такой формальной модели, провести расчеты и анализ. Преодоление трудностей на пути решения игровых ситуаций связано с четкостью и реальностью представления ситуации, выделения в ней основных правил и элементов игры: игроков, стратегий, ходов и выигрышей. Затем возникает необходимость получения методов решения игры, необходимой информации и реализации.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения. В настоящее время нет вполне четко сложившейся классификации игр. Однако можно отметить основные направления, по которым осуществляется классификация игр: количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрышей, количество ходов, состояние информации.

Рассмотрим несколько подробнее эти направления.

В зависимости от количества игроков определяют игры: одного игрока, двух игроков, n игроков. Игры одного игрока (типа пасьянсов) не представляют интереса и не рассматриваются в теории игр. Игры двух игроков — наиболее распространенные, их исследованию посвящено много работ, и достигнуты наибольшие успехи как в теории, так и в практических приложениях. Игры трех и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Трудности решения игр повышаются с увеличением количества игроков.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной*. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной*. Отсюда вытекает, что понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий. Пусть, например, первый игрок имеет две стратегии, второй — десять стратегий, а третий — сто стратегий, тогда это конечная игра трех игроков (все игроки имеют конечное число стратегий). Если, например, в некоторой игре первый игрок имеет две стратегии, второй — десять стратегий, а третий — бесконечное количество (счетное множество или континуум) стратегий, то это бесконечная игра трех игроков (один из игроков имеет бесконечное число стратегий). Если, например, имеются два игрока, для каждого из которых стратегией является число из отрезка $[0, 1]$, то это бесконечная игра двух игроков (оба игрока имеют континуум стратегий). Трудности решения игр зависят от количества стратегий. Как правило, с увеличением количества стратегий повышаются трудности решения игр.

По характеру взаимоотношений игры делятся на: бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. *Бескоалиционными* называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, бескоалиционной будет военная ситуация, в которой сражение ведется без компромиссов, до победы. *Коалиционной* игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, коалиционной будет военная игра (ситуация), в которой противники могут вступать в переговоры с целью достигнуть компромиссного решения возникшей ситуации. В кооперативной игре коалиции наперед определены.

По характеру выигрышей они делятся на: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с *нулевой суммой* будет тогда, когда сумма выигрышей всех игроков в каждой ее партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Так, многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой.

В частности игра двух игроков с нулевой суммой называется *антагонистической*, так как цели игроков в ней прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого.

Примером игры с *ненулевой суммой* могут быть торговые взаимоотношения между странами. В результате применения своих стратегий все страны могут быть в выигрыше. Всякая игра, в которой надо вносить взнос некоторому лицу за право принимать участие в ней, является игрой с ненулевой суммой. Действительно, в этом случае всегда в выигрыше получается некоторое лицо, которое не принимает участия в игре, а получает взнос от игроков, теряющих свой капитал за счет этих взносов. Другим примером служит лотерея: в ней организатор всегда имеет выигрыш, а участники игры — лица, купившие лотерейные билеты, — в сумме получают выигрыш меньше, чем они внесли.

Игры с ненулевой суммой решаются сложнее, так как они содержат все трудности, присущие играм с нулевой суммой и еще дополнительные трудности, связанные с возможностью получения дополнительного выигрыша. В принципе игру с ненулевой суммой можно свести к некоторой искусственной игре с нулевой суммой, введя дополнительного фиктивного игрока, получающего сумму выигрыша, дополняющего до нуля. Однако в этом случае увеличивается количество игроков, и этот дополнительный игрок не является равноценным. Поэтому такой подход не улучшает дела.

По виду функций выигрышей игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец — номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Для матричных игр создана достаточно хорошая теория и разработаны практически приемлемые методы решения. Так, доказано, что любая матричная игра имеет решение и она легко может быть сведена к задаче линейного программирования, а затем решена с помощью известных методов, например, симплекс-метода.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии первого игрока, столбец — стратегии второго игрока, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш первого игрока, во второй матрице — выигрыш второго игрока). Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается такая игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий (естественно считается, что стратегии выражены числами из определенного отрезка). Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения. Простым примером непрерывной игры двух игроков является следующая: первый игрок выбирает число x из отрезка $[0, 1]$, и второй игрок выбирает число y из отрезка $[0, 1]$, после чего первый игрок выигрывает $x - y^2$, а второй проигрывает столько же. Очевидно функция $x - y^2$ является непрерывной и поэтому игра также считается непрерывной. Согласно теореме существования решения такая игра имеет решение.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой*. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Если функция выигрышей может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента, то такая игра называется *сепарабельной* (разделимой). С помощью определенных преобразований ее решение сводится к решению игры с билинейной функцией выигрышей и к определению неподвижной точки при специальном отображении множеств элементов, соответствующих стратегиям.

Игры типа *дуэлей* характеризуются моментом выбора хода и вероятностями получения выигрышей в зависимости от времени, прошедшего от начала игры до момента выбора. Например, существуют интерпретации таких игр в экономических ситуациях: каждая фирма делает вклад своего капитала в определенный момент времени с целью овладения рынком сбыта. Чем раньше она сделает свой вклад, тем меньшая вероятность овладеть рынком, но, делая свой вклад слишком поздно, она теряет рынок сбыта. Функция выигрышей игроков в играх типа дуэлей принимает специальный вид: она непрерывна при разных значениях моментов времени, когда игроки делают ходы, и она разрывна при совпадении моментов хода игроков. Так что нет гарантий существования решений для игр типа дуэлей. Существуют определенные методы решения таких игр.

По количеству ходов игры делятся на одношаговые и многошаговые. *Одношаговые* игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Например, матричная игра является одношаговой, так как при этом каждый игрок делает только один ход и потом происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры (применяемых стратегий). Такие игры с помощью определенных способов сводятся к матричным играм и могут решаться присущими им методами.

Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, то такая игра является *стохастической*.

Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и подчинять поведение игроков некоторым условиям, описываемым дифференциальными уравнениями, то такие игры являются *дифференциальными*. Например, в играх типа погони каждый объект может двигаться, подчиняясь определенным условиям, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель одного объекта — достичь определенной области, цель другого — не допустить первого до этой области. Выигрыш оценивается определенным числом (функцией).

В зависимости от состояния информации различают игры с полной информацией и с неполной информацией. Если на каждом ходе игры каждому игроку известно, какие выборы были сделаны игроками раньше, то это игра *с полной* информацией.

Примерами таких игр являются шашки, шахматы. Если в игре не все известно о предыдущих выборах, то это игра *с неполной* информацией.

Доказано, что всякая игра с полной информацией имеет решение в виде седловой точки в чистых стратегиях. Например, для игры в шахматы это значит, что для каждого игрока имеется такая стратегия, придерживаясь которой, игрок либо выигрывает, либо сведет партию в ничью. Сложность заключается в отыскании такой стратегии. Существуют и другие виды игр, которые здесь не рассматриваются. Возможны и некоторые другие принципы классификации игр.

Контрольные вопросы и задания к главе 1

1. Что такое участники игры и игроки?
2. Что называется стратегией игрока?
3. Что такое ход в игре?
4. Что такое выигрыши и как они измеряются в игре?
5. Какие основные принципы закладываются при классификации игр?
6. Приведите примеры игр согласно изложенной классификации.

ГЛАВА 2. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ ДВУХ ИГРОКОВ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, \ldots, m$, второй имеет n стратегий $j = 1, 2, \ldots, n$. Каждой паре стратегий (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш первого игрока за счет второго игрока, если первый игрок применит свою i-ю стратегию, а второй — свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию ($i = 1, 2, \ldots, m$), второй — свою j-ю стратегию ($j = 1, 2, \ldots, n$), после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij} за счет второго игрока (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что первый игрок платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ часто называется чистой стратегией.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой далее будет называться просто матричной игрой. Очевидно матричная игра относится к антагонистическим играм. Из ее определения следует, что для задания матричной игры достаточно задать матрицу $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$ выигрышей первого игрока.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком (за счет второго) выигрыша a_{ij}, находящегося в матрице A на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Для формализации реальной конфликтной ситуации в виде матричной игры надо выделить и перенумеровать чистые стратегии каждого игрока и составить матрицу выигрышей.

Следующий этап — это определение оптимальных стратегий и выигрышей игроков.

Рассмотрим сначала несколько простых примеров формализаций конфликтных ситуаций.

Пример 2. 1. Игра с двумя пальцами. Два человека одновременно показывают один или два пальца и называют цифру один или два, которая по их мнению означает количество пальцев, показываемое вторым человеком. После того, как пальцы показаны и названы числа, происходит распределение выигрышей по следующим правилам: если оба угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то фиксируется ничья — выигрыш нуль у каждого человека; если оба не угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то также фиксируется ничья; если только один человек угадал, сколько пальцев показал второй человек, то он (угадавший) получает выигрыш за счет второго (неугадавшего) в виде денег или очков пропорционально сумме показанных пальцев обоими участниками игры.

Итак, в этой конфликтной ситуации принимают участие только два человека, у которых прямо противоположные цели — получить максимальный выигрыш за счет второго участника, поэтому каждого участника следует считать игроком. Отсюда следует, что формализованная игра будет игрой двух игроков с нулевой суммой.

Что считать стратегией игрока? Очевидно возможностями каждого игрока есть выбор двух чисел $\{a, b\}$, где a означает количество показанных им пальцев, b — предполагаемое число пальцев, которые покажет противник. Давая возможные значения для $a = 1, 2$ и для $b = 1, 2$, получим 4 возможных стратегии: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{2,1\}$, $\{2,2\}$. Теперь можно ввести следующую нумерацию стратегий:

первая — это $\{1, 1\}$, показать один палец и назвать цифру 1;
вторая — это $\{1, 2\}$, показать один палец и назвать цифру 2;
третья — это $\{2, 1\}$, показать два пальца и назвать цифру 1;
четвертая — это $\{2, 2\}$ показать два пальца и назвать цифру 2.

Итак, каждый из игроков имеет по четыре чистых стратегии (конечное число). Таким образом, мы приходим к построению матричной игры, в которой следует определить матрицу A выигрышей первого игрока.

Проведя простые вычисления и сопоставляя строки и столбцы номерам стратегий, получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, если первый игрок применит четвертую стратегию $\{2, 2\}$, т. е. покажет два пальца и назовет цифру 2, а второй — вторую стратегию $\{1, 2\}$, т. е. покажет один палец и назовет цифру 2, то угадает только второй игрок и он получит от первого сумму $2 + 1 = 3$, соответствующую количеству показанных пальцев обоими игроками, т. е. первый игрок выиграет —3. Четвертой стратегии первого игрока в матрице A соответствует четвертая строка, а второй стратегии второго игрока соответствует второй столбец в матрице A, на пересечении четвертой строки и второго столбца ставится цифра —3, соответствующая выигрышу первого игрока. Например, если первый и второй игроки применяют одинаковые стратегии, то они оба угадывают и первый игрок получает нуль, что соответствует элементам главной диагонали матрицы A (диагональ слева вниз направо). Вторая диагональ матрицы A (справа вниз налево) соответствует выигрышу 0, получаемому при применении игроками стратегий, приводящих к обоюдному неугадыванию. Положительный выигрыш 2 у первого игрока будет, если, например, первый игрок применит свою первую стратегию $\{1, 1\}$, а второй свою вторую — $\{1, 2\}$, т. е. угадает только первый игрок и он получит от второго игрока сумму $1+1=2$, соответствующую количеству показанных пальцев обоими игроками.

Пример 2.2. Игра в монеты. Первый из двух участников игры накрывает рукой монету, которая может быть гербом кверху или решкой. Второй участник отгадывает, какой стороной кверху находится эта монета. Если второй отгадал, то первый платит второму сумму, равную единице. Если второй не отгадал, то он платит первому сумму, равную единице.

Очевидно, в этой игре каждый из имеющихся двух участников игры является игроком, так как у них противоположные интересы: получить выигрыш за счет другого участника игры. Поэтому рассматриваемая игра принадлежит к игре двух игроков с нулевой суммой. Поскольку монета имеет только две стороны (ставить на ребро монету запрещено), то у первого игрока имеется только две стратегии: 1-я — накрыть монету кверху гербом, 2-я — накрыть монету решкой кверху. У второго игрока также имеется только две стратегии: 1-я — сказать, что монета накрыта гербом кверху, 2-я — монета накрыта решкой кверху.

Итак, в этой игре каждый игрок имеет по две чистых стратегии (число стратегий конечное у каждого игрока), поэтому она есть матричная игра. Матрица выигрышей формируется так: если чистые стратегии у обоих игроков совпадают, то это значит, что второй игрок отгадал, какой стороной накрыл монету первый игрок, и, следовательно, выигрывает второй игрок, а первый выигрывает —1. Если игроки применяют разные стратегии, то это значит, что второй игрок не отгадал, какой стороной накрыта монета, и выигрывает единицу первый игрок. Матрица A выигрышей первого игрока имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Военная игра. Имеется два противника и две позиции. Один противник — это полковник, второй — генерал. У полковника имеется 4 полка, у генерала — 3 полка. Каждый из этих противников хочет занять данные позиции. Взятие позиции оценивается выигрышем в единицу. Каждый из противников может послать на любую позицию только целое число полков или совсем не посылать. Позиция считается занятой тем, кто послал на нее больше полков, и выигрыш составляет единицу за счет взятия позиции и плюс количество единиц, совпадающее с количеством полков противника, не занявшего позицию. Если у позиции оказывается одинаковое число полков полковника и генерала, то никто не выигрывает, выигрыш обоих составляет 0. Общий выигрыш каждого участника равен сумме его выигрышей у обеих позиций, и то, что получил один из противников, считается потерей для другого.

Ввиду противоположности интересов у полковника и генерала, каждый из них считается игроком. Поскольку выигрыш одного получается за счет проигрыша другого, то это игра с нулевой суммой.

Возможные поведения игроков описываются чистыми стратегиями $\{a, b\}$, где a — количество полков, посланных данным игроком на первую позицию; b — число полков, посланных им на вторую позицию.

Итак, для полковника имеются следующие чистые стратегии:

1. На первую позицию послать все полки, т. е. $\{4, 0\}$.
2. На вторую позицию послать все полки, т. е. $\{0, 4\}$.
3. На первую позицию послать 3 полка, на вторую — 1, т. е. $\{3, 1\}$.
4. На вторую позицию послать 3 полка, на первую — 1, т. е. $\{1, 3\}$.
5. На обе позиции послать по два полка, т. е. $\{2, 2\}$.

У генерала имеются следующие чистые стратегии:

1. На первую позицию послать все 3 полка, т. е. $\{3, 0\}$.
2. На вторую позицию послать все 3 полка, т. е. $\{0, 3\}$.
3. На первую позицию послать 2 полка, на вторую — 1, т. е. $\{2, 1\}$.
4. На вторую позицию послать 2 полка, на первую —1, т. е. $\{1\ 2\}$.

Таким образом, у полковника имеется 5 чистых стратегий, а у генерала — 4 чистых стратегии, поэтому данная ситуация может рассматриваться как матричная игра. Формирование матрицы выигрышей первого игрока (полковника) производится согласно правилам выигрышей. Так, например, пусть полковник применит свою первую стратегию, а генерал применит свою вторую стратегию. Это значит, что на первую позицию полковник пошлет все свои 4 полка (на вторую позицию он никого не пошлет), а генерал на первую позицию никого не пошлет, но пошлет все свои три полка на вторую позицию. Тогда полковник займет первую позицию и получит выигрыш 1, а генерал займет вторую позицию, т. е. полковник потеряет вторую позицию, следовательно, на второй позиции его выигрыш будет равен —1, а суммарный его выигрыш на двух позициях будет $1 - 1 = 0$.

Пусть, например, полковник применит свою вторую стратегию, а генерал — третью. Тогда на первую позицию полковник не пошлет ни одного полка, а генерал пошлет два полка, поэтому полковник потеряет первую позицию, т. е. его выигрыш на второй позиции будет равен —1; на вторую позицию полковник пошлет 4 полка, а генерал — один полк, поэтому полковник выиграет 1 за позицию и 1 за полк генерала, т. е. на второй позиции полковник выиграет 2. Общий выигрыш полковника в этом случае будет равен $2 - 1 = 1$.Пусть, например, полковник применит свою 5-ю стратегию, а генерал — вторую. Тогда на первую позицию полковник пошлет 2 полка, а генерал никого не пошлет, поэтому полковник выигрывает позицию, т. е. 1; на вторую позицию полковник пошлет 2 полка, а генерал — три полка, поэтому позицию получит генерал и выигрыш генерала будет равен 1 за позицию и 2 за два полка полковника, т. е. $1 + 2 = 3$; это значит, что на второй позиции полковник потерял 3 единицы. Общий выигрыш полковника в этой ситуации составит $1 - 3 = -2$.

Рассматривая выигрыш полковника для каждой пары чистых стратегий одного и другого игрока, получим следующую матрицу выигрышей полковника

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы видно, что у полковника положение лучше, чем у генерала. Это легко объяснить тем, что у полковника больше полков, чем у генерала, а по правилам игры побеждает тот, у кого больше полков.

Пример 2.4. Оптимальный план. Предприятию поручено выпускать два вида скоропортящихся продуктов $П_1$ и $П_2$. Ежедневные расходы на производство и реализацию продукции не должны превышать 4000 руб. Перед руководством предприятия поставлена задача: определить ежедневный объем производства каждого вида продукции с целью получения наибольшей прибыли. Для этого были проведены исследования, которые показали следующее:

себестоимость единицы продукции $П_1$ равна 0,8 руб., отпускная цена —1, 2 руб; себестоимость единицы продукции $П_2$ равна 0,5 руб., отпускная цена — 0,8 руб;

если продукция не реализуется в день выпуска, то ее качества значительно снижаются, и она продается на следующий день по цене в 4 раза меньше отпускной;

реализация продукции зависит от состояния погоды — в хорошую погоду реализуется 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц $П_2$; в плохую погоду реализуется 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц $П_2$; на реализацию всей произведенной за день продукции расходуется 200 руб.

Итак, для предприятия важно знать состояние погоды и тогда производить продукцию в таком объеме и ассортименте, чтобы она реализовалась максимально в тот же день. Если бы можно было наперед предсказать состояние погоды, то оптимальным планом производства был бы план, полностью ориентированный на известное состояние погоды. Однако в настоящее время еще нет надежных способов прогноза погоды, и предприятие должно составлять план с учетом появления наиболее неблагоприятных для него состояний погоды. Можно трактовать ситуацию следующим образом: с одной стороны предприятие заинтересовано производить продукцию с наибольшей пользой для себя, с другой стороны имеется противник — природа, которая может максимально повредить предприятию. Поэтому данную ситуацию можно рассматривать, как антагонистическую игру двух игроков: первый игрок — предприятие, второй — природа.

Можно, конечно, считать, что природа не разумный противник и она не будет изучать поведение предприятия с целью максимально повредить ему и поэтому не следует считать такую ситуацию, как антагонистическую игру. Такие доводы имеют основания, тогда можно изучить статистические данные о поведении погоды и строить план производства продукции с учетом состояний погоды в среднем.

Однако и игровой подход имеет свои преимущества. Действительно, рассматривая природу как противника, предприятие может строить свои оптимальные планы с учетом наиболее неблагоприятных действий природы, а если природа отступит от этих своих самых неблагоприятных для предприятия действий, то этот оптимальный план поведения предприятия даст возможность ему увеличить свою прибыль.

Итак, в этой ситуации имеется два игрока: человек и природа. Какие же их стратегии? Очевидно у природы имеется две стратегии: 1-я — создать хорошую погоду, 2-я — создать плохую погоду. У предприятия имеется также две стратегии: 1-я — производить продукцию в расчете на хорошую погоду, 2-я — производить продукцию в расчете на плохую погоду.

Таким образом, у обоих игроков имеется по две стратегии (конечное число стратегий), поэтому мы приходим к конечной игре двух игроков с нулевой суммой, т. е. к матричной игре, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ в матрице A выражает прибыль предприятия при условии, что предприятие применяет свою i-ю стратегию, а природа свою j-ю стратегию.

Произведем расчеты элементов a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$. Прибыль P равна

$$P = Z - C,$$

где Z — сумма выручки за реализованную продукцию, C — затраты на производство и реализацию продукции. Расчеты будут производиться для периода в один день. Для получения элемента a_{11} необходимо учесть, что предприятие применяет свою первую стратегию, т. е. берет расчет на хорошую погоду и производит 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц продукции $П_2$, поэтому затраты C_1 составят

$$C_1 = 1000 \times 0{,}8 + 6000 \times 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Поскольку природа также применяет свою первую стратегию, т. е. погода будет хорошей, то предприятие в тот же день реализует всю продукцию по отпускной цене и получит сумму

$$Z = 1000 \times 1{,}2 + 6000 \times 0{,}8 = 6000 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{11} = Z_1 - C_1 = 6000 - 4000 = 2000 \text{ руб.}$$

Для получения a_{12} следует учесть, что предприятие берет расчет на хорошую погоду, т. е. применяет свою первую стратегию, а природа применяет свою вторую стратегию, т. е. погода будет плохой. В этом случае затраты C будут те же, т. е. $C_1 = 4000$ руб., а сумма выручки Z будет другая. При этом следует учесть, что при плохой погоде в тот же день реализуется 4000 единиц продукции $П_1$, а произведено только 1000 единиц, т. е. вся произведенная продукция $П_1$ будет реализована по цене 1,2 руб. Для продукции $П_2$ будет следующее: при плохой погоде ее реализуется в тот же день 1200 единиц по цене 0,8 руб, а остальные 6000 — 1200 = 4800 единиц реализуются на следующий день по цене 0,8 : 4 = 0,2 руб. за единицу. Таким образом, сумма выручки Z в этом случае будет

$$Z_2 = 1000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 + 4800 \times 0{,}2 = 3120 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{12} = 3120 - 4000 = -880 \text{ руб.},$$

т. е. в этом случае предприятие понесет убыток 880 руб.

Пусть теперь предприятие применит свою 2-ю стратегию, т. е. возьмет расчет на плохую погоду, тогда будет произведено 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц продукции $П_2$ и его затраты составят

$$C_2 = 4000 \times 0{,}8 + 1200 \times 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Если погода окажется плохой, т. е. природа применит свою 2-ю стратегию, то вся произведенная продукция будет реализована в тот же день, и предприятие будет иметь сумму выручки

$$Z_3 = 4000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 = 5760 \text{ руб.}$$

и его прибыль составит

$$a_{22} = Z_3 - C_2 = 5760 - 4000 = 1760 \text{ руб.}$$

Если же предприятие применит свою вторую стратегию, а природа свою 1-ю стратегию, т. е. будет произведено 4000 единиц $П_1$ и 1200 единиц $П_2$, а в тот же день будет реализовано 1000 единиц $П_1$ по 1,2 руб., 1200 единиц $П_2$ по цене 0,8 руб., на другой день 4000 — 1000 = 3000 единиц $П_1$ по цене 0,3 руб. и сумма выручки составит

$$Z_4 = 1000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 + 3000 \times 0{,}3 = 3060 \text{ руб.},$$

а прибыль $P = Z_4 - C_2$, т. е.

$$a_{21} = 3060 - 4000 = -940 \text{ руб.}$$

Итак, матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & -880 \\ -940 & 1760 \end{pmatrix}.$$

На этих примерах показано, как можно подходить к формализации конфликтных ситуаций.

В дальнейшем будут рассмотрены методы решения подобных игр. Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, первый игрок исследует матрицу A своих выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

следующим образом: для каждого значения i ($i = 1, 2, \ldots, m$) определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий второго игрока

$$\min_{i} a_{ij} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

т. е. определяется минимальный выигрыш для первого игрока при условии, что он применит свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \alpha. \tag{2.2}$$

Определение. Число α, определенное по формуле (2.2.), называется *нижней чистой ценой игры* и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе первый игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях второго игрока.

Второй игрок при оптимальном своем поведении должен стремиться по возможности за счет своих стратегий максимально уменьшить выигрыш первого игрока. Поэтому для второго игрока отыскивается

$$\max_{i} a_{ij},$$

т. е. определяется максимальный выигрыш первого игрока, при условии, что второй игрок применит свою j-ю чистую стратегию, затем второй игрок отыскивает такую свою $j = j_1$ стратегию, при которой первый игрок получит минимальный выигрыш, т. е. находит

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \beta. \tag{2.3}$$

Определение. Число β, определенное по формуле (2.3), называется *чистой верхней ценой игры* и показывает, какой максимальный выигрыш за счет своих стратегий может себе гарантировать первый игрок. Другими словами, применяя свои чистые стратегии первый игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше α, а второй игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допускать выигрыш первого игрока больше, чем β.

Определение. Если в игре с матрицей A нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е. $\alpha = \beta$, то говорят, что эта игра имеет *седловую точку* в чистых стратегиях и *чистую цену* игры:

$$v = \alpha = \beta.$$

Седловая точка — это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно первого и второго игроков, при которых достигается равенство

$$\alpha = \beta. \tag{2.4}$$

В понятие седловой точки вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Имея в виду, что лучшее поведение игрока не должно приводить к уменьшению его выигрыша, а худшее — может приводить к уменьшению его выигрыша, эти условия можно записать математически в виде следующих соотношений:

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}, \tag{2.5}$$

где i, j — любые чистые стратегии соответственно первого и второго игроков; (i_0, j_0) — стратегии, образующие седловую точку. Ниже будет показана эквивалентность определения седловой точки условиям (2.4), (2.5).

Таким образом, исходя из (2.5), седловой элемент $a_{i_0j_0}$ является минимальным в i_0-й строке и максимальным в j_0-м столбце в матрице A. Отыскание седловой точки матрицы A происходит легко: в матрице A последовательно в каждой строке находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своем столбце. Если он является таковым, то он и есть седловой элемент, а пара стратегий, соответствующая ему, образует седловую точку. Пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, образующая седловую точку и седловой элемент $a_{i_0j_0}$, называется *решением игры*.

Чистые стратегии i_0 и j_0, образующие седловую точку, называются *оптимальными чистыми стратегиями* соответственно первого и второго игроков.

Пример 2.5. Игра задана следующей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти решение этой игры.

Решение. Рассматриваем первую строку и определяем в ней минимальные элементы. Это элемент 3 во втором и четвертом столбцах. Проверяем, являются ли они максимальными во втором и четвертом столбцах. Оказывается так. Поэтому они являются седловыми элементами и образуют решение игры:

цена игры $v = 3$, оптимальная чистая стратегия первого игрока — это первая. Оптимальными чистыми стратегиями второго игрока являются две — вторая и четвертая.

Далее, во второй строке минимальный элемент — 2 не является максимальным в своем четвертом столбце, значит он не может быть седловым. В третьей строке минимальный элемент — 4 не является максимальным в третьем столбце, следовательно, он не седловой.

Таким образом, последовательно проанализированы все строки матрицы выигрышей, и оказалось, что в этой игре больше нет седловых точек в чистых стратегиях. Чистая нижняя цена игры $\alpha = 3$, чистая верхняя цена игры $\beta = 3$. Они совпадают. Аналогично показывается, что в играх примеров 2.1—2.4 нет седловых точек в чистых стратегиях.

Рассмотрим теперь теорему о соотношении между верхней и нижней чистыми ценами игры.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x, y)$ вещественная функция двух переменных $x \in A$ и $y \in B$ и существует*

$$\alpha = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y), \quad \beta = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y),$$

тогда $\alpha \leqslant \beta$.

Доказательство. Из определения минимума и максимума следует, что

$$\min_{y \in B} f(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant \max_{x \in A} f(x, y)$$

или

$$\min_{y \in B} f(x, y) \leqslant \max_{x \in A} f(x, y). \tag{2.6}$$

Поскольку в левой части (2.6) x любое, то

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leqslant \max_{x \in A} f(x, y). \tag{2.7}$$

В правой части неравенства (2.7) y любое, поэтому

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leqslant \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

В частности, матрица (a_{ij}) есть частный случай функции $f(x, y)$, т. е. если положить $x = i$, $y = j$, $a_{ij} = f(x, y)$, то из теоремы 2.1 получим, что нижняя чистая цена не превосходит верхнюю чистую цену игры в матричной игре.

Определение. Пусть $f(x, y)$ действительная функция двух переменных $x \in A$ и $y \in B$. Точка (x_0, y_0) называется *седловой* для функции $f(x, y)$, если выполняются следующие неравенства

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y)$$

при любых $x \in A$, $y \in B$.

Рассмотрим теперь теорему об эквивалентности определений седловой точки и соотношений (2.4) и (2.5).

Теорема 2.2. *Пусть для вещественной функции $f(x, y)$ при $x \in A$, $y \in B$, существуют*

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y), \quad \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y),$$

тогда необходимым и достаточным условием того, что

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y),$$

является существование седловой точки функции $f(x, y)$, и если (x_0, y_0) седловая точка $f(x, y)$, то

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть существует седловая точка (x_0, y_0), тогда справедливы неравенства

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y)$$

для любых $x \in A$ и $y \in B$, следовательно, справедливы неравенства

$$\max_{x \in A} f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \min_{y \in B} f(x_0, y). \tag{2.8}$$

Далее, на основании определений минимума и максимума для любой $f(x, y)$ очевидно справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) &\leqslant \max_{x \in A} f(x, y_0), \\ \min_{y \in B} f(x_0, y) &\leqslant \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Сопоставляя (2.8) и (2.9), получим

$$\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y).$$

С другой стороны, по теореме 2.1 справедливы обратные соотношения. Это может быть только тогда, когда

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y). \tag{2.10}$$

и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть справедливо равенство (2.10), тогда существуют такие $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, что

$$\max_{x \in A} (\min_{y \in B} f(x, y)) = \min_{y \in B} f(x_0, y),$$

$$\min_{y \in B} (\max_{x \in A} f(x, y)) = \max_{x \in A} f(x, y_0).$$

Покажем, что (x_0, y_0) — седловая точка. Из (2.10) вытекает справедливость следующего равенства

$$\min_{y \in B} f(x_0, y) = \max_{x \in A} f(x, y_0). \tag{2.11}$$

Из определения минимума следует, что

$$\min_{y \in B} f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

и, учитывая (2.11), получаем следующее неравенство

$$\max_{x \in A} f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0).$$

На основании определения максимума из последнего неравенства получаем требуемое соотношение

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Аналогично доказывается и другая часть неравенства

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y).$$

Далее, из (2.11) вытекает справедливость следующего равенства:

$$f(x_0, y_0) = \max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x, y) = \min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Если положить $x = i$, $y = j$, $f(x, y) = a_{ij}$, то из теоремы 2.2 вытекает эквивалентность соотношений (2.4) и (2.5), т. е. для матричной игры седловая точка определённая по (2.4) и (2.5) совпадает.

2.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И ИХ СВОЙСТВА

Примеры, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что не каждая матричная игра имеет оптимальные чистые стратегии. Исследование матричной игры начинается с нахождения ее седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой точки заканчивается исследование игры. Если же в матричной игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что первый игрок не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Такие рекомендации относительно поведения игроков в матричной игре без седловой точки в чистых стратегиях не могут удовлетворять исследователей и практических работников. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партий. Так, например, проводится серия игр в шахматы, шашки, футбол, и каждый раз игроки применяют свои стратегии таким образом, что их противники не догадываются об их содержании, и на этом пути в среднем достигают определенных выигрышей, сыграв всю серию партий. Эти выигрыши в среднем больше нижней цены игры и меньше верхней цены игры. Чем больше это среднее значение, тем лучше стратегии применяет игрок. Поэтому возникла идея применять чистые стратегии случайно, с определенной вероятностью. Это полностью обеспечивает секретность их применения. Каждый игрок может изменять вероятности применения своих чистых стратегий таким образом, чтобы максимально увеличить свой средний выигрыш и на этом пути получать оптимальные стратегии. Такая идея привела к понятию смешанной стратегии.

Определение. *Смешанной стратегией игрока* называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если первый игрок имеет m чистых стратегий $1, 2, \ldots, i, \ldots, m$, то его смешанная стратегия x — это набор чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ удовлетворяющих соотношениям

$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \tag{2.12}$$

Аналогично для второго игрока, который имеет n чистых стратегий, смешанная стратегия y — это набор чисел $y = (y_1, \ldots, y_j, \ldots,$

y_n), удовлетворяющих соотношениям

$$y_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{2.13}$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются *несовместимыми* событиями. Кроме того, они являются единственно возможными событиями.

Очевидно, чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо i-я чистая стратегия применяется с вероятностью единица, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта i-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

Определение. Средний выигрыш первого игрока в матричной игре с матрицей A выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E\ (A,\ x,\ y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{2.14}$$

Очевидно, средний выигрыш первого игрока есть функция двух наборов переменных x и y. Первый игрок имеет целью за счет изменения своих смешанных стратегий x максимально увеличить свой средний выигрыш $E\ (A,\ x,\ y)$, а второй — за счет своих смешанных стратегий стремится сделать $E\ (A,\ x,\ y)$ минимальным, т. е. для решения игры необходимо найти такие x, y, при которых достигается верхняя цена игры

$$\beta = \min_{y} \max_{x} E\ (A,\ x,\ y). \tag{2.15}$$

С другой стороны, ситуация должна быть аналогичной относительно второго игрока т. е. нижняя цена игры должна быть

$$\alpha = \max_{x} \min_{y} E\ (A,\ x,\ y). \tag{2.16}$$

По аналогии с играми, имеющими седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков называются такие наборы x°, y° соответственно для первого и второго игроков, которые удовлетворяют равенству

$$\min_{y} \max_{x} E\ (A,\ x,\ y) = \max_{x} \min_{y} E\ (A,\ x,\ y) = E\ (A,\ x^0,\ y^0). \tag{2.17}$$

Определение. Величина $E\ (A,\ x^\circ,\ y^\circ)$, получаемая по формуле (2.17), называется *ценой игры* и обозначается буквой v.

Имеется другое определение оптимальных смешанных стратегий: x°, y° называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно первого и второго игроков, если они образуют седловую точку для функции $E\ (A,\ x,\ y)$, т. е. удовлетворяют неравенствам

$$E\ (A,\ x,\ y^0) \leqslant E\ (A,\ x^0,\ y^0) \leqslant E\ (A,\ x^0,\ y). \tag{2.18}$$

Из теоремы 2.2 следует, что оба эти определения оптимальной смешанной стратегии являются эквивалентными. Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются *решением матричной игры*. Теперь возникает два вопроса.

1. Какие матричные игры имеют решения?
2. Как находить решение матричной игры?

На первый вопрос отвечает основная теорема матричных игр, доказанная впервые Нейманом. Содержание теоремы состоит в том, что всякая матричная игра имеет решение. Доказательство ее будет приведено ниже.

Ответом на второй вопрос будет изложение методов решения матричных игр.

Для доказательства основной теоремы матричных игр понадобятся следующие две вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. (теорема об опорной гиперплоскости). *Пусть B — замкнутое выпуклое множество из n-мерного евклидова пространства E_n и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка из E_n, не принадлежащая B. Тогда существуют такие числа $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$, что*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_{n+1}, \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i > p_{n+1} \quad \text{для всех } y = (y_1, \ldots, y_n) \in B. \tag{2.20}$$

Геометрически эта теорема означает, что через точку x можно провести гиперплоскость так, что B полностью будет лежать по одну сторону от этой гиперплоскости.

Доказательство. На основании того, что B замкнуто, существует такая точка $z \in B$, что расстояние от z до x минимально. Положим

$$p_i = z_i - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \; p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (z_i x_i - x_i^2). \tag{2.21}$$

Очевидно, для таких p_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ равенство (2.19) выполняется. Докажем справедливость (2.20) для z. В самом деле, на основании (2.21)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i - p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2 > 0,$$

т. е. справедливо (2.20).

Предположим, что существует такое $y \in B$, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leqslant p_{n+1}.$$

Тогда, на основании выпуклости B, отрезок yz целиком находится в B, т. е. $u_\lambda = \lambda y + (1-\lambda) z \in B$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, квадрат расстояния от x до w_λ выразится формулой

$$\rho^2(x, w_\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda y_i - (1-\lambda) z_i)^2,$$

отсюда

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)(x_i - \lambda y_i - (1-\lambda) z_i) =$$

$$= 2\left[\sum_{i=1}^{n} (p_i y_i - p_i z_i + \lambda (z_i - y_i)^2\right].$$

При $\lambda = 0$, т. е. при $w_\lambda = z$, имеем

$$\left.\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 2 \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = 2 \sum_{i=1}^{n} p_i z_i. \qquad (2.22)$$

По предположению

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \leqslant p_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i z_i > p_{n+1},$$

поэтому из (2.22) следует, что

$$\left.\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} < 0,$$

а это значит, что для достаточно близких к нулю λ, будет

$$\rho(x, w_\lambda) < \rho(x, z),$$

но это противоречит выбору z как точки наименее удаленной от x. Это противоречие доказывает, что для всех $y \in B$ должно выполняться условие (2.20).

Лемма 2.2. *Для любой матричной игры с матрицей A справедлива одна из двух альтернатив:*

1) *существует такая смешанная стратегия $x = (x_1, \ldots, x_m)$, что*

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

2) *существует такая смешанная стратегия $y = (y_1, \ldots, y_n)$ что*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Доказательство. Пусть точки

$$a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\delta^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l \\ 1, & \text{если } k = l \end{cases}$$

принадлежат евклидову пространству размерности $n+m$; C — выпуклая оболочка точек a^j, δ^i ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$); $z=(0, 0, \ldots, 0)$ — точка евклидова пространства размерности m. Тогда может быть два случая: $z \in C$ и $z \overline{\in} C$. Если $z \in C$, то z может быть представлена в виде линейной выпуклой комбинации точек δ^i, a^j ($i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$), т. е. справедливы следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \delta^i + \sum_{j=1}^{n} v_j a^j = z,$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 1, \quad u_i \geqslant 0, \quad v_j \geqslant 0,$$

или, расписывая его по компонентам, получим для k-й компоненты

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \delta_{ki} + \sum_{i=1}^{n} v_j a_{kj} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

отсюда, учитывая свойства δ_{ki}, получим

$$u_k + \sum_{j=1}^{n} v_j a_{kj} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m). \tag{2.23}$$

Поскольку, $u_k \geqslant 0$, то из последнего равенства следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} v_j a_{kj} \leqslant 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m). \tag{2.24}$$

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{n} v_j > 0. \tag{2.25}$$

Действительно, если все $v_j = 0$ ($j=1, \ldots, n$), то из (2.23) следует $u_k = 0$ ($k=1, \ldots, m$), это противоречит условию о том, что z выпуклая линейная комбинация. Итак, (2.25) справедливо. Поэтому можно положить

$$y_j = \frac{v_j}{v_1 + \cdots + v_n}\,. \tag{2.26}$$

Если v_j из (2.26) подставить в (2.24), то получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leqslant 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

что показывает справедливость второй альтернативы леммы.

Пусть теперь $z \overline{\in} C$. Тогда по лемме 2.1 существует такая гиперплоскость P:

$$p_1 t_1 + \cdots + p_m t_m = 0,$$

что точка z лежит на этой гиперплоскости, а все точки C находятся по одну сторону от P.

Поскольку P проходит через начало координат, то можно подобрать такие $p_1, \ldots, p_m$, что для любой точки $t = (t_1, \ldots, t_m) \in C$ будет справедливо неравенство

$$p_1 t_1 + \cdots + p_m t_m > 0. \qquad (2.27)$$

В частности, для точек δ^i будет справедливо неравенство (2.27) в таком виде

$$p_1 \delta_{1i} + \cdots + p_m \delta_{mi} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

отсюда следует, что $p_1 > 0,\ p_2 > 0, \ldots, p_m > 0$.

Неравенство (2.27) справедливо и для точек a^j $(j = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.28)$$

Положив в (2.28)

$$x_i = \frac{p_i}{p_1 + \cdots + p_m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

получим $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\, a_{ij} > 0$,

и тем более

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geqslant 0,$$

что показывает справедливость второй альтернативы леммы. Таким образом лемма доказана.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему матричных игр.

Теорема 2.3. *Для матричной игры с любой матрицей A величины*

$$\alpha = \max_x \min_y E\,(A,\ x,\ y), \quad \beta = \min_y \max_x E\,(A,\ x,\ y)$$

существуют и равны между собой.

Доказательство. Множества значений для x и y замкнутые, а функция $E\,(A, x, y)$ непрерывна, поэтому

$$\max_x E\,(x,\ y) \text{ и } \min_y E\,(x,\ y)$$

существуют и также являются непрерывными функциями. Следовательно, существуют

$$\beta = \min_y \max_x E\,(A,\ x,\ y), \qquad \alpha = \max_x \min_y E\,(A,\ x,\ y).$$

Итак, существование α и β доказано.

Предположим, что для матрицы A выполняется первая альтернатива леммы 2.2, т. е. существует такая смешанная стратегия x, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

следовательно,

$$E\,(A,\ x,\ y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) y_j \geqslant 0,$$

$$\min_y E\,(A,\ x,\ y) \geqslant 0 \text{ и } \max_x \min_y E\,(A,\ x,\ y) \geqslant 0. \qquad (2.29)$$

Если же выполняется вторая альтернатива леммы 2.2, тогда существует такая смешанная стратегия y, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

следовательно, $E(A, x, y) \leqslant 0$ и

$$\min_y \max_x E(A, x, y) \leqslant 0. \tag{2.30}$$

Поскольку согласно лемме 2.2 справедлива либо первая, либо вторая альтернатива, то несправедливы следующие неравенства:

$$\max_x \min_y E(A, x, y) < 0 < \min_y \max_x E(A, x, y). \tag{2.31}$$

Рассмотрим матрицу A_k, где k — любое число с элементами $a_{ij} - k$, тогда

$$E(A_k, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - k) x_i y_j = E(A, x, y) - k.$$

Для матрицы A_k также несправедливы неравенства (2.31), которые записываются в следующем виде:

$$\max_x \min_y E(A, x, y) - k < 0 < \min_y \max_x E(A, x, y) - k,$$

или, прибавляя k ко всем частям неравенства, получим, что для любого k несправедливы неравенства

$$\max_x \min_y E(A, x, y) < k < \min_y \max_x E(A, x, y)$$

или несправедливы неравенства

$$\max_x \min_y E(A, x, y) < \min_y \max_x E(A, x, y),$$

т. е. справедливы следующие неравенства

$$\max_x \min_y E(A, x, y) \geqslant \min_y \max_x E(A, x, y).$$

С другой стороны, согласно теореме 2.1, справедливы неравенства

$$\max_x \min_y E(A, x, y) \leqslant \min_y \max_x E(A, x, y).$$

Справедливость последних двух неравенств возможна лишь тогда, когда выполняется равенство

$$\max_x \min_y E(A, x, y) = \min_x \max_y E(A, x, y),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь свойства оптимальных смешанных стратегий.

Теорема 2.4. *Для того чтобы в матричной игре с ценой игры v смешанная стратегия x^0 первого игрока была оптимальной, необходимо и достаточно для любой смешанной стратегии y второго игрока выполнение неравенства*

$$v \leqslant E(A, x^0, y). \tag{2.32}$$

Аналогично для второго игрока, чтобы смешанная стратегия y_0 была оптимальной, необходимо и достаточно для любой смешанной стратегии x первого игрока выполнение неравенства

$$E(A,\ x,\ y^0) \leqslant v. \tag{2.33}$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы.

Необходимость. Пусть x^0 — оптимальная смешанная стратегия первого игрока, тогда по теореме 2.3 существует такая смешанная стратегия y^0 второго игрока, что

$$v = E(A,\ x^0,\ y^0) \leqslant E(A,\ x^0,\ y),$$

т. е. выполняется (2.32) и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть x^0 удовлетворяет (2.32). Согласно теореме 2.3 существует пара оптимальных стратегий x^1, y^1, т. е. таких, что для любых x и y справедливы неравенства, соответствующие седловой точке

$$E(A,\ x,\ y^1) \leqslant E(A,\ x^1,\ y^1) \leqslant E(A,\ x^1,\ y) \tag{2.34}$$

Поскольку v цена игры, то

$$v = E(A,\ x^1,\ y^1). \tag{2.35}$$

Из (2.32) и (2.35) следует, что

$$E(A,\ x^1,\ y^1) \leqslant E(A,\ x^0,\ y). \tag{2.36}$$

Заменив y на y^1 в (2.36) и x на x^0 в первой части (2.34), получим

$$E(A,\ x^0,\ y^1) \leqslant E(A,\ x^1,\ y^1) \leqslant E(A,\ x^0,\ y^1),$$

т. е.

$$E(A,\ x^1,\ y^1) = E(A,\ x^0,\ y^1). \tag{2.37}$$

Теперь из (2.34), (2.36) и (2.37) заключаем, что $(x^0,\ y^1)$ — седловая точка для $E(A,\ x,\ y)$, т. е. x^0 — оптимальная смешанная стратегия для первого игрока. Таким образом достаточность доказана и тем самым доказана первая часть теоремы. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Следствие. Для того чтобы $x^0 = (x_1^0,\ \ldots,\ x_i^0,\ \ldots,\ x_m^0)$ была *оптимальной смешанной стратегией* матричной игры с матрицей A и ценой игры v, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^0 \geqslant v \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.38}$$

Аналогично для второго игрока: чтобы $y^0 = (y_1^0,\ \ldots,\ y_j^0,\ \ldots,\ y_n^0)$ была оптимальной смешанной стратегией второго игрока, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^0 \leqslant v \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2.39}$$

Из этого следствия вытекает: чтобы установить, являются ли предполагаемые $(x,\ y)$ и v решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам (2.38) и (2.39). С другой стороны, найдя неотрицательные решения неравенств (2.38) и (2.39) совместно со следующими уравнениями

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

получим решение матричной игры.

Итак, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных решений линейных неравенств (2.38), (2.39) и линейных уравнений (2.40).

Теорема 2.5. *Пусть имеется матричная игра с матрицей A, ценой игры v, оптимальными смешанными стратегиями $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ соответственно первого и второго игроков. Тогда, если для некоторого i будет*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < v, \tag{2.41}$$

то $x_i = 0$;
если для некоторого j будет

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i > v, \tag{2.42}$$

то $y_j = 0$.

Доказательство. Пусть для некоторого i справедливо (2.41), но $x_i > 0$, тогда

$$x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < x_i v. \tag{2.43}$$

Исходя из свойств оптимальности стратегии (2.39), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j \leqslant v \qquad (l = 1, 2, \ldots, m; \quad l \neq i),$$

отсюда

$$x_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j \leqslant v x_l.$$

Суммируя по l обе части последнего неравенства, получим

$$\sum_{l \neq i} x_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j + x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant v \sum_{l \neq i}^{m} x_l + x_i v.$$

Поскольку справедливо (2.43), то второе слагаемое левой части последнего неравенства строго меньше второго слагаемого правой части, поэтому

$$\sum_{l=1}^{m} x_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j < v \sum_{l=1}^{m} x_l = v,$$

что противоречит тому, что v цена игры и доказывает первую часть теоремы. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 2.6. Найти решение матричной игры со следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

На основании следствия из теоремы 2.4 для нахождения решения этой игры следует найти неотрицательные x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \geqslant v, \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant v, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant v, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 - y_3 \leqslant v, \quad -y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant v, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leqslant v, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Причем системы (2.44) и (2.45) можно решать вместе или отдельно.

Рассмотрим сначала систему (2.44). Для ее решения можно сначала заменить все неравенства на равенства и попробовать их решить. Если получатся все неотрицательные значения x_1, x_2, x_3, то получено решение игры. Решая систему уравнений

$$x_1 - x_2 - x_3 = v, \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 = v,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = v, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

каким-либо известным способом, получим

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13}, \quad v = -\frac{1}{13}.$$

Поскольку значения x_1, x_2, x_3 неотрицательные, они определяют оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Если бы в результате решения этой системы получили хоть одно отрицательное значение x_i, то это значит: предположение о том, что все неравенства (2.44) можно заменить уравнениями, несправедливо и надо только часть неравенств заменить равенствами и решать уже такую систему. Перебирая последовательно все возможные комбинации равенств и неравенств и решая их, получим искомое решение. Это решение обязательно будет найдено, так как оно существует согласно теореме 2.3.

Составляя теперь систему уравнений для второго игрока

$$y_1 - y_2 - y_3 = v, \quad -y_1 + y_2 + 3y_3 = v,$$
$$-y_1 + 2y_2 - y_3 = v, \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

и решая ее, получим

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13}.$$

Поскольку полученные значения y неотрицательные, они составляют оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Итак, решением игры является

$$x = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right), \quad y = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), \quad v = -\frac{1}{13}.$$

Пример 2.7. Найти решение матричной игры со следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

На основании следствия из теоремы 2.4 для нахождения решения этой игры надо найти неотрицательные значения x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqslant v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqslant v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geqslant v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\leqslant v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\geqslant v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &\leqslant v, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Составляя систему уравнений заменой неравенств уравнениями и решая ее, получаем некоторые значения отрицательными. Поэтому пробуем составлять систему, состоящую из равенств и неравенств. Например, предположим, что первое неравенство останется строгим, а остальные будут уравнениями

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &> v, & 3x_1 - 2y_2 + 4y_3 &= v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &= v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= v, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку $3x_1 - x_2 + 2x_3 > v$, то согласно теореме 2.5 должно быть $y_1 = 0$, однако при $y_1 = 0$ система уравнений для вектора y оказывается несовместной. Поэтому наше предположение несправедливо.

Приняв предположение о том, что только второе неравенство является строгим, находим несоответствие. Проведя последовательно такие действия, придем к следующей системе:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 &< v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 &= v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &> v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= v, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v$, то из теоремы 2.5 следует, что $y_3 = 0$, а из $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$ следует, что $x_1 = 0$. Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= v, & -y_1 + 4y_2 &= v, \\ 4x_2 + 2x_3 &= v, & 2y_1 + 2y_2 &= v, \\ x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Решая эту систему известными методами, получим

$$x_2 = 0, \; x_3 = 1, \; y_1 = \frac{2}{5}, \; y_2 = \frac{3}{5}, \; v = 2,$$

т. е. все значения x_2, x_3, y_1, y_2 неотрицательные и, следовательно, они образуют решение игры, которое имеет вид

$$x=(0,\ 0,\ 1),\quad y=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right),\quad v=2.$$

Рассмотрим некоторые особенности решений симметричных игр.

Определение. Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ называется *кососимметрической,* если $a_{ij}=-a_{ji}$ для всех i, j. Матричная игра называется *симметричной,* если ее матрица кососимметрическая.

Теорема 2.2. *Цена симметричной игры равна нулю. Если x оптимальная смешанная стратегия первого игрока, то x есть также оптимальная смешанная стратегия для второго игрока.*

Доказательство. Пусть x произвольная смешанная стратегия и A квадратная матрица, тогда для симметричной игры $a_{ij}=-a_{ji}$ или

$$A=-A^T,$$

где знак T означает транспонирование. Следовательно,

$$xAx^T=-xA^Tx^T=-(xAx^T)^T=-xAx^T,$$

поэтому $xAx^T=0$ и

$$\min_y xAy^T\leqslant 0,$$

т. е. цена игры неположительная. С другой стороны,

$$\max_x yAx^T\geqslant 0$$

так, что цена игры неотрицательная. Поэтому цена игры равна нулю.

Если x оптимальная стратегия первого игрока, то $xA\geqslant 0$ и

$$x(-A^T)\geqslant 0 \text{ или } xA^T\leqslant 0, \text{ т. е. } Ax^T\leqslant 0,$$

а это значит, что x оптимальная и для второго игрока.

Пример 2.8. Рассмотрим решение игры с двумя пальцами, матрицу которой построили в примере 2.1.

Поскольку эта матрица кососимметричная, то игра симметричная и цена этой игры $v=0$. Поэтому для решения этой игры согласно следствию из теоремы 2.4 надо найти неотрицательные решения следующих систем:

$$-2x_2+3x_3\geqslant 0,\quad 2x_1-3x_4\geqslant 0,$$
$$-3x_1+4x_4\geqslant 0,\quad 3x_2-4x_3\geqslant 0,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=1,$$

где $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ — оптимальная смешанная стратегия первого и второго игроков.

Предположив, что все неравенства можно заменить равенствами, получим

$$-2x_2+3x_3=0,\quad 2x_1-3x_4=0,$$

$$-3x_1+4x_4=0, \quad 3x_2-4x_3=0,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=1.$$

Из первых четырех уравнений получаем, что единственным решением этой однородной системы линейных уравнений будет $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, что противоречит последнему уравнению. Поэтому сделанное предположение следует отвергнуть.

Пусть теперь только первое неравенство будет строгим:

$$-2x_2+3x_3>0, \quad 2x_1-3x_4=0,$$
$$-3x_1+4x_4=0, \quad 3x_2-4x_3=0,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=1.$$

Решение системы четырех уравнений (без первого неравенства) легко получить, это:

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{4}{7}, \quad x_3=\frac{3}{7}, \quad x_4=0.$$

Все эти значения неотрицательны и удовлетворяют первому неравенству, поэтому они составляют оптимальную смешанную стратегию для первого и второго игроков. Эта стратегия состоит в том, что игроки случайно с вероятностью $\frac{4}{7}$ показывают один палец и называют цифру 2, и с вероятностью $\frac{3}{7}$ — наоборот, показывают два пальца, а называют число 1. В среднем выигрыш каждого игрока равен нулю.

Из рассмотренных примеров видно, что метод решения перебором возможных равенств и неравенств неприемлем для большой размерности матриц, так как при этом необходимо проводить огромное количество переборов. В дальнейшем будут рассмотрены более совершенные методы.

Часто при нахождении решения матричной игры существенно помогает выявление превосходства одной стратегии над другой.

О п р е д е л е н и е. Если для i-й и k-й стратегий первого игрока выполняются соотношения

$$a_{ij} \geqslant a_{kj} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.46}$$

причем хотя бы одно из неравенств (2.46) является строгим, то говорят что стратегия i превосходит или доминирует стратегию k.

Аналогично для второго игрока: стратегия j доминирует стратегию r, если выполняются неравенства

$$a_{ij} \geqslant a_{ir} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2.47}$$

причем хотя бы одно из неравенств (2.47) является строгим неравенством.

Использование соотношения доминирования позволяет сократить размерность матрицы выигрышей в матричной игре. Это свойство формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.7. *Пусть* Г *матричная игра с матрицей* A *порядка* $m \times n$, *и* i*-я стратегия первого игрока доминирует* k*-ю стратегию.*

Пусть A^1 матрица, получаемая из A путем исключения из нее k-й строки, и пусть Γ^1 матричная игра с матрицей A^1. Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ, всякая оптимальная смешанная стратегия второго игрока в Γ^1 есть также его оптимальная смешанная стратегия в игре Γ, если $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m)$ есть оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре Γ^1, то его смешанная стратегия $x = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_m)$ является оптимальной в игре Γ.

Доказательство. Поскольку i-я стратегия первого игрока доминирует k-ю, то справедливы неравенства

$$a_{ij} \geqslant a_{kj} \qquad (j = 1, \ldots, n), \quad a_{ij_0} > a_{kj_0} \tag{2.48}$$

при некотором $j = j_0$.

Обозначим через v цену игры в Γ^1, и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ оптимальную смешанную стратегию второго игрока Γ^1. Тогда по следствию из теоремы 2.4 должны выполняться неравенства:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{lj} y_j \leqslant v \qquad (l = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m), \tag{2.49}$$

$$v \leqslant \sum_{l \neq k} a_{lj} u_l \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.50}$$

Теперь надо показать, что v есть цена игры Γ, y — оптимальная смешанная стратегия второго игрока в Γ и $x = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_m)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока в Γ. Для этого, согласно следствию из теоремы 2.4, необходимо показать, что для Γ удовлетворяются следующие неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} y_j \leqslant v \qquad (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.51}$$

$$v \leqslant \sum_{l=1}^{m} a_{lj} u_l \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.52}$$

Сравнивая (2.49) и (2.51) замечаем, что для $l \neq k$ они совпадают. Остается проверить справедливость (2.51) при $l = k$. Поскольку выполняется (2.48), то умножив обе части неравенства (2.48) на y_j и просуммировав их, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j.$$

Неравенство (2.49) справедливо для $l = i$, поэтому

$$v \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j,$$

т. е. неравенство (2.51) выполняется для $l = k$.

Неравенство (2.52) можно переписать так:

$$v \leqslant \sum_{i \neq k} a_{ij} u_i + a_{kj} u_k.$$

Поскольку $u_k = 0$, то получим неравенства

$$v \leqslant \sum_{i \neq k} a_{ij} u_i,$$

которые полностью совпадают со справеливыми неравенствами (2.50), что и требовалось доказать.

Из теоремы 2.7 следует, что если i-я стратегия первого игрока доминирует k-ю стратегию, то i-я стратегия для первого игрока лучше, чем k-я, т. е. первому игроку не выгодно использовать свою k-ю стратегию и она не должна входить в его оптимальную стратегию. Следовательно вероятность применения k-й чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии первого игрока должна равняться нулю. Вычеркивая из A эту k-ю строку, получаем матрицу A^1, в которой количество строк на единицу меньше. При этом полагаем $x_k = 0$, где x_k k-я компонента x. Игру с матрицей A^1 решать легче, так как в ней меньше строк. Если в матрице A^1 наблюдается доминирование стратегий первого игрока, то далее можно поступать аналогично и таким образом уменьшить размерность матрицы A^1.

Доминирование стратегий для второго игрока также дает дополнительные возможности для сокращения размера матрицы выигрышей. С этой целью можно использовать следующее свойство.

Теорема 2.8. *Пусть* Γ *матричная игра с матрицей* A. *Пусть* q*-я чистая стратегия второго игрока доминирует* r*-ю, матрица* A^1 *получена из* A *исключением* q*-го столбца,* Γ^1 — *матричная игра с матрицей* A^1. *Тогда цена игры* Γ^1 *такая же, как цена игры* Γ*; всякая оптимальная смешанная стратегия первого игрока в* Γ^1 *есть также его оптимальная смешанная стратегия в* Γ*; если* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{q-1}, w_{q+1}, \ldots, w_n)$ *есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в* Γ^1*, то* $y = (w_1, w_2, \ldots, w_{q-1}, 0, w_{q+1}, \ldots, w_n)$ *есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в* Γ.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.7. Таким образом, из теоремы 2.8 следует, что, если q-я чистая стратегия второго игрока доминирует какую-либо его чистую стратегию, то q-й столбец в A можно вычеркнуть, положив $y_q = 0$, где y_q — q-я компонента оптимальной смешанной стратегии второго игрока. В результате, получаем матрицу A^1 меньшей размерности чем A. Если в A^1 есть доминирование стратегий, то можно поступать с ней аналогично и уменьшить ее размерность.

Пример 2.9. Рассмотрим матричную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обозначим оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно через x и y. Очевидно, третья стратегия первого игрока доминирует его первую стратегию, поэтому можно в матрице

A вычеркнуть первую строку, положив $x_1 = 0$. Тогда получим новую матрицу

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

в которой 4-я стратегия второго игрока доминирует его 2-ю стратегию, и поэтому вычеркиваем четвертый столбец, полагая $y_4 = 0$, и получаем новую матрицу

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице уже нет доминирования. Таким образом, исходную игру с матрицей порядка 4×4 с помощью доминирования свели к игре с матрицей порядка 3×3.

Матричные игры обладают еще одним интересным свойством, которое формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.9. *Пусть дана матричная игра* Γ *с матрицей* $A = (a_{ij})$ *и с ценой игры* v. *Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков матричной игры* Γ_B *с матрицей* $B = (b_{ij}) = (ba_{ij} + c)$, *где* $b > 0$ *совпадают с оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков в матричной игре* Γ, *а цена игры* Γ_B *равна*

$$v_B = bv + c.$$

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — соответственно оптимальные смешанные стратегии игроков в игре Γ; $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ — оптимальные смешанные стратегии игроков в игре Γ_B. Тогда согласно следствию из теоремы 2.4. для оптимальности x, y, p, q должны удовлетворять неравенствам:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant v, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant v, \tag{2.53}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i \geqslant v_B, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_j \leqslant v_B. \tag{2.54}$$

В (2.54) подставим $b_{ij} = ba_{ij} + c$, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{m} (ba_{ij} + c)\, p_i \geqslant v_B, \quad \sum_{j=1}^{n} (ba_{ij} + c)\, q_j \leqslant v_B.$$

После простых преобразований этих неравенств будем иметь

$$b\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i + c \geqslant v_B, \quad b\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j + c \leqslant v_B$$

или учитывая, что $b > 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geqslant \frac{v_B - c}{b}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leqslant \frac{v_B - c}{b}.$$

Полагая в последних неравенствах

$$\frac{v_B - c}{b} = v,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geqslant v; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leqslant v,$$

т. е. последние неравенства совпадают с неравенствами (2.53), следовательно,

$$x = p, \ y = q, \ v_B = bv + c,$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой 2.9, можно несколько упрощать элементы матрицы A с тем, чтобы легче было с ними оперировать при нахождении решения игры.

Пример 2.10. Рассмотрим матричную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 100 \end{pmatrix}.$$

Если каждый элемент этой матрицы разделить на 100 и затем из полученных элементов вычесть 1, то получим игру с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет более простые элементы. Здесь проведено следующее преобразование:

$$b_{ij} = 0{,}01 a_{ij} - 1,$$

т. е. $b = 0{,}01$, $c = -1$.

В этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях. Поэтому для решения игры с матрицей B обозначим через $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ оптимальные смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков, v — цена игры с матрицей A, v_B — цена игры с матрицей B.

Согласно следствию из теоремы 2.4, x и y должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\geqslant v_B, & y_1 + 2y_2 &\leqslant v_B, \\ 2x_1 &\geqslant v_B, & 5y_1 &\leqslant v_B, \\ x_1 + x_2 &= 1, & y_1 + y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Предположим, что все эти неравенства являются равенствами. Позже будет показано, что это всегда так, если в матричной игре с матрицей порядка 2×2 нет седловой точки в чистых стратегиях. Тогда получим

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= v_B, & y_1 + 2y_2 &= v_B, \\ 2x_1 &= v_B, & 5y_1 &= v_B, \\ x_2 &= 1 - x_1, & y_2 &= 1 - y_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{1}{2} v_B, \quad y_1 = \frac{1}{5} v_B,$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2} v_B, \quad y_2 = 1 - \frac{1}{5} v_B.$$

Или подставляя эти значения в первое уравнение, получим

$$\frac{1}{2} v_B + 5 - \frac{5}{2} v_B = v_B,$$

отсюда имеем

$$v_B = \frac{3}{5}, \; x_1 = \frac{3}{10}, \; x_2 = \frac{7}{10}, \; y_1 = \frac{3}{25}, \; y_2 = \frac{22}{25}.$$

Тогда решением матричной игры с матрицей A будет

$$v = \frac{v_B - c}{b} = \frac{0,6 + 1}{0,01} = 160, \quad x = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right),$$

$$y = \left(\frac{3}{25}, \frac{22}{25}\right).$$

2.3. ИГРА ПОРЯДКА 2×2

Матричная игра порядка 2×2 задается следующей матрицей выигрышей первого игрока:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение этой игры следует начинать с отыскания седловой точки в чистых стратегиях. С этой целью находят минимальный элемент в первой строке и проверяют, является ли он максимальным в своем столбце. Если такого элемента не нашли, то аналогично проверяют вторую строку. Если во второй строке такой элемент найден, то он является седловым.

Отысканием седлового элемента, если такой имеется, заканчивается процесс нахождения ее решения, так как в этом случае найдена цена игры — седловой элемент и седловая точка, т. е. пара чистых стратегий, для первого и второго игрока, составляющих оптимальные чистые стратегии. Если же седловой точки в чистых стратегиях не оказалось, то надо отыскать седловую точку в смешанных стратегиях, которая обязательно существует согласно основной теореме 2.3 матричных игр.

Обозначим через $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков. Напомним, что x_1 означает вероятность применения первым игроком своей первой стратегии, а $x_2 = 1 - x_1$ — вероятность применения им своей второй стратегии. Аналогично для второго игрока: y_1 — вероятность применения им первой стратегии, $y_2 = 1 - y_1$ — вероятность применения им второй стратегии.

Согласно следствию из теоремы 2.4, для оптимальности смешанных стратегий x и y необходимо и достаточно, чтобы для неотрицательных x_1, x_2, y_1, y_2 выполнялись следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geqslant v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geqslant v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leqslant v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leqslant v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.56)$$

Покажем теперь, что если матричная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, то эти неравенства должны превращаться в равенства:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \quad a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \quad a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1, \quad y_1 + y_2 = 1. \end{aligned} \qquad (2.57)$$

В самом деле. Пусть игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, тогда оптимальные значения смешанных стратегий удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1, \\ 0 < y_1 < 1, \quad 0 < y_2 < 1. \end{aligned} \qquad (2.58)$$

Предположим, что оба неравенства из (2.55) будут строгими

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 > v, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 > v,$$

тогда согласно теореме 2.5 должно $y_1 = y_2 = 0$, что противоречит условиям (2.58).

Аналогично доказывается, что оба неравенства из (2.56) не могут быть строгими неравенствами.

Предположим теперь, что одно из неравенств (2.55) может быть строгим, например первое

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 > v.$$

Это значит, что согласно теореме 2.5 $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Следовательно, из (2.56) получаем

$$a_{12} \leqslant v, \quad a_{22} \leqslant v. \qquad (2.59)$$

Если оба неравенства (2.59) строгие, то по теореме 2.5 должно $x_1 = x_2 = 0$, что противоречит (2.58). Если же $a_{12} \neq a_{22}$, то одно из неравенств (2.59) строгое, а другое — равенство. Причем равенство будет выполняться для большего элемента из a_{12} и a_{22}, т. е. одно неравенство из (2.59) должно быть строгим. Например $a_{12} < a_{22}$. Тогда справедливо $a_{12} < v$, а это равносильно тому, что первое неравенство из (2.56) строгое. Тогда согласно теореме 2.5 должно $x_1 = 0$, что противоречит условию (2.58). Если $a_{12} = a_{22}$, то оба неравенства (2.59) превращаются в равенства и тогда можно положить $x_1 = 0$, что противоречит (2.58). Итак, предположение о том, что первое неравенство из (2.55) может быть строгим, не справедливо. Аналогично можно показать, что второе неравенство из (2.55) также не может быть строгим.

Таким образом показано, что если матричная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, то для оптимальных стратегий первого игрока неравенства (2.55) превращаются в равенства. Аналогичные рассуждения относительно неравенств (2.56) приведут к тому, что в этом случае неравенства (2.56) должны быть равенствами.

Итак, если матричная игра порядка 2×2 не имеет седловой точки, то оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры можно определить, решив систему уравнений (2.57). Установлено также, что если в матричной игре порядка 2×2 один из игроков имеет оптимальную чистую стратегию, то и другой игрок также имеет оптимальную чистую стратегию.

Следовательно, если матричная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, то согласно теореме 2.3 она должна иметь решение в смешанных стратегиях, которые определяются из уравнений (2.57). Решение системы (2.57)

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$
$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \tag{2.60}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{2.61}$$

Пример 2.11. Рассмотрим решение игры в монеты (см. пример 2.2), матрица выигрышей которой

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, в этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях (минимальный элемент в строке —1 не является максимальным в своем столбце). Поэтому воспользуемся формулами, (2.60), (2.61) и получим

$$x_1 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = \frac{1}{2},$$
$$y_1 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = \frac{1}{2}$$
$$v = \frac{1-1}{-1-1-1-1} = 0.$$

Итак, оптимальным способом проведения этой игры является применение игроками своих стратегий с одинаковыми вероятностями, равными 0,5. На практике часто так и осуществляется эта игра: один игрок подбрасывает монету и после ее падения накрывает рукой так, чтобы второй игрок не увидел, какой стороной она упала; второй игрок так же может подбрасывать монету и, посмотрев какой стороной упала его монета, называть эту сторону. Такие действия игроков обеспечивают применения ими стратегий с вероятностью 0,5, т. е. оптимальных смешанных стратегий, цена игры равна 0, что говорит о безобидности игры (никакой игрок не имеет преимуществ).

Пример 2.12. Рассмотрим решение игры «Оптимальный план» (см. пример 2.4). Матрица игры здесь следующая:

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & -880 \\ -940 & 1760 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта игра не имеет седловой точки, поэтому найдем ее решение в смешанных стратегиях, где x_1, x_2 — соответственно вероятности применения первым игроком своих 1-й и 2-й стратегий, y_1, y_2 — вероятности применения вторым игроком своих 1-й и 2-й стратегий. Воспользовавшись формулами (2.60), (2.61), получим

$$x_1 = 0{,}483; \quad x_2 = 0{,}517; \quad y_1 = 0{,}473; \quad y_2 = 0{,}527; \quad v = 482,$$

или приближенно

$$x_1 = x_2 = 0{,}5; \quad y_1 = y_2 = 0{,}5.$$

Полученное решение рекомендует первому игроку (предприятию) примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, применить свои чистые стратегии, а природа максимально навредит предприятию, если будет также примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, менять погоду. При этом предприятие в среднем будет иметь ежедневно прибыль в размере $v = 482$ рубля.

Применить свою 1-ю стратегию для предприятия — это значит брать расчет на хорошую погоду и произвести 1000 единиц продукции Π_1 и 6000 единиц продукции Π_2. Для применения своей 2-й стратегии предприятию следует произвести 4000 единиц продукции Π_1 и 1200 единиц продукции Π_2, т. е. меняя случайно стратегии, как это рекомендует оптимальное решение, следует случайно менять технологию производства, что для предприятия невозможно. Поэтому оптимальные стратегии лучше использовать так: в среднем ежедневно можно производить продукцию Π_1 в количестве

$$1000x_1 + 4000x_2 = 1000 \cdot 0{,}483 + 4000 \cdot 0{,}517 = 2551 \text{ единиц},$$

продукции Π_2 в количестве

$$6000x_1 + 1200x_2 = 6000 \cdot 0{,}483 + 1200 \cdot 0{,}517 = 3518 \text{ единиц},$$

и независимо от поведения природы ежедневная прибыль предприятия будет составлять 482 руб. Действительно, предприятие затратит на изготовление и реализацию этой продукции

$$2551 \cdot 0{,}8 + 3518 \cdot 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

При хорошей погоде предприятие реализует 1000 единиц Π_1 по цене 1,2 руб., остальные $2551 - 1000 = 1551$ единиц Π_1 по цене в четыре раза меньше — 0,3 руб., 3518 единиц по цене 0,8 руб., т. е. получит

$$1000 \cdot 1{,}2 + 1551 \cdot 0{,}3 + 3518 \cdot 0{,}8 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит $4482 - 4000 = 482$ руб.

Если погода плохая, то предприятие реализует 2551 единицу продукции $П_1$ по цене 1,2 руб., 1200 единиц продукции $П_2$ по цене 0,8 руб., остальные 3518 — 1200 = 2318 единиц продукции $П_2$ по цене в четыре раза меньше — 0,2 руб., т. е. получит

$$2551 \cdot 1{,}2 + 1200 \cdot 0{,}8 + 2318 \cdot 0{,}2 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит 4482 — 4000 = 482 руб.

Существенное отличие этой игры от предыдущих заключается в том, что элементы матрицы A не являются точными: они взяты приближенно, в среднем (ведь нельзя наперед быть уверенным в продаже, скажем, точно 1000 единиц продукции; ее может быть продано в один день 980 единиц, — в другой 1030 и т. д.). Выводы, сделанные относительно этой игры, будут справедливы только в случае незначительного изменения количества проданных изделий (в данном случае, скажем, в пределах 30—50 единиц ежедневно). В противном случае анализ игры усложняется.

Предположим, наконец, что в городе имеется бюро прогнозов погоды, предсказания которого оправдываются с вероятностью 0,75 и не оправдываются с вероятностью 0,25. Предприятие поступает в точности по прогнозам. Тогда описанная выше ситуация по существу теряет игровой смысл и может решаться чисто вероятностными методами.

Действительно, пусть в данной местности за летний сезон бывает примерно одинаковое число дней с хорошей и плохой погодой, т. е. погода является случайным событием, появляющимся с вероятностью $\frac{1}{2}$. Согласно выводам, сделанным из матрицы A, это наихудший вариант для завода. Следовательно, прибыль завода является случайной величиной, принимающей свои значения:

$$2000 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8},$$

$$-880 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$-940 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$1760 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8}.$$

(Например, для получения прибыли 2000 руб. требуется совмещение независимых событий: 1-е — хорошая погода, 2-е — оправдался прогноз. Вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей (0,75 · 0,5). Для остальных величин прибылей рассуждения аналогичны). При этих условиях математическое ожидание прибыли завода

$$M = 2000 \cdot \frac{3}{8} - 880 \cdot \frac{1}{8} - 940 \cdot \frac{1}{8} + 1760 \cdot \frac{3}{8} = 1183 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежедневная прибыль завода в среднем будет значительно больше, чем в предыдущем случае на 1183 — 482 = 701 руб.

Значение смешанной стратегии полезно даже в случае проведения игры только один раз. Для иллюстрации приведем следующий пример.

Пример 2.13. Дилемма фотокорреспондента. Во время праздника фотокорреспондент сделал для газеты несколько важных снимков, которые необходимо срочно обработать и отправить в редакцию. В своей фотолаборатории он обнаружил готовый проявитель, концентрация которого ему неизвестна. Этот проявитель может быть либо нормальный (для пленки), либо разведенный в два раза (для фотографий). Фотокорреспондент хочет знать, сколько времени проявлять пленку в имеющемся проявителе, так как от концентрации проявителя зависит время ее проявления и качество.

Возникшую ситуацию можно рассматривать как игру: первый игрок — фотокорреспондент, второй — природа.

У первого игрока имеется две стратегии:

1. Проявлять пленку 15 минут в расчете на нормальный проявитель.
2. Проявлять пленку 30 минут в расчете на разведенный проявитель.

У второго игрока имеется две стратегии:

1. Проявитель нормальный.
2. Проявитель разведенный в два раза.

Для составления матрицы выигрышей можно провести следующие рассуждения.

Если проявитель нормальный, то проявление в течение 15 минут дает наилучший результат, который фотокорреспондент оценивает в 5 баллов (отлично).

Если проявитель разведен для печатания фотографий, то проявление пленки в течение 15 минут дает слабый неконтрастный негатив. Однако из такого негатива все же можно получить фотографии среднего качества: такое положение он оценил в 3 балла (удовлетворительно).

Если проявитель разведен для печатания фотографий, т. е. он разбавлен в два раза по сравнению с нормальным, то проявление пленки в течение 30 минут, учитывая закон обратной пропорциональности, приведет все же к хорошему негативу. Такое положение он оценил в 4 балла (хорошо).

Если же проявитель нормальный, то проявление пленки в течение 30 минут дает крупное зерно, вуаль, большую контрастность и т. д. Снимки получатся очень плохими, и такое положение он оценил в 1 балл (очень плохо). Таким образом, матрица выигрышей в баллах получилась в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, полученная матрица не имеет седловой точки, поэтому по формулам (2.59) — (2.61) решение получаем в виде оптимальных смешанных стратегий $x = (x_1, x_2)$, $y = (x_1, y_2)$ соответственно для первого и второго игроков:

$$x_1 = \frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad y_1 = \frac{1}{5}, \quad y_2 = \frac{4}{5}, \quad v = \frac{17}{5} = 3{,}4.$$

Если бы такую ситуацию можно было повторять много раз, то проявляя пленку в 60% случаев по 15 минут и 40% случаев по 30 минут, фотокорреспондент получит снимки, качество которых оценивается 3,4 балла. Однако для корреспондента важны именно эти снимки, и он не может повторять ситуацию много раз для использования оптимальных смешанных стратегий в вышеуказанном смысле. Поэтому, будучи уверенным, что изменение качества негатива пропорционально изменению времени проявления пленки, он может использовать те части времени, которые соответствуют его оптимальной смешанной стратегии, т. е. надо проявлять пленку в течение следующего промежутка времени:

$$t = 15x_1 + 30x_2 = 15 \cdot 0{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 = 21 \text{ мин}$$

и качество полученного негатива оценивается в 3,4 балла.

Пример 2.14. Бомбардировка. У первого противника имеется два бомбардировщика, один из них нагружен бомбами, другой — средствами охраны и специальной аппаратурой. Эти бомбардировщики вылетают бомбить переправу другого противника. При полете первый из бомбардировщиков находится под более эффективной защитой второго, чем второй под защитой первого. Цель первого противника разбомбить переправу, поэтому ему более важно сохранить бомбардировщик с бомбами. Второму противнику лучше атаковать истребителями бомбардировщик в менее защищенном положении. Итак, у первого противника имеется две стратегии:

1. Самолет с бомбами летит под прикрытием второго бомбардировщика, т. е. самолет с бомбами летит первым.

2. Самолет со средствами охраны летит первым, т. е. он находится под прикрытием самолета с бомбами.

У второго противника имеется также две стратегии:

1. Атаковать первый бомбардировщик.

2. Атаковать второй бомбардировщик.

Известны следующие данные. Вероятность бомбардировщику остаться не сбитым и разбить переправу равна:

0,6, если он атакован истребителем в более выгодном для него положении;

0,4, если он атакован истребителем в менее выгодном для него положении;

1, если он не атакован истребителями.

Таким образом, матрица выигрышей первого противника, составленная из вероятностей поражения цели, представлена в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1 \\ 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта матрица не имеет седловой точки, а решение игры в смешанных стратегиях следующее:

$$x_1 = 0{,}6; \quad x_2 = 0{,}4; \quad y_1 = 0{,}6; \quad y_2 = 0{,}4; \quad v = 0{,}76.$$

Полученное решение показывает, что первый противник, применяя свои оптимальные смешанные стратегии при многократном повторении полетов с целью бомбардировки, в среднем будет иметь 76% удачных случаев (остаться не сбитым и разбомбить переправу). Второй противник, применяя свои оптимальные смешанные стратегии, не позволит бомбардировщику с бомбами прорваться к переправе чаще, чем в 76% случаев, т. е. своими оптимальными действиями он воспрепятствует бомбардировке переправы в 24% случаев.

2.4. ИГРЫ ПОРЯДКА $2 \times n$ И $m \times 2$

В играх порядка $2 \times n$ первый игрок имеет только 2 чистых стратегии, а второй n чистых стратегий, т. е. матрица выигрышей первого игрока имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Если такая игра имеет седловую точку, то ее легко найти и получить решение.

Предположим, что игра не имеет седловой точки. Тогда необходимо найти такие смешанные стратегии $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно первого и второго игроков и цену игры v, которые удовлетворяют соотношениям:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \geqslant v \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2.63}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \leqslant v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \leqslant v, \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

$$\left.\begin{aligned} & x_2 = 1 - x_1,\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1, \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ y_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

Поскольку игра не имеет седловой точки, то неравенства (2.64) заменяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = v, \\ a_{2n}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n = v. \end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

Для решения систем (2.63), (2.65), (2.66) целесообразно воспользоваться графическим методом. С этой целью введем обозначения для левой части неравенств (2.63)

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

или, подставив x_2 из (2.65) и проведя простые преобразования, получим

$$M_j(x_1) = (a_{1j} - a_{2j})\, x_1 + a_{2j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $M_j(x_1)$ — это средний выигрыш первого игрока при условии, что он применяет свою смешанную стратегию, а второй — свою j-ю чистую стратегию.

Каждому значению $j = 1, 2, \ldots, n$ согласно выражению $M_j(x_1)$ соответствует прямая линия в прямоугольной системе координат (рис. 2.1, где $j = 1, 2, 3, 4$).

Цель второго игрока минимизировать выигрыш первого игрока за счет выбора своих стратегий. Поэтому вычисляем

$$\min_j M_j(x_1) = M(x_1),$$

где $M(x_1)$ — нижняя граница множества ограничений. На рис. 2.1 график функции $M(x_1)$ изображен жирной линией.

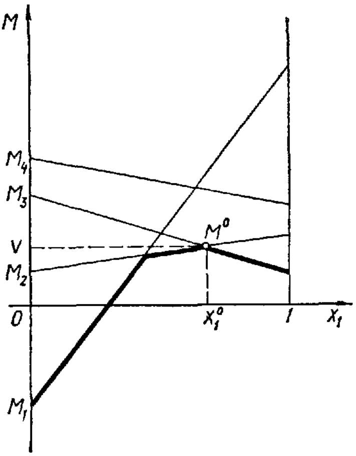

Рис. 2.1

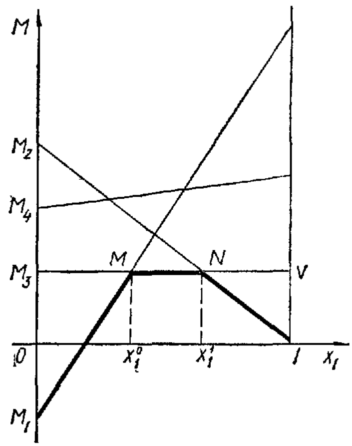

Рис. 2.2

Цель первого игрока максимизировать свой выигрыш за счет выбора x_1, т. е. вычислить

$$\max_{x_1} M(x_1) = M(x_1^0).$$

На рис. 2.1 точка M^0 означает максимальное значение $M(x_1^0)$, которое получается при $x_1 = x_1^0$. Цена игры $v = M(x_1^0)$, так как

$$v = \min_j \max_x M_j(x_1) = M(x_1^0).$$

Таким образом графически определяется оптимальная смешанная стратегия $x = (x_1^0, x_2^0)$ первого игрока и пара чистых стратегий второго игрока, которые в пересечении образуют точку M^0. На рис. 2.1 изображены 2-я и 3-я стратегии второго игрока. Для таких стратегий неравенства (2.63) превращаются в равенства. На рис. 2.1 это стратегии $j = 2$, $j = 3$.

Теперь можно решить систему уравнений

$$M_j(x_1) = 0 \qquad (j = 2,\ 3)$$

и точно определить значения x_1^0 и v (графически они определяются приближенно). Затем положив все значения $y_j = 0$ при тех j, для которых $M_j(x_1)$ не образуют точку M^0, можно определить y_j при тех j, для которых $M_j(x_1)$ образуют точку M^0, решая систему уравнений

(2.66). Для примера, приведенного на рис. 2.1, это следующая система:

$$a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = v,$$
$$a_{12}y_2 + a_{23}y_3 = v,$$

а остальные $y_1 = y_4 = 0$. Эту систему можно решить, полагая $y_2 = 1 - y_3$. Если при некоторой $j = j_0$ стратегии второго игрока образуют точку M^0 и $a_{1j_0} = a_{2j_0}$, то максимальное значение нижней границы множеств ограничений изображается отрезком, параллельным оси Ox_1. В этом случае первый игрок имеет бесконечно много оптимальных значений x_1^0, а цена игры $v = a_{1j_0} = a_{2j_0}$. Например, этот случай изображен на рис. 2.2, где $j_0 = 3$ и отрезок MN изображают верхнее значение нижней границы множества ограничений, оптимальные значения x_1 находятся в пределах x_1^0, x_1^1. У второго игрока имеется чистая оптимальная стратегия $j = j_0$.

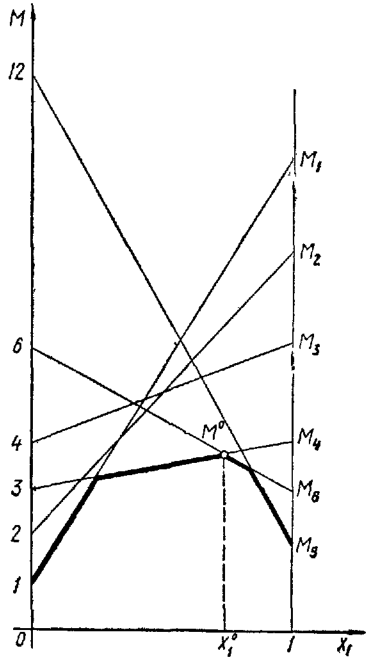

Рис. 2.3

Пример 2.15. Выбор сельскохозяйственной культуры. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать две культуры. Прибыль предприятия от реализации выращенной культуры зависит от объема полученной. Урожай первой культуры выше при сухой погоде, а второй — при более влажной. Состояние погоды в летний период можно рассматривать как следующие стратегии природы:

1. Лето жаркое сухое.
2. Лето жаркое влажное.
3. Лето теплое влажное.
4. Лето теплое сухое.
5. Лето прохладное сухое.
6. Лето прохладное влажное.

Стратегии предприятия:

1. Выращивать первую культуру.
2. Выращивать вторую культуру.

Будем считать предприятие первым игроком, природу — вторым игроком. Расчеты прибыли предприятия в млн. руб. в зависимости от состояния погоды сведены в следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сельскохозяйственного предприятия. Рассматривая полученную ситуацию как матричную игру порядка 2×6, определим оптимальные стратегии игроков.

Очевидно, полученная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, поэтому воспользуемся графическим методом решения для определения оптимальных смешанных стратегий. С этой целью обозначим через x_1 вероятность применения первым игроком своей первой стратегии, через $y = (y_1, \ldots, y_6)$ смешанную стратегию второго игрока. На рис. 2.3 приведены графики средних выигрышей первого игрока $M_j(x_1)$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, где

$$M_1(x_1) = (10 - 1)x_1 + 1 = 9x_1 + 1,$$
$$M_2(x_1) = (8 - 2)x_1 + 2 = 6x_1 + 2,$$
$$M_3(x_1) = (6 - 4)x_1 + 4 = 2x_1 + 4,$$
$$M_4(x_1) = (4 - 3)x_1 + 3 = x_1 + 3,$$
$$M_5(x_1) = (2 - 12)x_1 + 12 = -10x_1 + 12,$$
$$M_6(x_1) = (3 - 6)x_1 + 6 = -3x_1 + 6.$$

Нижняя граница множества ограничений изображена на рис. 2.3 жирной линией. Очевидно, максимальное значение $M(x_1)$ достигается в точке M^0, образуемой пересечением линий, соответствующих $j = 6$, $j = 4$. Поэтому полагаем: $y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0$, $y_4 + y_6 = 1$. Для определения значений x_1, x_2, y_4, y_6, v надо решить следующие уравнения:

$$4x_1 + 3x_2 = v, \quad 4y_4 + 3y_6 = v,$$
$$3x_1 + 6x_2 = v, \quad 3y_4 + 6y_6 = v,$$
$$x_2 = 1 - x_1, \quad y_6 = 1 - y_4.$$

Решением этих систем является:

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad y_4 = \frac{3}{4}, \quad y_6 = \frac{1}{4}, \quad v = \frac{15}{4} = 3{,}75 \text{ млн. руб.}$$

Использовать это решение сельскохозяйственное предприятие может следующим образом: на $\frac{3}{4}$ всей площади выращивать первую культуру, а на остальной выращивать вторую культуру, тогда прибыль будет в размере $v = 3{,}75$ млн. рублей.

Матричные игры порядка $m \times 2$ решаются также с помощью графического метода. Матрица выигрышей первого игрока в этом случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2)$ соответственно первого и второго игроков определяются аналогично, как в случае игр порядка $2 \times n$. Пусть по горизонтальной оси откладывается значение y_1 от 0 до 1, по вертикальной — значение среднего выигрыша $E_i(y_1)$ первого игрока при условиях, что первый игрок применяет свою чистую i-ю стратегию $(i = 1, 2, \ldots, m)$, второй — свою смешанную стратегию $(y_1, 1-y_1) = y$. Например, при $m = 4$ графически $E_i(y_1)$ могут быть представлены так, как изображено на рис. 2.4. Первый игрок старается максимизировать свой средний выигрыш, поэтому он стремится найти

$$\max_i E_i(y_1) = E(y_1),$$

где

$$E_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = (a_{i1} - a_{i2})\, y_1 + a_{i2}.$$

На рис. 2.4 функция $E(y_1)$ изображена жирной линией и представляет собой верхнюю границу множества ограничений. Второй игрок старается минимизировать $E(y_1)$ за счет выбора своей стратегии y_1, т. е. величина y_1 соответствует

$$\min_{y_1} E(y_1) = E(y_1^0) = v.$$

На рис. 2.4 значение $E(y_1^0)$ обозначено точкой E^0. Другими словами, определяются такие две стратегии i_0, i_1 первого игрока и вероятность y_1 для второго игрока, при которых достигается равенство

$$\min_{y_1} \max_i [(a_{i1} - a_{i2})\, y_1 + a_{i2}] = v,$$

или

$$a_{i_0 1}y_1 + a_{i_0 2}(1 - y_1) = v, \qquad (2.66)$$

$$a_{i_1 1}y_1 + a_{i_1 2}(1 - y_1) = v.$$

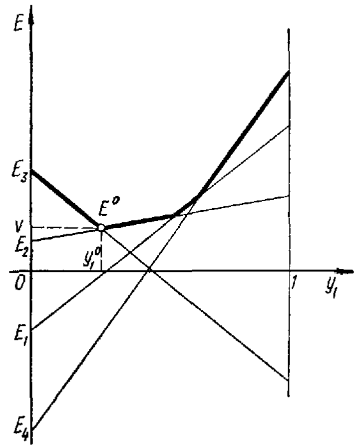

Рис. 2.4

Из рис. 2.4 видим, что $i_0 = 2$, $i_1 = 3$, цена игры v — это ордината точки E^0, вероятность y_1^0 — это абсцисса точки E^0. Для остальных чистых стратегий первого игрока в оптимальной смешанной стратегии должно

$$x_i = 0, \quad a_{i1}y_1 + a_i(1 - y_1) > v \qquad (i \neq i_0,\ i \neq i_1).$$

Таким образом, решая систему (2.66), получим оптимальную смешанную стратегию второго игрока $y = (y_1, y_2)$ и цену игры v. Оптимальную смешанную стратегию для первого игрока найдем, решая следующую систему уравнений:

$$a_{i_0 1}x_{i_0} + a_{i_1 1}(1 - x_{i_0}) = v,$$

$$a_{i_0 2}x_{i_0} + a_{i_1 2}(1 - x_{i_0}) = v,$$

$$x_{i_1} = 1 - x_{i_0}.$$

Если v известно из решения системы (2.66), то достаточно в последней системе решить только одно из уравнений для получения оптимальной смешанной стратегии первого игрока.

Пример 2.16. Выбор минеральных удобрений. Сельскохозяйственное предприятие должно выращивать определенную культуру, например картофель, на отведенном для этой цели участке земли. Урожайность картофеля зависит от количества внесенных удобрений и от состояния погоды. Рассматривается два возможных вида погоды:

1. Лето сухое.
2. Лето влажное.

Возможные варианты внесения удобрений следующие:

1. Количество удобрений на 1 га соответствует определенной норме.
2. Количество удобрений на 1 га больше этой нормы на 30%.
3. Количество удобрений на 1 га меньше этой нормы на 40%.

Будем считать сельскохозяйственное предприятие первым игроком, а природу вторым игроком. У первого игрока имеется три стратегии, соответствующие вариантам внесения удобрений. У второго игрока имеется две стратегии в соответствии с видом лета Будем считать, что цена реализации тонны картофеля не зависит от урожая и является постоянной. Тогда прибыль предприятия зависит от урожайности выращенного картофеля и затрат на его получение и реализацию. Предприятию необходимо определить оптимальное количество внесения удобрений на 1 га для получения наибольшей прибыли при возможном максимально неблагоприятном лете. С этой целью сельскохозяйственное предприятие произвело расчет прибыли в зависимости от возможных стратегий своих и природы. Получилась следующая матрица прибылей в млн. руб.:

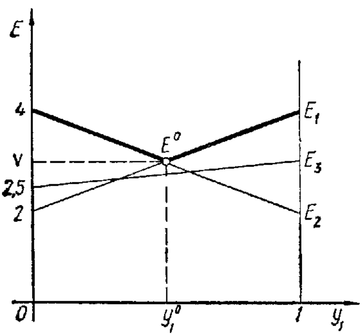

Рис. 2.5

$$A = \begin{pmatrix} 4{,}0 & 2{,}0 \\ 2{,}0 & 4{,}0 \\ 3{,}0 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Будем считать эти прибыли, как матрицу выигрышей первого игрока, и найдем решение такой игры порядка 3×2.

Очевидно, в этой игре седловой точки в чистых стратегиях нет. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2)$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков. Построим графическое изображение выигрышей первого игрока для каждой его чистой стратегии (рис. 2.5). Аналитические зависимости выражаются формулами:

$$E_1(y_1) = (4 - 2)\, y_1 + 2 = 2y_1 + 2,$$
$$E_2(y_1) = (2 - 4)\, y_1 + 4 = -2y_1 + 4,$$
$$E_3(y_1) = (3 - 2{,}5)\, y_1 + 2{,}5 = 0{,}5y_1 + 2{,}5.$$

Из рис. 2.5 видно, что точку E^0 образуют стратегии $i = 1$ и $i = 2$. Следовательно, $x_3 = 0$ и для определения y_1 и v надо составить уравнения, соответствующие этим стратегиям:

$$4y_1 + 2(1 - y_1) = v,$$
$$2y_1 + 4(1 - y_1) = v,$$
$$y_2 = 1 - y_1.$$

Решение этих уравнений:

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad v = 3.$$

Для определения x_1 и x_2 следует решить уравнение

$$4x_1 + 2x_2 = v, \quad v = 3,$$

или

$$4x_1 + 2(1 - x_1) = 3,$$

отсюда получим:

$$x_1 = 0{,}5, \quad x_2 = 0{,}5.$$

Этот результат можно использовать так: пусть норма внесения удобрений равна 1 в соответствии с 1-й стратегией предприятия, тогда, применяя 2-ю стратегию, предприятие должно внести 1,3 нормы удобрений на 1 га. Поскольку каждая из этих стратегий применяется с вероятностью 0,5, то оптимальный объем внесения удобрений составит среднее значение норм при этих стратегиях

$$1 \cdot 0{,}5 + 1{,}3 \cdot 0{,}5 = 1{,}15 \text{ нормы на 1 га.}$$

Тогда сельскохозяйственное предприятие получит прибыль $v = 3$ млн. руб.

2.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Рассмотрим удобные методы решения матричных игр с помощью сведения их к линейному программированию и приближенный итерационный метод.

Первый метод решения матричной игры с помощью линейного программирования. В этом методе предполагается, что цена игры положительная. Это условие не нарушает общности, так как согласно теореме 2.9 всегда можно подобрать такое число c, прибавление которого ко всем элементам матрицы выигрышей дает матрицу с положительными элементами и, следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии обоих игроков не изменятся.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$. Согласно следствию из теоремы 2.4 оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$ соответственно первого и второго игроков и цена игры v должны удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant v \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant v, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

Разделим все уравнения и неравенства в (2.67) и (2.68) на v (это можно сделать, так как мы предположили, что $v > 0$) и введем обозначения:

$$\frac{x_i}{v} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad \frac{y_j}{v} = q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда получим соответственно задачи (2.67) и (2.68) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geqslant 1, \quad p_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{v}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leqslant 1, \quad q_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения x_i и, следовательно, p_i, чтобы цена игры v была максимальной, то решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, при которых

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geqslant 1. \tag{2.69}$$

Поскольку второй игрок стремится найти такие значения y_j и, следовательно, q_j, чтобы цена игры v была наименьшей, то решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений q_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leqslant 1. \tag{2.70}$$

Формулы (2.69) и (2.70) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования, для решения которых имеются достаточно хорошие методы, например, симплекс-метод (см. [8]).

Решив эти задачи, получим значения p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, q_j $(j = 1, \ldots, n)$ и v. Тогда смешанные стратегии, т. е. значения x_i и y_j получаются по формулам:

$$\begin{aligned} x_i &= v p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ y_j &= v q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Второй метод сведения матричных игр к линейному программированию. В этом методе цена игры может быть произвольная.

Известно, что оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и цена игры с матрицей $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$ должны удовлетворять соотношениям (2.67) и (2.68). Введя дополнительные неотрицательные переменные (x_{m+j} для j-го неравенства $(j = 1, 2, \ldots, n)$ из (2.67) и y_{n+i} для i-го неравенства $(i = 1, 2, \ldots, m)$

из (2.68), получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - x_{m+j} = v \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\\&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\&x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+n)\end{aligned}\right\}, \tag{2.72}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} + y_{n+i} = v \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)\\&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1\\&y_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m)\end{aligned}\right\}. \tag{2.73}$$

Выделим в (2.72) первое равенство при $j = 1$ и вычтем его из всех остальных равенств для $j = 2, \ldots, n$, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - x_{m+1} = v, \tag{2.74}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - a_{i1})\, x_i - x_{m+j} + x_{m+1} = 0 \quad (j = 2,\ \ldots,\ n)\\&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\&x_i \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+n)\end{aligned}\right\}. \tag{2.75}$$

Поскольку первый игрок стремится максимизировать v за счет своих стратегий, то решение системы (2.74), (2.75) сводится к следующей задаче линейного программирования: найти максимум линейной формы (2.74) при линейных ограничениях (2.75).

Аналогично поступаем при решении системы (2.73): выделяем в (2.73) первое равенство при $i = 1$ и вычитаем его из всех равенств для $i = 2, \ldots, m$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j + y_{n+1} = v, \tag{2.76}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - a_{1j})\, y_j - y_{n+1} + y_{n+i} = 0 \quad (i = 2,\ \ldots,\ m)\\&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1\\&y_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m)\end{aligned}\right\}. \tag{2.77}$$

Поскольку второй игрок стремится минимизировать v за счет своих стратегий, то решение системы (2.76), (2.77) сводится к следующей задаче линейного программирования: найти минимум линейной формы (2.76) при линейных ограничениях (2.77).

Пример 2.17. Рассмотрим военную игру, изложенную в примере 2.3. Очевидно, матрица этой игры не имеет седловой точки в чистых стратегиях. Поскольку в матрице этой игры есть отрицательные элементы, воспользуемся вторым методом сведения к линейному программированию. Обозначим через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_5)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_4)$ оптимальные смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков, v — цена игры. Величины $x_6, x_7, x_8, x_9, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ — это дополнительные переменные, не входящие в смешанные стратегии игроков.

Чтобы найти x, y и v, надо определить максимум (2.74) при условиях (2.75) и минимум (2.76) при условиях (2.77). Запишем эти задачи линейного программирования:

1. $$4x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 - x_6 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5 - x_7 + x_6 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 - x_8 + x_6 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 - x_9 + x_6 = 0, \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 9). \end{gathered}$$

Решая эту задачу известными методами, получим

$$x_1 = \frac{4}{9}, \quad x_2 = \frac{4}{9}, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = \frac{1}{9}, \quad v = \frac{14}{9},$$

$$x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0.$$

2. $$4y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + y_4 + y_5 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} -4y_1 + 4y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 = 0, \\ -3y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_7 = 0, \\ -5y_1 + y_2 - 2y_3 + 2y_4 - y_5 + y_8 = 0, \\ -6y_1 - 2y_2 + 0 \cdot y_3 + y_4 - y_5 + y_9 = 0, \\ y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 9). \end{gathered}$$

Решая эту задачу известными методами, получим

$$y_1 = \frac{1}{18}, \quad y_2 = \frac{1}{18}, \quad y_3 = \frac{8}{18}, \quad y_4 = \frac{8}{18}, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = 0,$$

$$y_7 = \frac{4}{18}, \quad y_8 = \frac{4}{18}, \quad y_9 = 0.$$

Итак, решение игры следующее:

$$x = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, \frac{1}{9}\right), \quad y = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{8}{18}, \frac{8}{18}\right),$$

$$v = \frac{14}{9} \approx 1{,}5,$$

т. е. при оптимальных стратегиях полковник должен придерживаться в большей степени неравномерного разделения сил между позициями с вероятностью $\frac{4}{9}$, а генерал — наоборот, должен придерживаться в большей степени равномерного разделения между позициями с частотами $\frac{4}{9}$, тогда полковник получит выигрыш, оцениваемый примерно 1,5 единицами.

Пример 2.18. Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 4 объекта. Стратегии отраслей: i-я стратегия состоит в финансировании i-го объекта ($i = 1, 2, 3, 4$). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой ситуации величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли. Поэтому представленная игра может рассматриваться как матричная игра двух игроков с нулевой суммой.

Для решения этой игры первым методом к каждому элементу прибавим число 2 и получим следующую матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь задачу (2.69)

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \to \min,$$
$$2p_1 + p_2 + 2p_3 + 4p_4 \geqslant 1,$$
$$3p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 \geqslant 1,$$
$$p_1 + 5p_2 + 4p_3 + 2p_4 \geqslant 1,$$
$$4p_1 + 4p_2 + p_3 + 2p_4 \geqslant 1,$$
$$p_1 \geqslant 0, \quad p_2 \geqslant 0, \quad p_3 \geqslant 0, \quad p_4 \geqslant 0.$$

Решением этой задачи является:

$$p_1 = \frac{8}{69}, \quad p_2 = \frac{3}{69}, \quad p_3 = \frac{7}{69}, \quad p_4 = \frac{9}{69}.$$

Поскольку

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{v},$$

то

$$v = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{69}{27} = \frac{23}{9}.$$

Далее из формул (2.71) получаем

$$x_1 = vp_1 = \frac{23}{9} \cdot \frac{8}{69} = \frac{8}{27},$$

$$x_2 = vp_2 = \frac{23}{9} \; \frac{3}{69} = \frac{3}{27},$$

$$x_3 = vp_3 = \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{69} = \frac{7}{27},$$

$$x_4 = vp_4 = \frac{23}{69} \cdot \frac{9}{69} = \frac{9}{27}.$$

Составим теперь задачу (2.70)

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \to \max,$$
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leqslant 1,$$
$$q_1 + 2q_2 + 5q_3 + 4q_4 \leqslant 1,$$
$$2q_1 + 3q_2 + 4q_3 + q_4 \leqslant 1,$$
$$4q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 \leqslant 1,$$
$$q_1 \geqslant 0, \quad q_2 \geqslant 0, \quad q_3 \geqslant 0, \quad q_4 \geqslant 0.$$

Решением этой задачи является:

$$q_1 = \frac{5}{46}, \quad q_2 = \frac{7}{46}, \quad q_3 = \frac{3}{46}, \quad q_4 = \frac{3}{46},$$

из формулы (2.71) следует, что

$$y_1 = vq_1 = \frac{23}{9} \cdot \frac{5}{46} = \frac{5}{18},$$

$$y_2 = vq_2 = \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{46} = \frac{7}{18},$$

$$y_3 = vq_3 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18},$$

$$y_4 = vq_4 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18}.$$

Итак, оптимальные смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков

$$x = \left(\frac{8}{27}, \frac{3}{27}, \frac{7}{27}, \frac{9}{27}\right), \quad y = \left(\frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{3}{18}, \frac{3}{18}\right),$$

а цена исходной игры

$$v_1 = v - 2 = \frac{23}{9} - 2 = \frac{5}{9} \approx 0{,}5.$$

Полученные оптимальные стратегии игроки могут использовать так: первый игрок все свои капитальные вложения может распределить по объектам в долях, соответствующих вероятностям применения своих стратегий; второй — аналогично по отношению к своим капитальным вложениям — по долям вероятностей применения своих стратегий.

Метод последовательного приближения цены игры. При исследовании игровых ситуаций часто может случиться так, что нет необходимости в получении точного решения игры или в следствие каких-либо причин найти точное значение цены игры и оптимальных смешанных стратегий невозможно или очень трудно. Тогда можно воспользоваться приближенными методами решения матричной игры.

Опишем один из таких методов — метод последовательного приближения цены игры. Количество вычислений при использовании этого метода увеличивается примерно пропорционально числу строк и столбцов матрицы выигрышей. Сущность метода последовательного приближения цены состоит в следующем: мысленно игра проводится много раз, т. е. последовательно, в каждой партии игры каждый игрок выбирает ту стратегию, которая дает ему наибольший общий (суммарный) выигрыш. Другими словами, в мысленном проведении игры каждый игрок выбирает такую последовательность своих чистых стратегий, которая обеспечивает первому игроку максимальный средний выигрыш, а второму — минимальный средний проигрыш.

После такой реализации нескольких партий вычисляется среднее значение выигрыша первого игрока, проигрыша второго игрока, и их среднее арифметическое принимается за приближенное значение цены игры. Более того, этот метод дает возможность найти приближенное значение оптимальных смешанных стратегий обоих игроков: надо подсчитать частоту применения каждой чистой стратегии и принять ее за приближенное значение вероятности использования этой чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии соответствующего игрока.

Можно доказать, что с неограниченным увеличением числа проигранных партий (в вышеуказанном смысле) средний выигрыш первого игрока и средний проигрыш второго игрока будет неограниченно приближаться (стремиться) к цене игры, а приближенные значения смешанных стратегий в том случае, когда решение игры единственное, будет стремиться к оптимальным смешанным стратегиям каждого игрока. Вообще говоря, стремление приближенных значений вышеуказанных величин к истинным значениям происходит медленно. Однако этот процесс легко механизировать и тем самым помочь получению решения игры с требуемой степенью точности даже при матрицах выигрышей сравнительно большого порядка

Рассмотрим пример. Пусть игра задана следующей матрицей выигрышей:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Предположим, что второй игрок выбрал свою 1-ю стратегию, тогда первый получит:

0, если он применит свою 1-ю стратегию,

4, если он применит свою 2-ю стратегию,

2, если он применит свою 3-ю стратегию.

Полученные значения сведем в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер партии	Стратегия второго игрока	Выигрыш первого игрока при его стратегиях		
		1	2	3
1	1	0	4	2

Таблица 2.2

Номер партии	Стратегия первого игрока	Выигрыш второго игрока при его стратегиях		
		1	2	3
1	2	4	1	2

Из табл. 2.1 видно, что при 1-й стратегии второго игрока первый получит наибольший выигрыш 4, используя свою 2-ю стратегию. Поскольку первый игрок желает получить максимальный выигрыш, то он на 1-ю стратегию второго игрока отвечает своей 2-й стратегией. При 2-й стратегии первого игрока второй проиграет:

4, если применит свою 1-ю стратегию,

1, если применит свою 2-ю стратегию,

2, если применит свою 3-ю стратегию.

Полученные значения сведем в табл. 2.2.

Из табл. 2.2 видно, что при 2-й стратегии первого игрока второй игрок будет иметь наименьший проигрыш 1, если он применит свою 2-ю стратегию. Поскольку второй игрок желает проиграть как можно меньше, то в ответ на 2-ю стратегию первого игрока он применит свою 2-ю стратегию. Полученные результаты сведем в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Номер партии	Стратегия второго игрока	Выигрыш первого игрока при его стратегиях			Стратегия первого игрока	Выигрыш второго игрока при его стратегиях			u	w	v
		1	2	3		1	2	3			
1	2	0	4	2	2	4	1	2	4	1	$\frac{5}{2}$
2	2										

В табл. 2.3 в столбце стратегии второго игрока во второй строке находится цифра 2, которая указывает, что во второй партии второму игроку выгодно применять свою 2-ю стратегию; в столбце u находится наибольший средний выигрыш 4 первого игрока, полученный им в первой партии; в столбце w стоит наименьший средний проигрыш 1, полученный вторым игроком в первой партии; в столбце v находится среднее арифметическое $v = \frac{1}{2}(u + w) = \frac{5}{2}$, т. е. приближенное значение цены игры, полученное в результате проигрывания одной партии игры. Если второй игрок применит свою 2-ю стратегию, то первый получит 3, 1, 0 соответственно при своих 1-й, 2-й, 3-й стратегиях, а суммарный выигрыш первого игрока за обе партии составит:

$0 + 3 = 3$ при его 1-й стратегии,
$4 + 1 = 5$ при его 2-й стратегии,
$2 + 0 = 2$ при его 3-й стратегии.

Эти суммарные выигрыши записываются во второй строке табл. 2.3 и в столбцах, соответствующих стратегиям первого игрока: 1, 2, 3.

Из всех суммарных выигрышей наибольшим является 5. Он получается при 2-й стратегии первого игрока, следовательно, в этой партии он должен выбрать свою 2-ю стратегию.

При 2-й стратегии первого игрока второй проиграет 4, 1, 2 соответственно 1-й, 2-й, 3-й его стратегиям, а суммарный проигрыш второго игрока за обе партии составит:

$4 + 4 = 8$ при его 1-й стратегии,
$1 + 1 = 2$ при его 2-й стратегии,
$2 + 2 = 4$ при его 3-й стратегии.

Эти суммарные проигрыши записываются во второй строке табл. 2.3 и в столбцах, соответствующих 1-й, 2-й, 3-й стратегиям второго игрока.

Из всех суммарных проигрышей второго игрока наименьшим является 2. Он получается при его 2-й стратегии, следовательно, в третьей партии второй игрок должен применить свою 2-ю стратегию. В столбец u ставится наибольший суммарный выигрыш первого игрока за две партии, деленный на число партий, т. е. $\frac{5}{2}$; в столбец w ставится наименьший суммарный проигрыш второго игрока за две партии, деленный на число партий, т. е. $\frac{2}{2}$; в столбце v ставится среднее арифметическое этих значений, т. е. $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{7}{4}$. Это число $\frac{7}{4}$ принимается за приближенное значение цены игры при двух «сыгранных» партиях.

Таким образом, получаем следующую табл. 2.4 для двух партий игры.

Таблица 2.4

Номер партии	Стратегия второго игрока	Суммарный выигрыш первого игрока			Стратегия первого игрока	Суммарный выигрыш второго игрока			u	w	v
		1	2	3		1	2	3			
1	1	0	4	2	2	4	1	2	4	1	$\frac{5}{2}$
2	2	3	5	2	2	8	2	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{7}{4}$
3	2										

В третьей строке табл. 2.4 в столбце стратегии второго игрока находится число 2, которое показывает, что в третьей партии второй игрок должен применить свою 2-ю стратегию. В этом случае первый игрок выигрывает 3, 1, 0, используя соответственно свои 1-ю

2-ю, 3-ю стратегии, а его суммарный выигрыш за три партии составит:

$$3+3=6 \text{ при его 1-й стратегии,}$$
$$1+5=6 \text{ при его 2-й стратегии,}$$
$$0+2=2 \text{ при его 3-й стратегии.}$$

Эти суммарные выигрыши первого игрока записываются в третьей строке табл. 2.4 и столбцах, соответствующих его стратегиям 1, 2, 3. Так как наибольший суммарный выигрыш первого игрока получается при 1-й и 2-й стратегиях, то ему можно выбирать любую из них; скажем, в таких случаях, когда имеются два (или несколько) одинаковых суммарных выигрышей, выбирают стратегию с наименьшим номером (в нашем случае надо взять 1-ю стратегию).

При первой своей стратегии второй игрок проигрывает 0, 4, 2, при использовании первым игроком соответственно 1-й , 2-й, 3-й стратегии. Тогда суммарный проигрыш второго игрока за три партии составит:

$$0+8=8 \text{ при его 1-й стратегии,}$$
$$4+2=6 \text{ при его 2-й стратегии,}$$
$$2+4=6 \text{ при его 3-й стратегии.}$$

Эти суммарные проигрыши второго игрока записываются в третьей строке табл. 2.4 и столбцах, соответствующих стратегиям второго игрока: 1, 2, 3. Из всех суммарных его проигрышей 6 является наименьшим и получается при его 2-й и 3-й стратегиях. В этом случае условимся выбирать стратегию с меньшим номером, а именно: второму игроку надо применить свою 2-ю стратегию.

В табл. 2.4 в третьей строке в столбце u записывается наибольший суммарный выигрыш первого игрока за три партии, деленный на число партий, т. е. $\frac{6}{3}$; в столбце w ставится наименьший суммарный проигрыш второго игрока за три партии, деленный на число партий, т. е. $\frac{6}{3}$; в столбце v ставится их среднее арифметическое

$$v=\frac{u+w}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{3}+\frac{6}{3}\right)=2.$$

Таким образом получаем табл. 2.5 для трех партий.

Продолжая этот процесс далее, составим табл. 2.6 партии от четвертой до тридцатой.

Из табл. 2.5 и 2.6 видно, что в 30-ти проигранных партиях стратегии 1, 2, 3 для первого игрока встречаются соответственно 3, 12, 15 раз, следовательно, их относительные частоты соответственно равны $\frac{3}{30}, \frac{12}{30}, \frac{15}{30}$ $\left(\text{истинные вероятности } \frac{2}{30}, \frac{12}{30}, \frac{16}{30}\right)$; стратегии 1, 2, 3 для второго игрока встречаются соответственно 15, 11, 4 раза, следовательно их относительные частоты соответственно равны $\frac{15}{30}, \frac{11}{30}, \frac{4}{30}$ $\left(\text{истинные вероятности } \frac{14}{30}, \frac{10}{30}, \frac{6}{30}\right)$; приближенное значение цены игры $\frac{102}{60}=\frac{51}{30}$ $\left(\text{истинное } \frac{52}{30}\right)$.

Таблица 2.5

Номер партии	Стратегия второго игрока	Суммарный выигрыш первого игрока			Стратегия первого игрока	Суммарный выигрыш второго игрока			u	w	v
		1	2	3		1	2	3			
1	1	0	4	2	2	4	1	2	4	1	$\frac{5}{2}$
2	2	3	5	2	2	8	2	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{7}{2}$
3	2	6	6	2	1	8	6	6	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{3}$	2
4	2										

Такое приближение достаточно хорошее.

Продолжая этот процесс далее, можно получить приближения цены игры и оптимальных смешанных стратегий обоих игроков сколь угодно близкими к истинным.

Таблица 2.6

Номер партии	Стратегия второго игрока	Суммарный выигрыш первого игрока			Стратегия первого игрока	Суммарный выигрыш второго игрока			u	w	v
		1	2	3		1	2	3			
4	2	9	7	2	1	8	9	7	9/4	7/4	2
5	3	10	9	5	1	8	12	8	10/5	8/5	18/10
6	1	10	13	7	2	12	13	10	13/6	10/6	23/12
7	3	11	15	10	2	16	14	12	15/7	12/7	27/14
8	3	13	15	13	2	20	15	14	15/8	14/8	29/16
9	3	14	17	16	2	24	16	16	17/9	16/9	33/18
10	2	17	18	16	2	28	17	18	18/10	17/10	35/20
11	2	20	19	16	1	28	20	19	20/11	19/11	39/22
12	3	21	21	19	1	28	23	20	21/12	20/12	41/24
13	3	21	23	22	2	32	24	22	23/13	22/13	45/26
14	3	22	25	25	2	36	25	24	25/14	24/14	49/28
15	3	23	27	28	3	38	25	27	28/15	25/15	53/30
16	2	26	28	28	2	42	26	29	28/16	26/16	54/32
17	2	29	29	28	1	42	29	30	29/17	29/17	58/34
18	2	32	30	28	1	42	32	31	32/18	31/18	63/36
19	3	33	32	31	1	42	35	32	33/19	32/19	65/38
20	3	34	34	34	1	42	38	33	34/20	33/20	67/40
21	3	35	36	37	3	44	38	36	37/21	36/21	73/42
22	3	36	38	40	3	46	38	39	40/22	38/22	78/44
23	2	39	39	40	3	48	38	42	40/23	38/23	78/46
24	2	42	40	40	1	48	41	43	42/24	41/24	83/48
25	2	45	41	40	1	48	44	44	45/25	44/25	89/50
26	2	48	42	40	1	48	47	45	48/26	45/26	93/52
27	3	49	44	43	1	48	50	45	49/27	46/27	95/54
28	3	50	46	46	1	48	53	47	50/28	47/28	97/56
29	3	51	48	49	1	48	56	48	51/29	48/29	99/58
30	1	51	52	51	2	52	57	50	52/30	50/30	102/60

В заключение отметим, что, если игра имеет больше одного решения, то приближенные значения цены игры по-прежнему будут неограниченно приближаться к истинной цене игры, а относительные частоты появления стратегий игроков уже не обязательно будут приближаться к истинным оптимальным смешанным стратегиям игроков.

Контрольные вопросы и задания к главе 2

1. Что такое матричная игра двух игроков с нулевой суммой?

2. Что такое чистые нижняя и верхняя цены игры и какие соотношения между ними?

3. Что такое седловая точка в чистых стратегиях и как она определяется?

4. Что называется седловой точкой для вещественной функции двух переменных?

5. Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентиости поиятий седловой точки и равенства $\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$.

6. Что называется смешанными стратегиями игроков?

7. Что такое средний выигрыш игрока?

8. Что называется оптимальиыми смешанными стратегиями и ценой игры?

9. Сформулируйте и докажите лемму об опорной гиперплоскости.

10. Сформулируйте и докажите лемму о справедливости одной из двух альтернатив.

11. Сформулируйте и докажите основную теорему матричиых игр о существовании решеиия игры.

12. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии оптимальности смешанных стратегий.

13. Напишите линейные неравенства, которым должны удовлетворять оптимальные смешанные стратегии игроков.

14. Сформулируйте и докажите теорему об условиях равенства нулю некоторых компонент оптимальных смешанных стратегий.

15. Какая игра называется симметричной?

16. Сформулируйте и докажите теорему о структуре решеиия симметричиой игры.

17. Дайте определения доминирования стратегий.

18. Сформулируйте и докажите теорему о структуре решения матричной игры, в которой имеется доминироваиие стратегий первого игрока.

19. Сформулируйте теорему о структуре решения матричной игры, имеющей доминирование среди стратегий второго игрока.

20. Сформулируйте и докажите теорему о структуре решения матричных игр, матрицы которых отличаются постояиным множителем и слагаемым.

21. Выведите формулы, по которым находится решение матричной игры порядка 2×2.

22. Опишите метод решения игр порядка $2 \times n$.

23. Опишите метод решения игр порядка $m \times 2$.

24. Опишите первый метод сведения матричной игры к задаче линейного программирования.

25. Опишите второй метод сведения решения матричной игры к задаче линейного программирования.

26. В чем состоит метод приближениого решения игры и к каким играм он применим?

27. Найти нижнюю чистую цену игры, верхнюю чистую цену игры, определить седловые точки, оптимальные чистые стратегии и чистую цену игры, если они существуют:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$д)\ \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad е)\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad ж)\ \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & -4\\ 1 & -2 & -1 & 3\\ 4 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix},$$

$$з)\ \begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & -1\\ 7 & 1 & -5 & 2\\ -8 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad и)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 7\\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2\\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

28. Найти решение следующих матричных игр:

$$а)\ \begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad б)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix},\quad в)\ \begin{pmatrix}-4 & 9\\ 5 & -6\end{pmatrix},\quad г)\ \begin{pmatrix}-3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad д)\ \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},$$

$$е)\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}.$$

29. Найти решения следующих игр:

$$а)\ \begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 8\end{pmatrix},\quad б)\ \begin{pmatrix}0 & -3 & -4 & 1\\ -1 & -5 & -4 & 0\end{pmatrix},\quad в)\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\\ 8 & 10\end{pmatrix},\quad г)\ \begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$д)\ \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad е)\ \begin{pmatrix}8 & 0 & 6 & 7\\ 3 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

30. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right),\quad y=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\quad v=0{,}4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

31. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x=\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4}\right),\quad y=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\quad v=4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix}14 & -4 & 2\\ -4 & 8 & 8\\ 4 & 4 & 4\\ 2 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

32. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x=\left(\frac{10}{42},\ \frac{9}{42},\ \frac{23}{42},\ 0,\ 0,\ 0\right),$$

$$y=\left(0,\ 0,\ \frac{5}{14},\ \frac{8}{14},\ 0,\ \frac{1}{14},\ 0\right),\quad v=\frac{13}{14}$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

33. Составить задачу линейного программирования для следующих игр:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ -6 & -3 & 0 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & -17 & -34 \\ -2 & -15 & -35 \\ -20 & -22 & -24 \\ -3 & -15 & -35 \\ -40 & -27 & -14 \end{pmatrix}$.

34. Составить матрицу выигрышей для следующей ситуации и решить ее как матричную игру.

Два военных подразделения с целью разведки определенного района могут одновременно выслать либо танк, либо бойцов с противотанковым оружием, либо бойцов-пулеметчиков. Если в этом районе встретятся боевые единицы одинаковых видов, то разведка не состоится, и каждая из сторон ничего не получает. Далее, при встрече разных подразделений: танк побеждает бойцов-пулеметчиков, бойцы-пулеметчики побеждают бойцов с противотанковым оружием, бойцы с противотанковым оружием побеждают танк. Выигрыш оценивается единицей.

ГЛАВА 3. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

3.1. ПОНЯТИЕ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЫ И ЕЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Естественным расширением матричной игры двух игроков с нулевой суммой является *позиционная игра*, в которой может принимать участие более двух (конечное число) игроков, каждый из них может последовательно делать конечное число ходов, некоторые ходы могут быть случайными, а сведения о них могут меняться от хода к ходу. Такие игры могут быть формализованы, определенным образом преобразованы в игру, эквивалентную некоторой матричной игре двух игроков с нулевой суммой. Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией*, а полученная матричная игра — игрой в нормальной форме.

Рассмотрим сначала пример, иллюстрирующий этот процесс.

Пример 3.1. Игра состоит из трех ходов, которые делают два игрока. Первый ход делает первый игрок: он выбирает число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

Второй ход делает второй игрок: зная, какое число x выбрано первым игроком в первом ходе, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

Третий ход делает первый игрок: зная, какое число y выбрал второй игрок, и помня, какое число x он выбрал при первом ходе, выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$. На этом игра заканчивается и происходит распределение выигрышей, второй игрок платит первому сумму, определенную функцией $M(x, y, z)$, где M задана следующим образом:

$$\begin{array}{ll} M(1, 1, 1) = -2 & M(2, 1, 1) = 5 \\ M(1, 1, 2) = -1 & M(2, 1, 2) = 2 \\ M(1, 2, 1) = 3 & M(2, 2, 1) = 2 \\ M(1, 2, 2) = -4 & M(2, 2, 2) = 6 \end{array}$$

Для сведения этой позиционной игры к нормальной форме воспользуемся понятием стратегии игрока, как набора правил и указаний, как надо поступать ему во всех мыслимых ситуациях или при любом мыслимом состоянии информации, получаемой в любой момент игры. Рассмотрим сначала мыслимые стратегии второго игрока. Ясно, что у него имеется возможность выбора одного из двух чисел 1 или 2, т. е. имеется две возможности. Кроме того, у него есть информация о выбранном числе x при первом ходе, следовательно, он, выбирая число y, может учитывать или не учитывать эту информацию, поэтому для каждого y имеется еще два значения x, т. е. всего четыре стратегии:

1-я — выбирать $y = 1$, не взирая на x,

2-я — выбирать $y = 2$, не взирая на x,

3-я — выбирать $y = x$,

4-я — выбирать $y = 1$, если $x = 2$, и выбирать $y = 2$, если $x = 1$.

Другими словами, у второго игрока столько стратегий, сколько имеется способов отображения множества $\{1, 2\}$ в себя.

Стратегия для первого игрока должна учитывать результаты сделанных ранее выборов. При каждом выборе на первом ходе может быть два выбора на втором ходе, т. е. уже имеется четыре варианта, а при каждом из этих вариантов может быть сделано два выбора, т. е. всего 8 возможных стратегий. Обозначим через (i, i_1, i_2) стратегию первого игрока: где i означает выбор первым игроком на первом ходе; i_1 — выбор первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число 1; i_2 — выбор первым игроком на третьем ходе, если второй на втором ходе выбрал число 2.

Например, (1, 2, 1) означает следующую стратегию первого игрока: на первом ходе он выбирает число 1 (первая цифра в скобках), а на третьем ходе он выбирает число 2, стоящее на втором месте в скобках, если второй игрок на втором ходе выбрал число 1; если же второй игрок на втором ходе выбрал число 2, то первый игрок на третьем ходе должен выбрать число 1, стоящее на третьем месте в скобках.

Выигрыши первого игрока определяются так: пусть, например, первый игрок применяет стратегию (1, 2, 1), а второй — первую стратегию, тогда из (1, 2, 1) следует, что $x = 1$, далее, второй игрок, не взирая на x, выбирает $y = 1$, а из (1, 2, 1) следует, что первый игрок

Таблица 3.1

	1	2	3	4
1, 1, 1	1, 1, 1 = —2	1, 2, 1 = 3	1, 1, 1 = —2	1, 2, 1 = 3
1, 1, 2	1, 1, 1 = —2	1, 2, 2 = —4	1, 1, 1 = —2	1, 2, 2 = —4
1, 2, 1	1, 1, 2 = —1	1, 2, 1 = 3	1, 1, 2 = —1	1, 2, 1 = 3
1, 2, 2	1, 1, 2 = —1	1, 2, 2 = —4	1, 1, 2 = —1	1, 2, 2 = —4
2, 1, 1	2, 1, 1 = 5	2, 2, 1 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 1, 1 = 5
2, 1, 2	2, 1, 1 = 5	2, 2, 2 = 6	2, 2, 2 = 6	2, 1, 1 = 5
2, 2, 1	2, 1, 2 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 2, 1 = 2	2, 1, 2 = 2
2, 2, 2	2, 1, 2 = 2	2, 2, 2 = 6	2, 2, 2 = 6	2, 1, 2 = 2

выдаст $z = 2$. Получим выигрыш $M(x, y, z) = M(1, 1, 2) = -1$. Аналогично рассчитываются остальные выигрыши.

Теперь приведем матрицу выигрышей первого игрока в зависимости от применяемых стратегий (табл. 3.1), где столбцы соответствуют стратегиям второго игрока, а строки — стратегиям первого игрока. Другими словами, составляем матрицу выигрышей первого игрока (табл. 3.1) в матричной игре двух игроков с нулевой суммой. Исследуя эту игру обычными способами, приходим к решению: имеется две седловые точки, отмеченные звездочкой в табл. 3.2.

Таблица 3.2

—2	3	—2	4
—2	—4	—2	—4
—1	3	—1	3
—1	—4	—1	—4
5	2	2	5
5*	6	6	5*
2	2	2	2
2	6	6	2

Оптимальная стратегия первого игрока (2, 1, 2) состоит в выборе числа $x = 2$ на первом ходе и числа z — на третьем ходе, равного числу y, выбранного вторым игроком на втором ходе. У второго игрока имеется две оптимальные стратегии: первая и четвертая, т. е. выбирать число $y = 1$, не взирая на x, или выбирать y, отличное от x. Цена игры равна 5. Рассмотрим некоторую интерпретацию этой игры. Например, имеются две страны, которые хотят установить между собой деловые связи. Они должны решить вопрос о строительстве автомобильного завода. Первая страна может построить завод для второй страны. Эту ситуацию упрощенно представим в виде следующей позиционной игры.

Ход 1. Первая страна (первый игрок) делает выбор из двух альтернатив: 1-я — предложить второй стране построить завод для производства легковых автомобилей, 2-я — построить завод для производства грузовых автомобилей.

Ход 2. Вторая страна (второй игрок), зная, какую альтернативу выбрала первая страна на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив: 1-я — строить завод легковых автомобилей и предложить это первой стране, 2-я — строить завод грузовых автомобилей и предложить это первой стране.

Ход 3. Первая страна, зная выбор второй страны на втором ходу и помня свой выбор на первом ходу, делает выбор из двух альтернатив: 1-я — согласиться с предложением второй страны, 2-я —

не согласиться с ним. После того, как сделаны все три хода, первая страна получает сумму $M(x, y, z)$, где x выбор 1 или 2 на первом ходу, y — выбор 1 или 2 на втором ходу, z — выбор 1 или 2 на третьем ходу. Функция $M(x, y, z)$ совпадает с функцией, определенной в игре примера 3.1.

3.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЫ

В исследовании позиционной игры большую пользу приносит наглядное графическое изображение конкретной позиционной игры в виде так называемого дерева игры.

Деревом позиционной игры называется плоская фигура, состоящая из узлов и конечного числа направленных вверх прямолинейных отрезков, соединяющих эти узлы, каждый узел обозначается цифрой, соответствующей номеру игрока, делающего ход, и изображает ход этого игрока, поэтому каждому ходу соответствует набор узлов, расположенных на одном определенном уровне. На самом низшем уровне имеется только один узел — основание дерева, каждый узел соединяется только с одним узлом на низшем уровне, каждый прямолинейный отрезок означает выбор, сделанный игроком на данном ходе, и обозначается номером, соответствующим сделанному выбору. Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом, то обычно узлу, соответствующему данному ходу, присваивается номер 0 (нуль). Вершинами дерева являются окончания прямолинейных отрезков, исходящих из узлов последнего уровня. Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из прямолинейных отрезков дерева, которая начинается в самом нижнем узле и идет вверх последовательно через соответствующие узлы до вершины дерева. Каждая ветвь дерева отображает партию игры. Для изображения необходимых сведений о сделанных выборах при определенных ходах игроков на дереве игры отмечают пунктиром так называемые информационные множества узлов определенного игрока. В каждое информационное множество входят только неразличимые для игрока узлы, т. е. только те узлы, для каждой пары из которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Так, графическое представление позиционной игры, изложенной в примере 3.1, приведено на рис. 3.1. Поскольку первый ход делает первый игрок, то самый нижний узел соответствует ходу первого игрока и обозначен цифрой 1. Из этого узла исходят два отрезка (ветви), соответствующие выбору 1 или 2, которые обозначены соответственно цифрами 1 и 2. Второй ход делает второй игрок, поэтому узлы второго уровня обозначены цифрой 2. Поскольку второму игроку известен выбор первого игрока на первом ходе, то он, делая свой ход, знает, в каком месте дерева (на какой ветви дерева) находится. Если первый игрок на первом ходе выбрал число 1, то второй игрок находится на левой ветви дерева, если же первый игрок на первом ходе выбрал число 2, второй находится на правой ветви дерева. Таким образом, левый узел с цифрой 2 образует отдельное информационное множество. Аналогично и правый узел с цифрой 2 также образует информационное множество. Поскольку третий ход делает первый игрок, то третий уровень узлов обозначен цифрой 1. Первый игрок, делая третий ход, помнит о своем выборе на первом ходе, и поэтому он знает, на какой ветви дерева находится второй игрок, делая второй ход.

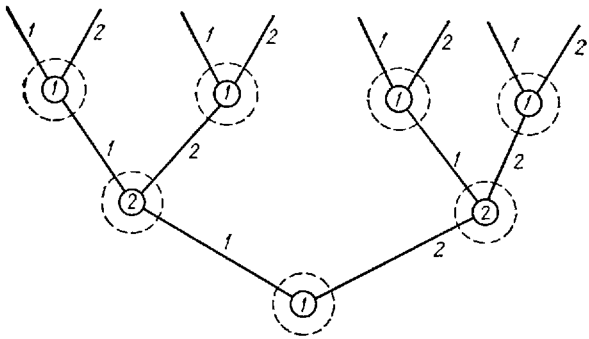

Рис. 3.1

Далее, так как первому игроку известен выбор второго игрока, то он точно знает, в каком месте дерева сам находится, делая выбор на третьем ходе. Поэтому каждый узел третьего уровня образует отдельное информационное множество.

Каждая партия игры представляется на дереве в виде отдельной ветви, которая идет от самого нижнего узла через один узел каждого

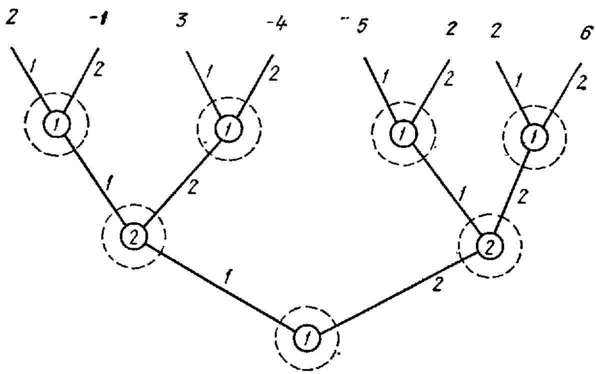

Рис. 3.2

уровня и заканчивается одной верхней точкой. Всего может быть восемь возможных партий (по количеству самых верхних точек). Любая партия игры характеризуется точкой, координата которой соответствует выбору определенного игрока. Всего может быть 8 точек (1, 1, 1), (1, 1, 2) (1, 2, 1), (1, 2, 2) (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2). Каждой точке соответствует выигрыш первого игрока согласно функции M (x, y, z). Часто над каждой верхней точкой проставляют выигрыш первого игрока в соответствующей партии. Так, для рассматриваемой игры получим рис. 3.2.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3.2. Первый ход делает первый игрок: он выбирает число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

Второй ход делает второй игрок: зная, какое число x выбрал первый на первом ходе, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$.

Третий ход делает первый игрок: не зная о выборе y на втором ходе и забыв, какое число x выбрано на первом ходе, он выбирает

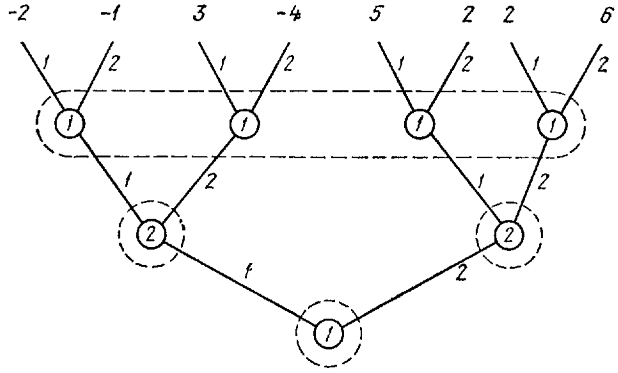

Рис. 3.3

число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$. После этого первый игрок получает выигрыш $M(x, y, z)$ за счет второго игрока, причем функция $M(x, y, z)$ определена в примере 3.1.

Эта игра отличается от игры в примере 3.1 лишь тем, что первый игрок на третьем ходе не знает выборов, сделанных на двух предыдущих ходах. В этом случае первого игрока можно представить в виде двух лиц, находящихся в двух изолированных комнатах и не имеющих возможности обмениваться информацией; первый ход делает первое лицо, а третий — второе. При графическом представлении игры эти обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходе не знает, в каком из узлов третьего уровня он находится, поэтому все четыре узла третьего уровня образуют информационное множество. Графическое представление этой игры изображено на рис. 3.3.

Приведем теперь эту игру к нормальной форме. Очевидно, у второго игрока имеются четыре таких же стратегии, как и в примере 3.1. У первого игрока возможности уменьшаются за счет недостатка информации, а именно: поскольку он на третьем ходе не знает предыдущих выборов, то его стратегия состоит из пары чисел (x, z), т. е. выбирать $x = 1$ или 2 на первом ходе и выбирать $z = 1$ или 2 на третьем ходе. Итак, у первого игрока имеется четыре стратегии: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2). Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 3.3. Пусть, например, первый игрок применяет свою стратегию (1, 2), а второй — свою 2-ю стратегию. Тогда первый игрок выбирает $x = 1$ и $z = 2$, а второй $y = 2$ независимо от x. Следовательно, выигрыш первого игрока составит $M(1, 2, 2) = 4$ и находится в табл. 3.3 на пересечении второй строки и второго столбца. Полученная матрица не имеет седловой точки. Решая игру известными методами, находим: $\left(0, 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{4}, 0, 0\right)$ — оптимальные смешанные стратегии соответственно первого и второго игрока, цена игры — $v = \frac{26}{7}$. Как видим, потеря информации уменьшает цену игры.

Заметим, что сокращение объема знаний для первого игрока о сделанных выборах привело к уменьшению количества его возможных

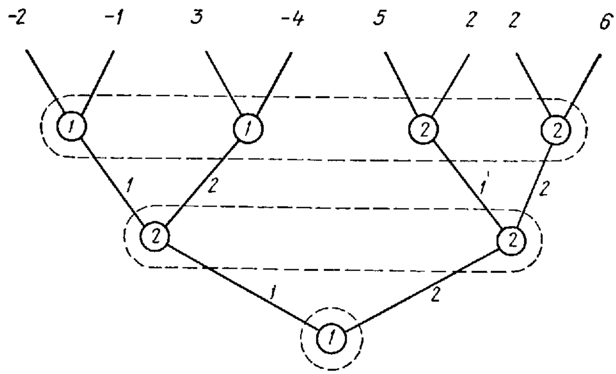

Рис. 3.4

стратегий, и, следовательно, к уменьшению размеров матрицы выигрышей.

Пример 3.3. Первый ход делает первый игрок, выбирая число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$. Второй ход делает второй игрок, он выбирает число y из множества чисел $\{1, 2\}$, не зная значения x. На третьем ходе первый игрок выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$, не зная значений ни x, ни y.

После этого второй игрок платит первому сумму, равную $M(x, y, z)$ аналогично, как в примере 3.1.

Поскольку второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходе, то, выполняя свой ход, он не знает точно, в каком узле находится. Поэтому узлы второго уровня образуют информационное множество. Аналогично для первого игрока на третьем ходе. Графическое представление этой игры изображено на рис. 3.4. Стратегии у первого игрока такие же, как и в примере 3.2, т. е. пары чисел (x, z).

У второго игрока всего две стратегии: 1-я — выбирать число 1 и 2-я — выбирать число 2. Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 3.4. Цена этой игры равна $v = \frac{26}{7}$. Оптимальные смешанные стратегии для первого и второго игроков соответственно равны $\left(0, 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Очевидно, цена этой игры и игры примера 3.2 совпадают, т. е. отсутствие информации у второго игрока о выборе, сделанном первым игроком на первом ходе, не дало преимущества первому игроку. Это простая случайность, которая вызвана структурой функции выигрышей.

Пример 3.4. В игре участвуют два игрока. Первый игрок — один человек, второй — команда из двух человек A и B. Эти три человека находятся в разных комнатах и не могут обмениваться информацией. Сначала судья входит в комнату первого игрока и предлагает ему выбрать число x из множества двух чисел $\{1, 2\}$. Если первый игрок выбрал $x = 1$, то судья идет в комнату к A и предлагает ему выбрать число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$. Если первый игрок выбирает $x = 2$, то судья предлагает B выбирать число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$. После выбора y судья идет в комнату, в которой находится другой член команды второго игрока, и предлагает ему выбрать число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$. После выбора всех трех чисел x, y, z второй игрок платит первому сумму $M(x, y, z)$, определенную следующим образом:

Таблица 3.3

	1	2	3	4
(1,1)	—2	3	—2	3
(1,2)	—1	—4	—1	—4
(2,1)	5	2	2	5
(2,2)	2	6	6	2

Таблица 3.4

	1	2
(1,1)	—2	3
(1,2)	—1	—4
(2,1)	5	2
(2,2)	2	6

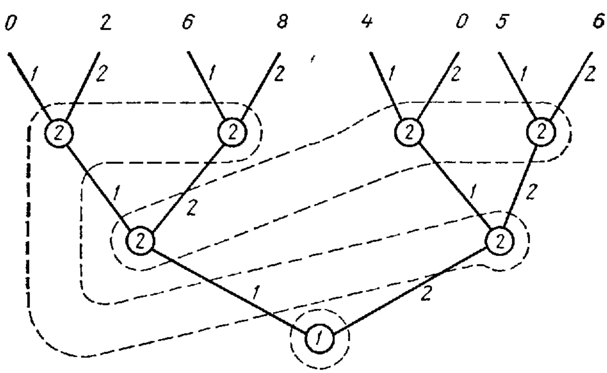

Рис. 3.5

$M(1, 1, 1) = 0$, $M(1, 1, 2) = 2$, $M(1, 2, 1) = 6$, $M(1, 2, 2) = 8$,
$M(2, 1, 1) = 4$, $M(2, 1, 2) = 0$, $M(2, 2, 1) = 5$, $M(2, 2, 2) = 6$.

Графическое представление этой игры изображено на рис. 3.5. Информационные множества для второго игрока охватывают второй и третий уровень, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход. Так как первому ходу первого игрока ничто не предшествует, то он имеет две стратегии: 1-я — выбирать число 1 и 2-я — выбирать число 2.

У второго игрока имеется четыре стратегии: 1-я — A и B выбирают число 1; 2-я — A выбирает число 1, а B — число 2; 3-я — A выбирает 2, а B — число 1; 4-я — A и B выбирают число 2. Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 3.5.

Таблица 3.5

	1	2	3	4
1	0	2	6	8
2	4	5	0	6

Таблица 3.6

	1	2	3	4
1	1,5	1,5	0,5	0,5
2	0	2	0,5	2,5
3	4	0,5	2,5	—1
4	2,5	1	2,5	1

Рассмотрим, например, как вычисляется выигрыш первого игрока, если он применяет свою первую стратегию, а второй игрок — третью стратегию. Тогда первый игрок выбирает число $x = 1$, судья идет к A, который выбирает $y = 2$, а затем к B, который выбирает $z = 1$, т. е. $M(x, y, z) = M(1, 2, 1) = 6$. Решение игры следующее: $\left(\frac{2}{5},\right.$

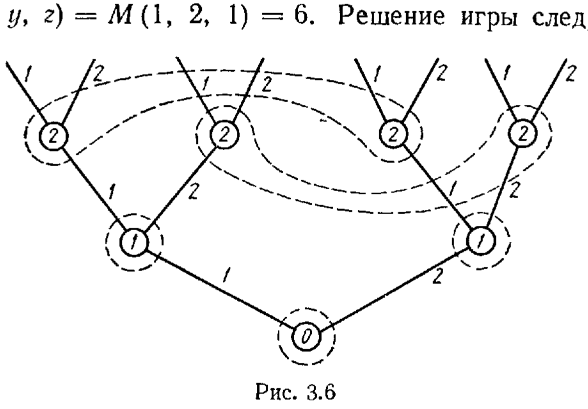

Рис. 3.6

$\left.\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0\right)$ — оптимальные смешанные стратегии соответственно для первого и второго игроков, цена игры — $v = \frac{12}{5}$.

Пример 3.5. Первый ход производится случайно: выбирается число x, равное 1 с вероятностью 0,5, равное 2 с такой же вероятностью. Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x выбрано, он выбирает число y из множества двух чисел $\{1, 2\}$. Третий ход делает второй игрок, не зная x, но зная y, он выбирает число z из множеста двух чисел $\{1, 2\}$. После этого второй игрок платит первому сумму, равную $M(x, y, z)$, где M — функция, определенная в примере 3.1.

Графически игра представлена на рис. 3.6. Нижний узел обозначен нулем, так как первый ход случайный. По аналогии этот узел также считается образующим информационное множество, и поэтому он окружен пунктиром.

Стратегии первого игрока такие:

1-я — выбирать $y = 1$ независимо от выбора x,

2-я — выбирать $y = x$,

3-я — выбирать $y = 1$, если $x = 2$, и $y = 2$, если $x = 1$,

4-я — выбирать $y = 2$ независимо от x.

Стратегии второго игрока аналогичны:

1-я — выбирать $z = 1$ независимо от y,

2-я — выбирать $z = y$,

3-я — выбирать $z = 1$, если $y = 2$, и $z = 2$, если $y = 1$,

4-я — выбирать $z = 2$ независимо от y.

Покажем, как составлять выигрыш первого игрока. Пусть, например, первый игрок применяет свою 3-ю стратегию, а второй — 2-ю. Тогда различаются два случая: а) $x = 1$, б) $x = 2$. Если $x = 1$, третья стратегия указывает первому игроку выбрать $y = 2$, а вторая стратегия второго игрока указывает выбор $z = 2$, и, таким образом, $M(x, y, z) = M(1, 2, 2) = -4$. Если $x = 2$, то первый игрок должен выбрать $y = 1$, а второй — $z = 1$, таким образом, $M(x, y, z) = M(2, 1, 1) = 5$. Поскольку случаи а) и б) появляются случайно с вероятностями 0,5, то и вышеуказанные выигрыши также появляются с этими же вероятностями, и, следовательно, средний выигрыш первого игрока при таких стратегиях будет

$$-4 \times 0{,}5 + 5 \times 0{,}5 = 0{,}5.$$

Аналогично рассчитываются остальные выигрыши. Матрица выигрышей первого игрока представлена в табл. 3.6.

Пример 3.6. Первый ход выполняет случайный механизм: выбирается x, равное 1 с вероятностью $\frac{1}{3}$, и $x = 2$ с вероятностью $\frac{2}{3}$. Если $x = 1$, то на втором ходу первый игрок, зная x, выбирает число y из множества трех чисел $\{1, 2, 3\}$. Если $x = 2$, то на втором ходу второй игрок, зная x, выбирает число y из множества трех чисел $\{1, 2, 3\}$. Если $y = 1$, то на третьем ходу третий игрок, зная y, но не зная x, выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$. Если $y \neq 1$, то на третьем ходу четвертый игрок, зная x и зная, было ли выбрано $y = 1$ или $y \neq 1$, выбирает число z из множества двух чисел $\{1, 2\}$. После выбора чисел x, y, z первый, второй, третий и четвертый игроки получают соответственно суммы $M_1(x, y, z)$, $M_2(x, y, z)$, $M_3(x, y, z)$, $M_4(x, y, z)$. Графическое представление игры приведено на рис. 3.7. Стратегии первого игрока следующие: 1-я — выбрать число 1, 2-я — выбрать число 2, 3-я — выбрать число 3. Точно такие стратегии у второго игрока. Стратегии третьего игрока следующие: 1-я — выбрать число 1 и 2-я — выбрать число 2. Стратегии четвертого игрока следующие: 1-я — выбирать $z = 1$ независимо от x, 2-я — выбирать $z = x$, 3-я — выбирать $z = 2$, если $x = 1$, и $z = 1$, если $x = 2$, 4-я — выбирать $z = 2$ независимо от x.

Для того чтобы понять, как получить элементы матриц выигрышей игроков, рассмотрим один вариант применения стратегии: пусть первый игрок применяет свою 1-ю стратегию, второй игрок — свою 3-ю стратегию, третий игрок — свою 2-ю стратегию, четвертый игрок — свою 3-ю стратегию.

Пусть сначала $x = 1$, тогда второй ход делает первый игрок и выбирает $y = 1$; третий ход делает третий игрок — выбирает $z = 2$, и,

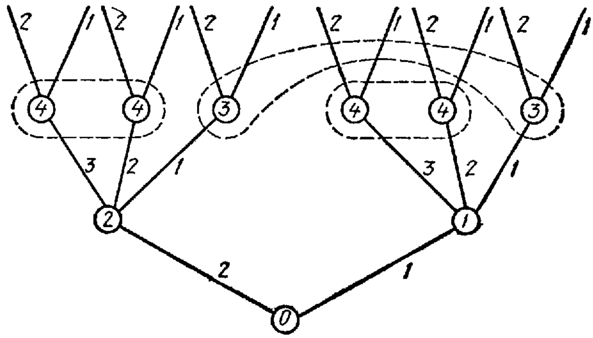

Рис. 3.7

таким образом, i-й игрок получает выигрыш $M_i(x, y, z) = M_i(1, 1, 2)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Пусть теперь $x = 2$, тогда второй ход делает второй игрок — выбирает $y = 3$, третий ход делает четвертый игрок — выбирает $z = 1$,

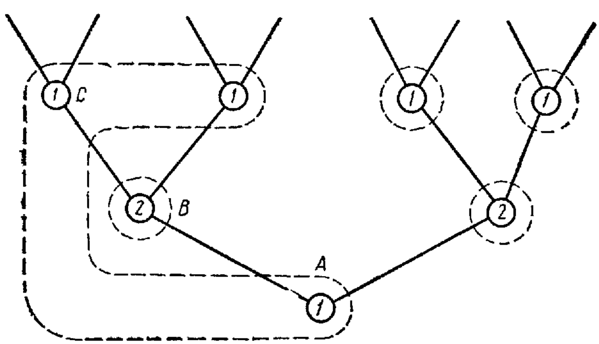

Рис. 3.8

и, таким образом, i-й игрок получит $M_i(x, y, z) = M_i(2, 3, 1)$. Поскольку $x = 1$ выбирается с вероятностью $\frac{1}{3}$, а $x = 2$ с вероятностью $\frac{2}{3}$, то средний выигрыш i-го игрока составит

$$\frac{1}{3} M_i(1, 1, 2) + \frac{2}{3} M_i(2, 3, 1).$$

Поступая аналогично, получим матрицы выигрышей каждого игрока.

Составляя информационные множества, следует помнить следующее:

а) в одно информационное множество могут входить только узлы, относящиеся к одному игроку;

б) любая линия игры (ветвь дерева, отображающая партию игры) не должна пересекать одно и то же информационное множество больше одного раза. Например, не может быть игры с таким графическим изображением, как на рис. 3.8, так как информационное множество для первого игрока содержит два узла A и C, принадлежащих одной партии игры (партия игры содержит три узла A, B, C), т. е. это информационное множество два раза в точках A и C пересекает ветвь, отображающую одну партию игры.

Условие б) можно сформулировать еще так: в одно информационное множество не должно входить больше одного узла каждой ветви, отображающей партию игры.

Позиционная игра может быть представлена графически в виде дерева, которое дает наглядное представление об игре. С другой стороны, графическое представление игры, выполненное с соблюдением правил его построения, дает основание для формального представления позиционной игры, и можно рассматривать теоретически не сами позиционные игры, а их графическое представление в виде дерева.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ИГР

Позиционной игрой будем называть конечную игру n игроков, состоящую из:

1. Дерева T (понятие дерева игры было дано в 3.2 этой главы).

2. n действительных функций F_1, ..., F_n, определенных в каждой из вершин дерева T таким образом, что если t — вершина, то $F_i(t)$ есть сумма, которая должна быть уплачена игроку P_i, если партия заканчивается в точке t.

3. Набора чисел 0, 1, ..., n, таких, что каждой точке разветвления дерева T ставится в соответствие число, указывающее, какой игрок делает очередной ход в рассматриваемой точке (число 0 означает, что в этой точке применяется случайный ход).

4. Сопоставления каждой точке разветвления T дерева, соответствующей случайному ходу, элемента $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ множества S_k, где k — число альтернатив (выборов) в точке q, т. е. число прямых, выходящих из точки q; $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ полный набор вероятностей применения альтернатив.

5. Разбивки точек разветвления на непересекающиеся и полные множества (информационные множества), удовлетворяющие следующим условиям:

а) все точки разветвления, принадлежащие данному информационному множеству, относятся, согласно пункту 3, к одному игроку;

б) все точки разветвления, принадлежащие одному информационному множеству, имеют одинаковое число альтернатив, которые мы будем нумеровать справа налево;

в) если (см. пункт 3) точке разветвления q поставлено в соответствие число 0, то информационное множество, в котором находится q, состоит из одной точки;

г) если S — партия игры, т. е. ломаная линия, идущая от основания дерева к одной из его вершин, и если A — любое информационное множество, то существует не больше одной точки разветвления, принадлежащей обоим множествам S и A.

Понятие стратегии также нуждается в уточнении в связи с уточнением понятия позиционной игры. *Стратегией игрока* P_i называется функция, определенная для каждого информационного множества, соответствующего игроку P_i, значение которой для каждого такого

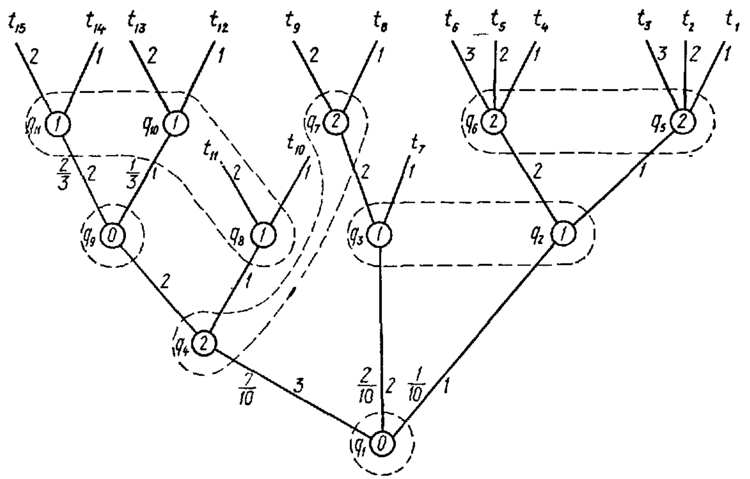

Рис. 3.9

информационного множества представляет одну из альтернатив, имеющихся у P_i.

Из этого определения следует, что стратегия указывает игроку, что нужно делать при любой возможной информации.

Рассмотрим процесс исследования позиционной игры на следующем обобщающем примере. Пусть задана позиционная игра с помощью дерева игры (см. рис. 3.9). На этом рисунке справа от каждой линии стоит цифра, обозначающая выбор (альтернативу), а слева — вероятность выбора, если выбор делается случайно (при узле 0), узлы пронумерованы в определенной последовательности: q_1, q_2, ..., q_{11}; вершины также пронумерованы справа налево и обозначены t_1, t_2, ..., t_{15}. Каждая партия игры, заканчиваясь в вершине t_j ($j = 1, 2, \ldots, 15$), приносит выигрыш первому игроку (за счет второго) согласно следующей функции $H_1(t_j)$:

$$H_1(t_1) = 10, \quad H_1(t_2) = -10, \quad H_1(t_3) = 10,$$
$$H_1(t_4) = 20, \quad H_1(t_5) = 30, \quad H_1(t_6) = 0,$$
$$H_1(t_7) = -10, \quad H_1(t_8) = 30, \quad H_1(t_9) = 20,$$
$$H_1(t_{10}) = -30, \quad H_1(t_{11}) = 0, \quad H_1(t_{12}) = 30,$$
$$H_1(t_{13}) = -30, \quad H_1(t_{14}) = 40, \quad H_1(t_{15}) = 15.$$

В игре для игрока P_1 имеются два информационных множества: $\{q_2, q_3\}$ и $\{q_8, q_{10}, q_{11}\}$. Для игрока P_2 — также два информационных множества: $\{q_4, q_7\}$ и $\{q_5, q_6\}$. Структура информационных множеств игрока P_1 показывает, что он знает следующее: выбрано ли на первом шаге число 3 или одно из чисел 1 или 2. Далее из рисунка 3.9 следует, что P_1 может выбирать альтернативы 1 или 2. Следовательно, у него есть сведения о двух возможностях выбора на первом ходу и при этом он может выбирать две альтернативы, поэтому у него четыре возможности, т. е. у первого игрока стратегии — это четыре функции, принимающие на каждом информационном множестве значения его выборов: 1 или 2. Другими словами, на каждом информационном множестве стратегия для первого игрока — это функция, принимающая значение 1 или 2. Поскольку есть для него два информационных множества и на каждом функция, выражающая стратегию, принимает два значения, то имеется две функции:

$$F_1(\{q_2, q_3\}) = 1, \quad F_2(\{q_2, q_3\}) = 2, \tag{3.1}$$

$$F_1(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 1, \quad F_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2. \tag{3.2}$$

Стратегией игрока P_1 будет сочетание двух функций: одной из (3.1) и одной из (3.2), т. е. будут следующие 4 стратегии:

1. $F_1(\{q_2, q_3\}) = 1, \quad F_1(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 1;$
2. $F_1(\{q_2, q_3\}) = 1, \quad F_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2;$
3. $F_2(\{q_2, q_3\}) = 2, \quad F_1(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 1;$
4. $F_2(\{q_2, q_3\}) = 2, \quad F_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2.$

Из рис. 3.9 видно, что для игрока P_2 положение следующее: на информационном множестве $\{q_4, q_7\}$ он может делать выборы 1 или 2, следовательно, у него есть две функции

$$G_1(\{q_4, q_7\}) = 1, \quad G_2(\{q_4, q_7\}) = 2; \tag{3.3}$$

на информационном множестве $\{q_5, q_6\}$ он может делать три выбора — 1 или 2, или 3, поэтому у него имеется три функции

$$G_1(\{q_5, q_6\}) = 1, \quad G_2(\{q_5, q_6\}) = 2, \quad G_3(\{q_5, q_6\}) = 3. \tag{3.4}$$

Стратегией игрока P_2 будет сочетание двух функций: одной из (3.3) и одной из (3.4), т. е. будут следующие 6 стратегий:

1. $G_1(\{q_4, q_7\}) = 1, \quad G_1(\{q_5, q_6\}) = 1;$
2. $G_1(\{q_4, q_7\}) = 1, \quad G_2(\{q_5, q_6\}) = 2;$
3. $G_1(\{q_4, q_7\}) = 1, \quad G_3(\{q_5, q_6\}) = 3;$
4. $G_2(\{q_4, q_7\}) = 2, \quad G_1(\{q_5, q_6\}) = 1;$
5. $G_2(\{q_4, q_7\}) = 2, \quad G_2(\{q_5, q_6\}) = 2;$
6. $G_2(\{q_4, q_7\}) = 2, \quad G_3(\{q_5, q_6\}) = 3.$

При случайном выборе альтернативы в узле q_1 стратегией является набор вероятностей $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0{,}7$ соответственно выбора 1-й, 2-й и 3-й альтернативы, т. е. чисел 1, 2 или 3.

При случайном выборе альтернативы в узле q_9 стратегией является набор вероятностей: $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{2}{3}$ выбора соответственно 1-й или 2-й альтернативы, т. е. чисел 1 или 2. В общем виде вероятности выбора альтернатив при случайном выборе обозначаются через $p(a, q, i)$, где a — упорядоченное множество стратегий, которые применяют игроки; q — точка разветвления; i — альтернатива.

Заметим, что если стратегия a в некоторой точке q указывает, что надо выбрать определенную альтернативу i, то в этом случае $p(a, q, i) = 1$; если же эта стратегия указывает на невозможность выбора i-й альтернативы, то $p(a, q, i) = 0$. Пусть, например, в данной игре игрок P_1 применит свою 2-ю стратегию

$$F_1(\{q_2, q_3\}) = 1, \quad F_2(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2,$$

игрок P_2 применит свою 6-ю стратегию

$$G_2(\{q_4, q_7\}) = 2, \quad G_3(\{q_5, q_6\}) = 3.$$

Эти две стратегии образуют упорядоченное множество a. Тогда в данной игре получим:

для точки $q_1 - p(a, q_1, 1) = 0{,}1$; $p(a, q_1, 2) = 0{,}2$; $p(a, q_1, 3) = 0{,}7$,

для точки $q_2 - p(a, q_2, 1) = 1$; $p(a, q_2, 2) = 0$,

для точки $q_3 - p(a, q_3, 1) = 1$, $p(a, q_3, 2) = 0$,

для точки $q_4 - p(a, q_4, 1) = 0$, $p(a, q_4, 2) = 1$,

для точки $q_5 - p(a, q_5, 1) = 0$, $p(a, q_5, 2) = 0$, $p(a, q_5, 3) = 1$,

для точки $q_6 - p(a, q_6, 1) = 0$, $p(a, q_6, 2) = 0$, $p(a, q_6, 3) = 1$,

для точки $q_7 - p(a, q_7, 1) = 0$, $p(a, q_7, 2) = 1$,

для точки $q_8 - p(a, q_8, 1) = 0$, $p(a, q_8, 2) = 1$,

для точки $q_9 - p(a, q_9, 1) = \frac{1}{3}$, $p(a, q_9, 2) = \frac{2}{3}$,

для точки $q_{10} - p(a, q_{10}, 1) = 0$, $p(a, q_{10}, 2) = 1$,

для точки $q_{11} - p(a, q_{11}, 1) = 0$, $p(a, q_{11}, 2) = 1$.

Часто полезно указывать не число альтернатив выбора при достижении определенной точки, а перечислить те вершины, к которым можно прийти, достигнув определенной точки в игре. Так, например, достигнув точки q_2, можно прийти к вершинам t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6.

Пусть a — выбранное упорядоченное множество стратегий, q — точка разветвления, t — некоторая вершина, тогда через $P(a, q, t)$ обозначим вероятность достижения вершины t при условиях, что в партии уже достигнута точка q при множестве стратегий a. В данной игре, например, вершины $t_1, t_2, \ldots, t_6$ будут достигнуты с вероятностью 0, 1, т. е.

$$P(a, q_1, t) = 0{,}1 \quad (t = t_1, t_2, \ldots, t_6),$$

далее,

$$P(a,\ q_1,\ t) = 0{,}2 \quad (t = t_7,\ t_8,\ t_9),$$

$$P(a,\ q_9,\ t) = \frac{1}{3} \quad (t = t_{12},\ t_{13}).$$

Очевидно, $P(a,\ q,\ t) = 0$, если t есть вершина партии, не проходящей через точку q. Так, например, $P(a,\ q_2,\ t_7) = 0$, поскольку партия, проходящая через q_2, не может достигнуть вершины t_7.

Пусть теперь b — упорядоченное множество чистых стратегий n игроков; t — вершина, соответствующая некоторой партии; $q_1,\ q_2,\ \ldots$ $\ldots,\ q_r$ — все точки разветвления, через которые проходит эта партия. Обозначим через $P(b,\ t)$ вероятность того, что партия закончится в вершине t, если игроки применяют множество стратегий b.

Тогда

$$P(b,\ t) = \prod_{i=1}^{r} P(b,\ q_i,\ t).$$

Например, если игроки применят множество стратегий a, определенное ранее, то

$$P(a,\ t_1) = P(a,\ q_1,\ t_1)\,P(a,\ q_2,\ t_1)\,P(a,\ q_5,\ t_1) = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$P(a,\ t_2) = P(a,\ q_1,\ t_2)\,P(a,\ q_2,\ t_2)\,P(a,\ q_5,\ t_2) = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$P(a,\ t_3) = P(a,\ q_1,\ t_3)\,P(a,\ q_2,\ t_3)\,P(a,\ q_5,\ t_3) = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}1.$$

Поступая аналогично, получим

$$P(a,\ t_4) = 0, \quad P(a,\ t_5) = 0, \quad P(a,\ t_6) = 0,$$

$$P(a,\ t_7) = 0{,}2, \quad P(a,\ t_8) = 0, \quad P(a,\ t_9) = 0,$$

$$P(a,\ t_{10}) = 0, \quad P(a,\ t_{11}) = 0, \quad P(a,\ t_{12}) = 0,$$

$$P(a,\ t_{13}) = \frac{7}{30}, \quad P(a,\ t_{14}) = 0, \quad P(a,\ t_{15}) = \frac{7}{15}.$$

Несложно подсчитать, что

$$\sum_{j=1}^{15} P(a,\ t_i) = 1.$$

Теперь можно получить математическое ожидание выигрышей игроков при различных чистых стратегиях.

Пусть $H_i(t_j)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$ означает выигрыш i-го игрока, если партия игры закончится в вершине t_j; $M_i(b)$ — средний выигрыш игрока P_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, если применяется множество стратегий b, тогда

$$M_i(b) = \sum_{j=1}^{s} H_i(t_j)\,P(b,\ t_j).$$

Так, для игрока P_1 и множества стратегий a, получим

$$M_1(a) = \sum_{j=1}^{15} H_1(t_j)\,P(a,\ t_j) =$$

$$= 10 \cdot 0{,}1 + (-10) \cdot 0{,}2 + (-30)\frac{7}{30} + 15 \cdot \frac{7}{15} = -1.$$

Итак, можно сделать следующее заключение. Позиционная игра в общем виде сводится к матричной игре. Для этого необходимо перечислить возможные стратегии игроков и значения средних выигрышей $M_1, \ldots, M_n$ в зависимости от множества этих стратегий.

Рассматриваются два вида функций выигрышей H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), определенные на множестве вершин дерева игры и указывающие величину выигрыша в зависимости от достигнутой вершины (партии); M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), определенные на множестве упорядоченных чистых стратегий и указывающие средний выигрыш каждого игрока при условии, что игроки применяют свои чистые стратегии. Для различия будем называть H_i — функциями выигрышей партии, M_i — функциями выигрышей стратегии.

Позиционная игра называется игрой с нулевой суммой, если для всякого n-мерного набора b стратегий игроков $P_1, \ldots, P_n$ будет иметь место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(b) = 0, \tag{3.5}$$

где $M_i(b)$ — функции выигрышей стратегии. Следует отметить, что условие (3.5) может быть выполнено в некоторых случаях и тогда, когда сумма выигрышей, определенных функциями выигрышей партии H_i, не будет равна 0.

3.4. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Позиционная игра называется игрой *с полной информацией*, если в любой точке любой ее партии игрок, делающий ход, точно знает, какие выборы были сделаны раньше. В графическом изображении каждый узел такой игры будет представлять собой отдельное информационное множество, и поэтому в такой игре мы не отмечаем пунктиром информационные множества.

Примерами игры с полной информацией могут служить шашки, шахматы, крестики и нолики. Большинство карточных игр не является играми с полной информацией, так как игроки не знают, какие карты были выданы другим игрокам.

Ниже мы покажем, что матрица любой игры двух игроков с нулевой суммой с полной информацией в нормальной форме имеет седловую точку, т. е. в игре с полной информацией существуют оптимальные чистые стратегии. Это означает, что в таких играх, как шашки, шахматы, крестики и нолики, у игрока существуют стратегии, придерживаясь которых он не проиграет. Другими словами, у первого игрока существует такая стратегия, придерживаясь которой он может либо выиграть, если второй игрок будет играть не лучшим образом, либо добиться ничьей, если второй игрок будет играть самым лучшим образом. Аналогичное положение и у второго игрока.

Игра в крестики и нолики не представляет интеллектуального интереса, так как стратегий в ней немного и очень скоро становятся известными оптимальные чистые стратегии, ведущие игроков к ничьей.

Игры в шашки и шахматы будут еще долго представлять интеллектуальный интерес для людей, несмотря на то, что для них существуют оптимальные беспроигрышные стратегии, потому что в этих играх существует чрезвычайно много стратегий, пока невозможно их даже перечислить и тем более выбрать среди них оптимальные. Попытки использовать электронные вычислительные машины для этих целей пока не привели к значительным успехам из-за недостаточности объема памяти и вычислительных возможностей современных ЭВМ. Поэтому исследователи шахматной игры пошли не по пути перечисления всех возможных стратегий и отыскания среди них лучшей, а по пути обобщения опыта игры, накопленного людьми, и переложения этого опыта по возможности на формальные или полуформальные процедуры, а затем использования особенностей быстродействия ЭВМ для определения лучших из некоторого, сравнительно небольшого множества стратегий, возникающих в определенном месте игры. Созданные алгоритмы и процедуры игры в шахматы позволяют использовать ЭВМ как игрока примерно на уровне первого разряда или мастера. Думается, что пройдет еще не один десяток лет, пока будут созданы такие ЭВМ, процедуры и алгоритмы игры в шахматы, которые смогут успешно соперничать в игре в шахматы с лучшими гроссмейстерами.

Для доказательства того, что всякая игра с полной информацией имеет седловую точку, необходимо ввести некоторые новые определения и обозначения.

Пусть имеется позиционная игра n игроков $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ с функциями выигрышей стратегии соответственно $M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_n$; A_i — есть множество чистых стратегий игрока P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; A — декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ $\ldots, x_n)$ — элемент множества A, где $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда элемент $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ называется точкой равновесия, если для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и для любого элемента y из множества A_i будет справедливо неравенство

$$M_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant M_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Другими словами, интуитивный смысл точки равновесия состоит в в следующем: точка равновесия соответствует такому способу игры, когда все игроки, кроме одного, принимают его и оставшемуся игроку тоже лучше принять этот способ.

Покажем, что в случае игры двух игроков с нулевой суммой понятие точки равновесия и седловой точки матрицы для игры в нормальной форме совпадают.

Действительно, пусть (x_1, x_2) — точка равновесия игры двух игроков с нулевой суммой, с функциями выигрышей стратегии соответственно M_1 и M_2; A_1 и A_2 — соответственно стратегии игроков P_1, P_2; тогда согласно определению точки равновесия получим:

$$\begin{aligned} &M_1(x_1, x_2) \geqslant M_1(y_1, x_2) \text{ для любого } y_1 \in A_1; \\ &M_2(x_1, x_2) \geqslant M_2(x_1, y_2) \text{ для любого } y_2 \in A_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

С другой стороны, эта игра с нулевой суммой, поэтому имеют место равенства:

$$M_2(x_1, x_2) = -M_1(x_1, x_2),$$
$$M_2(x_1, y_2) = -M_1(x_1, y_2). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) во второе неравенство (3.6), получим

$$-M_1(x_1, x_2) \geqslant -M_1(x_1, y_2),$$

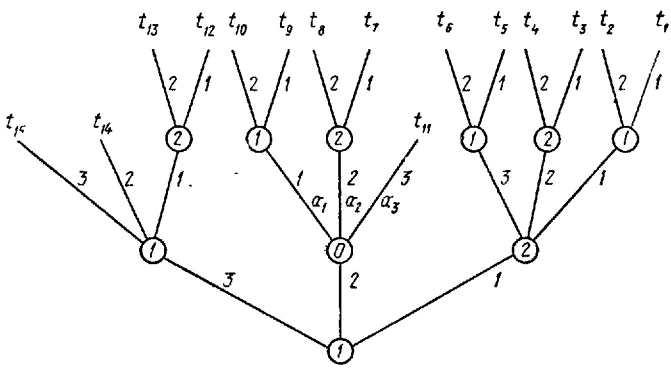

Рис. 3.10

или

$$M_1(x_1, x_2) \leqslant M_1(x_1, y_2). \tag{3.8}$$

Объединим первое неравенство (3.6) с (3.8)

$$M_1(y_1, x_2) \leqslant M_1(x_1, x_2) \leqslant M_1(x_1, y_2),$$

что совпадает с определением седловой точки.

Итак, доказано, что в случае игры двух игроков с нулевой суммой точка равновесия является и седловой точкой матрицы нормальной формы игры. Аналогично доказывается, что седловая точка матрицы нормальной формы игры двух игроков с нулевой суммой является и точкой равновесия.

Далее полезно будет следующее определение.

Усечением позиционной игры с полной информацией называется игра, которая получается из данной путем исключения первого хода. Например, для игры с графическим представлением, данным на рис. 3.10, существует три усечения, соответствующие трем альтернативам при первом ходе. Эти усечения изображены на рис. 3.11; 3.12; 3.13.

В этих усеченных играх функции выигрышей партии определены в тех вершинах, которые остались в усеченной игре. Если функции выигрышей партии в игре, изображенной на рис. 3.10, есть $H_i(t_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, 15$), то, например, для игры, изображенной на рис. 3.11, функции выигрышей партии $K_i = H_i(t_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, 15$). Поскольку стратегия игрока в игре с полной информацией есть функция, определяющая некоторую альтернативу при каждом ходе игрока, мы можем также рассматривать усечения данной стратегии, соответствующие усечениям данной игры. Усечение стратегии определяется только в точках разветвления соответствующего усечения игры и выбирает те же альтернативы в точках разветвления, что и первоначальная стратегия.

Теперь сформулируем и докажем теорему о существовании точки равновесия.

Теорема. *Пусть $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — множества стратегий, имеющихся у P_1 и P_2 в игре игроков с полной информацией, и пусть A — их декартово произведение. Тогда A имеет точку равновесия.*

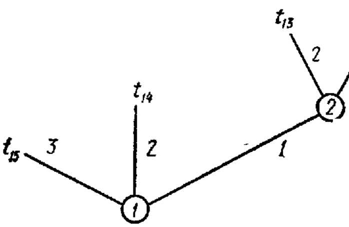

Рис. 3.11

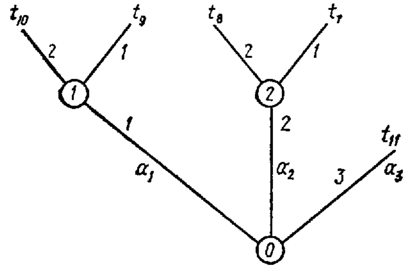

Рис. 3.12

Доказательство этой теоремы проведем индукцией по длине игры, т. е. по числу точек разветвления в самой длинной возможной партии игры.

Для игр длиною 0 (не имеющих ходов) теорема очевидна, так как каждый игрок ничего не делает и декартово произведение A содержит один элемент, который по определению, является точкой равновесия.

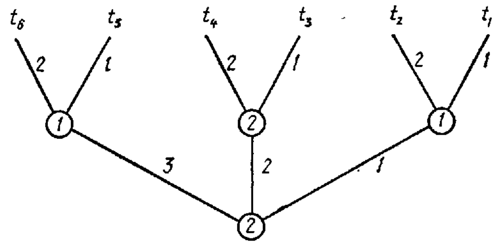

Рис. 3.13

Предположим, что теорема справедлива для всех игр длины меньше k. Обозначим через Γ игру длиной k. Пусть для первого хода имеются r альтернатив, и $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ есть r усечений игры Γ; для каждой игры Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ обозначим через $A_i^{(1)}$ множество чистых стратегий первого игрока P_1 и через $A_i^{(2)}$ — множество чистых стратегий для игрока P_2; A_i — декартово произведение множеств $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Согласно условиям теоремы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ есть возможные стратегии соответственно игроков P_1 и P_2 в первоначальной игре Γ; A — декартово произведение множеств $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$.

Поскольку Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — игры длины меньше k, то по условию индукции имеется точка равновесия в каждом из множеств A_i. Обозначим через (f_i, g_i^*) точку равновесия из множества A_i; $M_i^{(1)}$,

$M_i^{(2)}$ — функции выигрышей стратегий в Γ_i ($i = 1, 2, \ldots, r$), тогда по определению имеем:

$$\left.\begin{aligned} M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant M_i^{(1)}(f_i, g_i^*) \\ M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant M_i^{(2)}(f_i^*, g_i) \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

для любого f_i из $A_i^{(1)}$ и g_i из $A_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). В игре может быть три случая:

1) первый ход в игре Г случайный,
2) первый ход в игре Г делает первый игрок P_1,
3) первый ход в игре Г делает второй игрок P_2.

Рассмотрим первый случай. Если q есть точка разветвления одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу игрока P_1, то полагаем

$$f^*(q) = f_i^*(q),$$

если же q есть точка разветвления одной из Γ_i, соответствующая ходу игрока P_2, то полагаем

$$g^*(q) = g_i^*(q).$$

Поскольку первый ход случайный (ни P_1, ни P_2 его не делают), то очевидно f^* определена в любой точке разветвления игры Г, соответствующей ходу игрока P_1 и, следовательно, она есть элемент множества $A^{(1)}$. Аналогично g^* есть элемент множества $A^{(2)}$. Покажем, что точка (f^*, g^*), принадлежащая множеству A, является точкой равновесия множества A.

Пусть вероятности появления соответствующих альтернатив в первом ходе $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$); $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ — функции выигрышей стратегий, соответствующие игрокам P_1, P_2 в игре Г. Тогда ясно, что если f и g любые стратегии соответственно игроков P_1, P_2 в Г, а f_i, g_i ($i = 1, \ldots, r$) есть усечения этих стратегий для усеченных игр Γ_i, то

$$M^{(1)}(f, g) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i, g_i),$$

$$M^{(2)}(f, g) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i, g_i).$$

В частности, если $f_1^*, \ldots, f_r^*$ являются усечениями f^* и $g_1^*, \ldots, g_r^*$ — усечениями g^*, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(f, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i, g_i^*), \\ M^{(2)}(f^*, g) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i), \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(f^*, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*), \\ M^{(2)}(f^*, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*). \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Из неравенств (3.9) с учетом неотрицательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ получим

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(\,)}(f_i, g_i^*), \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i). \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Подставляя (3.10) и (3.11) в (3.12), получим

$$M^{(1)}(f^*, g^*) \geqslant M^{(1)}(f, g^*),$$

$$M^{(2)}(f^*, g^*) \geqslant M^{(2)}(f^*, g),$$

т. е. доказано, что (f^*, g^*) есть точка равновесия игры Г.

Рассмотрим второй случай, когда первый ход q_0 делает игрок P_1. Пусть m такое значение, что

$$M_m^{(1)}(f_m^*, g_m^*) = \max_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*). \tag{3.13}$$

Определим функцию f^*, положив

$$f^*(q_0) = m, \tag{3.14}$$

а если q — точка одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу игрока P_1, то

$$f^*(q) = f_i^*(q).$$

Определим функцию g^* аналогично первому случаю, т. е. если q — точка хода игрока P_2, принадлежащая игре Γ_i, то положим

$$g^*(q) = g_i^*(q).$$

Таким образом f^*, g^* являются стратегиями соответственно для игроков P_1 и P_2 в игре Г. Покажем, что (f^*, g^*) есть точка равновесия в A.

Из (3.14) имеем: если g — любая стратегия P_2 в игре Г и g_m есть ее усечение в Γ_m, то

$$M^{(1)}(f^*, g) = M_m^{(1)}(f_m^*, g_m), \tag{3.15}$$

$$M^{(2)}(f^*, g) = M_m^{(2)}(f_m^*, g_m). \tag{3.16}$$

Из равенств (3.15) и (3.16) следует: поскольку g_m^* есть усечение g^* в Γ_m, то

$$M^{(1)}(f^*, g^*) = M_m^{(1)}(f_m^*, g_m^*), \tag{3.17}$$

$$M^{(2)}(f^*, g^*) = M_m^{(2)}(f_m^*, g_m^*). \tag{3.18}$$

Таким образом, если g — любая стратегия для P_2 в Г и g_m есть ее усечение в Γ_m, то из (3.18), второго неравенства (3.9) и (3.16) следует, что

$$M^{(2)}(f^*, g^*) = M_m^{(2)}(f_m^*, g_m^*) \geqslant M_m^{(2)}(f_m^*, g_m) = M^{(2)}(f^*, g). \tag{3.19}$$

Пусть f — любая стратегия P_1 в Г. Предположим, что f выбирает i-ю альтернативу на первом ходе, т. е.

$$f(q_0) = i.$$

Пусть f_i усечение f для Γ_i, тогда для любой стратегии g игрока P_2 и ее усечения g_i в Γ_i справедливо равенство

$$M^{(1)}(f, g) = M_i^{(1)}(f_i, g_i)$$

и, в частности,

$$M^{(1)}(f, g^*) = M_i^{(1)}(f_i, g^*). \tag{3.20}$$

Из выражения (3.13) получим

$$M_m^{(1)}(f_m^*, g_m^*) \geqslant M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*), \tag{3.21}$$

из (3.17), (3.21), первой части (3.9) и (3.20) получим

$$M^{(1)}(f^*, g^*) = M_m^{(1)}(f_m^*, g_m^*) \geqslant M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*) \geqslant M_i^{(1)}(f_i, g_i^*) = \\ = M^{(1)}(f, g^*). \tag{3.22}$$

Из (3.19) и (3.22) заключаем, что (f^*, g^*) есть точка равновесия игры Γ, что и требовалось доказать. Третий случай аналогичен второму. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что матрица любой позиционной игры в нормальной форме двух игроков с нулевой суммой и полной информацией имеет седловую точку. Эта теорема справедлива для позиционных игр n игроков.

По аналогии с определением точки равновесия на множестве чистых стратегий можно определить точку равновесия на множестве смешанных стратегий и доказать, что всякая игра n игроков имеет точку равновесия в множестве смешанных стратегий.

3.5. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ С ИДЕАЛЬНОЙ ПАМЯТЬЮ

Игры с идеальной памятью являются интересным обобщением игр с полной информацией.

Определение. Игрой *с идеальной памятью* называется игра, в которой каждый из игроков всегда помнит все, что он делал или знал во время каждого из своих ходов. Например, всякая игра двух игроков, в которой могут играть лишь два человека (а не команда), способные помнить всю информацию о выборах в любом ходе, является игрой с идеальной памятью. Используя понятие информационного множества, игру с идеальной памятью можно определить более точно. Позиционная игра — это игра с идеальной памятью, если для нее выполняются следующие условия: пусть P и Q — любые два хода, выполняемые одним игроком и такие, что в некоторой партии игры ход P предшествует ходу Q;

U и V — информационные множества, содержащие соответственно P и Q;

каждая точка множества U дает k альтернатив;

U_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — множество всех узлов дерева (ходов), которые можно достигнуть, выбрав i-ю альтернативу в некоторой точке множества U, тогда для любого i имеет место соотношение $V \subseteq U_i$.

Чтобы исследовать подобные игры, удобно ввести понятие стратегии поведения, состоящей в применении случайных выборов на каждом ходу игры.

Определение. *Стратегией поведения* данного игрока называется функция, определенная на классе информационных множеств, которая соотносит каждому информационному множеству U элемент — набор вероятностей $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ выбора альтернатив, т. е. из множест-

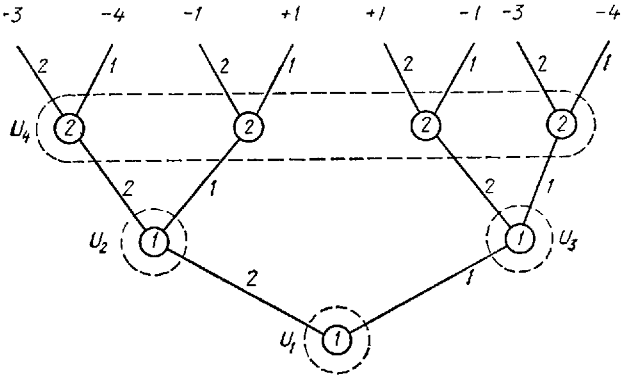

Рис. 3.14

ва S_r, где r — число альтернатив, которое дает U. По данной стратегии поведения одного игрока и по данной чистой или смешанной стратегии или стратегии поведения другого игрока можно вычислить ожидаемый выигрыш каждого игрока.

Обозначим через $E(f, g)$ математическое ожидание выигрыша игрока P_1, если P_1 применяет стратегию поведения f, а P_2 стратегию поведения g. Стратегии поведения f^*, g^* игроков P_1 и P_2 являются оптимальными, если для любых стратегий поведения f, g соответственно игроков P_1 и P_2 справедливы неравенства

$$E(f, g^*) \leqslant E(f^*, g^*) \leqslant E(f^*, g),$$

т. е. оптимальные стратегии поведения образуют седловую точку для среднего выигрыша игрока. Можно доказать, что, применяя смешанные стратегии, игрок поступает по крайней мере не хуже, чем в случае применения стратегий поведения, но можно построить примеры игры, в которых игроку лучше применять смешанные стратегии, чем любую стратегию поведения. Можно также доказать, что в позиционной игре с идеальной памятью всегда имеются оптимальные стратегии поведения.

Рассмотрим пример 3.7, графическое изображение которого представлено на рис. 3.14. Напомним, что цифры у вершин дерева показывают выигрыш первого игрока P_1. Стратегия поведения игрока P_1 — функция f, определенная на множествах U_1, U_2, U_3:

$$f(U_1) = (x, 1 - x)$$
$$f(U_2) = (y, 1 - y)$$
$$f(U_3) = (z, 1 - z),$$

где x — вероятность выбора первой альтернативы игроком P_1 на первом ходе (множество U_1); $1-x$ — вероятность выбора второй альтернативы игроком P_1 на первом ходе; y — вероятность выбора первой альтернативы игроком P_1 на втором ходе, если на первом ходе была выбрана вторая альтернатива (множество U_2); $1-y$ — вероятность выбора второй альтернативы на втором ходе игроком P_1; z — вероятность выбора первой альтернативы игроком P_1 на втором ходе, если на первом ходе была выбрана первая альтернатива (множество U_3); $1-z$ — вероятность выбора игроком P_1 второй альтернативы.

Стратегией поведения игрока P_2 есть функция g, определенная на множестве U_4:

$$f(U_4) = (w,\ 1-w),$$

где w — вероятность выбора первой альтернативы игроком P_2 на третьем ходе (множество U_4), а $1-w$ — вероятность выбора им второй альтернативы.

Тогда математическое ожидание выигрышей игрока P_1:

$$\begin{aligned}E(f,\ g) &= -4xzw - 3xz(1-w) - x(1-z)w + x(1-z)(1-w) + \\ &+ (1-x)yw - (1-x)y(1-w) - 4(1-x)(1-y)w - \\ &- 3(1-x)(1-y)(1-w) = xzw - 3xyw - 4xz - 2xy - \\ &- xw + 3yw + 4x + 2y - w - 3.\end{aligned}$$

Для определения оптимального решения надо найти такие x, y, z, w, при которых справедливы равенства

$$\max_f \min_g E(f,\ g) = \min_g \max_f E(f,\ g).$$

Для нахождения оптимальных стратегий и цены игры иным способом представим $E(f, g)$ в несколько ином виде:

$$E(f,\ g) = zx(w-4) + y(3w+2)(1-x) + 4x - xw - w - 3. \quad (3.23)$$

Поскольку $w-4<0$, то коэффициент при z в формуле (3.23) отрицательный. Для максимального увеличения своего среднего выигрыша $E(f, g)$ первый игрок должен положить $z=0$. Коэффициент при y в формуле (3.23) не отрицательный при любых значениях w и x, поэтому, положив $y=1$, первый игрок максимально увеличит свой выигрыш. В эти условиях получим

$$\begin{aligned}E(f,\ g) &= (3w+2)(1-x) + 4x - xw - w - 3 = \\ &= -4xw + 2x + 2w - 1 = -(2x-1)(2w-1). \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Из (3.24) заключаем, что для обоих игроков оптимальные значения x и w следующие: $x = w = 0{,}5$.

Цена игры равна 0. Оптимальное поведение первого игрока на первом ходе с вероятностью 0,5 выбирать первую альтернативу; всегда выбирать первую альтернативу в U_2 и всегда выбирать вторую альтернативу в U_3. Оптимальная стратегия игрока P_2 заключается в случайном выборе своих альтернатив с равной вероятностью 0,5. Вообще следует отметить, что число параметров, определяемых при нахождении оптимальных стратегий поведения, намного меньше, чем число параметров, связанных с вычислением оптимальных смешанных стратегий. Например, в рассмотренной игре (пример 3.11) у игрока P_1 имеется всего три параметра стратегий поведения и восемь параметров для смешанной стратегии, так как для него имеется восемь чистых стратегий. Тем не менее математическое ожидание выигрышей удобнее выражать через смешанные стратегии, и это обстоятельство до некоторой степени компенсирует вышеуказанный недостаток.

Контрольные вопросы и задания к главе 3

1. Что такое позиционная игра?
2. Что такое нормальная форма позиционной игры?
3. Приведите примеры позиционных игр.
4. Что такое дерево игры?
5. Что такое информационное множество дерева игры и каким условиям оно должно удовлетворять?
6. Приведите примеры дерева игры.
7. Дайте точное определение позиционной игры.
8. Что такое функция выигрышей партии и стратегии?
9. Что такое позиционная игра с полной информацией?
10. Что такое точка равновесия для игры с полной информацией?
11. Сформулируйте теорему о точке равновесия в позиционной игре.
12. Что такое позиционная игра с идеальной памятью?
13. Что такое стратегия поведения для игрока в позиционной игре?
14. В чем заключаются методы решения позиционных игр?
15. Приведите к нормальной форме, дайте графическое изображение и найдите решеиие следующей игры:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает x из множества $\{1, 2\}$.

Ход 2. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает y из множества $\{1, 2\}$.

Ход 3. Игрок P_1, зная значения x и y, выбирает из множества $\{1, 2\}$.

Выигрыш первому игроку определяется так же, как и в примере $\{3.1\}$.

16. Приведите к нормальной форме, дайте графическое изображение и найдите решение следующей игры:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2\}$.

Ход 2. Выбирается случайно число y из множества $\{1, 2\}$, причем числа 1 и 2 выбираются соответственно с вероятностями 0,25 и 0,75.

Ход 3. Игрок P_2, зная значение y, но не зная x, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$, если $y = 1$, и из множества $\{1, 2, 3\}$, если $y = 2$.

После того, как сделаны все три хода, игрок P_2 платит игроку P_1 сумму $M(x, y, z)$, заданную следующим образом:

$$M(1, 1, 1) = 2;\quad M(1, 1, 2) = -2;\quad M(1, 2, 1) = 1,\quad M(1, 2, 2) = 0,$$
$$M(1, 2, 3) = -2;\quad M(2, 1, 1) = 0,\quad M(2, 1, 2) = 5,\quad M(2, 2, 1) = -1,$$
$$M(2, 2, 2) = -3,\quad M(2, 2, 3) = 3.$$

17. Дайте графическое представление и приведите к нормальной форме следующую игру:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1.2\}$.

Ход 2. Выбирается число y из множества $\{1, 2\}$ случайно: число 1 выбирается с вероятностью 0,2, а число 2 — с вероятностью 0,8.

Ход 3. Если иа первом ходу выбрано 1, то игрок P_2, зная значения x и y, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$, если на втором ходу было выбрано 2, игрок P_1, зная значения x и y, выбирает z из множества $\{1, 2\}$.

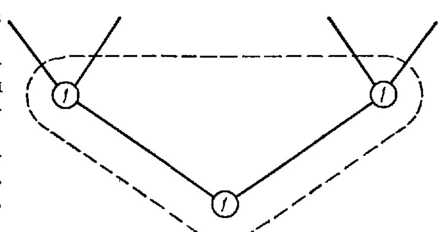

Рис. 3.15

После трех ходов игроку P_1 уплачивается сумма $M(x, y, z)$, где M представлена в игре 3.1.

18. Может ли быть игра с деревом изображенным на рис. 3.15?

19. Дайте графическое изображение следующей игры:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2, 3, 4\}$.

Ход 2. Игрок P_2, зная четное или нечетное x, выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход 3. Если $y = 1$, то случайно выбирается число z из множества $\{1, 2\}$, причем 1 выбирается с вероятностью 0,1, а число 2 — с вероятностью 0,9. Если $y = 2$, то P_1, зная значения x и y, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$.

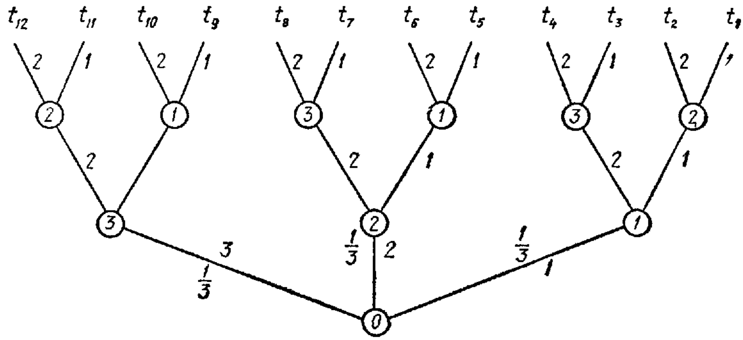

Рис. 3.16

Ход 4. Игрок P_1, зная значение y, но не зная x и z, выбирает число w из множества $\{1, 2\}$.

20. Дайте графическое представление, опишите стратегии и найдите средние выигрыши игроков следующей игры:

Ход 1. Игрок P_1 выбирает x из множества $\{1, 2\}$.

Ход 2. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход 3. Случайно выбирается число z из множества $\{1, 2\}$, причем число 1 выбирается с вероятностью α, а число 2 — с вероятностью $(1 - \alpha)$.

После того, как выбраны x, y, z, игроку P_1 выплачивается сумма $M_1(x, y, z)$, а игроку P_2 — сумма $M_2(x, y, z)$.

21. Найдите точки равновесия (их всего 8) для игры с полной информацией, дерево игры которой приведено на рис. 3.16, а выигрыши партий игры для трех игроков приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

t	$H_1(t)$	$H_2(t)$	$H_3(t)$	t	$H_1(t)$	$H_2(t)$	$H_3(t)$
t_1	1	5	3	t_7	7	3	11
t_2	2	6	4	t_8	8	4	12
t_3	3	7	1	t_9	9	11	5
t_4	4	8	2	t_{10}	10	12	6
t_5	5	1	9	t_{11}	11	9	7
t_6	6	2	10	t_{12}	12	10	8

ГЛАВА 4. БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Естественным обобщением матричных игр являются бесконечные антагонистические игры, в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий. В этой главе будут рассматриваться игры двух игроков, делающих по одному ходу, и после этого происходит распределение выигрышей. При формализации реальной ситуации с бесконечным числом выборов можно каждую стратегию сопоставить определенному числу из единичного интервала, так как всегда можно простым преобразованием любой интервал перевести в единичный и наоборот.

Для дальнейшего изложения теории игр этого класса введем определения и обозначения: $[0, 1]$ — единичный интервал, из которого игрок может делать выбор; x — число (стратегия), выбираемое первым игроком P_1; y — число (стратегия), выбираемое вторым игроком P_2; $M_i(x, y)$ — выигрыш i-го игрока; $\Gamma(X, Y, M_1, M_2)$ — игра двух игроков, с ненулевой суммой, в которой первый игрок выбирает число x из множества X, второй игрок выбирает число y из множества Y, и после этого первый и второй игроки получают соответственно выигрыши $M_1(x, y)$, $M_2(x, y)$; $\Gamma(X, Y, M)$ — игра двух игроков с нулевой суммой, в которой первый игрок выбирает число x, второй — число y, после чего первый игрок получает выигрыш $M(x, y)$ за счет второго игрока.

Итак, игра двух игроков с нулевой суммой $\Gamma(X, Y, M)$, заключающаяся в выборе первым игроком числа $x \in X$, вторым игроком числа $y \in Y$ и с дальнейшим получением выигрыша $M(x, y)$ первым игроком за счет второго, называется бесконечной антагонистической игрой, если хотя бы одно из множеств X или Y содержит бесконечное количество элементов (чисел).

Для решения такой игры можно поступить по аналогии с матричными играми, однако в этом случае задача очень усложняется. Большое значение имеет вид функции выигрышей $M(x, y)$. В зависимости от вида функций классифицируются игры и разрабатываются методы их решений. Оказывается, не для всякой функции $M(x, y)$ существует решение (в отличие от матричных игр). Будем считать, что выбор определенного числа игроком означает применение его чистой стратегии, соответствующей этому числу. По аналогии с матричными играми назовем чистой нижней ценой игры величину

$$V_1 = \max_x \inf_y M(x, y)$$

или

$$V_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y),$$

а чистой верхней ценой игры величину

$$V_2 = \min_y \sup_x M(x, y)$$

или

$$V_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y).$$

Для матричных игр величины V_1 и V_2 всегда существуют, а в бесконечных играх они могут не существовать.

Естественно считать, что, если для какой-либо бесконечной игры величины V_1, V_2 существуют и равны между собой ($V_1 = V_2 = V$), то такая игра имеет решение в чистых стратегиях, т. е. оптимальной стратегией первого игрока есть выбор числа $x_0 \in X$ и второго игрока — числа $y_0 \in Y$, при которых $M(x_0 y_0) = V$, в этом случае V называется ценой игры, а $(x_0 y_0)$ — седловой точкой в чистых стратегиях.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.1. Первый игрок P_1 выбирает число x из множества X, которое представляет собой замкнутый промежуток $[0, 1]$, второй игрок P_2 выбирает число y из множества Y, представляющего замкнутый промежуток $[0, 1]$. После этого второй игрок платит первому сумму

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

Поскольку второй игрок хочет минимизировать выигрыш первого игрока, то он определяет

$$\min_{y \in Y} (2x^2 - y^2) = 2x^2 - 1,$$

т. е. при этом $y = 1$.

Первый игрок желает максимизировать свой выигрыш, и поэтому определяет

$$\max_{x \in X} (\min_{y \in Y} M(x, y)) = \max_{x \in X} (2x^2 - 1) = 2 - 1 = 1,$$

который достигается при $x = 1$.

Итак, нижняя цена игры равна $V_1 = 1$. Верхняя цена игры

$$V_2 = \min_{y \in Y} (\max_{x \in X} (2x^2 - y^2)) = \min_{y \in Y} (2 - y^2) = 2 - 1 = 1,$$

т. е. в этой игре $V_1 = V_2 = 1$. Поэтому цена игры $V = 1$, а седловая точка (1.1).

Пример 4.2. Первый игрок выбирает $x \in X$, где X — открытый интервал $(0, 1)$, второй игрок выбирает $y \in Y$, где Y — открытый интервал $(0, 1)$. После этого первый игрок получает сумму

$$M(x, y) = x + y$$

за счет второго игрока. Поскольку X и Y открытые интервалы, то на них V_1 и V_2 не существуют. Если бы X и Y были замкнутые интервалы, то, очевидно, было бы следующее:

$$V_1 = V_2 = 1 \quad \text{при} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

С другой стороны, ясно, что, выбирая x достаточно близкое к 1, первый игрок будет уверен, что он получит выигрыш не меньше, чем число, близкое к цене игры $V = 1$; выбирая y близкое к нулю, второй игрок не допустит, чтобы выигрыш первого игрока значительно отличался от цены игры $V = 1$.

Степень близости к цене игры может характеризоваться числом $\varepsilon > 0$. Поэтому в описываемой игре можно говорить об оптимальности чистых стратегий $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ соответственно первого и второго игроков с точностью до произвольного числа $\varepsilon > 0$. Можно обобщить и уточнить соответствующие понятия теории игр с учетом точности до $\varepsilon > 0$.

Точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$, в антагонистической непрерывной игре Г называется точкой ε-равновесия, если для любых стратегий $x \in X$ первого игрока, $y \in Y$ второго игрока имеет место неравенство

$$M(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \leqslant M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant M(x_\varepsilon, y) + \varepsilon. \tag{4.1}$$

Точку ε-равновесия $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ еще называют ε-седловой точкой функции $M(x, y)$, а стратегии x_ε и y_ε называются ε-оптимальными стратегиями. Эти стратегии являются оптимальными с точностью до ε в том смысле, что, если отклонение от оптимальной стратегии никакой пользы игроку принести не может, то его отклонение от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш не более, чем на ε.

По аналогии с матричными играми можно сформулировать и доказать следующие критерии существования у функции ε-седловых точек:

1. Если $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ — ε-седловая точка функции двух переменных $M(x, y)$, то

$$\inf_y M(x_\varepsilon, y) + 2\varepsilon \geqslant \sup_x \inf_y M(x, y), \tag{4.2}$$

$$\sup_x M(x, y_\varepsilon) - 2\varepsilon \leqslant \inf_y \sup_x M(x, y). \tag{4.3}$$

2. Если при всяком $\varepsilon > 0$ функция M имеет ε-седловые точки, то

$$\sup_x \inf_y M(x, y) = \inf_y \sup_x M(x, y). \tag{4.4}$$

3. Если выполняются соотношения (4.2), (4.3), (4.4), то $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ является 4ε-седловой точкой.

4. Если имеет место равенство (4.4), то при любом $\varepsilon > 0$ функция $M(x, y)$ имеет ε-седловую точку.

Доказательство этих критериев приведено в [5].

Пользуясь этими критериями, часто можно определить существование ε-седловых точек непрерывных игр.

Если игра Г не имеет седловой точки (ε-седловой точки) в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии можно искать среди смешанных стратегий. Однако, в качестве вероятностной меры здесь вводятся функции распределения вероятностей применения игроками чистых стратегий.

Пусть $F(x)$ выражает интегральный закон распределения вероятностей применения чистых стратегий первым игроком. Если число ξ — чистая стратегия первого игрока, то

$$F(x) = P\{\xi \leqslant x\},$$

где $P\{\xi \leqslant x\}$ означает вероятность того, что случайно выбранная чистая стратегия ξ не будет превосходить числа x. Аналогично рассматривается интегральная функция распределения вероятностей применения чистых стратегий η вторым игроком

$$G(y) = P\{\eta \leqslant y\}.$$

Функции $F(x)$ и $G(y)$ называются смешанными стратегиями соответственно первого и второго игроков. Если $F(x)$ и $G(y)$ дифференцируемы, то существуют их производные, соответственно $f(x)$ и $g(y)$.

В общем случае дифференциал интегральной функции распределения вероятностей $dF(x)$ выражает вероятность того, что стратегия ξ находится в интервале $x \leqslant \xi \leqslant x + dx$. Аналогично для второго игрока: $dG(y)$ означает вероятность того, что его стратегия η находится в интервале $y \leqslant \eta \leqslant y + dy$. Тогда выигрыш первого игрока составит

$$M(x, y)\, dF(x),$$

а выигрыш второго игрока равен

$$M(x, y)\, dG(y).$$

Средний выигрыш первого игрока при условии, что второй игрок применяет свою чистую стратегию y, получим, если проинтегрируем выигрыши по всем возможным значениям x, т. е.

$$E(F, y) = \int_0 M(x, y)\, dF(x). \tag{4.5}$$

Напомним, что множество значений X для x является замкнутым интервалом $[0, 1]$.

Аналогично, получаем средний выигрыш первого игрока при условии, что он применяет свою чистую стратегию x, а второй игрок — свою смешанную стратегию $G(y)$

$$E(x, G) = \int_0^1 M(x, y)\, dG(y). \tag{4.6}$$

Напомним, что множество Y для y является замкнутым интервалом $[0, 1]$.

Если первый игрок применяет свою чистую стратегию x, второй — y, то выигрыш первого игрока составит

$$M(x, y)\, dF(x)\, dG(y).$$

Средний выигрыш первого игрока при условии, что оба игрока применяют свои смешанные стратегии $F(x)$ и $G(y)$, будет равен

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.7}$$

По аналогии с матричными играми определяются оптимальные смешанные стратегии игроков и цена игры:

в антагонистической непрерывной игре $\Gamma(X, Y, M)$ пара смешанных стратегий $F^*(x)$ и $G^*(y)$ соответственно для первого и второго игроков образует седловую точку в смешанных стратегиях, если для любых смешанных стратегий $F(x)$ и $G(y)$ справедливы соотношения

$$E(F,\ G^*) \leqslant E(F^*,\ G^*) \leqslant E(F^*,\ G). \tag{4.8}$$

Из левой части неравенства (4.8) следует, что если первый игрок отступает от своей стратегии $F^*(x)$, то его средний выигрыш не может увеличиться, но может уменьшиться за счет лучших действий второго игрока, поэтому $F^*(x)$ называется оптимальной смешанной стратегией первого игрока.

Из правой части неравенств (4.8) следует, что если второй игрок отступит от своей смешанной стратегии $G^*(y)$, то средний выигрыш первого игрока может увеличиться, а не уменьшиться, за счет более разумных действий первого игрока, поэтому $G^*(y)$ называется оптимальной смешанной стратегией второго игрока. Средний выигрыш $E(F^*,\ G^*)$, получаемый первым игроком при применении игроками оптимальных смешанных стратегий, называется ценой игры.

По аналогии с матричными играми рассматривается нижняя цена непрерывной игры в смешанных стратегиях

$$V_1 = \max_F \min_G E(F,\ G)$$

и верхняя цена игры

$$V_2 = \min_F \max_G E(F,\ G).$$

Если существуют такие смешанные стратегии $F^*(x)$ и $G^*(y)$ соответственно для первого и второго игроков, при которых нижняя и верхняя цены непрерывной игры совпадают, то $F^*(x)$, $G^*(y)$ естественно назвать оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков, а $V_1 = V_2 = V$ — ценой игры.

Можно показать, что существование седловой точки в смешанных стратегиях игры $\Gamma(X,\ Y,\ M)$ равносильно существованию верхней V_2 и нижней V_1 цен игры в смешанных стратегиях и их равенству $V_1 = V_2 = V$.

Таким образом, решить игру $\Gamma(X,\ Y,\ M)$ означает найти седловую точку или такие смешанные стратегии, при которых нижняя и верхняя цены игры совпадают.

Теперь возникает два вопроса:

1. Когда существует решение непрерывной игры $\Gamma(X,\ Y,\ M)$?
2. Какими методами найти решения игры $\Gamma(X,\ Y,\ M)$?

Ответ на первый вопрос не аналогичен ответу в матричных играх. Оказывается, что не для всякой бесконечной антагонистической игры $\Gamma(X,\ Y,\ M)$ существует решение. Позже будет рассмотрена теорема существования решения бесконечных игр.

Для получения ответа на второй вопрос необходимо рассмотреть свойства оптимальных смешанных стратегий и цены игры, из которых будут следовать некоторые методы решения непрерывных игр. Эти свойства будем формулировать в виде теорем.

Теорема 4.1. *Для того чтобы пара смешанных стратегий F^*, G^* соответственно первого и второго игроков в антагонистической бесконечной игре $\Gamma(X,\ Y,\ M)$ была оптимальной (образовывала седловую* *точку), необходимо и достаточно, чтобы при всех* $x \in X$ *и* $y \in Y$ *имело место неравенство*

$$\int\limits_Y M(x,\ y)\,dG^*(y) \leqslant E(F^*,\ G^*) \leqslant \int\limits_X M(x,\ y)\,dF^*(x). \tag{4.9}$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна, так как в левой части неравенства (4.9) средний выигрыш получается, когда первый игрок применяет свою чистую стратегию x, что является частным случаем смешанной стратегии, а правая часть неравенства (4.9) означает средний выигрыш при условии, что второй игрок применяет свою чистую стратегию, которая не лучше смешанной.

Достаточность. Пусть неравенство (4.9) справедливо, тогда

$$\int\limits_Y M(x,\ y)\,dG^*(y) \leqslant E(F^*,\ G^*).$$

С другой стороны, пусть

$$\int\limits_Y M(x,\ y)\,dG^*(y) \leqslant a,$$

тогда, проинтегрировав по функции $F(x)$, получим

$$E(F,\ G^*) = \int\limits_X \int\limits_Y M(x,\ y)\,dF(x)\,dG^*(y) \leqslant \int\limits_X a\,dF(x) = a.$$

Поскольку справедлива левая часть неравенства (4.9), то и справедливо неравенство

$$E(F,\ G^*) \leqslant E(F^*,\ G^*). \tag{4.10}$$

Аналогично рассматривается правая часть неравенства (4.9)

$$F(F^*,\ G^*) \leqslant \int\limits_X M(x,\ y)\,dF^*(x).$$

Пусть справедливо

$$a \leqslant \int\limits_X M(x,\ y)\,dF^*(x),$$

тогда, проинтегрировав последнее неравенство по функции $G(y)$, получим

$$E(F^*,\ G) = \int\limits_X \int\limits_Y M(x,\ y)\,dF^*(x)\,dG(y) \geqslant a,$$

поэтому справедливо неравенство

$$E(F^*,\ G^*) \leqslant E(F^*,\ G). \tag{4.11}$$

Неравенства (4.10) и (4.11) показывают, что $(F^*,\ G^*)$ образуют седловую точку для функции $E(F,\ G)$, что и требовалось доказать.

Смысл теоремы 4.1 состоит в следующем: каждый игрок поступит не лучшим образом, если он применит свою чистую стратегию, а не оптимальную смешанную стратегию. С другой стороны, смешанные стратегии игроков будут оптимальными, если средний выигрыш игрока при этих смешанных стратегиях будет больше, чем при любой чистой стратегии одного игрока и смешанной стратегии другого игрока. Другими словами, если мы желаем проверить оптимальность пары смешанных стратегий (F^*, G^*) игроков, то достаточно проверить, выполняются ли соотношения (4.9) только для всех чистых стратегий обоих игроков, а не смешанных. Для получения других свойств оптимальных смешанных стратегий будут полезны следующие леммы:

Лемма 4.1. *Пусть* $\Gamma(X, Y, M)$ *— бесконечная антагонистическая игра.*

Для любой смешанной стратегии G *второго игрока справедливо равенство*

$$\sup_x \int_Y M(x, y)\, dG(y) = \sup_F \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.12}$$

Для любой смешанной стратегии F *первого игрока справедливо равенство*

$$\inf_y \int_X M(x, y)\, dF(x) = \inf_G \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.13}$$

Доказательство. Покажем справедливость (4.12). Поскольку область смешанных стратегий шире области чистых стратегий, то

$$\sup_x \int_Y M(x, y)\, dG(y) \leqslant \sup_F \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.14}$$

Предположим, что в (4.14) выполняется строгое неравенство, это значит, что найдется такая $F^1(x)$, при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_x \int_Y M(x, y)\, dG(y) < \int_X \int_Y M(x, y)\, dF^1(x)\, dG(y) - \varepsilon,$$

т. е. что при всех $x \in X$

$$\int_Y M(x, y)\, dG(y) < \int_X \int_Y M(x, y)\, dF^1(x)\, dG(y) - \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к смешанным стратегиям, получаем, что должно быть справедливо следующее неравенство:

$$\int_X \int_Y M(x, y)\, dF^1(x)\, dG(y) < \int_X \int_Y M(x, y)\, dF^1(x)\, dG(y) - \varepsilon.$$

Очевидно, последнее неравенство несправедливо, следовательно, в (4.14) имеет место равенство.

Аналогично доказывается справедливость (4.13).

Лемма 4.2. *Для бесконечной антагонистической игры* $\Gamma(X, Y, M)$ *справедливы следующие соотношения:*

при любой смешанной стратегии G *второго игрока максимумы*

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG(y), \quad \max_F \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) \tag{4.15}$$

существуют или нет одновременно, и если существуют, то равны;

при любой смешанной стратегии F первого игрока минимумы

$$\min_y \int_X M(x, y)\, dF(x), \quad \min_G \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) \qquad (4.16)$$

существуют или нет одновременно, и если существуют, то равны. Доказательство этой леммы можно найти в [5].

Следующее важное свойство сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.2. *Если существует решение бесконечной антагонистической игры* $\Gamma(X, Y, M)$, *то смешанные стратегии* F^*, G^* *соответственно первого и второго игроков являются оптимальными, а* V — *ценой игры тогда и только тогда, когда удовлетворяются следующие равенства:*

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG^*(y) = \min_y \int_X M(x, y)\, dF^*(x) = V. \qquad (4.17)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть решение игры $\Gamma(F, G, M)$ существует. Тогда по теореме 4.1 существуют такие F^*, G^* и V, что выполняются неравенства (4.9) и существует цена игры

$$E(F^*, G^*) = \int_X \int_Y M(x, y)\, dF^*(x)\, dG^*(y) = V.$$

Тогда согласно лемме 4.2 существует

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG^*(y)$$

и равен $E(F^*, G^*)$, т. е. левая часть (4.17) выполняется. Аналогично доказывается, что будет выполняться и правая часть равенства (4.17). Итак, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется (4.17). Из теоремы 4.1 следует, что стратегии F^* и G^* оптимальные, если выполняются неравенства (4.9). Рассмотрим левую часть этого неравенства:

$$\int_Y M(x, y)\, dG^*(y) \leqslant E(F^*, G^*),$$

отсюда следует, что

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG^*(y) \leqslant E(F^*, G^*).$$

Аналогично, правая часть неравенств (4.9) приводит к следующему неравенству:

$$E(F^*, G^*) \leqslant \min_y \int_X M(x, y)\, dF^*(x).$$

Объединяя последние неравенства, получим

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG^*(y) \leqslant E(F^*, G^*) \leqslant \min_y \int_X M(x, y)\, dF^*(x).$$

Поскольку справедливо равенство (4.17), то

$$\max_x \int_Y M(x, y)\, dG^*(y) = E(F^*, G^*) = \min_y \int_X M(x, y)\, dF^*(x) = V,$$

т. е. стратегии F^* и G^* оптимальные. Итак, достаточность доказана.

Теорема 4.2 показывает, что для проверки на оптимальность какой-либо пары смешанных стратегий первого и второго игроков достаточно для них проверить существование левой и правой части равенства (4.17) и справедливость равенства (4.17).

Пример 4.3. Пусть имеется бесконечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой и функцией выигрышей $M(x, y) = (x - y)^2$, заданной на единичном квадрате $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. Требуется проверить на оптимальность следующие стратегии: для первого игрока $P\{x = 0\} = P\{x = 1\} = 0{,}5$, для второго игрока $y = 0{,}5$.

Итак, предполагается, что функции распределения вероятностей

$$F(x) = \frac{1}{2} I_0(x) + \frac{1}{2} I_1(x) \quad \text{и} \quad G(y) = I_{\frac{1}{2}}(y)$$

есть оптимальные смешанные стратегии соответственно для первого и второго игроков.

Напомним, что $I_a(x)$ — ступенчатая функция:

$$I_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant a \\ 1 & \text{при} \quad x > a. \end{cases}$$

Для этой цели воспользуемся теоремой 4.2 и проверим справедливость равенства (4.17).

Левая часть равенства существует в виде

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG(y) = \max_x M\left(x, \frac{1}{2}\right) = \max_x \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и достигается при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Правая часть равенства (4.17) существует в виде

$$\min_y \int_0^1 M(x, y)\, dF(x) = \min_y \left[\frac{1}{2} M(0, y) + \frac{1}{2} M(1, y)\right] =$$

$$= \min_y \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}(1 - y)^2\right] = \min_y (y^2 - y + 0{,}5) = \frac{1}{4}$$

и достигается при $y = 0{,}5$.

Итак, для данных функций $F(x)$ и $G(y)$ равенство (4.17) выполняется, и поэтому они являются оптимальными смешанными стратегиями: первый игрок выбирает $x = 0$ или $x = 1$ с вероятностью 0,5, а второй игрок выбирает $y = 0{,}5$, цена игры равна $V = 0{,}25$.

Теорема 4.3. *Для любой бесконечной антагонистической игры* $\Gamma(X, Y, M)$, *имеющей цену игры* V, *справедливы неравенства*

$$\sup_x \inf_y M(x, y) \leqslant V \leqslant \inf_y \sup_x M(x, y). \tag{4.18}$$

Доказательство. Согласно лемме 4.1 для любых стратегий $F(x)$ и $G(x)$ соответственно первого и второго игроков

$$\inf_{y} \int_{X} M(x, y)\, dF(x) = \inf_{G} \int_{X} \int_{Y} M(x, y)\, dF(x)\, dG(y),$$

и поэтому

$$\sup_{x} \inf_{y} M(x, y) \leqslant \sup_{F} \inf_{y} \int_{X} M(x, y)\, dF(x) =$$

$$= \sup_{F} \inf_{G} \int_{X} \int_{Y} M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) = V.$$

Левая часть неравенства (4.18) доказана. Аналогично доказывается правая часть неравенства (4.18).

Смысл теоремы 4.3. заключается в том, что если существует нижняя и верхняя цены игры, то нижняя цена игры не превосходит, а верхняя — не меньше цены игры, т. е.

$$V_1 \leqslant V \leqslant V_2,$$

где V_1 — нижняя цена игры, V_2 — верхняя цена игры.

Теорема 4.4. *Если бесконечная антагонистическая игра $\Gamma(X, Y, M)$ имеет цену игры V, то функция $F(x)$ является оптимальной смешанной стратегией первого игрока тогда и только тогда, когда для всякого $y \in Y$ справедливо неравенство*

$$V \leqslant \int_{X} M(x, y)\, dF(x);$$

функция $G(y)$ есть оптимальная смешанная стратегия для второго игрока, тогда и только тогда, когда для всякого $x \in X$ справедливо неравенство

$$\int_{Y} M(x, y)\, dG(y) \leqslant V.$$

На основании теоремы 4.2 получаем:

$$V = \min_{y} \int_{X} M(x, y)\, dF(x) \leqslant \int_{X} M(x, y)\, dF(x),$$

$$V = \max_{x} \int_{Y} M(x, y)\, dG(y) \geqslant \int_{Y} M(x, y)\, dG(y),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 4.5. *Если в бесконечной антагонистической игре $\Gamma(X, Y, M)$ первый игрок имеет чистую оптимальную стратегию, а второй игрок — произвольную (смешанную или чистую стратегию), то цена игры*

$$V = \max_{x} \min_{y} M(x, y) = \min_{y} M(x_0, y) \qquad (4.19)$$

и x_0 определяется из уравнения (4.19).

Аналогично, если второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию y_0, а первый — произвольную, то

$$V = \min_y \max_x M(x, y) = \max_x M(x, y_0) \qquad (4.20)$$

и y_0 определяется из уравнения (4.20).

Доказательство. Рассмотрим первую часть теоремы. Пусть x — оптимальная чистая стратегия первого игрока, тогда

$$V = \max_F \min_G \int_X \int_Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \max_{I_a} \min_G \int_X \int_Y M(x, y)\, dI_a(x)\, dG(y) =$$

$$= \max_{a \in X} \min_G \int_Y M(a, y)\, dG(y) =$$

$$= \max_{a \in X} \min_y M(a, y) = \max_x \min_y M(x, y).$$

С другой стороны, если I_a — оптимальная стратегия первого игрока, то

$$V = \min_y \int_X M(x, y)\, dI_a(x),$$

или

$$V = \min_y M(a, y).$$

Для любого a, удовлетворяющего последнему равенству, имеем

$$V \leqslant M(a, y) = \int_X M(x, y)\, dI_a(x),$$

т. е. на основании теоремы 4.4 I_a — оптимальная стратегия, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Из этой теоремы следует, что информация о существовании оптимальной чистой стратегии у игрока приводит к упрощению нахождения оптимальных стратегий.

Теорема 4.6 (основная теорема теории непрерывных игр на единичном квадрате). *Всякая антагонистическая бесконечная игра двух игроков* Г *с непрерывной функцией выигрышей M (x, y) на единичном квадрате имеет решение (игроки имеют оптимальные смешанные стратегии).*

Доказательство этой теоремы можно найти в [5], [12]. Таким образом, теорема 4.6 дает ответ на первый вопрос о существовании решения бесконечной антагонистической игры.

Теорема 4.7. *Пусть* Г *бесконечная антагонистическая игра с непрерывной функцией выигрышей M (x, y) на единичном квадрате и ценой* *игры V. Тогда, если G (y) — оптимальная стратегия второго игрока и для некоторого* x_0

$$\int_0^1 M(x_0, y)\,dG(y) < V,$$

то x_0 *не может входить в точки спектра оптимальной стратегии первого игрока; если F (x) — оптимальная стратегия первого игрока и для некоторого* y_0

$$\int_0^1 M(x, y)\,dF(x) > V,$$

то y_0 *не может быть точкой спектра оптимальной стратегии второго игрока.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Теорема 4.7 показывает, что если один из игроков применяет оптимальную стратегию, а другой — чистую, когда средний выигрыш первого игрока отличается от цены игры, то эта чистая стратегия не может войти в его оптимальную стратегию (или она входит в нее с вероятностью нуль).

Теорема 4.8. *Пусть в бесконечной антагонистической игре функция выигрышей M (x, y) непрерывная для* $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ *и*

$$M(x, y) = -M(y, x),$$

тогда цена игры равна нулю, любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией другого игрока.

Доказательство. Пусть V — цена игры, $F^0(x)$ и $G^0(y)$ — оптимальные стратегии соответственно первого и второго игроков, $F(x)$ и $G(y)$ — произвольные смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков:

$$E(F, G, M(x, y)) = \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF(x)\,dG(y),$$

тогда из условий оптимальности следует

$$E(F, G^0, M(x, y)) \leqslant E(F^0, G^0, M(x, y)) \leqslant E(F^0, G, M(x, y)).$$

Произведя замену $M(x, y)$ на $-M(y, x)$ в последнем неравенстве, получим

$$E(F, G^0, -M(y, x)) \leqslant E(F^0, G^0, M(x, y)) \leqslant E(F^0, G, -M(y, x))$$

или

$$E(F^0, G, M(y, x)) \geqslant -E(F^0, G^0, M(x, y)) \geqslant E(F, G^0, M(y, x)$$

Изменив обозначения переменных в последнем неравенстве, получим

$$E(G, F^0, M(x, y)) \geqslant -E(F^0, G^0, M(x, y)) \geqslant$$
$$\geqslant E(G^0, F, M(x, y)), \qquad (4.21)$$

т. е.

$$V = -E(F^0, G^0, M(x, y)) = -V,$$

откуда следует, что $V = 0$. Из (4.21) вытекает, что F^0 есть оптимальная стратегия второго игрока, а G^0 — оптимальная стратегия первого игрока. Таким образом, теорема доказана.

Часто можно отыскать решение игры, воспользовавшись догадкой о функции F и G для смешанных стратегий игроков. Рассмотрим это на примере.

Пример 4.4. Найти решение бесконечной антагонистической игры с непрерывной функцией на единичном квадрате

$$M(x, y) = \sin 2\pi (x - y).$$

Проверим, являются ли $F(x) = x$, $G(y) = y$ оптимальными смешанными стратегиями соответственно для первого и второго игроков. Поскольку

$$M(x, y) = \sin 2\pi (x - y) = -\sin 2\pi (y - x) = -M(y, x),$$

то согласно теореме 4.8 получаем значение цены игры $V = 0$.

Проверим справедливость равенства (4.17). Левая часть равна

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG(y) = \max_x \int_0^1 \sin 2\pi (x - y)\, dy = \max_x \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times [\cos 2\pi (x - y)]_0^1 = \frac{1}{2\pi} \max_x [\cos 2\pi (x - 1) - \cos 2\pi x] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \max_x \sin \pi \sin \pi (2x - 1) = 0.$$

Правая часть равенства (4.17) равна нулю, так как

$$M(x, y) = -M(y, x).$$

Поэтому $F(x) = x$ и $G(y) = y$ — оптимальные стратегии игроков.

Сформулированные свойства оптимальных смешанных стратегий и цены игры помогают находить или проверять решения, но они еще не дают в общем виде приемлемых методов решения игры. Поэтому рассматриваются частные виды антагонистических бесконечных игр.

4.2. ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫШЕЙ

Одним из интересных классов антагонистических бесконечных игр, для которых легко находить решения, являются игры с выпуклыми непрерывными функциями выигрышей. Такие игры будем называть *выпуклыми*.

Напомним, что выпуклой функцией f действительной переменной x на интервале (a, b) называется такая функция, для которой выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

где x_1 и x_2 — любые две точки из интервала (a, b); λ_1 и λ_2 — неотрицательные числа, причем $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Если для $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ всегда имеет место строгое неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

то функция f называется строго выпуклой на (a, b). Геометрически выпуклая функция изображает дугу, график которой расположен ниже стягивающей ее хорды (рис. 4.1). Точка D, лежащая на кривой и имеющая координаты $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))$, находится ниже точки B, имеющей координаты $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))$, так как $QD \leqslant QB$.

Аналогично определяются выпуклые функции для n переменных: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выпуклая на множестве X, если для любых двух

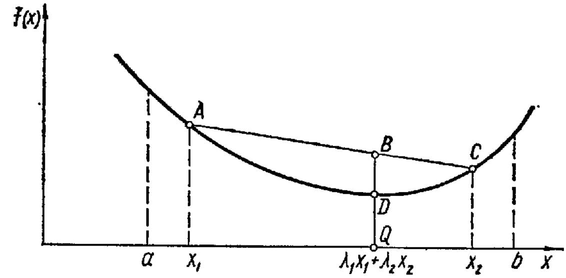

Рис. 4.1

точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$; $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2,\ \lambda_1 x_2 + \lambda_2,\ y_2,\ \ldots,\ \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_2 f(y_1, \ldots, y_n)$$

при $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Если при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ выполняется строгое неравенство для функции, то она называется строго выпуклой на X.

Напомним, что непрерывная и строго выпуклая функция f на замкнутом интервале принимает минимальное значение только в одной точке интервала.

Выпуклая функция при увеличении аргумента не может переходить от возрастания к убыванию.

Для дальнейших исследований необходимо пользоваться свойствами выпуклых функций, сформулированных в виде лемм.

Лемма 4.3. *Если функция $f(x, y)$ выпукла (строго выпукла) по y на Y при любом значении $x \in X$, а $F(x)$ — функция распределения на X, тогда*

$$\varphi(y) = \int_X f(x, y)\, dF(x)$$

также является выпуклой (строго выпуклой) функцией по y.

Доказательство. Пусть λ такое, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, тогда на основании выпуклости f для любых y_1 и y_2 из Y получим

$$\varphi(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = \int_X f(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)\, dF(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_X (\lambda f(x, y_1) + (1-\lambda) f(x, y_2))\, dF(x) =$$

$$= \lambda \int_X f(x, y_1)\, dF(x) + (1-\lambda) \int_X f(x, y_2)\, dF(x) =$$

$$= \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\,\varphi(y_2),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4.4. *Если f выпукла на сегменте $[a, b]$, а $F(x)$ функция распределения вероятностей на $[a, b]$, то*

$$f\left(\int_a^b x dF(x)\right) \leqslant \int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Доказательство можно найти в [5].

Для нахождения решения выпуклой игры можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 4.9. Пусть $M(x, y)$ — непрерывная функция выигрышей первого игрока, на единичном квадрате и строго выпуклая по y для любого x. Тогда имеется единственная оптимальная чистая стратегия $y = y_0 \in [0, 1]$ для второго игрока, цена игры определяется по формуле

$$V = \min_y \max_x M(x, y),$$

значение y_0 определяется как решение следующего уравнения

$$\max_x M(x, y_0) = V. \tag{4.22}$$

Доказательство. Поскольку $M(x, y)$ непрерывна, то согласно основной теореме существования, решение игры существует. Пусть V — цена игры, $F(x)$ — оптимальная стратегия первого игрока, $G(y)$ — второго игрока. Тогда для любого $x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dG(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) = V. \tag{4.23}$$

Положим

$$y_0 = \int_0^1 y dG(y),$$

тогда на основании леммы 4.4 при любом x

$$M(x, y_0) = M\left(x, \int_0^1 y dG(y)\right) \leqslant \int_0^1 M(x, y)\, dG(y). \tag{4.24}$$

Учитывая неравенство (4.23), получим

$$M(x, y_0) \leqslant V \quad \text{для всех} \quad x \in [0,1],$$

поэтому y_0 является оптимальной чистой стратегией второго игрока.

Далее, на основании теоремы 4.5 получим

$$V = \min_y \max_x M(x, y),$$

$$V = \max_x M(x, y_0), \tag{4.25}$$

т. е. y_0 есть решение уравнения (4.22), что и требовалось доказать.

Замечание. Если в теореме 4.9 не предполагать строгую выпуклость функции $M(x, y)$ по y, а просто выпуклость, то теорема остается в силе с тем отличием, что у второго игрока оптимальная чистая стратегия не будет единственной.

Итак, если $M(x, y)$ непрерывна и выпукла по y, то цена игры определяется по формуле (4.25), и второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию, определяемую из уравнения (4.22).

Точно также обстоит дело и для первого игрока: если функция выигрышей $M(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам и строго вогнута по x при любом y, то в этом случае первый игрок имеет единственную оптимальную стратегию.

Цена игры определяется по формуле

$$V = \max_x \min_y M(x, y), \tag{4.26}$$

а чистая оптимальная стратегия x_0 первого игрока определяется из уравнения

$$\min_y M(x_0, y) = V. \tag{4.27}$$

Пример 4.5. Пусть на квадрате [0, 1] задана функция

$$M(x, y) = \sin\frac{\pi(x+y)}{2}. \tag{4.28}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi(x+y)}{2} < 0 \text{ для } x \in [0, 1], \ y \in (0, 1),$$

то $M(x, y)$ строго вогнута по x для любого $y \in (0, 1)$. Следовательно, цена игры находится по формуле (4.26)

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Заметим, что при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ справедливо равенство

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi x}{2},$$

а при $0{,}5 < x \leqslant 1$

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi(x+1)}{2}.$$

Поэтому

$$V = \max\left[\max_{0 \leqslant x \leqslant 0{,}5} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}, \max_{0{,}5 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\max_{0\leqslant x\leqslant 0,5} \sin\frac{\pi x}{2},\ \max_{0,5\leqslant x\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При этом значение x получается равным $x_0 = 0,5$. Это же значение получается из решения уравнения

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

так как $\min\limits_{y}$ достигается при $y = 0$, и это уравнение превращается в следующее:

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда следует, что $x = 0,5$.

Заметим, что если в функции выигрышей (4.28) поменять местами x и y, то она не изменится, следовательно, эта функция выпукла и по y при всех $x \in [0,\ 1]$. Поэтому к ней применима та же теория, т. е. у второго игрока существует оптимальная чистая стратегия y_0, определяемая из уравнения (4.22)

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4.29}$$

Очевидно, максимум по x достигается при $x = 0,5$, и уравнение (4.29) примет вид:

$$\sin\frac{\pi(0,5+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решением последнего уравнения будет $y_0 = 0$. Итак, второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию $y_0 = 0$.

Рассмотрим теперь метод определения оптимальных стратегий того игрока, для которого функция выигрышей не обязательно выпукла. Пусть непрерывная функция выигрышей $M(x,\ y)$, заданная на единичном квадрате, выпукла по y. Нас будет интересовать вопрос нахождения оптимальных стратегий первого игрока. Предположим также, что для $x \in [0,\ 1]$, $y \in [0,\ 1]$ существует частная производная функции $M(x,\ y)$ по y, которую мы обозначим $M'_y(x,\ y)$, причем в крайней левой точке при $y = 0$ выражение $M'_y(x,\ y)$ понимается как правая производная, а в крайней правой точке при $y = 1$ она понимается как левая производная. Обозначим через y_0 одну из оптимальных чистых стратегий второго игрока (эта стратегия существует в соответствии с теоремой 4.9)

Согласно теореме 4.7 чистые стратегии x первого игрока могут входить в его оптимальную стратегию с положительной вероятностью, если для них выполняется равенство

$$M(x,\ y_0) = V. \tag{4.30}$$

Такие чистые стратегии x называются существенными.

Полезной может быть следующая теорема.

Теорема 4.10. Пусть в бесконечной антагонистической игре на единичном квадрате функция выигрышей $M(x, y)$ непрерывна, выпукла по y при любом $x \in [0, 1]$, дифференцируема по y, и y_0 — оптимальная чистая стратегия второго игрока, тогда:

1) если $y_0 > 0$, то найдется такая существенная чистая стратегия x_1 первого игрока, что

$$M'_y(x_1, y_0) \leqslant 0; \tag{4.31}$$

2) если $y_0 < 1$, то найдется такая существенная стратегия x_2 первого игрока, что

$$M'_y(x_2, y_0) \geqslant 0. \tag{4.32}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Теорема 4.11. Пусть дана бесконечная антагонистическая игра с непрерывной и дифференцируемой по y на единичном квадрате при любом x функцией выигрышей $M(x, y)$, с оптимальной чистой стратегией y_0 второго игрока и ценой игры V, тогда:

1) если $y_0 = 1$, то среди оптимальных стратегий первого игрока имеется существенная чистая стратегия x_1, для которой

$$M'_y(x_1, 1) \leqslant 0;$$

2) если $y_0 = 0$, то среди оптимальных стратегий первого игрока имеется существенная чистая стратегия x_2, для которой

$$M'_y(x_2, 0) \geqslant 0;$$

3) если $0 < y_0 < 1$, то среди оптимальных стратегий первого игрока найдется такая, которая является смесью двух существенных стратегий x_1 и x_2. Для этих стратегий

$$M'_y(x_1, y_0) \leqslant 0, \quad M'_y(x_2, y_0) \geqslant 0,$$

стратегия x_1 употребляется с вероятностью α, стратегия x_2 — с вероятностью $1-\alpha$, где α находится из уравнения

$$\alpha M'_y(x_1, y_0) + (1-\alpha) M'_y(x_2, y_0) = 0. \tag{4.33}$$

Доказательство. Пусть $y_0 = 1$, тогда согласно теореме 4.10 найдется существенная стратегия x_1 первого игрока, для которой выполняется неравенство (4.31), следовательно, вблизи $y_0 = 1$ функция $M(x_1, y)$ убывает, т. е. $M'_y(x_1, 1) \leqslant 0$. Но выпуклая функция не может переходить от возрастания к убыванию, поэтому $M(x_1, y)$ убывает на всем сегменте $[0, 1]$, достигая при $y = 1$ своего минимума, т. е.

$$M(x_1, y_0) \leqslant M(x_1, y) \quad \text{при всех} \quad y \in [0, 1].$$

С другой стороны, для существенной стратегии x_1 имеет место неравенство

$$M(x, y_0) \leqslant M(x_1, y_0) \quad \text{при всех} \quad x \in [0, 1].$$

Объединяя последние неравенства, получаем

$$M(x, y_0) \leqslant M(x_1, y_0) \leqslant M(x_1, y),$$

т. е. (x_1, y_0) — седловая точка, и первый случай рассмотрен. Второй случай рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь третий случай. Поскольку $0 < y < 1$, то согласно теореме 4.10 существуют такие существенные стратегии x_1 и x_2, которые удовлетворяют неравенствам (4.31) и (4.32).

Введем функцию

$$f(\xi) = \xi M_y'(x_1, y_0) + (1 - \xi) M_y'(x_2, y_0).$$

На основании неравенств (4.31) и (4.32) получаем, что

$$f(0) \geqslant 0 \quad f(1) \leqslant 0.$$

Поскольку $f(\xi)$ непрерывна, то найдется такое $\alpha \in [0, 1]$, что

$$f(\alpha) = 0.$$

Рассмотрим теперь смешанную стратегию $f(x)$ первого игрока в следующем виде:

$$F(x) = \alpha I_{x_1}(x) + (1 - \alpha) I_{x_2}(x),$$

т. е. он применяет свою чистую стратегию x_1 с вероятностью α и x_2 — с вероятностью $(1 - \alpha)$. Тогда

$$\int_0^1 M(x, y)\,dF(x) = \alpha M(x_1, y) + (1 - \alpha) M(x_2, y) \qquad (4.34)$$

также является выпуклой функцией по y. Производная от этой функции в точке $y = y_0$ совпадает с $f(\xi)$ при $\xi = \alpha$ и равна нулю:

$$\alpha M_y'(x_1, y_0) + (1 - \alpha) M_y'(x_2, y_0) = f(\alpha) = 0.$$

Поэтому в точке y_0 функция (4.34) достигает минимума при $y = y_0$, а это значит, что

$$\int_0^1 M(x, y_0)\,dF(x) \leqslant \int_0^1 M(x, y)\,dF(x) \quad \text{при} \quad y \in [0, 1]. \qquad (4.35)$$

С другой стороны, x_1 — существенная стратегия, поэтому

$$\int_0^1 M(x, y_0)\,dF(x) = M(x_1, y_0) = V = \max_x M(x, y_0) \geqslant M(x, y_0)$$

$$\text{при всех } x \in [0, 1].$$

Из соотношений (4.35) и последнего следует, что $F(x)$ и y_0 образуют седловую точку, и поэтому $F(x)$ является оптимальной стратегией, что и требовалось доказать.

Пример 4.6. Пусть функция выигрышей в бесконечной антагонистической игре задана на единичном квадрате и равна

$$M(x, y) = (x - y)^2.$$

Эта функция непрерывна по x и y, и поэтому эта игра имеет решение. Кроме того,

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, $M(x, y)$ выпукла по y, и поэтому согласно теореме 4.9 цена игры определяется по форме (4.25), второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию y_0, определяемую из уравнения (4.22). Итак,

$$V = \min_{y} \max_{x} (x-y)^2 = \min_{y} \max [y^2, (1-y)^2] = \frac{1}{4}$$

при $y_0 = \frac{1}{2}$.

Определим теперь оптимальные стратегии для первого игрока. Поскольку $y_0 = \frac{1}{2}$, то $0 < y_0 < 1$. Согласно теореме 4.11 рассмотрим третий случай.

Определяем x из уравнения

$$M(x, y_0) = V,$$

т. е.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Решая последнее уравнение, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Теперь необходимо определить величину α — вероятности применения чистой стратегии $x_1 = 0$. С этой целью используем уравнение (4.33)

$$\alpha M_y'\left(0, \frac{1}{2}\right) + (1-\alpha) M_y'\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Нетрудно найти

$$M_y'\left(0, \frac{1}{2}\right) = -2(x-y)\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0,5}} = +1,$$

$$M_y'\left(1, \frac{1}{2}\right) = -2(x-y)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=0,5}} = -1.$$

Тогда уравнение для α примет вид

$$\alpha - (1-\alpha) = 0,$$

откуда $\alpha = 0{,}5$. Итак, стратегия первого игрока

$$F(x) = 0{,}5 I_0(x) + 0{,}5 I_1(x),$$

а для второго

$$G(y) = I_{\frac{1}{2}}(y).$$

4.3. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ (РАЗДЕЛИМЫЕ) ИГРЫ

Игры этого вида получили название от вида функции выигрышей. В сепарабельной игре, т. е. в бесконечной антагонистической игре функция выигрышей $M(x, y)$ — сепарабельная на замкнутом квадрате, т. е. может быть представлена в виде суммы произведений функций, зависимых только от одного аргумента

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y), \tag{4.36}$$

где функции $r_i(x)$ и $s_j(y)$ — непрерывны на замкнутом единичном квадрате, a_{ij} — вещественные числа.

Для определенности будем полагать, что

$$n \leqslant m.$$

Если в равенстве (4.36) обозначить через

$$r_j^1(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x),$$

то получим

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{h} r_j^1(x) s_j(y). \tag{4.37}$$

Пусть по-прежнему $F(x)$ — смешанная стратегия первого игрока, $G(y)$ — смешанная стратегия второго игрока, тогда средний выигрыш

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \int_0^1 r_i(x)\, dF(x) \int_0^1 s_j(y)\, dG(y).$$

Введем обозначения

$$u_i = \int_0^1 r_i(x)\, dF(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.38}$$

$$w_j = \int_0^1 s_j(y)\, dG(y) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.39}$$

Тогда средний выигрыш составит

$$E(F, G) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i w_j = E(u, w), \tag{4.40}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — точки соответственно m-мерного и n-мерного пространств.

Итак, средний выигрыш $E(u, w)$ представляет собой билинейную форму относительно переменных $u_1, \ldots, u_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, следовательно, отыскание оптимальных смешанных стратегий сведено к отысканию значений точек u и w, удовлетворяющих соотношению

$$\min_{w} \max_{u} E(u, w) = \max_{u} \min_{w} E(u, w) = V.$$

Поскольку $r_i(x)$ и $s_j(y)$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) — непрерывные функции, то и $M(x, y)$ — непрерывная функция, следовательно, сепарабельная игра имеет решения.

Очевидно, каждой функции $F(x)$ по формуле (4.38) соответствует вполне определенная точка u, а для $G(y)$ — определенная точка w.

Обозначим через U множество точек, полученных для всевозможных функций распределения $F(x)$, а через W — множество точек, полученных для всевозможных функций распределения $G(y)$. Множества U и W относятся к данному представлению $M(x, y)$. С другой стороны, одной и той же точке u (или w) будет соответствовать не одна функция $F(x)$ или $G(y)$. Однако $F^1(x)$ и $F^2(x)$ будем считать эквивалентными, если им соответствует одна и та же точка u. Аналогично функции $G^1(y)$ и $G^2(y)$ считаются эквивалентными, если им соответствует одна и та же точка w.

Это определение эквивалентности исходит из того, что для эквивалентных функций F^1 и F^2, а также G^1 и G^2 средние выигрыши игрока совпадают

$$E(F^1, G^1) = E(F^2, G^2) = E(u, w).$$

Теперь необходимо дать описание методов решения игры. С этой целью рассмотрим сначала свойства множеств U и W, а также структуру функций распределения F и G, образующих оптимальные смешанные стратегии игроков. Эти свойства будем формулировать в виде теорем.

По аналогии с определением выпуклой линейной комбинации точек эвклидова пространства будем называть функцию F выпуклой линейной комбинацией функций $F^1, \ldots, F^r$ с весами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, если точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in S_r$ и

$$F = \alpha_1 F^1(x) + \alpha_2 F^2(x) + \cdots + \alpha_r F^r(x).$$

Напомним, что $\alpha \in S_r$, если $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_r \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$. Напомним, что если $F^1, \ldots, F^p$ —функции распределения вероятностей, то F — также функция распределения вероятностей.

Теорема 4.12. *Пусть $F^1, \ldots, F^p$ —функции распределения, $u^1, u^2, \ldots$ $\ldots, u^p$ —соответствующие им точки пространства U разделимой игры и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ — любой элемент из S_p, тогда выпуклая линейная комбинация*

$$u = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \cdots + \alpha_p u^p$$

есть точка множества U и соответствует функции распределения

$$F(x) = \alpha_1 F^1(x) + \alpha_2 F^2(x) + \cdots + \alpha_p F^p(x).$$

Аналогичное утверждение справедливо для множества W.

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ представлена в виде (4.36), а точки $u^i = (u_1^i, \ldots, u_m^i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ имеют координаты

$$u_j^i = \int_0^1 r_j(x)\, dF^i(x) \qquad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, m). \quad (4.41)$$

Пусть $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Поскольку u есть выпуклая линейная комбинация точек $u^1, \ldots, u^p$, то

$$u_j = \alpha_1 u_j^1 + \alpha_2 u_j^2 + \cdots + \alpha_p u_j^p \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Подставляя (4.41) в последнее равенство, получим

$$u_j = \alpha_1 \int_0^1 r_j(x)\, dF^1(x) + \cdots + \alpha_p \int_0^1 r_j(x)\, dF^p(x)$$

и, следовательно,

$$u_j = \int_0^1 r_j(x)\, d\,[\alpha_1 F^1(x) + \cdots + \alpha_p F^p(x)] = \int_0^1 r_j(x)\, dF(x).$$

Так как всякая выпуклая линейная комбинация функций распределения вероятностей является также функцией распределения вероятностей, то F является функцией распределения вероятностей и, следовательно, u принадлежит множеству U, что и требовалось доказать. Для множества W доказательство аналогичное.

Итак, на основании теоремы 4.12 можно сказать, что всякая выпуклая линейная комбинация точки из множества U принадлежит этому множеству, а это значит, что множество U выпуклое. Выделим из множества U подмножество U^* точек, которые соответствуют одноступенчатым функциям распределения вероятностей. Аналогично W^* состоит из точек множества W, соответствующих одноступенчатым функциям распределения вероятностей.

Теорема 4.13. *Для сепарабельной игры множество U^* по отношению к данному представлению* (4.36) *состоит из всех точек $u = (u_1, \ldots, u_m)$, таких, что для некоторого $t \in [0, 1]$*

$$u_1 = r_1(t),\ u_2 = r_2(t),\ \ldots,\ u_m = r_m(t).$$

Аналогично множество W^* состоит из точек $w = (w_1, \ldots, w_n)$, таких, что для некоторого $t \in [0, 1]$

$$w_1 = s_1(t),\ w_2 = s_2(t),\ \ldots,\ w_n = s_n(t).$$

Доказательство. Поскольку точка $u = (u_1, \ldots, u_m)$ принадлежит U^* тогда и только тогда, когда ей соответствует одноступенчатая функция I_t, то для некоторого $t \in [0, 1]$ получим

$$u_1 = \int_0^1 r_1(x)\, dI_t(x) = r_1(t),\ \ldots,\ u_m = \int_0^1 r_m(x)\, dI_t(x) = r_m(t),$$

что и требовалось доказать.

Для второй части теоремы доказательство аналогично. Из теоремы 4.13 и определения сепарабельной игры вытекает, что множества U^* и W^* — ограниченные, замкнутые, связные множества. Следующая теорема дает возможность описать границы множеств U и W.

Напомним, что выпуклой оболочкой множества A называется пересечение всех выпуклых множеств, подмножеством которых является A.

Теорема 4.14. *Множество U для любой разделимой игры является выпуклой оболочкой множества U^*, а множество W — выпуклая оболочка множества W^*.*

Доказательство. Обозначим через U^1 выпуклую оболочку множества U^* и покажем, что $U^1 = U$. Поскольку $U^* \subset U$, то из теоремы 4.12 следует, что $U^1 \subset U$. Остается показать, что

$$U \subset U^1.$$

Предположим, что имеется точка $z = (z_1, \ldots, z_m) \in U$, но $z \overline{\in} U^1$. Поскольку U^* ограничено и замкнуто, то U^1 также ограничено и замкнуто и, кроме того, оно выпукло. Так как $z \overline{\in} U^1$, то существует гиперплоскость C, содержащая z, и такая, что U^1 есть подмножество одного из полупространств, определенных гиперплоскостью C, т. е. существуют такие $c_1, \ldots, c_m$, b и $\delta > 0$, что

$$c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m + b > 0 \tag{4.42}$$

и для любой точки $u \in U^1$

$$c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m + b < -\delta < 0. \tag{4.43}$$

Из (4.42) и (4.43) получаем для всякой точки $u \in U^1$

$$(c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m + b) - (c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m + b) > \delta$$

или

$$(c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m) - (c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m) > \delta. \tag{4.44}$$

Так как (4.44) справедливо для любой $u \in U^1$, то оно справедливо для всякой точки $u \in U^*$. Поэтому из теоремы (4.13) заключаем, что для всех $t \in [0, 1]$

$$[c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m] - [c_1 r_1(t) + \cdots + c_m r_m(t)] > \delta. \tag{4.45}$$

Пусть теперь F — функция распределения, которой соответствует точка $z \in U$, тогда, интегрируя левую и правую часть (4.45) по F, получим

$$\int_0^1 \{[c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m] - [c_1 r_1(t) + \cdots + c_m r_m(t)]\}\, dF(t) > \int_0^1 \delta dF(t).$$

Поскольку δ, $c_1, \ldots, c_m$, $z_1, \ldots, z_m$ постоянны, а F — функция распределения вероятностей, то последнее неравенство примет вид

$$[c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m] - c_1 \int_0^1 r_1(t)\, dF(t) - \cdots - c_m \int_0^1 r_m(t)\, dF(t) > \delta,$$

или

$$[c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m] - [c_1 z_1 - \cdots - c_m z_m] > \delta.$$

Это противоречит условию положительности δ и доказывает, что $U \subset U^1$, т. е. доказывает требуемое.

Поскольку $U^1 = U$ и U^1 ограничено, замкнуто и выпукло, то U также ограничено, замкнуто и выпукло, что и требовалось доказать. Вторая часть теоремы для W доказывается аналогично. Из теоремы 4.13 и 4.14 следует, что границами множества U является кривая C, описываемая следующими уравнениями в параметрическом виде (параметр $t \in [0, 1]$)

$$u_1 = r_1(t), \ \ldots, \ u_m = r_m(t), \tag{4.46}$$

а границей множества W является кривая C^1, заданная параметрическими уравнениями

$$w_1 = s_1(t), \ \ldots, \ w_n = s_n(t).$$

Следующая теорема показывает структуру оптимальных смешанных стратегий для игроков сепарабельной игры.

Теорема 4.15. *В сепарабельной игре с функцией выигрышей*

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x)\, t_i(y),$$

где

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j(y),$$

всякая смешанная стратегия обоих игроков эквивалентна ступенчатой функции с числом ступеней не больше n; в частности, каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, которая является ступенчатой функцией с числом ступеней не больше n.

Доказательство. Пусть F — любая функция распределения, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in U$ и соответствует F. Согласно теореме 4.14 множество U — выпуклая оболочка множества U^*, и U есть подмножество эвклидова n-мерного пространства, тогда имеются точки $u^1, \ldots, u^n$ из множества U^*, для которых точка $u \in U$ является их выпуклой линейной комбинацией, т. е. имеется точка $\alpha \in S_n$ такая, что $u = \alpha_1 u^1 + \ldots + \alpha_n u^n$.

Поскольку $u^1, \ldots, u^n \in U^*$, то имеются соответствующие им ступенчатые функции $I_{t_1}, \ldots, I_{t_n}$. Тогда по теореме 4.12 функция

$$I = \alpha_1 I_{t_1} + \alpha_2 I_{t_2} + \cdots + \alpha_n I_{t_n}$$

соответствует точке u. Очевидно, I есть ступенчатая функция, имеющая не более n ступеней, и I эквивалентна F, так как обе функции I и F соответствуют одной и той же точке u. В частности, любая оптимальная стратегия F эквивалентна ступенчатой функции I, имеющей самое большее n ступеней, и такая функция I сама оптимальна.

Доказательство теоремы для второго игрока проводится аналогично. С целью определения решения игры целесообразно рассмотреть понятия отображения множеств и точки равновесия.

Отображение U на W: пусть u любая точка U, тогда образом точки u называется множество точек $w \in W$ таких, что

$$E(u, w) = \min_{y \in W} E(u, y);$$

образ точки u будем обозначать через $W(u)$.

Отображение W на U: пусть w — любая точка W, тогда образом точки w называется множество всех точек u из U таких, что

$$E(u, w) = \max_{x \in U} E(x, w);$$

образ точки w обозначим через $U(w)$.

Если для $u \in U$ и $w \in W$ окажется, что $w \in W(u)$, а $u \in U(w)$, то u называется неподвижной точкой множества U, а w — неподвижной точкой множества W.

Теорема 4.16. *Если F — любая функция распределения, а u соответствующая ей точка из U, то F является оптимальной стратегией* *первого игрока тогда и только тогда, когда и есть неподвижная точка из U.*

Аналогично функция распределения G является оптимальной стратегией второго игрока тогда и только тогда, когда соответствующая ей точка w является неподвижной точкой из W.

Доказательство. Пусть F^1 — функция распределения, u — соответствующая ей точка из U. Если u — неподвижная точка из U, то $u \in U(w)$ и $w \in W(u)$, т. е.

$$E(u, w) = \min_{y \in W} E(u, y), \; E(U, W) = \max_{x \in U} E(x, w)$$

или

$$E(F^1, G^1) = \min_F E(F, G^1) = \max_G E(F^1, G),$$

где G^1 — функция распределения, соответствующая $w \in W$. Последнее равенство означает, что F^1 является оптимальной стратегией первого игрока, что и требовалось доказать. Для второго игрока доказательство аналогично.

Теорема 4.17. *Если u — любая неподвижная точка из U, а w — любая неподвижная точка из W, то $u \in U(w)$ и $w \in W(u)$.*

Доказательство. Из неподвижности точки u следует, что существует точка $w^1 \in W$, такая, что $u \in U(w^1)$ и $w^1 \in W(u)$, т. е.

$$E(u, w^1) = \max_{x \in U} E(x, w^1), E(u, w^1) = \min_{y \in W} E(u, y). \tag{4.47}$$

Из неподвижности $w \in W$ следует существование такой $u^1 \in U$, что

$$E(u^1, w) = \max_{x \in U} E(x, w), \; E(u^1, w) = \min_{y \in W} E(u^1, y). \tag{4.48}$$

По определению максимума и (4.48) получим

$$E(u, w) \leqslant \max_{x \in U} E(x, w) = E(u^1, w) = \min_{y \in W} E(u^1, y). \tag{4.49}$$

По определению минимума получим

$$\min_{y \in W} E(u^1, y) \leqslant E(u^1, w^1), \tag{4.50}$$

а по определению максимума и (4.47) получим

$$E(u^1, w^1) \leqslant \max_{x \in U} E(x, w^1) = E(u, w^1) = \min_{y \in W} E(u, y). \tag{4.51}$$

По определению минимума получим

$$\min_{y \in W} E(u, y) \leqslant E(u, w). \tag{4.52}$$

В последовательности неравенств (4.49) — (4.52) начальное выражение равно конечному, поэтому все промежуточные неравенства являются равенствами, в частности

$$E(u, w) = \max_{x \in U} E(x, w) = \min_{y \in W} E(u, y).$$

Следовательно, $u \in U(w)$ и $w \in W(u)$, что и требовалось доказать.

Теоремы 4.16 и 4.17 показывают, что неподвижные точки соответствуют оптимальным стратегиям игроков, поэтому для решения сепарабельных игр можно находить неподвижные точки, а затем им соответствующие ступенчатые функции.

Для определения неподвижных точек можно поступать так: представим средний выигрыш в виде

$$E(u, w) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \right) w_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \right) u_i,$$

положим

$$f_j(u) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$g_i(w) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

тогда получим

$$E(u, w) = \sum_{j=1}^{n} f_j(u) w_j, \tag{4.53}$$

$$E(u, w) = \sum_{i=1}^{m} g_i(w) u_i. \tag{4.54}$$

Плоскости $f_j(u) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ делят множество U на конечное число областей (подмножеств) $U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots, U_l$. Каждой точке $u \in U_i$ находится множество W_i точек $w \in W(u)$, отвечающих

$$\min_{w} \sum_{j=1}^{n} f_j(u) \omega_j.$$

Множество точек W_i расположено на границе W.

Затем плоскости $g_i(w) = 0$ делят множество W на подмножества (области) $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_k$. Каждой точке $w \in R_i$ ставим в соответствие точки $u \in U(w)$, отвечающих

$$\max_{u} \sum_{i=1}^{m} g_i(\omega) u_i.$$

Если точка u такая, что $W(u)$ содержит w такую, что $U(w)$ содержит u, то u — неподвижная точка, соответствующая оптимальной стратегии первого игрока.

Рассматривая все области $U_1, \ldots, U_i, \ldots, U_l$ и применяя к ним вышеописанные отображения U на W, а затем W на U, можно определить все неподвижные точки.

Пример 4.7. Определим оптимальное решение сепарабельной игры с функцией

$$M(x, y) = y^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x - 1 \right) +$$
$$+ \frac{4}{3} y \left(\cos \frac{\pi}{2} x - 3 \sin \frac{\pi}{2} x \right) + \frac{1}{3} \left(5 \sin \frac{\pi}{2} x - 3 \cos \frac{\pi}{2} x \right),$$

заданной на единичном квадрате $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ Поскольку $M(x, y)$ непрерывна на единичном квадрате, то игра имеет решение.

Поскольку седловой точки в чистых стратегиях нет, то имеется решение в смешанных стратегиях.

Введем очевидные обозначения

$$\left.\begin{aligned} r_1(x) &= \sin\frac{\pi}{2}x \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ r_2(x) &= \cos\frac{\pi}{2}x \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}\right\}, \tag{4.55}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1(y) &= y \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ s_2(y) &= y^2 \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{aligned}\right\}, \tag{4.56}$$

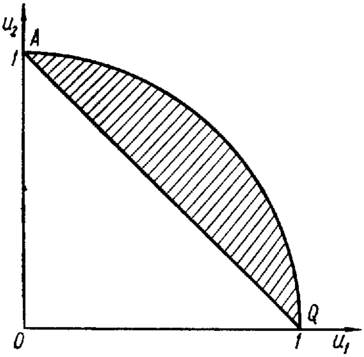

Рис. 4.2

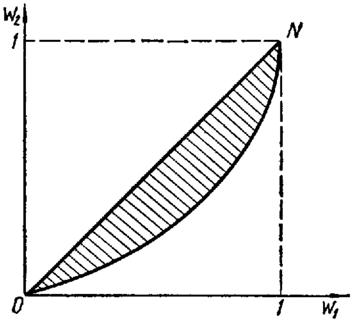

Рис. 4.3

тогда функция выигрышей будет иметь вид

$$M(x, y) = s_2(y)\,[r_2(x) + r_1(x) - 1] + \frac{4}{3}s_1(y)\,[r_2(x) - 3r_1(x)] + \\ + \frac{1}{3}\,[5r_1(x) - 3r_2(x)].$$

Обозначив через $F(x)$ и $G(y)$ соответственно стратегии первого и второго игроков, получим

$$u_1 = \int_0^1 r_1(x)\,dF(x) = \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dF(x),$$

$$u_2 = \int_0^1 r_2(x)\,dF(x) = \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dF(x),$$

$$w_1 = \int_0^1 s_1(y)\,dG(y) = \int_0^1 y\,dG(y),$$

$$w_2 = \int_0^1 s_2(y)\,dG(y) = \int_0^1 y^2\,dG(y).$$

Тогда точки $u = (u_1, u_2)$, $w = (w_1, w_2)$ и средний выигрыш

$$E(u, w) = w_2(u_1 + u_2 - 1) + \frac{4}{3} w_1 (u_2 - 3u_1) + \frac{1}{3}(5u_1 - 3u_2), \quad (4.57)$$

или

$$E(u, w) = u_1\left(w_2 - 4w_1 + \frac{5}{3}\right) + u_2\left(w_2 + \frac{4}{3} w_1 - 1\right) - w_2. \quad (4.58)$$

Уравнения (4.55) задают параметрически границу C множества (области) U и выражают геометрически дугу окружности единичного радиуса с центром в начале координат, расположенную в первом квадранте. Поскольку U — выпуклая оболочка точек границы, то U есть сегмент, ограниченный дугой окружности и прямой, соединяющей крайние точки окружности. На рис. 4.2 этот сегмент изображен дугой окружности и прямой AQ (он заштрихован). Уравнения (4.56) задают параметрически границу C^1 множества (области) W и выражают геометрически ветвь параболы с вершиной в начале координат, расположенную в первом квадранте. Поскольку W — выпуклая оболочка точек границы, то W есть сегмент, ограниченный дугой параболы и прямой, соединяющей ее крайние точки (0, 0) и (1, 1). На рис. 4.3. этот сегмент показан штриховкой.

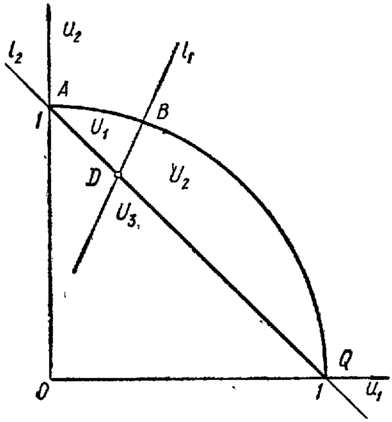

Рис. 4.4

Исходя из представления (4.57) и (4.58), можно записать:

$f_2(u) = u_1 + u_2 - 1$, функция при w_2 в (4.57),

$f_1(u) = \frac{4}{3} u_2 - 4u_1$, функция при w_1 в (4.57),

$g_1(w) = w_2 - 4w_1 + \frac{5}{3}$, функция при u_1 в (4.58),

$g_2(w) = w_2 + \frac{4}{3} w_1 - 1$, функция при u_2 в (4.58).

Приравнивая к нулю $f_1(u)$, $f_2(u)$, $g_1(w)$, $g_2(w)$, получим прямые:

$\frac{4}{3} u_2 - 4u_1 = 0$ — прямая l_1 в области U,

$u_1 + u_2 - 1 = 0$ — прямая l_2 в области U,

$w_2 - 4w_1 + \frac{5}{3} = 0$ — прямая m_1 в области W,

$w_2 + \frac{4}{3} w_1 - 1 = 0$ — прямая m_2 в области W.

Прямые l_1 и l_2 изображены на рис. 4.4, а прямые m_1 и m_2 — на рис. 4.5.

Прямые l_1 и l_2 (см. рис. 4.4) делят область U на три части U_1, U_2, U_3:

$U_1 = ABD$, где $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, за исключением точки D, где $l_1 = l_2 = 0$;

$U_2 = BQD$, где $l_1 < 0$, $l_2 > 0$, за исключением точки D,

$U_3 = D$ — точка, где $l_1 = l_2 = 0$;

Прямые m_1 и m_2 (рис. 4.5) делят W на пять областей R_1, R_2, R_3, R_4, R_5:

$R_1 = OQLH$, где $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \leqslant 0$ за исключением точки L, где $m_1 = m_2 = 0$;

$R_2 = QVL$, где $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, за исключением точки L;

$R_3 = LVNT$, где $m_1 \leqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, за исключением точки L;

$R_4 = HLT$, где $m_1 \leqslant 0$, $m_2 \leqslant 0$, за исключением точки L;

$R_5 = LM$, где $m_1 = m_2 \leqslant 0$.

Рассмотрим на двух примерах, как применять отображения. Возьмем, например, любую точку $u \in U_1$, тогда в формуле (4.57) коэффициенты при w_1 и w_2 положительные, и минимальное значение $E(u, w)$ по w достигается при $w_1^1 = w_2^1 = 0$, т. е. в этом случае множество $W(u)$ состоит из одной точки $w^1 = (0, 0)$. При этом $E(u, w^1)$ достигает максимума по u при $u^1 = (1, 0)$, лежащей вне области U_1. Поэтому ни одна точка области U_1 не может быть неподвижной.

Рассмотрим, например, область R_3. Для всех точек $w \in R_3$ в среднем выигрыше $E(u, w)$ согласно формуле (4.58) коэффициент при u_1 не положительный, а при u_2 не отрицательный, поэтому $E(u, w)$ достигает максимума по u при $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, т. е. $U(w) = u^2 = (0, 1)$ состоит из одной точки, принадлежащей области U_1. Но мы уже видели, что любая точка области U_1 отображается в точку $w = (0, 0)$, не принадлежащую области R_3. Поэтому любая точка области R_3 не может быть неподвижной. Приведем теперь сводку отображений точек из выделенных областей.

В области U: всякая точка области U_1 отображается в точку (0, 0) области W; всякая точка области U_2 отображается в некоторую точку N области W; точка D отображается в любую точку области W.

В пространстве W: всякая точка R_1 отображается в точку Q области U; всякая точка области R_2 отображается в некоторую точку U_1 или U; всякая точка области R_3 отображается в точку A из U_1; всякая точка области R_4 отображается в точку A и Q области U; всякая точка области R_5 отображается в любую точку области ADQ из U.

Теперь надо проследить, какие точки при каком отображении будут неподвижными.

Мы уже видели, что в области U_1 не может быть неподвижной точки. Если точка $u \in U_2$, то она отображается в N из R_3, а точка N переходит в A, которая не принадлежит U_2. Поэтому в U_2 тоже нет неподвижных точек.

Точка D из U_3 переходит в любую точку W, и, в частно ти, она переходит в точку из R_5, w из R_5 переходит в любую точку u из U, в частности, и в точку D, следовательно, точка D — неподвижная точка из U.

Поступая аналогично с областями R_1, R_2, R_3, R_4, и R_5, приходим к выводу, что все точки w из R_1, R_2, R_3, R_4 не являются неподвижными в W.

При рассмотрении области R_5 подставим $m = m_1 = m_2$ в (4.58), тогда получим

$$E(u, w) = u_1 m + u_2 m - w_2 = m(u_1 + u_2) - w_2.$$

Поскольку $m \leqslant 0$, $u_1 + u_2$ должно быть минимальным, что при $m < 0$ достигается на прямой AQ (заметим: уравнение прямой AQ есть $u_1 + u_2 = 1$). При $m = 0$ область R_5 отображается на всю область U. Так как прямая AQ или вся область U содержат точку D, которая, в свою очередь, переходит во всю область W, содержащую область R_5, то область R_5 (прямая LM) является множеством неподвижных точек в W.

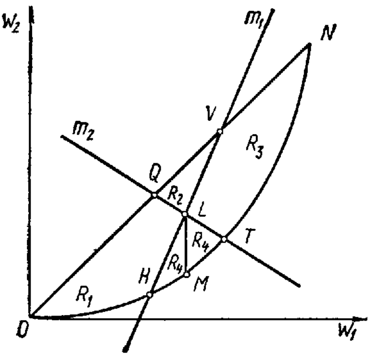

Рис. 4.5

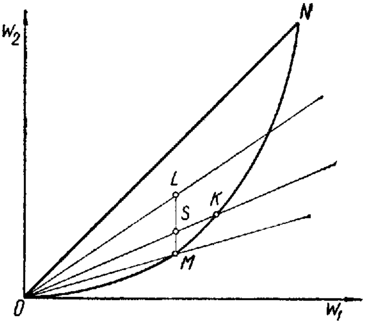

Рис. 4.6

Для определения координат точки D решаем систему уравнений:

$$u_1 + u_2 - 1 = 0, \quad \frac{4}{3} u_2 - 4u_1 = 0,$$

отсюда получаем $u_1 = 0{,}25$, $u_2 = 0{,}75$.

Для определения координат точек области R_5 составим уравнение полагая $m_1 = m_2$:

$$w_2 + \frac{4}{3} w_1 - 1 = w_2 - 4w_1 + \frac{5}{3},$$

отсюда получаем $w_1 = 0{,}5$; вторая координата w_2 изменяется от точки M до L. Ордината точки M равна $w_2^M = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; ордината точки L равна $w_2^L = \frac{1}{3}$ и находится из уравнения $w_2 - 4w_1 + \frac{5}{3} = 0$ при $w_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{4} \leqslant w \leqslant \frac{1}{3}.$$

Цена игры $V = -\frac{1}{3}$ получается из (4.57) при

$$u_1 = \frac{1}{4}, \; u_2 = \frac{3}{4}, \; w_1 = \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4} \leqslant w_2 \leqslant \frac{1}{3}.$$

Для второго игрока w_2 находится на отрезке LM и принимает значения из сегмента $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$, поэтому любую точку S (рис. 4.6) отрезка LM

можно представить в виде

$$w_2 = \frac{1}{4} + t\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{t}{3}\right), \text{ где } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

поэтому точка равновесия для второго игрока запишется так:

$$w = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\left(1 + \frac{t}{3}\right)\right), \text{ где } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Теперь можно найти функции распределения вероятностей, соответствующих неподвижным точкам $u = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $w = \left(\frac{1}{2}, w_2\right)$, где $\frac{1}{4} \leqslant w_2 \leqslant \frac{1}{3}$. Поскольку число функций $r_1(x)$ и $r_2(x)$ равно 2, функций $s_1(x)$ и $s_2(x)$ также равно 2, то согласно теореме 4.15 функции распределения должны состоять из двух $(n = 2)$ одноступенчатых функций:

$$F(x) = \alpha I_a(x) + (1 - \alpha) I_b(x) \tag{4.59}$$

$$G(y) = \beta I_c(y) + (1 - \beta) I_d(y), \tag{4.60}$$

где α совпадает с коэффициентом линейной комбинации крайних точек u^1 и u^2 из множества U, причем точка u должна лежать на прямой, соединяющей эти точки u_1 и u_2, т. е.

$$u = \alpha u^1 + (1 - \alpha) u^2, \tag{4.61}$$

а β совпадает с коэффициентами при линейной комбинации крайних точек w^1 и w^2 из множества W, причем w должна лежать на прямой w^1w^2, т. е.

$$w = \beta w^1 + (1 - \beta) w^2. \tag{4.62}$$

Крайними точками множества U являются точки A и Q, имеющие координаты $U^1 = A\ (0,\ 1)$, $U^2 = Q = (1,\ 0)$, поэтому $a = 0$, $b = 1$, и на основании (4.61) для координат точки u имеют место уравнения:

$$u_1 = \alpha u_1^1 + (1 - \alpha) u_1^2, \quad \frac{1}{4} = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 1,$$

откуда $\alpha = \frac{3}{4}$. На основании (4.59) $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{4} I_1(x) + \frac{3}{4} I_0(x).$$

Для второго игрока любая точка S из LM является неподвижной точкой. Она выражается линейной комбинацией точек O и K (см. рис. 4.6), причем точка K образуется путем пересечения прямой, проходящей через точки O и S, с границей C^1 — параболой. Чтобы найти координаты точки K, надо сначала найти уравнение прямой OS, а затем решить совместно это уравнение и уравнение параболы, выражающей границу C^1.

Уравнение прямой OS следующее:

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{3}\right) w_1,$$

а уравнение параболы

$$w_2 = (w_1)^2.$$

Решая совместно эти уравнения, получим следующие координаты точки K:

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{3}\right), \quad w_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{t}{3}\right)^2.$$

Итак, для нахождения β на основании (4. 62) можно составить уравнение, принимая $w^1 = (0, 0)$ и $w^2 = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{3}\right), \ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{t}{3}\right)^2\right]$. Приравнивая первые координаты, получим

$$\beta \cdot 0 + (1 - \beta) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

откуда $\beta = \frac{t}{t+3} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$.

На основании (4.60) запишем смешанную стратегию для второго игрока

$$G(y) = \frac{t}{t+3} I_0(y) + \frac{3}{t+3} I_{\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{3}\right)}(y) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Таким образом, на этом абстрактном примере мы рассмотрели возможность применения теории игр к решению сепарабельных игр. Рассмотрим теперь некоторые экономические примеры.

4.4. ПРИМЕРЫ ИЗ ЭКОНОМИКИ

Задача устойчивого расширенного производства (Неймана). Производство рассматривается как замкнутая система, в которой производимая продукция находит спрос. Обозначим через i виды технологий ($i = 1, 2, \ldots, m$), которые могут применяться для производства n видов продукции, обозначаемых через $j = 1, 2, \ldots, n$. Экономически процесс производства задается технологическими коэффициентами:

a_{ij} — количество j-й продукции (сырья), используемой в производстве при применении i-й технологии с единичной интенсивностью ($j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$);

b_{ij} — количество продукции j-го вида, производимой при использовании i-й технологии с единичной интенсивностью ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Пусть, далее, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ — относительные интенсивности применяемых технологий, т. е.

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1;$$

относительные цены продукции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$, т. е.

$$y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1.$$

Система считается устойчивой в течении некоторого времени, если в этот период времени векторы технологий x и цен y постоянны.

Производство считается расширенным, если в конце каждого периода времени, принятого за единицу, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \geqslant \xi \sum_{i=,}^{m} a_{ij}x_i \qquad (\xi > 1,\ j = 1, 2, \ \ldots, \ n),$$

где ξ — показатель расширенного производства.

Поскольку в неравенстве сумма слева означает количество произведенной продукции каждого вида, а сумма справа означает количество потребляемой продукции, то указанные неравенства показывают, что количество производимой продукции должно быть больше, чем используемой, т. е. выполняются условия расширенного производства. В стоимостном выражении условия расширенного производства будут следующими:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_iy_j \geqslant \xi \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j \quad (\xi > 1). \tag{4.63}$$

С другой стороны, слишком большое производство продукции (перепроизводство) снижает прибыли, поэтому необходимо ограничить ее выпуск. Пусть $\eta > 1$ — некоторый коэффициент, показывающий, во сколько раз можно увеличить выпуск продукции по отношению к потребляемой продукции, т. е. должны выполняться неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \leqslant \eta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \qquad (i = 1, 2, \ \ldots, \ m),$$

или по всем технологиям

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_jx_i \leqslant \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_jx_i, \tag{4.64}$$

где η называется степенью заинтересованности производства. Допустим, что неравенства (4.63) и (4.64) реально выполняются в некоторый начальный период для некоторого набора интенсивностей x и цен y. Предположим, что $a_{ij} > 0$ ($i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) и рассмотрим функцию

$$M(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j}. \tag{4.65}$$

Требуется определить оптимальные технологии x^0, цены y^0 и показатели производства ξ и η. Очевидно, технология должна способствовать увеличению выпуска продукции, а цены — уменьшению, т. е. из (4.63) и (4.64) следует, что должны быть

$$\xi \leqslant \min_y M(x^0, y), \ \ \xi = M(x^0, y^0),$$

$$\eta \geqslant \max_x M(x, y^0), \ \ \eta = M(x^0, y^0)$$

или $\xi = \eta$, что означает

$$\xi = \min_y M(x^0, y) = \max_x [\min_y f(x, y)] = \min_y [\max_x f(x, y)] =$$
$$= \max_x f(x, y^0) = \eta.$$

Очевидно, предположение $a_{ij} > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ необходимо для того, чтобы в (4.65) знаменатель не обращался в нуль. Это условие можно ослабить и рассматривать функцию

$$M^1(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (b_{ij} + a_{ij})\, x_i y_j},$$

где $a_{ij} + b_{ij} > 0$.

Итак, задача расширенного производства может рассматриваться как игра двух игроков с функцией выигрышей (4.65). Решение игры существует, так как функция $M(x, y)$ непрерывна на замкнутом множестве [0, 1].

Борьба за рынки. Две частные фирмы борются за рынки сбыта в условиях конкуренции. Одна из фирм (первый игрок P_1) пытается вытеснить другую фирму (второй игрок P_2), имеющую два рынка сбыта, с одного из этих рынков. Первый рынок сбыта приносит доход второму игроку в размере k_1 на один рубль проданного товара, а второй рынок — в размере k_2 на один рубль проданного товара. Каждая из фирм выделяет капитал s для проведения операций. Стратегии игроков — это количество средств, выделенных на каждый рынок сбыта. Обозначим через x количество средств (стратегию), выделяемых первой фирмой на первый рынок сбыта, тогда $s - x$ выделяется первой фирмой на второй рынок сбыта. Стратегия второй фирмы аналогична: чтобы сохранить за собой первый рынок сбыта, она выделяет для него y, а для второго — сумму $s - y$. Условия борьбы следующие: фирма, вложившая бóльшую сумму в рынок сбыта, завоевывает его и получает выигрыш, пропорциональный избытку своих средств. В этих условиях функция выигрышей первой фирмы имеет вид:

$$M(x, y) = \begin{cases} k_1(x - y), & \text{если } x \geqslant y \\ k_2(y - x), & \text{если } x \leqslant y. \end{cases}$$

Действительно, если первая фирма выделяет на первый рынок сбыта больше средств, чем вторая, то избыток составит $x - y$, а коэффициент дохода равен k_1, поэтому доход первой фирмы составит $k_1(x - y)$. Если же первая фирма на первый рынок сбыта выделяет меньше средств, чем вторая фирма ($x < y$), значит первая фирма выделяет больше средств на второй рынок сбыта, чем вторая, т. е. $s - x > s - y$. В этом случае первая фирма получит выигрыш на втором рынке сбыта пропорционально избытку средств

$$k_2[s - x - (s - y)] = k_2(y - x).$$

Функция $M(x, y)$ для этой игры непрерывна и выпукла по y при любом x, поэтому рассматриваемая игра остносится к классу игр с выпуклой функцией выигрышей, и решение находится так:

$$V = \min_y \max_x M(x, y).$$

Очевидно,

$$\max_x M(x, y) = \max\{\max_{x \geqslant y} k_1(x - y), \max_{x \leqslant y} k_2(y - x)\} = = \max\{k_1(s - y), k_2 y\}.$$

Величина $k_1(x - y)$ убывает, $k_2 y$ возрастает с ростом y, поэтому при малых y максимум достигается на $k_1(s - y)$, а при больших y — на втором $k_2 y$. Следовательно, минимальное значение этот максимум принимает при таком $y = y_0$, для которого будет выполняться равенство

$$k_1(s - y_0) = k_2 y_0$$

или

$$y_0 = \frac{k_1 s}{k_1 + k_2},$$

т. е. оптимальная чистая стратегия второго игрока — выделить на первый рынок сбыта y_0 средств, а на второй —

$$s - y_0 = s - \frac{k_1 s}{k_1 + k_2} = \frac{k_2 s}{k_1 + k_2}.$$

Цена игры определяется по формуле:

$$V = \max_x M(x, y_0) = k_2 y_0 = \frac{k_1 k_2 s}{k_1 + k_2}.$$

Для определения оптимальной смешанной стратегии первого игрока P_1 найдем сначала существенные чистые стратегии x из уравнения

$$M(x, y_0) = V.$$

Если $x \geqslant y_0$, то

$$M(x, y_0) = k_1\left(x - \frac{k_1 s}{k_1 + k_2}\right) = \frac{k_1 k_2 s}{k_1 + k_2},$$

следовательно, $x_0 = s$. Если $x \leqslant y_0$, то

$$M(x, y_0) = k_2(y_0 - x) = k_2\left(\frac{k_1 s}{k_1 + k_2} - x\right) = \frac{k_1 k_2 s}{k_1 + k_2},$$

отсюда получим $x_1 = 0$.

Итак, существенные чистые стратегии — это $x_0 = s$ и $x_1 = 0$. Чтобы найти вероятности α в смешанной стратегии, составим уравнение

$$\alpha M_y'(0, y_0) + (1 - \alpha) M_y(s, y_0) = 0.$$

Определим частые производные $M_y(0, y_0)$ и $M_y'(s, y_0)$:

$$M_y'(0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} k_2 y \,|_{y=y_0} = k_2,$$

$$M_y'(s, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} k_1(s - y) \,|_{y=y_0} = -k_1,$$

тогда

$$\alpha k_2 + (1-\alpha)(-k_1) = 0$$

или

$$\alpha = \frac{k_1}{k_1+k_2},$$

т. е.

$$F(x) = \frac{k_1}{k_1+k_2} I_0(x) + \frac{k_2}{k_1+k_2} I_1(x).$$

Таким образом, оптимальная стратегия первого игрока состоит в концентрации всех средств на одном из рынков сбыта, а вероятность выбора рынка обратно пропорциональна его важности. Это согласуется с интуитивным представлением: чем важнее рынок, тем больше средств вложит в него противник для его сохранения и тем меньше средств остается на нем после вытеснения противника.

Распределение производственных мощностей. При составлении плана развития двух районов возникла потребность в строительстве двух однотипных предприятий, по одному в каждом районе так, чтобы суммарная их мощность равнялась некоторой постоянной величине, равной единице. Если обозначить через y мощность предприятия в первом районе, то $(1-y)$ — мощность предприятия во втором районе. Общий спрос на продукцию равен также единице, однако он точно не известен для каждого района. Обозначим через x спрос в первом районе, тогда $(1-x)$ — спрос во втором районе.

Напряженностью работы предприятия назовем отношение спроса к мощности, т. е. $\frac{x}{y}$ — напряженность работы предприятия в первом районе, $\frac{1-x}{1-y}$ — напряженность работы предприятия во втором районе.

Необходимо составить такой план, чтобы максимальная напряженность из двух $\frac{x}{y}$ или $\frac{1-x}{1-y}$ была минимальной. Итак, имеется ситуация, в которой второй игрок (составитель плана) имеет стратегии y, а первый игрок (природа) имеет стратегии x, и выигрыш первого игрока

$$M(x, y) = \max\left\{\frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right\}.$$

Будем далее считать, что потребности в первом районе ограничены числами a, b, т. е. $a \leqslant x \leqslant b \leqslant 1$. Очевидно, пределами изменения y являются числа 0 и 1, т. е. $0 < y < 1$. Поскольку $y \neq 0$, $y \neq 1$, то при $y = 0$ или $y = 1$ функция $M(x, y)$ не определена, и, строго говоря, данная игра не является игрой на единичном интервале. Однако, если в ходе рассуждений не обращаться к крайним точкам $y = 0$, $y = 1$, то эту игру можно рассматривать как игру на единичном интервале для y. Нетрудно проверить, что $M(x, y)$ в этом случае непрерывна и выпукла по y (на рис. 4.7, где x_0 — некоторое значение x, график функции $M(x, y)$ выделен жирной линией). Поэтому для второго игрока оптимальной стратегией является значение y, получаемое из условия

$$V = \min_{0<y<1} \max_{a\leqslant x\leqslant b} M(x, y) = \min_{0<y<1} \max_{a\leqslant x\leqslant b} \max\left\{\frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right\} =$$

$$= \min_{0<y<1} \max\left\{\max_{a\leqslant x\leqslant b} \frac{x}{y}, \max_{a\leqslant x\leqslant b} \frac{1-x}{1-y}\right\} = \min_{0<y<1} \max\left\{\frac{b}{y}, \frac{1-a}{1-y}\right\}.$$

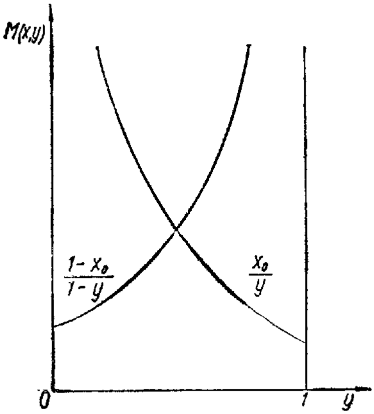

Рис. 4.7

Очевидно, этот минимум достигается при $y = y_0$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{b}{g_0} = \frac{1-a}{1-g_0}.$$

Отсюда получаем, что

$$y_0 = \frac{b}{1+b-a},$$

цена игры

$$V = \frac{b}{y_0} = 1 + b - a.$$

Очевидно, $a \leqslant y_0 \leqslant b$, причем $y_0 = a$ или $y_0 = b$ лишь тогда, когда $a = b$, что не представляет интереса с точки зрения выбора спроса и мощностей. Поэтому рассмотрим случай, когда $a < y_0 < b$. Существенными стратегиями первого игрока являются $x = a$ и $x = b$, так как значение V получается именно при этих значениях x. Частные производные

$$M_y'(a, y_0) = \frac{1-a}{(1-y_0)^2} = \frac{(1+b-a)^2}{1-a} > 0,$$

$$M_y(b, y_0) = -\frac{b}{y_0^2} = -\frac{(1+b-a)^2}{b} < 0.$$

Уравнение для вероятности α имеет вид:

$$\alpha\frac{(1+b-a)^2}{1-a} - (1-\alpha)\frac{(1+b-a)^2}{b} = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1-a}{1+b-a},$$

смешанная стратегия первого игрока

$$F(x) = \frac{1-a}{1+b-a} I_a(x) + \frac{b}{1+b-a} I_b(x).$$

Так, например, если $a = 0{,}2$ и $b = 0{,}6$, то составитель проекта должен выбрать мощность предприятия в первом районе

$$y_0 = \frac{0{,}6}{1+0{,}6-0{,}2} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43,$$

цена игры (коэффициент перегрузки) $v = 1 + 0{,}6 - 0{,}2 = 1{,}4$, вероятность $\alpha = \frac{4}{7} \approx 0{,}6$.

Таким образом, оптимальная мощность в первом районе будет у предприятия, сосредоточившего 43% общего выпуска продукции, а наиболее неблагоприятный спрос получится, если минимальное значение спроса $a = 0{,}2$ наступает с вероятностью $\alpha = 0{,}6$ и максимальное $b = 0{,}6$ — с вероятностью $1 - \alpha = 0{,}4$.

Контрольные вопросы и задания к главе 4

1. Что такое бесконечная антагонистическая игра?
2. Что такое нижняя и верхняя цена бесконечной антагонистической игры?
3. Что такое цена бесконечной антагонистической игры?
4. Что такое точка равновесия, седловая точка, точка ε-равновесия (ε-седловая точка), оптимальные стратегии бесконечной антагонистической игры?
5. Сформулируйте критерии существования ε-седловой точки.
6. Что такое смешанные стратегии игроков в бесконечной антагонистической игре?
7. Что такое седловая точка в смешанных стратегиях бесконечной игры?
8. Что называется решением бесконечной антагонистической игры?
9. Сформулируйте и докажите теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности смешанных стратегий в бесконечной антагонистической игре.
10. Сформулируйте условия, которым должна удовлетворять цена игры в бесконечной антагонистической игре.
11. Сформулируйте теорему существования решения для бесконечных антагонистических игр.
12. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую условие равенства нулю цены бесконечной антагонистической игры.
13. Дайте определение выпуклой игры.
14. Сформулируйте и докажите теоремы о решении выпуклых игр.
15. Что называется сепарабельной игрой?
16. Сформулируйте и докажите теорему о неподнижной точке сепарабельной игры.
17. Как находить решение сепарабельной игры?
18. В чем состоит задача устойчивого расширенного производства?
19. В чем состоит задача борьбы за рынки сбыта?
20. В чем состоит задача распределения производственных мощностей?
21. Покажите, что оптимальными стратегиями бесконечной игры на единичном квадрате с функцией выигрыша $M(x, y) = xy - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$ является пара чистых стратегий $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.
22. Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = \frac{1}{1 + 2(x - y)^2}$$

не имеет седловой точки в чистых стратегиях.

23. Функция выигрышей для бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате определена так:

$$M(x, y) = 10xy - y - 5x, \quad x \neq 0{,}1,$$
$$M(0{,}1;\ y) = -y.$$

Найдите цену игры. Какая стратегия первого игрока гарантирует ему получение выигрыша не меньше $V - \varepsilon$?

24. Докажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = |y - x|\,(1 - |y - x|)$$

имеет оптимальные смешанные стратегии $F(x) = x$, $G(y) = y$.

25. Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ для } x = y \\ -1 \text{ для } x = 1,\ y < 1 \text{ и } x < y < 1 \\ +1 \text{ для } y = 1,\ x < 1 \text{ и } y < x < 1 \end{cases}$$

не имеет решения.

26. Покажите, что бесконечная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda (x - y)^2},$$

где $0 < \lambda \leqslant \frac{4}{3}$, имеет следующее решение: оптимальные стратегии

$$F(x) = I_{\frac{1}{2}}(x),\ G(y) = \frac{1}{2} I_0(y) + \frac{1}{2} I_1(y),$$

цена игры $V = \frac{4}{4 + \lambda}$.

27. Найдите решение бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = 80y^8 - 5xy + x^2.$$

28. Найдите решение бесконечной антагонистической игры на единичном квадрате с функцией выигрышей

$$M(x, y) = 16y^6 - 3xy + x^2.$$

29. Найдите решение разделимой игры на единичном квадрате со следующей функцией выигрышей:

$$M(x, y) = \cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y + x + 2y.$$

30. Найдите решение разделимой игры на единичном квадрате со следующей функцией выигрышей:

$$M(x, y) = 3 \cos 4x \cos 5y + 5 \cos 4x \sin 5y + \sin 4x \cos 5y + \sin 4x \sin 5y +$$
$$+ 4 \cos 4x + \sin 4x + \cos 5y + 2 \sin 5y + 3.$$

31. Составьте пример бесконечной антагонистической игры с выпуклой функцией выигрышей, в которой отражены экономические интересы двух стран.

32. Составьте пример бесконечной антагонистнческой разделимой игры, в которой отражены экономические ннтересы предприятий.

ГЛАВА 5. ИГРЫ ТИПА ДУЭЛЕЙ

Многие игровые ситуации сводятся к бесконечной антагонистической игре двух игроков, в которой выбор стратегий отождествляется с выбором момента времени осуществления хода. Они называются *играми типа дуэлей,* или играми *с выбором момента времени.* Конфликтная ситуация, приводящая к игре типа дуэлей, сводится к следующему: каждый из игроков может сделать один ход в какой-либо момент из данного промежутка времени, зависящий от его решения, и получить свой выигрыш. Чем позже он сделает ход, тем больше вероятность его выигрыша, но, с другой стороны, если он слишком затянет ход, то другой игрок может сделать свой ход раньше и получить весь выигрыш. Таким образом, в этой ситуации каждый игрок старается максимально задержать свой ход, чтобы более уверенно получить выигрыш, но, с другой стороны, он боится слишком задержать этот ход, так как может потерять выигрыш из-за того, что другой игрок раньше сделает свой ход. Типичной иллюстрацией таких ситуаций являются дуэли с огнестрельным оружием, когда каждый участник старается максимально приблизиться к противнику, чтобы увереннее его поразить, хотя каждый из них опасается, что слишком большая задержка выстрела даст возможность противнику раньше выстрелить и поразить его.

Если рассматривать бесконечные антагонистические игры на квадрате, то в играх типа дуэлей функция выигрышей $M(x, y)$ первого игрока разрывна на диагонали $x = y$ квадрата, где x — момент хода первого игрока, y — момент хода второго игрока.

Рассмотрим методы решения таких игр. Пусть функция выигрышей первого игрока $M(x, y)$ задана на единичном квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ в следующем виде:

$$M(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & \text{если } x < y \\ \varphi(x), & \text{если } x = y \\ L(x, y), & \text{если } x > y, \end{cases} \tag{5.1}$$

где функция $K(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, а функция $L(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$, функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Поскольку функция $M(x, y)$ разрывна, то нет гарантии, что решение игры типа дуэлей существует.

Если предположить, что решение игры типа дуэлей существует, то можно дать некоторые свойства оптимальных стратегий и цены игры, из которых будут следовать возможные методы решения такой игры.

Пусть $F(x)$ — смешанная стратегия первого игрока, тогда для любого $y \in [0, 1]$

$$E(F, y) = \int_0^1 M(x, y)\, dF(x) = \int_0^y K(x, y)\, dF(x) + \varphi(y)[F(y) - F(y - 0)] + \int_y^1 L(x, y)\, dF(x). \tag{5.2}$$

Если $F(x)$ — непрерывная функция, то $F(y - 0) = F(y)$ и из (5.2) получим, что

$$E(F, y) = \int_0^y K(x, y)\, dF(x) + \int_y^1 L(x, y)\, dF(x). \tag{5.3}$$

Пусть непрерывные и дифференцируемые на единичном квадрате функции $F(x)$ и $G(y)$ — соответственно оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков. Тогда, если плотность распределения вероятностей в некоторой точке y_0 больше нуля, то

$$G'(y_0) = \left.\frac{dG(y)}{dy}\right|_{y=y_0} > 0, \tag{5.4}$$

и средний выигрыш первого игрока равен

$$E(F, y_0) = V, \tag{5.5}$$

где V — цена игры.

Поскольку $G(y)$ дифференцируема на [0, 1], то из (5.4) следует, что $G'(y) > 0$ и в окрестности точки y_0, поэтому для y, близких к y_0, получим $E(F, y) = V$, т. е.

$$\frac{\partial E(F, y)}{\partial y} = 0. \tag{5.6}$$

Учитывая (5.3), уравнения (5.6) можно переписать в виде

$$[L(y, y) - K(y, y)]\,F'(y) = \int_0^y \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} F'(x)\,dx + \int_y^1 \frac{\partial L(x, y)}{dy} F'(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Оптимальная стратегия первого игрока должна удовлетворять интегральному уравнению (5.7), если она представляет собой дифференцируемую функцию. Решая уравнение (5.7) относительно $F'(x)$, получим оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Итак, в игре типа дуэлей, т. е. в антагонистической бесконечной игре с функцией выигрышей (5.1) мы не можем гарантировать существование решения игры. Однако, если можно предположить (это часто имеет место), что оптимальные стратегии F и G соответственно первого и второго игроков являются дифференцируемыми функциями, причем $F'(x) > 0$ при $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant 1$, а $G'(y) > 0$ при $0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d \leqslant 1$ и равны нулю вне этих интервалов, то $F(x)$ и $G(x)$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$E(F, y) = V \text{ для } y \in (c, d), \tag{5.8}$$

$$E(F, y) \geqslant V \text{ для всех } y, \tag{5.9}$$

$$E(x, G) = V \text{ для } x \in (a, b), \tag{5.10}$$

$$E(x, G) \leqslant V \text{ для всех } x, \tag{5.11}$$

$$[L(y, y) - K(y, y)]\,F'(y) = \int_0^y \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} F'(x)\,dx + \int_y^1 \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} F'(x)\,d(x) \text{ для } y \in (c, d), \tag{5.12}$$

$$[K(x, x) - L(x, x)]\,G'(x) = \int_0^x \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} G'(y)\,dy + \int_x^1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} G'(y)\,dy \text{ для } x \in (a, b). \tag{5.13}$$

Если система (5.8) — (5.13) имеет решение с учетом, что $F(x)$ и $G(y)$ должны быть функциями распределения вероятностей (а не любые функции), то это решение будет оптимальным решением игры типа дуэлей. Если же эта система решения не имеет, то можно заключить, что эта игра либо не имеет решения вообще, либо не такого вида, как мы предполагали. Часто дополнительные сведения об игре помогают нахождению решений. Например, если в (5.1)

$$L(x, y) = -K(y, x), \tag{5.14}$$

$$\varphi(x) = 0, \tag{5.15}$$

то согласно теореме 4.8 должно быть $V = 0$, $F = G$, $a = c$, $b = d$, и система (5.8) — (5.13) примет вид:

$$E(F, y) = 0 \text{ для } y \in (a, b), \tag{5.16}$$

$$E(F, y) \geqslant 0 \text{ для всех } y, \tag{5.17}$$

$$[L(y, y) - K(y, y)]\, F'(y) = \int_a^y \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} F'(x)\, dx + \int_y^b \frac{\partial L(x, y)}{dy} F'(x)\, dx \text{ для } y \in (a, b). \tag{5.18}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.1. (Бесшумная дуэль). Две фирмы борются за рынок сбыта. Один раз в течение определенного промежутка времени каждая из фирм должна сделать вклад, который может привести к овладению рынком сбыта. С течением времени сведения о коньюнктуре повышают вероятность того, что сделанный вклад приведет к овладению рынком сбыта, поэтому каждая фирма старается сделать вклад как можно позже, чтобы повысить вероятность овладения рынком сбыта. С другой стороны, одна из фирм, сделавшая ранее свой вклад, может завоевать рынок сбыта, а другая фирма потерять его даже если она внесет свой вклад.

Пусть каждая из фирм может сделать свой вклад тайно. Другая фирма не будет знать об этом, если фирма, сделавшая вклад, не овладеет рынком сбыта (дуэль в таком случае считается бесшумной). Если же одна фирма овладела рынком сбыта, то игра заканчивается выигрышем этой фирмы. Если обе фирмы сделали вклад и ни одна из них не овладела рынком сбыта, то игра заканчивается вничью.

Пусть рассматривается единичный промежуток времени: x означает момент времени вклада первой фирмы, y — момент времени вклада второй фирмы ($0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$). Пусть, далее, вероятность овладения рынком сбыта для каждой фирмы пропорциональна времени, соответственно x и y, т. е. вероятность овладения рынком сбыта первым игроком, сделавшим свой вклад в момент x, равна x (или y — для второй фирмы). Овладение рынком сбыта оценивается величиной 1 (единица), т. е. если первая фирма овладела рынком сбыта, то она получает 1 с вероятностью x, если не овладела, то она получает выигрыш равный -1 с вероятностью $1 - x$.

Аналогично для второй фирмы. Пусть $x < y$, тогда

$$M(x, y) = K(x, y) = x - y + xy. \tag{5.19}$$

Действительно, первая фирма делает свой вклад раньше, чем вторая, и поэтому средний ее выигрыш состоит из выигрыша $+1$ с вероятностью x, выигрыша -1 (проигрыша) с вероятностью $y(1-x)$, т. е.

$$K(x, y) = x + (-1)(1-x)y = x - y + xy.$$

Пусть $x = y$, тогда

$$M(x, y) = x(1-y) + y(1-x)(-1) = x(1-x) + x(1-x) = \\ = \varphi(x) = 0.$$

Если $y < x$, тогда по аналогии с (5.19) получим

$$M(x, y) = L(x, y) = y(-1) + (1-y)x = x - y - xy. \tag{5.20}$$

Поскольку для этой игры выполнено условие (5.14), то $V = 0$, $F = G$. Составим уравнение (5.18) для определения $F(x)$. С этой целью найдем

$$L(y, y) - K(y, y) = -y^2 - y^2 = -2y^2,$$

$$\frac{\partial K(x, y)}{\partial y} = -1 + x, \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = -1 - x$$

и запишем уравнение (5.18) в следующем виде:

$$-2y^2F'(y) = \int_a^y (-1 + x) F'(x)\, dx + \int_y^b (-1 - x) F'(x)\, dx. \tag{5.21}$$

Дифференцируя (5.21) по y, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$-4yF' - 2y^2F'' = (y-1)F' + (y+1)F'$$

или

$$yF'' = -3F'. \tag{5.22}$$

Решая (5.22), получим

$$F'(y) = ky^{-3}. \tag{5.23}$$

Теперь надо найти a, b, k. Пусть $b < 1$. Известно, что для всех $y \in (a, b)$

$$E(F, y) = 0.$$

Так как $E(F, y)$ непрерывна по y, то

$$E(F, b) = 0, \tag{5.24}$$

следовательно,

$$\int_a^b (x - b + bx)\, dF(x) = 0.$$

Но если $b < 1$, то

$$\int_a^b (x - 1 + x)\, dF(x) < 0,$$

и поэтому $E(F, 1) < 0$, что противоречит условию (5.17), и таким образом $b = 1$. Подставляя это значение и значение F' в (5.24), получим

$$k \int_a^1 \frac{2x-1}{x^3}\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$3a^2 - 4a + 1 = 0,$$

и получаем $a = 1$ и $a = \frac{1}{3}$. Значение $a = 1$ невозможно, следовательно, $a = \frac{1}{3}$. Поскольку $F(x)$ — функция распределения вероятностей, то

$$\int_a^b kF'(x)\, dx = 1$$

или

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 kx^{-3} = 1,$$

откуда $k = \frac{1}{4}$.

Поэтому получаем оптимальную стратегию

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4x^3} & \text{если } x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

которая указывает, что первую треть периода не следует делать вклад, а в оставшемся периоде следует делать его с вероятностью $0{,}25x^{-3}$. Аналогична оптимальная стратегия второй фирмы.

Пример 5.2 (Шумная дуэль). Пусть имеются две фирмы, как и в примере 5.1, желающие овладеть рынком сбыта с помощью вкладов. С этой целью они делают свои вклады в определенные моменты времени по их желанию. Каждая фирма стремится сделать свой вклад как можно позже, так как это повышает вероятность овладения рынком. С другой стороны, каждая из них может овладеть рынком сбыта, если раньше сделает свой вклад. Условие, отличное от примера 5.1, заключается в том, что, как только одна из фирм сделает свой вклад, это становится известным. В этом случае также сразу становится известным, овладела ли фирма рынком сбыта. Если она овладела, то выиграла 1, а вторая выиграла 0; если она не овладела, то другая фирма, сделав свой вклад, обязательно овладеет им и выиграет 1, а первая фирма — 0. Если фирмы одновременно делают вклады, то каждая из них может получить рынок сбыта с определенной вероятностью.

Вообще говоря, возможны варианты исходов, когда обе фирмы сделали вклад и ни одна не овладела рынком сбыта или обе фирмы овладели рынком сбыта, такие исходы считаются ничейными, т. е. каждая фирма получает выигрыш, равный нулю.

Пусть по-прежнему [0, 1] — интервал времени, в течение которого фирмы могут делать вклады: x означает момент, когда первая фирма делает вклад ($0 \leqslant x \leqslant 1$); y — момент вклада второй фирмы ($0 \leqslant y \leqslant 1$); $p_1(x)$ — вероятность овладения рынком сбыта первой фирмой, если она делает свой вклад в момент x; $p_2(y)$ — вероятность овладения рынком сбыта второй фирмой, если она делает свой вклад в момент y. Очевидно, значения функций p_1 и p_2 увеличиваются с увеличением аргументов, так как вероятность овладения рынком сбыта увеличивается с увеличением времени от начала до момента вклада. Функция выигрышей $M(x, y)$ первой фирмы (игрока) формируется следующим образом.

Пусть $x > y$, тогда выигрыш первой фирмы будет с вероятностью $p_1(x)$, а проигрыш — с вероятностью $1 - p_1(x)$ и

$$K(x, y) = 1 \cdot p_1(x) + (-1)[1 - p_1(x)] = 2p_1(x) - 1.$$

Пусть $x = y$, тогда вероятность того, что первая фирма выиграет, а вторая проиграет, равна $p_1(x)[1 - p_2(y)] = p_1(x)[1 - p_2(x)]$; вероятность того, что вторая фирма выиграет, а первая проиграет, равна $p_2(y)[1 - p_1(x)] = p_2(x)[1 - p_1(x)]$, т. е.

$$\varphi(x) = p_1(x)[1 - p_2(x)] + p_2(x)[1 - p_1(x)](-1) = p_1(x) - p_2(x).$$

Пусть $y > x$, тогда вероятность того, что вторая фирма выиграет, равна $p_2(y)$, а вероятность того, что вторая фирма проиграет, равна $[1 - p_2(y)]$, поэтому

$$L(x, y) = (-1)p_2(y) + [1 - p_2(y)] \cdot 1 = 1 - 2p_2(y).$$

Для решения такой игры с функциями $M(x, y)$ можно применить вышеизложенный метод решения дифференциального уравнения. Однако, учитывая, что функции $p_1(x)$ и $p_2(y)$ возрастающие, можно определить решение прямо, отыскивая

$$\max_x \min_y M(x, y) = \max_x \min [2p_1(x) - 1,\ p_1(x) - p_2(x),\ 1 - 2p_2(x)].$$

Разобъем интервал [0, 1] на три части: интервал A характеризуется теми x, для которых

$$p_1(x) + p_2(x) \geqslant 1,$$

интервал B для тех x, что

$$p_1(x) + p_2(x) = 1,$$

интервал C для тех x, что

$$p_1(x) + p_2(x) \leqslant 1.$$

Обозначим через

$$\mu(x) = \min [2p_1(x) - 1,\ p_1(x) - p_2(x),\ 1 - 2p_2(x)],$$

тогда

$$\max_x \min_y M(x, y) = \max_x \mu(x) = \max [\max_{x \in A} \mu(x), \max_{x \in B} \mu(x), \max_{x \in C} \mu(x)].$$

Для интервала A справедливо $p_1(x) + p_2(x) \geqslant 1$, поэтому справедливы неравенства:

$$p_1(x) + p_2(x) - 1 \geqslant 0,$$

$$1 - 2p_2(x) \leqslant 1 - 2p_2(x) + [p_1(x) + p_2(x) - 1] = p_1(x) - p_2(x),$$

$$p_1(x) - p_2(x) \leqslant p_1(x) - p_2(x) + [p_1(x) + p_2(x) - 1] = 2p_1(x) - 1.$$

Отсюда следует

$$1 - 2p_2(x) \leqslant p_1(x) - p_2(x) \leqslant 2p_1(x) - 1.$$

или

$$\mu(x) = 1 - 2p_2(x).$$

Для интервала B имеем:

$$p_1(x) + p_2(x) = 1,$$

$$1 - 2p_2(x) = p_1(x) - p_2(x) = 2p_1(x) - 1,$$

откуда

$$\mu(x) = p_1(x) - p_2(x).$$

Для интервала C имеем:

$$p_1(x) + p_2(x) \leqslant 1,$$

$$2p_1(x) - 1 \leqslant p_1(x) - p_2(x) \leqslant 1 - 2p_2(x),$$

откуда

$$\mu(x) = 2p_1(x) - 1.$$

Для интервала A функция $\mu(x)$ достигает своего максимума при минимальном значении $p_2(x)$, удовлетворяя условию

$$p_1(x) + p_2(x) \geqslant 1.$$

Поскольку функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ возрастающие, то минимальное значение $p_2(x)$ достигается при выполнении уравнения

$$p_1(x) + p_2(x) = 1. \qquad (5.25)$$

Пусть x_1 — значение x, удовлетворяющее этому уравнению, тогда

$$\max_{x \in A} \mu(x) = 1 - 2p_2(x_1).$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующим равенствам:

$$\max_{x \in B} \mu(x) = p_1(x_1) - p_2(x_1),$$

$$\max_{m \in C} \mu(x) = 2p_1(x_1) - 1,$$

где x_1 удовлетворяет равенству (5.25) и, следовательно,

$$\max_x \min_y M(x, y) = p_1(x_1) - p_2(x_1),$$

достигается на интервале B и

$$\max_x \min_y M(x, y) = p_1(x_1) - p_2(x_1),$$

где x_1 удовлетворяет уравнению (5.25).

Аналогично можно показать, что

$$\min_y \max_x M(x, y) = p_1(y_1) - p_2(y_1),$$

где y_1 удовлетворяет уравнению (5.25)

$$p_1(y_1) + p_2(y_1) = 1.$$

Таким образом, функция $M(x, y)$ имеет седловую точку (x_1, y_1). Оптимальной стратегией фирм является делать вклады одновременно в момент t, удовлетворяющий уравнению

$$p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

цена игры равна $p_1(t) - p_2(t)$.

Если, например, $p_1(x) = x$, $p_2(y) = y^2$, то оптимальное время вклада для каждой фирмы определяется из уравнения $t + t^2 = 1$, откуда $t = 0{,}62$, цена игры равна $V = x - x^2 = t - t^2 = 0{,}24$, т. е. первая фирма выигрывает 0,24, что и следовало ожидать, так как на интервале [0, 1] вероятность овладения рынком сбыта у нее больше, чем у второй фирмы.

Контрольные вопросы и задания к главе 5

1. Что такое игра типа дуэли или с выбором момента времени?
2. Опишите структуру функции выигрышей первого игрока в игре типа дуэли.
3. Опишите метод решения игры типа дуэли.
4. Опишите игру — бесшумную дуэль.
5. Опишите игру — шумную дуэль.
6. Формализуйте конфликтную ситуацию и найдите решение игры, подобной игре примера 5.1., с тем отличием, что фирма, сделавшая удачно свой вклад раньше второй, выигрывает вдвое больше (две единицы), чем она выигрывает, если сделает удачно свой вклад после неудачного, но ранее сделанного вклада другой фирмы.
7. Найдите решение игры, аналогичной игре примера 5.1, с тем отличием, что каждая фирма может делать второй вклад, если оказалось, что первый вклад был сделан ею неудачно.
8. Формализуйте конфликтную ситуацию и найдите решение игры, подобной игре 5.2, с тем отличием, что каждая фирма может делать второй вклад, если оказалось, что первый вклад ею сделан неудачно.
9. Формализуйте конфликтную ситуацию, подобную примеру 5.1, с тем отличием, что вторая фирма может делать еще один вклад, если она неудачно сделала свой первый вклад (первая фирма может делать свой вклад только один раз).

ГЛАВА 6. МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ

К многошаговым относят такие игры, в которых хотя бы один из игроков делает больше одного хода. Так, позиционные игры также являются многошаговыми, поскольку там можно делать несколько ходов. Однако в многошаговых играх рассматриваются большие возможности по сравнению с позиционными играми, так как в них может быть бесконечно много шагов (ходов).

В настоящей главе мы рассмотрим три вида многошаговых игр: игры на разорение, стохастические и дифференциальные игры.

6.1. ИГРЫ НА РАЗОРЕНИЕ

Играми на разорение называются многошаговые игры, в которых каждый игрок, начиная игру, имеет ограниченные ресурсы и с каждым ходом или шагом ресурсы одного из игроков уменьшаются на единицу.

Проигравшим считается тот, кто раньше истощит свои ресурсы, а выигравшим — тот, у кого останутся ресурсы.

Игра на разорение может быть сформулирована как игра на выигрыш, если считать, что игроки начинают игру с нулевыми ресурсами, а затем на каждом шаге ресурсы одного из игроков увеличиваются на единицу. Выигравшим считается тот, кто раньше достигнет определенного количества ресурсов (это количество обусловливается перед началом игры).

Поскольку количество ресурсов конечное и на каждом шаге оно изменяется на единицу, то игра на разорение всегда заканчивается через конечное число шагов.

Игры на разорение, в частности, могут представляться в виде многошаговых игр, в которых на каждом шаге рассматривается отдельная игра. После выбора стратегий на каждом шаге определяется либо обычный выигрыш в виде числа, если игра заканчивается на этом шаге, либо переход к следующему шагу — розыгрышу следующей игры. Так, например, двухшаговая игра может быть представлена в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где a_{11} — действительные числа, выражающие выигрыш первого игрока за счет второго, если первый и второй игрок применят свои первые стратегии; a_{22} — выигрыш первого игрока, если оба игрока применяют свои вторые стратегии; Γ_1 — игра, которую они должны разыграть, если первый игрок применит свою первую стратегию, а второй — свою вторую стратегию. В частности, Γ_1 и Γ_2 представляют собой матричные игры двух игроков с нулевой суммой, заданные соответственно следующими матрицами выигрышей первого игрока:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Эта игра состоит из двух одношаговых игр: 1-я — первый игрок выбирает свою стратегию 1 или 2, второй игрок — свою стратегию 1 или 2, после чего первый игрок получает a_{11} или a_{22}, если они выбрали одноименные стратегии, и на этом игра заканчивается; либо они переходят ко второму шагу (второй игре Γ_1 или Γ_2), если они выбрали разные стратегии. На втором шаге игра заканчивается; и первый игрок получает выигрыш согласно результату в игре Γ_1 или Γ_2.

Если рассматривать оптимальные решения таких игр, то следует пользоваться понятиями среднего выигрыша и смешанных стратегий. Поэтому с точки зрения оптимизации стратегий и получения цены игры в матрице (6.1) можно заменить Γ_1 и Γ_2 соответственно на цены игры v_i для Γ_i $(i = 1, 2)$ и получить следующую матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Решая игру с матрицей (6.2), получим решение двухшаговой игры в виде: v — цена игры, $x = (x_1, x_2)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока, $y = (y_1, y_2)$ — оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

Вообще говоря, общий метод решения многошаговых игр сводится к составлению рекуррентных соотношений для цены игры, начиная с конца игры, т. е. для последних двух или нескольких шагов. Имея эти рекуррентные соотношения и начальное значение цены игры, можно получить цены игры для каждого шага (каждой отдельной игры, представленной на каждом шаге развития игры). Получив цену игры на предпоследнем шаге, определяем решение игры на последнем шаге и тем самым — решение всей игры.

Если уравнения, выражающие рекуррентные соотношения, не удается решить в виду их сложности, то все же их можно использовать для нахождения приближенных значений цены игры и затем оптимальных смешанных стратегий.

Пример 6.1. (Игра инспектирования). Имеется два лица: первое лицо — нарушитель, второе лицо — инспектор. Нарушитель может совершить свое действие — нарушение в один из n периодов времени $1, 2, \ldots, t, \ldots, n$. Инспектор может сделать проверку только один раз в любой из этих периодов времени. Если нарушитель и инспектор действуют одновременно, то считается, что нарушитель пойман и он (нарушитель) проиграл единицу каких-то благ, если нарушитель и инспектор действуют в разные периоды времени, то нарушитель выигрывает 1. Если нарушитель не действует вовсе, то его выигрыш равен нулю.

Для формализации этой ситуации назовем нарушителя первым игроком, а инспектора —вторым. С каждым периодом времени свяжем шаг игры. Так, на первом шаге (в первом периоде) первый игрок может совершить свое действие (стратегия 1) или не совершить его (стратегия 2); второй игрок также может инспектировать (стратегия 1), не инспектировать (стратегия 2). Рассмотрим теперь результаты игры на первом шаге: если первый игрок действует, а второй инспектирует, то игра заканчивается на этом шаге выигрышем второго игрока, т. е. первый игрок получит —1; если первый игрок действует, а второй не инспектирует, то выигрывает первый игрок 1; если первый игрок не действует, а второй инспектирует, то инспекция оканчивается безрезультатно, и первый игрок в любой другой период выигрывает 1 (второй игрок уже исчерпал свою возможность инспектировать); если первый игрок не действует, а второй не инспектирует, то действия переносятся на второй период, т. е. разыгрывается игра Γ_{n-1}, у которой количество шагов $n - 1$ на единицу меньше, чем в первоначальной игре, с учетом первого шага. Итак, полученная игра формализуется с помощью следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (6.3)$$

в которой первая строка соответствует выигрышам первого игрока, если он применяет свою первую стратегию; вторая строка соответствует ситуации, когда он применит свою вторую стратегию; первый столбец соответствует выигрышам первого игрока, если второй игрок применит свою первую стратегию, второй столбец соответствует ситуации, когда второй игрок применит свою вторую стратегию; значение Γ_{n-1} в матрице означает, что надо провести игру Γ_{n-1}.

Пусть v_t — цена игры на t-м шаге ($t = 1, 2, \ldots, n$), тогда при $n \geqslant 2$ игру с матрицей (6.3) можно заменить на игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

и для цены игры справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$v_n = \text{цена игры} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Очевидно, $v_{n-1} < 1$, поэтому игра с матрицей (6.4) не имеет седловой точки, и можно найти оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ соответственно для первого и второго игроков и v_n.

С этой целью составляем уравнения:

$$-x_1 + x_2 = v_n, \quad -y_1 + y_2 = v_n, \quad x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 + v_{n-1}x_2 = v_n, \quad y_1 + v_{n-1}y_2 = v_n, \quad y_1 + y_2 = 1.$$

Решение этих уравнений следующее:

$$x_1 = \frac{1 - v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \quad x_2 = \frac{v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \tag{6.6}$$

$$y_1 = \frac{1 - v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \quad y_2 = \frac{v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \tag{6.7}$$

$$v_n = \frac{v_{n-1} + 1}{3 - v_{n-1}}. \tag{6.8}$$

В игре с одним периодом $n = 1$ при 2-й стратегии первого игрока он получит 0, и матрица выигрышей первого игрока имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет седловую точку (2,1) и цену игры $v_1 = 0$. Поэтому, имея $v_1 = 0$ как начальное условие, из (6.8) можно определить последовательно v_t ($t = 1, 2, \ldots, n$), т. е. v_n — цену всей n-шаговой игры. Сделав в (6.8) подстановку $w_n = (v_n - 1)^{-1}$, получим

$$w_n = w_{n-1} - \frac{1}{2}, \quad w_1 = -1. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) имеет, очевидно, решение $w_n = -\frac{n+1}{2}$, откуда

$$v_n = \frac{n-1}{n+1}. \tag{6.10}$$

Подставляя v_{n-1} из (6.10) в (6.4), получим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{n-2}{n} \end{pmatrix},$$

решая которую, находим оптимальные смешанные стратегии для первого игрока:

$$x_1 = \frac{1}{n+1}, \quad x_2 = \frac{n}{n+1} \quad (n \geqslant 2),$$

для второго игрока:

$$y_1 = \frac{1}{n+1}, \quad y_2 = \frac{n}{n+1} \quad (n \geqslant 2),$$

цену игры:

$$v_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Таким образом, на 1-м шаге имеем игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{n-2}{n} \end{pmatrix},$$

с решением

$$x_1^1 = \frac{1}{n+1}, \quad x_2^1 = \frac{n}{n+1}; \quad y_1^1 = \frac{1}{n+1}, \quad y_2^1 = \frac{n}{n+1},$$

цена игры $v^1 = v_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Для второго шага имеем игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{n-3}{n-1} \end{pmatrix},$$

с решением

$$x_1^2 = \frac{1}{n}, \quad x_2^2 = \frac{n-1}{n}, \quad y_1^2 = \frac{1}{n}; \quad y_2^2 = \frac{n-1}{n},$$

цена игры $v^2 = v_{n-1} = \dfrac{n-2}{n}$.

На t-м шаге имеем игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{n-t-1}{n-t+1} \end{pmatrix},$$

с решением

$$x_1^t = \frac{1}{n-t+2}, \quad x_2^t = \frac{n-t+1}{n-t+2}, \quad y_1^t = \frac{1}{n-t+2}, \quad y_2^t = \frac{n-t+1}{n-t+2};$$

цена игры $v^t = v_{n-t+1} = \dfrac{n-t}{n-t+2}$.

Следовательно, вероятность применения игроками своих первых стратегий (действий) с каждым шагом игры увеличивается и на последнем шаге при $t=n$ становится равной $\frac{1}{2}$; вероятность применения их вторых стратегий (бездействий) уменьшается с каждым шагом игры и на последнем шаге при $t=n$ становится равной $\frac{1}{2}$; цена игры v^t уменьшается с каждым шагом, приближаясь к 0; чем больше n шагов в игре, тем больше общая цена игры v_n и тем ближе она к 1.

6.2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Разновидностью многошаговых игр являются стохастические игры, в которых имеется несколько игровых позиций, и переход от одной позиции к другой совершается с определенной вероятностью. В правилах игры предусматриваются выигрыши на каждом шаге игры. Таким образом, в стохастической игре возможны возвращения к предшествующей позиции и теоретически возможно бесконечное продолжение игры и бесконечно большой выигрыш. Однако, чтобы исключить такую возможность, в правилах игры предусматривается задание таких переходных вероятностей, что бесконечное продолжение игры может быть с вероятностью нуль, а математическое ожидание выигрыша конечно.

Стохастическая игра задается набором m игровых элементов или позиций Γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$; каждый игровой элемент Γ_k представляется матрицей A_k порядка $m_k \times n_k$, где m_k — число стратегий первого игрока, n_k — число стратегий второго игрока.

Элементы a_{ij}^k матрицы A_k задаются в следующем виде:

$$a_{ij}^k = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl}\Gamma_l, \tag{6.11}$$

где i — номер стратегии первого игрока $(i = 1, 2, \ldots, m_k)$; j — номер стратегии второго игрока $(j = 1, 2, \ldots, n_k)$; c_{ij}^k — выигрыш первого игрока на k-м шаге, если первый игрок применит стратегию i, а второй j; q_{ij}^{kl} — вероятность перехода на позицию Γ_l с позиции k, если на k-й позиции первый игрок применил свою стратегию i, а второй — j, причем с вероятностью

$$q = \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl} < 1 \tag{6.12}$$

осуществляется переход на игровой элемент, а с вероятностью

$$q_{ij}^{k0} = 1 - q > 0 \tag{6.13}$$

игра заканчивается.

Условие (6.12) или (6.13) показывает, что вероятность бесконечного продолжения игры равна 0, а математическое ожидание выигрыша конечно.

Смешанной стратегией первого игрока называется полный набор вероятностей x_i^{kt} применения его чистых стратегий на t-м шаге игры в игровом элементе Γ_k ($i = 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $t = 1, 2, \ldots$).

Очевидно, x_i^{kt} удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^{kt} = 1, \quad x_i^{kt} \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Смешанной стратегией второго игрока называется полный набор вероятностей y_j^{kt} применения его стратегий на t-м шаге игры в игровом элементе Γ_k ($j = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $t = 1, 2, \ldots$). Очевидно, для y_j^{kt} должны удовлетворяться следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n_k} y_j^{kt} = 1; \quad y_j^{kt} \geqslant 0. \tag{6.15}$$

Смешанная стратегия игрока называется стационарной, если вероятности применения его чистых стратегий не зависят от шага игры t. Стационарные смешанные стратегии записываются так:

$$x_i^k, \quad y_j^k.$$

Поскольку средний выигрыш игрока зависит от того, с какой позиции начинается игра, то и цена игры зависит от этого. Обозначим через v_k цену игры, если первым шагом игры был игровой элемент Γ_k. Таким образом определяется вектор цены игры $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Каждому значению v_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) соответствуют оптимальные смешанные стратегии игроков.

Если вектор v существует, то можно заменить игровой элемент Γ_k на v_k, т. е. получается, что

$$v_k = \operatorname{val} B_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\operatorname{val} B_k$ означает цену игры с матрицей B_k, а элементами B_k будут

$$b_{ij}^k = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl} v_l. \tag{6.16}$$

Теперь возникают следующие вопросы:

Существует ли вектор v?

Единственный ли вектор v?

Как найти вектор v и оптимальные стратегии?

На эти вопросы дает ответ следующая лемма и теорема.

Лемма 6.1. *Пусть матрицы* $A = \| a_{ij} \|$ *и* $B = \| b_{ij} \|$ *порядка* $m \times n$, *удовлетворяющие условию*

$$a_{ij} \leqslant b_{ij} + k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n),$$

где k — *действительное число, тогда*

$$\operatorname{val} A < \operatorname{val} B + k.$$

Доказательство. Пусть $v = \text{val } B$, y — оптимальная стратегия второго игрока в игре с матрицей B. Тогда для всех i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + k \sum_{j=1}^{n} y_j \leqslant v + k,$$

так что y дает верхнюю границу проигрыша в игре с матрицей A, которая меньше $v + k$.

Теорема 6.1. *Существует в точности один вектор цен игры* $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m)$, *удовлетворяющий соотношениям*

$$v_k = \text{val } B_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{6.17}$$

где B_k *определена по формуле* (6.16).

Доказательство. Покажем сначала единственность. Предположим, что существуют два вектора цен v и w, удовлетворяющих соотношениям (6.17). Пусть k — номер компоненты, для которой

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant m} |v_l - w_l| = |v_k - w_k|,$$

и пусть для определенности $v_k - w_k = c > 0$. Определим две матрицы B_k и D_k следующими соотношениями:

$$b_{ij}^k = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl} v_l, \quad d_{ij}^k = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl} w_l.$$

Очевидно,

$$|b_{ij}^k - d_{ij}^k| \leqslant \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl} |v_l - w_l| < c.$$

Из леммы 6.1 следует, что

$$\text{val } B_k < \text{val } D_k + c.$$

Поскольку v и w удовлетворяют (6.16) и (6.17), то

$$v_k < w_k + c,$$

что противоречит предпосылке $v_k - w_k = c$ и доказывает единственность.

Докажем существование. Доказательство конструктивное, основанное на построении последовательности векторов, сходящейся к требуемому вектору. Пусть r — номер члена последовательности. Определим члены последовательности следующими соотношениями:

$$v^0 = (0, 0, \ldots, 0), \tag{6.18}$$

$$b_{ij}^{kr} = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^{m} q_{ij} v_l^r \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{6.19}$$

$$v_k^{r+1} = \text{val } B_k^r = \text{val} \| b_{ij}^{kr} \|. \tag{6.20}$$

Требуется доказать: 1) последовательность векторов $v^r = (v_1^r, \ldots, v_m^r)$ сходится; 2) предел этой последовательности удовлетворяет условиям (6.16), (6.17). Положим

$$s = \max_{k,j,i} \sum_{l=1}^{m} q_{ij}^{kl}. \tag{6.21}$$

Поскольку выполняется (6.12) и множества индексов k, i, j конечные, то s существует и $s < 1$.

Если положить

$$t_r = \max_k |v_k^{r+1} - v_k^r|,$$

то по лемме 6.1. следует, что $t_r \leqslant st_{r-1}$ и, следовательно, $t_r \leqslant s^r t_0$. Поэтому согласно признаку сходимости Коши последовательность v_k^r должна сходиться к пределу, который обозначим через v.

Пусть теперь

$$w_k = \operatorname{val} B_k = \operatorname{val} \| b_{ij}^k \|,$$

где

$$b_{ij}^k = c_{ij}^k + \sum_{l=1}^m q_{ij}^{kl} v_l.$$

Покажем, что $w_k = v_k$ для всех k. Действительно, на основании сходимости последовательностей v_k^r для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать r столь большим, чтобы для всех k выполнялись неравенства:

$$|v_k^r - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.22}$$

$$|v_k^{r+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.23}$$

Из (6.22) и леммы (6.1) следует, что для всех k

$$|v_k^{r+1} - w_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а это вместе с (6.23) означает, что для всех k

$$|w_k - v_k| < \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то $v_k = w_k$, что и требовалось доказать.

Используя конструктивный способ доказательства теоремы 6.1, можно построить аппроксимацию цен игровых элементов Γ_k следующим образом: предположим, что игра будет продолжаться как стохастическая, пока не будет сыграна r раз, а затем ее необходимо заканчивать (если она не закончилась естественно раньше), тогда получим усеченную игру на разорение, а не стохастическую игру. Решив ее известными методами, получим вектор цен v^r и оптимальные стратегии в матричных играх с матрицами B_k^r. Число s, оппределенное формулой (6.21), обладает тем свойством, что вероятность продолжения игры более r шагов, какие бы стратегии не использовались, не превосходит s^r (здесь s в степени r). Поэтому, если r достаточно велико, то s^r мало, и мы можем аппроксимировать стохастическую игру игрой, усеченной после r шагов. Оптимальные стратегии x^{kr} и y^{kr} усеченных игр сходятся к оптимальным стационарным стратегиям стохастической игры.

Пример 6.2. Два игрока разыгрывают сумму 5 единиц, т. е. у них вместе на двоих имеется капитал, состоящий из 5 единиц. У каждого из игроков имеется по две стратегии: 1, 2. Если оба игрока выбирают свои первые стратегии, то второй игрок платит первому 3 единицы; если оба игрока выбирают свои вторые стратегии, то второй игрок платит первому одну единицу; если игроки применяют разные стратегии, то первый игрок платит второму одну единицу. Ни один игрок не может платить больше, чем он имеет. После каждого выбора стратегий и распределения выигрышей с вероятностью 0,5 игра продолжается, с вероятностью 0,5 игра заканчивается. Кроме того, игра заканчивается, если один из игроков разорится.

Рассмотренная игра может быть представлена четырьмя игровыми элементами Γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), где k — величина капитала, которую имеет первый игрок в начале данного шага:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{2}\Gamma_4 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{2}\Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 + \frac{1}{2}\Gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 + \frac{1}{2}\Gamma_1 \\ -2 + \frac{1}{2}\Gamma_1 & 1 + \frac{1}{2}\Gamma_4 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 + \frac{1}{2}\Gamma_2 \\ -2 + \frac{1}{2}\Gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно. Рассмотрим, например, первое выражение Γ_1. У первого игрока есть одна единица: если он выиграет три единицы, то он может разыгрывать 4 единицы с вероятностью 0,5 (этому соответствует элемент a_{11}^1 матрицы A_1 игрового элемента Γ_1); если он проиграет свою единицу, то он разорится, и игра заканчивается (это соответствует элементам a_{12}^1 и a_{21}^1 матрицы A_1 игрового элемента Γ_1); если он выигрывает одну единицу, то у него станет 2 единицы капитала, он может продолжать игру Γ_2 с вероятностью 0,5 (это соответствует элементу a_{22}^1 игрового элемента Γ_1). Аналогично объясняются и остальные игровые элементы Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Используя для этой игры формулы (6.18), (6.19), (6.20) и в качестве начального приближения $v^0 = (0, 0, 0, 0)$, получим 1-е приближения для Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, обозначенные соответственно Γ_1^1, Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_4^1, заменяя которые в матрицах для Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 значениями цены игры $v_1^0 = v_2^0 = v_3^0 = v_4^0, = 0$, получим

$$\Gamma_1^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3^1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая эти игры, найдем вектор $v^1 = (v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1)$. Например, для цены игры с игровым элементом Γ_1^1 получим уравнения:

$$3x^{11} - (1 - x^{11}) = v_1^1,$$

$$-x^{11} + (1 - x^{11}) = v_1^1,$$

где x^{11} — вероятность применения первым игроком в игровом элементе Γ_1^1 своей первой чистой стратегии. Исключим x^{11} из последних уравнений, тогда $v_1^1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Аналогично составляем уравнения для игрового элемента Γ_2^1 и получаем

$$3x^{21} - 2(1 - x^{21}) = v_2^1,$$

$$-2x^{21} + 1 - x^{21} = v_2^1,$$

где x^{21} — вероятность применения первым игроком в игровом элементе Γ_2^1 своей первой чистой стратегии. Исключая x^{21} из последних уравнений, получим $v_2^1 = -\frac{1}{8} \approx -0{,}13$. Аналогично находим $v_3^1 \approx -0{,}29$; $v_4^1 = -0{,}5$. Таким образом, нашли вектор

$$v^1 = (0{,}33;\quad -0{,}13;\quad -0{,}29;\quad -0{,}5).$$

Подставляя теперь в матрицы для Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 соответственно значения $v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1$ вместо Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, получим матрицы игр для второй итерации:

$$\Gamma_1^2 = \begin{pmatrix} 2{,}75 & -1 \\ -1 & 0{,}94 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0{,}85 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}84 \\ -1{,}84 & 0{,}75 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2{,}06 \\ -2{,}06 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая игры с матрицами, соответствующими этим игровым элементам, соответственно получим вектор цены игры для второй итерации

$$v^2 = (0{,}26;\quad -0{,}19;\quad -0{,}29;\quad -0{,}53).$$

Проведение аналогично третьей и четвертой итерации дает

$$v^3 = (0{,}26;\quad -0{,}19;\quad -0{,}31;\quad -0{,}55),$$

$$v^4 = (0{,}26;\quad -0{,}19;\quad -0{,}32;\quad -0{,}55).$$

Итак, соответственные компоненты векторов v^3, v^4 отличаются друг от друга вторым десятичным знаком, следовательно, можно считать, что вектор цены игры v^4 получен с точностью до двух десятичных знаков. Если такая точность нас удовлетворяет, то вычисляем оптимальные смешанные стратегии, соответствующие этой четвертой итерации, решая игры с матрицами, которые получены из Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 путем подстановки в правые части этих игровых элементов вместо Γ_1, Γ_2, Γ_3,

Γ_4 соответственно значения $v_1^4, v_2^4, v_3^4, v_4^4$, т. е.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2{,}72 & -1 \\ -1 & 0{,}91 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0{,}84 \end{pmatrix};$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}87 \\ -1{,}87 & 0{,}72 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2{,}1 \\ -2{,}1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая отдельно игры с этими матрицами, соответственно получим

$$x^1 = (0{,}34;\ 0{,}66), \qquad y^1 = (0{,}34;\ 0{,}66),$$

$$x^2 = (0{,}38;\ 0{,}62), \qquad y^2 = (0{,}38;\ 0{,}62),$$

$$x^3 = (0{,}40;\ 0{,}60), \qquad y^3 = (0{,}40;\ 0{,}60),$$

$$x^4 = (0{,}50;\ 0{,}50), \qquad y^4 = (0{,}50;\ 0{,}50).$$

Эти векторы дают оптимальные стационарные смешанные стратегии игроков в стохастической игре, т. е. находясь в игровом элементе Γ_1 (имея капитал одну единицу), игроки должны применить свои стратегии согласно векторам x^1 и y^1, и средний выигрыш составит $v_1 = 0{,}26$; находясь в игровом элементе Γ_2 (имея капитал 2 единицы), игроки должны применить свои стратегии согласно векторам x^2, y^2, и средний выигрыш составит $v_2 = -0{,}19$; находясь в игровом элементе Γ_3 (имея капитал 3 единицы), игроки должны применять свои стратегии согласно векторам x^3, y^3, и средний выигрыш составит $v_3 = -0{,}32$; находясь в игровом элементе Γ_4 (имея капитал 4 единицы), игроки должны применять свои стратегии согласно векторам x^4, y^4, и средний выигрыш составит $v_4 = -0{,}55$, т. е. тогда на каждом шаге (игровом элементе) будет выигрыш в среднем соответствовать вектору цены игры $v_4 = (0{,}26; -0{,}19; -0{,}32; -0{,}55)$.

6.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Точное определение дифференциальной игры следующее:

1) игровой элемент представляется в виде вектора x из вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемых переменными состояниями (x зависит от времени t);

2) в каждый момент t первый игрок выбирает управляющий вектор — чистую стратегию $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$, компоненты которого зависят от времени t и ограничены отрезками $a_i \leqslant u_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; аналогично второй игрок в момент времени t выбирает управляющий вектор — чистую стратегию $w = (w_1, w_2, \ldots, w_q)$, компоненты которого зависят от времени t и ограничены отрезками

$$c_j \leqslant w_j \leqslant d_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q);$$

3) векторы x, u, w удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,\ u,\ w) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{6.24}$$

где $\frac{dx_i}{dt}$ — правая производная x_i по t, а f_i — некоторые заданные функции от переменных x, u, w;

4) выбор управляющих воздействий u, w в любой момент t приводит к выбору вектора x, удовлетворяющего уравнению (6.24), игра проводится в промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$ до тех пор, пока точка x достигнет границы C некоторого замкнутого множества A; эта граница называется терминальной поверхностью;

5) выигрыш первого игрока определяется как сумма

$$M = \int_0^T K(x_1, \ldots, x_n)\, dt + G(x^*), \tag{6.25}$$

где $K(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность выигрыша первого игрока в зависимости от состояния игрового элемента x, функция $G(x^*)$ — это выигрыш, который получает первый игрок за счет достижения терминальной поверхности C, точка x^* принадлежит терминальной поверхности C.

Экономическая интерпретация дифференциальной игры. Действующее предприятие оценивает свою деятельность посредством определенных показателей: объем выпускаемой продукции, прибыль, себестоимость, рентабельность, заработная плата и т. д. Эти показатели характеризуют состояние системы (предприятия) и образуют игровой элемент x. Руководство предприятия может применять управляющие воздействия: нормы выработки, систему премиальных и т. д. Эти показатели образуют вектор управления u. Внешняя среда может влиять на ход производства, применяя свои управляющие воздействия: поставки сырья, оборудования и т. д., которые образуют вектор w. В зависимости от достигнутого уровня показателей x предприятие получает удельные отчисления для своего развития и оплаты труда в виде функции $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Кроме того, перевыполнив план, т. е. достигнув определенных значений компонент вектора x (эти значения образуют терминальную поверхность C), предприятие дополнительно получает оплату $G(x^*)$. При этом параметры предприятия удовлетворяют уравнениям функционирования (6.24). Предприятие можно рассматривать в качестве первого игрока, который стремится максимально увеличить свои доходы

$$M = \int_0^T K(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt + G(x^*)$$

за счет выбора своих управленческих решений u, т. е. получить

$$\max_u M$$

при условиях (6.24).

С другой стороны, внешнюю среду можно рассматривать как противника и учитывать применение им самых неблагоприятных для предприятия действий, т. е. внешняя среда может рассматриваться как второй игрок, который желает, чтобы выигрыш первого игрока был возможно меньшим, т. е.

$$\min_w \max_u M$$

при условиях (6.24).

Итак, получаем игру двух игроков с нулевой суммой, в которой надо найти такие u и w, при которых достигается равенство

$$\min_{w}\max_{u} M = \max_{u}\min_{w} M = v, \qquad (6.26)$$

где $v = v(x)$ — цена игры.

Как уже отмечалось ранее, соотношение (6.26) равносильно существованию седловой точки в чистых или смешанных стратегиях. Вопросы существования решения для дифференциальных игр связаны с существованием решений уравнений (6.24) и являются сложными. Мы будем излагать метод решения дифференциальной игры в предположении, что решение существует.

Метод решения дифференциальных, как и в случае дискретных многошаговых игр, состоит в замене игровых элементов их ценами с последующим решением рекуррентных соотношений для цен. Для дифференциальных игр эти соотношения — уравнения (6.24).

Пусть $v(x) = v(x_1, \ldots, x_n)$ — цена игры, начинающейся в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Для определенности предположим, что игра начинается в момент $t = 0$, первый игрок выбирает управление u^1, второй — w^1. Рассмотрим развитие игры за малый интервал времени Δt, в течение которого вектор x получит приращение $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, где

$$\Delta x_i = f_i(x, u^1, w^1)\Delta t, \qquad (6.27)$$

общий интегральный выигрыш приближенно равен

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta t, \qquad (6.28)$$

вектор элемента состояния будет

$$x + \Delta x = \{x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n\}. \qquad (6.29)$$

Если рассматривать теперь развитие игры с достигнутой точки (6.29) так, что используются оптимальные стратегии, то общий выигрыш первого игрока будет равен цене игры и составит

$$v(x) = K(x_1, \ldots, x_n)\Delta t + v(x + \Delta x). \qquad (6.30)$$

При малых Δt приращения Δx_i также малы, и поэтому можно считать существенным только линейную часть приращения $v(x)$, т. е.

$$\Delta v \approx v(x + \Delta x) - v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\Delta x_i.$$

Заменяя Δx_i по формуле (6.27) в последнем соотношении, получим

$$v(x + \Delta x) \approx v(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} f_i(x, u^1, w^1)\Delta t.$$

Подставляя $v(x + \Delta x)$ из (6.30) и Δx_i из (6.27) в последнее соотношение, получим

$$v(x) - K(x)\Delta t = v(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} f_i(x, u^1, w^1)\Delta t,$$

или

$$K(x)\,\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}f_i(x,\ u^1,\ w^1)\,\Delta t=0,$$

откуда при $\Delta t\to 0$ получим

$$K(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}f_i(x,\ u^1,\ w^1)=0. \tag{6.31}$$

Уравнение (6.31) эквивалентно равенству (6.26) при условиях (6.24), т. е. эквивалентно соотношению

$$\max_u\ \min_w\left\{K(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}f_i(x,\ u,\ w)\right\}=0.$$

Уравнение (6.31) называется основным уравнением.

Теперь по аналогии с дискретными многошаговыми играми для получения уравнения траекторий можно двигаться назад вдоль траекторий, начиная с терминальной поверхности. С этой целью рассмотрим уравнение (6.31). Дифференцируя левую часть (6.31) по x_j, получим сумму членов

$$\frac{\partial K}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \tag{6.32}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}f_i, \tag{6.33}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(K+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i\right)\frac{\partial u^1}{\partial x_j}, \tag{6.34}$$

$$\sum_{l=1}^{q}\frac{\partial}{\partial w_l}\left(K+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i\right)\frac{\partial w^1}{\partial x_j}, \tag{6.35}$$

которая должна равняться нулю (производной от правой части).

Рассмотрим выражение (6.34). Если оптимальные значения u^1 находятся внутри интервала $(a_i<u_i^1<b_i)$, то (6.34) равно нулю за счет того, что выполняется (6.31). Если оптимальные значения u^1 находятся на границе ($u_i^1=a_i$ или $u_i^1=b_i$), то

$$\frac{\partial u^1}{\partial x_j}=0,$$

и выражение (6.34) также равно нулю, т. е. выражение (6.34) при оптимальных управлениях равно нулю.

Аналогично рассуждая, получаем, что выражение (6.35) также равно нулю.

Заменяя в (6.33) значения f_i из уравнения (6.25), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}f_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{d}{dt}\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = v_j, \quad \frac{\partial K}{\partial x_j} = K_j, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = v_i; \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{ij},$$

тогда равная нулю сумма выражений (6.32), (6.33), (6.34), (6.35) примет вид:

$$\frac{dv_j}{dt} = -\left[K_j(x, u^1, w^1) + \sum_{i=1}^{n} v_i f_{ij}(x, u^1, w^1)\right]. \qquad (6.36)$$

Уравнения (6.36) совместно с системой (6.24) называются уравнениями траекторий дифференциальной игры. Эти $2n$ уравнений вместе со значением функции G в качестве конечных условий являются формальным решением игры.

Пример 6.3. Состояние игры описывается двумя параметрами x и y, управляющие параметры каждого игрока по одному — $u \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, уравнения состояний следующие:

$$\frac{dx}{dt} = y \cos u + (x + y) \cos w,$$

$$\frac{dy}{dt} = y \sin u + (x + y) \sin w.$$

Терминальная поверхность — ось Ox, выигрыш равен

$$\int_0^T dt + \frac{x_0^2}{8},$$

где x_0 — абсцисса точки, в которой заканчивается партия.

Основное уравнение (6.31) для этой игры имеет вид:

$$y(v_1 \cos u^1 + v_2 \sin u^1) + (x + y)(v_1 \cos w^1 + v_2 \sin w^1) = -1. \qquad (6.37)$$

Оптимальные значения u^1 и w^1 находятся из условий максимума левой части (6.37)

$$\max_u \min_w [y(v_1 \cos u + v_2 \sin u) + (x + y)(v_1 \cos w + v_2 \sin w)]. \qquad (6.38)$$

Очевидно, от u зависит первое слагаемое (6.38), поэтому максимум левой части достигается, когда

$$\cos u^1 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \sin u^1 = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \qquad (6.39)$$

а минимум по w достигается за счет второго слагаемого при

$$\cos w^1 = -\cos u^1, \quad \sin w^1 = -\sin u^1. \qquad (6.40)$$

Подставив эти значения в (6.37), получим

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1}{x}. \qquad (6.41)$$

Выражения для производных следующие:

$$f_{11} = \cos w, \quad f_{12} = \cos u + \cos w,$$

$$f_{21} = \sin w, \quad f_{22} = \sin u + \sin w.$$

Подставляя сюда значения из (6.39) и (6.40), получим

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, & f_{12} &= \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0, \\ f_{21} &= -\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, & f_{22} &= \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} - \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

Уравнения траекторий (6.36) имеют вид:

$$\frac{dv_1}{dt} = -v_1 f_{11} - v_2 f_{21}, \quad \frac{dv_2}{dt} = -v_1 f_{12} - v_2 f_{22}. \tag{6.43}$$

Подставляя (6.42) в (6.43) и в (6.24), получим

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dv_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -x^2 v_1, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2 v_2.$$

Поскольку решения надо начинать с терминальной поверхности, то введем обратное время $\tau = T - t$ и получим уравнения

$$\frac{dv_1}{d\tau} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{dv_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = x^2 v_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = x^2 v_2.$$

Введем следующие начальные условия при $\tau = 0$:

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad v_1 = \frac{x_0}{4}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{x_0^2}{16}}.$$

Из этих условий следует, что $0 < x_0 \leqslant 2$. Дифференцируя $\frac{dv_1}{d\tau}$ по τ, получим

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{x^2} \cdot x^2 v_1 = v_1,$$

т. е.

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} = v_1.$$

Решением этого уравнения является

$$v_1 = c_1 e^{\tau} + c_2 e^{-\tau},$$

откуда

$$x = \frac{1}{c_2 e^{-\tau} - c_1 e^{\tau}}.$$

Используя начальные условия, получим уравнения для определения c_1 и c_2 в следующем виде:

$$\frac{x_0}{4} = c_1 + c_2, \quad x_0 = \frac{1}{c_2 - c_1}.$$

Решая эту систему уравнений и полагая $x_0 = a$, получим

$$c_1 = \frac{a^2 - 4}{8a}; \quad c_2 = \frac{4 + a^2}{8a}.$$

Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{8a}{(4+a^2)e^{-\tau}+(4-a^2)e^{\tau}}, \\ v_1 &= \frac{4+a^2}{8a}e^{-\tau} - \frac{4-a^2}{8a}e^{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Вторую координату y можно найти из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1},$$

где $v_2 = \text{const}$, так как $\frac{dv_2}{d\tau} = 0$, а v_1 из (6.44) можно найти как функцию от x. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{\frac{16a^2}{16-a^4} - x^2}},$$

откуда

$$y = c_3 - \sqrt{\frac{16a^2}{16-a^4} - x^2}.$$

Учитывая начальное условие

$$y|_{x=a} = 0,$$

найдем c_3 и получим

$$y = \frac{a^3 \pm \sqrt{16a^2 - 16x^2 - a^4x^2}}{\sqrt{16-a^4}},$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{a^3}{\sqrt{16-a^4}}\right)^2 = \frac{16a^2}{16-a^4}, \tag{6.45}$$

т. е. оптимальная траектория — это окружность с центром на оси Oy. Цена игры определяется так: из первого уравнения (6.44) определяем e^{τ} в зависимости от x и подставляем во второе уравнение (6.44), затем второе уравнение интегрируем по x и снова вместо x подставляем выражение через τ, тогда получим

$$v = \tau + \frac{a^2}{8}.$$

Оптимальные стратегии игроков: первому — следовать касательной вверх к окружности (6.45), а второму — вниз к оси Ox.

Контрольные вопросы и задания к главе 6

1. Что называется игрой на разорение?
2. Как решаются игры на разорение?
3. Что называется стохастической игрой?
4. Как решается стохастическая игра?
5. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности вектора цен в стохастической игре.

6. Что называется дифференциальной игрой?

7. Что такое основное уравнение для дифференциальной игры и проведите вывод этого уравнения?

8. Что такое уравнение траекторий, и сделайте вывод их уравнений для дифференциальной игры.

9. Что называется решением дифференциальной игры?

10. Приведите пример конфликтной ситуации в экономике, которая формализуется в виде игры на разорение.

11. Приведите пример конфликтной ситуации в экономике, которая формализуется в виде стохастической игры.

12. Приведите пример конфликтной ситуации в экономике, которая формализуется в виде дифференциальной игры.

13. В чем состоит трудность решения дифференциальных игр?

14. Рассмотрим дифференциальную игру на плоскости $y \geqslant 0$ с терминальной поверхностью $y = 0$, терминальным выигрышем

$$G(x) = (1 + x^2)^{-1}.$$

Уравнения траектории имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = u(1 + 2\sqrt{|x|}) + w, \quad \frac{dy}{dt} = -1.$$

Ограничения на управления следующие:

$$0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant w \leqslant 1.$$

Показать, что оптимальные траектории образуют семейство кривых, начинающихся на оси Oy. Что надо делать в точке на оси Oy (где встречаются оптимальные пути)?

15. Дифференциальная игра называется игрой качества, если она имеет только два возможных исхода, например, выиграть или проиграть (для первого игрока). Таким образом, можно представить себе, что терминальная поверхность разделена $(n-2)$-мерным многообразием на два множества A и B.

Первый игрок пытается закончить игру в A, второй — в B. Вообще говоря, пространство игры R_n будет так разбито на две части, называемые выигрывающей зоной (WZ) и проигрывающей зоной (LZ), что из точки в WZ первый игрок может окончить игру в A; а из точки в LZ второй игрок может окончить игру в B. Рассмотреть игру, когда игроки управляют соответственно движением точек P и E в верхней полуплоскости пространства R_2 (двух измерений). Эти точки могут двигаться в любом направлении со скоростями соответственно 1 и $w < 1$. Игра заканчивается выигрышем первого игрока, как только расстояние PE становится меньше d; она заканчивается проигрышем первого игрока, как только E достигнет прямой $y = 0$. Вывести уравнения траекторий этой игры, если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек соответственно P и E, а u и w — управления. Решить эту игру.

ГЛАВА 7. ИГРЫ n ЛИЦ

Реальные конфликтные ситуации часто приводят к формализации в виде игры с количеством игроков больше двух, например, n игроков. Такие игры называются играми n лиц (игроков). Поскольку в них участвуют не менее трех игроков (участников), то возможны два варианта правил:

1) игрокам не разрешается вступать в соглашения,

2) игрокам разрешается вступать в соглашения.

В первом случае каждый игрок должен самостоятельно и независимо от желания других выбирать свои стратегии с целью максимального увеличения своего выигрыша, т. е. игрокам не разрешается образовывать коалиции. Поэтому такая игра называется бескоалиционной.

Во втором случае некоторые игроки могут по соглашению объединяться (кооперироваться) в действиях против других игроков, образовывать коалиции с целью максимизации выигрыша коалиции. Такие игры называются коалиционными, или кооперативными.

Методы исследования игр n лиц зависят от возможностей образовывания или запрета коалиций.

7.1. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Пусть в бескоалиционной игре n лиц каждому игроку присвоен номер 1, 2, ..., n. Обозначим через I множество номеров игроков 1, 2, ...n. Будем считать, что каждый игрок имеет конечное число чистых стратегий. Игра состоит в выборе каждым игроком одной из своих стратегий, а затем происходит распределение выигрышей согласно правилам игры. Пусть s_i есть стратегия, выбранная i-м игроком, тогда набор стратегий $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ называется системой стратегий, или ситуацией. Множество всех ситуаций обозначим через S, которое равно декартовому произведению множеств стратегий игроков S_i $(i = 1,\ldots, n)$, т. е.

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

Каждой ситуации соответствуют выигрыши игроков. Пусть $H_i(s)$ — выигрыш i-го игрока в ситуации s $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Имея введенные обозначения, можно точно сформулировать определение бескоалиционной игры.

Бескоалиционной игрой называется система

$$\Gamma = \{I, \ \{S_i\}_{i\in I}, \quad \{H_i\}_{i\in I}\}, \tag{7.1}$$

в которой S и S_i $(i \in I)$ являются множествами, H_i — вещественные функции на множестве S.

Бескоалиционная игра (7.1) называется игрой с постоянной суммой, если существует такое постоянное c, что

$$H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s) = c \text{ для всех } s \in S.$$

В частности, если $c = 0$, то игра называется бескоалиционной игрой с нулевой суммой.

Введем теперь понятие приемлемой ситуации для игрока. Пусть имеется некоторая ситуация $s = (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ в игре Γ, а s_i^1 — некоторая стратегия i-го игрока. Через $s \parallel s_i^1$ обозначим ситуацию, которая отличается от s лишь тем, что в s стратегия s_i заменена на стратегию s_i^1, т. е.

$$s \parallel s_i^1 = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i^1, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Ситуация s называется приемлемой для i-го игрока, если для любой его стратегии s_i^1 выполняется неравенство

$$H_i(s \parallel s_i^1) \leqslant H_i(s). \tag{7.2}$$

Другими словами, неравенство (7.2) показывает, что выигрыш i-го игрока в приемлемой ситуации s не меньше, чем при других ситуациях, полученных из s путем замены в ней стратегии s_i на любую другую стратегию s_i^1.

Если ситуация s приемлема для всех игроков, то она называется ситуацией равновесия. Другими словами, если неравенства (7.2) выполняются для всех $i = 1, 2, ..., n$, то s есть ситуация равновесия.

Из определения ситуации равновесия следует, что в бескоалиционной игре ни один игрок не заинтересован в отклонении от ситуации равновесия.

Так стратегия i-го игрока в бескоалиционной игре, которая входит в ситуацию равновесия, называется его равновесной стратегией. Решением бескоалиционной игры считается ситуация равновесия. Найти решение бескоалиционной игры — это значит найти ситуацию равновесия.

Две бескоалиционные игры

$$\Gamma^1 = \{I, \ \{S_i\}_{i \in I}, \ \{H_i^1\}_{i \in I}\},$$

$$\Gamma^2 = \{I, \ \{S_i\}_{i \in I}, \ \{H_i^2\}_{i \in I}\},$$

в которых функции выигрышей линейно зависимы

$$H_i^1(s) = kH_i^2(s) + c_i \qquad (i = 1, \ 2, \ \dots, \ n), \tag{7.3}$$

где $k > 0$, c_i — вещественное, а множества игроков и стратегий одинаковы, называются стратегически эквивалентными. Отношение эквивалентности будем обозначать так: $\Gamma^1 \sim \Gamma^2$. Понятие стратегической эквивалентности помогает в исследовании бескоалиционных игр. Этому весьма способствует следующая теорема.

Теорема 7.1. *Стратегически эквивалентные игры имеют одни и те же ситуации равновесия.*

Доказательство. Пусть $\Gamma^1 \sim \Gamma^2$, s^* — ситуация равновесия в игре Γ^1. Это значит, что для всех $i \in I$ и $s_i \in S_i$ справедливы неравенства

$$H_i^1(s^* \parallel s_i) \leqslant H_i^1(s^*).$$

Используя равенства (7.3), получим

$$kH_i^2(s^* \parallel s_i) + c_i \leqslant kH_i^2(s^*) + c_i,$$

или

$$H_i^2(s^* \parallel s_i) \leqslant H_i^2(s^*) \qquad (i = 1, \ 2, \ \dots, \ n; \ s_i \in S_i),$$

т. е. s^* — ситуация равновесия в Γ^2, что и требовалось доказать.

Основываясь на теореме (7.1), можно сказать, что, зная решение одной из стратегических эквивалентных бескоалиционных игр, решение другой игры найти просто: ситуация равновесия та же, а выигрыши определяются формулой (7.3).

Ситуации равновесия в чистых стратегиях для бескоалиционных игр аналогичны седловой точке в чистых стратегиях для игр двух игроков с нулевой суммой. Однако такие ситуации равновесия встречаются не часто. В большинстве бескоалиционных игр они отсутствуют, и по аналогии с играми двух игроков используются смешанные стратегии игроков и вводится понятие смешанного расширения бескоалиционной игры в следующем виде.

Пусть σ_i — произвольная смешанная стратегия i-го игрока ($i = 1, 2, \ldots, n$) в бескоалиционной игре, т. е. σ_i — полный набор вероятностей применения его чистых стратегий s_{ij}, где j — номер чистой стратегии i-го игрока. Через $\sigma_i(s_i)$ обозначим вероятность применения чистой стратегии $s_i = s_{ij}$ игрока i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Множество всех смешанных стратегий i-го игрока обозначим через Z_i.

В бескоалиционной игре каждый игрок применяет свои чистые стратегии независимо от решения других игроков, поэтому вероятность $\sigma(s)$ появления ситуации s равна произведению вероятностей применения чистых стратегий s_i, образующих ситуацию s, т. е.

$$\sigma(s) = \sigma(s_1, \ldots, s_n) = \sigma_1(s_1) \ldots \sigma_n(s_n).$$

Вероятность $\sigma(s)$ называется ситуацией игры Γ в смешанных стратегиях. Выигрыш каждого игрока в бескоалиционной игре теперь понимается как средний его выигрыш в зависимости от вероятностных распределений $\sigma(s)$, т. е. средний выигрыш i-го игрока равен

$$H_i(\sigma) = \sum_{s\in S} H_i(s)\,\sigma(s) = \sum_{s_1\in S_1} \ldots \sum_{s_n\in S_n} H_i(s_1, \ldots, s_n)\,\sigma(s_1, \ldots, s_n). \tag{7.4}$$

Смешанным расширением игры Γ называется игра

$$\Gamma^* = \{I, \ \{Z_i\}_{i\in I}, \ \{H_i\}_{i\in I}\},$$

в которой множество игроков есть I, множество стратегий i-го игрока есть Z_i, а функция выигрышей определяется равенством (7.4).

Ситуацией равновесия смешанного расширения Γ^* игры Γ называется ситуация равновесия игры Γ в смешанных стратегиях, т. е. ситуация σ^* является ситуацией равновесия в игре Γ^*, если для любого игрока i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и любой ее смешанной стратегии σ_i имеет место неравенство

$$H_i(\sigma^* \parallel \sigma_i) \leqslant H_i(\sigma^*). \tag{7.5}$$

Теперь необходимо выяснить, когда существуют решения бескоалиционных игр и как их находить. На первый вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 7.2. *В каждой бескоалиционной игре существует хотя бы одна точка равновесия в смешанных или чистых стратегиях.*

Доказательство. Очевидно, множество всех ситуаций σ образует замкнутое выпуклое и ограниченное множество, которое обозначим через Z. Пусть функция

$$\varphi_{ij}(\sigma) = \max\{0, \ H_i(\sigma \parallel s_{ij}) - H_i(\sigma)\}, \tag{7.6}$$

где σ — произвольная ситуация, s_{ij} — чистая j-я стратегия i-го игрока. Очевидно, $\varphi_{ij}(\sigma) \geqslant 0$ и показывает только увеличение выигрыша i-го игрока за счет замены его стратегии $\sigma_i \in \sigma$ на некоторую чистую стратегию s_{ij}.

Введем числа γ_{ij} по формуле

$$\gamma_{ij} = \frac{\sigma_i(s_{ij}) + \varphi_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_j \varphi_{ij}(\sigma)}. \tag{7.7}$$

Очевидно, $\gamma_{ij} \geqslant 0$ и

$$\sum_j \gamma_{ij} = 1,$$

поэтому γ_{ij} можно понимать как вероятности соответствующих чистых стратегий s_{ij} игрока i при фиксированных σ и i, набор γ_{ij} для каждого i можно понимать как смешанную стратегию i-го игрока, или как некоторую ситуацию в игре Г. Эта ситуация является функцией $f(\sigma)$ от исходной ситуации σ. Функция $f(\sigma)$ преобрязует множество Z в себя. Кроме того, $f(\sigma)$ непрерывная по σ, так как каждая компонента ситуации, являющейся значением f, есть дробь вида (7.7) — непрерывная функция. Поэтому на основании теоремы Брауэра о неподвижной точке, согласно которой непрерывное преобразование f выпуклого подмножества конечномерного пространства в себя должно иметь хотя бы одну неподвижную точку σ^0, такую, что $f(\sigma^0) = \sigma^0$.
Это значит, что

$$\sigma_i^0(s_{ij}) = \frac{\sigma_i^0(s_{ij}) + \varphi_{ij}(\sigma^0)}{1 + \sum_j \varphi_{ij}(\sigma^0)}. \tag{7.8}$$

Для любого игрока i существует такая его чистая стратегия

$$s_{i0}, \text{ что } \sigma_i^0(s_{i0}) > 0 \text{ и } \varphi_{i0}(\sigma^0) = 0.$$

Для этой стратегии равенство (7.8) будет иметь вид:

$$\sigma_i^0(s_{i0}) = \frac{\sigma_i^0(s_{i0})}{1 + \sum_j \varphi_{ij}(\sigma^0)}.$$

Откуда получаем

$$\sigma_i^0(s_{i0}) \sum_j \varphi_i(\sigma^0) = 0.$$

Поскольку $\sigma_i^0(s_{i0}) > 0$, то из последнего равенства следует, что

$$\sum_j \varphi_{ij}(\sigma^0) = 0.$$

Поскольку $\varphi_{ij}(\sigma^0) \geqslant 0$, то $\varphi_{ij}(\sigma^0) = 0$ при всех j. Следовательно, в равенстве (7.6) под знаком максимума нет положительных чисел, т. е.

$$H_i(\sigma^0 \| s_{ij}) \leqslant H_i(\sigma^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.9}$$

Последнее неравенство справедливо для всех i и любой чистой стратегии s_{ij}.

Умножим левую и правую часть неравенства (7.9) на произвольную смешанную стратегию $\sigma_i(s_i)$ и просуммируем по всем s_i, тогда

$$\sum_{s_i \in S_i} H_i(\sigma^0 \parallel s_i)\, \sigma_i(s_i) \leqslant \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, H_i(\sigma^0). \qquad (7.10)$$

Поскольку $H_i(\sigma^0)$ не зависит от s_i, то в (7.10) справа его можно вынести за знак суммы

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, H_i(\sigma^0) = H_i(\sigma^0) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i).$$

Поскольку $\sigma_i(s_i)$ — полный набор вероятностей, то

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1,$$

тогда в (7.10) величина справа равна $H_i(\sigma^0)$. Выражение слева согласно (7.4) и (7.2) равно $H_i(\sigma^0 \parallel \sigma_i)$. Таким образом, из (7.10.) получаем

$$H_i(\sigma^0 \parallel \sigma_i) \leqslant H_i(\sigma^0),$$

т. е. σ^0 есть ситуация равновесия в смешанных стратегиях для Г, что и требовалось доказать.

Отметим теперь некоторые свойства ситуаций равновесия в виде теорем.

Теорема 7.3. *Для того чтобы ситуация σ^0 в игре была ситуацией равновесия этой игры (в смешанных стратегиях), необходимо и достаточно, чтобы для любого i и любой чистой стратегии s_i выполнялось неравенство*

$$H_i(\sigma^0 \parallel s_i) \leqslant H_i(\sigma^0).$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Эта теорема показывает, что если в ситуации равновесия σ^0 заменить смешанную стратегию на чистую, то средний выигрыш игрока не увеличится. И наоборот, если для некоторой ситуации σ^0 средний выигрыш каждого игрока будет не меньше, чем средний выигрыш для ситуации σ^0, у которой сделана замена смешанной стратегии каждого игрока, входящей в σ^0, на его любую чистую стратегию, то σ^0 является ситуацией равновесия.

Теорема 7.4. *Если стратегия σ_i игрока i входит в ситуацию равновесия σ и для его чистой стратегии s_{i0} имеет место строгое неравенство*

$$H_i(\sigma \parallel s_{i0}) < H_i(\sigma),$$

то $\sigma_i(s_{i0}) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma_i(s_{i0}) > 0$. Тогда

$$H_i(\sigma \parallel s_{i0})\, \sigma_i(s_{i0}) < H_i(\sigma)\, \sigma_i(s_{i0}). \qquad (7.11)$$

Для всех чистых стратегий s_i игрока i, отличных от s_{i0}, по определению ситуации равновесия должно быть

$$H_i(\sigma \parallel s_i) \leqslant H_i(\sigma),$$

и тем самым

$$H_i(\sigma \parallel s_i)\, \sigma_i(s_i) \leqslant H_i(\sigma)\, \sigma_i(s_i).$$

Суммируя по $s_i \neq s_{i0}$ в левой и правой части последнего неравенства и прибавляя (7.11), получим

$$\sum_{s_i} H_i(\sigma \parallel s_i)\, \sigma_i(s_i) < \sum_{s_i} H_i(\sigma)\, \sigma_i(s_i),$$

откуда, замечая, что $H_i(\sigma)$ не зависит от s_i и

$$\sum_{s_i} \sigma_i(s_i) = 1,$$

получим явное противоречие в виде неравенства

$$H_i(\sigma) < H_i(\sigma),$$

что доказывает теорему.

Из теоремы 7.4 следует также, что для всякой существенной стратегии s_{i0} игрока i, т. е. такой, что для нее $\sigma(s_{i0}) > 0$ в ситуации равновесия σ

$$H_i(\sigma \parallel s_{i0}) = H_i(\sigma).$$

Эти свойства ситуаций равновесия аналогичны свойствам оптимальных стратегий матричных игр двух игроков с нулевой суммой. Однако не все свойства матричных игр игроков с нулевой суммой имеют аналогии в бескоалиционных играх, и это обстоятельство сильно затрудняет нахождение ситуаций равновесия. В настоящее время еще не разработаны общие способы нахождения решения бескоалиционных игр n игроков. Однако можно выделить отдельные классы бескоалиционных игр, для которых имеются приемлемые методы решения.

Значительные упрощения при решении конечных бескоалиционных игр происходят в случаях, когда в игре имеется только две стратегии у каждого игрока или имеются только два игрока (биматричные игры).

Пусть в бескоалиционной игре n игроков каждый из них имеет две стратегии $s_i = \{1, 2\}$, тогда смешанная стратегия i-го игрока описывается вероятностью x_i применения его первой стратегии (вероятность применения его второй стратегии равна $1 - x_i$), т. е. множество Z_i смешанных стратегий i-го игрока есть сегмент $[0, 1]$, а множество всех ситуаций в смешанных стратегиях — это n-мерный единичный куб. Ситуации в чистых стратегиях будут соответствовать вершинам этого куба, и каждая вершина куба соответствует последовательности n чисел единиц или двоек.

Рассмотрим множество всех ситуаций, приемлемых для каждого игрока. Пусть K^i — произвольное множество игроков, не содержащее i-го игрока, (α_i, K^i) — ситуация, в которой i-й игрок выбирает свою чистую стратегию, игроки из K^i выбирают свою первую стратегию, а все остальные — вторую; σ — произвольная ситуация в смешанных стратегиях; x_j — вероятность применения j-м игроком $(j \neq i)$ своей первой стратегии, тогда

$$\sigma(K^i) = \prod_{j \in K^i} x_j \prod_{j \bar{\in} K^i,\ j \neq i} (1 - x_j),$$

$$H_i(\sigma) = x_i \sum_{K^i} H_i(1, K^i)\, \sigma(K^i) + (1 - x_i) \sum_{K^i} H_i(2, K^i)\, \sigma(K^i);$$

ситуация σ для i-го игрока приемлема, если

$$H_i(\sigma \parallel \alpha_i) \leqslant H_i(\sigma) \qquad \alpha_i = 1,\ 2$$

или

$$\sum_{K^i} H_i(\alpha_i,\ K^i)\,\sigma(K^i) \leqslant x_i \sum_{K^i} H_i(1,\ K^i)\,\sigma(K^i) + (1 - x_i) \sum_{K^i} H_i(2, K^i)\,\sigma(K^i).$$

Полагая в последнем неравенстве $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ и произведя некоторые упрощения, получим

$$(1 - x_i) \sum_{K^i} H_i(1,\ K^i)\,\sigma(K^i) \leqslant (1 - x_i) \sum_{K^i} H_i(2,\ K^i)\,\sigma(K^i),$$

$$x_i \sum_{K^i} H_i(1,\ K^i)\,\sigma(K^i) \leqslant x_i \sum_{K^i} H_i(2,\ K^i)\,\sigma(K^i).$$

При $x_i = 0$ второе неравенство выполняется всегда, а первое имеет вид

$$\sum_{K^i} H_i(1,\ K^i)\,\sigma(K^i) \leqslant \sum_{K^i} H_i(2,\ K^i)\,\sigma(K^i).$$

При $x_i = 1$ первое неравенство выполняется всегда, а второе имеет тот же вид.

Пусть A^i — множество комбинаций стратегий всех игроков, кроме i-го, для ситуации вида $(1, \sigma^i)$, где $\sigma^i \in A^i$ — последнее неравенство превращается в строгое неравенство; B^i — множество таких комбинаций стратегий этих же игроков, при которых последнее неравенство превращается в равенство; C^i — множество таких комбинаций стратегий этих же игроков, при которых последнее неравенство не выполняется. Тогда для i-го игрока будут приемлемы ситуации вида:

$$(1,\ \sigma^i) \text{ где } \sigma^i \in A^i, \quad (2,\ \sigma^i), \text{ где } \sigma^i \in C^i,$$

$$(x_i,\ \sigma^i) \text{ при любых } x_i \in [0,\ 1] \text{ и } \sigma^i \in B^i.$$

Пример 7.1. Охрана окружающей среды. Имеется 3 предприятия, которые используют реку для своих технических надобностей. Каждое предприятие имеет две возможности: построить очистные сооружения (1-я стратегия), сбрасывать в реку отработанную воду без очистки (2-я стратегия). Если неочищенную воду сбрасывают в реку не более одного предприятия, то вода в реке остается пригодной для использования, и предприятия убытки не несут. Если неочищенную воду сбрасывают в реку не менее двух предприятий, то пользоваться речной водой становится невозможно, и каждое предприятне несет убытки в размере 3 единиц независимо от того, строили они очистные сооружения или нет. Стоимость очистных сооружений оценивается в 1 единицу.

Куб ситуаций изображен на рис. 7.1. Каждая его вершина соответствует набору чистых стратегий игроков (по 1-й оси — стратегии первого игрока, по 2-й — второго, по 3-й — третьего, внизу обозначен набор выигрышей последовательно первого, второго, третьего игроков в зависимости от выбранных стратегий, вверху в скобках приведены значения стратегий соответственно первого, второго и третьего игроков). Например, первая вершина характеризуется набором первых стратегий (1, 1, 1) игроков и соответственно убытками — 1, —1, —1 (см. рис. 7.1).

Неравенство, которому должны удовлетворять приемлемые смешанные стратегии x_1, x_2, x_3 соответственно первого, второго, третьего

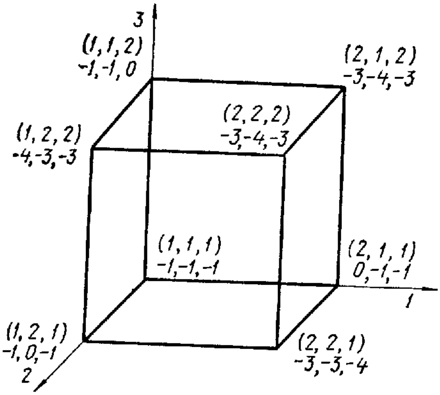

Рис. 7.1

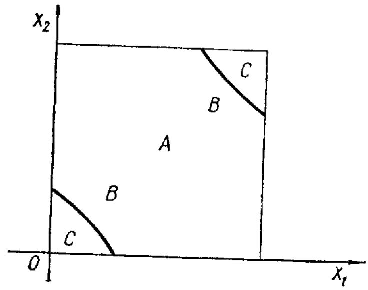

Рис 7.2.

игроков, например, для третьего игрока ($i = 3$), имеет вид:

$$-x_1x_2 - x_1(1-x_2) - (1-x_1)x_2 - 4(1-x_1)(1-x_2) \leqslant$$
$$\leqslant 3x_1(1-x_2) - 3(1-x_1)x_2 - 3(1-x_1)(1-x_2).$$

После упрощений оно принимает вид:

$$(1-3x_1)(1-3x_2) \geqslant 3x_1x_2.$$

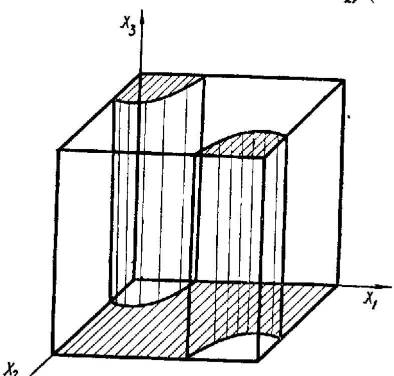

Рис. 7.3

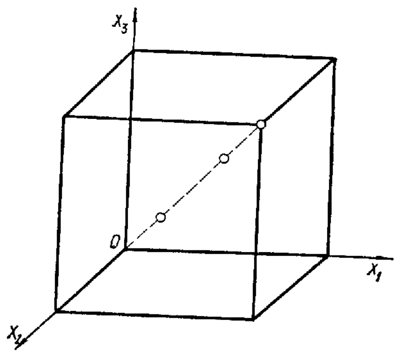

Рис. 7.4

Множества A^3, B^3, C^3 изображены на рис. 7.2 без индексов. Множество B состоит из двух дуг гиперболы

$$(1-3x_1)(1-3x_2) = 3x_1x_2,$$

а множество всех приемлемых ситуаций для третьего игрока изображено на рис. 7.3.

Аналогично составляются множества ситуаций, приемлемых для первого и второго игроков. Пересечение множеств всех приемлемых ситуаций всех игроков дает множество ситуаций равновесия в данной игре (см. рис. 7.4). На этом рисунке изображены три ситуации равновесия:

$$(0,\ 0,\ 0);\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}},\ \frac{1}{3+\sqrt{3}},\ \frac{1}{3+\sqrt{3}}\right);$$
$$\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}},\ \frac{1}{3-\sqrt{3}},\ \frac{1}{3-\sqrt{3}}\right).$$

При первой приемлемой ситуации каждое предприятие выигрывает $H = -3$, т. е. несет убытки в 3 единицы. При второй приемлемой ситуации каждое предприятие выигрывает $H = -2{,}8$, т. е. несет убыток 2,8 единиц. При третьей приемлемой ситуации каждое предприятие выигрывает $H = -1{,}1$, т. е. несет убыток 1,1 единиц.

7.2. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В конечной бескоалиционной игре двух игроков каждый из них делает один ход — выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого он получает свой выигрыш согласно определенным для каждого из них матрицам выигрышей. Другими словами, конечная бескоалиционная игра двух игроков полностью определяется двумя матрицами выигрышей для двух игроков. Поэтому такие игры называются биматричными. Пусть у первого игрока имеется m стратегий, $i = 1, 2, \ldots, m$, у второго игрока имеется n стратегий, $j = 1, 2, \ldots, n$. Выигрыши первого и второго игроков соответственно задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{mj} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Будем считать по-прежнему полный набор вероятностей $x = (x_1, \ldots, x_m)$ применения первым игроком своих чистых стратегий смешанной стратегией первого игрока, и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — смешанной стратегией второго игрока. Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} H_1(A,\ x,\ y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \\ H_2(B,\ x,\ y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j \end{aligned}\right\}. \tag{7.12}$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару $(x,\ y)$ таких смешанных стратегий первого и второго игроков, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{7.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.14}$$

Для определения ситуаций равновесия необходимо решить систему неравенств (7.13) и (7.14) относительно неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad y_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Поскольку получение такого решения, т. е. определение всех ситуаций равновесия для произвольных биматричных игр, является сложным и громоздким, мы рассмотрим более простой случай нахождения ситуаций равновесия для биматричных игр, когда каждый игрок имеет две чистые стратегии. В этом случае матрицы A и B равны:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии для первого и второго игроков имеют вид: $(x, 1 - x)$, $(y, 1 - y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, а средние выигрыши

$$H_1(A, x, y) = a_{11}xy + a_{12}x(1 - y) + a_{21}(1 - x)y + a_{22}(1 - x)(1 - y) =$$
$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22},$$
$$H_2(B, x, y) = b_{11}xy + b_{12}x(1 - y) + b_{21}(1 - x)y + b_{22}(1 - x)(1 - y) =$$
$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}.$$

Условия (7.13) и (7.14) для ситуаций равновесия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y + a_{12}(1 - y) &\leqslant H_1(A, x, y) \\ a_{21}y + a_{22}(1 - y) &\leqslant H_1(A, x, y) \end{aligned}\right\}, \tag{7.15}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{11}x + b_{21}(1 - x) &\leqslant H_2(B, x, y) \\ b_{12}x + b_{22}(1 - x) &\leqslant H_2(B, x, y) \end{aligned}\right\}. \tag{7.16}$$

Проведя простые алгебраические преобразования в (7.15), получим

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1 - x)y + (a_{12} - a_{22})(1 - x) \leqslant 0,$$
$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x \geqslant 0.$$

С целью упрощения записи в последних неравенствах положим

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad a_2 = a_{22} - a_{12},$$

тогда получим (7.15) в следующем виде:

$$a_1(1 - x)y - a_2(1 - x) \leqslant 0, \tag{7.17}$$

$$a_1xy - a_2x \geqslant 0. \tag{7.18}$$

Итак, множество всех приемлемых стратегий для первого игрока удовлетворяет условиям (7.17), (7.18), $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Чтобы найти x, рассмотрим 3 случая:

Если $x = 0$, то (7.18) верно при любом y, а (7.17) имеет вид:

$$a_1 y - a_2 \leqslant 0. \tag{7.19}$$

Если $x = 1$, то (7.17) верно при любом y, а (7.18) имеет вид:

$$a_1 y - a_2 \geqslant 0. \tag{7.20}$$

Если $0 < x < 1$, то (7.17) разделим на $(1 - x)$, а (7.18) — на x и получим

$$a_1 y - a_2 \leqslant 0, \quad a_1 y - a_2 \geqslant 0,$$

или

$$a_1 y - a_2 = 0. \tag{7.21}$$

Итак, множество K решений систем (7.17), (7.18) состоит из:

1) всех ситуаций вида $(0, y)$, где $a_1 y - a_2 \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$;

2) всех ситуаций вида (x, y), где $a_1 y - a_2 = 0$, $0 < x < 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$;

3) всех ситуаций вида $(1, y)$ $a_1 y - a_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то решением является $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, так как все неравенства (7.19) — (7.21) выполняются при таких x и y.

Если $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, то выполняется либо (7.19), либо (7.20), и поэтому решением является либо $x = 0$, либо $x = 1$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Если $a_1 > 0$, то из (7.19) получается решение

$$x = 0, \quad y \leqslant \frac{a_2}{a_1} = \alpha,$$

из (7.20) следует еще решение $x = 1$, $y \geqslant \alpha$, из (7.21) следует еще решение $0 < x < 1$, $y = \alpha$.

Если $a_1 < 0$, то решение следующее:

$$x = 0,\ y \geqslant \alpha; \quad x = 1,\ y \leqslant \alpha; \quad 0 < x < 1,\ y = \alpha.$$

При этом надо помнить, что дополнительно должно быть

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Для второго игрока исследования аналогичны. Если ввести обозначения

$$b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = b_1, \quad b_{22} - b_{21} = b_2,$$

то множество L приемлемых для него ситуаций состоит из:

1) всех ситуаций вида $(x, 0)$, где $b_1 x - b_2 < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

2) всех ситуаций вида (x, y), где $b_1 x - b_2 = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 < y < 1$,

3) всех ситуаций вида $(x, 1)$, где $b_1 x - b_2 > 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Результаты следующие:

если $b_1 = b_2 = 0$, то решение $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$;

если $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, то решение либо $y = 0$, либо $y = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

если $b_1 > 0$, то решения следующие:

$$y=0, \quad x < \frac{b_2}{b_1} = \beta; \quad y=1, \quad x > \beta; \quad 0 < y < 1, \quad x = \beta;$$

если $b_1 < 0$, то решения следующие:

$$y=0, \quad x > \beta; \quad y=1, \quad x < \beta; \quad 0 < y < 1, \quad x = \beta.$$

При этом надо помнить, что $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решением игры является пересечение множеств K и L, т. е. те значения x и y, которые являются общими для множеств K и L. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (7.12), если в них подставить полученное решение x и y. Очевидно α входит в смешанную стратегию второго игрока, хотя зависит только от выигрышей первого игрока; β входит в смешанную стратегию первого игрока, хотя зависит только от выгрышей второго игрока. Сравнение этих результатов с результатами решения матричных игр с нулевой суммой показывает, что α совпадает с оптимальной стратегией первого игрока в матричной игре с матрицей A, а β — с оптимальной стратегией второго игрока в матричной игре с матрицей B. Отсюда можно сделать вывод, что равновесная ситуация направляет поведение игроков не столько на максимизацию своего выигрыша, сколько на минимизацию выигрыша противника.

С другой стороны, естественно также рассматривать подходящим поведение игроков в конечных бескоалиционных играх, направленное на максимизацию своего выигрыша с учетом максимального противодействия игрока, т. е. подходящей стратегией первого игрока считать оптимальную смешанную стратегию первого игрока в матричной игре с матрицей A, а подходящей стратегией второго игрока считать оптимальную смешанную стратегию второго игрока в матричной игре с матрицей B, если в ней рассматривать решение с позиций максимизации выигрыша второго игрока, т. е. решать ее, как для первого игрока, с матрицей B^T.

Пример 7.2. Министерство желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство — первый игрок — имеет две стратегии: строить 1-й объект, строить 2-й объект. Город — второй игрок — имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно следующим матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Некоторые пояснения к элементам выигрышей матриц A и B могут быть, например, такие: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство решает строить первый объект, а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн. руб., а министерство теряет 10 млн. руб; аналогично объясняются остальные выигрыши.

Для этой игры имеем:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14 < 0,$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3,$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-14} = \frac{3}{14}.$$

Поскольку $a_1 < 0$, то множество решений K имеет следующий вид:

$(0, y)$, где $\frac{3}{14} \leqslant y \leqslant 1$;

$\left(x, \frac{3}{14}\right)$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$(1, y)$, где $0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{14}$.

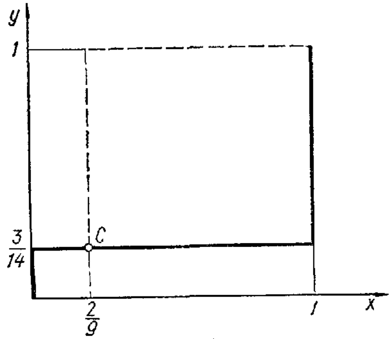

Рис. 7.5

Множество K ситуаций, применяемых для первого игрока, изображено на рис. 7.5 жирной линией.

Для второго игрока имеем:

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9 > 0,$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2,$$

$$\beta = \frac{2}{9}.$$

Поскольку $b_1 > 0$, то множество решений L имеет следующий вид:

$(x, 0)$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{9}$;

$\left(\frac{2}{9}, y\right)$, где $0 \leqslant y \leqslant 1$;

$(x, 1)$, где $\frac{2}{9} \leqslant x \leqslant 1$.

Множество L ситуаций, приемлемых для второго игрока изображено на рис. 7.5 пунктирной линией.

Точка пересечения множеств L и K есть точка C с координатами $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{3}{14}$ и является соответственно приемлемыми стратегиями министерства и города.

При этом их выигрыш соответственно равен

$$H_1(A, x, y) = -10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} + 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} - $$

$$- 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = -\frac{72}{126} = -\frac{4}{7},$$

$$H_2(A, x, y) = 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} - \cdots - 1 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{14} = \frac{1}{3}.$$

Интересно отметить, что, если решить эту игру как матричные игры двух игроков с нулевой суммой, то для игры с матрицей A оптимальные смешанные стратегии для первого игрока и цена игры получаются из решения уравнений

$$-10x^1 + (1 - x^1) = v_1, \quad x^1 - (1 - x^1) = v_1,$$

откуда вероятность применения первым игроком первой стратегии равна $x^1 = \frac{2}{14}$, цена игры — $v_1 = -\frac{4}{7}$, что совпадает с H_1, вероятность применения вторым игроком первой стратегии $y^1 = \frac{3}{14}$; для игры с матрицей B оптимальные смешанные стратегии и цена игры для второго игрока получаются из уравнений

$$5y^2 - 2(1 - y^2) = v_2, \quad -y^2 + (1 - y^2) = v_2.$$

Следовательно, вероятность применения вторым игроком своей стратегии $y^2 = \frac{1}{3}$, а первым игроком $x^2 = \frac{2}{9}$, цена игры — $v_2 = \frac{1}{3}$, что совпадает с H_2.

Таким образом, если каждый из игроков будет применять свои стратегии в этой игре, исходя только из матриц своих выигрышей, то их оптимальные средние выигрыши совпадают с их выигрышами при ситуации равновесия.

7.3. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда в игре n игроков разрешается образовывать определенные коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а через K — любое его подмножество. Пусть игроки из K договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r, т. е.

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!},$$

а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растет в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом n. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Функция v, ставящая в соответствие каждой коалиции K наибольший, уверенно получаемый ею выигрыш $v(K)$, называется характеристической функцией игры. Так, например, для бескоалиционной игры

n игроков $v(K)$ может получиться, когда игроки из множества K оптимально действуют как один игрок против остальных $N \setminus K$ игроков, образующих другую коалицию (второй игрок). Обозначим через v_Γ характеристическую функцию бескоалиционной игры. Эта функция обладает следующими свойствами:

1) персональность

$$v_\Gamma(\varnothing) = 0,$$

т. е. коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает;

2) супераддитивность

$$v_\Gamma(K \cup L) \geqslant v_\Gamma(K) + v_\Gamma(L), \text{ если } K,\ L \subset N,\ K \cap L \neq \varnothing,$$

т. е. общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции;

3) дополнительность

$$v_\Gamma(K) + v(N \setminus K) = v(N), \tag{7.22}$$

т. е. для бескоалиционной игры с постоянной суммой сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков.

Доказательство этих свойств можно найти в [5].

Распределение выигрышей (дележ) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через x_i выигрыш i-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие индивидуальной рациональности

$$x_i \geqslant v(i), \text{ для } i \in N, \tag{7.23}$$

т. е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие коллективной рациональности

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \tag{7.24}$$

т. е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $v(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей игроков была больше, чем $v(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Таким образом, вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется дележом в условиях характеристической функции v.

Система $\{N, v\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (7.23), (7.24) в условиях характеристической функции, называется *классической кооперативной игрой.*

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема: *чтобы вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ был дележом в классической кооперативной игре $\{N, v\}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_i = v(i) + \alpha_i \quad (i \in N),$$

причем

$$\alpha_i \geqslant 0 \quad (i \in N), \quad \sum_{i \in N} \alpha_i = v(N) - \sum_{i \in N} v(i). \tag{7.25}$$

Теория кооперативных игр имеет много сходного с теорией бескоалиционных игр, однако есть и различия.

В бескоалиционных играх исход формируется в результате действий тех самых игроков, которые в этой ситуации получают свои выигрыши. Исходом в кооперативной игре является дележ, возникающий не как следствие действий игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и сравнение это носит более сложный характер. Поэтому и принципы оптимальности в кооперативных играх весьма разнообразные и сложные.

Так как признак супераддитивности играет важную роль в теории кооперативных игр, то отметим их некоторые особенности.

Кооперативные игры считаются существенными, если для любых коалиций K и L выполняется неравенство

$$v(K) + v(L) < v(K \cup L),$$

т. е. в условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же в условии супераддитивности выполняется равенство

$$v(K) + v(L) = v(K \cup L),$$

т. е. выполняется свойство аддитивности, то такие игры называются несущественными.

Справедливы следующие свойства:

1) для того чтобы характеристическая функция была аддитивной (кооперативная игра — несущественная), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N);$$

2) в несущественной игре имеется только один дележ

$$\{v(1),\ v(2),\ \ldots,\ v(n)\};$$

3) в существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно

$$(v(1) + \alpha_1,\ v(2) + \alpha_2,\ \ldots,\ v(n) + \alpha_n),$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0 \quad (i \in N), \quad v(N) - \sum_{i \in N} v(i) > 0.$$

Доказательство этих свойств можно найти в [5].

С целью систематизации исследований кооперативных игр вводится понятие стратегически эквивалентных игр. Кооперативная игра с множеством игроков N и характеристикой функций v называется *стратегически эквивалентной* игрой с тем же множеством игроков и характеристикой функций v^1, если найдутся такие $k > 0$ и произвольные вещественные c_i $(i \in N)$, что для любой коалиции $K \subset N$ имеет место равенство

$$v^1(K) = kv(K) + \sum_{i \in K} c_i. \qquad (7.26)$$

Содержательная интерпретация стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что характеристические функции стратегически эквивалентных кооперативных игр отличаются лишь масштабом измерения выигрышей k и начальными капиталами c_i. Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями v и v^1 обозначается так $v \sim v^1$. Часто вместо стратегической эквивалентности кооперативных игр говорят о стратегической эквивалентности их характеристических функций.

Справедливы следующие свойства для стратегически эквивалентных игр:

1. *Рефлексивность*, т. е. каждая характеристическая функция эквивалентна себе $v \sim v$.

Действительно, положив $k = 1$, $c_i = 0$ $(i \in N)$ в (7. 26), получим требуемое.

2. *Симметрия*, т. е. если $v \sim v^1$, то $v^1 \sim v$. Действительно, решив уравнение (7.26) относительно $v(K)$, получим

$$v(K) = \frac{1}{k} v^1(K) - \sum_{i \in K} \frac{c_i}{k}, \quad (k > 0)$$

или, полагая $\frac{1}{k} = k^1$; $-\frac{c_i}{k} = c_i^1$, получим

$$v(K) = k^1 v^1(K) + \sum_{i \in K} c_i^1,$$

где $k > 0$.

3. *Транзитивность*, т. е. если $v \sim v^1$ и $v^1 \sim v^2$, то $v \sim v^2$. Действительно, поскольку $v \sim v^1$, то справедливо (7.26), а поскольку справедливо $v^1 \sim v^2$, то справедливо следующее:

$$v^1 = k^1 v^2(K) + \sum_{i \in K} c_i^1 \quad (k^1 > 0).$$

Подставляя это значение в (7.26), получим

$$v(K) = kk^1 v^2(K) + \sum_{i \in K} (c_i + kc_i^1)$$

или, полагая $kk^1 = k^2$, $c_i + kc_i^1 = c_i^2$, получим

$$v(K) = k^2 v^2(K) + \sum_{i \in K} c_i^2, \text{ где } k^2 > 0.$$

Из свойств рефлексивности, симметрии и транзитивности вытекает, что множество всех характеристических функций единственным образом распадается на попарно непересекающиеся классы, которые называются классами стратегической эквивалентности.

Отношение стратегической эквивалентности игр и их характеристических функций переносится на отдельные дележи:

пусть $v \sim v^1$, т. е. выполняется (7.26), и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — дележи в условиях характеристической функции v; рассмотрим вектор $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, где $x_i^1 = kx_i + c_i$; для него

$$x_i^1 = kx_i + c_i \geqslant kv(i) + c_i = v^1(i),$$

т. е. выполняется условие индивидуальной рациональности, и

$$\sum_{i \in N} x_i^1 = \sum_{i \in N} (kx_i + c_i) = k \sum_{i \in N} x_i + \sum_{i \in N} c_i = kv(N) + \sum_{i \in N} c_i = v^1(N),$$

т. е. выполняется условие коллективной рациональности. Поэтому вектор x^1 является дележом в условиях v^1. Говорят, что дележ x^1 соответствует дележу x при стратегической эквивалентности $v \sim v^1$. В дальнейшем полезно рассмотреть определенные игры, характерные для каждого класса несущественных кооперативных игр. Кооперативная игра называется нулевой, если все значения ее характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности.

Оказывается, что всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой. Действительно, для несущественной игры справедливо

$$v(N) = \sum_{i \in N} v(i),$$

поэтому стратегически эквивалентная ей характеристическая функция v^1 имеет вид:

$$v^1(K) = kv(K) + \sum_{i \in K} c_i = v(K) - \sum_{i \in K} v(i) = 0.$$

Отсюда следует, что все несущественные игры с данным множеством игроков N стратегически эквивалентны между собой, т. е. составляют один класс стратегической эквивалентности.

Определение. Кооперативная игра с характеристической функцией v имеет $0 - 1$ редуцированную форму, если выполняются следующие соотношения:

$$v(i) = 0 \quad (i \in N), \quad v(N) = 1.$$

Оказывается полезной следующая теорема.

Теорема 7.5. *Каждая существенная кооперативная игра стратегически эквивалентна одной и только одной игре в $0 - 1$ редуцированной форме.*

Доказательство. Пусть v — характеристическая функция произвольной существенной игры n игроков. Для нее подберем такую стратегически эквивалентную характеристическую функцию, что

$$v^1(i) = kv(i) + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.27}$$

$$v^1(N) = kv(N) + \sum_{i \in N} c_i = 1. \tag{7.28}$$

Суммируя по i левую и правую части (7.27), получим

$$k \sum_{i \in N} v(i) + \sum_{i \in N} c_i = 0,$$

откуда

$$\sum_{i \in N} c_i = -k \sum_{i \in N} v(i). \qquad (7.29)$$

Подставляя (7.29) в (7.28), получим

$$kv(N) - k \sum_{i \in N} v(i) = 1. \qquad (7.30)$$

Поскольку игра существенная, то

$$v(N) - \sum_{i \in N} v(i) > 0,$$

и из (7.30) получаем

$$k = \frac{1}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)} > 0. \qquad (7.31)$$

Из (7.27) получаем

$$c_i = -kv(i) = -\frac{v(i)}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)} \quad (i \in N). \qquad (7.32)$$

Значения k и c_i, выраженные по формулам (7.31) и (7.32) и полученные как решения системы уравнений (7.27) и (7.28), являются единственным ее решением, поэтому получена игра в 0—1 редуцированной форме, что и требовалось доказать.

В игре в 0—1 редуцированной форме дележом является любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которого

$$x_i \geqslant 0 \quad (i \in N), \quad \sum_{i \in N} x_i = 1.$$

В теории игр рассматриваются игры в $a - b$ редуцированной форме, подобно 0—1 редуцированной форме, понимая под ними игры с такими характеристическими функциями v^1:

$$v^1(i) = a \quad (i \in N), \; v^1(N) = b, \quad (na \neq b).$$

Можно показать, что всякая существенная кооперативная игра имеет ровно одну $a - b$ редуцированную форму при любых a и b, если $na \neq b$.

Рассмотрим несколько подробнее возможные классы игр, имея в виду отношение стратегической эквивалентности. Как было сказано ранее, для каждого множества игроков N существует единственный класс стратегически эквивалентных несущественных игр с множеством игроков N. Таким образом, остается рассмотреть классы существенных кооперативных игр. Остановимся на описании классов игр в 0—1 редуцированной форме.

Рассмотрим сначала кооперативные игры с нулевой суммой.

1. *Игры 2-х игроков.* Оказывается, что всякая кооперативная игра двух игроков с нулевой суммой является несущественной.

Действительно. Предположим, что имеется существенная кооперативная игра двух игроков с характеристической функцией v. Тогда она должна быть стратегически эквивалентна некоторой игре в 0—1 редуцированной форме с характеристической функцией v^1, что означает следующее:

$$v^1(1) = 0, \ v^1(2) = 0, \ v^1(1, \ 2) = 1. \qquad (7.33)$$

По свойству дополнительности должно

$$v^1(2) = v^1(1, \ 2) - v^1(1) = 1 - 0 = 1,$$

что противоречит (7.33). А это значит, что наше предположение о существенности кооперативной игры двух игроков с нулевой суммой не верно.

Итак, класс кооперативных игр двух игроков с нулевой суммой ограничивается несущественными играми.

2. *Игры 3-х игроков.* Пусть v — характеристическая функция существенной игры в 0—1 редуцированной форме, тогда

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1, 2, 3) = 1.$$

По свойству дополнительности имеем:

$$v(1, 2) = v(1, 2, 3) - v(3) = 1 - 0 = 1,$$
$$v(1, 3) = v(1, 2, 3) - v(2) = 1 - 0 = 1,$$
$$v(2, 3) = v(1, 2, 3) - v(1) = 1 - 0 = 1.$$

И таким образом характеристическая функция полностью определена. Итак, имеется два класса кооперативных игр 3-х игроков с нулевой суммой: класс существенных и класс несущественных игр.

3. *Игры 4-х игроков.* Рассмотрим все классы стратегической эквивалентности таких игр.

Прежде всего имеется класс несущественных игр. Для получения классов существенных игр в 0—1 редуцированной форме определим характеристическую функцию v такой игры

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0, \quad v(1, 2, 3, 4) = 1.$$

Исходя из свойства дополнительности, получаем:

$$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 3, 4) - v(4) = 1 - 0 = 1;$$
$$v(1, 2, 4) = v(1, 2, 3, 4) - v(3) = 1 - 0 = 1;$$
$$v(1, 3, 4) = v(1, 2, 3, 4) - v(2) = 1 - 0 = 1;$$
$$v(2, 3, 4) = v(1, 2, 3, 4) - v(1) = 1 - 0 = 1.$$

Теперь необходимо определить значения характеристической функции на коалициях 2-х игроков. Всего таких коалиций шесть — (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4). Характеристическая функция на этих коалициях согласно свойству дополнительности удовлетворяет только следующим соотношениям:

$$v(1, 4) = 1 - v(2, 3), \quad v(1, 3) = 1 - v(2, 4), \quad v(1, 2) = 1 - v(3, 4).$$

Поскольку значений неизвестных шесть, а соотношений только три, то три значения из шести могут быть выбраны произвольно. Обозначим эти произвольные значения через x_1, x_2, x_3, т. е.

$$v(1,\ 4) = x_1, \quad v(2,\ 4) = x_2, \quad v(3,\ 4) = x_3,$$

тогда

$$v(2,\ 3) = 1 - x_1, \quad v(1,\ 3) = 1 - x_2,\ v(1,\ 2) = 1 - x_3.$$

Кроме того, должно быть $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$, так как значение характеристической функции на коалиции из двух игроков не может быть меньше, чем значение характеристической функцин для одного из этих игроков (равное нулю для одного игрока), и не может быть больше, чем значение характеристической функции для коалиции из трех игроков (равное 1 для трех игроков). Геометрически $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ можно изобразить как точку единичного куба, т. е. каждому классу стратегической эквивалентности игр четырех игроков будет соответствовать точка единичного куба.

Итак, множество классов стратегической эквивалентности существенных игр четырех игроков бесконечно и трехпараметрично, т. е. зависит от трех произвольных параметров.

4. *Игры, состоящие из более чем 4-х игроков,* имеют еще большее разнообразие классов стратегической эквивалентности существенных игр.

Так, размерность множества классов игр n игроков равна $2^{n-1} - n - 1$, т. е. имеется $2^{n-1} - n - 1$ произвольных параметров.

Рассмотрим теперь кооперативные игры без условия постоянства суммы.

1. *Для игр 2-х игроков* множество $N = \{1,\ 2\}$, условия редуцированности дают

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = 0,\ v(1,\ 2) = 1.$$

Таким образом, существенные кооперативные игры двух игроков с ненулевой суммой составляют один класс стратегической эквивалентности.

2. *Для игр 3-х игроков* множество $N = \{1,\ 2,\ 3\}$, условия редуцированности дают

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1,\ 2,\ 3) = 1.$$

Значения характеристической функции на множествах коалиций двух игроков произвольные (здесь нет условия дополнительности)

$$v(1,\ 2) = c_3, \quad v(1,\ 3) = c_2, \quad v(2,\ 3) = c_1,$$

но удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant c_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant c_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant c_3 \leqslant 1.$$

Таким образом, классы стратегической эквивалентности общих кооперативных игр трех игроков могут быть поставлены в соответствие точкам трехмерного единичного куба подобно тому, как это получалось для игр 4-х игроков с нулевой суммой.

Для игр более 3-х игроков с ненулевой суммой рассмотрения аналогичны.

Для исследования игр большое значение имеет возможность учета предпочтения дележей, который осуществляется с помощью понятия доминирования.

Определение. Пусть имеется два дележа $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ в кооперативной игре $\Gamma = \{N, v\}$, и $K \subset N$ — некоторая коалиция. Тогда дележ x доминирует y по коалиции K, если

$$1) \quad \sum_{i \in K} x_i \leqslant v(K), \tag{7.34}$$

$$2) \quad x_i > y_i \text{ для всех } i \in K.$$

Соотношение доминирования x над y по коалиции K обозначается так:

$$\underset{K}{x > y}.$$

Из этого определения следует, что, если x доминирует y по коалиции K, то дележ x предпочтительнее дележа y для коалиции K. Определяется также общее доминирование.

Определение. Дележ x доминирует y, если существует такая коалиция K, для которой дележ x доминирует y. Это доминирование обозначается так: $x \succ y$.

Наличие доминирования $x \succ y$ означает, что в множестве игроков N найдется коалиция, для которой x предпочтительнее y. Отношение доминирования не обладает полностью свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, возможна лишь частичная симметрия и транзитивность. Соотношение доминирования возможно не по всякой коалиции. Так, невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков.

Соотношения доминирования инвариантны относительно стратегической эквивалентности. Это свойство можно записать в виде теоремы: *если v и v^1 — две стратегически эквивалентные характеристические функции, причем дележам x и y соответствуют дележи x^1 и y^1, то из $x \succ y$ следует $x^1 \succ y^1$.* Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Очевидно, все явления, описываемые в терминах доминирования дележей, относятся к классам стратегической эквивалентности, поэтому достаточно изучать эти классы (а не сами игры) для существенных игр по их 0—1 редуцированной форме, а для несущественных игр — по нулевым играм.

В любой несущественной игре имеется только один дележ, поэтому никаких доминирований в ней нет.

Рассмотрим доминирование дележей в существенной игре на следующем примере.

Пример 7.3. Пусть имеется 0—1 редуцированная форма существенной игры трех игроков с постоянной суммой (равной 1). Поскольку доминирование невозможно ни по одной из одноэлементных коалиций 1, 2 3, а также по коалиции, состоящей из всех трех игроков, то доминирование возможно лишь по одной из двухэлементных коалиций $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Для наглядности доминирования дележей введем понятие бароцентрических координат. Осями координат служат три оси x_1, x_2, x_3, составляющие между собою одинаковые углы $60°$, ось x_3 находится на расстоянии единицы от точки пересечения осей x_1 и x_2 (см. рис. 7.6), координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ — соответственно расстояния от этой точки до осей x_1, x_2, x_3, взятые с такими знаками, как указано на рис. 7.6. (Например, для точки x на рис. 7.6 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$).

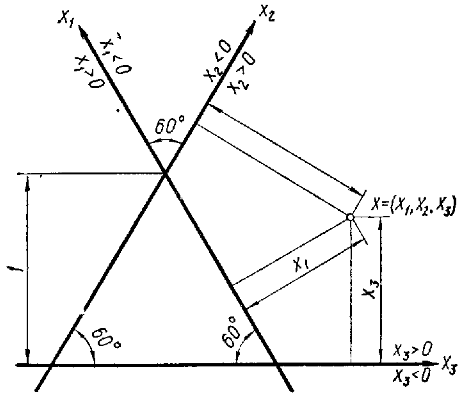

Рис. 7.6

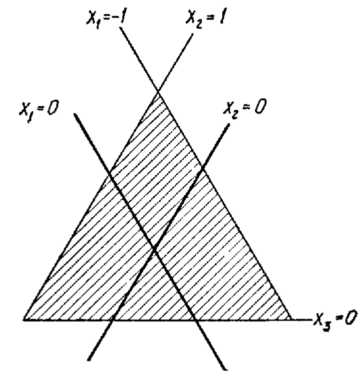

Рис. 7.7

В бароцентрической системе координат всегда выполняется равенство

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{7.35}$$

В плоскости всегда имеется точка с координатами x_1, x_2, x_3, удовлетворяющими равенству (7.35). Поэтому бароцентрическая система координат автоматически удовлетворяет одному из условий, определяющих исход игры трех игроков. С другой стороны, поскольку игра в 0—1 редуцированной форме, то точка x должна находиться в заштрихованном треугольнике (см. рис. 7.7). Дележи x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять неравенствам

$$x_1 + x_2 \leqslant v(1, 2), \quad x_1 + x_3 \leqslant v(1, 3), \quad x_2 + x_3 \leqslant v(2, 3).$$

Очевидно, из условия дополнительности, что

$$x_1 + x_2 = 1 - x_3 \leqslant 1 = v(1, 2), \quad x_1 + x_3 \leqslant 1, \quad x_2 + x_3 \leqslant 1.$$

Дележ $x = (x_1, x_2, x_3)$ доминирует дележ $y = (y_1, y_2, y_3)$

по коалиции $\{1, 2\}$, если $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$;

по коалиции $\{1, 3\}$, если $x_1 > y_1$, $x_3 > y_3$;

по коалиции $\{2, 3\}$, если $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$,

т. е. если дележ y находится в одном из заштрихованных параллелограмов (за исключением трех граничных прямых, проходящих через точку x) на рис. 7.8, то дележ x доминирует дележ y, а всякая точка, находящаяся в незаштрихованных треугольниках, является предпочтительнее исхода x.

Таким образом, если x и y — два исхода и ни один из них не предпочтительнее другого, то соответствующие точки лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей.

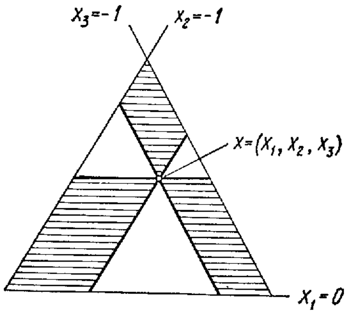

Рис. 7.8

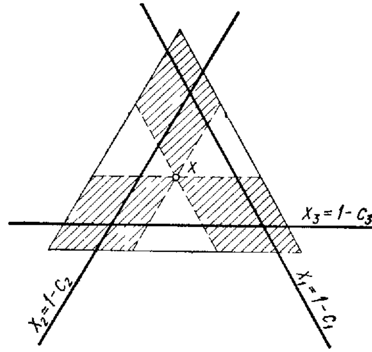

Рис. 7.9

Пример 7.4. Пусть имеется 0—1 редуцированная игра трех игроков с ненулевой суммой.

Рассмотрим сначала условия доминирования дележа $x = (x_1, x_2, x_3)$ над дележом $y = (y_1, y_2, y_3)$ по коалиции $\{1, 2\}$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \leqslant v(1,\ 2) = c_3, \\ &y_1 < x_1, \quad y_2 < x_2. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Поскольку может быть, что $c_3 < 1$, то первое из условий (7.36) нельзя отбросить, как это делается в играх с постоянной суммой. Это значит, что x должно быть не ниже прямой

$$x_1 + x_2 = c_3$$

или, учитывая (7.35), последнее уравнение принимает вид:

$$x_3 = 1 - c_3.$$

Таким образом, если дележ x таков, что

$$x_1 \geqslant 1 - c_1, \quad x_2 \geqslant 1 - c_2, \quad x_3 \geqslant 1 - c_3, \tag{7.37}$$

то имеется три параллелограма, заштрихованных на рис. 7.9, находясь в которых, точки x доминируют y.

Если в (7.37) одно из неравенств, например, третье не имеет места, то есть только 2 параллелограмма, заштрихованных на рис. 7.10, находясь в которых точки x доминируют y.

Если в (7.37) не имеют места два неравенства, например, второе и третье, то имеется лишь один параллелограм, заштрихованный на рис. 7.11, находясь в котором, точка x доминирует y.

Из рассмотренного примера видно, что возможно много вариантов, которые возникают при изучении вопросов, связанных с доминированием дележей в кооперативных играх. С ростом числа игроков чрезвычайно быстро растет количество таких вариантов. Заслуживает внимания выделение вполне устойчивых дележей, т. е. таких дележей, которые не доминируются никакими другими дележами. Множество впол-

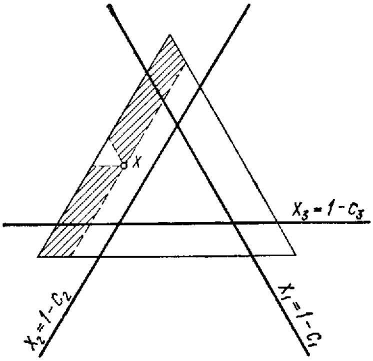

Рис. 7.10

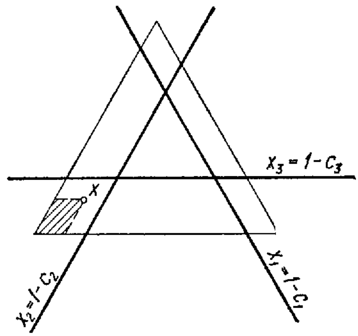

Рис. 7.11

не устойчивых дележей в кооперативной игре называется c-ядром этой игры.

Следующая теорема дает признак принадлежности дележа к c-ядру.

Теорема 7.6. *Для того чтобы дележ x принадлежал c-ядру кооперативной игры с характеристической функцией v, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции K выполнялось неравенство*

$$v(K) \leqslant \sum_{i \in K} x_i. \qquad (7.38)$$

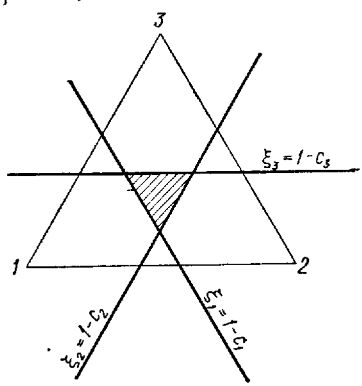

Рис. 7.12

Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Поскольку неравенства (7.38) линейны относительно x, то из теоремы 7.6 следует, что c-ядро в любой кооперативной игре является выпуклым многогранником.

Отметим некоторые особенности кооперативных игр относительно существования c-ядра.

В несущественной игре c-ядро существует и состоит из единственного дележа этой игры.

Во всякой существенной игре с постоянной суммой c-ядро пусто. Для общей игры трех игроков в 0—1 редуцированной форме имеем следующее.

Ее характеристическая функция имеет вид:

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0, \quad v(1, 2, 3) = 1,$$

$$v(1, 2) = c_3, \quad v(1, 3) = c_2, \quad v(2, 3) = c_1,$$

где $0 \leqslant c_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant c_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant c_3 \leqslant 1.$

На основании теоремы 7.6 для принадлежности дележа x c-ядру необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$x_1 + x_2 \geqslant c_3, \quad x_1 + x_3 \geqslant c_2, \quad x_2 + x_3 \geqslant c_1$$

или, используя равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим

$$x_3 \leqslant 1 - c_3, \quad x_2 \leqslant 1 - c_2, \quad x_1 \leqslant 1 - c_1. \tag{7.39}$$

Это значит, что точка x должна лежать ближе к i-й вершине основного треугольника (см. рис. 7.12), чем прямая

$$\xi_i = 1 - c_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{7.40}$$

Из неравенств (7.39) путем суммирования получим

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3 - (c_1 + c_2 + c_3)$$

или, учитывая, что $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим

$$c_1 + c_2 + c_3 \leqslant 2. \tag{7.41}$$

Неравенство (7.41) является необходимым условием существования непустого c-ядра. С другой стороны, если (7.41) выполняется, то можно взять такие неотрицательные ε_1, ε_2, ε_3, чтобы

$$\sum_{i=1}^{3} (c_i + \varepsilon_i) = 2,$$

и положить

$$x_i = 1 - c_i - \varepsilon_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Такие значения x_i и удовлетворяют неравенствам (7.39), т. е. такой дележ $x = (x_1, x_2, x_3)$ принадлежит c-ядру.

Геометрически непустое c-ядро является заштрихованным треугольником (рис. 7.12), со сторонами, выраженными уравнениями (7.40) при условии, что выполняется соотношение

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1,$$

и решения любой пары уравнений (7.40) являются неотрицательными. Так, например, рассмотрим систему

$$\xi_1 = 1 - c_1, \quad \xi_2 = 1 - c_2.$$

Поскольку $0 \leqslant c_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant 1$, то $\xi_1 \geqslant 0$ и $\xi_2 \geqslant 0$. Отсюда получаем

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = 1 - (1 - c_1) - (1 - c_2) = c_1 + c_2 - 1.$$

Для того, чтобы было $\xi_3 \geqslant 0$, надо

$$c_1 + c_2 - 1 \geqslant 0$$

или

$$c_1 + c_2 \geqslant 1.$$

В этом случае c-ядро представлено на рис. 7.12 в виде заштрихованного треугольника внутри основного треугольника. Аналогично рассматриваются остальные возможные варианты сочетаний неравенств. Например, если $c_1 + c_2 < 1$, то c-ядро имеет вид заштрихованного четырехугольника внутри основного треугольника (рис. 7.13). Вообще многогранник, представляющий c-ядро, образуется как выпуклый многогранник пересечением прямых (7.40) и сторон основного треугольника. Если, например, неравенства $c_1 + c_2 < 1$, $c_2 + c_3 < 1$, $c_1 + c_3 < 1$, то c-ядро представляется в виде шестигранника, заштрихованного на рис. 7.14.

Перейдем теперь к вопросу определения и нахождения решения кооперативных игр. Очевидно, в решение игры должны входить дележи, лучшие с определенной точки зрения. Так, дележи, входящие в c-ядро, являются устойчивыми в несколько пассивном смысле, т. е. при этих обстоятельствах нет оснований отклоняться от такого дележа. Можно использовать дележи для построения решения игры, желательно найти дележ, который не только не доминировался бы каки-

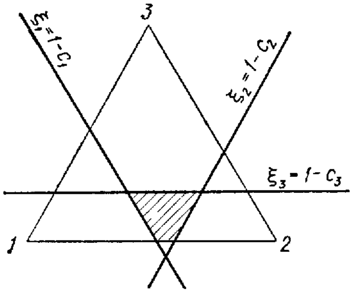

Рис. 7.13

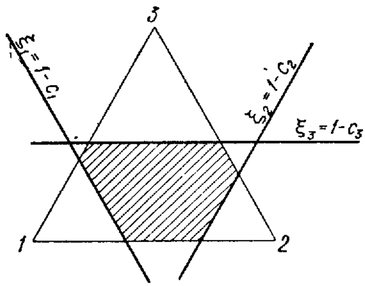

Рис. 7.14

ми-либо другими дележами, но сам доминировал бы любой другой дележ. Такой дележ был бы идеальным для решения игры. Однако такого дележа не удается найти в кооперативных играх. Безуспешны попытки определить лучший дележ даже при несколько ослабленных требованиях. Поэтому решение отыскивают на пути расширения класса дележей. И это расширение состоит в том, что решением игры должен быть не один дележ, а некоторое их множество. Рассмотрим решение кооперативной игры, предложенное Нейманом и Моргенштерном.

О п р е д е л е н и е. Решением кооперативной игры по Нейману — Моргенштерну называется такое множество R дележей в ней, что:

1) никакие два дележа из R не доминируют друг друга;

2) каков бы ни был дележ s, не принадлежащий R, найдется дележ r, принадлежащий R, который доминировал бы s.

Такое решение для краткости обозначим Н—М решение. Первое условие определения выражает внутреннюю устойчивость решения, а второе — внешнюю.

Содержательная интерпретация Н—М решения состоит в том, что любые две нормы поведения, соответствующие Н—М решению, не могут быть противопоставлены друг другу; каково бы ни было отклонение от допустимых поведений, найдется такая коалиция, которая будет стремиться к восстановлению нормы.

Между c-ядром и Н—М решением имеется тесная связь, выраженная следующей теоремой.

Теорема 7.7. *Если в кооперативной игре существует c-ядро C и Н—М решение R, то $C \subset R$.*

Доказательство. Если дележ $x \in C$, то он не может доминироваться каким-либо другим дележом. Если же $x \bar{\in} R$, то он должен доминироваться некоторым дележом из решения. Поэтому, если $x \in C$, то $x \in R$, что и требовалось доказать.

Известны следующие свойства Н—М решения.

Н—М решение кооперативной игры не может состоять только из одного дележа, так как в этом случае характеристическая функция игры несущественная.

Существуют такие кооперативные игры, в которых нет Н—М решений. В настоящее время еще не известны критерии, позволяющие судить о наличии у кооперативной игры Н—М решения. Поэтому заложенный в Н—М решении принцип оптимальности не является универсально реализуемым, и область его применения пока остается неопределенной. Этот принцип оптимальности не является полным, так как он не в состоянии указать игрокам единственную систему норм распределения выигрышей. Существуют кооперативные игры, имеющие несколько Н—М решений.

Н — М решение еще не определяет выигрыша каждого из игроков.

Эти свойства показывают, что Н—М решение имеет особенности, которые надо учитывать при исследовании конфликтных ситуаций. Так, например, реальные конфликтные экономические ситуации допускают множество решений, между которыми нельзя провести четкого и полного сравнения по признаку предпочтительности. Поэтому Н—М решение может дать полезную информацию для специалистов, принимающих решения в данной ситуации.

Рассмотрим подробнее вопросы нахождения Н—М решений. Для несущественных игр и произвольных игр 2-х игроков вопрос нахождения Н—М решения аналогичен нахождению c-ядра в этих играх. Действительно, среди дележей в играх двух игроков нет доминирования, поэтому Н—М решениями оказываются множества всех дележей. Для каждой из несущественных игр имеется только один дележ, который и является Н—М решением. Интерес представляют вопросы нахождения решений существенных игр, имеющих 3-х и более игроков.

Рассмотрим сначала кооперативные игры 3-х игроков с постоянной суммой. Покажем, что для такой игры Н—М решение состоит из трех дележей $x^1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $x^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Очевидно, достаточно рассматривать эти игры в 0—1 редуцированной форме.

Поскольку Н—М решение R имеет внутреннюю устойчивость, то никакие два дележа из R не должны доминировать друг друга, и, следовательно, они должны лежать на прямой, параллельной одной из сторон основного треугольника дележей. Итак, все отрезки, соединяющие попарно дележи из R, должны быть параллельны трем направлениям, соответствующим сторонам треугольника.

Может быть только два случая:

1) все дележи из R лежат на одной прямой;

2) не все дележи из R лежат на одной прямой.

Исследуем первый случай, когда все дележи из R лежат на одной прямой, например AB (рис. 7.15), параллельной стороне 12 основного треугольника дележей 123.

Поскольку AB параллельна стороне 12, то никакие два дележа из R не доминируют друг друга, и имеется внутреняя устойчивость дележей из R.

Рассмотрим вопросы внешней устойчивости. Ни один дележ отрезка AB не доминируется всеми остальными дележами этого отрезка, поэтому внешняя устойчивость R связана с необходимостью, чтобы в R входил весь отрезок AB. Дележ x, находящийся на AB (см. рис. 7.15), доминирует по коалиции $\{1, 2\}$ дележи из параллелограмма $xF3E$. Поскольку x — любое из AB, то совокупность дележей, которые доминирует x, составит треугольник $AB3$.

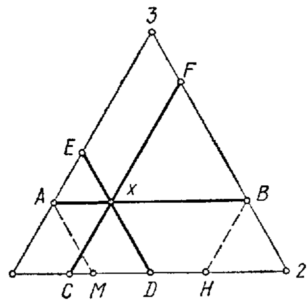

Рис. 7.15

Исследуем теперь дележи, находящиеся ниже AB, т. е. образующие трапецию $1AB2$. Дележ x доминирует по коалиции $\{1, 3\}$ дележ из параллелограмма $xD2B$. Поскольку x — любая точка из AB, то x доминирует по коалиции $\{1, 3\}$ любой дележ из параллелограма $AB2M$. Аналогично дележ x доминирует по коалиции $\{2, 3\}$ дележ из параллелограмма $BH1A$. Объединяя дележи из параллелограмов $AB2M$ и $BH1A$, получим, что дележ x доминирует все дележи из трапеции $1AB2$. Чтобы дележи из AB доминировали все дележи из $1AB2$, необходимо, чтобы точка пересечения прямых AM и BH была ниже треугольника 123. Очевидно, для этого отрезок AB должен быть ниже средней линии треугольника. Таким образом, если дележи из R лежат на одной прямой, то эта прямая должна быть ниже средней линии основного треугольника.

Содержательный смысл этого в том, что Н—М решения состоят в предоставлении третьему игроку некоторой доли α и в последующем произвольном распределении оставшейся части $1 - \alpha$ между игроками 1 и 2. Поскольку AB параллельны стороне 12, то сумма, получаемая игроками 1, 2, останется постоянной для дележей из AB. Следовательно, в этом случае и 3-й игрок для любого дележа из AB получает одну и ту же сумму. Такие решения в теории кооперативных игр называют дискриминационными, а игроков, получающих во всех дележах решения один и тот же выигрыш,— дискриминированными. Аналогично строятся решения в тех случаях, когда дележи R лежат на прямой, параллельной любой другой стороне основного треугольника.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда дележи из R не лежат на одной прямой. Пусть даны три дележа из R, не лежащие на одной прямой. Поскольку дележи из R не должны доминироваться никакими другими дележами, то каждая пара из данных трех дележей должна лежать на одной из прямых, параллельных сторонам основного треугольника. Итак, эти три дележа образовывают треугольник со сторонами, параллельными сторонам основного треугольника. Если бы имелся четвертый дележ из R, то он должен был бы с любым из остальных трех дележей из R образовывать отрезок, параллельный одной из сторон основного треугольника. А это невозможно. Поэтому R может состоять только из трех дележей, если они не лежат на одной прямой.

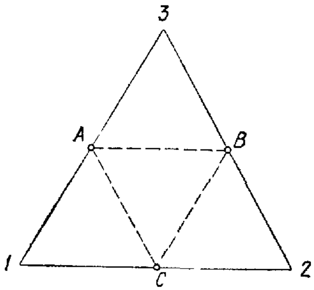

Рис. 7.16

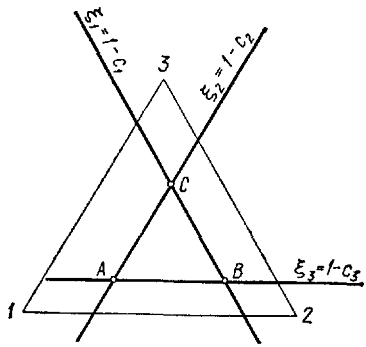

Рис. 7.17

Если дележи из R находятся внутри основного треугольника, то будут такие дележи, которые не доминируются из R, поэтому эти три дележа из R не могут находиться внутри основного треугольника, они должны быть на его сторонах. Каждая пара из них должна лежать на стороне, параллельной одной из сторон основного треугольника, а это возможно лишь тогда, когда эти три дележа из R лежат на серединах сторон основного треугольника (рис. 7.16).

Итак, доказано необходимое условие существования Н—M решения, т. е. если существует Н—M решение в существенной игре трех игроков с постоянной суммой, дележи которого не лежат на одной прямой, то оно может состоять только из трех точек A, B, C, лежащих на серединах сторон основного треугольника:

$$A=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad B=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\quad C=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right).$$

Такое решение называется симметричным.

Докажем теперь достаточность, т. е. что множество $\{A, B, C\}$, которое может быть Н—M решением, действительно является решением. Для этого надо показать, что $\{A, B, C\}$ обладает свойствами внутренней и внешней устойчивости.

Внутренняя устойчивость следует из способа построения этого множества. Определим внешнюю устойчивость. Дележ A доминирует все дележи из параллелограмма $1ABC$ (рис. 7.16), за исключением внутренних точек отрезков BA и BC. Дележ B доминирует все дележи из параллелограмма $2CAB$, кроме внутренних точек отрезков AC и BA. Дележ C доминирует все дележи из параллелограмма $CB3A$, кроме внутренних точек отрезков BC и AC. С другой стороны, внутренние точки отрезка BC доминируются дележом A, внутренние точки AC — дележом B, внутренние точки BA — дележом C. Таким образом, все дележи, за исключением дележей A, B, C, доминируются дележами A, B, C, поэтому множество $\{A, B, C\}$ является внутренне и внешне устойчивым и оно является Н—М решением.

Рассмотрим теперь Н—М решение общих кооперативных игр. Сначала предположим, что c — ядро игры пусто. Это значит (рис. 7.17), что точки A, B, C попарных пересечений прямых

$$\xi_1 = 1 - c_1, \quad \xi_2 = 1 - c_2, \quad \xi_3 = 1 - c_3$$

составляют треугольник ABC внутри основного треугольника. Из свойств доминирования следует, что дележи, находящиеся внутри треугольника ABC, не могут доминироваться дележами, лежащими вне его. Поэтому всякое подмножество треугольника ABC, устойчивое внутренне и внешне по отношению к доминированиям в пределах треугольника ABC, является таковым и по отношению к доминированию в пределах треугольника 123 и наоборот. Для удобства треугольник ABC будем называть малым, а множество дележей всякого подмножества из малого треугольника будем называть Н—М решением в малом. Таким образом, если в общей игре имеется некоторое Н—М решение, то его пересечение с малым треугольником должно быть Н—М решением в малом. Но эти решения уже описаны при исследовании Н—М решений кооперативной игры 3-х игроков с постоянной суммой.

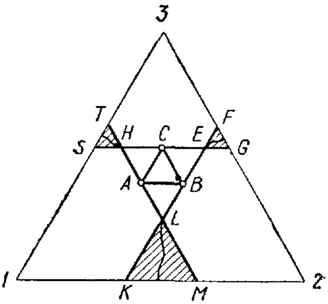

Рис. 7.18

Для того, чтобы получить Н—М решение игры, надо Н—М решение в малом пополнить дележами, лежащими вне малого треугольника. Пусть Н—М решение в малом дискриминирующее (рис. 7.18). Тогда имеются множества дележей — это треугольники KLM, SHT, EFG, заштрихованные на рис. 7.18, которые не доминируются дележами из малого треугольника ABC.

Следовательно, для получения Н—М решения к треугольнику ABC необходимо добавить дележи, доминирующие дележи из треугольников KLM, SHT, EFG. Очевидно, что такая добавка для доминирования над дележами треугольника KLM есть любая линия, находящаяся в треугольнике KLM и соединяющая любую точку основания KM с точкой L;

для треугольника EFG — это любая линия, находящаяся в треугольнике EFG и соединяющая любую точку основания FG с точкой E;

для треугольника HST — это любая линия, находящаяся в треугольнике HST и соединяющая любую точку основания ST с точкой H.

Пусть теперь Н—М решение в малом симметрично. Этот случай аналогичен предыдущему. Для получения Н—М решения надо Н—М решение в малом дополнить кривыми линиями, как это делалось на рис. 7.18.

Пусть, наконец, игра имеет непустое c-ядро, тогда совокупность дележей из c-ядра (треугольника ABC на рис. 7.19) доминирует все дележи, за исключением множества дележей, заштрихованного на рис. 7.19.

Очевидно, c-ядро входит в Н—М решение. Для того, чтобы получить Н—М решение, надо к c-ядру (треугольнику ABC) добавить дележи, находящиеся на кривых в заштрихованных треугольниках

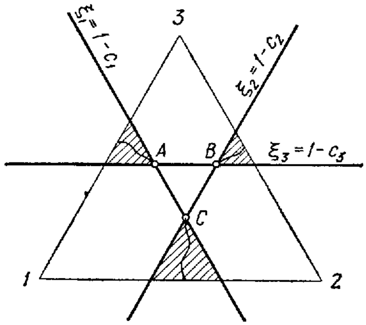

Рис. 7.19

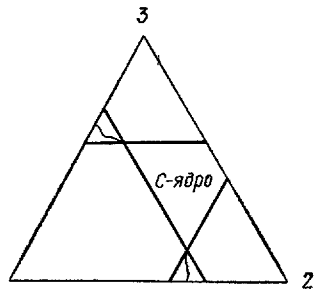

Рис. 7.20

(рис. 7.19). Каждая из этих кривых соединяет основание соответствующего треугольника с его вершиной. В остальном эти кривые произвольные. Если c-ядро доходит до стороны основного треугольника, то для получения Н—М решения исчезает надобность дополнять c-ядро кривой, исходящей из этой стороны основного треугольника. Например, такой случай изображен на рис. 7.20. Здесь c-ядро доходит до стороны 23 основного треугольника, и поэтому дополнительной кривой, исходящей из стороны 23, не требуется для построения Н—М решения.

Исследование игр более трех игроков сложнее. В них нельзя дать наглядной геометрической интерпретации, так как размерность пространства увеличивается.

Пример 7.5. Пусть имеется игра двух игроков с ненулевой суммой, заданная матрицами соответственно для выигрышей первого и второго игроков

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция v этой игры следующая: $v(1) = -0{,}2$ — есть цена игры с первой матрицей (она получается в результате решения игры двух игроков с нулевой суммой для первой матрицы); $v(2) = \frac{13}{7}$ — это цена игры для второго игрока с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$v(1, 2) = 3$ получается как максимум из сумм соответствующих элементов данных исходных матриц, т. е.

$$v(1, 3) = 4 - 1 = \max\{1 + 1,\ -2 + 3,\ -1 + 4,\ -1 - 1\} = \max\{2,\ 1,\ 3,\ 0\},\ v(\varnothing) = 0.$$

Следовательно, Н—М решение этой игры есть дележи для первого игрока x_1, для второго x_2, удовлетворяющие условиям

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 \geqslant -0{,}2; \quad x_2 \geqslant \frac{13}{7}.$$

Из последних соотношений получаем

$$x_1 = -0{,}2 + \frac{47}{35}t, \quad x_2 = \frac{13}{7} + \frac{47}{35}(1 - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где t определяется путем переговоров между игроками.

Пример 7.6. Игра двух игроков задана матрицами:

$$(0 \quad 10), \quad (-1000 \quad 0).$$

Характеристическая ее функция v имеет вид:

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(1) = v(2) = 0, \quad v(1, 2) = 10,$$

Н—М решение этой игры следующее:

$$x_1 + x_2 = 10 \quad x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0.$$

Эти исходы x_1 и x_2 определяются путем переговоров между игроками.

Поскольку второй игрок интуитивно находится в худшем положении, то его выигрыш должен быть меньше выигрыша первого игрока. Однако на вопрос, как разделить эти выигрыши, Н—М решение не дает ответа. Ясно лишь одно, что Н—М решение состоит в применении вторым игроком своей второй стратегии и при этом первый игрок получит 10. Но чтобы второй игрок применил свою 2-ю стратегию, первый игрок должен часть своего выигрыша отдать второму игроку. С другой стороны, первый игрок видит, что для второго игрока потеря будет слишком большой, если он не применит свою 2-ю стратегию, и первый игрок постарается выделить второму игроку наименьшую часть своего выигрыша.

Недостатки Н—М решения коалиционных игр способствуют поискам новых подходов. В частности плодотворным является подход Шепли, суть которого в том, что он строится на основании аксиом, отражающих справедливость дележей. Прежде чем сформулировать аксиомы, вводят новые понятия.

Определение. Носителем игры с характеристической функцией v называется такая коалиция T, что $v(S) = v(S \cap T)$ для любой коалиции S.

Содержательный смысл носителя T состоит в том, что любой игрок, не принадлежащий T, является нейтральным, он не может ничего внести ни в какую коалицию и ему ничего не следует выделять из общих средств.

Определение. Пусть v — характеристическая функция кооперативной игры n игроков, π — любая перестановка множества N

игроков. Через πv обозначим характеристическую функцию u такой игры, что для коалиции $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ будет

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_s)\}) = v(S).$$

Содержательный смысл функции πv состоит в том, что если в игре с характеристической функцией v поменять местами игроков согласно перестановке π, то получим игру с характеристической функцией πv.

Определение. Вектором цен игры с характеристической функцией v называется n мерный вектор $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(v))$, удовлетворяющий следующим аксиомам Шепли.

А 1. Аксиома эффективности. Если S — любой носитель игры с характеристической функцией v, то

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(S).$$

А 2. Аксиома симметрии. Для любой перестановки π и $i \in N$ должно быть

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi v) = \varphi_i(v),$$

т. е. игроки, одинаково входящие в игру, должны по справедливости получать одинаковые выигрыши.

А 3. Аксиома агрегации. Если есть две игры с характеристическими функциями v и u, то

$$\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v),$$

т. е. ради справедливости надо считать, что при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться. Вектор $\varphi(v)$, удовлетворяющий аксиомам $A1$ — $A3$, называется вектором Шепли.

Существование такого вектора вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7.8. *Существует единственная функция φ, определенная для всех игр и удовлетворяющая аксиомам $A1$ — $A3$.*

Для доказательства этой теоремы понадобятся следующие определения и леммы.

Определение. Характеристическая функция $w_S(T)$, определенная для любой коалиции S, называется *простейшей,* если

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } S \subset T \\ 0 & \text{при } S \not\subset T. \end{cases}$$

Содержательно простейшая характеристическая функция описывает такое положение дел, при котором множество игроков S выигрывает единицу тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую основную минимальную выигрывающую коалицию S.

Лемма 7.1. *Для любой коалиции S с числом игроков s*

$$\varphi_i(w_S) = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{при } i \in S \\ 0 & \text{при } i \notin S. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, S есть носитель игры с характеристической функцией w_S, тогда по аксиоме $A1$ имеем

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(w_S) = 1,$$

где $T \supset S$. Поскольку может быть $T = S$, то

$$\varphi_i(w_S) = 0 \text{ для } i \notin S.$$

Если π — любая перестановка, переводящая S в себя, то $\pi w_S = w_S$ и по аксиоме $A2$ для любых $i, j \in S$ будет $\varphi_i(w_S) = \varphi_j(w_S)$, т. е. все $\varphi_i(w_S)$ одинаковы, их количество s. Кроме того, их сумма равна 1. Поэтому $\varphi_i(w_S) = \frac{1}{s}$, если $i \in S$.

Из этой теоремы легко получается следствие: если $c > 0$, то

$$\varphi_i(cw_S) = \begin{cases} \frac{c}{s} & \text{при } i \in S \\ 0 & \text{при } i \notin S. \end{cases}$$

Лемма 7.2. Если v — характеристическая функция кооперативной игры, то для $S \subset N$ существует $2^n - 1$ таких вещественных чисел c_S, что

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S,$$

где w_S — *простейшая характеристическая функция.*

Доказательство. Положим

$$c_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T),$$

где t — число элементов в T. Пусть U — любая коалиция, тогда

$$\sum_{S \subset N} c_S w_S(U) = \sum_{S \subset U} c_S = \sum_{S \subset U} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) = \sum_{T \subset U} \sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} v(T).$$

Для каждого s между t и u имеется C_{u-t}^{u-s} таких множеств S с s-элементами, что $T \subset S \subset U$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} = \sum_{s=t}^{u} C_{u-t}^{u-s} (-1)^{s-t},$$

что является биномиальным разложением $(1-1)^{u-t}$. Следовательно, для всех $t < u$ оно равно 0, а для $t = u$ оно равно 1. Поэтому для всех $U \subset N$ имеем:

$$\sum_{S \subset U} c_S w_S(U) = v(U),$$

что и требовалось доказать.

Проведем теперь доказательство теоремы 7.8. Из Леммы 7.2 следует, что характеристическая функция любой коалиционной игры может быть представлена в виде линейной комбинации простейших. На основании леммы 7.1 для игр с простейшими функциями функция φ единственная. Некоторые из коэффициентов c_S отрицательные; однако из аксиомы $A3$ следует, что $\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v)$ и функция φ определяется единственным образом. Теперь для функции φ получим явное выражение. На основании равенства

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S,$$

аксиомы $A3$ и леммы 7.1 и 7.2 можно записать

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{c_S}{s},$$

где

$$c_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T).$$

Поэтому

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) = \sum_{T \subset N} \left\{ \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} \frac{1}{s} (-1)^{s-t} v(T) \right\}.$$

Положим, что

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} \frac{1}{s} (-1)^{s-t}.$$

Из последнего равенства следует, что если $i \notin T^1$ и $T = T^1 \cup \{i\}$, то

$$\gamma_i(T^1) = -\gamma_i(T),$$

поскольку все члены в правой части для $\gamma_i(T)$ будут в обоих случаях одинаковы, за исключением того, что $t = t^1 + 1$, и будут отличаться лишь знаком. Поэтому

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \gamma_i(T) [v(T) - v(T \setminus \{i\})].$$

Если $i \in T$, то имеется C_{n-t}^{s-t} таких коалиций S с s-элементами, что $T \subset S$, поэтому

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{s} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} = \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} \int_0^1 x^{s-1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{t-1} \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t} C_{n-t}^{s-t} x^{s-t} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}.$$

Теперь компоненты вектора Шепли можно записать в явном виде

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})].$$

Можно легко проверить, что полученное значение для $\varphi_i(v)$ удовлетворяет всем аксиомам Шепли и

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(T) = 1,$$

поэтому

$$\varphi_i(v) \geqslant v(\{i\}),$$

и, следовательно, $\varphi(v)$ является дележом.

Вектор Шепли содержательно можно интерпретировать следующим образом: предельная величина, которую вносит i-й игрок в коалицию T, выражается как $v(T) - v(T \setminus \{i\})$ и считается выгрышем i-го игрока; $\gamma_i(T)$ — это вероятность того, что i-й игрок вступит в коалицию $T \setminus \{i\}$; $\varphi_i(v)$ — средний выигрыш i-го игрока в такой схеме интерпретации. В том случае, когда v — простейшая,

$$v(T) - v(T \setminus \{i\}) = \begin{cases} 1, & \text{если } T \text{ выигрывающая коалиция,} \\ 0, & \text{если } T \text{ выигрывающая коалиция, а} \\ & T \setminus \{i\} \text{ невыигрывающая коалиция.} \end{cases}$$

Следовательно

$$\varphi_i(v) = \sum_{T} \gamma_i(T) = \sum_{T} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!},$$

где суммирование по T распространяется на все такие выигрывающие коалиции T, что коалиция $T \setminus \{i\}$ не является выигрывающей.

Пример 7.7. Рассматривается корпорация из четырех акционеров, имеющих акции соответственно в следующих размерах: $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$. Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырех игроков, в которой выигрывающими коалициями являются следующие: $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4,\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$. Найдем вектор Шепли для этой игры.

При нахождении φ_1 надо учитывать, что имеется только одна коалиция $T = \{1, 2, 3\}$, которая выигрывает, коалиция $T \setminus \{1\} = \{2, 3\}$ не выигрывает. В коалиции T имеется $t = 3$ игрока, поэтому

$$\varphi_1 = \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}\,(v(T) - v(T \setminus \{1\})) = \frac{2!\,1!}{4}(1-0) = \frac{1}{12}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 2-го игрока: $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$. Поэтому

$$\varphi_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\varphi_3 = \frac{1}{4}$, $\varphi_4 = \frac{5}{12}$.

Итак, вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right)$. Если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим следующий вектор голосования $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$, который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты 2-го и 3-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у 2-го и 3-го игрока одинаковые. Для 1-го и 4-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

Пример 7.8. Четыре акционера обладают соответственно следующим количеством акций: $a_1 = 10$, $a_2 = 30$, $a_3 = 30$, $a_4 = 40$. Можно показать, что любые два игрока из $\{2, 3, 4\}$ образуют выигрывающую коалицию, а 1-й игрок не может ничего внести ни в какую коалицию. Поэтому $\varphi_1 = 0$, а остальные значения $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{1}{3}$. Таким образом, с точки зрения решения по Шепли акции 1-го игрока бесполезны, а избыточные акции 4-го игрока не дают ему преимуществ по сравнению со 2-м и 3-м игроками.

Контрольные вопросы и задания к главе 7

1. Что такое бескоалиционная игра n игроков?
2. Что называется ситуацией равновесия в бескоалиционной игре?
3. Какие бескоалиционные игры называются стратегически эквивалентными?
4. Сформулируйте и докажите теорему о ситуациях равновесия для стратегически эквивалентных игр.
5. Что называется смешанным расширением бескоалиционной игры?
6. Сформулируйте и докажите теорему существования решения для бескоалиционной игры.
7. Сформулируйте и докажите теорему, выражающую необходимое и достаточное условие ситуации равновесия в бескоалиционной игре.
8. Опишите метод решения бескоалиционных игр n игроков в том случае, когда каждый игрок имеет только две стратегии.
9. Что такое биматричная игра?
10. Каким условием должны удовлетворять смешанные стратегии игроков в ситуации равновесия биматричной игры?
11. Опишите метод биматричных игр 2-х игроков, каждый из которых имеет только 2 стратегии.
12. Что называется кооперативной игрой?
13. Что называется характеристической функцией кооперативной игры?
14. Что называется дележом в кооперативной игре?
15. Что называется классической кооперативной игрой?
16. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, которым должен удовлетворять дележ в кооперативной игре.
17. Какие кооперативные игры считаются существенными и несущественными?
18. Сформулируйте условия, которым должна удовлетворять характеристическая функция несущественной кооперативной игры.
19. Какие кооперативные игры называются стратегически эквивалентными?
20. Каким условиям удовлетворяет понятие стратегической эквивалентности для кооперативных игр?
21. Как распространяется понятие стратегической эквивалентности в кооперативных играх на их дележи?
22. Какая кооперативная игра называется нулевой?
23. Что такое 0 — 1 редуцированная форма кооперативной игры?
24. Сформулируйте и докажите теорему о существенных кооперативных играх в 0 — 1 редуцированной форме.

25. Что такое доминирование дележей в кооперативных играх?

26. Что такое c-ядро кооперативной игры и каким условиям должен удовлетворять дележ, чтобы он принадлежал c-ядру?

27. Опишите c-ядро игр 3-х игроков.

28. Что называется Н—М решением кооперативной игры?

29. Опишите Н—М решение кооперативной игры трех игроков с постоянной суммой.

30. Опишите Н—М решение кооперативной игры трех игроков с непостоянной суммой.

31. Что называется вектором Шепли?

32. Сформулируйте и докажите теорему существования вектора Шепли в кооперативной игре.

33. Какая характеристическая функция кооперативной игры называется простейшей?

34. Напишите формулу компонент вектора Шепли.

35. Решите биматричные игры.

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\text{с) } A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

36. Построить характеристическую функцию для следующей игры. Каждый из игроков выбирает число из множества $\{1, 2\}$ и получает выигрыш согласно следующему правилу:

$$\begin{array}{lll}
M_1(1,1,1)=1 & M_2(1,1,1)=1 & M_3(1,1,1)=-2\\
M_1(1,1,2)=-1 & M_2(1,1,2)=-1 & M_3(1,1,2)=2\\
M_1(1,2,1)=1 & M_2(1,2,1)=1 & M_3(1,2,1)=-2\\
M_1(1,2,2)=-1 & M_2(1,2,2)=-1 & M_3(1,2,2)=2\\
M_1(2,1,1)=-1 & M_2(2,1,1)=-1 & M_3(2,1,1)=2\\
M_1(2,1,2)=1 & M_2(2,1,2)=1 & M_3(2,1,2)=-2\\
M_1(2,2,1)=-1 & M_2(2,2,1)=-1 & M_3(2,2,1)=2\\
M_1(2,2,2)=1 & M_2(2,2,2)=1 & M_3(2,2,2)=-2
\end{array}$$

37. Найдите характеристическую функцию игры в 0 — 1 редуцированной форме для игры со следующей характеристической функцией:

$$v(\varnothing)=0,\quad v(1)=-1,\quad v(2)=-2,\quad v(3)=-2,$$
$$v(4)=0,\quad v(1,2)=v(1,3)=v(1,4)=v(2,3)=v(2,4)=v(3,4)=0.$$
$$v(1,2,3)=0,\quad v(1,2,4)=2,\quad v(1,3,4)=2,\quad v(2,3,4)=1,$$
$$v(1,2,3,4)=0.$$

38. Игра, называемая «один лишний», проводится следующим образом: каждый из трех игроков выбирает число из множества $\{1, 2\}$. После этого распределяются выигрыши по следующему правилу: если все игроки выбрали одинаковые значения, то — ничья (никто ничего не выигрывает), если один из них выбрал число, отличное от выбранных чисел двух других игроков, то он проигрывает (платит по единице каждому из игроков). Например, первый игрок выбрал 1, а второй и третий выбрали 2, тогда первый игрок проиграл 2 единицы, которые он платит остальным игрокам поровну.

Найдите характеристическую функцию этой игры.

39. Характеристическая функция v некоторой игры пяти игроков задана следующим образом:

$$\begin{aligned}
v(T) &= 0, \text{ если } T \text{ содержит } 0 \text{ элементов},\\
v(T) &= -1, \text{ если } T \text{ содержит } 1 \text{ элемент},\\
v(T) &= 0, \text{ если } T \text{ содержит } 2 \text{ или } 3 \text{ элемента},\\
v(T) &= 1, \text{ если } T \text{ содержит } 4 \text{ элемента},\\
v(T) &= 0, \text{ если } T \text{ содержит } 5 \text{ элементов}.
\end{aligned}$$

Покажите, что каждый из двух дележей

$$x = (-0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}2;\ -0{,}2;\ 0{,}6),$$

$$y = (-0{,}2;\ -0{,}2;\ -0{,}1;\ -0{,}1;\ 0{,}6)$$

предпочтительней другого.

40. Найдите Н — М решение игры трех игроков с такой характеристической функцией:

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(1) = -4, \quad v(2) = -3, \quad v(3) = -8,$$

$$v(1,\ 2) = 8, \quad v(1,\ 3) = 3, \quad v(2,\ 3) = 4, \quad v(1,\ 2,\ 3) = 0.$$

41. Покажите, что если v — характеристическая функция кооперативной игры с постоянной суммой, то компоненты вектора Шепли выражаются формулой

$$\varphi_i(v) = 2 \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \left[\frac{(n-s)!\,(s-1)!}{n!} v(S) \right] - v(N).$$

42. Найдите вектор Шепли для корпорации из 4-х акционеров, имеющих соответственно следующее количество акций: $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 20$, $a_4 = 40$.

Предполагается по аналогии с примером 7.7, что любое решение может быть утверждено акционерами, имеющими простое большинство акций.

ГЛАВА 8. ДЕЛОВЫЕ ИГРЫ

Моделирование производственных, планово-экономических и управленческих ситуаций, т. е. представление этих ситуаций в виде формализованной системы взаимодействующих с определенной целью элементов, в настоящее время приобретает большое значение. Сложность возникающих ситуаций не позволяет произвести полную ее формализацию, и в любом случае человеку отводится решающая роль в процессе выработки и принятия решения в зависимости от сложившихся обстоятельств. Математические методы и формализации оказывают человеку большую помощь при научном обосновании принимаемых им решений. Так, для исследования любой производственно-хозяйственной ситуации необходимо провести большое количество вычислений, сравнений, предсказаний и т. д. И здесь услугу человеку оказывают ЭВМ и математические модели. Динамичность производственных процессов в современных условиях требует от управляющих работников быстрой ориентировки в ситуации и принятии решений в сложной обстановке. Большую помощь в этом деле оказывают деловые игры, т. е. игровые модели производственных ситуаций, в которых участвуют группы людей, принимающих решения, и система вычислительных средств, помогающих этим людям проводить необходимые расчеты.

Игровая модель, или деловая игра — это набор участников игры и правил, отражающих производственно-хозяйственную ситуацию. Участники игры должны, подчиняясь этим правилам, достичь наилучших успехов на пути к поставленной цели. На определенных этапах принятия решений им оказывает помощь система экономико-математических моделей и методов, реализующая на ЭВМ основные вариантные и рутинные расчеты, связанные с данной игрой производственно-хозяйственной ситуации.

Деловые игры создаются и функционируют для разных целей: обучение участников игры выработке лучших решений в сложных и меняющихся во времени условиях производственно-хозяйственной деятельности; выработка лучших плановых решений на определенный период; улучшение взаимоотношения, сглаживание конфликтности в выработке решений и др.

Участники деловой игры, проведя несколько ее циклов (партий), приобретают навыки уверенного поведения в сложной обстановке, вырабатывают точность и внимание при выполнении своего дела, получают возможность быстрее осязать и анализировать результаты деятельности, обнаруживать способности к эффективной работе в коллективе.

Создание деловой игры требует больших усилий и затрат средств. Так, например, в Гарвардской школе бизнеса США группой около 10 человек такая игра разрабатывалась около восьми лет; в Институте технологии Карнеги группа из 9 человек около 6 лет разрабатывала деловую игру, имитирующую конкретную борьбу сорока предприятий моющих средств на пяти рынках. В современных условиях создание деловой игры по затратам средств и трудоемкости можно сравнить с разработкой автоматизированной системы управления небольшого звена народного хозяйства.

Процесс создания деловой игры состоит из этапов:

1. Определение цели игры.

2. Определение круга звеньев народного хозяйства, охваченных игрой, описание воспроизводимой ситуации.

3. Разбивка всех участников на группы, определение правил игры, прав и обязанностей участников и арбитров.

4. Разделение всей игры на два комплекса, в одном из которых будут участники игры — люди, в другом — ЭВМ и правила.

5. Определение функциональных связей между участниками игры.

6. Разработка предварительного варианта деловой игры (установление количественных характеристик, сбор информации, программирование, обработка документов, подготовка к проведению игры).

7. Проверка предварительного варианта в работе.

8. Доработки предварительного варианта.

9. Сдача в эксплуатацию.

В деловой игре участники игры разбиваются на группы, представляющие интересы определенного звена (предприятия, отрасли, объединения и т. д.). Участники игры принимают решения, которые действуют в течение определенного периода времени (цикла). Например, решения принимаются для составления плана работы на месяц. Если надо составить план на год, то можно последовательно провести 12 циклов игры для 12 месячных планов. Обычно игра начинается с инструктажа, т. е. участникам игры дается описание предприятий, отраслей, которыми они будут руководить, особое внимание уделяется описанию видов выпускаемой продукции и потребляемого сырья, прав и обязанностей руководителей и арбитров, определяются функции участников игры, возможные решения, информационное обеспечение. Получив инструкции, члены каждой группы проводят совещания для уяснения своих целей выработки стратегий поведения, составления планов взаимодействий для достижения целей, определения методов работы и видов контроля, создания типичных организационных структур.

Так, например, целью может быть достижение наибольшей прибыли или рентабельности; в качестве ограничивающих условий — стабилизация процесса производства, равномерный расход и поставка ресурсов и т. д.

Принимая решения, участники игры могут советоваться со своими коллегами или с партнерами.

Эти решения быстро обрабатываются на ЭВМ по программе, имитирующей деятельность всех звеньев народного хозяйства, представленных в данной игре участниками игры. Результаты решений на ЭВМ передаются участникам игры и арбитрам. Если игра проводится последовательно в несколько циклов, то после проведения последнего цикла происходит анализ деятельности участников игры и оценка работы каждого ее участника. Разбор проведенной игры обычно происходит совместно со специалистами, и это приносит большую пользу участникам игры, так как они анализируют свои решения и приобретают опыт в принятии лучших решений.

Пример 8.1. Деловая игра «Реформа». Эта игра разработана в лаборатории экономико-математических методов Ленинградского госуниверситета под руководством И. М. Сыроежина с целью ввести участников (студентов) в основные условия функционирования новой экономической реформы и служить тренажером в принятии решений при неполной информации. В игре моделируются спрос на продукцию и технический прогресс. Основное внимание уделено анализу имеющейся информации, ведению переговоров, выработке и принятию решений в условиях риска, выбору критериев, исследованию ряда дискуссионных вопросов планирования и управления.

В игре представляются три отрасли промышленности: A — добывающая, B — перерабатывающая, C — производящая предметы народного потребления.

Отрасль подчиняется министерству, которое представлено министром и тремя его заместителями. Отрасль A состоит из трех предприятий: A_1 — производящее энергию, A_2 — выпускающее металл, A_3 — выпускающее неметаллическое сырье. Отрасль B представлена следующими предприятиями: B_1 — машиностроительное, B_2 — электротехническое, B_3 — химическое. Отрасль C — следующими предприятиями: C_1 — производящее продукты питания, C_2 — выпускающее одежду, C_3 — выпускающее предметы быта. Каждое предприятие представлено директором и тремя его заместителями. В игре имеется группа арбитров. Отрасли *A* и *B* поставляют продукцию в виде сырья для отрасли *C*, которая выпускает конечную продукцию.

В правилах игры отражены условия хозяйственной обстановки в экономике страны. В инструкциях установлены основные права и обязанности участников игры.

Для министерства:

министерства ведут переговоры друг с другом; все вопросы решаются путем обсуждения, но принимает решение главный; спорные вопросы решают арбитры; министерство в начале игры обеспечивает свои предприятия необходимыми средствами; министерство получает прогноз о спросе на продукцию каждого предприятия; министерство утверждает план для предприятия по объему реализации продукции, сумме прибыли и рентабельности; министерство и предприятия несут взаимную ответственность за свою деятельность; министерство имеет свой расчетный счет в банке; банк представляет министерству кредиты.

Для банка:

банк представляет кредиты министерствам и предприятиям на определенных условиях; на произведенную, но не реализованную продукцию банк кредитов не дает; кредит представляется не более, чем на 3 периода игры.

Для предприятий:

предприятия устанавливают прямые связи с помощью договоров, которые заключаются в каждом периоде (если предприятие не произвело расчет по прежнему договору, новый договор не заключается); средства предприятия хранятся на расчетных счетах в банке; предприятие составляет техпромфинплан на текущий период (директивные показатели утверждаются министерством); 10—25% плановой балансовой прибыли отчисляется на счет министерства, основная ее часть идет на погашение кредита банку, министерству в виде платы за фонды, а остальная — хранится в банке на счету предприятия и может быть использована на образование фондов экономического стимулирования; сверхплановая прибыль распределяется почти аналогично плановой; если предприятие понесло убытки из-за производства не имеющей спроса продукции, но запланированной министерством, то убытки покрываются в размере 65% затрат за счет резервного фонда министерства; предприятия реализуют появляющиеся технические и организационные усовершенствования.

Для арбитров:

арбитры разрешают спорные вопросы, вводят систему штрафов и поощрений деятельности министерств, пересматривают цены на продукцию предприятий, но не чаще одного раза в три периода; организуют учет итогов работы по периодам; рассматривают предложения по усовершенствованию и изменению правил игры, принимают решения в неожиданных и непредвиденных ситуациях.

После ознакомления с правами и обязанностями участники игры изучают правила игры и последовательность операций.

Последовательность проведения операций деловой игры можно считать следующей:

1. В начале каждого периода директора предприятий, министры, арбитры и управляющий банком получают информацию об основных технико-экономических показателях предприятий: мощности, основных фондах, оборотных средствах, объемах реализованной продукции, плановой балансовой прибыли, фактической балансовой прибыли, рентабельности, свободных мощностях, себестоимости производимой продукции, цене продукции, нормах амортизации, нормах рентабельности, нормах прибыли, амортизационном фонде, фонде развития, сумме на расчетном счете в банке, личных сбережениях работников, нормативах затрат и выпуска продукции в стоимостном и натуральном выражениях. Эти показатели выдаются в виде заполненных форм.

2. Предприятия сверяют счета в банке и министерствах, т. е. получают сведения о своих возможностях.

3. Министерство C, его предприятия получают прогноз о возможном спросе, который рассматривается как плановый показатель для предприятий C_1, C_2, C_3. Этот спрос может быть определен с помощью соответствующих вычислений, проводимых на ЭВМ.

4. Получение информации о достигнутом прогрессе каждой отрасли: об использовании нового оборудования (в процентах от основных фондов), совершенствовании технологии по более рациональному использованию сырья (в процентах от оборотных средств предприятий), совершенствовании в сфере организации производства (в процентах от мощности предприятий). Измерение влияния технического прогресса производится в процентах снижения себестоимости продукции за счет технического прогресса.

Директор предприятия решает вопрос о внедрении достижений технического прогресса.

5. Предприятие отрасли C получает от министерства C план по размеру реализуемой продукции, сумме прибыли и рентабельности.

6. Предприятия, анализируя план министерства, составляют план выпуска продукции.

7. Предприятия разрабатывают свои решения по выполнению плана, имея в виду возможности кредитов в банке, фонд развития, прогресс, свободные мощности, кредит министерства, кредит отраслевого предприятия.

8. Решения директоров предприятий утверждаются министерствами.

9. Предприятия при поддержке министерств обращаются в банк для финансового обеспечения принятых решений.

10. Предприятия отрасли C, используя нормативы затрат — выпуска, составляют проект заказов другим предприятиям.

11. Эти проекты обсуждаются в министерствах и утверждаются.

12. Предприятия и министерства обеспечивают принятые проекты финансированием в банке.

13. Предприятия отрасли C договариваются с другими предприятиями отраслей A и B о выполнении заказов.

14. Предприятия отраслей A, B принимают на себя обязательства по выполнению договоров с предприятиями отрасли C.

15. Производство продукции происходит сразу же после заключения договоров.

16. Расчет фактической реализации продукции отрасли C производится с помощью ЭВМ.

17. Определяется результат деятельности предприятий: разность между фактической и плановой реализацией, выплата заработной платы, определение прибыли и рентабельности.

18. Оценка деятельности участников игры.

19. Решение арбитров на основе оценок деятельности. Оценкой деятельности министра является прибыль, получаемая в виде отчислений от прибыли предприятий, курируемых им.

Критериями оценки деятельности участников игры может быть степень выполнения текущих планов. Если имеются разработанные программы на ЭВМ и необходимая информация для использования этих программ с целью принятия решения, то можно получать оптимизационные решения на ЭВМ, и затем сравнивать их с решениями, принятыми участниками игры без применения ЭВМ. Такие сравнения помогают оценить работу участников игры и способствуют обучению в принятии решений по управлению в условиях неопределенности.

Пример 8.2. Деловая игра ЭПОС. Слово ЭПОС означает «Экспериментальное планирование ограниченных средств». Эта игра разработана в Ленинградском государственном университете совместно с Ленинградским финансово-экономическим институтом и используется практически для обучения.

Деловая игра ЭПОС имитирует процесс распределения и использования дефицитных ресурсов с целью сокращения сроков работ в службе главного технолога. Система отношений между главным технологом и его службами строится на стимулировании обмена ресурсами между ними, на общей заинтересованности в освоении нового изделия в условиях разнонаправленности интересов каждой службы по использованию ее ресурсов.

Проведение такой игры дает возможность получить новый подход к планированию, распределению и реализации производственной программы в службе главного технолога, привлечь работников бюро к процессу планирования и более рационального использования собственных возможностей, стимулировать творческий подход, выявить достоверную информацию о действительных возможностях конструкторско-технологических бюро, накопить данные для совершенствования нормативов, получения свободного резерва времени, проверки изменений в действующей системе стимулирования. Цели игры подчинены поискам новых путей стимулирования работников производства при условиях опережающего роста производительности труда по сравнению с ростом заработной платы. Игра стимулирует участников к выработке и принятию реального напряженного плана, к перераспределению ответственностей при его выполнении.

Главный технолог и его заместители представлены в игре решающим центром — стратегом, т. е. распорядителем.

Конструкторско-технологические бюро (в игре их четыре) представлены решающими центрами — тактиками, которые являются потребителями.

Все остальные службы рассматриваются как среда либо как обслуживающие решающие центры.

Условия проведения игры следующие: распорядитель имеет административные полномочия по отношению к потребителям, он обладает некоторым дефицитным ресурсом; потребители также имеют некоторый дефицитный для распорядителя ресурс, который с помощью административных директив полностью изъять нельзя; потребители независимы друг от друга в административном подчинении; потребители не располагают полной информацией о ходе дел друг у друга; потребители стараются получить дефицитный ресурс, который имеется у распорядителя; распорядитель имеет фонд материального поощрения, с помощью которого он может проводить реализацию скрытых резервов, отвечает за общее выполнение плана, организует и координирует работу по составлению и выполнению плана.

Общие ресурсы (материалы, сырье, фонды, рабочее время и т. д.) распорядителя и потребителей для освоения нового изделия остаются неизменными, поэтому сокращение сроков работ в службе главного технолога вызывает рост производительности труда.

Отметим факторы, от которых зависит рост производительности труда: рост образовательного уровня, использование научно-технических достижений в практике, применение технических усовершенствований, лучшее использование рабочего времени за счет уменьшения непроизводительных расходов рабочего времени, рост заработной платы, материальное поощрение. Для оценок индивидуальных возможностей используется специальная шкала. За основу взята производительность труда b_0 нормативного работника, а b_i означает верхнюю границу производительности труда i-го работника, тогда предельным резервом считается величина

$$b = \sum_i (b_i - b_0).$$

Производительность труда i-го работника обозначается d_i; вводится параметр надежности k_i, т. е. k_i есть вероятность правильно выполненной работы i-м работником; отзывчивость на премии оценивается параметром v_i, причем $v_i = 0$, если i-й работник не заинтересован в получении премии, и $v_i = 1$, если он максимально заинтересован в получении премии, в остальных случаях $0 \leqslant v_i \leqslant 1$; приоритетность бюро выражается параметром α_j — вес j-го бюро (чем больше значимость бюро, тем больше α_j), наименьшее значение $\alpha_j = 1$.

Бюро различается по составу работников, их числу, количеству разрабатываемых оригинальных деталей. Вводится коэффициент B_j возможностей j-го бюро по данной группе работ в изыскании резервов и коэффициент γ_j приведения численности сотрудников. Например, b_j может определяться как суммарный резерв времени всех сотрудников j-го бюро, а γ_j — как средний резерв времени, приходящийся на одного сотрудника j-го бюро. Для каждого бюро отдельно на основании действующих норм формируется план выполнения работ, $T_{пл}$ плановый срок выполнения работ, $T_{жел}$ — желаемый срок выполнения работ и $T = T_{пл} - T_{жел}$ — сокращение сроков выполнения работ.

Фонд материального поощрения, известный только распорядителю, должен распределяться в соответствии с временными резервами бюро, т. е. распорядитель, поощряя бюро, как бы покупает у него резерв времени. Для осуществления такого обмена вводятся цены c_j для j-го бюро, т. е. c_j — это доля дневной суммарной заработной платы, которую распорядитель может дать в качестве поощрения за сокращение сроков работ. Устанавливается нижняя граница цены $c_{j\text{н}}$ и верхняя граница $c_{j\text{в}}$. Для оценки выплат каждому бюро в зависимости от поданных предложений проводится изучение цен в интервалах $(c_{j\text{н}}, c_{j\text{в}})$, куда попадает данное бюро. Для сопоставления оценок резервов бюро применяются коэффициенты α_j, B_j, γ_j. Игра проводится в несколько этапов, туров. Количество этих этапов определяется распорядителем в зависимости от суммарного поощрения A по всем бюро, от сокращения срока T выполнения работ и от поведения потребителей. На k-м туре объявляется доля a^k общего фонда A. Эта доля зависит от результатов деятельности на предыдущих $k - 1$ этапах.

Поскольку каждое бюро представлено руководителем и сотрудниками и их вклад по разному влияет на работу, то a^k делят на две части: a_1^k — сумма для распределения среди сотрудников бюро, a_2^k — сумма для руководителя бюро. Вся информация о ценах, коэффициентах, долях суммы A неизвестна представителям бюро.

С другой стороны, распорядитель не знает точных оценок B_j, k_j, v_j и размеров скрытых резервов бюро. Поэтому игра проводится в условиях неполной информации.

Во время игры бюро подает предложения, а распорядитель может:

1) распределить a^k между бюро, подавшими предложения, учитывая цены бюро и интервалы цен;

2) отдать все a^k тому бюро, предложение которого целиком устраивает распорядителя и укладывается в рамки интервала цен, а предложения остальных бюро не принимать;

3) аннулировать результат труда, если поступившие предложения не выгодны одной из сторон;

4) иногда в зависимости от обстановки отклоняться от интервала цен в невыгодную для себя сторону.

Распорядитель должен научиться выбирать лучший вариант, приводящий к наибольшей выгоде.

Результаты игры фиксируются в протоколе игры в виде установления сроков выполнения плана по отдельным пунктам и гарантированных сумм по каждому из них. Протокол подписывают все участники игры. После оформления протокола и установления всех позиций плана каждому сотруднику из бюро выплачивается 25% отыгранной суммы. Это поощрение сотрудникам бюро за участие в процессе составления плана, за умение четко оценивать свои возможности, за грамотно составленный план работы.

Если сроки, указанные в протоколе игры, не выдерживаются или в план вносятся директивные изменения, то в действие вступает корректирующая система, которая составляется на основе согласованных в начале игры «Технических условий проведения экспериментального планирования».

Во время игры каждое бюро может получать оплату своих резервов в интервале цен $(c_{jн}, c_{jв})$. Потребитель может в любой момент прекратить отдачу резервов, если ход игры его не устраивает. Потребители в игре практически не могут образовывать коалиции против распорядителя, так как они не располагают полной информацией: цена образуется лишь на основании объявленной ставки и отдаваемых резервов, интервал цен и коэффициенты α, b, γ также полностью не известны потребителям, число предполагаемых этапов и общая сумма фонда материального поощрения не известны заранее потребителям.

Структура проведения игры следующая:

Первый этап. Формирование плана и поиск резервов.

Второй этап. Корректировка плана.

Третий этап. Реализация плана.

Четвертый этап. Анализ результатов и подведение итогов.

Рассмотрим подробнее эту структуру.

Первый этап. Формирование плана и поиск резервов связаны с большой трудоемкостью при выполнении последовательности следующих операций.

1. Чертежи на новое изделие получает служба главного технолога и изучает их.

2. На основании действующих нормативов составляется план работы по всем бюро с разбивкой на виды работ и установлением сроков $T_{пл}$. Этот план отдают в бюро за месяц до начала второго этапа игры.

3. Назначается распорядитель, т. е. ответственный за проведение экспериментального планирования в службе главного технолога.

4. Он проводит анализ плана, определяет общее положение запланированных работ в заводском плане деятельности на рассматриваемый интервал времени.

5. Распорядитель определяет $T_{жел}$ — желаемые сроки выполнения работ по отдельным позициям плана и устанавливает время сокращения работ ($T = T_{пл} - T_{жел}$).

6. Проводится анализ плана бюро сотрудниками этого бюро и его руководитель устанавливает прикидочные оценки параметров B_j, d_j, k_j, v_j.

7. Распорядитель на основании собственных сведений устанавливает свои оценки B_j, k_j, v_j, которые могут существенно отличаться от соответствующих оценок, полученных руководителем бюро.

8. В службе проводится экспертиза с целью возможного сокращения сроков выполнения установленных плановых показателей. В качестве экспертов выступают специалисты как данного предприятия, так и родственных ему предприятий.

9. Распорядитель, сопоставляя свои оценки B_j, k_j, v_j с оценками экспертов, уточняет желаемые сроки выполнения $T_{жел}$ и пересчитывает T.

10. На основании штатного расписания и коэффициентов b_i, k_j, v_j распорядитель формирует коэффициенты α_j, B_j, γ_j.

11. На основании прогноза T распорядитель оценивает возможную экономию фонда заработной платы по данной группе работ.

12. Исходя из суммарной заработной платы по бюро за один день по данной группе работ, общего положения предприятия и службы главного технолога, распорядитель устанавливает интервал цен ($c_{н}$, $c_{в}$).

13. В каждом бюро проводится оценка возможных резервов по каждой группе работ. Руководитель бюро уточняет значения B_j, k_j, v_j.

14. Распорядитель определяет функции поощрения на основе интервалов ($c_{н}$, $c_{в}$). Обычно эти функции выражают общее увеличение поощрения в зависимости от отданных использованных резервов, но уменьшение рассчитывается на единицу отданного резерва.

15. Проводится обоснование необходимой суммы A и устанавливается окончательное ее значение.

16. Распорядитель проводит анализ предполагаемой политики.

17. Потребители, проведя денежную оценку своих резервов, устанавливают собственный интервал цен ($p_{н}$, $p_{в}$), который может не совпадать с интервалом ($c_{н}$, $c_{в}$). В зависимости от степени совпадения или несовпадения этих интервалов развивается ход игры. Например, если $p_{в} < c_{н}$, то потребитель слишком низко оценивает свои резервы и распорядитель не может их покупать (их оплата выходит за нижнюю границу цены распорядителя), и такой потребитель выбывает из игры.

К определению ($p_{н}$, $p_{в}$) и ($c_{н}$, $c_{в}$) надо относиться очень внимательно, так как их значения оказывают большое влияние на ход игры.

18. Распорядитель готовит необходимую документацию ко второму этапу игры.

19. Проводятся тренировочные упражнения по второму этапу. В результате определяются и уточняются процедурные вопросы ведения игры, величины параметров B_j, k_j, v_j, ($p_{н}$, $p_{в}$), ($c_{н}$, $c_{в}$). Проводится технологическая тренировка всех участников по работе с новым методом экспериментального планирования.

20. Распорядитель и потребители вносят коррективы в свои подготовленные материалы.

21. Представители бюро, руководители службы, представители организации вырабатывают «Технические условия проведения экспериментального планирования», в которых предусматриваются возможные отклонения от полученных результатов после игровой корректировки планов, и принимаемые в этих случаях решения.

22. Уточняется состав участников игры, назначается дата проведения игрового эксперимента.

Второй этап — корректировка плана. Это наиболее важный этап. На этом этапе по-существу проводятся действия участников игры, они принимают решения в сложной обстановке, и на основании этих решений проводится обмен дефицитными ресурсами.

23. Участники игры размещаются в специальном помещении, обеспечиваются всем необходимым справочным материалом, техническими средствами, при необходимости им предоставляется возможность оперативной связи с ЭВМ.

24. Распорядитель определяет и сообщает сумму a^1 фонда поощрения, предполагаемую на первом туре. Обычно эта сумма назначается в пределах суммарной оценки одного резервного дня по всем группам работ в принятых средних оценках интервала цен.

25. Потребители оценивают сумму a^1, сопоставляют с собственными резервами и интервалами цен ($p_н$, $p_в$) и принимают решения об участии в этом туре.

26. Свое решение потребитель в закрытом виде подает распорядителю. Это делается для снятия психологического давления с тех, кто подает первым, на остальных, чтобы все игроки находились в одинаковых условиях информационной обеспеченности. Если потребитель решил не участвовать в этом туре, то он ждет начала следующего. Если потребитель согласен участвовать в данном туре, то он передает распорядителю вместе с согласием предлагаемый резерв на этот тур.

27. Распорядитель оценивает поданные предложения, сопоставляет с интервалом цен, поправочными коэффициентами, функциями поощрения.

28. Распорядитель принимает решения по данным предложениям и проводит расчет отдаваемых сумм.

29. Потребители получают решения распорядителя по итогам тура.

30. Распорядитель подводит общий баланс тура: считает разницу между полученной экономией и отданной суммой, сопоставляет с прогнозами.

31. Распорядитель и потребители вносят определенные коррективы в заранее сформулированные планы действий.

32. Распорядитель готовит новую сумму a^2 фонда поощрения для второго тура.

33. Объявляется эта сумма, и происходит вся процедура, описанная в п. п. 24—32. Так повторяется несколько первых туров (до шести), и затем окончательно устанавливается картина психологического поведения игроков, определяются коэффициенты, границы интервалов цен. По ходу игры распорядитель регулирует суммы a^k фонда поощрения на k-м туре ($k = 1, 2, \ldots$), определяет число туров и пропорции a_1^k и a_2^k для руководителя бюро и сотрудников. После проведения последнего тура проводятся общие итоги игры.

34. Оформляется «Протокол экспериментального анализа программы работ», который подписывается всеми участниками игры.

35. Подготавливаются проекты приказов на выплату 25% отыгранных сумм за участие в процессе планирования. После этого все бюро, начиная с указанного планом срока, приступают к выполнению работ.

Третий этап — реализация плана.

36. В соответствии с принятыми техническими условиями все изменения в ходе выполнения плана вносят в соответствующие дополнения и предлагаемую оплату. Контроль осуществляется распорядителем в течении всего рассматриваемого периода. По мере реализации отдельных позиций протокола в соответствии с принятой процедурой взаимных расчетов по техническим условиям оформляются приказы по заводу с соответствующим содержанием.

Четвертый этап — анализ результатов и подведение итогов.

37. После завершения всех запланированных сроков распорядитель подводит итоги реализации работ по протоколу. Оформляются и выполняются соответствующие суммы поощрений.

38. Проводится общий разбор результатов со всеми участниками игры с доведением выводов до каждого из сотрудников бюро.

39. Если принимается решение о проведении нового цикла экспериментального планирования, то уточняются технические условия, участники игры делают соответствующие выводы.

40. Начинается новый цикл.

Проведение игр типа ЭПОС на предприятиях дает большую пользу, особенно на этапе планирования. Работников производства несколько настораживает новизна и необычность предлагаемого метода и интересует законность применения игровых методов и выделение соответствующих сумм *А* поощрительных фондов. Ответом на эти сомнения являются следующие документы:

1. Постановление Государственного Комитета Совета Министров СССР по вопросам труда и заработной платы и Секретариата ВЦСПС от 22 апреля 1965 года № 298/11. В этом постановлении отмечается, что руководителям предприятий совместно с комитетами профсоюзов предоставляется право устанавливать для отдельных участков служб предприятий показатели премирования с учетом конкретных задач, стоящих перед соответствующими подразделениями предприятия.

2. Решения XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 гг. В них сказано, что необходимо обеспечить дальнейшее совершенствование системы планирования и экономического стимулирования производства, повысить научную обоснованность планов, повысить заинтересованность и ответственность предприятий и объединений в деле выработки оптимальных планов, максимально учитывающих возможности интенсивного использования действующих производственных фондов, улучшения организации труда и производства. Необходимо обеспечить более тесную зависимость размеров поощрительных выплат от роста производительности труда, освоения новой техники.

3. Решения XXV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 гг. В них сказано, что надо усилить роль экономических стимулов в росте эффективности производства, повышении качества продукции, ускорении научно-технического прогресса, улучшении использования трудовых ресурсов, повышать заинтересованность коллективов объединений, предприятий и строек в разработке и выполнении планов, наиболее полно учитывающих возможности и резервы производства, усилить зависимость размеров фондов экономического стимулирования, а также премий работников от выполнения плана.

Руководители предприятий по согласованию с комитетом профсоюзов могут вырабатывать и утверждать местные положения о премировании. В частности, они могут разработать и утвердить систему поощрений, связанную с выработкой плановых показателей по лучшему использованию имеющихся ресурсов, т. е. деловая игра ЭПОС, как метод планирования, дающий возможность получения показателей напряженного плана и повышающих эффективность плановых решений, заслуживает одобрения и применения в практике. Такие игры проводились как с учебной целью, так и для практического использования результатов на предприятиях.

Отметим некоторые особенности практического использования таких игр.

В формируемую группу конструкторов обязательно должны входить представители служб, чтобы построение и проведение игры шло грамотно, с правильным отражением производственных процессов. Проводится предварительная подготовка всех предполагаемых участников, детально разъясняются задачи и цели проводимой игры, руководитель и все сотрудники бюро должны сами убедиться в необходимости, своевременности и полезности этого метода, все службы должны быть заинтересованы в проведении игры. Здесь могут оказать большую помощь выступления представителей предприятия — членов конструкторской группы игры — на собраниях всех участников игры.

Все участники игры должны получить подробные правила игры и инструкции. Они должны готовить материал для технических условий ее проведения. Необходимо добиться такого положения, чтобы все участники игры полностью поняли ее суть, овладели правилами, инструкциями, ее движущим механизмом. Для этого проводится несколько учебных циклов игры на условных примерах. После каждого цикла обязательно проводится детальный анализ результатов, вскрываются ошибки, указываются пути их устранения, делается акцент на экономическое содержание игры.

Отдельно проводится подготовка ко второму этапу игры. Сначала этот этап разыгрывается только конструкторами и распорядителем. Это дает распорядителю возможность лучше овладеть принципами обмена ресурсами. Так, например, на практике проводилось 9 учебных циклов. Сначала использовались простые условия, затем они постепенно усложнялись до реальных. Все учебные циклы должен вести распорядитель при помощи представителей конструкторской группы. Количество учебных циклов распорядителя совместно с потребителями составляет около 12. Во время обучения может происходить улучшение организации игры, внедрятся предложения о новых формах документов и т. д.

После обучения первому и второму этапам игры приступают к проведению экспериментальной игры. Для определения конкретных значений параметров взаимодействия проводится сопоставление и анализ текущей производительности труда, показателей за предыдущие периоды в целом по бюро и отдельно по каждому сотруднику.

Рекомендуется размещать группы участников таким образом, чтобы они не мешали друг другу в работе. Поведения участников при проведении учебных и реальных игр значительно отличаются. В учебных играх не обращают внимание на долю a_2^k-фонда поощрения для сотрудников, а в реальных играх сумме a_2^k уделяется большое внимание. Не рекомендуется назначать слишком низкие или слишком высокие суммы a^k. Небольшие суммы a^k вызывают у представителей бюро повышенную настороженность, что затрудняет работу распорядителя. Слишком завышенная сумма a^k, как правило, приводит к аннулированию тура, так как потребители делают слишком низкие предложения.

С целью ослабления психологического давления рекомендуется ограничивать число участников, присутствующих на реализации второго тура: от бюро до двух человек, от распорядителя — до трех. На каждом туре необходимо подводить общий итог полностью по прибыли, экономии, максимальному размеру фонда поощрения, выплаченной сумме. Игру следует проводить до тех пор, пока либо распорядитель не израсходует всю сумму A, либо не будут исчерпаны все резервы у бюро.

Проведенные реальные игры дают высокую эффективность. Как указывается в [20], два цикла учебного варианта игры ЭПОС в 1970 и 1971 гг. на курсах повышения квалификации управленческих работников завода счетных машин в Вильнюсе показали высокую заинтересованность участников в подобных методах решения производственных задач. Изложение материала по деловым играм на курсах, в школах и институтах повышения квалификации руководящих работников всегда вызывает большой интерес. Деловые игры развиваются и сфера их применения расширяется.

Контрольные вопросы и задания к главе 8.

1. Что такое деловая игра?
2. С какой целью проводятся деловые игры?
3. Дайте краткое описание игры «Реформа».
4. Дайте краткое описание игры «ЭПОС».
5. Какое практическое значение имеют разработки и применения деловых игр?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Диффереициальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Блекуэл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. М., ИЛ, 1958.
3. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. М., ИФМЛ, 1961.
4. Воробьев Н. Н. Математическая теория игр. Л., «Знаиие», 1963.
5. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Изд-во Лениигр. ун-та, 1974.
6. Грень Е. Статистические игры и их примеиеиие. М., «Статистика», 1975.
7. Карлии С. Математические методы в теории игр, программироваиии и экономике. М., «Мир», 1964.
8. Крапивии В. Ф. Теоретико-игровые методы сиитеза сложных систем в конфликтиых ситуациях. М., «Советское радио», 1972.
9. Ковалеико А. А. Сбориик задач по теории игр. Львов, «Вища школа», Изд-во при Львов. ун-те, 1974.
10. Крушевский А. В. Элемеиты теории матричных игр. КВИРТУ, 1960.
11. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М., ИЛ, 1961.
12. Мак-Кииси Д. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
13. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экоиомическое поведеиие. М., «Наука», 1970.
14. Оуэн Г. Теория игр. М., «Мир», 1971.
15. Лииейные неравенства и смежные вопросы. (Сборник статей). Под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера. М., ИЛ., 1959.
16. Матричные игры. Под ред. Н. Н. Воробьева. М., Физматгиз, 1961.
17. Позиционные игры. Под ред. Н. Н. Воробьева, И. Н. Врублевской. М., «Наука», 1967.
18. Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н. Н. Воробьева. Физматгиз, 1963.
19. Сыроежин И. М. Очерки теории производственных организаций. М., «Экономика», 1970.
20. Экономическая кибернетика. Под ред. И. М. Сыроежина, ч. 2. Л., 1973 (ЛФЭИ).
21. Колбии В. В., Сыроежин И. М. Анализ деловой игры с применением ЭВМ. Экономика и математические методы, т. 5, вып. 1, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5
Глава 1. Основные определения и положения теории игр
1.1. Участники игры, игроки, стратегии, выигрыши 7
1.2. Классификация игр и общие сведения о методах их решения 10
Глава 2. Матричные игры двух игроков с нулевой суммой
2.1. Определение, примеры и решение матричных игр в чистых стратегиях 14
2.2. Оптимальные смешанные стратегии и их свойства . . . 25
2.3. Игра порядка 2×2 42
2.4. Игры порядка $2 \times n$ и $m \times 2$ 49
2.5. Методы решения матричных игр 55
Глава 3. Позиционные игры
3.1. Понятие позиционной игры и ее нормальной формы . . 68
3.2. Графическое представление позиционной игры . . . 71
3.3. Определение позиционных игр 79
3.4. Позиционные игры с полной информацией 84
3.5. Позиционные игры с идеальной памятью 90
Глава 4. Бесконечные антагонистические игры
4.1. Определение бесконечной антагонистической игры . . 95
4.2. Игры с выпуклыми функциями выигрышей 107
4.3. Сепарабельные (разделимые) игры 114
4.4. Примеры из экономики 127
Глава 5. Игры типа дуэлей 134
Глава 6. Многошаговые игры
6.1. Игры на разорение 142
6.2. Стохастические игры 147
6.3. Дифференциальные игры 153
Глава 7. Игры n лиц
7.1. Бескоалиционные игры 161
7.2. Биматричные игры 169
7.3. Кооперативные игры 174
Глава 8. Деловые игры 200
Список литературы 214

Аркадий Владимирович Крушевский

Теория игр

Редактор Л. П. Онищенко
Обложка художника П. Т. Вишняка
Художественный редактор С. П. Духленко
Технический редактор И. И. Левченко
Корректоры Н. В. Волкова, Т. В. Ковтун

Информ. бланк № 2664

Сдано в набор 27.10. 76 г. Подписано к печати 14 02. 77 г Формат бумаги 60×90^1/$_{16}$. Бумага типографская № 1. 13, 5 печ. л. 13,68 уч.-изд. л. Тираж 10000. Изд. № 3115 БФ 08181. Цена 74 коп. Зак № 6—2853

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев, 54, Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3, в Киевской книжной типографии научной книги, г. Киев, Репина, 4. Зак. 7-391.