Оглавление

Введение

В последней четверти XX века сформировалось новое научное направление - эволюционная теория игр (синонимы – теория коллективного поведения, социобиология), изложению которой посвящены книги Maynard Smith, 1982, Wilson, 1975, Васин, 1989b, Weibull,1996[1].

Эволюционная теория игр (в отличие от классической теории) исследует поведение больших однородных групп, или популяций индивидуумов в типичных, многократно повторяющихся конфликтных ситуациях, причем каждую стратегию применяет множество игроков, а функция выигрыша характеризует успех отдельных стратегий, а не отдельных участников взаимодействия. В то время как классическая теория игр является нормативной и направлена на определение оптимального поведения, эволюционная теория – дескриптивная, она пытается предсказать, какого поведения следует ожидать.

В основе эволюционной теории лежит эволюционный принцип, согласно которому поведение в типичном, многократно повторяющемся взаимодействии представляет собой итог эволюционного процесса формирования поведения. В этом процессе сочетаются повторяющиеся взаимодействия в заданных условиях и изменение распределения участников по стратегиям под влиянием таких факторов, как естественный отбор, адаптация, подражание и другие эволюционные механизмы.

Можно выделить два основных подхода, используемых в эволюционной теории для построения моделей коллективного поведения: оптимизационный и эволюционный.

При оптимизационном подходе эволюционный процесс формирования поведения в явном виде не рассматривается, а выбирается критерий оптимальности (например, равновесие Нэша, решение по доминированию, эволюционно устойчивая стратегия и др.), характеризующий равновесное статическое состояние этого процесса. Исходя из этого критерия и вида функций выигрыша, на множестве возможных распределений по стратегиям формируется экстремальная задача и находится ее решение. Предполагается, что в результате эволюционного процесса сформируется коллективное поведение, соответствующее этому решению.

Основная проблема, возникающая при подобном подходе, состоит в том, как априори указать критерий оптимальности, выделяющий устойчивые состояния эволюционного процесса. Не менее важен во многих случаях и вопрос о выборе функций выигрыша.

Эволюционный подход предполагает непосредственной описание и исследование процесса формирования поведения. Указанный процесс описывается эволюционной моделью в форме динамической системы, определяющей изменения распределений по стратегиям внутри популяций в зависимости от итогов взаимодействия в предшествующие периоды времени. Наиболее перспективным представляется синтез оптимизационного и эволюционного подходов в виде обоснования определенных статических критериев оптимальности как характеризующих притягивающие множества динамических сис-

[1] Любопытно, что появление этого направления под именем психоистории было предсказано известным писателем – фантастом А.Азимовым.

тем, описывающих эволюционных модели. При таком подходе конкретные модели поведения строятся, исходя из обоснованных критериев оптимальности.

В этой книге изложены результаты относительно связи моделей динамики коллективного поведения с теоретико-игровыми принципами оптимальности. В главе I рассматривается модель динамики репликаторов (Replicator Dynamics, см. Dawkins, 1976), описывающая эволюцию поведения в биологической популяции, а также модели адаптивно-подражательного поведения (Васин, Богданов, 2001) для социальных популяций. Показано, что устойчивые состояния этих моделей отвечают известным принципам оптимальности: равновесию Нэша и доминирующему множеству стратегий. В качестве приложения анализируется процесс упорядочения конкуренции в биологических сообществах. Известно (Maynard Smith, 1982), что столкновения животных за различные ресурсы (пищу, жилье, самку и др.) редко приводят к серьезным сражениям с большими потерями. Чаще дело ограничивается демонстрацией внешних признаков, угроз или ритуальной схваткой, после чего один из противников уступает объект конкуренции другому. В разделе 1.3 упорядочение конкуренции объясняется как результат эволюции поведения. При этом показано, что обычно есть несколько потенциально возможных вариантов упорядочения, из которых реализуется лишь один, зависящий от начального состояния сообщества.

Глава II посвящена проблеме эндогенного формирования целевых функций в самовоспроизводящихся популяциях. Проведенный в разделе 1.2 анализ динамики репликаторов, у которых ребенок наследует стратегию родителя (того же пола), показывает, что в процессе эволюции у них вырабатывается поведение, максимизирующее индивидуальную приспособленность (по Дарвину). Эта величина равна сумме рождаемости и выживаемости для индивидуумов с данной стратегией поведения.

В реальных популяциях динамика поведения определяется, как правило, более сложными эволюционными механизмами, включающими подражание, адаптивное изменение стратегий и генетические факторы, связанные с двуполой структурой. Важный результат раздела 2.2 состоит в том, что динамика популяционного поведения остается согласованной с индивидуальной приспособленностью, если репликация является возможным эволюционным механизмом. В качестве обоснования рассматривается модель естественного отбора таких механизмов.

Отмеченные результаты приводят к заключению о том, что индивидуальная приспособленность является эндогенной целевой функцией индивидуумов в любой самовоспроизводящейся популяции. Для многих биологических популяций этот вывод согласуется с эмпирическими данными. Поэтому дарвиновский принцип естественного отбора остается одной из основ эволюционной биологии (“III Congress of the ESEB”, 1991). В то же время хорошо известны примеры поведения общественных насекомых (пчел, муравьев), явно не соответствующего максимизации индивидуальной приспособленности. Такое поведение иногда интерпретируют как альтруизм или кооперацию в отношении других членов семьи. В разделе 2.3 исследуется динамика поведения в популяции, где каждый индивидуум способен различать своих близких родственников среди других членов популяции и соответственно менять стратегию поведения. Показано, что устойчивые формы поведения соответствуют максимизации суммарной приспособленности семьи, в частности, кооперации или альтруизму (в зависимости от характера взаимодействия).

Что касается социальных популяций, или наций, то согласно демографическим данным поведение людей в целом не согласуется с указанными принципами. В частности, во многих европейских странах при внешне благоприятных условиях для воспроизводства происходит заметное сокращение численности коренного населения. В разделе 2.4 обсуждаются особенности эволюции поведения в обществе. Как важнейший фактор, рассматривается наличие разнообразных самовоспроизводящихся систем различной природы (экономических корпораций, государственных институтов, научных и художественных школ и др.), использующих людей для собственного воспроизводства и активно влияющих на динамику социального поведения. Обсуждается роль государства, транснациональных компаний и отдельного индивидуума в репродуктивных процессах.

В главе III изучается важная теоретическая проблема устойчивости смешанных равновесий. Такие равновесия соответствуют неоднородному поведению популяции: индивидуумы, находящиеся в одном и том же состоянии, используют различные стратегии поведения. Важность проблемы определяется тем, что во многих взаимодействиях существуют лишь смешанные равновесия, и только им могут соответствовать устойчивые формы поведения популяции. Однако, в разделе 3.3 установлено, что в общих предположениях относительно динамики поведения смешанное равновесие не может быть асимптотически устойчивым по линейному приближению. Анализ модели динамики репликаторов показал, что смешанные равновесия в общих предположениях не бывают асимптотически устойчивыми для этой модели (Ridzberger, Weibull, 1995). В разделе 3.4 описан класс моделей адаптивно-подражательного поведения (МАПП), для которых справедлив аналогичный результат. В то же время указан другой тип МАПП, соответствующих моделям индивидуальной адаптации, для которых сходимость к смешанному равновесию возможна. Рассмотрены конкретные примеры. В разделе 3.5 рассматривается иная динамическая модель - градиентного типа, известная как «фиктивная игра» (Робинсон, 1961). Для нее сходимость к смешанному равновесию установлена для довольно широкого класса биматричных игр, эквивалентных в определенном смысле антагонистическим играм. Приводятся также новые результаты о динамических процессах, в которых сходимость к смешанному равновесию имеет место при общих предположениях.

Последняя глава этой части рассматривает качественно иной тип динамики поведения – повторяющиеся игры. Такая игра соответствует многократно повторяющемуся конфликту с участием одних и тех же индивидуумов, которые наблюдают поведение партнеров в прошедшие периоды и выбирают свои стратегии с учетом этой информации. Выигрыш каждого участника складывается из выигрышей в отдельных повторениях. Основной результат этой главы – «народная теорема» (Folk theorem) для решений по доминированию – показывает, что поведение в таких конфликтах неустойчиво и может регулироваться с помощью малых штрафов или премий. Точнее, рассмотрим любой исход игры, в котором каждый участник получает выигрыш больше минимаксного (соответствующего ситуации, когда все остальные играют против него). Согласно указанной теореме, существует набор стратегий поведения в повторяющейся игре, который соответствует этому исходу и превращается в решение по строгому доминированию путем малого изменения функций выигрыша. Способ построения такого набора определяется рекурсивно и связан с понятием стратегий наказания: игроки должны реализовывать желательный исход, пока ни один из них не отклонится от данного правила поведения; в случае отклонения они должны играть против игрока, последним нарушившего данное правило, до тех пор, пока он не понесет достаточного наказания за нарушение. Изменение функций выигрыша состоит в том, что в конце игры все участники, кроме «последнего нарушителя», получают (от регулятора) приз порядка максимального выигрыша в одном повторении.

Отметим, что согласно результатам главы I к решению по строгому доминированию сходятся почти все траектории моделей эволюции поведения при очень общих предположениях. Это означает, что регулятор способен с малыми затратами сформировать желательное для него поведение в повторяющейся игре. В разделе 4.3 обсуждается обобщение результата в случае редких случайных ошибок игроков, а также ситуация, когда участники конфликта являются ограниченно рациональными в своем поведении.

Глава 1. Принципы оптимальности и эволюционные модели коллективного поведения

1. Постановка задачи и обзор литературы

В этой главе формализуются описанные во введении оптимизационный и эволюционный подходы к моделированию коллективного поведения. В разделе 2 вводится понятие популяционной игры как статической модели взаимодействия в однородной группе индивидуумов. Это понятие подобно игре в нормальной форме в классической теории, и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности: равновесие Нэша и решения по доминированию, а также вводится понятие эволюционной устойчивой стратегии (ЭУС). Затем рассматриваются модели динамики поведения в популяции и выясняется взаимосвязь устойчивых распределений по стратегиям с упомянутыми принципами оптимальности.

В литературе данный подход был первоначально реализован применительно к модели динамики репликаторов (далее МДР), в которой предполагается, что новые индивидуумы популяции (потомки) наследуют стратегии родителей и сохраняют их в течение всей жизни (Taylor P., Jonker L., 1978; Schuster P., Sigmund K., 1983; Nachbar J., 1990 и др.). Показано, что динамика этой модели согласована с индивидуальной приспособленностью, которая равна сумме средней рождаемости и средней выживаемости особей, использующих данную стратегию. Основные результаты, полученные для данной модели, выражаются следующими утверждениями о связи статических принципов оптимальности с устойчивостью решений МДР.

Любое устойчивое (по Ляпунову) состояние МДР является равновесием Нэша в соответствующей популяционной игре; любое предельное распределение системы является равновесием Нэша в соответствующей популяционной игре, если в начальном распределении присутствуют все стратегии (Семевский Ф.И., Семенов С.М., 1982).

Любая эволюционно устойчивая стратегия (в частности, точка строгого равновесия) популяционной игры является асимптотически устойчивым распределением для МДР (т.е. если начальное распределение по стратегиям в популяции близко к точке строгого равновесия, то со временем в популяции останутся только особи, использующие соответствующую данному строгому равновесию чистую стратегию, а остальные исчезнут (Taylor P., Jonker L., 1978)).

Пусть некоторую стратегию популяционной игры можно исключить по строгому доминированию, тогда доля использующих эту стратегию стремится к нулю на любой траектории динамической модели, если в начальном распределении присутствуют все стратегии (Васин А.А., 1989).

МДР и различные ее модификации хорошо подходят для описания поведения биологических популяций. Динамика поведения в подобных популяциях согласована с функцией индивидуальной приспособленности, поэтому можно считать ее объективной функцией выигрыша в этом случае. Однако для социальных и экономических систем механизмы адаптации и подражания играют зачастую более важную роль, чем механизм естественного отбора, отраженный в модели динамики репликаторов, т. к. под влиянием этих механизмов поведение меняется значительно быстрее. Для описания динамики подобных популяций используются модели адаптивно-подражательного поведения (далее МАПП). В их основе лежит предположение, что индивидуумы в течение жизни могут менять свои стратегии в результате адаптации и подражания более успешным (в смысле величины функции выигрыша) членам популяции. Основными компонентами МАПП являются механизм перехода в адаптивное состояние, в котором индивидуумы пересматривают свои стратегии, механизм выбора альтернативной стратегии для сравнения с текущей и механизм смены стратегии, используемой в данный момент, на альтернативную.

Отдельные математические модели адаптивно-подражательного поведения рассматривались в работах Васин А.А. (1989a), Weibull J. (1996), Bjornerstedt J., Weibull J. (1996). Наша цель в этой главе – выявить связь между статическими принципами оптимальности и устойчивыми решениями для достаточно широких классов МАПП. Изложение следует работе Васин А.А., Богданов А.В., (2002a). В разделе 6 выясняется, при каких параметрах модели (механизмах выбора альтернативной стратегии и условиях замещения текущей стратегии) справедливы аналоги утверждений, приведенных выше для МДР.

В разделах 3 и 5 указанные понятия и результаты обобщаются также для межпопуляционных взаимодействий, в которых участвуют индивидуумы двух и более однородных групп. В качестве примеров рассматриваются случайные столкновения (конкурентные и типа "хищник-жертва"). Выясняется связь между решениями межпопуляционной игры и игры в нормальной форме, описывающей столкновение. В разделе 6 обсуждается явление упорядоченной конкуренции в биологических сообществах (см. общее введение). Описаны возможные способы упорядочения и показано, что каждому из них соответствует устойчивое поведение членов сообщества.

2. Популяционная игра. Статические принципы оптимальности

Моделью однократного взаимодействия индивидуумов внутри популяции в некоторый момент или период времени служит популяционная игра (аналог понятия игры в нормальной форме в классической теории игр). Формально популяционная игра G задается совокупностью

$$G = \left\langle J,\, f_j(\pi,\omega),\, j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \right\rangle, \qquad (1.2.1)$$

где J – множество стратегий участников этой игры, $\pi = (\pi_j)_{j\in J}$ – распределение игроков по стратегиям, $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \ge 0, \sum_{j\in J} \pi_j = 1\}$ – стандартный симплекс, а $f_j(\pi,\omega)$ - выигрыш для игроков, использующих стратегию j, в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды). Для биологических популяций под выигрышем понимают, как правило, приспособленность (т.е. среднее число потомков у индивидуумов, применяющих данную стратегию) или некоторую согласованную с приспособленностью функцию. Исследование модели динамики репликаторов подтверждает правильность такого выбора функции выигрыша. Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. Вопросу о выборе функции выигрыша в популяционной игре посвящена глава 2. В данной главе во всех моделях, кроме МДР, эта функция задана экзогенно.

Рассмотрим основные статические принципы оптимальности, применяемые для изучения популяционных взаимодействий.

Равновесием Нэша для популяционной игры G вида (1.2.1) называется распределение π^*, такое что

$$\forall \omega \in \Omega \ \text{и} \ \forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in Arg \max_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega). \qquad (1.2.2)$$

Пусть функции выигрыша игры G имеют следующий аддитивный вид

$$f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega), \text{ где } a(\pi, \omega) > 0. \qquad (1.2.3)$$

(Т.е. та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω.) Тогда условие (1.2.2) эквивалентно условию (1.2.2'), которое уже не содержит параметра ω:

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in Arg \max_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*) \qquad (1.2.2')$$

Равновесие Нэша, в котором не менее двух стратегий имеют положительные доли π_j, называется смешанным (а иначе чистым).

Если игра описывает взаимодействие в биологической популяции, а функции выигрыша характеризуют приспособленность используемых стратегий, то понятие равновесия Нэша полностью соответствует принципу естественного отбора Ч. Дарвина: в π^* входят с положительными вероятностями (т.е. выживают) лишь наиболее приспособленные при данном распределении стратегии.

Понятие равновесия Нэша введено в работе (Nash J., 1951) и является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако, среди равновесий Нэша бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, более сильные, критерии оптимальности.

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется распределение π^*, такое что

$$\begin{aligned} &\forall \pi \in \Pi, \pi \neq \pi^* \ \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0,1): \\ &\quad f_{\pi^*}\left(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega\right) > f_{\pi}\left(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega\right), \\ &\quad \forall \lambda \in \left(0, \bar{\lambda}(\pi)\right), \forall \omega \in \Omega. \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

Здесь $f_\pi(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ – средний выигрыш смешанной стратегии π, если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π'.

Это понятие оптимальности было введено Мэйнардом Смитом (1982). Очевидно, что любая ЭУС является равновесием Нэша. Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^*, внедряется относительно небольшая группа особей с распределением по стратегиям π. Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^*.

Строгим равновесием для популяционной игры G называется распределение π^*, такое что

$$\exists \varepsilon > 0 \; u \; \exists j \in J : \pi_j^* = 1 \; u \; \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega \qquad (1.2.5)$$

$$f_j\left(\pi^*, \omega\right) \geq f_i\left(\pi^*, \omega\right) + \varepsilon$$

Отметим, что всякое строгое равновесие является ЭУС.

Для функций выигрыша $f(\pi, \omega)$ общего вида равновесий Нэша может не существовать. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности – доминирование, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.

Стратегия j доминирует стратегию i ($j \succeq i$) на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если

$$\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \omega \in \Omega, \forall \pi \in \Pi' \; f_j(\pi, \omega) \geq f_i(\pi, \omega) + \varepsilon, \qquad (1.2.6)$$

т.е. при любом распределении из множества Π' стратегия j обеспечивает больший выигрыш, чем стратегия i.

Множество $J' \subseteq J$ называется доминирующим множеством, если оно может быть получено в результате последовательного исключения доминируемых стратегий, то есть

$$J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \ldots \subset J_1 = J,$$
$$\textit{где } \forall k \in \{1, \ldots, T-1\}, \forall i \in J_k \setminus J_{k+1} \; \exists j \in J_{k+1} : j \succeq i \; \textit{ на } \; \Pi_k, \; (1.2.7)$$
$$\textit{где } \; \Pi_k = \{\pi \in \Pi \mid \pi_j = 0, \forall j \notin J_k\}.$$

Описанная процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.

Если в определениях потребовать $\varepsilon > 0$, то j строго доминирует i ($j \succ i$), а J' называется строго доминирующим множеством.

Понятия доминирования смешанными стратегиями и доминирующего в смешанных стратегиях множества вводятся аналогично, только под выигрышем смешанной стратегии π понимается математическое ожидание $f_\pi(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$. (Более подробно о доминировании см. (Fudenberg D., Tirole J., 1991).)

Случайные парные столкновения. В качестве примера популяционной игры рассмотрим конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (например, пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли α хозяина объекта конкуренции, а другие - в роли β захватчика; J^{α} и J^{β} - множества вариантов поведения, или альтернатив в соответствующих ролях; $\varphi^{\alpha}_{j\alpha\, j\beta}$ и $\varphi^{\beta}_{j\alpha\, j\beta}$ - выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j\alpha \in J^{\alpha}$, а β - $j\beta \in J^{\beta}$. Вероятность столкновения $\lambda(N)$ не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N, φ^{0} - выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения. Стратегией является правило выбора варианта поведения в зависимости от роли. Формально стратегия задается парой $j = (j\alpha, j\beta)$, где $j\alpha \in J^{\alpha}$, а $j\beta \in J^{\beta}$.

Функция $f_j(\pi, N)$ указывает средний выигрыш индивидуумов со стратегией j. Обозначим $p_{\alpha}(\pi)$ и $p_{\beta}(\pi)$ распределения по вариантам поведения в ролях α и β, соответствующие распределению по стратегиям π.

Тогда $p_{j\alpha}(\pi) = \sum\limits_{j\beta} \pi_{j\alpha j\beta}$, $j\alpha \in J^{\alpha}$; $p_{j\beta}(\pi) = \sum\limits_{j\alpha} \pi_{j\alpha j\beta}$, $j\beta \in J^{\beta}$;

для стратегии $i = (i\alpha, i\beta)$

$$f_{i\alpha i\beta}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\varphi^{0} + \frac{1}{2}\lambda(N)\left(\sum_{j\beta} \varphi^{\alpha}_{i\alpha j\beta} p_{j\beta}(\pi) + \sum_{j\alpha} \varphi^{\beta}_{j\alpha j\beta} p_{j\alpha}(\pi) \right)$$

Рассмотрим также случай, когда участники не различают состояния. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив:

$J = J^{\alpha} = J^{\beta}$, $\pi = (\pi_j, j \in J)$ $\quad f_i(\pi) = \sum\limits_{j \in J} \pi_j \varphi_{ij}$.

Отметим, что ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша не зависят от роли, возможна и в предыдущей модели. Однако, как показано ниже, модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются совершенно различными.

Поиск равновесий Нэша и доминирующих множеств популяционной игры в общем случае представляет довольно сложные экстремальные задачи. Для случайных парных столкновений их удается свести к известным задачам вычисления соответствующих решений для биматричных игр. В работах (Maynard Smith J., 1982, Васин, 1987, Васин, 1989) получены следующие результаты:

а) Распределение π является равновесием Нэша игры $G = < J, f_i(\pi) = \sum\limits_{j \in S} \pi_i \varphi_{ij} >$, в которой участники столкновений не различают состояния, в том и только в том случае, если π - симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях в симметричной биматричной игре Г с матрицей $\{\varphi_{ij}\}_{i, j \in J}$, то есть $\forall s \in J \ (\pi_s > 0) \Rightarrow s \in Arg \max\limits_{i} f_i(\pi)$.

б) Распределение π такое, что π_s =1, является строгим равновесием игры G в том и только в том случае, если $\varphi_{ss} > \varphi_{is} \quad \forall i \neq s$, то есть π - строгое симметричное равновесие Г.

в) Стратегия s доминирует стратегию r $(s \succeq r)$ в игре G в том и только в том случае, если $s \succeq r$ в Г , то есть $\varphi_{sj} \geq \varphi_{rj} \quad \forall j \in J$.

г) $\pi^*=\{\pi_{j\alpha j\beta}\}$- равновесие Нэша для асимметричных парных столкновений <=> $(p^a(\pi^*), p^\beta(\pi^*))$ – равновесие Нэша в смешанных стратегиях для биматричной игры Г=$<\varphi^{\alpha}_{j^\alpha j^\beta}, \varphi^{\beta}_{j^\alpha j^\beta}>$.

3. Межпопуляционная игра

Моделью взаимодействия двух популяций в некоторый момент времени служит межпопуляционная игра. Формально эта игра $\overline{G}$ задается совокупностью

$$\overline{G} = \left\langle J^1, J^2, \left(f_j^k(\pi)\right)_{k=1,2}, \pi \in \Pi, j \in J^k \right\rangle, \qquad (1.3.1)$$

где J^k $(k=1,2)$ – множество стратегий членов популяции k, $\pi^k = \left(\pi_j^k\right)_{j\in J^k}$ – распределение игроков популяции k по стратегиям из множества J^k, $\Pi^k = \{\pi^k \mid \pi_j^k \geq 0, \sum_{j\in J^k} \pi_j^k = 1\}$ – стандартный симплекс для J^k, $\pi = \left(\pi^1, \pi^2\right)$, $\Pi = \Pi^1 \times \Pi^2$, а $f_j^k(\pi)$ – выигрыш для игроков популяции k, использующих стратегию j, в зависимости от распределения по стратегиям π.

В качестве примера отметим взаимодействие двух популяций, в котором выигрыш индивидуума одной популяции зависит от его стратегии и от распределения по стратегиям в другой популяции. То есть, индивидуум взаимодействует лишь с членами другой популяции, но не со своей популяцией. Более того, допустим, что зависимость от распределения является линейной:

$$f_i^1(\pi^2) = \sum_{j\in J^2} \varphi_{ij}^1 \pi_j^2, i \in J^1; f_j^2(\pi^1) = \sum_{i\in J^1} \varphi_{ij}^2 \pi_i^1, j \in J^2 \ .$$

Такие соотношения типичны для парных столкновений, в которых индивидуумы сталкиваются с некоторой интенсивностью, зависящей обычно от плотности популяций, но не зависящей от стратегий поведения в столкновении. При этом значения $(\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2)$ характеризуют выигрыши в отдельном парном взаимодействии, где член первой популяции применяет стратегию i, а второй – стратегию j.

Равновесием Нэша для межпопуляционной игры $\overline{G}$ называется распределение π^*, такое что

$$\forall k = 1,2 \ u \ \forall j \in J^k \ (\pi_j^{k*} > 0) \Rightarrow j \in Arg\max_{i\in J^k} f_i^k\left(\pi^*\right) \ . \qquad (1.3.2)$$

Строгим равновесием для межпопуляционной игры $\overline{G}$ называется распределение π^*, такое что

$$\exists \varepsilon > 0 \ u \ \exists j_k \in J^k, k = 1,2 : \pi_{j_k}^* = 1 \ \ u \ \ \forall i \neq j_k, f_{j_k}^k\left(\pi^*\right) \geq f_i^k\left(\pi^*\right) + \varepsilon \, .$$

Стратегия $j \in J^k$ доминирует стратегию $i \in J^k$ ($j \succeq i$) на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если

$$\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \pi \in \Pi' \ f_j^k(\pi) \geq f_i^k(\pi) + \varepsilon., \qquad (1.3.3)$$

Множество $J' \subseteq J$ называется доминирующим множеством, если оно может быть получено в результате последовательного исключения доминируемых стратегий, то есть

$J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \ldots \subset J_1 = J$, где $\forall t \in \{1,\ldots,T\}, J_t = J_t^1 \otimes J_t^2$

$\forall i \in J_t^k \setminus J_{t+1}^k \; \exists j \in J_t^k : j \succeq i$ на Π_t, (1.3.4)

где $\Pi_t = \{(\pi^1,\pi^2) \in \Pi \mid \pi_j^k = 0, \forall j \notin J_t^k, k = 1,2\}$.

Если в определениях потребовать $\varepsilon > 0$, то j строго доминирует i ($j \succ i$), а J' называется строго доминирующим множеством.

Понятия доминирования смешанными стратегиями и доминирующего в смешанных стратегиях множества вводятся аналогично, только под выигрышем смешанной стратегии π^k понимается математическое ожидание

$$f_\pi^k(\pi',\omega) = \sum_{j \in J^k} \pi_j^k f_j^k(\pi',\omega), k = 1,2 .$$

Замечание. Как и в случае внутрипопуляционных игр, понятия равновесия, доминирования и последующие результаты обобщаются для игр, в которых функции выигрыша зависят от других параметров (численностей популяций и/или состояния среды), если эти функции имеют следующий аддитивный вид

$$f_j^k(\pi,\omega) = a^k(\pi,\omega)\bar{f}_j^k(\pi) + b^k(\pi,\omega), \qquad (1.3.5)$$

где $a^k(\pi,\omega) > 0, k = 1,2$.

Для случайных парных столкновений поиск равновесий Нэша и доминирующих множеств удается свести к известным задачам вычисления соответствующих решений для биматричных игр. В работах (Васин А.А., 1989a,b) получены следующие результаты.

а) Распределение (π^1,π^2) является равновесием Нэша игры $\overline{G} = < J^1, J^2, f_i^1(\pi^2) = \sum \varphi_{ij}^1 \pi_j^2, i \in J^1; f_j^2(\pi^1) = \sum \varphi_{ij}^2 \pi_i^1, j \in J >$ в том и только в том случае, если (π^1,π^2) - равновесие Нэша в смешанных стратегиях для биматричной игры Г с матрицами выигрышей $\{\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2\} i \in J^1, j \in J^2$.

б) Распределение π такое, что $\pi_s^1 = \pi_r^2 = 1$, является строгим равновесием игры $\overline{G}$ в том и только в том случае, если $\varphi_{sr}^1 > \varphi_{ir}^1 \quad \forall i \neq s$, $\varphi_{sr}^2 > \varphi_{sj}^2 \quad \forall j \neq r$, то есть π - строгое равновесие Г.

в) $\forall \bar{J}^2 \subset J^2$ стратегия $s \in J^1$ доминирует стратегию r на $\overline{\Pi} = \{\pi \mid \pi_j^2 = 0 \forall j \notin \bar{J}^2\}$ в игре $\overline{G}$ в том и только в том случае, если $s \succeq r$ на $\bar{J}^2$ в Г, то есть $\varphi^1{}_{sj} \geq \varphi^1{}_{rj} \; \forall j \in \overline{J}^2$.

4. Модели динамики поведения. МДР. МАПП. Понятия устойчивости

Широко известная динамическая модель, подтверждающая выбор приспособленности как характеристики успеха стратегии и обосновывающая использование равновесия Нэша для описания устойчивого поведения, – это модель динамики репликаторов (МДР, the replicator dynamics). Различные ее варианты исследовались в работах (Nachbar J., 1990, Hofbauer J., Sigmund K., 1988; Dekel E., Scotchmer

S., 1992; Samuelson L., Zhang J., 1992; Bomze I.M., 1986; Schuster P., Sigmund K., Hofbauer J., 1981 и др.).

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей (того же пола) и сохраняют их в течение всего времени жизни. Дадим строгую математическую формулировку МДР с дискретным временем, следуя (Васин А.А., 1989а). Пусть взаимодействие между индивидуумами популяции в каждый период времени описывается популяционной игрой $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$. Выигрыш $f_j(\pi, N)$ представляет собой сумму средней рождаемости $fer_j(\pi, N)$ и выживаемости $v_j(\pi, N)$ для индивидуумов, использующих стратегию j, если общая численность популяции равна N, а распределение по стратегиям π. Обозначим $N_j(t)$ – число особей, использующих в период t стратегию $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой

$$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t)). \qquad (1.4.1)$$

Таким образом, состояние системы в каждый период полностью характеризуется вектором $\overline{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t)/N(t))_{j \in J}$. Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi, N) = a(\pi, N)\bar{f}_j(\pi)$, из системы (1.13) вытекает автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t)\bar{f}_j(\pi(t)) \Big/ \sum_{i \in J} \pi_i(t)\bar{f}_i(\pi(t)),\ j \in J.$$

Модель адаптивно-подражательного поведения. Другой известной моделью динамики является модель адаптивно-подражательного поведения (МАПП). Различные модификации МАПП исследовались в таких работах как (Васин А.А. 1989, Weibull J., 1996, Bjornerstedt J., Weibull J., 1996) и др. В частности, в (Weibull J., 1996) рассматривается следующая МАПП с непрерывным временем. Пусть популяционная игра $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$ описывает взаимодействие индивидуумов популяции в каждый момент времени. С некоторой интенсивностью $r_j = r_j(f(\pi, N), \pi, N)$, зависящей от текущего распределения игроков по стратегиям π, общей численности популяции N и текущего вектора выигрышей $f(\pi, N)$, игрок, использующий стратегию j, переходит в "адаптивное" состояние, в котором он пересматривает свое поведение. Обозначим $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(f(\pi), \pi)$ вероятность, с которой игрок, использовавший стратегию j и перешедший в адаптивное состояние, изменяет свою стратегию с j на i. Таким образом, уравнения динамики численностей подгрупп популяции, использующих различные чистые стратегии, для описанной МАПП имеют вид:

$$\dot{N}_j = -r_j N_j + \sum_{i \in J} r_i N_i \gamma_{ij}, \quad j \in J. \qquad (1.4.2)$$

Модель адаптивно-подражательного поведения, рассматриваемая в нашей работе, отличается от МАПП (1.4.2), описанной Вейбуллом, конкретизацией механизма смены текущей стратегии на альтернативную. Мы предполагаем, что, находясь в адаптивном состоянии, игрок, использующий стратегию

j, выбирает стратегию i в качестве альтернативной с вероятностью $q_{ji} = q_{ji}(f(\pi),\pi)$. Затем он сравнивает текущую и альтернативную стратегии и, если выбранная для сравнения стратегия i оказывается лучше исходной стратегии j (т.е. дает индивидууму больший выигрыш при данном распределении по стратегиям), то с вероятностью $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(f(\pi),\pi)$ игрок изменяет свою стратегию с j на i. Кроме того, мы рассматриваем автономную модель и считаем общую численность популяции неизменной. Таким образом, уравнения динамики для распределения $\pi(t)$ описанной нами МАПП имеют вид:

$$\dot{\pi}_j = -r_j\pi_j \sum_{i:f_i>f_j} q_{ji}\gamma_{ji} + \sum_{i:f_i<f_j} r_i\pi_i q_{ij}\gamma_{ij}, \quad j \in J. \qquad (1.4.3)$$

Замечание. Далее под МАПП подразумевается система (1.4.3), удовлетворяющая следующим условиям: $r_j \geq 0, \forall j \in J; \quad \gamma_{ji} \geq 0, q_{ji} \geq 0, \forall i, j \in J; \quad \sum_{i\in J} q_{ji} = 1, \forall j \in J.$

Кроме того, пусть функции $r_j, \gamma_{ji}, q_{ji}, f_j$ ($\forall i, j \in J$) удовлетворяют условию Липшица по своим аргументам. Это условие гарантирует существование и единственность решения системы (1.4.3) при любом начальном состоянии $\pi^0 \in \Pi$ (Понтрягин Л.С., 1980). Несложно видеть, что указанные нами условия гарантируют также, что траектория $\pi(t,\pi^0)$ не выходит из множества Π в каждый момент времени t и при любом начальном распределении $\pi^0 \in \Pi$. Это следует из неотрицательности производной $\dot{\pi}_j$ при равенстве нулю доли π_j и из равенства нулю суммы всех производных ($\sum_{j\in J} \dot{\pi}_j = 0$).

Рассмотрим конкретные примеры МАПП.

Пример 1. (Пример МАПП, эквивалентной МДР.)

Пусть интенсивность перехода в адаптивное состояние постоянна, альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания, а вероятность смены текущей стратегии на альтернативную пропорциональна разности соответствующих функций выигрыша. Таким образом, $r_j(f(\pi),\pi) \equiv r$, $q_{ji}(f(\pi),\pi) = \pi_i$, $\gamma_{ji}(f(\pi),\pi) = \gamma \cdot \{f_i(\pi) - f_j(\pi)\}$, и система (1.4.3) принимает вид:

$$\dot{\pi}_j = r\gamma\pi_j \left\{ f_j(\pi) - \sum_{i\in J} \pi_i f_i(\pi) \right\}, \quad j \in J. \qquad (1.4.3')$$

Полученная система (1.4.3') является аналогом автономной непрерывной модели динамики репликаторов. Этот пример был приведен в работе Нахбаром (Nachbar J., 1990).

Пример 2. Альтернативная стратегия выбирается случайным образом (с равными вероятностями) из множества допустимых стратегий, т.е. $q_{ji}(f(\pi),\pi) = 1/|J|$. Уравнения динамики выписываются согласно (1.4.3). Этот пример иллюстрирует механизм индивидуальной адаптации, когда каждому игроку известно все множество доступных стратегий и адаптация происходит независимо от поведения остальных членов популяции.

Пример 3. Выбор альтернативной стратегии происходит следующим образом. В качестве альтернативы выбираются путем случайного подражания любые две стратегии. Затем игрок сравнивает значения функций выигрыша (своей и альтернативных) и останавливает свой выбор на той чистой стратегии, которая дает максимальный выигрыш. Если обе альтернативные стратегии дают равный выигрыш и он больше текущего, то индивидуум выбирает любую из этих стратегий (с равной вероятностью). Уравнения динамики этой модели получаются подстановкой в исходную МАПП следующих выражений для вероятностей выбора альтернативных стратегий: $q_{ji}\left(f(\pi),\pi\right)=\pi_i\left\{2\sum_{l\in J:f_l(\pi)<f_i(\pi)}\pi_l+\sum_{l\in J:f_l(\pi)=f_i(\pi)}\pi_l\right\}$.

Опишем МАПП для межпопуляционной игры $\overline{G}$, аналогичную внутрипопуляционной модели (1.4.3). Обозначим $r_j^k=r_j^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ интенсивность перехода игроков популяции k, использующих стратегию j, в адаптивное состояние; $q_{ji}^k=q_{ji}^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ – вероятность выбрать стратегию i в качестве альтернативной; $\gamma_{ji}^k=\gamma_{ji}^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ – вероятность сменить стратегию j на i, если i лучше исходной стратегии j. Если $f_j^k(\pi)\ge f_i^k(\pi)$, то $\gamma_{ji}^k=0$. Считаем, что численности популяций неизменны. Таким образом, уравнения динамики для распределений $\pi^k(t)$ описанной межпопуляционной МАПП имеют вид:

$$\dot\pi_j^k=-r_j^k\pi_j^k\sum_{i:f_i^k>f_j^k}q_{ji}^k\gamma_{ji}^k+\sum_{i:f_i^k<f_j^k}r_i^k\pi_i^k q_{ij}^k\gamma_{ij}^k,\quad j\in J^k,k=1,2. \qquad (1.4.4)$$

Замечание. Далее под межпопуляционной МАПП формально будем понимать систему (1.4.4), в которой функции $r_j^k,\gamma_{ij}^k,q_{ij}^k,f_j^k$ удовлетворяют условиям:

$$r_j^k\ge 0,\forall j\in J;\;\; \gamma_{ji}^k\ge 0, q_{ji}^k\ge 0,\forall i,j\in J^k;\ \sum_{i\in J}q_{ji}^k=1,$$

$$\forall j\in J^k;\;\; k=1,2.$$

Кроме того, пусть функции $r_j^k,\gamma_{ji}^k,q_{ji}^k,f_j^k$ ($\forall i,j\in J$) удовлетворяют условию Липшица по своим аргументам. Это условие гарантирует существование и единственность решения системы (1.4.4) при любом начальном состоянии $\pi^0\in\Pi$ (Понтрягин Л.С., 1980).

Несложно видеть, что указанные нами условия гарантируют также, что траектория $\pi\left(t,\pi^0\right)$ не выходит из множества Π в каждый момент времени t и при любом начальном распределении $\pi^0\in\Pi$. Это следует из неотрицательности производной $\dot\pi_j^k$ при равенстве нулю доли π_j^k и из равенства нулю суммы всех производных ($\sum_{j\in J^k}\dot\pi_j^k=0$).

Для изучения моделей динамики коллективного поведения вводятся специальные понятия устойчивости и асимптотической устойчивости решения динамической модели, согласованные с понятием устойчивости по Ляпунову. Приведем эти определения, следуя работе (Васин А.А., 1995), для модели динамики общего вида с непрерывным временем, заданной системой

$$\dot x(t)=\Phi(x(t)),\quad \pi(t)=h(x(t)). \qquad (1.4.5)$$

Пусть $\pi\left(t,x^0\right)$ – распределение членов популяции или сообщества по стратегиям в момент времени t, если начальное состояние системы было x^0, а $\pi^0=\pi\left(0,x^0\right)$ – соответствующее распределение по стратегиям в начальный момент времени.

Распределение π^0 называется стационарным для модели динамики (1.4.5), если

$$\exists x^0\in\Omega:\pi\left(t,\pi^0\right)\equiv\pi^0,\forall t\geq 0, \qquad (1.4.6)$$

т.е. существует такое начальное состояние системы, что распределение по стратегиям внутри популяции остается неизменным.

Распределение π^0 называется устойчивым для модели динамики (1.4.5), если оно стационарно и, кроме того,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\pi(t,x)\in \mathrm{O}_\varepsilon\left(\pi^0\right),\forall x\in \mathrm{O}_\delta\left(x^0\right)\bigcap\Omega,\forall t\geq 0, \qquad (1.4.7)$$

т.е. при малых отклонениях начального состояния распределение не "уходит" далеко от исходного.

Распределение π^0 называется асимптотически устойчивым для модели динамики (1.4.5), если оно устойчиво и, кроме того,

$$\exists\delta^0>0:\lim_{t\to\infty}\pi(t,x)=\pi^0,\forall x\in \mathrm{O}_{\delta^0}\left(x^0\right)\bigcap\Omega, \qquad (1.4.8)$$

т.е. при достаточно малых отклонениях от исходного состояния распределение по стратегиям в популяции всегда стремится к π^0.

Для дискретных моделей соответствующие понятия вводятся аналогично.

Заметим, что для автономных моделей, в которых $x=\pi$, данные понятия устойчивости и асимптотической устойчивости сводятся к обычным определениям устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову (Понтрягин Л.С., 1980).

5. Связь устойчивых решений динамических моделей с теоретико-игровыми принципами оптимальности

Теоремы о связи статических принципов оптимальности с устойчивостью решений МДР были получены в различных вариантах в работах (Taylor P., Jonker L., 1978, Семевский Ф.И., Семенов С.М., 1982, Пасеков В.П., 1988, Васин А.А., 1989) и др. Приведем формулировки этих теорем, следуя работам (Васин А.А., 1989, Васин А.А., 1995).

Теорема 1.1* *(о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР).*

Пусть функция приспособленности f_j представима в аддитивном виде (1.2.3). Тогда

1) любое устойчивое распределение π системы (1.4.1) является равновесием Нэша в популяционной игре $G=\left\langle J, f_j(\pi,N), j\in J\right\rangle$;

2) если для некоторой траектории $\left\{\overline{N}(t)\right\}$ начальное распределение $\overline{N}(0)>0$ и $\exists\lim_{t\to\infty}\pi\left(\overline{N}(0),t\right)=\pi^*$, то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры.

Теорема 1.2* *(об асимптотической устойчивости ЭУС).*

Пусть π *- эволюционно устойчивая стратегия для популяционной игры* $G = \left\langle J, f_j(\pi, N), j \in J \right\rangle$. *Тогда* π *– асимптотически устойчивое распределение системы (1.4.1).*

Теорема 1.3* *(о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения).*

Пусть $\bar{J}$ *– строго доминирующее множество стратегий в игре* $G' = \left\langle J, \ln f_j(\pi, N), j \in J \right\rangle$. *Тогда для любого* $j \notin \bar{J}$ *и любого* $\overline{N}(0) > 0$ $\lim_{t\to\infty} \pi_j\left(\overline{N}(0), t\right) = 0$ *на соответствующей траектории системы (1.4.1).*

Отметим, что в случае доминирования чистыми стратегиями Теорема 1.3* справедлива и для стандартной популяционной игры $G = \left\langle J, f_j(\pi, N), j \in J \right\rangle$. Однако в случае доминирования смешанными стратегиями (т.е. распределениями) необходимо рассматривать в качестве функций выигрыша именно логарифмированные приспособленности, т.к. известны примеры (Dekel E., Scotchmer S., 1992), когда доля стратегии, строго доминируемой распределением в игре $G = \left\langle J, f_j(\pi, N), j \in J \right\rangle$, не стремится к нулю на траекториях системы дискретной МДР.

Во многих работах рассматривается непрерывный вариант МДР (Taylor P., Jonker L., 1978, Hofbauer J., Sigmund K., 1988 и др.). В такой МДР предполагается, что процесс изменения численности популяции протекает непрерывно. Функция $f_j(\pi, N)$ выражает удельную интенсивность изменения численности группы особей, применяющих стратегии $j \in J$, а прочие допущения аналогичны дискретному варианту. В результате уравнения динамики принимают вид $\dot{N}_j = N_j f_j(\pi, N)$, а для функций аддитивного вида (1.3) путем замены времени $d\tau = a(\pi, N)dt$ получается автономная система $\dot{\pi}_j = \pi_j\left(\bar{f}_j(\pi) - \sum_{i\in J} \pi_i \bar{f}_i(\pi) \right)$.

Для этих моделей также доказаны аналоги приведенных выше для дискретных моделей утверждений (Weibull J., 1996, Taylor P., Jonker L., 1978, Samuelson L., Zhang J., 1992, Bomze I.J., 1986), причем в теореме 3* вместо G' можно рассматривать игру G.

Дадим обобщение трех теорем, сформулированных выше для модели динамики репликаторов. Эти теоремы устанавливают связь между устойчивыми решениями МАПП и оптимальными стратегиями соответствующих популяционных игр.

Утверждение 1.1. *Любое равновесие Нэша популяционной игры является стационарной точкой МАПП.*

Доказательства этого и последующих утверждений даны в Приложении.

Теорема 1.1 *(о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МАПП).*

Пусть для МАПП выполняются следующие условия 1, 2 и либо условие 3, либо 3':

1) $r_j > 0, \forall j \in J$ *и любого аргумента (интенсивности перехода в адаптивное состояние положительны для всех стратегий);*

2) $\gamma_{ji} = \gamma\left(f_i(\pi) - f_j(\pi)\right), \forall i, j \in J$ *и* $\gamma(x) > 0, \forall x > 0$ *(вероятность смены текущей стратегии на альтернативную является функцией от разности соответствующих значений выигрыша и положительна при положительности аргумента);*

3) $q_{ji} > 0, \forall i \in Arg\max_{i \in J} f_i(\pi), \forall j \in J$ *(вероятность выбора стратегии в качестве альтернативной положительна для любой стратегии, дающей наибольший выигрыш при текущем распределении членов популяции по стратегиям);*

3') $q_{ji} \geq q\pi_i, \forall i \in Arg\max_{i \in J} f_i(\pi), \forall j \in J$ $(q = const > 0)$ *(для любой чистой стратегии, дающей максимальный выигрыш, вероятность выбора этой стратегии в качестве альтернативной не меньше, чем доля в популяции индивидуумов, использующих данную стратегию, умноженная на некоторую положительную константу).*

Тогда

1) любое устойчивое (по Ляпунову) состояние π *динамической системы (1.4.3) является равновесием Нэша в популяционной игре* $G = \left\langle J,\ f_j(\pi), j \in J \right\rangle$*;*

2) если для некоторой траектории $\pi\left(t, \pi^0\right)$ *начальное распределение* $\pi^0 > 0$ *и* $\exists \lim_{t \to \infty} \pi\left(t, \pi^0\right) = \pi$*, то* π *является равновесием Нэша указанной популяционной игры.*

Из Утверждения 1.1 и доказательства Теоремы 1.1 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть для МАПП, заданной системой (1.4.3), выполнены условия 1)-3) Теоремы 1.1. Тогда множества стационарных точек этой модели и равновесий Нэша соответствующей популяционной игры совпадают.

Теорема 1.2 *(об асимптотической устойчивости строгих равновесий).*

Пусть выполнены условия Теоремы 1.1 и π^* *- точка строгого равновесия для популяционной игры* $G = \left\langle J,\ f_j(\pi), j \in J \right\rangle$*. Тогда* π *– асимптотически устойчивое распределение системы (1.4.3) динамики МАПП.*

Теорема 1.3 *(о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения).*

Пусть для МАПП, заданной системой (1.4.3), выполняются условия 1), 2) Теоремы 1.1 и, кроме того,

3) $q_{ji} = \pi_i, \forall i, j \in J$ *(выбор альтернативной стратегии происходит путем случайного подражания).*

4) если $f_j \geq f_i$*, то* $r_j \leq r_i$ *(интенсивность перехода в адаптивное состояние не возрастает при увеличении функции выигрыша);*

5) $\gamma(x)$ *монотонно возрастает по* x *(вероятность смены текущей стратегии на альтернативную монотонна возрастает по разности выигрышей);*

Если при этом $\bar{J} \subseteq J$ *– строго доминирующее множество стратегий в игре* $G = \langle J, f_j(\pi), j \in J \rangle$*, то для любого* $j \notin \bar{J}$ *и любого начального состояния системы* $\pi^0 > 0$ $\exists \lim_{t \to \infty} \pi_j(t, \pi^0) = 0$ *на соответствующей траектории системы динамики МАПП.*

Сформулируем аналоги Теорем 1.1-1.3 для межпопуляционных взаимодействий. Пусть $\pi(t, \pi^0)$ – распределение игроков по стратегиям в момент времени t, если начальное распределение было $\pi^0 = \left(\pi^{1^0}, \pi^{2^0}\right)$.

Теорема 1.1'. *Пусть для МАПП выполняются следующие условия 1), 2), 3) или 1), 2), 3'):*

1) $\exists \varepsilon > 0 : r_j^k > \varepsilon, \forall \pi, \forall j \in J^k, k = 1{,}2$*;*

2) $\gamma_{ji}^k = \gamma\left(f_i^k(\pi) - f_j^k(\pi)\right), \forall i, j \in J^k, k = 1{,}2$ *и* $\gamma(x) > 0, \forall x > 0$*;*

3) $q_{ji}^k > 0, \forall i \in Arg \max_{i \in J^k} f_i^k(\pi), \forall j \in J^k, k = 1{,}2$*;*

3') $\exists \mathrm{q}^\mathrm{k} > 0\; q_{ji}^k \ge q^k \pi_i^k, \forall i \in Arg \max_{i \in J^k} f_i^k(\pi), \forall j \in J^k, k = 1{,}2$

Тогда

1) любое устойчивое состояние π *системы (1.4.4) является равновесием Нэша в межпопуляционной игре* $\overline{G} = \langle J^k, f_j^k(\pi), j \in J^k, k = 1{,}2 \rangle$*;2) если* $\pi^0 = \left(\pi^{1^0}, \pi^{2^0}\right) > 0$ *и* $\exists \lim_{t \to \infty} \pi(t, \pi^0) = \pi$*, то* π *– равновесие Нэша игры* $\overline{G}$.

Теорема 1.2'. *Пусть МАПП удовлетворяет условиям Теоремы 1.1'. Тогда любое строгое равновесие* π *игры* $\overline{G}$ *является асимптотически устойчивым для системы (1.4.4).*

Теорема 1.3'. *Пусть для МАПП выполняются условия 1), 2) Теоремы 1.1' и, кроме того,*

3) $q_{ji}^k = \pi_i^k, \forall i, j \in J^k$.

4) если $f_j^k \ge f_i^k$*, то* $r_j^k \le r_i^k$*;*

5) $\gamma(x)$ *– монотонно возрастает по* x.

Тогда, если $\left(\bar{J}^1, \bar{J}^2\right)$ *– строго доминирующее множество стратегий в игре* $\overline{G}$*, то для любого* $j \notin \bar{J}^k$ *и любого начального состояния* $\pi^0 > 0$ $\exists \lim_{t \to \infty} \pi_j^k(t, \pi^0) = 0$ *на соответствующей траектории системы (1.4.4).*

Доказываются эти теоремы полностью аналогично результатам для внутрипопуляционного взаимодействия.

6. Упорядочение конкуренции и самоорганизация в биологических сообществах

Рассмотрим сначала конкуренцию внутри популяции. В известной модели (Maynard Smith J., 1982) рассматриваются два варианта поведения в конкурентном столкновении: стратегия “ястреба” H (Hauk), который всеми силами стремится захватить объект конкуренции, и стратегия “голубя” D (Dove), который осторожен и уступает агрессору. Относительно выигрышей предполагается, что $\varphi_{HH} < \varphi_{DH}$ - против агрессора лучше играть осторожно; $\varphi_{HD} > \varphi_{DD}$ - против осторожного соперника лучше играть агрессивно. Используем утверждения а)-г) для анализа этого примера. Рассмотрим симметричное столкновение (игроки не различают ролей). В соответствующей биматричной игре существует единственное симметричное равновесие Нэша, в котором равновесная доля “ястребов” $\tilde{p}_H$ вычисляется из уравнения:

$$\varphi_{HH}\tilde{p}_H + \varphi_{HD}(1-\tilde{p}_H) = \varphi_{DH}\tilde{p}_H + \varphi_{DD}(1-\tilde{p}_H).$$

Более того, это равновесие является ЭУС. Обсудим также случай, когда участники различают состояния захватчика и хозяина, но эти состояния не меняют значения выигрышей, которые определяются только поведением игроков. Пусть пара (p^X,1-p^X) обозначает распределение по вариантам поведения (H,D) в роли “хозяина”, ($p^З$,1-$p^З$) – распределение по вариантам поведение в роли “захватчика”. Согласно утверждению г), если $\pi = \{\pi_{jx,jз}\}$ - равновесие Нэша, то эти распределения образуют равновесие Нэша в биматричной игре:

$$\begin{matrix} \varphi_{HH} & \varphi_{HD} \\ \varphi_{DH} & \varphi_{DD} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \varphi_{HH} & \varphi_{DH} \\ \varphi_{HD} & \varphi_{DD} \end{matrix}$$

В ней существует симметричное равновесие в смешанных стратегиях $p^X = p^З = \tilde{p}_H$, где $\tilde{p}_H$ - равновесная доля “ястребов” в модели без ролей. Отметим, что этому равновесию отвечает целый отрезок равновесных распределений π в популяционной игре. Кроме того, существуют два строгих равновесия в чистых стратегиях:

1) Все “хозяева” ведут себя как “ястребы”, все “захватчики” ведут себя как ”голуби”.
2) Все “хозяева” ведут себя как “голуби”, все “захватчики” ведут себя как “ястребы”.

Эти состояния равновесия в чистых стратегиях называются состояниями упорядоченной конкуренции, так как в них нет жестких столкновений и объект достается индивидууму в зависимости от роли.

Следуя (Maynard Smith J., 1982, Васин А.А., 1987) рассмотрим модель межпопуляционных конкурентных столкновений с двумя стратегиями для каждой популяции: $J^1 = J^2 = \{H, D\}$. Как и выше, относительно выигрышей предполагается, что $\varphi^1_{HH} < \varphi^1_{DH}$, $\varphi^2_{HH} < \varphi^2_{HD}$ - против агрессора лучше играть осторожно; $\varphi^1_{HD} > \varphi^1_{DD}$, $\varphi^2_{DH} > \varphi^2_{DD}$ - против осторожного соперника лучше играть агрессивно.

Согласно утверждениям а)-в) в этой игре существует два строгих равновесия : 1) все члены первой популяции ведут себя как ястребы, все члены второй популяции ведут себя как голуби; 2) обратная ситуация.

Таким образом, в этих равновесиях конкуренция упорядочивается по популяционным признакам. Существует также равновесие в смешанных стратегиях, в котором доли ястребов определяются из уравнений

$$\varphi^1_{HH}\tilde{p}^2_H + \varphi^1_{HD}(1-\tilde{p}^2_H) = \varphi^1_{DH}\tilde{p}^2_H + \varphi^1_{DD}(1-\tilde{p}^2_H),$$

$$\varphi^2_{HH}\tilde{p}^1_H + \varphi^2_{DH}(1-\tilde{p}^1_H) = \varphi^2_{HD}\tilde{p}^1_H + \varphi^2_{DD}(1-\tilde{p}^1_H),$$

то есть упорядочения конкуренции не происходит. В каждой популяции часть игроков применяет стратегию ястреба, а остальные стратегию голубя.

В (Васин А.А., 1987) исследована модель, в которой индивидуумы в момент столкновения различаются по ролям: обнаруживший объект конкуренции первым выступает в роли хозяина, а его соперник – в роли захватчика. Показано, что в этом случае существует 4 строгих равновесия, два из которых соответствуют упорядочению конкуренции по популяционному признаку (одна популяция доминирует над другой), а в двух других упорядочение связано с ролями: «хозяева» доминируют над «захватчиками», либо наоборот.

Другой важный случай парных столкновений – это взаимодействия типа “хищник-жертва”. В них выигрыш члена первой популяции (хищника) пропорционален проигрышу столкнувшегося с ним члена второй популяции (жертвы): $\varphi^1_{ij} = -\lambda\varphi^2_{ij}$. Другая характерная особенность этого взаимодействия: против любой стратегии хищника i существует успешная стратегия жертвы $j(i)$, такая что $\varphi^1_{ij(i)} < 0$; и, наоборот, для данной стратегии жертвы j найдется эффективная стратегия хищника $i(j)$, для которой $\varphi^1_{i(j)j} > 0$. Очевидно, что в этих условиях не существует равновесий в чистых стратегиях. Смешанное равновесие представляет собой седловую точку функции $\sum_{i,j}\pi^1_i\varphi^1_{ij}\pi^2_j$ и, как правило, единственно.

7. Заключение

В классической теории игр равновесие Нэша и решение по доминированию рассматриваются с точки зрения рационального принятия решений участниками конфликтных ситуаций. Такая интерпретация предполагает полную информированность всех участников о множестве стратегий и функциях выигрыша, а также веру каждого участника в то, что партнеры придерживаются аналогичных принципов принятия решений. Очевидно, что в реальных взаимодействиях эти предположения обычно не выполняются.

Полученные выше результаты показывают, что сходимость к равновесию Нэша и исключение доминируемых стратегий в определенных условиях вытекают из общих свойств эволюционных или адаптивно-подражательных механизмов формирования поведения. При этом не требуется ни полной информированности, ни особой рациональности в выборе стратегий: достаточно знать величины выигрышей для текущей стратегии поведения и выбранной альтернативы.

Эволюционные модели раскрывают также следующее важное свойство реального поведения: зависимость от предыстории. Так, в рассмотренных примерах конкурентных столкновений существует несколько состояний строгого равновесия, соответствующих различным способам упорядочения конкуренции. Согласно теореме 1.2, каждое из них является асимптотически устойчивым в соответствующих условиях. Какой способ упорядочения реализуется, зависит от начального состояния модели.

Заметим, что изложенные результаты не дают полного ответа на вопрос об устойчивости смешанных равновесий. В частности, это относится к конкурентным столкновениям, где индивидуумы различают роли хозяина и захватчика, межпопуляционной конкуренции и отношениям "хищник-жертва". Проблема устойчивости смешанных равновесий рассматривается в главе 3.

Сопоставляя полученные результаты с другими исследованиями в данной области, отметим следующее. В работе (Weibull J., 1996) рассмотрены примеры МАПП, относящихся к классу монотонных динамических моделей. Модель динамики называется монотонной относительно функций выигрыша $f_j, j \in J$, если она представима в виде $\dot{\pi}_j = \pi_j g_j(\pi), j \in J$, причем выполнено условие

$$g_j(\pi) > g_i(\pi) \Leftrightarrow f_i(\pi) > f_j(\pi), \forall i, j \in J, \forall \pi \in \Pi .$$

Для монотонных моделей динамики (частным случаем которых является и МДР) справедливы аналоги Теорем 1.1-1.3 (Weibull J., 1996, Samuelson L., Zhang J., 1992). Однако Теоремы 1.1 и 1.2 применимы к более широкому классу адаптивно-подражательных моделей, чем монотонные МАПП. В частности, МАПП в Примерах 2 и 3 не являются в общем случае монотонными динамиками, однако Теоремы 1.1 и 1.2 применимы и к таким моделям.

8. Приложение

Доказательство утверждения 1.1.

Пусть π – равновесие Нэша. Тогда $\forall j \in J: \sum_{i: f_i < f_j} \pi_i r_i q_{ij} \gamma_{ij} = 0$, т.к., если $f_i < f_j$, то $i \notin \underset{k \in J}{Arg\max} f_k(\pi) \Rightarrow \pi_i = 0$;

$\sum_{i: f_i > f_j} \pi_j r_j q_{ji} \gamma_{ji} = 0$,т.к., если $f_i > f_j$, то

либо $j \notin \underset{k \in J}{Arg\max} f_k(\pi) \Rightarrow \pi_j = 0$,

либо $j \in \underset{k \in J}{Arg\max} f_k(\pi) \Rightarrow \{i : f_i > f_j\} = \phi$.

Следовательно $\dot{\pi}_j = 0, \forall j \in J$. □

Доказательство теоремы 1.1. Докажем первую часть теоремы методом "от противного".

Пусть π^*– устойчивое решение (1.4.3), но не является равновесием Нэша. Обозначим $J^* = \underset{j \in J}{Arg\max} f_j(\pi^*)$. Тогда $\exists j \notin J^* : \pi_j^* > 0, \forall j^* \in J^*$

$$\{i : f_i > f_{j^*}\} = \phi; \{i : f_i < f_{j^*}\} \neq \phi;, \text{т.к. } j \in \{i : f_i < f_{j^*}\}.$$

При подстановке в систему (1.4.3), исходя из условий теоремы 1), 2), 3) и выбора j и j^*, получаем: $\dot{\pi}^*_{j^*} = \sum\limits_{i: f_i < f_{j^*}} \pi^*_i r_i q_{ij^*} \gamma_{ij^*}$. Следовательно, распределение π^* не является стационарным, что противоречит нашему предположению, что π^* – устойчивое решение системы (1.4.3).

Если же справедливо условие 3') и $\exists j^* \in J^* : \pi^*_{j^*} > 0$, то доказательство аналогично данному.

Рассмотрим случай, когда $\pi^*_{j^*} = 0, \forall j^* \in J^*$.

Тогда $\sum\limits_{j^* \in J^*} \pi^*_{j^*} = 0$. Определим функцию $g(\pi) = \min\limits_{j \in J^*} f_j(\pi) - \max\limits_{j \in J \setminus J^*} f_j(\pi)$. Выберем $\alpha > 0 : g(\pi^*) > \alpha$ (это возможно по определению множества J^*). В силу непрерывности функции $f_j(\pi)$ $\exists \varepsilon > 0 : g(\pi) \geq \alpha, \forall \pi \in \mathrm{O}_\varepsilon(\pi^*) \bigcap \Pi$.

Если π^* – устойчивая точка, то

$\exists \delta > 0 : \forall \pi^0 \in \mathrm{O}_\delta(\pi^*) \bigcap \mathrm{O}_\varepsilon(\pi^*) \bigcap \Pi \quad \pi(t, \pi^0) \in \mathrm{O}_\varepsilon(\pi^*), \forall t \geq 0$.

Однако, в окрестности $\mathrm{O}_\varepsilon(\pi^*)$ оттока членов популяции, использующих стратегии из J^*, в те подгруппы, где применяются стратегии из $J \setminus J^*$, не происходит. Более того, $\sum\limits_{j \in J^*} \dot{\pi}_j(t, \pi^0) = \sum\limits_{i \in J \setminus J^*} \left\{ \pi_i r_i \sum\limits_{j \in J^*} \{ q_{ij} \gamma(f_j(\pi) - f_i(\pi)) \} \right\} \geq qr\overline{p} \sum\limits_{i \in J \setminus J^*} \pi_i \cdot \sum\limits_{j \in J^*} \pi_j, \forall \pi$, откуда $\left(\ln\left(\sum\limits_{j \in J^*} \pi_j \right) \right)' \geq c > 0$, где $c = qr \cdot \min\limits_{i,j,\pi}(p(f_j(\pi) - f_i(\pi))) \min\limits_{\pi} \sum\limits_{i \cup J \setminus J^*} \pi_i$. Таким образом, если $\sum\limits_{j \in J^*} \pi^0_j$, то за конечное время траектория $\pi(t, a^0)$ покинет окрестность $O_\varepsilon(\pi^*)$, что противоречит устойчивости точки π^*.

Вторая часть утверждения доказывается аналогично предыдущей с использованием того факта, что любое предельное распределение динамической системы является стационарным. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть j^* – соответствующая оптимальная чистая стратегия, т.е. $\pi^*_{j^*} = 1$. Выберем $\alpha > 0 : f_{j^*}(\pi^*) - f_i(\pi^*) > \alpha, \forall i \neq j^*$. В силу непрерывности $f_j(\pi)$, $\exists \delta > 0$: $f_{j^*}(\pi) - f_i(\pi) \geq \varepsilon, \forall i \neq j^*, \forall \pi \in \mathrm{O}_\delta(\pi^*) = \{\pi \in \Pi \mid \pi_{j^*} > 1 - \delta\}$.

Аналогично доказательству теоремы 1.1 $\dot{\pi}_{j^*} = \sum\limits_{i \neq j} \pi_i r_i q_{ij^*} \gamma_{ij^*} > c \sum\limits_{i \neq j^*} \pi_i > 0, \forall \pi \in \mathrm{O}_\delta(\pi^*) \setminus \{\pi^*\}$. Следовательно, доля π_{j^*} возрастает и стремится к 1(поэтому $\pi(t, \pi^0) \in \overline{\mathrm{O}}_\delta(\pi^*)$, $\forall t \geq 0$, $\pi^0 \in \overline{\mathrm{O}}_\delta(\pi^*)$). □

Доказательство теоремы 1.3. Рассмотрим случай доминирования чистыми стратегиями. Подставим $q_{ij} = \pi_j$ в систему (1.4.3):

$$\dot{\pi}_j = -r_j \pi_j \sum_{i: f_i > f_j} \pi_i \gamma_{ji} + \sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i \pi_j \gamma_{ij} \Rightarrow$$

$$\left(\ln \pi_j\right)' = \dot{\pi}_j / \pi_j = -r_j \sum_{i: f_i > f_j} \pi_i \gamma_{ji} + \sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i \gamma_{ij}$$

Шаг 1) Пусть $i \succ j$ на множестве всех допустимых распределений $\Pi = \Pi(J)$.

Для любого $\pi^0 > 0$ (т.е. $\pi^0 \in \operatorname{int}\Pi$) рассмотрим соотношение $\ln\left(\pi_i\left(t, \pi^0\right) / \pi_j\left(t, \pi^0\right)\right)$:

$\left(\ln\left(\pi_i / \pi_j\right)\right)' \overset{(1.4.1)}{=} \underbrace{\left\{ r_j \sum_{l: f_l > f_j} \gamma_{jl} \pi_l - r_i \sum_{l: f_l > f_i} \gamma_{il} \pi_l \right\}}_{S^1(\pi)} + \underbrace{\left\{ \sum_{l: f_l < f_i} r_l \gamma_{li} \pi_l - \sum_{l: f_l < f_j} r_l \gamma_{lj} \pi_l \right\}}_{S^2(\pi)}$. Для любого $\pi \in \Pi$ выражение в правой части положительное, поскольку $r_i \le r_j$ по условию 4; ($f_i(\pi) > f_j(\pi)) \Rightarrow \gamma_{jl} > \gamma_{il}$ и $\gamma_{li} > \gamma_{lj}$ по условию 5 и $\{l : f_l > f_i\} \subset \{l : f_l > f_j\}$, $\{l : f_l < f_i\} \subset \{l : f_l < f_j\}$.

$\exists \delta > 0 : \left(\ln\left(\pi_i / \pi_j\right)\right)' \ge \delta \Rightarrow \pi_i / \pi_j \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \pi_j \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, т.к. величина π_i ограничена.

Шаг 2) Пусть $i^1 \succ j^1$ на Π а $i \succ j$ на $\Pi^2 = \Pi\left(J \setminus \left\{j^1\right\}\right)$, т.е. $f_i(\pi) - f_j(\pi) > \varepsilon, \forall \pi : \pi_{j^1} = 0$. В силу непрерывности f $\exists \delta > 0 : f_i(\pi) - f_j(\pi) > \varepsilon, \forall \pi : \pi_{j^1} < \delta$.

Согласно шагу 1), $\pi_{j^1} \underset{t \to +\infty}{\to} 0 \Rightarrow \exists\ T : \forall t \ge T\ \pi_{j^1}(t) < \delta \Rightarrow i \succ j$ *на* $\Pi(t) = \left\{\pi = \pi\left(t, \pi^0\right), \forall \pi^0 \in \Pi\right\}$.

Оставшаяся часть доказательства шага 2 повторяет доказательство шага 1. Для стратегий, исключенных на последующих шагах, доказательство проводится по индукции. В случае доминирования стратегии j смешанной стратегией $\lambda = \left(\lambda_i\right)_{i \in \bar{J}}$ доказательство проводится аналогично, с заменой $\ln\left(\pi_i / \pi_j\right)$ на $\ln\left(\prod_{i \in \bar{J}} \pi_i^{\lambda_i} \Big/ \pi_j\right)$. □

Глава 2. Формирование целевых функций и воспроизводство популяций

1.Введение. Приспособленность как эндогенная мера выигрыша в популяции репликаторов

Понятие целевых функций (функций полезности или выигрыша) играет важнейшую роль в экономике, социологии, теории игр и других дисциплинах, касающихся поведения людей. Рациональное поведение индивидуума связывается с максимизацией соответствующей функции. Например, в основной теоретико-игровой модели – игре в нормальной форме – каждый участник, или игрок характеризуется множеством стратегий и экзогенно заданной функцией выигрыша. Он независимо назначает свою стратегию, которая влияет не только на его выигрыш, но и на выигрыши других участников. Классическая теория игр изучает методы и описывает результаты рационального выбора стратегий. Обычно предполагается, что каждый игрок знает функции выигрыша всех участников. Случай с неполной информацией относительно этих функций также рассматривается, при этом используется байесовский (Fudenberg, Tirole, 1991) и максиминный (Гермейер, 1976) подходы. Отметим, что как и в случае с полной информацией, функции выигрыша предполагаются экзогенно заданными и не меняются.

В приложениях теории игр к экономике и социологии используются принятые в этих областях предположения относительно функций полезности индивидуумов. Проблема заключается в том, что эти стандартные предположения не всегда соответствуют реальности и в то же время существенно влияют на результаты исследований. В частности, типичный современный учебник по экономике исходит из концепции "homo economicus" – "человека экономического". В роли производителя такой субъект стремится максимизировать свою прибыль, а в роли потребителя он хочет увеличить объем собственного потребления. Если модель включает рынок труда, то индивидуальная функция полезности зависит также от рабочего времени и убывает по этому показателю (смотри, например, Myles, 1995).

Недавно в рамках этого подхода проводились исследования российского рынка труда (Slinko, 1999; Friebel, Guriev, 2000). Целью исследований было объяснить выживание в 1990-х годах большого числа государственных предприятий, на которых зарплаты были значительно ниже, чем в частном секторе. В качестве главной причины для низкой мобильности рабочей силы исследователи указывали применявшиеся на этих предприятиях неденежные механизмы распределения. Однако, статистическая достоверность этого объяснения оказалась довольно низкой. Главная причина этого состоит, на мой взгляд, в том, что поведение большой части населения не соответствует стандартным предположениям относительно индивидуальных функций полезности. Некоторые люди рассматривают определенные виды работы как представляющие самостоятельный интерес или общественно важные и готовы выполнять их за меньшую зарплату, чем они могли бы получить на другой работе. Для других индивидуумов наиболее важным стимулом является не абсолютная величина дохода, а его место в общем распределении доходов окружающих их людей. Огромное неравенство доходов в России подавляет трудовую активность таких индивидуумов. Наконец, определенная категория людей ценит свою работу как место общения и относится к коллегам как к некоторому заменителю семьи.

Разумеется, применимость традиционных моделей существенно зависит от конкретной области исследований. Не углубляясь в анализ различных приложений, отметим, что стандартные предположения относительно индивидуальных функций полезности являются сомнительными в моделях политической конкуренции, противоречат известному феномену альтруистического поведения и плохо согласуются с этическими принципами наиболее популярных мировых религий.

Укажем еще один пробел традиционной теории рационального поведения. Все теоретико-игровые принципы оптимальности исходят из следующей парадигмы: в ситуации стратегического выбора индивидуум должен максимизировать свой выигрыш, учитывая возможности и интересы других участников. Однако, социальная практика ставит под сомнение этот стандартный взгляд на принятие решений. Она показывает, что наиболее эффективным путем для достижения собственных целей может быть активное воздействие на функции выигрыша других участников. Типичными примерами поведения, меняющего функции полезности других субъектов, являются "агрессивная" реклама и распространение наркотиков. Конечно, реклама выполняет и чисто информационную функцию. Однако, та агрессивная реклама, с которой мы постоянно сталкиваемся на телевидении и радио, преследует другую цель, а именно: заставить потребителя приобрести товар, который он в отсутствие такой рекламы не стал бы приобретать, даже зная о его существовании. Любопытны результаты статистических исследований: они показывают, что на детей, подростков, значительную часть молодежи реклама оказывает существенное влияние. О ее эффективности свидетельствует многомиллиардный оборот компаний, которые занимаются производством детских игрушек и вкладывают в рекламу очень большие средства. Что касается распространения наркотиков, то известно, что первый раз знакомство с ними происходит случайно, нередко даже вопреки желанию потребителя. Ну, а как меняется целевая функция субъекта после нескольких приемов наркотика – это хорошо известно.

В настоящей главе обсуждаются следующие вопросы: существует ли какая-то естественная функция полезности индивидуума и как ее определить? Если такая функция существует, то почему она подвержена внешним воздействиям и каковы механизмы ее изменения? Для ответа на первый вопрос в разделе 2 мы обратимся к моделям эволюционной теории игр, описывающим процесс эндогенного формирования функций полезности для самовоспроизводящихся популяций. В них каждый новый индивидуум является ребенком взрослого члена популяции, а значения рождаемости и смертности зависят от стратегий поведения. Динамика распределения по стратегиям определяется этими демографическими показателями и эволюционным механизмом. В общем случае такой механизм представляет собой некоторую комбинацию генетического наследования, подражания, обучения и индивидуальной адаптации. Он определяет стратегию при рождении нового индивидуума и ее изменение в течение его жизни. В частности, репликация, или прямое наследование означает, что новорожденный наследует стратегию родителя (того же пола) и не меняет ее до самой смерти.

К самовоспроизводящимся популяциям относятся и человеческие, и животные, и искусственные, например, популяции самовоспроизводящихся автоматов. Основной вывод, к которому приводят модели эволюционной теории игр, заключается в том, что естественные функции полезности индивидуума для самовоспроизводящихся популяций, независимо от их конкретной природы, связаны с воспроизводством. Точнее говоря, любое устойчивое распределение по стратегиям включает лишь такие стратегии, которые доставляют максимум индивидуальной приспособленности, то есть сумме рождаемости и выживаемости членов популяции, использующих данную стратегию. Для МДР соответствующие формальные результаты изложены выше в разделе 1.6. Однако, эндогенная функция выигрыша, определяемая на основе подобной модели, существенно зависит от конкретного эволюционного механизма. Для преодоления этой трудности в разделе 2 исследуется модель естественного отбора эволюционных механизмов. В ней рассматривается сообщество взаимодействующих популяций, различающихся этими механизмами. Анализ модели показывает, что если репликация входит в множество конкурирующих механизмов, то динамика поведения сообщества согласована с индивидуальной приспособленностью стратегий примерно так же, как МДР. Похожий результат получен в работе (Ok, Vega-Redondo, 2001), где исследовалась эволюция индивидуальных предпочтений. В то же время для модели, в которой индивидуум способен различать предпочтение (или функцию выигрыша) своего партнера и менять стратегию в соответствии с этой информацией, получен качественно иной результат. В этом случае стратегии, входящие в устойчивое распределение, максимизируют суммарную приспособленность партнеров.

Однако, предположение относительно наблюдаемости предпочтений является сомнительным, поскольку индивидуум нередко оказывается заинтересован в искажении информации относительно этой характеристики (см. Samuelson, 2003). индивидуум способен надежно распознать предпочтения или эволюционный механизм партнера только в специальных условиях. Один из таких случаев – взаимодействие близких родственников. В разделе 3 рассматривается модель, в которой индивидуум отличает своих близких родственников от чужаков и может выбирать стратегию поведения в зависимости от этого признака. Исследуется вопрос о распространении альтруистического и кооперативного поведения. Я покажу, что такое поведение в отношениях родственников является эволюционно устойчивым, если при этом максимизируется суммарная приспособленность семьи. Будут рассмотрены также факторы, ограничивающие распространение данных форм поведения.

Демографические данные показывают, что поведение в современных социальных популяциях не максимизирует ни индивидуальную, ни групповую приспособленность, хотя эти популяции, очевидно, являются самовоспроизводящимися. В разделе 3 обсуждается, почему упомянутые эволюционные модели и вытекающие из них результаты не приложимы к социальным популяциям. Наиболее важной причиной является сложность социального поведения, в силу которой репликация стратегий поведения является практически невозможной. Обсуждаются механизмы, позволяющие влиять на индивидуальное поведение, и выясняется, кто способен менять целевые функции индивидуумов. В этой связи вводится понятие *супуриндивида*: самовоспроизводящегося объекта, который использует человеческую популяцию как ресурс ля собственного воспроизводства и способен влиять на эволюцию поведения в этой популяции. В качестве примера отметим крупные корпорации. В ряде работ (см. Vega-Redondo, 1997) конкуренция между корпорациями рассматривается как эволюционный процесс, однако мне неизвестны исследования относительно влияния корпораций на индивидуальное поведение и функцию предпочтения. Я рассматриваю конкуренцию супериндивидов как важнейший фактор поведения в современном обществе и обсуждаю роль отдельного индивидуума в этом контексте.

2. Модель отбора эволюционных механизмов

Модели эволюционной теории игр (ЭТИ) были изначально разработаны и исследованы применительно к биологическим популяциям (Maynard Smith, 1982), но эти модели также представляют большой интерес с точки зрения социальных систем. В них рассматривается динамика поведения популяции, в которой индивидуумы взаимодействуют друг с другом, причем результаты взаимодействия отражаются в параметрах рождаемости и смертности.

Популяция характеризуется множеством S возможных стратегий. Распределение индивидуумов по стратегиям в данный момент времени задается вектором $\pi = (\pi_s, s \in S)$. Основная модель ЭТИ, динамика репликаторов, предполагает, что индивидуумы различаются только стратегиями поведения, не меняют стратегию в течение жизни, а потомки наследуют стратегию родителей. Если говорить о двуполых популяциях, то в данной модели индивидуумов одного пола следует рассматривать как отдельную популяцию. Известны соответствующие механизмы наследования – генетические, когда стратегия поведения задается генами, сцепленными с половым геном, а также механизмы подражания, когда стратегия определяется путем подражания поведению родителя соответствующего пола. Итог взаимодействия в популяции за данный период времени характеризуется для участников со стратегией s функцией рождаемости $fer_s(\pi,N)$, определяющей среднее число потомков, и функцией выживаемости $v_s(\pi,N)$, определяющей долю выживших в зависимости от распределения π и общей численности популяции N. Обозначим $N_s = \pi_s N$ - численность использующих стратегию s. Тогда динамика численностей $N_s(t), s \in S$, описывается следующей системой:

$$N_s(t+1)=N_s(t)f_s(\pi(t),N(t)), \quad t=1,2,\dots, \qquad (2.2.1)$$

где $f_s(\pi,N)=fer_s(\pi,N)+v_s(\pi,N)$ называется функцией приспособленности стратегии s.

Основной смысл приведенных в разделе 1.5 результатов исследования динамики этой системы состоит в том, что асимптотика поведения в такой популяции согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума. В частности, если при $t \to \infty$ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность. Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то доля худшей стратегии в распределении $\pi(t)$ стремится к 0 при $t \to \infty$. И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

Модель динамики репликаторов предполагает существование специального эволюционного механизма, обеспечивающего прямое наследование стратегий родителей детьми. Возникает следующий вопрос: в какой степени указанные результаты зависят от конкретного эволюционного механизма? Оказывается, что он играет критически важную роль.

В качестве альтернативного примера рассмотрим механизм случайного подражания. Эта модель отличается от динамики репликаторов только в одном отношении: новые индивидуумы не наследуют стратегию родителей, а выбирают в качестве объекта подражания случайного взрослого индивидуума и перенимают его стратегию. При этом динамика описывается уравнениями

$$N_s(t+1) = N_s(t)v_s(t) + \sum_r N_r(t)\, fer_r(t) \frac{N_s(t)v_s(t)}{\sum_r N_r(t)v_r(t)}, \quad s \in S .$$

Заметим, что правая часть может быть представлена в виде: $N_s v_s(t)V(t)$, где $V(t)$ не зависит от стратегии *s*. Нетрудно проверить, что в общих предположениях относительно функции $V(t)$ динамика такой системы согласована с функцией $v_s(t)$ в смысле теорем 1.1-1.3, доказанных для модели динамики репликаторов. Т.е. в данном случае эндогенной функцией полезности оказывается выживаемость, а не приспособленность.

Исходя из предыдущих примеров, может возникнуть впечатление, что мы зашли в тупик, сменив произвол в выборе целевых функций на произвол в выборе эволюционного механизма. Однако, это не так, если принять во внимание, что эволюционные механизмы не являются произвольными. Они тоже подвержены естественному отбору. В природе существует конкуренция эволюционных механизмов, и с течением времени отбираются наиболее эффективные.

Рассмотрим соответствующую модель сообщества нескольких популяций, различающихся только эволюционными механизмами. Индивидуумы всех популяций взаимодействуют между собой и в процессе взаимодействия не различают популяций, т.е. эволюционный механизм индивидуума является ненаблюдаемым параметром. Как и выше, итог взаимодействия для индивидуумов со стратегией *s* характеризуется функциями рождаемости и выживаемости $fer_s(\pi, N), v_s(\pi, N)$, зависящими от общего распределения по стратегиям во всем сообществе и его численности. Множество стратегий *S* и данные функции одинаковы для всех популяций. Обозначим через *L* множество популяций, N_l - численность популяции l, *N* – общую численность сообщества, $\pi^l = \{\pi_s^l, s \in S\}$ - распределение по стратегиям в рамках популяции l. Тогда общее распределение π по стратегиям выражается как $\pi = \sum_l \frac{N^l}{N} \pi^l$. Пусть изменение распределения по стратегиям в популяции l описывается оператором Φ^l, соответствующим эволюционному механизму этой популяции. (Например, в одной популяции – это прямое наследование стратегий, в другой – случайное подражание выжившим и т.п.). Динамика сообщества описывается системой

$$N^l(t+1) = N^l(t) \sum_s \pi_s^l(t) f_s(\pi(t), N(t)), \qquad (2.2.2)$$

$$\pi^l(t+1) = \Phi^l(\pi^k(t), N^k(t), k \in L), \quad l \in L .$$

Теорема 2.1. *Пусть в сообществе существует популяция с механизмом прямого наследования. Тогда для динамики общего распределения* $\pi(t)$ *справедливы следующие аналоги теорем 1.1 и 1.2:*

1) любое устойчивое распределение π *системы (2.2.2) является равновесием Нэша в популяционной игре* $G = \langle S, f_s(\pi, N), s \in S \rangle$*;*

2) если для некоторой траектории $\{\overline{N}(t)\}$ *начальное распределение* $\overline{N}(0) > 0$ *и* $\exists \lim_{t\to\infty} \pi(\overline{N}(0), t) = \pi^*$*, то* π^* *является равновесием Нэша указанной популяционной игры;*

3) пусть π *- строгое равновесие для популяционной игры* G*. Тогда* π *– асимптотически устойчивое распределение системы (2.2.2).*

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Для обобщения теоремы 1.3 об исключении доминируемых стратегий требуются более сильные предположения о разнообразии эволюционных механизмов. Пусть в сообществе есть популяция с эволюционным механизмом Φ^l. Для любой пары стратегий s, r назовем s-r-замещением механизма Φ^l механизм $\Phi^l_{s,r}$ такой, что для стратегий, отличающихся от s,r, доли индивидуумов, использующих эти стратегии, меняются так же, как и при механизме Φ^l, а вместо стратегии s всегда используется стратегия r. Как показано в (Васин А.А., 1995), если для любых s, r, l множество механизмов содержит всевозможные замещения $\Phi^l_{s,r}$, то справедлив аналог теоремы 1.3: всякая исключаемая по строгому доминированию стратегия исчезает со временем, то есть $\pi_s(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, модель отбора эволюционных механизмов подтверждает, что приспособленность является эндогенной функцией полезности для самовоспроизводящихся популяций.

3. О распространении альтруизма и кооперации

Насколько соответствует этот результат реальному поведению? Сначала остановимся на поведении в биологических популяциях. Общее мнение биологов состоит в том, что, в основном, принцип максимизации индивидуальной приспособленности не противоречит реальному поведению (III Congress of the ESEB, 1991). Есть, правда, известные примеры поведения, по-видимому, не соответствующие этому принципу – это кооперативное и альтруистическое поведение. Понятия кооперативного и альтруистического поведения можно пояснить с помощью различных вариантов известной игры “дилемма заключенного” (Оуэн Г., 1974). В этой симметричной игре двух лиц у каждого из игроков есть две стратегии поведения: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). В качестве примера приведем следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{c} \\ К \\ Э \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \;\;К & \;\;\;\;Э \end{array} \\ \begin{pmatrix} (5,5) & (1,6) \\ (6,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}.$$

В общем случае предполагается, что при любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия $(u_{ээ} > u_{кэ}, u_{эк} > u_{кк})$, и в то же время суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно $(u_{кк} > (u_{эк} + u_{кэ})/2, u_{кк} > u_{ээ})$. В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая соответствует эгоистичному поведению и является также решением по доминированию. Известно, однако, что в реальности игроки в подобных ситуациях часто ведут себя кооперативно.

Еще в большей степени отклоняется от максимизации индивидуальной приспособленности альтруистическое поведение. Рассмотрим следующую матрицу выигрышей (А – альтруистическое поведение, Э – эгоистичное поведение):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & Э \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ Э \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (1,10) \\ (10,1) & (2,2) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Здесь альтруистическое поведение одного из партнеров в сочетании с эгоистичным поведением другого соответствует максимизации суммарной приспособленности. При этом альтруист получает меньше своего гарантированного выигрыша, который он мог бы получить в равновесии Нэша. В качестве примера кооперации в биологических популяциях отметим поведение животных, которые по очереди выполняют функцию сторожа. Сторож стоит на страже и подает сигнал при появлении хищника. Выгодное отклонение от этого поведения: не следить за хищником и не подавать сигнал или следить за хищником и не подавать сигнал. Дело в том, что подача сигнала привлекает хищника к тому, кто его подал. Если ни один член популяции не будет выполнять функцию сторожа, то все проиграют. Другим примером является совместная охота группы хищников, при этом эгоисты экономят затраты энергии в процессе охоты в ущерб общей эффективности (Акимушкин И., 1985).

Что касается альтруизма, то его примеры наблюдаются в отношениях между родственниками. Альтруизм родителей по отношению к детям – явление достаточно распространенное, оно не противоречит концепции максимизации приспособленности, т.к. она равна сумме рождаемости и выживаемости. И если за счет жертвы индивидуум спасает своих детей, это может быть оптимальным с точки зрения индивидуальной приспособленности. Интересны проявления альтруизма, не связанные с максимизацией индивидуальной приспособленности. Они наблюдаются у общественных насекомых. Это пчелы, муравьи, термиты. В этих популяциях часть индивидуумов свою приспособленность не максимизирует, т.к. потомства они не оставляют, но при этом бесстрашно нападают на любого агрессора и жертвуют собой, защищая семью. Объяснение состоит в том, что индивидуумы, входящие в семьи общественных насекомых, являются близкими родственниками. Недостаток модели прямого наследования состоит в том, что она учитывает только связь “родитель-ребенок” и не учитывает связи типа “брат-сестра”. Учитывая эти связи, можно объяснить распространение альтруистического поведения в смысле максимизации приспособленности группы родственников.

Опишем соответствующую модель. Как и выше, предположим, что взаимодействие в популяции характеризуется множеством стратегий S и функциями приспособленности $f_s(\pi)$, $s \in S$. Но в отличие от предыдущих моделей индивидуум способен различать сибсов, то есть родных братьев или сестер, среди других членов популяции и выбирать стратегию в зависимости от этого признака. Таким образом, полная стратегия (s, s') включает компоненту s, применяемую к сибсам, и s' для прочих индивидуумов. В данный период времени индивидуум с некоторой интенсивностью $\lambda_r \in (0,1)$ взаимодействует с сибсами, а с интенсивностью $1-\lambda_r$ - с остальными индивидуумами из популяции. Общая приспособленность аддитивно зависит от результатов взаимодействия с родственниками и с остальной частью популяции:

$$\overline{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1-\lambda_r) f_{s'}(\pi'),$$

где $f_s^r(s)$ - функция, описывающая результаты взаимодействия с сибсами, π' - распределение по компоненте s'. Предполагается, что все сибсы применяют одинаковые стратегии. Таким образом, взаимодействие характеризуется популяционной игрой

$$\overline{G} = < \overline{S} = \{(s,s') \in S \times S\}, \overline{f}_{s,s'}(\overline{\pi}) = \lambda_r f_s^r(s) + (1-\lambda_r) f_{s'}(\pi') >,$$

где $\overline{\pi}$ - распределение по полным стратегиям.

Теорема 2.2. *Всякая стратегия* (s, s'), *в которой* $s \notin Arg \max_i f_i^r(i)$, *строго доминируется стратегией* (s^*, s'), *где* $s^* \in Arg \max_i f_i\ (i)$. *Распределение* $\overline{\pi}$ *является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех указанных неоптимальных стратегий* $\pi_{ss'} = 0$, *а соответствующее распределение* π' *является равновесием Нэша для игры* $< S, f_{s'}(\pi') >$.

Таким образом, в отношениях типа “дилеммы заключенного” сибсы используют кооперативную стратегию применительно друг к другу. Чтобы объяснить распространение альтруистического поведения, рассмотрим следующую модификацию модели. Если отказаться от предположения об одинаковом поведении сибсов, а считать, что они могут оказаться в разных ролях (например, доминирующей и подчиненной), а стратегия и функция приспособленности могут зависеть от роли, то полная стратегия в отношении родственников задается парой $s = (s_\alpha, s_\beta) \in S \times S$. В результате исключения строго доминируемых стратегий остаются лишь стратегии $s = (s_\alpha^*, s_\beta^*) \to \max_{(s_\alpha, s_\beta)}(f^\alpha(s) + f^\beta(s))$, обеспечивающие максимум суммарной приспособленности. На основании теорем 2.1, 2.2 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях ведет к формированию поведения, максимизирующего суммарную приспособленность сибсов. Хотя в последней модели неявно заключено ограничение на эволюционный механизм, определяющий динамику распределения по стратегиям в отношении родственников, это ограничение не является существенным: любой другой механизм будет проигрывать реализующему оптимальную стратегию s^*, указанную в теореме 2.2. Отметим, что указанные результаты допускают обобщение на отношения кузенов, троюродных родственников и т.д. Действительно, пусть стратегия включает варианты $s1,\ldots,sk$ поведения в отношении родственников различных степеней от 1 до k и вариант s' в отношении прочих индивидуумов, а функция приспособленности представима в виде $f_s(\pi) = \sum \lambda_i f_{si}^i(\pi) + (1-\sum \lambda_i) f_{s'}(\pi')$, где $\lambda_i \in (0,1)$ характеризует интенсивность взаимодействия с родственниками степени *i*. Как и выше, предполагается, что все родственники применяют в отношении друг друга одну и ту же стратегию, что соответствует модели прямого наследования и не ограничивает общности в рамках изложенной модели отбора эволюционных механизмов. Очевидно, что исключение строго доминируемых стратегий ведет к оптимизации родственных отношений: остаются такие стратегии s^*, для которых $si^* \in Arg\max f_{si}^i(si),\ \ i = 1,...,k$.

Как в биологических, так и социальных популяциях с низким уровнем миграции взаимодействующие индивидуумы обычно имеют общих предков по крайней мере в седьмом поколении. Действительно, рассмотрим двух индивидуумов, случайно выбранных из популяции численностью 10^6. Пусть от противного у них нет общих предков в предшествующих семи поколениях. Тогда семь поколений назад у каждого из них было 64 предка каждого пола. Пусть численность популяции в это время составляла 10^4, что соответствует в среднем четырем детям на семью в этих поколениях. Необходимое условие для отсутствия общих предков состоит в том, что ни одна из женщин – предков одного индивидуума не вышла замуж за предка – мужчину другого индивидуума. Вероятность такого события $(1-64/5900)^{129} < 0.1$. Согласно изложенным результатам, следовало бы ожидать повсеместного распространения кооперативного и альтруистического поведения, направленного на максимизацию суммарной приспособленности. Однако реальное поведение зачастую не соответствует принципам “возлюби ближнего своего как самого себя” или “человек человеку друг, товарищ и брат”. Да и в биологических популяциях указанные формы поведения не являются доминирующими. Хорошо известны примеры жестокой конкуренции между близкими родственниками, вплоть до поедания детенышей друг у друга. Одна из причин ограниченного распространения кооперативного поведения – его неустойчивость к внедрению мутантов - эгоистов.

Представим популяцию, в которой выработался принцип кооперативного поведения, т.е. все индивиды используют стратегию s^*, максимизирующую общую приспособленность. Пусть происходит мутация – появляется индивидуум, который максимизирует индивидуальную приспособленность, реализуя $s' \to \max_s f_s(s^*)$. В первом поколении такой индивидуум получит репродуктивное преимущество, т.к. все к нему будут максимально благожелательны, а он будет использовать эгоистичную стратегию. Во втором поколении его потомки будут в относительно менее выгодном положении, поскольку столкнутся друг с другом. В общем случае все будет зависеть от соотношения коэффициентов λ_i . Но обычно доля взаимодействия с внешней средой выше доли взаимодействия с ближайшими родственниками. Таким образом, доля потомков этого индивидуума будет расти в популяции до тех пор, пока доля внутриродственных отношений не станет доминировать. Итак, мы видим, что оптимальная стратегия оказывается неустойчивой к мутациям. Другим фактором, ограничивающим распространение кооперативного поведения, является неспособность многих людей отличить при случайных взаимодействиях дальних родственников от чужаков.

Применительно к социальным популяциям возникает следующая задача. Поскольку для разных наций характерно различное соотношение интенсивностей внутриродственных и внешних взаимодействий, то интересно определить степени альтруизма и кооперации в равновесии Нэша в зависимости от этих параметров и интенсивности мутаций.

Отметим, что проблеме распространения кооперативного и альтруистического поведения посвящено множество работ (см. Axelrod R., 1984 и библиографию этой книги). Например, теория повторяющихся игр объясняет распространение кооперации в повторяющихся конфликтных ситуациях с одними и теми же участниками, исходя из оптимизации индивидуальных функций приспособленности (см. главу 4). Повторяемость дает возможность наказывать тех, кто отклоняется от кооперативного поведения. В результате, с учетом наказаний, оказывается индивидуально выгодно вести себя кооперативно. В рассмотренных выше моделях это не так. И, тем не менее, вырабатывается кооперативное поведение за счет отбора механизмов наследования стратегий.

4. Особенности эволюции поведения в социальных популяциях. Сверхиндивиды. Их воздействие на целевые функции и процессы воспроизводства наций

Если обратиться к реальности, то в современных социальных популяциях поведение не максимизирует ни индивидуальную, ни групповую приспособленность. О России, где условия воспроизводства неблагоприятны в последнее десятилетие, - разговор особый. Возьмем государства социального благосостояния, такие как Швеция или Германия. Там любому новорожденному гражданину, независимо от его социального происхождения, гарантированы условия, обеспечивающие высокую вероятность выживания и нормального биологического развития. Тем не менее, как показывают демографические данные, коренное население в массе пренебрегает благоприятной возможностью для воспроизводства (см. следующую таблицу из «World population prospects», 1996).

Страна, 2000 г.	Швеция	Германия	Россия
ВНП/чел	26210	28280	2680
Рождаемость/1000	10	10	9
Смертность/1000	11	10	14
Численность 1999 г.	8,9	82	147
Численность 2025 г. (прогноз)	9	80	138

Социологический опрос жителей Стокгольма показал, что около 70% взрослого населения не имеют детей и не планируют обзаводиться ими.

Почему же для социальных популяций не работают изложенные выше эволюционные модели? Отметим три фактора, объясняющих такое несоответствие.

а) Наследование стратегий родителей детьми практически невозможно реализовать в социальных популяциях. Стратегии поведения настолько сложны, а среда настолько изменчива, что индивидууму пришлось бы потратить основную часть времени жизни на обучение потомков. Уже на ранних стадиях развития человечества возникло разделение труда и, в частности, институт учителя, специально занимающийся обучением и воспитанием нового поколения (Моисеев Н.Н., 1999). Позднее государство, церковь и другие субъекты общественной жизни осознали роль этого института и эффективно использовали его для формирования желательного поведения.

б) Задача оценки различных стратегий поведения с точки зрения их влияния на приспособленность нередко сложна даже для теоретического анализа. На практике же решения обычно принимаются в условиях ограниченного времени субъектами, не способными провести такую оценку. В ходе биологической эволюции выработались различные механизмы, позволяющие быстро принимать решения, которые в среднем оказываются оптимальными с точки зрения приспособленности.

Одним из таких механизмов является вспомогательная целевая функция удовольствия. Наше предположение состоит в том, что в природе удовольствие и приспособленность, как правило, согласованы между собой: действия, приносящие удовольствие или направленные на его достижение, являются рациональными с точки зрения воспроизводства индивидуума. В частности, добыча и потребление пищи и других ресурсов, как правило, необходимы для воспроизводства, избыточность ресурсов возникает очень редкая. В то же время, абсолютизация этой вспомогательной целевой функции может препятствовать воспроизводству. Известный пример такого рода для экологических систем связан с взаимоотношениями жука ламехузы и некоторых видов муравьев (Акимушкин И., 1985). Муравьи питаются секретом, выделяемым этим жуком. Иногда потребляемый секрет действует на них как наркотик: муравьи выбрасывают из муравейника самку, а на ее место сажают ламехузу и кормят с тем, чтобы получить как можно больше секрета. Через некоторое время муравейник погибает…

Для экосистем этот пример является исключительным. Ситуация в современных человеческих популяциях совсем иная. Множество людей потребляют большие количества алкоголя, табака, пищевых продуктов и других товаров, которые являются вредными или по крайней мере бесполезными с точки зрения воспроизводства. Многие семьи тратят всю жизнь на то, чтобы зарабатывать деньги для такого потребления и в конце концов оставляют одного потомка или вовсе не имеют детей.

в) Другим вспомогательным механизмом, широко используемым при выборе стратегий в группах животных, является механизм подражания лидеру. В природных популяциях этот механизм способствует обучению и позволяет координировать действия членов группы, повышая их приспособленность. В то же время этот механизм создает дополнительную возможность для манипулирования поведением путем выбора подходящего лидера или образца для подражания.

Все упомянутые способы воздействия на поведение (контроль над процессом обучения, использование стремления к удовольствию и механизма подражания) практиковались с глубокой древности. Однако, качественно новая ситуация возникла в связи с развитием СМИ в XX веке. В настоящее время телевидение дает возможность влиять на поведение миллиардов людей, одновременно выступая в роли учителя и создавая образцы для подражания.

Обратимся теперь к вопросу, кто или что воздействует на целевые функции, формируя поведение индивидуумов в социальных популяциях.

В рассмотренных примерах для экосистем мы столкнулись с двумя различными вариантами. В примере с ламехузой манипулятором является индивид другой популяции. Взаимоотношения двух популяций подобны взаимодействию “хищник-жертва” (Вольтерра, 1976), а исход зависит от ряда факторов, включая наличие альтернативных видов жертв для манипуляторов и долю жертв, устойчивых к оказываемому воздействию. В примере с общественными насекомыми поведение индивидуума формируется самовоспроизводящимся супериндивидом – семьей. Подавляя индивидуальное воспроизводство отдельных особей, данный механизм регулирования вместе с тем обеспечивает эффективное воспроизводство супериндивидов и популяции в целом.

Вообще супериндивид, относящийся к некоторой биологической или человеческой популяции, представляет собой самовоспроизводящуюся структуру, включающую в качестве элементов индивидуумов базовой популяции наряду с другими материальными и нематериальными компонентами. Наряду с самовоспроизводящимися супериндивидами, имеющими биологическую природу (семья, род), в социальных популяциях существуют супериндивиды, имеющие социально-экономическую природу (корпорации, научные и художественные школы, общественные и религиозные организации, государственные институты). Вместо размножения путем репликации супериндивид может расти, включая в себя все больше людей и других ресурсов, или деградировать.

При обсуждении поведения в социальных системах в качестве аналога базовой популяции мы рассматриваем население страны (нацию). Со второй половины XX века все большую роль играют супериндивиды, не связанные с отдельными нациями - транснациональные корпорации и различные международные организации. По-видимому, адекватная теория социально-экономического поведения должна отражать процессы взаимодействия и естественного отбора самовоспроизводящихся индивидов различных уровней.

В социальных системах супериндивиды активно влияют на формирование поведения людей с целью обеспечить собственное воспроизводство и рост. Чем интенсивнее специфическая деятельность включенных индивидуумов, тем успешнее развивается супериндивид. Поскольку ресурсы каждого человека ограничены, супериндивид часто ограничивает или подавляет другие формы активности, в частности, индивидуальное воспроизводство.

Исходя из изложенных соображений и результатов, можно сформулировать гипотезу о том, что индивидуальные целевые функции в современном обществе в значительной степени определяются процессами конкуренции между супериндивидуумами: они индуцируют поведение, обеспечивающее воспроизводство и рост соответствующих супериндивидов. Некоторые люди осознают это и сознательно распределяют свое время и энергию на виды деятельности, связанные с воспроизводством семьи, предприятия или учреждения, где они работают, формальных и неформальных организаций, в которые они входят, а также других супериндивидов в сфере их интересов. Соответствующая модель была предложена в работе (Ватель, Гермейер, 1973). В других ситуациях человек не осознает своей роли в эволюционном процессе и действует согласно вспомогательной целевой функции или механизму поведения, сформировавшемуся в этом процессе. Но, как и в предыдущем случае, его активность объективно служит чьему-то воспроизводству.

Нации и связанные с ними супериндивиды сосуществовали сотни и тысячи лет. Ограничение индивидуального воспроизводства части населения вполне может быть полезным для национального роста и развития. Однако, есть признаки того, что в настоящее время взаимодействие принимает иной характер. Во многих европейских странах во внешне благоприятной среде коренное население сокращается с заметной скоростью. Так, согласно прогнозу ООН, к 2050 г. население Испании сократится с 40 до 30 миллионов, а население России уменьшится на 1/3 (см. «UN 2050 population forecast»). Вызывают тревогу миграционные процессы, в ходе которых коренное население замещают иммигранты с совершенно иной культурой и системой ценностей. В ряде стран, прежде всего в республиках бывшей Югославии, эти процессы уже привели к вооруженным конфликтам с большими жертвами.

Остановимся на демографической ситуации в России. С 1994 по 2003 г. «естественная» убыль населения (без учета миграционных процессов) составляет около 1 млн. человек в год. Резкий скачок смертности произошел в период с 1990 до 1994 г.: общая смертность выросла с 11 до 15.7 (на тысячу человек), при этом смертность от несчастных случаев увеличилась в 1.9 раза, от отравлений некачественными продуктами и алкоголем – в 3.5 раза, от убийств – в 2.3 раза, самоубийств – в 1.7 раза, смертность от неточно обозначенных состояний (по неизвестным причинам) – в 3 раза. Эти цифры показывают, что государство стало значительно хуже выполнять функции по сохранению населения. Фактически ликвидирована система охраны труда, практически никто не несет ответственности за организацию рискованных работ, за завоз в широком масштабе некачественных пищевых продуктов, алкоголя. Неэффективно работают правоохранительные органы и система здравоохранения. В то же время происходил и продолжается массовый вывоз капитала из страны.

Весьма актуальной проблемой является анализ роли национальных государств, транснациональных компаний и других супериндивидов в указанных процессах.

5. Приложение

Доказательство теоремы 2.1. Покажем, что из сходимости $\pi(t)$ к $\overline{\pi}$ следует, что $\overline{\pi}$ - равновесие Нэша. Пусть это не так. Тогда с положительной долей в распределение $\overline{\pi}$ входит неоптимальная стратегия $s \notin Arg \max_i \overline{f}_i(\overline{\pi})$. Рассмотрим окрестность $\overline{\pi}$. В силу непрерывности f_i в достаточно малой окрестности $O_\delta(\overline{\pi})$ выигрыш стратегии s по-прежнему строго меньше, чем для любой оптимальной стратегии $r \in Arg \max_i \overline{f}_i(\overline{\pi})$. Более того, $\overline{f}_r(\pi) > \overline{f}_d(\pi)$ при $\pi \in O_\delta(\overline{\pi})$, если $d_s > \overline{\pi}_s - \delta$, в частности, для любого $d \in O_\delta(\overline{\pi})$. Возьмем популяцию, которая использует динамку репликаторов в качестве эволюционного механизма и тех индивидуумов, которые используют стратегию r, являющуюся оптимальным ответом на $\overline{\pi}$. Скорость роста этой группы выше средней скорости роста для всего сообщества, пока мы находимся в окрестности $O_\delta(\overline{\pi})$. Следовательно, доля данной группы во всем сообществе будет расти, пока распределение не выйдет из данной окрестности. Получили противоречие с тем, что $\overline{\pi}$ - предельная точка для положительного начального распределения по популяциям и стратегиям Аналогично проверяются остальные утверждения. □

Глава 3. Проблема устойчивости смешанных равновесий

1. Постановка проблемы

Важной проблемой эволюционной теории игр является проблема устойчивости смешанных равновесий, т. е. распределений по стратегиям, в которых более одной чистой стратегии используется с положительной вероятностью. Эта проблема возникает для межпопуляционных взаимодействий, в которых значение выигрыша для индивидуумов одной популяции зависит от распределения по стратегиям в другой популяции. Примером таких отношений в биологических популяциях является взаимодействие хищников и жертв, в социальных системах – отношение контролеров и контролируемых, а также иные отношения, в которых взаимодействие носит характер случайных парных столкновений индивидуумов двух групп. Подобные взаимодействия моделируются межпопуляционной игрой (описание этой игры приведено выше в разделе 1.3). Как и для внутрипопуляционных игр, существует тесная взаимосвязь между устойчивыми состояниями динамических моделей, связанных с этими играми, и их решениями: точками равновесия Нэша и доминирующими множествами стратегий (см. раздел 1.5). Проблема устойчивости смешанных равновесий возникает в случае, когда выигрыш одной популяции зависит лишь от распределения по стратегиям в другой популяции (и не зависит от поведения первой популяции), и наоборот. Как доказано Сэлтоном, для таких игр смешанные равновесия Нэша никогда не являются эволюционно устойчивыми, а чистых равновесий Нэша может не существовать. Таким образом, не работают достаточные условия устойчивости, указанные выше.

В данной главе исследуется проблема асимптотической устойчивости смешанных равновесий для МАПП. Эти модели отображают динамику поведения в социальных популяциях.

Ниже рассматриваются различные подходы к анализу устойчивости смешанных равновесий в моделях д. к. п.: исследование по линейному приближению (раздел 3), построение функции Ляпунова и метод, основанный на теореме Лиувилля (раздел 4). Результаты раздела 3 показывают, что нетривиальное смешанное равновесие асимптотически неустойчиво по линейному приближению, т. е. Re $\lambda \geq 0$ для некоторого собственного значения λ якобиана в этой точке. Первоначально данное свойство было установлено для МДР двух популяций, участвующих в случайных парных столкновениях (Schuster и др., 1981). Ниже (следуя работе Vasin, 1999a) установлено, что это свойство присуще широкому классу непрерывных эволюционных динамик. Важным свойством обсуждаемых систем является то, что каждое равновесие Нэша любой модели взаимодействия будет их неподвижной точкой. Эти системы называются согласованными с равновесием Нэша, или кратко *Н*-согласованными системами. Например, каждая монотонная система, обсуждаемая в (Nackbar, 1990; Samuelson, 1988), является *Н*-согласованной, если ее правая часть гладкая. Более того, будет показано, что из линейной нестабильности (Re $\lambda>0$) равновесия автономной *Н*-согласованной системы следует нестабильность по Ляпунову для всех соответствующих неавтономных систем.

В работе Ritzberger, Weibull (1995) для МДР доказано более сильное утверждение об отсутствии асимптотически устойчивых равновесий. Доказательство основано на теореме Лиувилля о выражении производной объема, меняющегося вдоль траектории системы дифференциальных уравнений, через дивергенцию правой части системы. В этой работе показано, что заменой времени МДР приводиться к системе с нулевой дивергенцией. При этом любой объем остается постоянным и не может существовать асимптотически устойчивых состояний. В разделе 4 описан класс МАПП, для которых справедлив аналогичный результат. Основная особенность этих моделей – выбор альтернативной стратегии путем случайного подражания. В то же время указан другой тип МАПП, соответствующих моделям индивидуальной адаптации, для которых сходимость к смешанному равновесию возможна. В разделе 5 рассматриваются динамические модели типа процесса фиктивного разыгрывания (Робинсон, 1961). Сходимость к смешанному равновесию установлена для довольно широкого класса биматричных игр, которые можно привести к антагонистическим путем известного линейного преобразования матриц выигрышей, сохраняющего равновесия Нэша. Рассматриваются также процессы более общего вида, в которых каждый игрок строит на основании предыстории аппроксимацию производной смешанной стратегии партнера. Наилучший ответ выбирается для ожидаемой будущей стратегии. Приводится результаты, полученные в работе Shamma, Arslan (2003), согласно которым для таких процессов сходимость к смешанному равновесию имеет место при общих предположениях.

2. Модель “хищник - жертва”. Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова

Начиная с известной работы Вольтера,1976, в литературе рассмотрена следующая модель совместного развития двух популяций. Пусть x и y обозначают плотность первой и второй популяций соответственно. Модель предполагает, что эти значения изменяются согласно дифференциальной системе:

$$\dot{x} = x(a_0 + ay), \;\; \dot{y} = y(b_0 + bx), \qquad (3.2.1)$$

где коэффициенты $a_0(x)$ и $b_0(y)$ характеризуют взаимодействия внутри популяции, a и b показывают влияние второй (соответственно первой) популяции на рост первой (соответственно второй) популяции. Динамика системы (3.2.1) изучена для различных типов взаимодействий (хищник - жертва, конкуренция, кооперация) и коэффициентов a_0, b_0, a, b, зависящих от x, y и t (Kostitzin, 1937). Однако, индивидуумы в реальных популяциях используют различные стратегии, и коэффициенты в общем зависят от распределения по стратегиям.

Пусть $R=\{R_1, \ldots, R_m\}$ и $S=\{S_1, \ldots, S_n\}$ - это множества стратегий популяций. Мы предполагаем, что в обсуждаемой модели индивидуумы первой популяции взаимодействуют только с индивидуумами второй популяции, но не с индивидуумами своей популяции, и наоборот. В каждый момент времени t каждый индивидуум использует определенную стратегию. Пусть

$$p(t) = (p_1(t),\ldots, p_m(t)) \in \Delta^m = \left\{ p \in R_+^m \,\middle|\, \sum_i p_i = 1 \right\}$$

и

$$q(t) = (q_1(t),...,q_n(t)) \in \Delta^n = \left\{ q \in R_+^n \middle| \sum_j q_j = 1 \right\}$$

являются распределениями популяций по стратегиям, $x_i(t)$ и $y_j(t)$ обозначают численности индивидуумов, выбирающих стратегии R_i и S_j соответственно. Таким образом,

$$p_i = \frac{x_i}{x}, \quad i = 1,...,m, \qquad q_j = \frac{y_j}{y}, \quad j = 1,...,n.$$

Простейшим аналогом системы (3.2.1) для такого взаимодействия будет:

$$\dot{x}_i = x_i\left(a_0 + \sum_j a_{ij} y_j\right), \quad i = 1,...,m, \qquad (3.2.2)$$

$$\dot{y}_j = y_j\left(b_0 + \sum_i b_{ij} x_i\right), \quad j = 1,...,n.$$

Для каждого типа индивидуумов эта модель предполагает линейную зависимость коэффициента роста от распределения по стратегиям в другой популяции. Такая зависимость типична для парных взаимодействий, где в любой момент времени каждый индивидуум первой популяции взаимодействует с одним случайным образом выбранным индивидуумом второй популяции. Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} характеризуют влияние этого взаимодействия на их воспроизводство, если индивидуумы используют стратегии R_i и S_j соответственно.

После замены переменных мы получаем систему

$$\dot{p}_i = yp_i\left(\sum_j a_{ij} q_j - \sum_{l,j} a_{lj} p_l q_j\right), \quad i = 1,...,m, \qquad (3.2.3)$$

$$\dot{q}_j = xq_j\left(\sum_i b_{ij} p_i - \sum_{i,l} b_{il} p_i q_l\right), \quad j = 1,...,n,$$

которая описывает динамику поведения во взаимодействии. В отличие от широко изученной динамики репликаторов для парных взаимодействий в одной популяции (Shuster, Sigmund, Hofbauer, Wolf, 1981), эта система неавтономна и включает плотности популяций $x = \sum_i x_i$, $y = \sum_j y_j$, которые могут быть вычислены из (3.2.2) и гладко зависят от начальных распределений: $x(t) = c(t, p(0), q(0))$, $y(t) = d(t, p(0), q(0))$.

В соответствии с результатами главы 1 некоторые важные характеристики системы (3.2.3) могут быть получены при анализе биматричной игры Г с наборами стратегий R и S и матрицами выигрыша $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$. Пара (p, q) является равновесием Нэша этой игры, если для любых i, j, таких что $p_i > 0$, $q_j > 0$,

$$i \in Arg\max_l \sum_j a_{lj} q_j, \quad j \in Arg\max_l \sum_i b_{il} p_{ij},$$

т. е. каждая стратегия, используемая с положительной частотой, является лучшим ответом на распределение другой популяции. По теореме 1.1* каждая устойчивая по Ляпунову точка системы (3.2.3) является равновесием Нэша для игры Г.

В общих предположениях число положительных компонент в p и q одинаково для любого равновесия. Равновесие называется строгим, если только одна компонента положительна как в p, так и в q: $p_{i*} = q_{j*} = 1$, и

$$a_{i*j*} > a_{ij*},\ i \neq i*, \quad b_{i*j*} > b_{i*j},\ j \neq j*, \qquad (3.2.4)$$

Согласно теореме 1.2*, эта точка (p, q) асимптотически устойчива для (3.2.3).

Однако, для многих важных взаимодействий строгих равновесий не существует. Например, рассмотрим игру “хищник - жертва”, в которой выигрыш хищника пропорционален потере жертвы: $a_{ij} = -kb_{ij}$ для любых i, j и некоторого $k > 0$. Другой типичной чертой этого взаимодействия является то, что для любой стратегии i охотника существует успешная стратегия спасения $j(i)$, такая что $a_{ij(i)} < 0$, и, наоборот, для любой стратегии j спасения существует эффективная стратегия охотника $i(j)$, такая что $a_{i(j)j} > 0$.

Очевидно, что строгого равновесия не существует при этих условиях, а смешанное равновесие $(p*, q*)$ однозначно определяется по матрице $\{a_{ij}\}$. Shuster, Sigmund, Hofbauer, Wolf (1981) изучили его устойчивость для автономной динамики репликаторов (3.2.3), где $x \equiv y \equiv 1$.

Теорема 3.1. *В указанных предположениях функция* $\sum p_i^* \ln p_i + \sum q_j^* \ln q_j$ *является первым интегралом системы (3.2.3), то есть остается постоянной на ее траекториях. При этом для любого начального состояния* $p(0) > 0, \quad q(0) > 0 \quad p*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt, \ q*(t) = \frac{1}{T}\int_0^T q(t)dt,$ *где* T *- зависящий от начального состояния период движения по замкнутой траектории вокруг* $(p*, q*)$. *Таким образом,* $(p*, q*)$ *является точкой типа “центр” этой системы, структурно неустойчивой относительно возмущений правой части.*

3. Анализ устойчивости по линейному приближению. Общая модель

Для матриц выигрыша общего вида аналогично устанавливается более слабое утверждение: для любого смешанного равновесия Re $\lambda \geq 0$ для некоторого собственного значения λ якобиана системы в этой точке.

В данном разделе мы обобщим этот результат в следующих направлениях:

1. Линейные функции выигрыша $A_i(q) = \sum a_{ij} q_j$, $B_j(p) = \sum p_i b_{ij}$ соответствуют взаимодействиям в случайно сформированных парах индивидуумов. Если каждый индивид может взаимодействовать с несколькими партнерами из другой популяции или выбор не случаен, то эти функции не линейны. Например, взаимодействие с двумя случайно выбранными партнерами характеризуется выигрышем $A_i(q) = \sum_{j,l} a_{ijl} q_j q_l$. Мы покажем, что результаты относительно неустойчивости смешанных равновесий справедливы для более широкого класса функций выигрыша.

2. Обсуждаемая модель динамики может быть сведена к автономной системе, если две взаимодействующие "популяции" по сути являются двумя группами индивидуумов из одной и той же биологической популяции (например, "собственники" и "захватчики" в парных столкновениях за некоторый ресурс). Однако такая редукция представляется неоправданной для взаимодействий "хищник - жертва" и др. Мы покажем, что неустойчивость равновесия для автономной системы влечет за собой его неустойчивость для связанных с ней неавтономных систем.

3. Динамика репликаторов описывает только один механизм изменения поведения популяции: естественный отбор. Но в действительности индивидуумы во многих популяциях изменяют свои стратегии за счет обучения и подражания. В главе 1 мы описали модель адаптивного подражания и соответствующую этому механизму динамику поведения в межпопуляционном взаимодействии (система 1.4.4). Здесь мы покажем, что результаты о неустойчивости смешанных равновесий по линейному приближению остаются справедливыми для широкого класса динамических моделей, включая указанную модель адаптивного подражания.

Рассмотрим популяцию с фиксированной плотностью и следующим механизмом адаптивного подражания. В любой момент времени *t* каждый индивидуум придерживается некоторой стратегии R_i. Пусть r_i определяет интенсивность перехода в специальное состояние обучения индивидуумов с этой стратегией. В этом состоянии субъект сравнивает выигрыши, соответствующие его текущей стратегии R_i и некоторой альтернативной стратегии R_l. Он всегда сохраняет свою стратегию R_i, если $A_i(q(t)) \geq A_l(q(t))$, иначе он меняет R_i на R_l с вероятностью $\gamma(A_i(q), A_l(q))$, которая монотонно возрастает по разности $A_l(q) - A_i(q)$. Пусть π_l определяет вероятность выбора R_l в качестве альтернативной стратегии, r_i и π_l могут зависеть от текущего распределения p (например, $\pi_l = p_l$) и выигрышей $A(q) = (A_1(q), ..., A_m(q))$. Тогда распределение p по стратегиям в популяции 1 удовлетворяет следующей системе:

$$\dot{p}_i = -p_i r_i \sum_{l:\, A_l(q) > A_i(q)} \pi_l \gamma(A_i(q), A_l(q)) + \sum_{l:\, A_l(q) < A_i(q)} p_l r_l \pi_i \gamma(A_l(q), A_i(q)). \quad (3.3.1)$$

Уравнения для q аналогичны.

Рассмотрим игру Г двух популяций с наборами стратегий $R = \{R_1,...,R_m\}$ и $S = \{S_1,...,S_n\}$ и функциями выигрыша $A_i(q), \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{m},$ $B_j(p), j = 1,...,n,$ которые показывают результат взаимодействия для всех стратегий.

Вспомним, что точка $(p,q) \in \Delta^m \times \Delta^n$ называется равновесием Нэша игры Г, если для любых i, j

$$(p_i > 0) \Rightarrow i \in Arg \max_u A_u(q),$$

$$(q_j > 0) \Rightarrow j \in Arg \max_u B_u(p),$$

равновесие называется смешанным, если для любых i, j $p_i(t) < 1, \mathrm{q_j}(t) < 1$.

Легко видеть, что для любой игры с непрерывными функциями выигрыша существует равновесие Нэша и, более того, при слабых ограничениях на функции выигрыша количество положительных координат в p и q одинаково.

Мы предполагаем далее, что функции $A_i(q)$ (соответственно $B_j(p)$) непрерывно дифференцируемы на Δ^n (соответственно Δ^m).

Пусть $p(t)$ и $q(t)$ изменяются согласно системе

$$\dot{p}_i = c(t, p(0), q(0)) G_i(p, A(q)), \quad i = 1,...,m, \qquad (3.3.2)$$

$$\dot{q}_j = d(t, p(0), q(0)) H_j(q, B(p)), \quad j = 1,...,n.$$

Эта динамическая система называется Н-согласованной, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) Функции G_i и H_j удовлетворяют уравнениям

$$G_i(p, A) = 0, \quad i = 1,...,m,$$

$$H_j(q, B) = 0, \quad j = 1,...,n,$$

для любых распределений $p \in \Delta^m, q \in \Delta^n$ и векторов выигрыша $A = (A_1,..., A_m),$ $B = (B_1,..., B_n)$, так что

$$\forall i \ (p_i > 0) \Rightarrow i \in Arg \max_u A_u; \quad \forall j \ (q_j > 0) \Rightarrow j \in Arg \max_v B_v.$$

Это означает, что каждое равновесие Нэша является неподвижной точкой системы (3.3.2).

(2) Функции c, d измеримы как функции от t и непрерывно дифференцируемы соответственно по $p(0), q(0)$, причем производные равномерно ограничены по t. Тогда существуют такие положительные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что для любого $t > 0$, $p \in \Delta^m, q \in \Delta^n$, $\varepsilon_1 \le c(t,p,q), d(t,p,q) \le \varepsilon_2$.

(3) Множество $\Delta^m \times \Delta^n$ является инвариантом системы (3.2.2). Функции G и H непрерывно дифференцируемы.

Системы (3.2.3) и (3.3.1) удовлетворяют условиям (1)-(3) при слабых ограничениях на их параметры. Более того, любая система в виде

$$\dot{p}_i = c(t) p_i g_i(p)\left(A_i(q) - \sum_l p_l A_l(q) \right), \quad i = 1,...,m,$$

$$\dot{q}_j = d(t) q_j h_j(q)\left(B_j(p) - \sum_l q_l B_l(p) \right), \quad j = 1,...,n,$$

с гладкими положительными функциями g_i, h_j удовлетворяет этим условиям.

Заметим, что система (3.3.2) может быть сведена к автономной системе

$$\dot{p}_i = G_i(p, A(q)), \quad i = 1,...,m, \qquad (3.3.3)$$

$$\dot{q}_j = H_j(q, B(q)), \quad j = 1,...,n,$$

если для любых t, $p(0)$, $q(0)$

$$\frac{c(p(0), q(0), t)}{d(p(0), q(0), t)} = \alpha(p(0), q(0)).$$

Этот случай имеет место при взаимодействии между популяциями постоянных размеров или между индивидуумами одного вида в разных ролях, например, между “собственниками” некоторого ресурса и “захватчиками” (Maynard Smith,1982).

Рассмотрим игру Г, *H*-согласованную систему (3.3.2) и соответствующую автономную систему (3.3.3). Вспомним, что неподвижная точка системы (3.3.3) называется вырожденной, если некоторое собственное значение λ якобиана равно 0; точка называется центром, если для любого собственного значения $\mathrm{Re}\,\lambda = 0, \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$; точка называется седлом, если для некоторого собственного значения $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Теорема 3.2. *Каждое смешанное равновесие (P^*, Q^*) является либо вырожденной точкой, либо центром, либо седлом системы (3.3.3). В последнем случае (P^*, Q^*) является неустойчивой точкой системы (3.3.2) при любых допустимых функциях c, d.*

Доказательство приведено в Приложении.

Для доказательства второй части теоремы будут использованы следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $(x, y)(t) = (\bar{x}, \bar{y}) \exp(\lambda t)$ является решением линейной системы $\dot{x} = Ky$, $\dot{y} = Px$, $x, y \in \Delta^m$, и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$; пусть $a(t)$ измеримая функция, такая что для некоторых положительных $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ для некоторого t $0 < \varepsilon < a(t) < \bar{\varepsilon} < \infty$. Тогда система*

$$\dot{x} = Ky, \quad \dot{y} = a(t) Px \qquad (3.3.4)$$

имеет решение $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(t) = (c(t)\bar{x}, d(t)\bar{y})$, где $|c(t)| \geq \exp(\mathrm{Re}\,\lambda \varepsilon^{1/2} t)$.

Доказательство приведено в Приложении.

Лемма 3.2. *Пусть линейная система $\dot{W} = A(t)W$ имеет такое решение $\widetilde{W}(t)$, что для некоторого $u > 0$ для любого t $|\widetilde{W}(t)| \geq \exp(ut) |\widetilde{W}(0)|$. Пусть $A(t)$ равномерно ограничена по t. Тогда точка 0* *является неустойчивой для системы* $\dot{W} = A(t)W + g_1(t,W) + g_2(t,W(0),W)$ *для любых вектор-функций* g_1, g_2, *таких что* $\| g_1(t,W) \| / \| W \| \to 0$ *при* $\| W \| \to 0$, $g_2(t,W(0),W) \| \le C \| W(0) \| \| W \|^2$ *равномерно по* t.

Это утверждение является аналогом хорошо известной теоремы Ляпунова (смотри, например, Барабашин, 1970).

4. Исследование устойчивости с помощью теоремы Лиувилля

Проведенные исследования оставляют открытым вопрос об устойчивости точек равновесий типа “центр”, для которых все собственные значения линеаризованной матрицы являются чисто мнимыми. В этом случае предыдущая теорема не приводит к какому-либо заключению об устойчивости. Воспользуемся методом, развитым в работе (Ritzberger, Vogelsberger,1990) и основанным на теореме Лиувилля. Ритзбергер и Вейбулл применяли его для доказательства асимптотической неустойчивости смешанных равновесий в МДР (Ritzberger, Weibull,1995). Изложим вкратце суть этого метода.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$\dot{\pi}(t) = \varphi(\pi(t)), \qquad (3.4.1)$$

где $\pi(t) \in \mathrm{X}, \forall t$, X – открытое подмножество R^k, $\varphi : \mathrm{X} \to R^k$. Правая часть (3.4.1) определяет векторное поле φ. Пусть это поле непрерывно дифференцируемо на X. Тогда в любой точке множества X определена дивергенция $div\varphi(\pi) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \pi_j}(\pi)$. Так как $div\varphi(\pi)$ – непрерывная функция, то можно вычислять $\int_U div\varphi(\pi) d\pi$ по любому измеримому множеству $U \subseteq \mathrm{X}$. Фиксируем измеримое множество $U \subseteq \mathrm{X}$ так, что определено решение $\pi(t, \pi^0) \in \mathrm{X}, \forall t$, $\pi^0 \in U$. Обозначим $U(t) = \{\pi(t, \pi^0) \mid \pi^0 \in U\}$. Тогда $U(t)$ – измеримое множество и его объем $V(t) = \int_{U(t)} d\pi$. Согласно теореме Лиувилля $\exists dV(t)/dt = \int_{U(t)} div\varphi(\pi) d\pi$.

Следовательно, если $div\varphi(\pi) \equiv 0$ (такие векторные поля называются *"свободными от дивергенции"*), то $V(t) = V(0)$. Согласно этой теореме свободное от дивергенции поле сохраняет любой объем постоянным и, следовательно, не может иметь асимптотически устойчивых состояний. Действительно, если бы существовала асимптотически устойчивая точка $\pi^0 \in \mathrm{X}$, то должно было бы существовать непустое открытое множество $U \subseteq \mathrm{X}$, содержащее π^0 и такое, что $\lim_{t \to \infty} \pi(t, \pi') = \pi^0, \forall \pi' \in U$, а значит соответствующий объем $V(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0 \ne V(0)$.

Если же $div\varphi(\pi) < 0, \forall \pi \in \mathrm{X}$, то $\forall U \subseteq \mathrm{X}$ $dV(t)/dt < 0$ и можно ожидать существования во множестве X асимптотически устойчивых точек.

Теперь применим описанный метод исследования асимптотической устойчивости к МАПП в межпопуляционных взаимодействиях, где $r_j^k = r_j^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ - интенсивность перехода игроков популяции k, использующих стратегию j, в адаптивное состояние; $q_{ji}^k = q_{ji}^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ – вероятность выбрать стратегию i в качестве альтернативной; $\gamma_{ji}^k = \gamma_{ji}^k\left(f^k(\pi),\pi\right)$ – вероятность сменить стратегию j на i, если i лучше исходной стратегии j, функции $r_j^k, \gamma_{ij}^k, q_{ij}^k, f_j^k$ удовлетворяют условиям:

$$\forall j \;\; r_j^k \geq 0, \forall i,j \;\; \gamma_{ji}^k \geq 0, q_{ji}^k \geq 0, \;\; \forall j \;\; \sum_i q_{ji}^k = 1, \;\; k = 1,2,$$

а также удовлетворяют условию Липшица по своим аргументам.

Опишем класс МАПП, для которых указанный метод позволяет прийти к выводу об отсутствии асимптотически устойчивых равновесий.

Теорема 3.3. *Пусть межпопуляционная МАПП вида (1.4.4) удовлетворяет следующим условиям:*

1) r_j^k, γ_{ji}^k *не зависят от* π^k *(*$k = 1,2$*) (интенсивность перехода в адаптивное состояние и вероятность смены стратегии не зависят от распределения по стратегиям внутри данной популяции, хотя могут зависеть от распределения по стратегиям в другой популяции, участвующей во взаимодействии);*

2) $q_{ji}^k = \pi_i^k$ *(*$k = 1,2$*) (альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания другим членам популяции).*

Тогда любое распределение $\pi \in \operatorname{int}\Pi$ *не является асимптотически устойчивой точкой для МАПП (1.4.4).*

Доказательство приведено в Приложении.

Следствие. *Если МАПП вида (1.4.4) удовлетворяет условиям Теоремы 3.3, то любое смешанное равновесие не является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Согласно Теореме 3.3, любое распределение по стратегиям, в котором доли всех чистых стратегий положительны (т.е. $\pi \in \operatorname{int}\Pi$), не может быть асимптотически устойчивым на траекториях МАПП. Возьмем распределение π, принадлежащее некоторой грани множества Π. На любой грани Π можно рассмотреть индуцированную игру $\overline{G}'$, полученную из исходной межпопуляционной игры $\overline{G}$ вида (3.4.1) удалением некоторых чистых стратегий. Более того, МАПП такой усеченной игры есть МАПП исходной игры $\overline{G}$, усеченная до соответствующей размерности. Поэтому к ней также применима Теорема 3.3. Следовательно, любая точка π, принадлежащая некоторой грани множества Π и не являющаяся чистой стратегией, не может быть асимптотически устойчивой. □

Полученный результат показывает, что в общих предположениях для модели, описывающей случайные парные столкновения членов двух популяций, в которых выигрыши индивидуумов одной популяции зависят от распределения по стратегиям в другой популяции, а альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания, любое смешанное равновесие не является асимптотически устойчивым на траекториях МАПП.

Покажем, что данный результат нельзя распространить на МАПП с произвольным механизмом подражания. Укажем условия, в которых дивергенция векторного поля правых частей системы (1.4.4) строго отрицательна ($div\varphi(\pi) < 0$). При этом смешанные равновесия могут быть асимптотически устойчивы.

Теорема 3.4. *Пусть межпопуляционная МАПП удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\forall i, j\ r_j^k, q_{ji}^k$ *не зависят от* π^k *(*$k = 1,2$*) (интенсивность перехода в адаптивное состояние и вероятность выбора некоторой стратегии в качестве альтернативной для членов популяции не зависят от распределения по стратегиям в этой популяции);*

2) $\forall i, j\ \gamma_{ji}^k = \gamma\left(f_i^k - f_j^k\right), \forall x > 0\ \gamma(x) > 0$ *(*$k = 1,2$*) (вероятность смены текущей стратегии на альтернативную зависит от разности соответствующих значений функции выигрыша и положительна, если указанная разность положительна);*

3) $r_j^k > 0, \forall j$ *(*$k = 1,2$*) (интенсивность перехода в адаптивное состояние положительна для всех стратегий).*

Тогда дивергенция векторного поля правых частей системы (1.4.4) отрицательна.

Доказательство Теоремы 3.4 в Приложении.

5. Другие модели динамики поведения. Обзор результатов

Полученные результаты показывают, что механизмы адаптивно-подражательного поведения, в которых альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания, не обеспечивают сходимости к смешанному равновесию Нэша даже в тех случаях, когда такое равновесие единственно и соответствует нашим представлениям о рациональном поведении. Это относится, в частности, к взаимодействиям типа «хищник-жертва».

Какова же динамика адаптивно-подражательного поведения для таких взаимодействий? В частном случае, когда интенсивности r_j перехода в адаптивное состояние постоянны, а вероятности p_{ij} замены текущей стратегии на альтернативную линейно зависят от разности выигрышей $f_j^k - f_i^k$, МАПП эквивалентна МДР. Для последней модели теорема 3.1 показывает, что смешанное равновесие антагонистической игры является нейтрально устойчивым. Распределения по стратегиям циклически колеблются вокруг равновесия. Для конкурентных столкновений, в которых состояния упорядочения конкуренции являются асимптотически устойчивыми, смешанные равновесия неустойчивы. В зависимости от начального распределения по стратегиям конкуренция упорядочивается тем или иным образом. В работе (Васин, 1987) этот результат обоснован с помощью теоремы об устойчивости по линейному приближению и построены области притяжения указанных строгих равновесий. Однако, для парных столкновений других типов динамика поведения может иметь более сложный характер.

Проблема сходимости к смешанным равновесиям рассматривалась в литературе также для итеративных и непрерывных процессов типа фиктивного разыгрывания, в частности, процесса Брауна (см. Беленький, Волконский , Иванков, Поманский, Шапиро, 1974; Робинсон, 1961).

Метод Брауна, или процесс фиктивного разыгрывания, был изначально предложен как итерационный метод поиска равновесия Нэша в смешанных стратегиях для биматричной игры. Суть данного метода заключается в том, что всякий игрок выбирает на каждом шаге T свою стратегию, предполагая, что частоты применения стратегий партнера по результатам предыдущих $(T-1)$ шагов соответствуют его смешанной стратегии на шаге T.

Более формально, для игры в нормальной форме обозначим $p^a(t), a \in A$, смешанные стратегии, применяемые на шаге t. Тогда дискретный процесс Брауна описывается соотношениями

$p^a(t+1) = p^a(t)(1-t) + z^a(t)/t,\ \ a \in A,\ \ t \in Z_+$, где

$z^a(t) \in \underset{p^a \in P_0^a}{Arg\max} u^a(p(t) \| p^a)$, u^a - функция выигрыша игрока a в смешанных стратегиях, P_0^a - множество вырожденных смешанных стратегий игрока a, соответствующее множеству его чистых стратегий. Таким образом, $z^a(t)$ - один из лучших ответов игрока a на смешанные стратегии $p^{A \setminus a}(t)$ остальных игроков. Применительно к динамике поведения во взаимодействующих популяциях процесс можно интерпретировать как адаптивный следующим образом: после каждого периода $t \geq 2$ доля $1/t$ каждой популяции меняет свою стратегию на один из наилучших ответов. (Конечно, такая динамика выглядит довольно странно. Более естественно заменить в определении $z^a(t)$ условие $p^a \in P_0^a$ на $p^a \in P^a$, считая, что разные агенты могут выбрать различные оптимальные ответы, если последних несколько. При этом последующие утверждения остаются справедливыми с небольшими уточнениями). Процесс Брауна с непрерывным временем описывается системой уравнений

$$\dot{p}^a(t) = z^a(t) - p^a(t), a \in A, t \in R_+, \qquad (3.5.1)$$

где $z^a(t) \in \underset{p^a \in P_0^a}{Arg\max} u^a(p(t) \| p^a)$.

Относительно сходимости указанных процессов в литературе получены следующие результаты.

Браун предположил, а Робинсон (Робинсон Дж.,1961) доказала сходимость дискретного процесса для антагонистических биматричных игр. В работе (Данскин Дж. М., 1963) Данскин показал сходимость данного процесса для антагонистических игр с непрерывными выигрышами на произведениях компактных пространств. В работе (Fudenberg, Kreps, 1993) Фьюденберг и Крепс показали сходимость адаптивной игровой модели для неантагонистических биматричных игр 2х2 с одним чисто смешанным равновесием Нэша. В работе (Benaim, Hirsch, 1994) Бенайм и Хирш распространили полученный результат для игр 2х2 с несколькими равновесиями Нэша (не обязательно смешанными). В работе Богданова (1999) на основе результатов Беленького и др. (1974) получены наиболее общие известные условия сходимости указанных процессов для биматричных игр. Доказано, что гарантировать сходимость можно для всех биматричных игр, которые сводятся к антагонистической при помощи следующих преобразований:

а) добавление константы к столбцу платежной матрицы первого игрока;

б) добавление константы к строке платежной матрицы второго игрока;

в) домножение платежной матрицы на положительную константу.

Известно, что указанные преобразования задают классы игр с одинаковыми множествами равновесий Нэша.

Однако полученные результаты нельзя распространить для неантагонистических игр большей размерности. Это наглядно демонстрирует следующий пример, заимствованный из работы (Shapley, 1964).

Пример Шепли. Пусть матрицы выигрыша игроков имеют вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если в качестве начальной точки игроки выберут пару чистых стратегий $(i_0, j_0) = (1,1)$, то выборы игроков в последующие моменты времени будут следовать по циклу шести пар стратегий:

(1,1)→(1,3)→(3,3)→(3,2)→(2,2)→(2,1)→(1,1).

При этом число периодов, в которые процесс будет находиться в каждом из этих состояний, будет экспоненциально возрастать. Очевидно, что процесс фиктивного разыгрывания не сходится. Однако в рассматриваемой игре имеется точка равновесия:

$$p^* = (1/3, 1/3, 1/3) \qquad q^* = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Для некоторых неантогонистических игр, в частности для примера Шепли Gaunersdorfer и Hofbauer (1995) установили, что траектории процесса фиктивного разыгрывания ведут себя так же, как средние по времени МДР. Как показывает пример 1 в (Васин, Богданов, 2001), МДР эквивалентна частному случаю МАПП, удовлетворяющей Теореме 3.3. Упомянутый результат Gaunersdorfer и Hofbauer означает, что не только сами траектории таких МАПП не сходятся к равновесию в примере Шепли (что следует из Теоремы 3.3), но и их средние по времени также не сходятся.

Что касается МАПП, удовлетворяющей условиям Теоремы 3.4 с фиксированными вероятностями выбора альтернативных стратегий, то убывание объемов вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений не обязательно влечет асимптотическую устойчивость стационарной точки. Поскольку в данном случае не удается построить функцию Ляпунова, то ответ на вопрос об устойчивости для конкретной системы можно получить с помощью численного моделирования. Численные расчеты подтверждают гипотезу об их сходимости для антагонистических игр, в то же время в примере Шепли сходимость не наблюдается. Возможно, что здесь сказывается погрешность численной реализации.

Лучшие свойства (в смысле сходимости к смешанным равновесиям) демонстрируют некоторые более сложные адаптивные динамики. В работе Shamma и Arslan (2003) рассматривается следующая модификация непрерывного процесса фиктивного разыгрывания для игры двух лиц:

$$\dot{q}^1 = \beta^1(q^2 + \gamma\lambda(q^2 - r^2)) - q^1, \qquad (3.5.2)$$
$$\dot{q}^2 = \beta^2(q^1 + \gamma\lambda(q^1 - r^1)) - q^2,$$
$$\dot{r}^1 = \lambda(q^1 - r^1),$$
$$\dot{r}^2 = \lambda(q^2 - r^2),$$

где q^a - текущая оценка смешанной стратегии игрока a, $\beta^a(p^{-a})$ - некоторый наилучший ответ игрока a на стратегию p^{-a} партнера. Идея в том, что величина $\lambda(q^a - r^a)$ при достаточно больших λ аппроксимирует значение $\dot{q}^a$, то есть наилучший ответ строится для будущей стратегии. Если бы аппроксимация была точной, то при $\gamma = 1$ решение системы (3.5.2) при наличии единственного равновесия Нэша (q^{1*}, q^{2*}) удовлетворяло уравнениям

$$\dot{q}^a = -q^a + q^{a*}, \quad a = 1,2,$$

и с экспоненциальной скоростью сходилось к q^*. В общем случае получено следующее утверждение о локальной сходимости (см. Shamma, Arslan, 2003, теорема 3.6): пусть $\overline{D}$ - якобиан линеаризованной в окрестности q^* стандартной модели (3.5.1), $a_j + ib_j$ - собственные значения этой матрицы. Тогда q^* асимптотически устойчиво для линеаризованной системы (3.5.2) при $\gamma > 0$ и достаточно больших λ в том и только том случае, если

$$\max_j a_j < \min(0, (1-\gamma)/\gamma)$$

или $0 \le \max_j (a_j / (a_j^2 + b_j^2)) < \gamma/(1-\gamma) < 1/\max_j a_j$.

Для примера Шепли условием локальной стабильности равновесия дли системы (3.5.2) является $0.0413 < \gamma/(1-\gamma) < 0.0638$.

В указанной работе рассматриваются также градиентные модели динамики, в которых смешанная стратегия каждого игрока меняется в направлении градиента его функции выигрыша. Показано, что если градиент вычисляется для текущей стратегии партнера, то равновесие Нэша никогда не является локально устойчивым для системы. Если, однако, считать градиент для будущей стратегии партнера, определяемой так же, как в случае фиктивного разыгрывания, то соответствующий выбор γ обеспечивает устойчивость.

6. Приложение

Доказательство Леммы 3.1. Подставив $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ в систему (3.3.4), получим $\dot{c} = \lambda d, \dot{d} = a(t)\lambda c$. Следовательно $\ddot{c} = a(t)\lambda^2 c$. Заметим, что для любого действительного $\lambda > 0$ это уравнение имеет действительное решение, такое что $\exp(\lambda\varepsilon^{1/2}t)$ является его нижней аппроксимацией. Для любого комплексного λ и константы $a(t) \equiv a$, $C^1\exp(\lambda a^{1/2}t) + C^2\exp(-\lambda a^{1/2}t)$ является общим решением уравнения. Для любой допустимой функции $a(t)$ рассмотрим ее аппроксимацию последовательностью функций a_n ,таких что соответствующие решения $c_n(t)$ сходятся к решению $c(t)$, соответствующему $a(t)$, для любого t. Начиная с $(\bar{\varepsilon}/\varepsilon)^{1/2}\exp(\lambda a_n(0)^{1/2}t)$ и находя решения для различных $a_n(t),\ t>0$, мы получим требуемую оценку для каждого c_n и, следовательно, для предельного решения $c(t)$. □

Доказательство Теоремы 3.2. Пусть $\{i \mid p^*_i > 0\} = \{1,...,r\}$, $\{j \mid q^*_j > 0\} = \{1,...,s\}$. Мы обозначим $R = \{2,...,r\}$, $U = \{2,...,s\}$, $S = \{r+1,...,m\}$, $V = \{s+1,...,n\}$; для любого вектора $W \in R^m$ и каждого упорядоченного подмножества $Q \subset \{1,...,m\}$, $W_Q = (W_i, i \in Q)$, $\bar{p} = (p_R, p_S)$, $\bar{q} = (q_U, q_V)$. Исключая зависимые переменные $p_1 = 1 - p_2 - ... - p_m$, $q_1 = 1 - q_2 - ... - q_n$ мы преобразуем систему (3.3.3) к виду

$$\dot{\bar{p}} = \overline{G}(\bar{p}, A(\bar{q})), \quad \dot{\bar{q}} = \overline{H}(\bar{q}, B(\bar{p})).$$

Вычислим Якобиан в точке (p^*, q^*). Для любых $i \in S,\ k \in R,\ j \in V,$ для любых достаточно малых Δp_k

$$\overline{G}_i(\bar{p}^* + e_k \Delta p_k, A(\bar{q}^*)) \geq 0,$$

$$\overline{H}_j(\bar{q}^*, B(\bar{p}^* + e_k \Delta p_k)) \geq 0,$$

соответственно условию (3); здесь e_k - соответствующий единичный вектор. Следовательно,

$$\frac{\partial \overline{G}_i}{\partial p_k}(\bar{p}^*, \bar{q}^*) = \frac{\partial \overline{H}_j}{\partial p_k}(\bar{p}^*, \bar{q}^*) = 0.$$

Аналогично, для любого $l \in U$,

$$\frac{\partial \overline{H}_j}{\partial q_l}(p^*, q^*) = \frac{\partial \overline{G}_i}{\partial q_l}(p^*, q^*) = 0.$$

Покажем, что для любых $i, k \in U$, $j, l \in V$

$$\frac{\partial \overline{G}_i}{\partial p_k}(p^*, q^*) = \frac{\partial \overline{H}_j}{\partial q_l}(p^*, q^*) = 0.$$

Действительно, для любого достаточно малого Δp_k точка $(\bar{p}^* + \Delta p_k e_k, \bar{q}^*)$ соответствует равновесию Нэша игры Г с функциями выигрыша $A'(\bar{q}) = A(\bar{q})$ и $B'(\bar{p}) = B(\bar{p} - \Delta p_k e_k)$, продленными обычным способом. Следовательно, по условию (1), $\overline{G}_i(\bar{p}^* + e_k \Delta p_k, A(\bar{q}^*)) = 0$. Доказательство второго равенства аналогично.

Таким образом Якобиан в точке (p^*, q^*) может быть записан в следующей блочной форме:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial \overline{G}_R}{\partial p_S} & \dfrac{\partial \overline{G}_R}{\partial q_U} & \dfrac{\partial \overline{G}_R}{\partial q_V} \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{G}_S}{\partial p_S} & 0 & \dfrac{\partial \overline{G}_S}{\partial q_V} \\ \dfrac{\partial \overline{H}_U}{\partial p_R} & \dfrac{\partial \overline{H}_U}{\partial p_S} & 0 & \dfrac{\partial \overline{H}_U}{\partial q_V} \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{H}_V}{\partial p_S} & 0 & \dfrac{\partial \overline{H}_V}{\partial q_V} \end{bmatrix} (\overline{p}^*, \overline{q}^*).$$

Два блока нулей на диагонали являются $(r-1)\times(r-1)$ и $(s-1)\times(s-1)$ матрицами. Если $r \neq s$, тогда $\det J = 0$, то есть (p^*, q^*) является вырожденной точкой. В противном случае характеристический полином $f(\lambda)$ матрицы

$$\overline{J} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial \overline{G}_R}{\partial q_U} \\ \dfrac{\partial \overline{H}_U}{\partial p_R} & 0 \end{bmatrix}$$

четный, и либо все его собственные значения лежат на мнимой оси, либо для одного из них $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Теперь рассмотрим последний случай и докажем вторую часть теоремы. Обозначим $x = \overline{p} - \overline{p}^*$, $y = \overline{q} - \overline{q}^*$, $W = (x, y)$, $\pi = (\overline{p}, \overline{q})$ и разложим функции c, d, G, H по переменной W

$$c(t, p, q) = c(t, p^*, q^*) + h_1(t, W)\, \| W \|,$$

$$d(t, p, q) = d(t, p^*, q^*) + h_2(t, W)\, \| W \|,$$

$$G(p, A(q)) = (\partial G / \partial W)(p^*, q^*)W + h_3(W),$$

$$H(q, B(p)) = (\partial H / \partial W)(p^*, q^*)W + h_4(W),$$

где функции $h_i(t, W),\ i = 1,2$ равномерно ограничены по t, $W, h_l(W)/\| W \| \to 0$ при $\| W \| \to 0,\ l = 3,4$. Изменением времени $d\tau = c(t, p^*, q^*)dt$ система (3.3.2) приводится к виду

$$\dot{x} = (\partial \overline{G} / \partial W)(p^*, q^*)W + g_{11}(t, W) + g_{12}(t, W(0), W), \quad (3.6.1)$$

$$\dot{y} = \alpha(\tau)(\partial \overline{H} / \partial W)(p^*, q^*)W + g_{21}(t, W) + g_{22}(t, W(0), W),$$

где $\alpha(\tau) = \mathrm{d}(t(\tau), p^*, q^*)/c(t(\tau), p^*, q^*)$, $\varepsilon / \overline{\varepsilon} \le \alpha(\tau) \le \overline{\varepsilon} / \varepsilon$ и функции g_{l1}, g_{l2} удовлетворяют условиям Леммы 3.2, $l = 1,2$. По предположениям система $\mathrm{d}(x_R, y_U)/\mathrm{d}\tau = \overline{J}(x_R, y_U)$ имеет решение $(\overline{x}_R, \overline{y}_U)\exp(\lambda t)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. По Лемме 3.1 линеаризованная система

$$\dot{x} = (\partial \overline{G} / \partial W)(p^*, q^*)W,$$

$$\dot{y} = \alpha(\tau)(\partial \overline{H} / \partial W)(p^*, q^*)W$$

имеет решение $(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$, для которого выполняется

$$\| \widetilde{x}_R(\tau) \| \ge \exp(\operatorname{Re}\lambda (\varepsilon / \overline{\varepsilon})^{1/2} \tau)\, \| \widetilde{x}_R(0) \|.$$

Следовательно, по Лемме 3.2 точка 0 является нестабильной для системы (3.6.1), так же, как и точка (p^*, q^*) для начальной системы (3.3.2). □

Доказательство Теоремы 3.3.

Обозначим $\varphi_j^k = \dot{\pi}_j^k, j \in J^k, k = 1,2$ – правые части системы (1.4.4). Они определяют векторное поле на открытом множестве $\operatorname{int}\Pi$. Вычислим дивергенцию этого поля. Заметим, что для взятия частных производных на симплексе мы должны использовать производные по направлению: $div\varphi = \sum_{j \in J^1} \partial\varphi_j^1 / \partial j + \sum_{j \in J^2} \partial\varphi_j^2 / \partial j$, где $\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial j}(\pi)$ – производная в точке π по направлению от π к $\left(0,...,0,\underset{j}{1},0,...,0\right)$. Для нахождения этих производных воспользуемся формулами:

$$\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial j}(\pi) = \frac{\partial\varphi_j^k}{\partial\pi_j^k} - \left\langle \pi^k, grad\ \varphi_j^k \right\rangle .$$

$$\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial\pi_i^k} = \begin{cases} 0, \quad i \in J^k : f_i^k = f_j^k, i \neq j; \\ -r_j^k \pi_j^k \gamma_{ji}^k, \quad i \in J^k : f_i^k > f_j^k; \\ r_i^k \pi_j^k \gamma_{ij}^k, \quad i \in J^k : f_i^k < f_j^k; \\ -r_j^k \sum\limits_{l \in J^k : f_l^k > f_j^k} \pi_l^k \gamma_{jl}^k + \sum\limits_{l \in J^k : f_l^k < f_j^k} r_l^k \pi_l^k \gamma_{lj}^k, \quad i = j; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi_j^k}{\partial j}(\pi) = \frac{\varphi_j^k(\pi)}{\pi_j^k} - 2\varphi_j^k(\pi)$$

Модифицируем поле φ следующим образом: $\psi(\pi) = \varphi(\pi)/R(\pi)$, где $R(\pi) = \prod_{j \in J^1} \pi_j^1 \prod_{j \in J^2} \pi_j^2$. Поскольку $R(\pi) > 0$ при $\pi \in \operatorname{int}\Pi$, то деление φ на $R(\pi)$ не изменит траекторий системы на множестве $\operatorname{int}\Pi$, так как это всего лишь некая замена времени. В частности, новая система $\dot{\pi}_j^k = \psi_j^k, j \in J^k, k = 1,2$ имеет те же стационарные точки в $\operatorname{int}\Pi$ с теми же характеристиками устойчивости, что и исходная система.

$$\frac{\partial R}{\partial j}(\pi) = \frac{\partial R}{\partial\pi_j^k}(\pi) - \left\langle \pi^k, gradR(\pi) \right\rangle = R(\pi)\left(\frac{1}{\pi_j^k} - \left|J^k\right|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi_j^k}{\partial j}(\pi) = \left(\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial j}(\pi) - \frac{\varphi_j^k}{R(\pi)}\frac{\partial R}{\partial j}(\pi)\right) \Big/ R(\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow div\,\psi(\pi) = \sum_{j \in J^1} \frac{\partial\psi_j^1}{\partial j} + \sum_{j \in J^2} \frac{\partial\psi_j^2}{\partial j} =$$

$$= \left(\sum_{j \in J^1} \left\{ \frac{\varphi_j^1}{\pi_j^1} - 2\varphi_j^1 - \frac{\varphi_j^1}{\pi_j^1} + \left|J^1\right|\varphi_j^1 \right\} + \right.$$

$$+\sum_{j\in J^2}\left\{\frac{\varphi_j^2}{\pi_j^2}-2\varphi_j^2-\frac{\varphi_j^2}{\pi_j^2}+\left|J^2\right|\varphi_j^2\right\}\Bigg)\Bigg/ R(\pi)=0,$$

$$т.к.\quad \sum_{j\in J^k}\varphi_j^k=\sum_{j\in J^k}\dot{\pi}_j^k=\frac{d}{dt}\sum_{j\in J^k}\pi_j^k=\frac{d}{dt}1=0.$$

Следовательно, любая точка $\pi\in\operatorname{int}\Pi$ не является асимптотически устойчивой для системы $\dot{\pi}_j^k=\psi_j^k,\, j\in J^k, k=1,2$, а значит и для исходной системы (1.4.4). □

Доказательство Теоремы 3.4.

Рассмотрим векторное поле $\varphi(\pi)$, определяемое правыми частями уравнений системы (1.4.4), и найдем его дивергенцию.

Аналогично доказательству Теоремы 3.3:

$$\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial\pi_i^k}=\begin{cases}0,\quad i\in J^k: f_i^k\ge f_j^k, i\ne j;\\ r_i^k q_{ij}^k\gamma_{ij}^k,\quad i\in J^k: f_i^k<f_j^k;\Rightarrow\\ -r_j^k\sum\limits_{l\in J^k: f_l^k>f_j^k} q_{jl}^k\gamma_{jl}^k,\quad i=j;\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial j}(\pi)=\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial\pi_j^k}-\left\langle\pi^k, grad\ \varphi_j^k\right\rangle=-r_j^k\sum_{i\in J^k: f_i^k>f_j^k}q_{ji}^k\gamma_{ji}^k-\varphi_j^k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow div\ \varphi(\pi)=$$

$$=-\sum_{j\in J^1}r_j^1\left(\sum_{i\in J^1: f_i^1>f_j^1}q_{ji}^1\gamma_{ji}^1\right)-\sum_{j\in J^1}\varphi_j^1-\sum_{j\in J^2}r_j^2\left(\sum_{i\in J^2: f_i^2>f_j^2}q_{ji}^2\gamma_{ji}^2\right)-\sum_{j\in J^2}\varphi_j^2=$$

$$=-\sum_{j\in J^1}r_j^1\left(\sum_{i\in J^1: f_i^1>f_j^1}q_{ji}^1\gamma_{ji}^1\right)-\sum_{j\in J^2}r_j^2\left(\sum_{i\in J^2: f_i^2>f_j^2}q_{ji}^2\gamma_{ji}^2\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow div\varphi(\pi)<0$, т.к. по условиям теоремы $\gamma_{ji}^k>0$ при $f_i^k>f_j^k$, $r_j^k>0,$ $q_{ji}^k\ge 0$ и $\forall k\ \forall j\in J^k\ \exists i: q_{ji}^k>0$ (т.е. все q_{ji}^k не могут быть одновременно равны нулю), т.к. $\sum\limits_{i\in J^k}q_{ji}^k=1, \forall j\in J^k$. □

Глава 4. Повторяющиеся игры и распространение кооперативного поведения

1. Введение

Интерес к повторяющимся играм в большой степени связан с проблемой распространения кооперативного поведения. Суть ее в следующем. Рассмотрим популярную в теоретико-игровой литературе игру типа «Дилемма заключенного». В этой симметричной игре двух лиц у каждого из игроков есть две стратегии поведения: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). В качестве примера приведем следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} К & \quad Э \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Э \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (1,6) \\ (6,1) & (2,2) \end{pmatrix}. \end{array}$$

В общем случае предполагается, что при любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия $(u_{ээ} > u_{кэ}, u_{эк} > u_{кк})$, и в то же время суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно $(u_{кк} > (u_{эк} + u_{кэ})/2, u_{кк} > u_{ээ})$.

В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая является также решением по доминированию. Известно, однако, что в реальности игроки в подобных ситуациях часто ведут себя кооперативно. Возникает вопрос, как объяснить распространение кооперативного поведения с точки зрения некооперативной теории игр, т.е. исходя из принципов индивидуально рационального поведения, изложенных в главе I. Один из подходов к решению этого вопроса связан с исследованием повторяющихся игр.

Пусть данная конфликтная ситуация повторяется многократно с участием одних и тех же игроков. При этом, по-видимому, усиливаются стимулы для кооперативного поведения. Если, однако, рассмотреть любое фиксированное число повторений с полной информацией и аддитивными выигрышами, то в этой игре существует единственное решение по доминированию, соответствующее эгоистичному поведению на каждом шаге.

Не вдаваясь в подробности, обсудим идею получения этого результата. Начнем рассмотрение с последнего шага. Как бы ни проходила игра, на последнем шаге заведомо лучший вариант – эгоистичное поведение. Мы можем отбросить по доминированию любую стратегию, которая на последнем шаге предлагает вести себя по-другому. Далее рассмотрим предпоследний шаг, у нас остались только те стратегии, когда на последнем шаге оба игрока ведут себя эгоистично. Проводя те же рассуждения для предпоследнего шага, получим аналогичный результат. На любом шаге игроку выгодно применять эгоистичную стратегию, как бы ни вел себя его партнер, если известно, что в дальнейшем он будет вести себя эгоистично. В результате обратной индукцией по времени получаем эгоистичную стратегию в качестве решения по доминированию.

Однако, в реальности игроки обычно не знают момента окончания повторяющейся игры. Пусть после каждого повторения с вероятностью $1-d$ взаимодействие игроков заканчивается, а с вероятностью $d \le 1$ происходит следующее повторение. Такие игры называются дисконтированными сверхиграми, и для них были получены совершенно другие результаты.

Первое направление исследований, на котором следует остановиться – это имитационное моделирование отбора стратегий в повторяющейся «Дилемме заключенного». В 1980х годах Роберт Аксельрод организовал несколько турниров компьютерных программ, моделировавших различные стратегии поведения в этой игре. В турнире приняли участие 62 стратегии, предложенные исследователями из 6 стран. Итог оценивался по среднему выигрышу. Каждая стратегия реализовывалась автоматом с конечным числом состояний. Среди предложенных были довольно сложные программы. Победила, однако, сравнительно простая стратегия «Tit for Tat»: «начинай с кооперативного поведения; в каждом следующем повторении выбирай вариант поведения, который партнер выбрал в предыдущем».

В дальнейшем Р.Аксельрод исследовал имитационную модель эволюции поведения в повторяющейся «Дилемме заключенного». В качестве пространства стратегий рассматривались детерминированные правила поведения в зависимости от результатов трех предыдущих повторений. Поскольку число таких стратегий составляет 2^{70}, то для их сравнения использовались «генетические» алгоритмы оптимизации (см. Holland, 1975), моделирующие естественный отбор, мутации и скрещивание стратегий. В итоге эксперимента «выжили» лишь стратегии, которые, как и «Tit for Tat», при взаимодействии порождали кооперативное поведение, а против «эгоистов» вырабатывали эгоистичное поведение.

Однако, стратегии этого типа оказались неустойчивы к некоторым реальным факторам, влияющим на взаимодействие партнеров. Редкие случайные ошибки игроков приводят к длительным периодам, когда они по очереди «наказывают» друг друга. Данное направление получило дальнейшее развитие в работе Nowak, Zigmund (1990), где рассматривались стратегии, учитывающие лишь поведение партнера в предыдущем повторении, но допускающие случайный выбор собственного варианта поведения. Каждая стратегия описывалась вероятностями p^k и $p^э$ выбора кооперативного поведения в ответ, соответственно, на кооперативное и эгоистическое поведение партнера. Моделирование эволюции показало, что в данном случае при малых вероятностях ошибок победителем является стратегия «generous Tit for Tat» $(p^k = 1,\ p^э = 1/3)$, прощающая эгоистичное поведение партнера с указанной вероятностью.

Позднее эти исследователи (Nowak, Zigmund, 1992) изучили модель с более широким множеством стратегий, где выбор зависел как от поведения партнера , так и от собственного поведения в предыдущем повторении. На этот раз "победителем" процесса отбора оказалась другая стратегия, названная WSLS ("win-stay, lose-shift"). Согласно ей игрок использует прежний вариант поведения, если получил в последнем повторении хороший выигрыш

($u_{эк}$ или $u_{кк}$), и меняет поведение, если выигрыш был плохим ($u_{кэ}$ или $u_{ээ}$). Такая стратегия позволяет эффективно устранять последствия случайных ошибок.

Общий вывод из упомянутых работ состоит в том, что естественная эволюция поведения отбирает стратегии, которые поддерживают кооперативное поведение.

В другом направлении исследований, связанных с повторяющимися играми, получен ряд важных результатов, получивших название “Народных теорем” (Folk Theorems) (что связано с большим числом специалистов, работавших независимо и внесших вклад в получение этих результатов). Эти результаты характеризуют множества равновесий Нэша и совершенных подыгровых равновесий в таких играх. В первой версии (Aumann, 1961) рассматривалась сверхигра, в которой значением выигрыша каждого игрока был нижний предел его среднего выигрыша за T повторений при $T \to \infty$. Было показано, что каждому достижимому и индивидуально рациональному исходу однократной игры соответствует равновесие Нэша в этой сверхигре. При достаточно общих предположениях об исходной игре Γ этот результат обобщается для дисконтированных сверхигр: каждый такой исход игры Γ может быть аппроксимирован равновесными исходами дисконтированных сверхигр при стремлении коэффициента дисконтирования к 1 (Friedman, 1971, Buhler, 1973). Fudenberg и Maskin, 1986, доказали аналогичное утверждение для совершенных подыгровых равновесий дисконтированных сверхигр. Для игр, где существует более чем одно равновесие Нэша, Benoit и Krishna (1985) показали, что множество исходов совершенных подыгровых равновесий для T-кратного повторения исходной игры Γ стремится (в метрике Хаусдорфа) к тому же множеству при стремлении T к бесконечности.

Применительно к вопросу об эволюции кооперации эти результаты означают, что кооперация не выделяется среди многих других равновесных форм поведения (см. рис. 4.1). Оставалась, однако, возможность того, что кооперативный исход является единственным устойчивым в некотором смысле, или, по крайней мере, множество соответствующих стратегий имеет значительную область притяжения в пространстве начальных распределений по стратегиям.

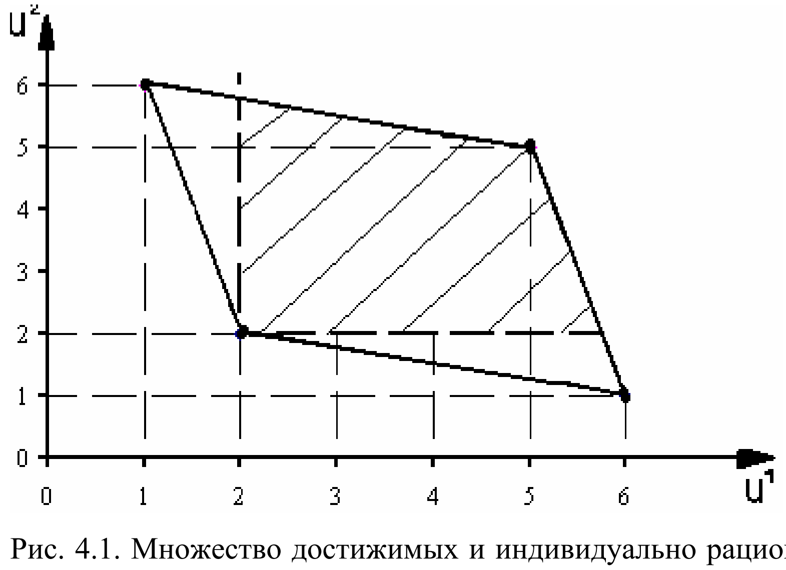

Рис. 4.1. Множество достижимых и индивидуально рациональных исходов в «Дилемме заключенного».

В этом смысле важное значение имеет последняя версия Народной теоремы, предложенная в работах (Васин, 1994, 1999). В ней рассматриваются решения по доминированию для повторяющихся игр с возмущенными функциями выигрыша. Решение путем последовательного исключения строго доминируемых стратегий (Moulin, 1986) представляет особый интерес с точки зрения изучения динамики поведения. Для широкого круга динамических систем, к которому относятся «нащупывание по Курно», адаптивные динамики, динамика репликаторов и динамики отбора показано, что частота использования строго доминируемых стратегий стремится с течением времени к нулю (см. п. 5 гл. I, а также Moulin, 1984, Васин, 1989, Nachbar, 1990).

Однако, прямое применение метода последовательного исключения доминируемых стратегий к повторяющимся играм не дает никаких интересных результатов. Трудность здесь заключается в том, что множества, которые остаются после исключения строго доминируемых стратегий, содержат все стратегии, входящие в равновесия Нэша повторяющейся игры и соответствующие согласно Народной теореме всевозможным индивидуально рациональным исходам. Выходом является рассмотрение повторяющихся игр с возмущенными функциями выигрыша, отличающимися от исходных менее чем на некоторую заданную величину. Radner (1980) рассматривал равновесия Нэша с подобными возмущениями для повторяющейся олигополии. Fudenberg и Levine (1983) развили этот подход и исследовали совершенное подыгровое равновесие для произвольных возмущенных повторяющихся игр.

В работах (Васин, 1994, 1999) установлено, что множество исходов, соответствующих решениям по строгому доминированию возмущенных повторяющихся игр с конечным временем, а также сверхигр с дисконтированием, стремится к множеству достижимых и индивидуально рациональных исходов однократной игры, когда число повторений стремится к бесконечности (или, соответственно, дисконт стремится к 1), а параметр возмущения – к 0. По отношению к эволюции кооперации этот результат противоречит тезису об исключительности кооперативного поведения, по крайней мере для повторяющихся игр с полной информацией и неограниченной рациональностью игроков.

Построение решения по доминированию, соответствующего желаемому исходу повторяющейся игры, аналогично процедуре рекурсивного построения совершенного подыгрового равновесия (Benoit, Krishna(1985), Fudenberg, Maskin(1986)). В каждом повторении всякий игрок должен либо реализовывать намеченный исход, либо наказывать «последнего нарушителя», т.е. игрока с минимальным номером, который последним отклонился от данного правила, если тот еще не заплатил полностью за свое нарушение.

Наиболее важным новым элементом является изменение функций выигрыша, которое можно интерпретировать как вмешательство в игру некоторого управляющего центра, названного ниже манипулятором (например, «крестного отца» мафии, желающего добиться нужного ему поведения игроков). Этот центр прерывает игру после достаточно большого числа повторений и поощряет или наказывает игроков в зависимости от их предыдущего поведения. Наличие такого центра характерно для некоторых взаимодействий в социальных популяцях. К примеру, достаточно вспомнить следователя в первоначальной версии «Дилеммы заключенного» (см. Льюс и Райфа, 1961), очевидно, незаинтересованного в кооперативном поведении игроков. Общая концепция кооперативного поведения выглядит достаточно спорной в ситуациях, когда взаимодействуют люди с различными интересами и несимметричными позициями.

Далее в этой главе излагаются два варианта “Народной Теоремы” для решений по доминированию конечной повторяющейся игры и сверхигры с дисконтированием (раздел 2), затем приводится ее простое доказательство для исходов, в которых каждый из игроков получает не меньше, чем в некотором равновесии Нэша в исходной игре. Этот случай включает все индивидуально рациональные исходы в любой биматричной игре 2х2, где есть равновесие в чистых стратегиях, в частности в “Дилемме заключенного". В разделе 4 этот результат обобщается для случая, когда в исходной игре с малой вероятностью игроки допускают случайные ошибки в своих действиях (см. Selten, 1975). В конце дается краткий обзор теоретических результатов, которые подтверждают сходимость к кооперативному поведению для моделей эволюционного поведения, и обсуждаются причины расхождения в выводах.

2. Формальные определения и основные теоремы о решениях по доминированию

Пусть $\Gamma =< A, S^a, u^a(s), a \in A >$ - исходная игра в нормальной форме. Сверхигра $\tilde{\Gamma}$ представляет собой последовательность повторений данной игры Γ в моменты $t = 0,1,\ldots$. Чтобы избежать путаницы между стратегиями в исходной и повторяющейся играх, первые далее будем называть альтернативами. На каждом шаге t каждый игрок знает альтернативы, выбранные всеми участниками на предыдущих шагах.

Обозначим через $s(t) \in S$ набор альтернатив на шаге t, $h^t = (s(0),\ldots,s(t-1))$ - предысторию к данному шагу, $(S)^t$ - t-кратное произведение S, $H = \bigcup_{t=0}^{\infty}(S)^t$ - множество всех предысторий ($(S)^0 \overset{def}{=} \{0\}$). Стратегией игрока a является отображение $\mu^a : H \to S^a$, определяющее выбор альтернативы для каждого шага t в зависимости от предыстории h^t. Набор стратегий $\mu = (\mu^a, a \in A)$ определяет ход сверхигры $h(\mu) = \{s(t,\mu)\}_{t=0}^{\infty}$, где $s(0,\mu) = \mu(0), s(t,\mu) = \mu(s(0,\mu),\ldots,s(t-1,\mu)), t \geq 1$. В сверхигре $\tilde{\Gamma}_d$ с коэффициентом дисконтирования $d \in (0,1)$ выигрыш игрока a определяется как $F_d^a(\mu) = (1-d)\sum_{t=0}^{\infty}(d)^t u^a(s(t,\mu))$.

Обозначим через Γ_T и $\Gamma_{\{T,d\}}$ T-кратное повторение игры Γ с функциями выигрыша, определенными соответственно средним и дисконтированным средним значениям выигрыша:

$$U^a{}_{T,d}(\mu) = \sum_{t=0}^{T-1} d^t u^a(s(t,\mu))(1-d)/(1-d^T),$$

$$U^a{}_T(\mu) = \sum_{t=0}^{T-1} u^a(s(t,\mu))/T$$

Для любой игры Γ со множествами стратегий S^a и функциями выигрыша $u^a(s), i = 1,\ldots,n$, и для любого $\varepsilon > 0$, обозначим через $O(\Gamma,\varepsilon)$ множество игр с теми же множествами стратегий и функциями выигрыша $v^a(s)$, отличающимися от $u^a(s)$ менее, чем на ε. Таким образом можно рассматривать множество возмущенных сверхигр $O(\tilde{\Gamma},\varepsilon)$. Следует отметить, что возмущенная повторяющаяся игра $\hat{\Gamma} \in O(\tilde{\Gamma},\varepsilon)$ получается из $\tilde{\Gamma}$ возмущением ее функций выигрыша. Множество $O(\tilde{\Gamma},\varepsilon)$ является более широким, чем множество повторяющихся игр, полученных повторением возмущенных исходных игр $\Gamma' \in O(\Gamma,\varepsilon)$. Приводимые ниже Теоремы 1 и 2 описывают предельные множества исходов, соответствующих решениям по доминированию игр $\hat{\Gamma} \in O(\Gamma_T,\varepsilon)$ и $\bar{\Gamma} \in O(\tilde{\Gamma}_d,\varepsilon)$, при T, стремящемся к бесконечности, d стремящемся к 1 и ε стремящемся к 0.

Пусть v^a - минимаксный выигрыш игрока a, а $m(a)$- некоторое "оптимальное наказание" этого игрока:

$$v^a = \min_s \max_{s^a} u^a(s \parallel s^a) = \max_{s^a} u^a(m(a) \parallel s^a)$$

Пусть $W = \{u(s), s \in S\}$ - множество векторов выигрышей, CoW - выпуклая оболочка этого множества и $\Phi = \{w \in CoW \mid w \geq v\}$ - множество достижимых и индивидуально рациональных исходов в игре Γ, $M = \max_{s,z \in S} | u(s) - u(z) |$. В дальнейшем мы будем рассматривать только чистые стратегии и альтернативы.

Для решений по доминированию повторяющихся игр с возмущенными функциями выигрыша справедливы следующие утверждения:

Теорема 4.1 *(Vasin, 1999,б). Множество векторов выигрышей, соответствующих решениям по строгому доминированию игр $\hat{\Gamma} \in O(\tilde{\Gamma}_T,\varepsilon)$, сходится (по Хаусдорфу) ко множеству Φ при T стремящемся к ∞ и ε стремящемся к 0.*

Теорема 4.2 *(Vasin, 1999,б). Множество векторов выигрышей, соответствующих решениям по строгому доминированию игр $\hat{\Gamma} \in O(\tilde{\Gamma}_d,\varepsilon)$, сходится (по Хаусдорфу) ко множеству Φ при d стремящемся к 1 и ε стремящемся к 0.*

Доказательства этих теорем, изложенные в Приложении, в общем случае являются довольно громоздкими и сложными.

3. Конструкция решения по доминированию для исхода, доминирующего равновесие Нэша исходной игры

В данном разделе рассматривается случай исходной игры , в которой имеется равновесие Нэша $\bar{s}$. Для всякой последовательности ситуаций $z1,...,zr$, такой, что $\sum_k u(zk)/r \geq u(\bar{s})$, опишем простой механизм возмущения платежных функций и набор стратегий, который обеспечивает реализацию этой последовательности и является решением по доминированию в повторяющейся игре с возмущенными платежными функциями.

Проиллюстрируем процедуру построения решения по доминированию, соответствующего заданному вектору выигрышей, на следующем примере. Рассмотрим исходную игру с множествами альтернатив $S^1 = S^2 = \{1,2,3\}$ и платежной матрицей

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} (5,5,0) & (1,0,0) & (0,3,5) \\ (0,1,0) & (1,1,2) & (0,0,0) \\ (3,0,5) & (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}} \end{array},$$

где третий компонент показывает выигрыш манипулятора, который не участвует в игре, но заинтересован в исходе игры. Более точно, мы предполагаем, что он будет стараться максимизировать свой выигрыш за T шагов. Таким образом, действия, соответствующие наборам (1,1) и (2,2), будут соответственно "кооперативным" и "плохим" равновесием Нэша для активных игроков, а чередование между (1,3) и (3,1) – оптимальными для манипулятора среди последовательностей действий, которые индивидуально рациональны для игроков 1, 2.

Если манипулятор не вмешивается, тогда естественный исход игры будет повторением кооперативного равновесия. Наша цель – описать возмущение функции выигрыша в Γ_T, в результате которого чередование ситуаций (1, 3) и (3, 1) является решением по доминированию в возмущенной повторяющейся игре. Соответствующая стратегия каждого игрока - это чередование указанных альтернатив до первого отклонения и постоянная реализация альтернативы 2, после того, как отклонение произошло. Возмущение функции выигрыша может быть интерпретировано как "вознаграждение", которое манипулятор платит игрокам за "хорошее поведение" в игре. Объем "вознаграждения" составляет 6/T. Если никто не отклоняется от чередования (1, 3) и (3, 1), тогда оба игрока получают свое вознаграждение.

Исключение по слабому доминированию может быть реализовано следующим образом. Вначале мы можем исключить все такие стратегии, при которых первый игрок был к этому моменту "последним нарушителем", а второй игрок использовал действие 2 в этот момент времени, то отклонение невыгодно. В противном случае игрок 1 может выиграть 5/T за счет отклонения, а потеряет 6/T, потому что станет "последним нарушителем" либо потеряет шанс передать эту метку второму игроку. На следующем этапе исключения каждая стратегия, которая допускает отклонение второго игрока, во время T-1, исключается таким же образом. Далее мы продолжаем то же рассуждение для моментов времени T-2, T-3 и т.д. После 2T шагов исключения мы получим желаемое решение.

Таким образом, затратив на вознаграждение величину 12/T, манипулятор увеличивает свой выигрыш с 0 до 5 в данном примере.

Далее рассмотрим общий случай, когда желаемое поведение соответствует последовательности $z1,...,zr$. В этом случае стратегия выглядит следующим образом. Игроки повторяют эту последовательность до тех пор, пока кто-то из них от нее не отклонится. В этом случае они переходят на ситуацию $\bar{s}$ и реализуют ее вплоть до конца игры. Для определения возмущения платежных функций рассмотрим последнего нарушителя, т.е. того игрока (с минимальным номером), который последним не поддержал указанное правило поведения. Этот игрок наказывается штрафом rM/T. Формально положим

$\mu^a * (h^t) = z^a t_{mod\ r}$ если $\forall \tau < t \quad s(\tau) = z\tau_{\mathrm{mod}\ r}$, (4.3.1)

иначе $\mu^a * (h^t) = \bar{s}^a$

Для любой траектории h^T определим

$\tau(h^t) = max\{ \tau < t \mid s(\tau) \neq \mu^* (h^\tau)\}$

как последний до t момент отклонения и

$a(h^t) = min\{ a \mid s^a (\tau(h^t)) \neq \mu^{a^*} (h^{\tau(h^t)})\}$

как последнего нарушителя к моменту t. Штраф за отклонение составляет $\varphi^a (h^T) = rM / T$ для $a = a(h^T)$ и 0 для любого другого a. Таким образом, возмущенная платежная функция имеет вид

$\widehat{F}^a (\mu) = F^a{}_T (\mu) - \varphi^a (h(\mu)), \quad a = 1,...,n$ (4.3.2)

Утверждение 4.1. *Набор стратегий μ^*, определенный согласно (4.3.1), представляет собой решение по доминированию для игры $\widehat{\Gamma}$ с функциями выигрыша (4.3.2).*

4. Теорема для повторяющейся игры со случайными ошибками

Случайные ошибки приносят некоторые сложности в построенную схему регулирования поведения. Рассмотрим игру $G_{T,\delta}$ - повторяющуюся игру со случайными ошибками. В этой игре, для всякой предыстории h^t для данной стратегии m_i игрока i в момент t реализуется альтернатива $m_i(h^t)$ с вероятностью $1-\delta$ и любая другая альтернатива с вероятностью $\delta /(| S^i | -1)$. Всякий набор стратегий m определяет вероятностное распределение $P_\delta (h^T \mid m)$ на множестве h^T. Ожидаемый выигрыш каждого игрока есть $g_i(m) = \sum_{h^T} P_d(h^T \mid m) F_i(h^T)$

Предположим, что желаемое поведение игроков соответствует набору альтернатив $s*$ такому, что $f(s*) \geq f(\bar{s})$ для некоторого равновесия Нэша $\bar{s}$.Рассмотрим набор стратегий $m*$, соответствующий $s*$ аналогично тому, как это было сделано выше. Определим возмущение платежных функций следующим образом. Для всякого h^T, можно вычислить последнего отклонившегося на шаге T так же, как и в предыдущем случае. Пусть он платит штраф $\overline{\varphi}$, в то время как остальные игроки ничего не платят. Формально, значение штрафа определяется следующей функцией:

$\varphi_i(h^T) = \overline{\varphi}$ если $i = i(h^T)$ иначе $\varphi_i(h^T) = 0$. (4.4.1)

Рассмотрим игру $\hat{G}^T$ с платежными функциями.

$\hat{g}_i(m) = \sum_{h^T} p(h^T \mid m)(F_i(h^T) - \varphi_i(h^T))$

Утверждение 4.2. *Пусть значение штрафа* $\overline{\varphi} > M/(Ta^T)$, *где* $a \overset{def}{=} (1-\delta)^n$. *Тогда* m^* *есть решение по строгому доминированию для игры* $\hat{G}^T$, *если* $1-\delta > \delta/|S_i|,\ i=1,...,n$.

Утверждение 4.3. *Среднее время реализации* s^* *в игре* $\hat{G}$ *при использовании набора стратегий* m^* *составляет*

$$\tau(T) = (1-a^T)/(1-a) - Ta^{T-1}(1-a) \qquad (4.4.2)$$

Теорема 4.3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta' > 0$ *и* T' *такие что, для любого* $\delta < \delta'$ *и* $T < T'$ *каждый набор альтернатив* s^*, *такой что* $f_i(s^*) \geq f_i(\overline{s}), i=1,...,n$, *может быть реализован решением по строгому доминированию* m *соответствующей игры* $\hat{G} \in A(G_T, \varepsilon)$, *при этом ожидаемая доля времени, когда реализуется* s^*, *превосходит* $1-\varepsilon$.

5. Приложение

Доказательство теоремы 4.1 опирается на следующее утверждение:

Утверждение 4.4.*(Vasin, 1989, стр.75) Для любой игры* Γ *с решением по слабому доминированию* $\overline{s}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует игра* $\bar{\Gamma} \in A(\Gamma, \varepsilon)$ *такая, что* $\overline{s}$ *является решением по строгому доминированию игры* $\bar{\Gamma}$.

Доказательство теоремы 4.1.

Этап 1.

Рассмотрим случай, когда в игре Γ есть, по крайней мере, два равновесия Нэша и множество Φ имеет полную размерность. Тогда согласно работе Benoit и Krishna (1985) для любого $\delta > 0$ и достаточно большого T, для любого исхода $w^* \in \Phi$ такого, что $\mathrm{w}_i^* > v_i + \delta$, $i=1,..,n$, существует совершенное подыгровое равновесие μ^* игры Γ_T, для которого $\left|F_{i,T}(\mu^*) - w_i^*\right| < \varepsilon/4,\ i=1,...,n$

Для любого набора стратегий μ обозначим $I(\mu,t) = \left\{ i \middle| s_i^t(\mu) \neq \mu_i^*(s^0(\mu),...,s^{t-1}(\mu)\right\}$ множество игроков, которые отклонились от μ в момент t. Если $I(\mu,\ )$ содержит двух и более игроков, то, согласно набору μ^*, все игроки с момента t+1 действуют, как будто только игрок с минимальным номером отклонился в момент t. Обозначим $\tau(t) = \max\left\{ \tau \middle| \tau \leq t-1 \text{ и } I(\mu,\tau) \neq 0 \right\}$ - момент последнего отклонения перед t, и

$i(\mu,\mathrm{t}) = \min\left\{ I(\mu,\tau(t)) \right\}$ - «последнего нарушителя к моменту t» , т.е. последнего игрока с минимальным номером, отклонившегося от μ^* к данному моменту.

Определим возмущенную повторяющуюся игру $\hat{\Gamma}$. Изменения выигрышей игроков определяются следующим образом

$P_i(\mu,T)=0$ для $i \neq i(\mu,T)$; $P_{i(\mu,T)}(\mu,T)=-M/T$.

Таким образом, это изменение наказывает последнего нарушителя к моменту *T*. Рассмотрим возмущенные функции выигрыша:

$$\hat{F}_i(\mu)=F_{i,T}(\mu)-F_{i,T}(\mu^*)+w_i^*+P_i(\mu,T),\ i=1,\ldots,n.$$

Отметим, что $\hat{F}(\mu^*)=w^*$. Выберем достаточно большое *T*, чтобы выполнялось $M/T<\varepsilon/4$. Тогда поскольку $\hat{\Gamma}\in A(\Gamma_T,\varepsilon)$ пока $\left|F_{i,T}(\mu)-\hat{F}_i(\mu)\right|<\varepsilon$. Согласно утверждению, для завершения доказательства в этом случае достаточно показать, что μ^* – решение по слабому доминированию игры $\hat{\Gamma}$.Поскольку выигрыши не зависят от $\mu(h^t)$ при $t\geq T$, можно отбросить по слабому доминированию любую стратегию, отклоняющуюся от μ^* после периода *T*.

Далее проведем доказательство по индукции. Пусть для каждого игрока 1, 2, .., *i*-1 исключены все стратегии, отклоняющиеся от μ^* после момента *t,* и для игроков *i, .., n* после момента *t*+1. Покажем, что после этого любую стратегию игрока i, отклоняющуюся от μ^* в момент *t*, также можно исключить по доминированию. Если *i* является последним нарушителем в момент t и другие игроки не отклоняются от μ^*, то игрок *i* не может выиграть за счет отклонения, поскольку μ^* является равновесием. В противном случае отклонение может принести игроку не более *M/T* в оставшиеся периоды. Но при этом i либо окажется последним нарушителем с момента *t*+ 1, или упустит шанс передать эту метку другому игроку. В любом случае *i* придется платить штраф *M/T*. Таким образом, следование стратегии μ_i^* с момента *t* является слабо доминирующей стратегией при любой предыстории.

Наконец, покажем, что для любого $w^*\in\Phi$ можно обеспечить выполнение неравенств $w_i^*>v_i+\delta$, *i*= 1, ..,*n*, с помощью соответствующего возмущения функции выигрыша f_i, $i\in I$ Поскольку Φ является множеством полной размерности, найдется $w'\in\Phi$ такой, что $w_i'>v_i$, $i\in I$. Рассмотрим игру $\overline{\Gamma}$ с функциями выигрыша $\bar{f}_i$, $i\in I$, такими что для любого $x\in X$ $\bar{f}(x)=f(x)+\bar{\varepsilon}(w^*-w')$. В этой игре значение минимакса $\bar{v}_i=v_i+\bar{\varepsilon}(w_i^*-w_i')<w_i^*$ для любого $i\in I$, если $\bar{\varepsilon}>0$ достаточно мало. Поскольку векторы $\overline{w}'\stackrel{def}{=}w'+\bar{\varepsilon}(w^*-w')$ и $\overline{w}^*\stackrel{def}{=}w^*+\bar{\varepsilon}(w^*-w')$ являются достижимыми в $\overline{\Gamma}$, то вектор w^* также является достижимым как их выпуклая комбинация: $w^*=(1-\bar{\varepsilon})\overline{w}^*+\bar{\varepsilon}\overline{w}'$.

Этап 2.

Рассмотрим игру *Г*, не удовлетворяющую условиям теоремы Бенуа-Кришны. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся τ и $\hat{\Gamma}\in A(\Gamma_\tau,\varepsilon)$, такие что $\hat{\Gamma}$ удовлетворяет условиям этой теоремы. Поскольку у каждого игрока есть по меньшей мере две стратегии, можно обеспечить полную размерность множества CoW путем возмущения функций f_i, *i* = 1, ..,*n*.

Теперь построим игру $\hat{\Gamma}$ с двумя различными равновесными векторами выигрыша. Поскольку $w^* \in \Phi$, существуют T и μ^*, такие что $\left|F_T(\mu^*) - w^*\right| < \varepsilon/4$. Обозначим $F'_T(\mu) = F_T(\mu) + w^* - F_T(\mu^*)$. Рассмотрим игру с платежными функциями F'_T как одношаговую игру G^*, а μ^* - как s^*. Для любого τ рассмотрим повторяющуюся игру $G^*{}_\tau$ и определим набор стратегий $\overline{\mu}$, в котором игроки реализуют s^* в моменты времени $t = 0,..,\tau-1,$ а если отклонение от s^* случается в момент t, то они наказывают последнего нарушителя i с момента t+1. Выберем $s'_i \neq s^*_i$, i = 1, .. ,n, и определим набор стратегий μ' таким же образом с единственным отличием: игроки начинают с ситуации s' в момент 0 и реализуют s^* с периода 1. Определим изменения платежей следующим образом: если $s^t(\mu) = s^*, t = 0,..,\tau-1$, то $P_i(\mu) = 0, i = 1,..,n;$ если $s^t = s^t(\mu'), t = 0,..,\tau-1,$ то $P_i(\mu) = -M/\tau, i = 1,..,n;$ иначе $P_i(\mu) = -3M/\tau, i = 1,..,n.$ Теперь выберем $\tau > 4M/\varepsilon$. Тогда $\overline{\mu}$ и τ являются равновесиями Нэша с различными векторами выигрыша в игре $\hat{\Gamma} \in A(\Gamma_{T\tau}, \varepsilon)$. Следовательно, $\Phi(\hat{\Gamma})$ - множество полной размерности, поскольку этим свойством обладает $CoW(\hat{\Gamma})$.

Этап 3.

Таким образом, для любого $w^* \in \Phi$ и $\varepsilon > 0$ существуют T и $\hat{\Gamma} \in A(\Gamma_T, \varepsilon/3)$, которые удовлетворяют условиям теоремы Бенуа-Кришны, и $w^* \in \Phi(\hat{\Gamma})$. Согласно результатам этапа 1, существует T_1, такое что, для любого $T' > T_1$, w^* является исходом решения по слабому доминированию в некоторой игре $\overline{\Gamma} \in A(\hat{\Gamma}_{T'}, \varepsilon/3)$. Эта игра может быть рассмотрена как игра из множества $A(\Gamma_{TT'}, \varepsilon/3)$.

Наконец, существует такое T_2, что $\left|F_{TT'+k}(\mu) - F_{TT'}(\mu)\right| < \varepsilon/3$ для любых $\mu, k = 1,2,..,T-1$ и $T' > T_2$. Таким образом, для любого t> $t\max(T_1, T_2)$, w^* является решением по слабому доминированию в некоторой игре $\overline{\Gamma} \in A(\Gamma_t, \varepsilon)$.□

Доказательство теоремы 4.2.

Согласно предыдущему доказательству, найдется T такое, что для любого $w^* \in \Phi$ существуют функции $\hat{F}(\{s^t\}_{t=0}^{T-1})$, удовлетворяющие следующему неравенству:

$$\left|\hat{F}(\{s^t\}_{t=0}^{T-1}) - \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} f(s^t)\right| < \varepsilon/4 \qquad (4.5.1)$$

для любого $\{s^t\}_{t=0}^{T-1}$, и w^* является решением по слабому доминированию игры с функциями выигрыша $\hat{F}(\{s^t(\mu)\}_{t=0}^{T-1})$. Выберем $\overline{d} < 1$ такое, что

$$(1 + \overline{d} + ... + \overline{d}^{T-1}) > T(1 - \frac{\varepsilon}{4M}) \qquad (4.5.2)$$

Покажем, что $\bar{d}$ удовлетворяет условиям теоремы. Для любого $d \in (\bar{d},1)$ и $w^* \in \Phi$ определим функции выигрыша возмущенной суперигры следующим образом:

$$F^*(\mu) = (1-d)T\sum_{k=0}^{n-1} d^{kT}\hat{F}(\{s^{kT+t}(\mu)\}_{t=0}^{T-1}) + d^{nT}w^* \ .$$

Таким образом, рассмотрим суперигру как последовательность Т-кратных повторений игры *Г*; останавливаем эту последовательность после *n* этапов и заменяем $T\hat{F}$ для $\sum_{t=0}^{T-1} d^t f(s^{kT+t})$ оценкой общего выигрыша в *k*-ом *T*-кратном повторении, $k \le n$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

a) если *n* достаточно большое, то $\left|F^*(\mu) - F^d(\mu)\right| < \varepsilon$ для любого μ.

b) w^* – является решением по слабому доминированию с функциями выигрыша $F^*(\mu)$.

Покажем это.

a) Пусть $\varepsilon < M$. Выберем n настолько большим, чтобы

$$d^{nT}M < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (4.5.3)$$

Тогда, согласно (4.5.1)-(4.5.3),

$$\left|F^*(\mu) - F^d(\mu)\right| \le (1-d)\sum_{k=1}^{n} d^{(k-1)T}\left|T\hat{F}(\{x^{kT+t}(\mu)\}_{t=0}^{T-1}) - \sum_{t=0}^{T-1} f(x^{kT+t})\right| +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}\left|f(x^{kT+t})\right|(1-d^t) + \frac{\varepsilon}{4} \le$$

$$\le (1-d)\frac{T\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n-1} d^{kT} + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{1-d}{1-d^T}T\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{4M}} + \frac{\varepsilon}{4} \le \varepsilon$$

b) Пусть $\hat{\mu}$ соответствует решению по слабому доминированию для w^* в игре $\hat{\Gamma}$ с функциями выигрыша $\hat{F}$. Определим стратегию μ^* так

$$\mu^*(\{s^\tau\}_{\tau=0}^{kT+t}) = \hat{\mu}(\{s^\tau\}_{\tau=kT}^{kT+t})$$

для любого $t = 0,1,..,T-1$ и $k = 0,1,..,n,...$. Таким образом, в каждом *T*-кратном повторении игроки действуют согласно $\hat{\mu}$ независимо от предыстории. Покажем, что μ^* является решением по слабому доминированию в игре с функциями выигрыша F^*. На первом этапе, каждая стратегия μ_i, такая, что $\mu_i(h^t) \ne \mu_i^*(h^t)$ для некоторого h^t и $t \ge nT$, может быть отброшена с момента, когда выигрыш перестает зависеть от этих компонентов.

Затем, рассмотрим любую стратегию μ_i, такую что

$$\mu_i(h^t) \ne \hat{\mu}_i(\{s^\tau\}_{\tau=(n-1)T}^{t})$$

для некоторой предыстории $h^t = \{s^\tau\}_{\tau=0}^t, (n-1)T \le t \le nT$. Эта стратегия может быть исключена последовательными исключениями по слабому доминированию так же, как соответствующие μ_i, такие что $\mu_i(\{y^\tau\}_{\tau=0}^{\bar{t}}) \overset{def}{=} \mu_i(\{x^\tau\}_{\tau=0}^{(n-1)T-1}, \{y^\tau\}_{\tau=0}^{t})$ для любого $\bar{t} < T$ и $\{y^\tau\}_{\tau=0}^{\bar{t}}$ в игре $\hat{\Gamma}$.

Для оставшихся стратегий, выигрыш не зависит от поведения игроков с момента $(n-1)T$, и к этому моменту можно сделать то же для любого t, такого что $(n-2)T \le t < (n-1)T$. Проведем вычисления по индукции для $kT \le t < (k+1)T, k = n-3, n-4, ..., 0.$. Наконец, получим μ^* как решение по слабому доминированию.□

Доказательство теоремы 4.3. Рассмотрим игру $\hat{G}_T$ с возмущением функций выигрыша $\varphi **$. Для достаточно малого d, набор стратегий $m**$ есть решение по строгому доминированию, если штраф превосходит $dMexp(kn)/k$. Ожидаемая доля времени, когда реализуется $s*$,. определяется согласно выражению (4.4.2). Для того, чтобы эта доля была меньше $1-\varepsilon$, положим k таким что $1-e^{-nk} > nk(1-\varepsilon)$. Поскольку $e^{-nk} < 1 - nk + nk^2/2$ достаточно положить $k = 2\varepsilon / n$. Теперь, чтобы суммарное возмущение было меньше ε, выберем d таким, что $ndMe^{2\varepsilon}/2 < \varepsilon$. Для этого достаточно положить $\overline{d} = \varepsilon^2 / nM$. Наконец, T должно быть достаточно большим, чтобы его можно было разделить на равные интервалы длиной $k/d = 4M/\varepsilon$.□

Доказательство утверждения 4.1 фактически повторяет приведенные выше рассуждения. Рассмотрим 1-ого игрока и любую стратегию μ^1, такую, что $\mu^{1^*}(h^{T-1}) \ne \mu^{1^*}(h^{T-1})$ для некоторой истории h^{T-1}. Покажем, что стратегия $\overline{\mu}^1$, т.е. $\overline{\mu}^1(h^t) = \mu^1(h^t)$ для $t < T-1$ и $\overline{\mu}^1(h^{T-1}) = \mu^{1^*}(h^{T-1})$ для всякого h^{T-1} слабо доминирует μ^1. Рассмотрим произвольный набор стратегий μ, содержащий μ^1 Если $h^{T-1}(\mu) = h^{T-1}(\mu^*)$, тогда отклонение от $\mu^{1^*}(h^{T-1}(\mu))$ невыгодно, поскольку оно приводит к тому, что 1-ый игрок становится последним отклонившимся, и он должен заплатить штраф rM/T, в то время как от отклонения он получит не более чем M/T. В противном случае предположим, что последнее отклонение имело место до $T-1$. Если $a(\mu, T-1) \ne 1$ или $(s^j(h^{T-1}(\mu)) \ne \overline{s}^j$ для некоторого $j \ne 1$, тогда, отклоняясь, 1-ый игрок теряет возможность передать статус последнего отклонившегося другому игроку, и приходим к предыдущему случаю. В противном случае отклонение ничего не меняет, поскольку $\overline{s}$ – равновесие Нэша. Рассуждения повторяются по индукции для $a = 2,3,...,n$ при $t = T-2,...,0$. Единственное изменение заключается в том, что, отклоняясь на шаге $T-k$. Игрок может получить самое большее $\min\{k, r\}M$.□

Доказательство утверждения 4.2. Предположим, что для любого $i = 1,...,n$ мы уже исключили все стратегии m_i, такие что $m_i(h^\tau) \ne m_i^*(h^\tau)$ для некоторых $\tau > t, h^\tau$. Рассмотрим произвольные h^t и m_1, такие что $m_1(h^t) = z_1 \ne m_1^*(h^t)$. Покажем, что $\overline{m}_1$, такое, что $\overline{m}_1(h^t) = m_1^*(h^t)$, $\overline{m}_1(h'^\tau) = m_1^*(h'^\tau)$, для всяких других τ, h', строго доминирует m_1. Сначала рассмотрим случай, когда 1 является последним отклонившемся после h^t. Затем, в соответствии с $m*$, игроки играют $\bar{s}$ с момента t вплоть до окончания игры. Пусть $\hat{g}_i(h^t,m)$ обозначает ожидаемый выигрыш игрока i в игре $\hat{G}$ при предыстории h^t и наборе стратегий m. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\hat{g}_1(h^t, m\|\overline{m}_1) - \hat{g}_1(h^t, m) >$$
$$\min_x((1-\delta)^2 - (\delta/|X_i|)^2)(\hat{g}_1(h^t,(x\|\overline{x}_1),m^*) - \hat{g}_1(h^t,(x\|\overline{z}_1),m^*))$$

Рассмотрим последнюю разность. Если $s = \bar{s}$, тогда игрок 1 ничего не выигрывает в результате отклонения, поскольку $\bar{s}$ является равновесием Нэша, а поведение с момента $t+1$ не зависит от s_1^t. В противном случае, отклоняясь от $\bar{s}_1$, игрок 1 выигрывает максимум M, но увеличивает при этом в $a^{(T-t-1)}$. раз вероятность стать последним нарушителем в момент времени на шаге T и заплатить штраф $\overline{\varphi}$ Таким образом, $\overline{m}_1 \succ m_1$. Аналогичные рассуждения справедливы, если какой-то другой игрок становится последним нарушителем к шагу t. Если никто не отклоняется к этому моменту, тогда единственное отличие от уже рассмотренного случая заключается в том, что ожидаемый общий выигрыш в повторениях, начиная с $t+1$ сокращается в результате отклонения, поскольку игрокам предстоит переключиться с $s*$ на $\bar{s}$. Аналогичные рассуждения для игроков $2,...,n$ завершают доказательство.□

Доказательство утверждения 4.3. Вероятность использования $s*$ в течение t периодов, $t < T$ составляет $a^t(1-a)$, а для T эта вероятность равна a^T. Таким образом, среднее время есть $(1-a)\sum_{1}^{T-1}\tau a^{\tau} + Ta^T$, что совпадает с (4.4.2).

Исходя из Предложений 4.2 и 4.3 , набор $m*$ не обеспечивает желательного поведения при $T > 1/\delta$. Допустим, что $T = k/\delta$ для некоторого $k > 1$. Тогда, для достаточно малого δ, $a \approx 1 - n\delta, a^T \approx \exp(-nk)$, ожидаемая доля времени, когда реализуется $x*$ составляет $\tau(T)/T \approx (1-e^{-nk})/nk - \delta n(1-n\delta)^{-1}e^{-nk}$ и стремится к 0 при k, стремящимся к бесконечности, в то время как необходимый объем штрафа $\delta M \exp(kn)/k$ стремится к бесконечности.

Возможность улучшения указанной стратегии связана с разбиением времени игры на s интервалов одинаковой длины $\overline{T} = k/\delta$ и реализации набора $m*$ независимо в каждом интервале. Обозначим через $m**$ этот набор стратегий. Соответствующее возмущение функции выигрыша состоит в том, что после каждого интервала игроки платят штраф (4.4.1) в зависимости от их поведения на этом интервале. Пусть ожидаемое возмущение суммарной функции выигрыша есть $\varphi**(h^T)$. Тогда максимальная величина возмущения имеет порядок δMexp(kn)/k при достаточно малых δ и $k \approx O(1/\delta^{1/s}), s \in Z$. Для набора стратегий $m**$ среднее время, отнесенное к T, такое же как в (4.4.2).□

Литература.

1. Акимушкин И. (1985). “Невидимые нити природы”// М: Мысль.
2. Барабашин Е.А. (1970). “Функции Ляпунова”// Издательство “Наука”, главная редакция физико-математической литературы, Москва.
3. Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А., Поманский А.Б., Шапиро А.Д. (1974). “Итеративные методы в теории игр и программировании”// Москва, "Наука".
4. Богданов А.В. (1999) “Об условиях сходимости итерационного метода Брауна-Робинсон для биматричных игр”// сборник “Прикладная математика и информатика” № 2.
5. Васин А.А. (1987) “О моделировании динамики коллективного поведения”// Системное программирование и вопросы оптимизации, М.Изд-во МГУ.
6. Васин А.А. (1989a.). “Методы теории игр в исследовании динамики коллективного поведения” //Вестник Московского Университета, сер. Вычислительная математика и кибернетика, №2.
7. Васин А.А. (1989b.). “Модели динамики коллективного поведения”/ Москва: Изд-во Московского Университета.
8. Васин А.А. (1995). “О некоторых проблемах теории коллективного поведения”// Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 2, вып. 4, научное издательство "ТВП".
9. Васин А.А. "Эволюционная модель поведения в сверхигре"// Вестник Московского университета, сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика №3
10. Васин А.А., Богданов А.В. (2002) “Модели адаптивно-подражательного поведения: I. Связь с равновесиями Нэша и решениями по доминированию”// Изв. РАН. ТиСУ. №1.
11. Васин А.А., Богданов А.В. (2002) “Модели адаптивно-подражательного поведения: II Устойчивость смешанных равновесий ”// Изв. РАН. ТиСУ. №2.
12. Вольтерра В. (1976). “Математическая теория борьбы за существование”// М.: Наука.
13. Гермейер Ю. Б. (1976). “Игры с непротивоположными интересами”// М.: Наука.
14. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. (1974). “Игры с иерархическим вектором интересов”// Изд. АН СССР, Техническая кибернетика, 3, 54-69.
15. Глазьев С.Ю. (1997)“Геноцид. Россия и новый мировой порядок. Стратегия экономического роста на пороге XXI века.”// М.: Эгра.
16. Данскин Дж. М. (1963). “Итеративный метод решения непрерывных игр”// Сборник “Бесконечные антагонистические игры”, Физматгиз, Москва.
17. Моисеев И. (1999). “Быть или не быть человечеству”// Москва.
18. Льюс Р.Д., Райфа Х. (1961). “Игры и решения”. Введение и критический обзор. // М.: ИЛ.
19. Оуэн Г. (1974). “Теория игр”// М: Мир.
20. Пасеков В.П. (1988). “Математические модели эколого-генетических взаимодействий”// В сб. “Итоги науки и техники”, сер. Математическая биология и медицина, т.2.
21. Понтрягин Л.С. (1980). “Обыкновенные дифференциальные уравнения”// Москва: Наука.
22. Робинсон Дж. (1961). “Итеративный метод решения игр”// сб. "Матричные игры", Физматгиз, Москва.

23. Семевский Ф.И., Семенов С.М. (1982). “Математическое моделирование экологических процессов”// Ленинград: Гидрометеоиздат.
24. 3rd Congress of E.S.E.B. (1991). “Abstracts”// Debrecen, Hungary.
25. Abreu D., Rubinstein A. (1988). “The structure of Nash equilibrium in repeated games with finite automata”// Econometrica 56: 1259-1282.
26. Aumann, R.J. (1961). “The Core of a Cooperative Game Without Side Payments”// In: Transactions of American Mathematical Society, V98, 535-552.
27. Aumann R.J. (1981) "Survey of repeated games"// In: Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut, Mannhiem-Wien-Zurich.
28. Axelrod R. (1984). “The Evolution of Cooperation”// New York: Basic Books.
29. Benaim Micel, Hirsch Morris W. (1994). “Learning Processes, Mixed Equilibria and Dynamical Systems arising from Repeated Games”// Preprint, University of California at Berkely.
30. Benoit, G.-P., Krishna, V. (1985). “Finitely Repeated Games”// Econometrica, 53, 905-922.
31. Binmore K.J., Samuelson L. (1992). “Evolutionary stability in repeated games played by finite automata”// J. of Econ. Theory 57: 278-305.
32. Buhler, H. (1973). “Zur Theorie Dynamisher Nichtcooperative Zwie-Personspile”// C.Oper.Res., A-17, N3, 143-156.
33. Björnerstedt J., Weibull J. (1996). “Nash equilibrium and evolution by imitation”// "The Rational Foundations of Economic Behavior", Macmillan, London.
34. Bomze I. M. (1986). “Non-cooperative two person games in biology: a classification”// International Journal of Game Theory 15.
35. Dawkins R. (1976). The Selfish Gene// Oxford.
36. Dekel E., Scotchmer S. (1992). “On the evolution of optimizing behavior”// Journal of Economic Theory 57.
37. Friebel G., Guriev S. (2000). “Why Russian workers do not move: attachment of workers through in-kind payments”// CEPR Discussion Paper No 2368.
38. Friedman, D. (1971). “Noncooperative Equilibrium for Supergames”// in Rewiwe of Economical Studies, 38, 1-12.
39. Fudenberg, D., Maskin, E. (1986). “The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and with Incomplete Information”// Econometrica, 54, 533-554.
40. Fudenberg D., Levine D.K. (1983). "Subgame perfect equilibria of finite and infinite horizon games"// J. of Econ. Theory 31: 251-268.
41. Fudenberg D., Tirole J. (1991). “Game Theory”// Cambridge: MIT Press.
42. Fudenberg D., Kreps K. (1993). “Learning Mixed Equilibria”// Games and economic behavior 5, pp.320-367.
43. Gaunersdorfer A., Hofbauer J. (1995). “Fictitious play, Shapley polygons, and the Replicator Equation”// Games and economic behavior 11.

44. Hofbauer J., Sigmund K. (1988). “Dynamical Systems and the Theory of Evolution”// Cambridge: Cambridge University Press.
45. Kandori M (1992). “Social norms and community enforcement”// Review of Economic Studies 59: 61-80.
46. Kostitzin V.A. (1937). “La Biologie mathematique”// a. Colin, Paris.
47. Maynard Smith J. (1982). “Evolution and the Theory of Games”// Cambridge: Cambridge University Press.
48. Milgrom P., Roberts J. (1989). “Rationalizability, learning and equilibrium in games with strategic complementarities”// Mimeo, Standford University.
49. Moulin H. (1981). “Theorie des jeus pour l'Economie et la Politique”// Hermann, Paris Collection Methodes.
50. Moulin H. (1984). “Dominance-solvability and Cournot-stability”// Mathe-matical social scieces 7: 83-102.
51. Myles G.D. (1995). “Public Economics”// Cambridge: Cambridge University Press..
52. Nachbar J. (1990). “Evolutionary selection dynamics in games: Convergence and limit properties”// International Journal of Game Theory 19.
53. Nash J. (1951). “Non-cooperative games”// Annals of Mathematics 54.
54. Nowak, M.A., Sigmund, k. (1990). “The evolution in stochastic strategies in the prisoner’s dilemma”// Acta appl.math. 20, 247-265.
55. Nowak, M.A., Sigmund, k. (1992). “Tit for tat in heterogeneous populations”// Nature (London) 355: 250-253.
56. Ok E.A., Vega-Redondo F. (2001). “On the Evolution of Individualistic Preferences: An Incomplete Information Scenario”// Journal of Economic Theory vol. 97(2), pp.231-254.
57. Radner R. (1980). “Collusive behavior in non-cooperative epsilon-equilibria of oligopolies with long but finite lives”// J.of Econ. Theory 2: 136-154.
58. Ritzberger K., Weibull J.W. (1995). “Evolutionary selection in normal-form games”// Econometrica 63.
59. Ritzberger K., Vogelsberger K. (1990). “The Nash field”// RR 263, Institute for Advanced Studies, Vienna.
60. Samuelson L. (1988). “Evolutionary foundation of solution concepts for finite, two-player, normal-form games”// Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge, Morgan Kaufmann, Los Altos, CA,.
61. Samuelson L., Zhang J. (1992). “Evolutionary stability in asymmetric games”// Journal of Economic Theory 57.
62. Selten R. (1975). “Re-examination of the perfectness concept for finite points in extensive games”// Int.J. of Game Theory 4:25-55.
63. Schuster P., Sigmund K., Hofbauer J., Wolf R. (1981). “Self-regulation of behaviour in animal societies I”// Biological Cybernetics 40, pp.9-15.
64. Schuster P., Sigmund K. (1983). “Replicator dynamics”// Journal of Theoretical Biology 100.
65. Shamma J.S., Arslan G. (2003). “Dynamic Fictitious Play, Dynamic Gradient Play, and Distributed Convergence to Nash Equilibria”// Proceedings of 42nd IEEE Conference on Decision and Control.

66. Shapley L. (1964). “Some Topics in Two-Person Games”.// Ann.Math.Studies.
67. Slinko I.A. (1999). Multiple jobs, wage arrears, tax evasion and labor supply in Russia. Working Paper #BSP/99/018 (Moscow, New Economic School) 35p.
68. Taylor P., Jonker L. (1978). “Evolutionary stable strategies and game dynamics”// Mathematical Biosciences 40.
69. Van Damm E. (1987). “Stability and perfection of Nash equilibria”// Springer-Verlag, Berlin.
70. Vasin A.A.. (1999a). “On stability of mixed equilibria”// Nonlinear Analysis 38 pp. 793-802
71. Vasin A.A.. (1999б) "The Folk theorem for dominance solutions"// Int J Game Theory 28 pp.15-24.
72. Weibull J. (1996). “Evolutionary Game Theory”// Cambridge: MIT Press.
73. Wilson E.O. (1975). Sociobiology: The New Synthesis. Cambridge(Mass.).
74. World population prospects: The 1996 revision. Annex II & III: Demographic indicators by major area region and country (1996)// US, NY, pp. 352-353.