

Учебник разработан в рамках
Программы реализации НИУ-НГУ

Вводный курс теории игр

Александр Цыплаков

Новосибирск

24 апреля 2012 г.

Оглавление

Оглавление	2
Введение	5
1. Теория принятия решений (индивидуальный рациональный выбор)	7
1.1. Введение	7
1.2. Рациональность	9
1.3. Предпочтения и выбор в простой ситуации	10
1.4. Одномерная оптимизация	13
1.5. Принятие решений в динамике. Дерево решений	14
1.6. Межвременные предпочтения и дисконтирование	18
1.7. Принятие решений при риске	19
1.7.1. Ходы природы	19
1.7.2. Лотереи	21
1.7.3. Ожидаемая полезность (функция полезности фон Неймана—Моргенштерна)	22
1.7.4. Отношение к риску	24
1.7.5. Сложные и простые лотереи	26
1.7.6. Санкт-петербургский парадокс	27
1.7.7. Свертывание дерева решений с помощью подсчета ожидаемого выигрыша и обратная индукция	28
1.7.8. Динамическое принятие решений при риске	33
1.7.9. Непрерывный случай принятия решений при риске — страхование от пожара	35
1.7.10. Рандомизация	37
1.8. Байесовское принятие решений	38
1.8.1. Сведения из теории вероятностей: совместные, частные и условные вероятности	38
1.8.2. Байесовское обучение. Формула Байеса	42

1.8.3. Байесовское принятие решений. Байесовское дерево решений	43
2. Введение в теорию игр	58
2.1. Введение	58
2.2. Методологический индивидуализм	59
2.3. Развернутая форма игры. Дерево игры	60
2.4. Нормальная форма игры	62
2.5. Кооперативные игры: постановка проблемы	67
2.6. Оптимальность по Парето	71
2.7. Задача торга: основные предположения	75
2.8. Торг по Нэшу	77
2.9. Коалиции и ядро	81
2.9.1. Примеры игр с пустым ядром	89
2.9.2. Пример ядра в игре с нетрансферабельной полезностью	91
2.10. Конституционные соглашения и социальная справедливость	92
2.11. Сравнение теории кооперативных и некооперативных игр	94
3. Статические игры с полной информацией	104
3.1. Введение	104
3.2. Пример некооперативной игры: ценовая конкуренция	105
3.3. Оптимальный отклик	107
3.4. Доминирование	108
3.5. Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий	112
3.6. Равновесие Нэша	117
3.6.1. Множественность равновесий Нэша и фокальные точки	130
3.7. Смешанные стратегии	131
3.7.1. Смешанные стратегии	131
3.7.2. Пример игры 3×2	139
3.8. Гарантированный выигрыш. Подход фон Неймана для игры двух лиц с нулевой суммой	142
3.8.1. Гарантированный выигрыш	142
3.8.2. Игры двух лиц с нулевой суммой. Теорема о минимаксе	143
4. Динамические игры с полной и совершенной информацией	166
4.1. Введение	166
4.2. Динамические игры, полученные на основе статических	167
4.3. Пример динамической игры с совершенной информацией	169
4.4. Не заслуживающие доверия угрозы и обещания	170
4.5. Свертывание игры (обратная индукция)	173

4.6. Нормальная форма динамической игры. Совершенное в подыграх равновесие	180
4.6.1. Нормальная форма динамической игры	180
4.6.2. Равновесие Нэша и совершенное в подыграх равновесие Нэша	184
4.7. Некооперативный торг	188
5. Динамические игры с несовершенной информацией	201
5.1. Введение	201
5.2. Нормальная форма динамической игры с несовершенной информацией	204
5.2.1. Соответствие между нормальной и развернутой формой игры	204
5.2.2. Подыгры и совершенное в подыграх равновесие	206
5.3. Обратная индукция и игры с почти совершенной информацией	209
5.4. Повторяющиеся игры. Сотрудничество в повторяющихся играх	211
5.5. «Лишние» равновесия в динамических играх с несовершенной информацией	216
5.6. Смешанные и поведенческие стратегии	217
6. Статические игры с неполной информацией (байесовские)	231
6.1. Введение	231
6.2. Равновесие Байеса—Нэша	234
6.3. Статические байесовские игры с коррелированными типами .	238
7. Динамические байесовские игры и совершенное байесовское равновесие	248
7.1. Введение	248
7.2. Представление байесовских игр в виде динамических игр с несовершенной информацией	251
7.3. Ожидания в информационных множествах и совершенное байесовское равновесие	256
7.4. Сок или пиво. Интуитивный критерий	266
8. Общие задачи и задачи на повторение	278
Литература	287

Введение

В нашей жизни постоянно возникают ситуации, в которых последствия решений, принимаемых одним человеком, зависят от того, какие решения принимают другие люди. Теория игр предоставляет инструментарий для анализа подобных ситуаций и позволяет нам быть точными и последовательными при их обсуждении. При этом используются формальные абстрактные конструкции (или модели), которые называются играми (отсюда и название дисциплины). Теория игр помогает разобраться, как происходит стратегическое взаимодействие нескольких субъектов (конфликт, сотрудничество и т. п.). В ее основе лежат предположения о том, что рассматриваемые субъекты имеют некоторые цели, являются в определенном смысле рациональными и при принятии собственных решений мыслят стратегически, то есть учитывают внутреннюю структуру ситуации и то, какие решения могут принимать другие.

Теория игр может использоваться для анализа очень широкого круга явлений. Понятия и результаты теории игр доказали свою полезность при анализе социально-экономических процессов и находят растущее применение в экономической теории. Можно говорить о том, что к настоящему времени теория игр стала стандартным инструментом экономической теории, что подтверждается, в частности, несколькими нобелевскими премиями, полученными за исследования в области теории игр и информационной экономики.

Цель данного пособия — ввести читателя в круг основных понятий и методов современного теоретико-игрового моделирования, и познакомиться с его применениями в экономике, социальных науках и других областях. Изучение пособия должно помочь приобрести такой уровень знаний и навыков, который позволит понимать многие модели, используемые в научных статьях по прикладным разделам экономической теории.

От читателя требуется наличие базовых знаний по курсам математического анализа и теории вероятностей, а также знакомство с основами микро- и макроэкономики.

В качестве введения в теорию игр излагаются основы теории принятия решений, в частности, принятия решений в условиях риска. Большая часть данного учебника посвящена теории некооперативных игр, центральное место в которой занимает понятие равновесия Нэша. Также часть учебника посвящена теории кооперативных игр (Парето-оптимальность, ядро).

Поскольку учебник вводный, то не ставилось задачи использовать абсолютно строгую формализацию рассуждений. В основном понятия и результаты вводятся с помощью примеров, относящихся к экономическим, политическим, правовым и другим явлениям, включающим взаимодействие людей. В то же время, важно подчеркнуть, что теория игр — дисциплина исключительно аналитическая, имеет в основе строгие математические построения и требует абстрактных, дедуктивных рассуждений. Поэтому по мере возможности даются достаточно аккуратные словесные формулировки, не искажающие соответствующее формальное содержание.

Для надежного освоения основ теории игр требуется самостоятельно выполнить большое количество практических упражнений. В конце каждой главы приведены задачи. Кроме того, по всему тексту учебника встречаются вставки с дополнительными вопросами и задачами, позволяющими более глубоко осмыслить обсуждаемые идеи.

Материалы, вошедшие в этот учебник, использовались в преподавании курса теории игр на Факультете информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ), а также курсов теории игр и микроэкономики на Экономическом факультете Новосибирского государственного университета.

При подготовке данного учебника были использованы в адаптированном виде некоторые материалы из учебника по микроэкономике [1] в соавторстве с В. П. Бусыгиным, и Е. В. Желободько. Авторство ряда задач принадлежит С. Г. Коковину. Многие задачи собраны в сети Интернет, их авторами являются преподаватели курсов теории игр из различных университетов. Часть задач и примеров взята из учебников по теории игр. Ссылка на источник указывается после номера задачи.

Автор выражает благодарность В. П. Бусыгину и С. Г. Коковину, с которыми его связывает многолетнее сотрудничество на ниве преподавания микроэкономики и теории игр, а также заведующего Кафедры математического моделирования бизнес-процессов СибГУТИ В. С. Канева за помощь в организации начального курса теории игр и поддержку.

Теория принятия решений (индивидуальный рациональный выбор)

Теория принятия решений и рациональный выбор. Структура проблемы принятия решений. Альтернативы, исходы, выигрыши, (чистые) стратегии. Одномерная оптимизация. Дерево решений. Межвременные предпочтения и дисконтирование. Свертывание дерева решений с помощью обратной индукции (динамическое программирование). Случайные ходы природы, игры с природой. Теория ожидаемой полезности Неймана—Моргенштерна, ожидаемый выигрыш. Случайные ходы, смешанные стратегии. Байесовское принятие решений.

1.1. Введение

Теория игр предполагает рассмотрение разнообразных ситуаций столкновения интересов, действий, которые игроки предпринимают в подобных ситуациях и тех исходов, которые реализуются в результате. При этом предполагается, что у каждого игрока есть определенные предпочтения по отношению к исходам, то есть он может сравнивать исходы и решать, какие для него более, а какие менее предпочтительны. Таким образом, если отвлечься от взаимодействия игрока с другими игроками, а ограничиться

лишь его собственными действиями и возникающими исходами, то здесь не обойтись без анализа индивидуального выбора, то есть без анализа того, какой выбор сделает игрок, если ему будет предложен некоторый набор альтернатив. Эта задача об индивидуальном принятии решений является основой всех рассуждений в теории игр. Поэтому прежде чем перейти к собственно теории игр, мы рассмотрим основные понятия, связанные с выбором и принятием решений.

Разумная человеческая деятельность в большинстве случаев состоит в том, что человеку для достижения тех или иных целей приходится принимать решения (делать выбор). Выбор состоит в сравнении достоинств нескольких альтернатив (вариантов действий) и выделении какой-то одной из этих альтернатив. Люди постоянно производят выбор в течении жизни:

- * какую передачу смотреть по телевизору;
- * какие товары купить в магазине и в каком количестве;
- * чему и в каких учебных заведениях учиться;
- * на какую работу устроиться;
- * в каком банке открыть счет;
- * какой маршрут поездки и какой вид транспорта предпочесть.

Очень многие важные решения принимаются людьми на их рабочем месте, будь то коммерческая фирма или государственная организация.

При этом вполне естественно стремление принимать *оптимальные* решения, которые в наибольшей степени реализуют поставленные цели и в наибольшей степени соответствуют предпочтениям. Постановки вопроса о выборе оптимальных решений встречаются в различных теоретических и прикладных дисциплинах — экономике, медицине, праве, военном деле, технике и т. д. По мере развития и математизации этих областей соответствующие процессы принятия решений получали математическое описание посредством формальных моделей. Накопление опыта математического описания выбора решений в различных областях привел к появлению обобщающей дисциплины — теории принятия решений.

Ситуации принятия решений можно классифицировать по следующим признакам:

- * статическое или динамическое (последовательное) принятие решений;
- * принятие решений в условиях неопределенности (риска) или определенности;
- * решения принимаются одним индивидуумом или несколькими лицами (в этом заключается основное отличие между собственно теорией принятия решений и теорией игр).

1.2. Рациональность

Обычно экономический анализ исходит из «рациональности» лиц, принимающих решения. Теория рационального выбора является фундаментом современной экономики и активно используется в других социальных науках. Теория рационального выбора подразумевает, что при данных целях и предпочтениях выбор индивидуумов определяется тем, каким образом лучше всего эти цели осуществить, учитывая окружающую обстановку и ограничения, в рамках которых они действуют.

Предполагается наличие у индивидуума предпочтений, то есть индивидуум знает, какая альтернатива для него лучше, а какая хуже. Эти предпочтения предполагаются «рациональными». Формально это означает, что они являются полными и транзитивными (об этом ниже). При этом индивидуум всегда может выбрать альтернативу из произвольного конечного множества альтернатив и его выбор оказывается непротиворечивым.

Кроме того предполагается, что индивидуум принимает решения...

- * формируя некоторые представления о мире;
- * выбирая действия, которые являются в некотором смысле наилучшими при данных представлениях.

Зачастую при этом делаются различные упрощающие предположения, которые не всегда реалистичны. В частности, это предположения о том, что принимающему решению индивидууму известны все имеющиеся альтернативы, что он обладает способностью сравнивать любые альтернативы между собой и что индивидуум обладает точной информацией о том, что произойдет в результате выбора того или иного решения.

Предположение о рациональности зачастую подвергается серьезной критике. В частности, утверждаются, что индивидуумы не способны осуществлять полностью рациональный выбор, поскольку находятся под воздействием инстинктов, эмоций и т. д. Помимо этого, очевидно, что познавательные и интеллектуальные способности людей ограничены. Таким образом, действия людей зачастую не достигают того уровня оптимальности, который позволял бы говорить о рациональности выбора.

В то же время следует понимать, что модели принятия решений не должны быть абсолютно точными описаниями того, как индивидуумы осуществляют выбор. Это только модели, и основная их функция — быть полезными для тех целей, для которых они предназначены. Приведем несколько контраргументов, которые говорят в пользу предположения о рациональности.

На рациональность можно смотреть как на идеал, на который люди ориентируются. Если индивидуум ошибается в своих решениях, он обычно стремится извлечь из этих ошибок уроки при выборе дальнейших дей-

ствий. Даже если индивидум не в состоянии сам сделать хороший выбор, он может воспользоваться советом других или имитировать их действия. Кроме того, во многих областях наблюдается естественный отбор и большую вероятность оказаться в роли принимающего решение имеет тот, кто лучше всего это делает.

Обсуждение недостатков теории рационального выбора не ведет само по себе к хорошей теории. В данном случае по крайней мере мы имеем исходную точку, от которой можем стартовать. Вполне может быть, что рациональность выбора — это неадекватное предположение для моделирования одних явлений и адекватное для других. Как только модель, основанная на рациональности выбора, построена, можно попробовать ее в деле, а затем уже судить о том, насколько она полезна.

1.3. Предпочтения и выбор в простой ситуации

Рассмотрим сначала самый простой вид принятия решений — индивидуальное принятие решений в статике и в условиях определенности.

Ситуация принятия решения — это ситуация, в которой отдельный индивидум (лицо, принимающее решение) выбирает из нескольких вариантов действий, которые ведут к различным исходам. Действие — это то, что лицо, принимающее решение, может сделать в данной ситуации.

Исход — это тот результат, к которому приводит процесс принятия решений. (В теории игр — это та ситуация, которая возникает после окончания игры.) При этом из общего описания ситуации следует выделить только те аспекты, которые являются существенными, т. е. такие аспекты, которые

- * отличают исходы друг от друга;
- * важны для лица, принимающего решение.

Например, индивидуму на выбор предлагают мандарин или грушу. Действие индивидума будет состоять в том, чтобы произнести «я возьму грушу» или «я возьму мандарин». Это действие повлечет за собой определенный исход: индивидум получит один из двух фруктов и сможет его съесть. Соответственно в одном случае исход будет состоять в том, что он съест грушу, а в другом — мандарин.

В самой простой ситуации принятия решения варианты действий отождествляются с исходами и такое действие-исход можно назвать просто альтернативой. В описанной ситуации можно считать, что есть две альтернативы: «груша» и «мандарин».

Важное понятие теории принятия решений (и важное понятие в теории игр в целом) — стратегии. Это понятие не требуется, если оставаться в рам-

ках индивидуального статического принятия решений при полной информации. В этом контексте мы можем однозначно сопоставить одной альтернативе (действию) одну стратегию. Таким образом, в рассматриваемой пока что ситуации введение понятия стратегии не дает дополнительных преимуществ. Но в дальнейшем это понятие нам еще понадобится и окажется очень полезным.

Таким образом, пока что у нас «исход», «действие», и «стратегия» — это одно и то же. В дальнейшем, по мере рассмотрения все более сложных моделей мы проведем различия между этими ключевыми понятиями. Все это пока можно называть одним словом — «альтернатива».

Согласно теории рационального выбора, индивидуумы всегда выбирают ту альтернативу, которая по их мнению является наилучшей. Пусть $\mathcal{O} = \{a, b, c, \dots\}$ — это множество возможных исходов (альтернатив). Какая альтернатива наилучшая? Предполагается, что индивидуум наделен определенными предпочтениями относительно этих исходов. Предпочтения позволяют сравнивать между собой любую пару исходов. Каким может быть сравнение? Нужно, чтобы индивидуум, если ему предъявят какую-нибудь пару альтернатив (a и b) из множества \mathcal{O} , мог сказать, какая из альтернатив хуже, а какая лучше. Конечно, бывает, что альтернативы эквивалентны между собой, так что нельзя сказать, что одна строго лучше другой.

Используются следующие обозначения:

- * a лучше b (строго предпочитается): $a > b$;
- * a хуже b : $a < b$;
- * a эквивалентно b (индивидуум безразличен в выборе между a и b): $a \sim b$;
- * a лучше или эквивалентно b (нестрого предпочитается): $a \succsim b$;
- * a хуже или эквивалентно b : $a \precsim b$.

Предполагается, что индивидуум является рациональным, в том смысле, что он всегда может сравнить любую пару альтернатив и что он последователен в своих предпочтениях. Более конкретно, предполагается, что предпочтения лица, принимающего решение, обладают следующими свойствами.

Рефлексивность. Любая альтернатива a эквивалентна самой себе ($a \sim a$ и $a \geq a$).

Полнота. Для двух альтернатив выполнено одно и только одно из следующих соотношений: a лучше b ($a > b$) или b лучше a ($b > a$) или a и b эквивалентны ($a \sim b$).

Транзитивность. Если a лучше чем b , а b лучше чем c , то a лучше чем c :

$$\text{из } a > b \text{ и } b > c \text{ следует } a > c.$$

Кроме того, выполнено

из $a > b$ и $b \sim c$ следует $a > c$,

из $a \sim b$ и $b > c$ следует $a > c$,

из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$.

Обычно в теории рационального выбора принимают, что индивидуумы максимизируют полезность — количественный показатель, который соизмеряет все возможные исходы. (В теории игр полезность называется выигрышем.) Функцией полезности называют такую функцию, которая сопоставляет каждому из возможных исходов некоторое число (например, исходу a сопоставим $u(a)$). Такие числа и принято называть полезностями. Числа сопоставляются таким образом, чтобы выполнялось следующее свойство:

$u(a) > u(b)$ тогда и только тогда, когда $a > b$

и

$u(a) = u(b)$ тогда и только тогда, когда $a \sim b$.

Пусть, например, $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e\}$ и пусть известно, что $a > b$, $b > c$, $c \sim d$ и $d > e$. Если предпочтения рациональны, то указанной информации достаточно, чтобы сравнить любую пару альтернатив. Легко понять, что $a > c$, $a > d$, $a > e$, $b > d$, $b > e$, $c > e$. Функция полезности может быть задана следующим образом: $u(a) = 4$, $u(b) = 3$, $u(c) = 2$, $u(d) = 2$, $u(e) = 1$.

Это операция — нумерация альтернатив — может показаться тривиальной, однако здесь есть несколько проблем.

Во-первых, следует понимать, что полезность не является измерителем счастья, удовольствия или чем-то похожим. Теория принятия решений не говорит ничего о психологии. Все, что предполагается, — это то, что предпочтения индивидуумов можно представить с помощью чисел. Сам по себе уровень полезности или разность уровней не имеют значения, не говорит ничего об «интенсивности» чувств по отношению к тому или другому исходу; важно лишь простое сопоставление. В связи с этим, для полезности важно только то, больше она или меньше, но не то, насколько больше или меньше. Если $u(a) = 1$ и $u(b) = 3$, то это не означает, что b в три раза полезнее a . Нельзя также сказать, что b полезнее a на 2. Если полезность отрицательна, то это не означает, что индивидууму «совсем плохо».

Во-вторых, функция полезности неоднозначна. Для любых предпочтений существует бесконечно много различных функций полезности. В рассмотренном выше примере мы могли взять $u(a) = 3,14$, $u(b) = 2,72$, $u(c) = 0$, $u(d) = 0$, $u(e) = -100$.

В-третьих, функция полезности не может существовать, если предпочтения не рациональны. Это следует из того факта, что если для предпочтений есть функция полезности, то они заведомо рациональны в том смысле, что полны и транзитивны (это легко проверить по определению).

В-четвертых, для данных предпочтений не обязательно всегда найдется функция полезности. В рассмотренном выше примере мы сравнивали 5 альтернатив, поэтому все было просто. Если же альтернатив бесконечно много (континуум), то функции полезности может не быть.

Задача индивидуального статического принятия решений при полной информации может показаться тривиальной. Если имеются предпочтения, описываемые функцией полезности $u(\cdot)$, причем $u(a) > u(b) > u(c)$, то выбор очевиден — это a . Однако когда альтернатив бесконечно много, задача выбора оптимума может быть не столь тривиальной.

1.4. Одномерная оптимизация

Пример дискретной оптимизации: пусть $u(n) = -n^3 + n^2 + 2$ и пусть n можно выбрать на уровне $-1, 1, 2$ или 5 . Полезность равна $u(-1) = 4$, $u(1) = 2$, $u(2) = -2$, $u(5) = -98$. Ясно, что следует выбрать $n = -1$.

Пусть $\mathcal{C} = [0, +\infty)$, x — типичная альтернатива из \mathcal{C} — неотрицательное действительное число и пусть $u(x) = \sqrt{x}$. Каково оптимальное решение на отрезке $[0, +\infty)$? Ответ: оптимального решения не существует. Чем больше x , тем больше полезность, тем больше выигрыш \sqrt{x} . Можно увеличивать полезность неограниченно.

Пусть теперь множество альтернатив, из которого выбирает индивидуум, — это отрезок $[2, 5]$. Тогда наилучшая альтернатива — это $x = 5$. При этом $u(x) = \sqrt{5}$.

Если функция полезности $u(x)$ является непрерывной и выбирается число из отрезка $[a, b]$, то, как известно из математического анализа, оптимум обязательно существует. Если функция полезности дифференцируема и оптимум окажется во внутренней части, т. е. $x \in (a, b)$, то в нем производная функции $u(x)$ равна нулю: $u'(x) = 0$.

Можно искать оптимум перебором. Сначала надо найти все точки x из отрезка (a, b) для которых $u'(x) = 0$. Потом надо сравнить значения $u(x)$ во всех найденных точках и на концах отрезка ($x = a$ и $x = b$). Значение x , при котором достигается максимальное значение, и будет искомым решением. (Нужно только помнить, что не все точки x , для которых $u'(x) = 0$, будут соответствовать максимуму. Некоторые могут соответствовать, наоборот, минимуму.)

Пусть надо найти максимум функции $u(x) = -x^2 + x$ на отрезке $[-1; 1]$. Решаем уравнение $u'(x) = -2x + 1 = 0$. Получим $x = 1/2$. При этом $u(1/2) = 1/4$. Еще надо учесть, что $u(-1) = -2$ и $u(1) = 0$. Значит, $x = 1/2$ — наилучшая альтернатива из $[-1; 1]$.

Еще один пример: требуется найти максимум функции $u(x) = x^2 - x$ на отрезке $[-1; 1]$. Решаем уравнение $u'(x) = 2x - 1 = 0$. Получим $x = 1/2$. При этом $u(1/2) = -1/4$. Кроме того, $u(-1) = 2$ и $u(1) = 0$. Значит, $x = -1$ — наилучшая альтернатива из $[-1; 1]$.

Рассмотрим теперь пример оптимизации с недифференцируемой функцией. Пусть нужно выбрать x из $[0, +\infty)$ и пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leq 2, \\ 2, & \text{при } 2 \leq x \leq 3, \\ 5 - x, & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

Здесь наилучшая альтернатива неединственна; это целый отрезок $[2; 3]$.

Пусть нужно выбрать x из $[0; 1]$ и пусть

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x < 1, \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

В этом примере наилучшей альтернативы не существует. Чем ближе x к единице, тем выше полезность, если только $x < 1$. Но уже выбор $x = 1$ — заведомо не самый лучший. Здесь функция полезности не является непрерывной.

1.5. Принятие решений в динамике. Дерево решений

Дерево решений — это графическое изображение ситуации принятия решений, схема, показывающая альтернативные действия и их последствия. Дерево решений является полезным инструментом принятия решений. Оно помогает сформировать наглядную картину потерь и выгод, связанных с каждым возможным образом действий.

Дерево решений состоит из следующих компонент:

- * одна начальная вершина;
- * для каждой вершины, кроме конечных, указываются возможные действия — ветви, исходящие из этой вершины;
- * в каждой из конечных вершин указываются исходы или же выигрыши (как вариант — для каждого действия-ветви указывается изменение выигрыша, связанное с этим действием).

На Рис. 1.1 показана известная сказочная ситуация принятия решений в виде дерева решений. На этом дереве имеется одна начальная вершина, в которой принимается решение — выбирается одно из трех действий, и три конечные вершины, которым сопоставлены три исхода.

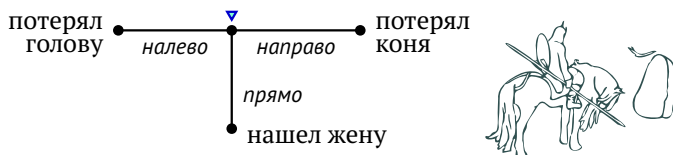


Рис. 1.1. Сказочная ситуация принятия решений

С помощью дерева удобно описывать ситуации, когда решения принимаются последовательно, в динамике. На Рис. 1.2 изображено подобное решение. Сначала индивидuum выбирает, провести ли отдых дома или купить тур в Европу. Если индивидuum выбирает поездку в Европу, то затем он выбирает вид транспорта.

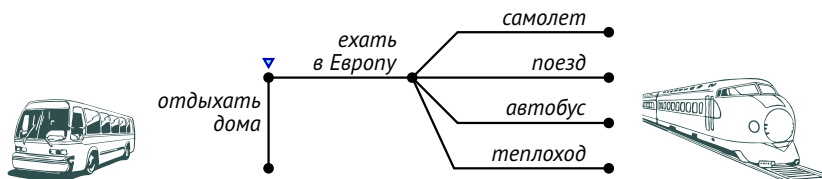


Рис. 1.2. Принятие решения о туристической поездке

В подобных динамических играх проявляется различие между действием и стратегией. Стратегия — это полный план действий, который должен предусматривать выбор некоторых действий в каждой из возможных ситуаций, возникающих в процессе принятия решения. Так, в примере, изображенном на Рис. 1.2, стратегия индивидуума должна состоять из двух частей, поскольку должна описывать выбор в каждой из двух вершин, в которых принимаются решения:

1. Я провожу отпуск дома/в Европе
2. Если я решил провести отпуск в Европе, то я поеду самолетом/поездом/автобусом/теплоходом.

Согласно формальному определению стратегии, в данной ситуации принятия решений индивидuum имеет 8 стратегий ($8 = 2 \times 4$ — перемножают

ся количества вариантов действий в двух вершинах, где индивидuum принимает решения). Например, одна из стратегий — это (*дома, автобусом*), что можно расшифровать следующим образом: «я буду проводить отпуск дома, но если мне придется решать, на чем ехать в Европу, то я выберу автобус». Очевидно, что такое определение стратегии приводит к избыточности, поскольку некоторые стратегии включают описание действий в таких ситуациях, которые не могут произойти. В данном случае можно сгруппировать 4 «странные» стратегии в одну — *остаться дома*, тогда у индивидуума останется всего 5 стратегий.

В дальнейшем мы встретимся с понятием стратегии при рассмотрении игр, когда решение принимаются сразу несколькими субъектами. В игровых моделях избыточность в описании стратегии может быть кажущейся, поскольку те решения, которые будут приняты в ситуациях, которые никогда не случатся, могут существенно повлиять на ход игры. Это говорит о стратегическом характере принятия решений в теории игр.

Игра 1 (Задача о кратчайшем пути): На Рис. 1.3 изображена сеть дорог. Рядом с каждой дорогой указано время пути в минутах. Требуется проехать из пункта *a* в пункт *e* за кратчайшее время. ☉

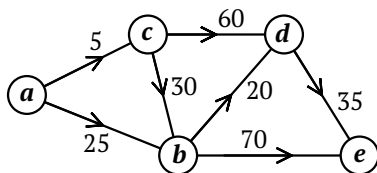


Рис. 1.3. Дорожная сеть для задачи о кратчайшем пути из *a* в *e* (Игра 1).

Для решения этой задачи построим соответствующее дерево решений. Предварительно для упрощения выберем только те направления движения, которые имеет смысл использовать. Они показаны на Рис. 1.3 стрелками. (Например, не имеет смысла двигаться из *b* в пункт *c*, поскольку в *c* можно быстро, за 5 мин., попасть сразу из *a*.) Если двигаться только в направлении стрелок, то маршрут не будет содержать петель, так что дерево решений оказывается конечным.

Дерево решений показано на Рис. 1.4. Дерево строится следующим образом. Мы начинаем двигаться от пункта *a*. При этом мы можем поехать либо в пункт *b*, либо в пункт *c*. Поэтому из начальной вершины дерева выходят две ветви, помеченные как *b* и *c*. Если мы выберем *b*, то окажемся в

пункте **b**, откуда сможем поехать либо в пункт **d**, либо в пункт **e**. Из соответствующей вершины выходят две ветви, помеченные как *d* и *e*. Продолжая эти рассуждения, получим все дерево. Рядом с ветвями (в рамках) записаны приросты времени движения со знаком минус. Суммируя эти числа, получим выигрыши в конечных вершинах дерева. Выигрыши отрицательны, поскольку мы стремимся сделать время как можно меньшим. Если, например, из **a** мы поехали в **b**, затем в **d**, затем в **e**, то в сумме затратим на маршрут (25 + 20 + 35) мин., так что выигрыш составит –80.

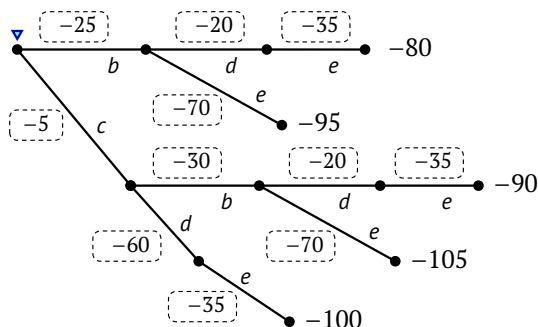


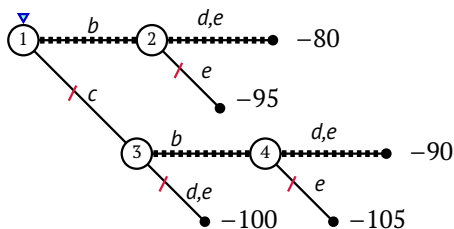
Рис. 1.4. Дерево решений для задачи о кратчайшем пути

При анализе дерева решений, следует планировать наперед и проводить анализ с конца. Следует вычеркивать (по крайней мере мысленно) те ветви, которые не будут выбраны.

На Рис. 1.4 показано оптимальное решение, найденное таким методом. Дерево несколько упрощено за счет того, что выбор пути из **b** в **e** через **d** помечен как *d,e*. В вершине 4 из *e* и *d,e* следует выбрать *d,e* ($-90 > -105$). В вершине 2 из *e* и *d,e* следует выбрать *d,e* ($-80 > -95$). В вершине 3 из *b* и *d,e* следует выбрать *b* ($-90 > -100$). В вершине 1 из *b* и *c* следует выбрать *b* ($-80 > -90$). Таким образом, наименьшее время пути равно 80. Из **a** следует поехать в **b**, затем в **d**, затем в **e**.

На Рис. 1.5 этот метод рассуждений отражен с помощью дополнительных графических обозначений. Те действия, которые не будут выбраны, перечеркнуты. Оптимальные действия дополнительно помечены жирным пунктиром. Соответственно, оптимальная траектория состоит из тех ветвей, помеченных жирным пунктиром, которые идут друг за другом из начальной вершины.

Найденную оптимальную стратегию можно описать следующим образом:

Рис. 1.5. Кратчайший путь из a в e

- * из a ехать в b ;
- * если в b попали из a , то ехать в d и далее в e ;
- * из c ехать в b ;
- * если в b попали из c , то ехать в d и далее в e .

Заметим, во-первых, что в этой стратегии есть избыточность, связанная с представлением задачи в виде дерева. Такое представление носит несколько искусственный характер. Можно было просто написать «из b ехать в d и далее в e » без «если». Во-вторых, и это очень важно, так как стратегия — полный план, то она предусматривает действия в пункте c , хотя эта возможность и не реализуется.

Алгоритм, который здесь используется, называется динамическим программированием. В теории игр он известен под названием обратной индукции.

1.6. Межвременные предпочтения и дисконтирование

Если сам по себе фактор времени не играет роли, а важна только последовательность, в которой выбираются варианты действий, то при динамическом принятии решений мы можем складывать те выигрыши (положительные и отрицательные), которые возникают в процессе игры. Однако известно, что люди по-разному оценивают текущие выигрыши и те, которые получают в будущем. Здесь есть феномен нетерпения (сегодняшний рубль ценится больше, чем завтрашний), и феномен откладывания неприятного (лучше сделать неприятную работу завтра, а не сегодня). В связи с этим в экономике принято будущие выигрыши складывать с текущими с понижающим коэффициентом, так называемым коэффициентом дисконтирования или дисконтирующим множителем.

Коэффициент дисконтирования, который мы обозначим через δ , по смыслу представляет собой положительное число, меньшее единицы. Пусть, например, сегодня вы вкладываете в инвестиционный проект 1 млн. руб., через год он принесет прибыль 600 тыс. руб., а через два года — еще 800 тыс. руб. Если $\delta = 0,9$, то общий выигрыш, приведенный к настоящему моменту времени (в финансах эту величину называют «чистая приведенная стоимость», NPV), составит

$$-1000 \cdot 1 + 600 \cdot 0,9 + 800 \cdot 0,9^2 = 188.$$

Иногда вместо дисконтирующего множителя используется ставка дисконтирования. Если r — ставка дисконтирования, то дисконтирующий множитель равен

$$\delta = \frac{1}{1+r}.$$

Например, дисконтирующему множителю $\delta = 0,9$ соответствует ставка дисконтирования

$$r = \frac{1}{\delta} - 1 = \frac{1}{0,9} - 1 = \frac{1}{9} \approx 0,11,$$

т. е. 11%.

Поразмышляйте о рациональности с учетом фактора времени. Пьяница может завтра пожалеть, что он много пил, но сегодня он готов сделать все ради выпивки. Студент в вечер перед экзаменом может быть готов заплатить \$10 за то, чтобы отложить экзамен еще на день, но если попросить его сделать такой же выбор в начале семестра, то он, скорее всего решит, что отсрочка на день не стоит \$10. Согласуются ли подобные явления в изложенной здесь концепцией дисконтирования выигрышей?



1.7. Принятие решений при риске

1.7.1. Ходы природы

Пока что мы не вводили в ситуацию принятия решений неопределенность и риск¹. Мы рассматривали только ситуации определенности, когда

¹Можно различать «риск» и «неопределенность», но мы этого делать не будем.

действия однозначно определяют исход. Может быть так, что исходы неоднозначно определяются выбором и индивидуум, принимающий решения, должен учесть неопределенность (риск), связанную с выбором.

Если требуется анализировать риски и выигрыши, связанные с различными вариантами действий, то, как и раньше, дерево решений можно использовать как визуальный и аналитический инструмент поддержки принятия решений. Если проблема принятия решений включает риск, то при изображении дерева решений вводят фиктивного игрока, которого называют «Природой». Ситуации принятия решения, в которых присутствует элемент случайности, часто называют играми против природы.

У «Природы» нет собственных целей, и она производит свой выбор случайным образом. Предполагается, что вероятности, с которыми «Природа» выбирает вариант развития событий, заранее известны лицу, принимающему решения. Соответственно, на дереве решений будут вершины трех типов, а не двух:

- * вершины, в которых лицо, принимающее решения, делает свой выбор;
- * вершины, в которых «Природа» случайно выбирает один из вариантов развития событий;
- * конечные вершины.

В дальнейшем вершины, соответствующие случайным ходам природы, мы обычно будем обозначать значком ♣. На ветвях, соответствующих действиям природы, указываются вероятности этих действий. Мы будем указывать такие вероятности в квадратных скобках. На Рис. 1.6 изображен типичный случайный ход природы в орлянке.

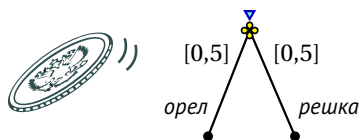


Рис. 1.6. Типичный ход природы в орлянке

Как мы увидим впоследствии, неопределенность играет очень важную роль в теории игр. Дело в том, что в теории игр рассматривается принятие решений индивидуумом в условиях, когда результат принятия решения зависит от того, какие решения примут другие индивидуумы. Но поскольку достаточно трудно точно предсказать, как будут действовать другие, то оказывается, что ситуация, в которой принимается решение, содер-

жит элемент неопределенности. С этой точки зрения умение обращаться с неопределенностью является ключевым для теории игр. Даже в тех играх, где иного источника неопределенности, кроме решений других индивидуумов, не существует, бывает необходимо принимать во внимание неопределенность.

1.7.2. Лотереи

Как, с учетом того, что есть неопределенность по поводу исходов, выразить полезность и предпочтения на имеющихся альтернативах? Как мы видели ранее, описание статической задачи принятия решений при определенности должно включать перечисление возможных исходов и предпочтения лица, принимающего решение, относительно этих исходов. То же самое верно и в условиях неопределенности. Только теперь мы должны модифицировать определения исхода и предпочтений. Неопределенный исход принято называть лотереей.

Когда индивидуум выбирает лотерею, он выбирает набор возможных исходов, каждому из которых сопоставлена вероятность, с которой он может реализоваться. Пусть возможны k различных исходов: O_1, \dots, O_k . Каждому исходу сопоставляется соответствующая вероятность: p_1, \dots, p_k . Каждая из вероятностей должна быть из интервала $[0, 1]$, а сумма вероятностей должна равняться единице. Такая структура и будет называться лотереей. Можно обозначить ее через \mathcal{L} .

На Рис. 1.7 такая лотерея изображена в виде дерева.

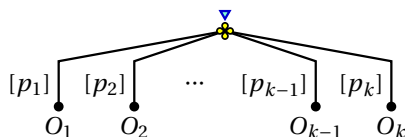


Рис. 1.7. Лотерея с k исходами в виде дерева

Чтобы моделировать принятие решений при риске, мы должны уметь моделировать выбор на лотереях. Какая из двух или более лотерей является самой предпочтительной для лица, принимающего решение? (См. Рис. 1.8.)

Допустим, что индивидуум, имеет счет в банке на 75 тыс. руб., и владеет предприятием, которое с вероятностью 0,2 принесет в будущем дополнительный доход 150 тыс. руб., а с вероятностью 0,8 — доход 25 тыс. руб. Нас интересует вопрос о том, за сколько этот индивидуум готов продать

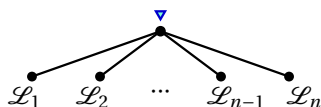
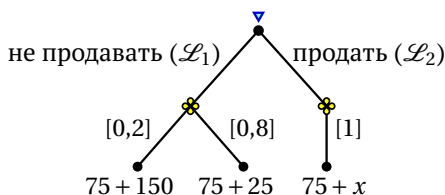


Рис. 1.8. Выбор из нескольких лотерей

свое предприятие. Чтобы ответить на это вопрос, нам следует знать, каковы предпочтения на лотереях рассматриваемого индивидуума. (Здесь в качестве примера рассматривается лотерея с выигрышами, выраженными в деньгах. Это только для упрощения, и как только будет необходимо, мы можем сразу отказаться от этого предположения.)

Пусть x — это денежная сумма, которую он может выручить за предприятие. Тогда решение о том, продавать ли предприятие, состоит в сравнении двух лотерей: первая лотерея (\mathcal{L}_1) дает (75 + 150) тыс. руб. с вероятностью 0,2 и (75 + 25) тыс. руб. с вероятностью 0,8, а вторая лотерея (\mathcal{L}_2) дает (75 + x) тыс. руб. с вероятностью единица. На Рис. 1.9 изображено дерево для подобного выбора. Индивидуум осуществляет выбор между \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , а случайные ходы делает природа. Мы хотим найти граничное значение x , т. е. такое, при котором ему безразлично, продавать или не продавать предприятие. Решение этой задачи зависит от того, какие именно предпочтения на лотереях имеет индивидуум.

Рис. 1.9. Выбор между лотереями \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2

1.7.3. Ожидаемая полезность (функция полезности фон Неймана—Моргенштерна)

Ранее мы предположили, что существует функция полезности, представляющая предпочтения на простых исходах. Но может ли существовать функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях? Теоре-

ма об ожидаемой полезности отвечает на этот вопрос утвердительно и, более того, указывает, как именно должна выглядеть такая функция. В основе соответствующей теории лежит предположение, что предпочтения индивидуума, определенные на лотереях, удовлетворяют определенным условиям (аксиомам). Это дает возможность доказать, что существует функция полезности (а именно, функция Неймана—Моргенштерна), представляющая такие предпочтения. Исторически данная теория была разработана для нужд теории игр².

Пусть, как и выше, O_1, O_2, \dots, O_k — это исходы для лотереи \mathcal{L} , и реализуются они с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k соответственно. Теорема об ожидаемой полезности утверждает, что (если выполнены соответствующие аксиомы) предпочтения на лотереях представимы функцией полезности следующего вида:

$$U(\mathcal{L}) = p_1 u(O_1) + p_2 u(O_2) + \dots + p_n u(O_n).$$

Здесь функция $u(\cdot)$ — это элементарная функция полезности (ее еще иногда называют функцией полезности Бернулли). Она сопоставляет некоторому исходу O его полезность $u(O)$.

Функция $U(\mathcal{L})$, которая оценивает лотереи, — это так называемая функция полезности фон Неймана—Моргенштерна. Видим, что она имеет вид ожидаемой полезности, т. е. вид математического ожидания полезностей исходов, поскольку это взвешенное среднее полезностей с весами, равными вероятностям исходов. Как лотереи составлены из отдельных исходов, так же и предпочтения на лотереях составлены из предпочтений на отдельных исходах.

В этой теории есть тонкий момент. В отступление от того, что говорилось ранее, элементарные функции полезности уже не просто задают порядок, выстраивая альтернативы от худшей к лучшей (больше денег лучше, чем меньше денег), но и сравнивают уровни полезности. Например, если у человека есть 1000 руб. и ему дают рубль или у того же человека есть 1 млн руб. и ему дают рубль — прирост полезности во втором случае будет меньше, рубль в первом случае будет полезнее.

Дело в том что те аксиомы, которые лежат в основе теоремы об ожидаемой полезности (мы здесь не будем обсуждать, в чем конкретно они заключаются) являются слишком «смелыми». Есть свидетельства, что в некоторых ситуациях они плохо описывают то, как в действительности ведут себя люди, сталкивающиеся с риском. Однако использование функции Неймана—Моргенштерна сильно упрощает модели теории игр, поэтому несмотря на имеющиеся проблемы почти всегда делается это предположение. В

²См. классическую работу фон Неймана и Моргенштерна по теории игр [6].

дальнейшем мы везде будем предполагать, что предпочтения индивидуума (в теории принятия решений — лица, принимающего решение, в теории игр — игрока) описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

Вернемся к примеру с продажей рискованного предприятия. Какую именно из двух лотерей предпочтет рассматриваемый индивидуум, зависит от его элементарной функции полезности $u(W)$ (где W — общее богатство индивидуума, которым он будет владеть в будущем в результате своего выбора и случайного хода природы). Минимальная сумма, за которую он готов отдать предприятие, (мы обозначим ее через \bar{x}) должна быть такой, чтобы он был безразличен между двумя лотереями. Таким образом, следует рассмотреть уравнение $U(\mathcal{L}_1) = U(\mathcal{L}_2)$, которое можно записать в виде

$$u(75 + \bar{x}) = 0,2u(75 + 150) + 0,8u(75 + 25).$$

Решив это уравнение, получим \bar{x} . В качестве примеров рассмотрим три различные элементарные функции полезности (случаи А, В и С):

$$u_A(W) = W, \quad u_B(W) = \sqrt{W}, \quad u_C(W) = W^2.$$

В случае А подставим $u_A(W) = W$ и получим уравнение

$$75 + \bar{x}_A = 0,2 \cdot 225 + 0,8 \cdot 100 = 125.$$

Решением уравнения будет $\bar{x}_A = 50$. Значит, индивидуум с элементарной функцией полезности $u_A(W) = W$ готов продать предприятие за 50 тыс. руб.

В случае В подставим $u_B(W) = \sqrt{W}$ и получим уравнение

$$\sqrt{75 + \bar{x}_B} = 0,2 \cdot \sqrt{225} + 0,8 \cdot \sqrt{100} = 0,2 \cdot 15 + 0,8 \cdot 10 = 11.$$

Отсюда $\bar{x}_B = 11^2 - 75 = 121 - 75 = 46$.

Наконец, в случае С при $u_C(W) = W^2$ имеем уравнение

$$(75 + \bar{x}_C)^2 = 0,2 \cdot 225^2 + 0,8 \cdot 100^2 = 18125.$$

Отсюда $\bar{x}_C = \sqrt{18125} - 75 \approx 134,63 - 75 = 59,63$.

1.7.4. Отношение к риску

В рассматриваемом примере мы получили $x_A = 50$, $x_B = 46$ и $x_C \approx 59,63$. Таким образом, в случае В индивидуум будет готов продать предприятие дешевле, а в случае С — дороже. Случай А особый: индивидуум готов продать предприятие за сумму, равную ожидаемому доходу от предприятия:

$$0,2 \cdot 150 + 0,8 \cdot 25 = 30 + 20 = 50.$$

Все дело в том, что если элементарная функция полезности индивидуума имеет вид $u_B(W) = \sqrt{W}$, то он менее склонен рисковать, чем если его элементарная функция полезности имеет вид $u_C(W) = W^2$. В случае $u_A(W) = W$ индивидуум безразличен между рискованной лотереей, которая в среднем приносит денежный выигрыш $75 + 50$ и гарантированным выигрышем $75 + 50$. Таких индивидуумов принято называть нейтральными к риску. Интуитивно, индивидууму не холодно и не жарко от того, что вознаграждение становится более рискованным.

В случае В индивидуум предпочитает гарантированно иметь $75 + 46$, чем участвовать в лотерее с ожидаемым выигрышем $75 + 50$. Он готов потерять в деньгах $50 - 46 = 4$, чтобы избавиться от риска. Таких индивидуумов называют рискофобами (т. е. не любящими рисковать).

Наконец, в случае С возможность участвовать в лотерее с ожидаемым выигрышем $75 + 50$ более предпочтительна для индивидуума, чем гарантированный выигрыш $75 + 59,63$. Здесь $59,63 > 50$. Следовательно, в этом случае рассматриваемый индивидуум — рискофил (человек, любящий рисковать).

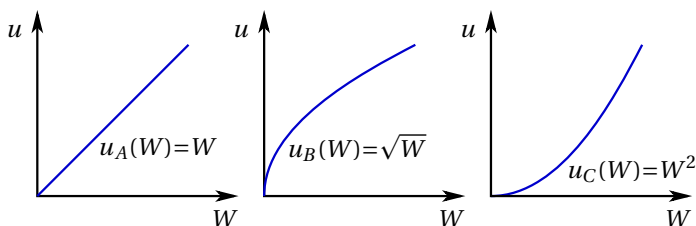


Рис. 1.10. Разное отношение к риску: А — нейтральный к риску индивидуум; В — рискофоб; С — рискофил

В общем случае отношение индивидуума к риску определяется степенью вогнутости его элементарной функции полезности. Вогнутость функции означает, что индивидуум — рискофоб. Линейность функции означает, что индивидуум нейтрален по отношению к риску. Выпуклость функции означает, что индивидуум — рискофил.

Заметьте, что вогнутость элементарной функции полезности подразумевает, что индивидуум характеризуется убывающей предельной полезностью (чем больше у него денег, тем меньше он ценит небольшой прирост богатства). Это одна из характеристик рискофоба (человека, характеризующегося неприятием риска).

Неприятие риска больше подходит для описания поведения людей, чем

Пусть в рассматриваемом примере p — вероятность получить 150, а $1-p$ — вероятность получить 25 (вместо 0,2 и 0,8). Найдите величины x_A , x_B и x_C в зависимости от вероятности p .

Проверьте, что при $p = 1$ и при $p = 0$ во всех трех случаях индивидуум готов заплатить одну и ту же сумму (какую?). Объясните этот результат.

Нарисуйте график зависимости величин x_A , x_B и x_C от p . Проанализируйте форму и взаимное расположение графиков и обсудите отношение к риску в трех случаях.



любовь к риску, поэтому обычно предполагается, что лицо, принимающее решение, является рискофобом. Иногда для упрощения предполагают нейтральность к риску. Ниже мы рассмотрим пример — так называемый «Санкт-петербургский парадокс» — который в яркой форме иллюстрирует различие между нейтральностью к риску и неприятием риска. Рискофилы в теории принятия решений и теории игр почти не встречаются.

На Рис. 1.10 показаны три рассмотренных случая элементарных функций полезности.

1.7.5. Сложные и простые лотереи

Мы предполагаем, что индивидуума, принимающего решение, интересуют только сами исходы и их вероятности, но не то, каким образом получены эти исходы. Это предположение можно интерпретировать через двухэтапные лотереи.

Пусть есть две лотереи. Лотерея \mathcal{L}_1 дает исход А с вероятностью 0,7 и исход В с вероятностью 0,3, а лотерея \mathcal{L}_2 дает исход А с вероятностью 0,2 и исход В с вероятностью 0,8. Рассмотрим лотерею, исходом которой служит лотерея \mathcal{L}_1 с вероятностью 0,2 и лотерея \mathcal{L}_2 с вероятностью 0,8. Эта будет двухэтапная лотерея. Вероятность исхода А в этой двухэтапной лотерее равна

$$0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,3,$$

а вероятность исхода В равна

$$0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,7.$$

На Рис. 1.11 показана рассматриваемая двухэтапная лотерея и эквивалентная ей простая.

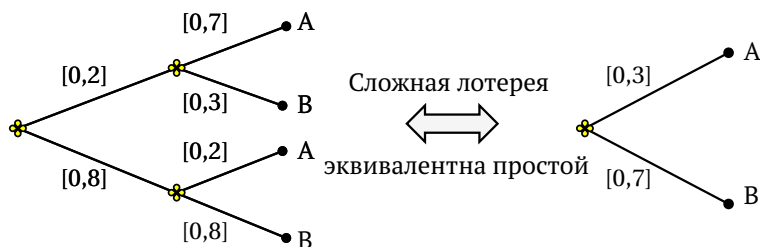


Рис. 1.11. Сложная лотерея и эквивалентная ей простая лотерея

1.7.6. Санкт-петербургский парадокс

Описание и объяснение этого парадокса приводятся в статье известного швейцарского ученого Даниила Бернулли: «Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?».

Ожидаемый доход от этой игры для Павла бесконечно велик, однако вряд ли кто согласится заплатить за право участия в такой игре неограниченно большую сумму. В этом и состоит парадокс. Объяснение парадокса состоит в том, что «ценность денег» для индивидуума не является постоянной. Она определяется некоторой возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности. То есть объяснение состоит в том, что индивидуум, как правило, является рискофобом, а не нейтральным к риску.

Предположим, что исходный (безрисковый) доход Павла составляет сумму ω дукатов. В таком случае он сталкивается с лотереей, приносящей ему доход $\omega + 2^{k-1}$ с вероятностью 2^{-k} ($k = 1, 2, \dots, \infty$). Ожидаемый доход (с учетом цены p , уплаченной за участие в игре) равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (\omega + 2^{k-1} - p) = \infty.$$

Сколь бы большой не была цена p , этот ожидаемый доход будет положительным (равным плюс бесконечности). Если $u(\cdot)$ — элементарная функция полезности Павла, то ожидаемая полезность равна

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u(\omega + 2^{k-1} - p).$$

Например, если $u(x) = \ln(x)$ и $\omega = 100$, то максимальная цена, которую Павел будет готов отдать за участие в игре, определяется из уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln(100 + 2^{k-1} - p) = \ln(100).$$

Решая численно это уравнение, получим цену

$$p \approx 4,36,$$

которая меньше бесконечности.

1.7.7. Свертывание дерева решений с помощью подсчета ожидаемого выигрыша и обратная индукция

Игра 2 (решение о покупке товара неизвестного качества): Предположим, что некий индивидуум решает, купить ли ему некоторый товар или нет. Товар может оказаться годным с вероятностью p и негодным с вероятностью $1 - p$. Ситуацию можно представить деревом, изображенным на Рис. 1.12. \odot

Для того чтобы выбрать оптимальное решение, нужно сравнить две альтернативы в соответствии с их ожидаемой полезностью:

$$u(\text{без товара}) \quad \text{или} \quad p \cdot u(\text{годный товар}) + (1 - p) \cdot u(\text{негодный товар}).$$

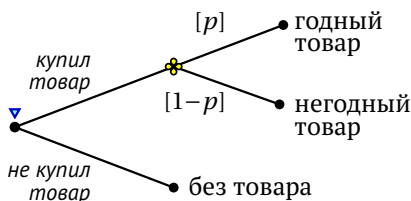


Рис. 1.12. Покупка товара неизвестного качества

Если на дереве решений изображаются ходы природы в явном виде, как на Рис. 1.12, то в каждой конечной вершине указываются исходы или же фактически полученные выигрыши (но не ожидаемые выигрыши). Когда индивидуум достигает данной конечной вершины, он получает выигрыш, соответствующий этой вершине, а не ожидаемый выигрыш.

Однако мы можем сворачивать дерево решений, и заменять части дерева, которые не зависят от действий лица, принимающего решения, на

соответствующие ожидаемые выигрыши. На Рис. 1.13 показано свернутое дерево решений, соответствующее рассматриваемому примеру. При этом ожидаемые выигрыши — это элементы расчетов, которые индивидуум проводит при анализе дерева решений, а не часть исходного дерева решений.

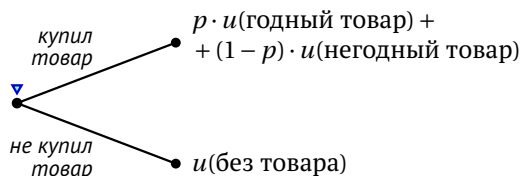


Рис. 1.13. Покупка товара неизвестного качества — свернутое дерево решений

Игра 3 (научно-исследовательские работы³): Пусть менеджер на предприятии должен решить, вкладывать ли средства в изделие А или в изделие В. (Он не может сделать и то и другое из-за финансовых ограничений.) Согласно имеющимся оценкам, научно-исследовательские работы по изделию А требуют инвестиций в размере двух миллионов долларов (\$2M), но шансы, что исследования будут успешными и удастся организовать производство изделия, равны всего 50%. С вероятностью 30% будет получена прибыль от продаж \$5M, с вероятностью 40% — \$10M, а с вероятностью 30% изделие не удастся продать. Научно-исследовательские работы по изделию В, с другой стороны, будут стоить также \$2M, но вероятность их успеха равна 100%. С вероятностью 80% будет получена прибыль от продаж \$5M, а с вероятностью 20% изделие не удастся продать. Издержки производства и того и другого изделия равны \$1M. ☉

Если политика компании состоит в максимизации ожидаемой прибыли (то есть компания нейтральна к риску), то какая стратегия будет наилучшей? Альтернативы, вероятности, выигрыши и расчеты ожидаемой прибыли показаны на дереве принятия решений, приведенном на Рис. 1.14.

Изначально около ветвей дерева решений изображаются приросты денежных выигрышей (в рамке). Чтобы получить окончательный выигрыш для каждого исхода, следует сложить выигрыши вдоль ветвей, приводящих к этому исходу. (Хотя в этом примере денежные потоки в явном виде не дисконтируются, но можно считать, что все суммы уже продисконтированы.)

³Основано на примере из статьи http://en.wikipedia.org/wiki/Decision_tree.

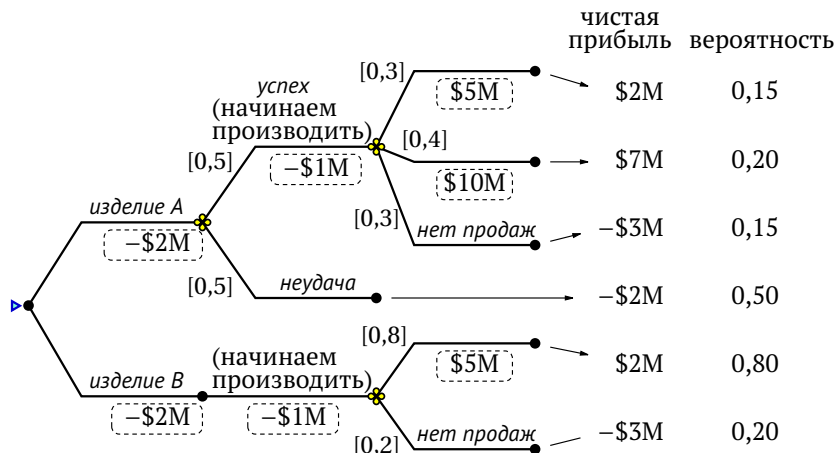


Рис. 1.14. Дерево решений: изделие А или изделие В

Для каждого из возможных действий — выбора изделия А или изделия В — можно подсчитать вероятности исходов. Они рассчитываются как *произведение* вероятностей вдоль ветвей, приводящим к этим исходам. Таким образом, для каждого исхода имеем вероятности и суммарные выигрыши (см. правую часть Рис. 1.14). Для каждого из двух действий (двух альтернатив-лотерей) сумма вероятностей равна единице. Для изделия А ожидаемый выигрыш равен

$$0,15 \cdot 2 + 0,2 \cdot 7 + 0,15 \cdot (-3) + 0,5 \cdot (-2) = 0,25,$$

а для изделия В он равен

$$0,8 \cdot 2 + 0,2 \cdot (-3) = 1.$$

Ожидаемый выигрыш для изделия А можно рассчитать и по-другому — за счет поэтапного сворачивания игры. Сначала можно рассчитать ожидаемый выигрыш на последнем этапе — когда изделие начинают производить (Рис. 1.13).

Сначала получим

$$0,3 \cdot 2 + 0,4 \cdot 7 + 0,3 \cdot (-3) = 2,5,$$

а затем уже

$$0,5 \cdot 2,5 + 0,5 \cdot (-2) = 0,25.$$

Ответ тот же.

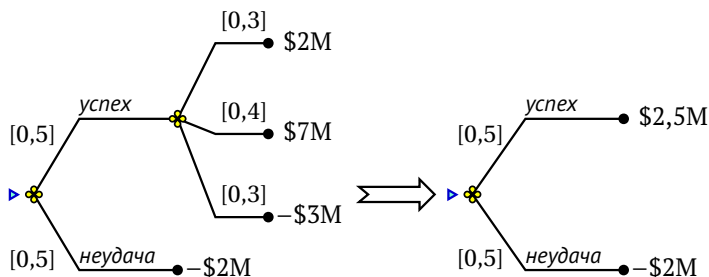


Рис. 1.15. Сворачивание дерева решений для изделия А

Мы нашли ожидаемый выигрыш для двух лотерей и теперь можем выбрать лучшую. В целом мы видим, что изделие В более выгодное, чем изделие А, поскольку приносит более высокий ожидаемый чистый доход ($1 > 0,25$).

Игра 4 (приобретение недвижимости⁴): У девелоперской фирмы есть возможность купить некоторую недвижимость за 2 млн руб. Если фирме дадут соответствующее разрешение (вероятность чего равна 60%), то она сможет переоборудовать эту недвижимость под офисы и перепродать за 2,5 млн руб. Если разрешение не будет получено, то можно будет сбывать эту недвижимость за 1,7 млн руб. или же подать апелляцию на решение органа, выдающего разрешения. Апелляция обойдется в 50 тыс. руб. при вероятности успешного решения 10%. Стоит ли девелоперу покупать эту недвижимость? ☹

В данной игре имеется две вершины, в которых решение принимает девелопер (Рис. 1.16). Это решение о том, покупать или не покупать недвижимость, и решение о том, подавать или не подавать апелляцию, если не будет дано разрешение. Здесь уже принципиально динамическая ситуация и нельзя найти оптимум просто сравнивая альтернативы-лотереи. К счастью, мы можем здесь, как и ранее, воспользоваться обратной индукцией, сворачивая дерево, начиная с конечных вершин. При этом следует использовать следующие принципы:

- * В вершине, соответствующей случайному ходу природы, рассчитывается ожидаемая полезность как сумма произведений выигрышей по

⁴Основано на примере с сайта <http://www.vanguardsw.com/dphelp4/dph00080.htm>.

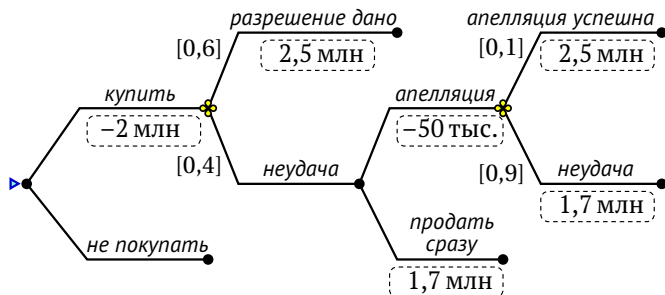


Рис. 1.16. Приобретение недвижимости

ветвям и их вероятностей. Этой вершине сопоставляется рассчитанная ожидаемая полезность.

- * В вершине, где ход принадлежит лицу, принимающему решение, следует выбрать ветви (действия), приносящие этому лицу наибольший выигрыш, и сопоставить рассматриваемой вершине этот наибольший выигрыш.

Применим эти принципы к анализируемой ситуации. После того, как девелопер подал апелляцию, имеет место случайный ход природы, который приносит 2,5 млн руб. с вероятностью 0,1 и 1,7 млн руб. с вероятностью 0,9. ожидаемый прирост выигрыша составит

$$0,1 \cdot 2,5 + 0,9 \cdot 1,7 = 1,78.$$

Если вычесть из этого 0,05 млн руб., затраченные на апелляцию, то получим 1,73. Поскольку 1,73 больше 1,7, то апелляция выгодна для девелопера. Мы можем приписать соответствующей ветке прирост выигрыша 1,73. Далее рассматриваем случайный ход природы, дающий игроку 2,5 млн руб. с вероятностью 0,6 и 1,73 млн руб. с вероятностью 0,4. Ожидаемый прирост выигрыша составит

$$0,6 \cdot 2,5 + 0,4 \cdot 1,73 = 2,192.$$

Вычитая из этой суммы 2 млн руб. за покупку недвижимости, получим 0,192 млн руб. Это больше нулевого выигрыша, который девелопер получит, если не купит недвижимость. Следовательно, ему выгодно купить недвижимость.

Если мы все же хотим найти решение сравнением лотерей, то это можно сделать с использованием понятия стратегии. В данной динамической ситуации имеется четыре стратегии: (купить, подать апелляцию), (купить,

не подавать апелляции), (не покупать, подать апелляцию), (не покупать, не подавать апелляции). Последние два варианта содержат чисто гипотетические действия, которые не реализуются по ходу игры. Их можно объединить в комбинированную стратегию «не покупать». Стратегия (купить, не подавать апелляции) приводит к лотерее, обеспечивающей 0,5 млн руб. с вероятностью 0,6 и –0,3 млн руб. с вероятностью 0,6. Ожидаемый выигрыш от этой лотереи равен

$$0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot (-0,3) = 0,3 - 0,12 = 0,18.$$

Следует сравнить три лотереи и найти из них наилучшую.

В Игре 4 найдите лотереи, соответствующие имеющимся стратегиям. Найдите оптимальную стратегию, сравнив ожидаемые выигрыши от этих лотерей.



1.7.8. Динамическое принятие решений при риске

Динамическое принятие решений при риске обычно требует комбинировать расчет ожидаемого выигрыша с дисконтированием. Рассмотрим соответствующий несложный пример⁵, в котором предполагается нейтральность к риску.

Игра 5: Фирма Хайпром хочет построить новый завод. Проект требует инвестиций в размере 2 млрд руб. Вложения должны быть сделаны сегодня. Вероятность того, что проект окажется успешным, равна 65%. Ожидаемые денежные потоки в случае успеха составят 900 млн руб. ежегодно в течение трех лет после осуществления инвестиций. Если проект провалится, ожидаемые денежные потоки составят 500 млн руб. ежегодно в течение следующих трех лет. Для оценки проектов этого типа Хайпром использует процентную ставку 12%.

Прежде, чем будут сделаны вложения, можно провести анализ рынка, наняв для этого консалтинговую фирму. Консультационные услуги стоят p . Их требуется оплатить вперед, до того как будет произведен анализ. Анализ займет один год. После этого Хайпром будет знать наверняка, окажется ли проект успешным (с вероятностью 0,65) или нет (с вероятностью 0,35). На основе полученной информации можно принять решение о том, строить или не строить. При этом все параметры проекта остаются прежними, но график выполнения сдвигается на один год.

⁵[32].

Полностью данная ситуация показана в виде дерева решений на (Рис. 1.17). ⊙

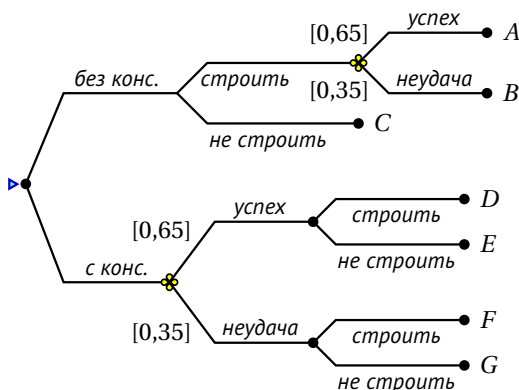


Рис. 1.17. Дерево решений для Игры 5

На (Рис. 1.17) семь возможных исходов обозначены буквами А, В, С, D, Е, F и G. Исход С дает фирме Хайпром нулевой выигрыш, а исходы Е и G — выигрыш $-p$. Для остальных исходов дисконтированные выигрыши (т. е. чистую приведенную стоимость, NPV) следует рассчитать, используя дисконтирующий множитель $\delta = 1/1,12 \approx 0,893$:

$$NPV_A = -2000 + 900/1,12 + 900/1,12^2 + 900/1,12^3 \approx 161,65,$$

$$NPV_B = -2000 + 500/1,12 + 500/1,12^2 + 500/1,12^3 \approx -799,08,$$

$$NPV_D = -p + NPV_A/1,12 \approx -p + 144,33,$$

$$NPV_F = -p + NPV_B/1,12 \approx -p - 713,47.$$

Можно теперь перерисовать дерево решений с учетом рассчитанных выигрышей (см. Рис. 1.18).

Если фирма осуществит проект без использования консультантов, то ее ожидаемый выигрыш составит

$$0,65 \cdot NPV_A + 0,35 \cdot NPV_B \approx -174,61.$$

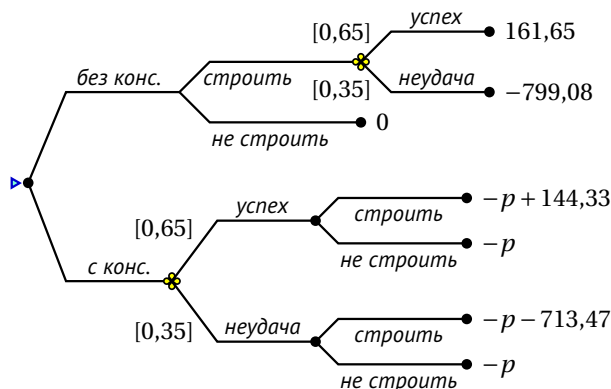


Рис. 1.18. Дерево решений для Игры 5 с указанием окончательных выигрышей

Это меньше нуля, поэтому без обращения в консультационную фирму проект осуществлять невыгодно. В этом случае ее выигрыш будет нулевым.

Если консультационная фирма сообщит, что проект будет неудачным, то выгоднее не строить ($-p > -p - 713,47$). В этом случае выигрыш будет равен $-p$. Если же консультационная фирма сообщит, что проект будет удачным, то выгоднее строить ($-p + 144,33 > -p$). В этом случае выигрыш будет равен $NPV_D \approx -p + 144,33$. В целом при использовании услуг консультационной фирмы ожидаемый выигрыш составит

$$0,65 \cdot NPV_D + 0,35 \cdot NPV_G \approx 0,65 \cdot (-p + 144,33) + 0,35 \cdot p \approx 93,81 - p.$$

Видим, что если стоимость услуг консультационной фирмы меньше 93,81, то выгодно к ней обратиться и строить или не строить в зависимости от результатов анализа. Если же стоимость услуг больше 93,81, то выгодно совсем отказаться от проекта и не использовать консультантов.

1.7.9. Непрерывный случай принятия решений при риске — страхование от пожара

Пусть элементарная функция полезности индивидуума имеет вид $u(W) = \ln(W)$. Богатство его в обычном состоянии (без пожара) составляет 3 млн, а при пожаре он несет ущерб в размере 1 млн, так что в результате пожара богатство составит 2 млн. Вероятность пожара равна 0,1. Индивидуум может застраховать свое имущество. Если x — страховая сумма, а γ — цена

страховки, то богатство без пожара и при пожаре равно соответственно

$$W_1 = 3 - \gamma x$$

и

$$W_2 = 2 - \gamma x + x = 2 + (1 - \gamma)x.$$

Ожидаемая полезность как функция страховой суммы равна

$$U(x) = 0,9 \ln(3 - \gamma x) + 0,1 \ln(2 + (1 - \gamma)x).$$

Индивидуум выбирает страховую сумму $x \geq 0$, которая дает максимум ожидаемой полезности. Производная по x равна

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{0,9\gamma}{3 - \gamma x} + \frac{0,1(1 - \gamma)}{2 + (1 - \gamma)x}.$$

Приравнявая производную к нулю, получим уравнение

$$1,8\gamma + 0,9\gamma(1 - \gamma)x = 0,3 - 0,3\gamma - 0,1\gamma(1 - \gamma)x,$$

откуда

$$\gamma(1 - \gamma)x = 0,3 - 2,1\gamma$$

и

$$x(\gamma) = \frac{0,3 - 2,1\gamma}{\gamma(1 - \gamma)}.$$

Рассмотрим несколько частных решений:

$$x(0,05) = \frac{78}{19} \approx 4,11, \quad x(0,1) = 1, \quad x(0,12) = \frac{5}{11} \approx 0,45, \quad x(0,2) = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

В последнем случае получили отрицательное значение x , что недопустимо. На самом деле при $\gamma = 0,2$ должно быть $x = 0$ (если решение в нуле, то производная целевой функции не равна нулю, а меньше или равна нулю).

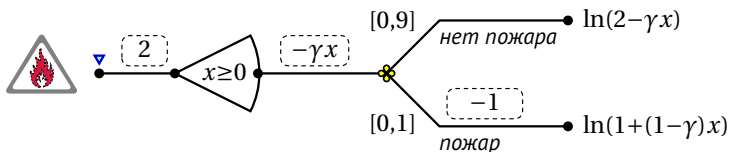


Рис. 1.19. Дерево принятия решений для страхования от пожара

Наиболее интересен случай, когда $\gamma = 0,1$. Это справедливая цена страховки — она равна вероятности страхового случая. При этом индивидуум застрахуется в точности на величину ущерба, т. е. на 1 млн. Это общее свойство, не зависящее от вида элементарной функции полезности и вероятностей. При $\gamma < 0,1$ (дешевая страховка) он застрахуется больше, чем на величину ущерба, а при $\gamma > 0,1$ (дорогая страховка) — меньше, чем на величину ущерба.

Изобразим дерево решений для рассмотренного решения о страховании (Рис. 1.19). Выбираемая переменная x принимает непрерывные значения, поэтому соответствующий выбор показан в виде сектора. При каждом выборе x начинается свое поддерево, выигрыши для которого зависят от x . Поскольку невозможно изобразить все это бесконечное множество поддеревьев, то изображено только одно, но «параметрическое» — выигрыши на нем зависят от параметра x .

Рассмотрите элементарную функцию полезности общего вида $u(W)$, произвольную вероятность пожара p и произвольные величины богатства без пожара K_1 и при пожаре K_2 . Предположите только, что функция $u(W)$ дифференцируема и что ее производная $u'(W)$ убывает (т. е. что индивидуум — рискофоб). Покажите, что если $\gamma = p$, то индивидуум застрахуется на сумму $x = K_1 - K_2$, т. е. на величину ущерба.

Покажите далее, что при $\gamma < p$ окажется, что $x > K_1 - K_2$, а при $\gamma > p$ наоборот $x < K_1 - K_2$.

1.7.10. Рандомизация

Рандомизация — это случайный выбор действия (в теории игр принято говорить о смешанной стратегии). Пусть O_1, \dots, O_n — исходы. Случайный исход (смешанная стратегия) — это распределение вероятностей на этих исходах: $\sigma = p_1, \dots, p_n$, где $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Выбор случайного исхода, как и выбор обычного исхода в условиях риска, принято моделировать с помощью функции Неймана—Моргенштерна. Оптимальный случайный исход (оптимальная смешанная стратегия) находится из задачи максимизации ожидаемой полезности

$$U(\sigma) = p_1 u(O_1) + \dots + p_n u(O_n).$$

Упрощенно случайный исход (смешанную стратегию) можно задавать символической записью следующего вида (как если бы это было математиче-

ское ожидание *исходов*):

$$\sigma = p_1 O_1 + \dots + p_n O_n.$$

Выгодна ли рандомизация?

В случае двух исходов, O_1 и O_2 , можем ввести обозначение $p = p_1$. При этом $p_2 = 1 - p$ и случайный исход полностью описывается одним параметром $p \in [0; 1]$. Ожидаемая полезность равна

$$U(p) = pu(O_1) + (1 - p)u(O_2).$$

Ясно, что в случае $u(O_1) > u(O_2)$ максимум достигается при $p = 0$, а в случае $u(O_1) < u(O_2)$ — при $p = 1$. Если $u(O_1) = u(O_2)$, то любое значение $p \in [0; 1]$ подходит в качестве решения, поскольку ожидаемая полезность является константой.

Эти выводы нетрудно распространить на случай $n > 2$ исходов. Если имеется исход O_j , который лучше все остальных, т.е. такой что $u(O_j) > u(O_i)$ при всех $i \neq j$, то оптимальный случайный исход имеет вид $p_j = 1$ и $p_i = 0$ при всех $i \neq j$, т.е. имеет вид так называемой чистой стратегии.

Если есть несколько эквивалентных исходов, то выбор случайного исхода будет неоднозначным. Например, если $n = 3$, $u(O_1) = 3$, $u(O_2) = 3$ и $u(O_3) = 1$, то решение будет определяться условиями $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ и $p_3 = 0$. В том числе среди решений будут чистые стратегии $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то индивидуум рандомизирует исходы O_1 и O_2 . В любом из решений ожидаемая полезность будет равна 3. Таким образом, того же результата, что и при рандомизации, можно добиться без рандомизации, с использованием чистых стратегий (неслучайных исходов).

Это общее свойство: если индивидуум смешивает исходы (стратегии), то они для него эквивалентны. При этом того же выигрыша можно достичь использованием одной из чистых стратегий. Значит, никакого смысла рандомизировать при принятии решений нет. Однако следует оговориться, что это верно только для функции Неймана—Моргенштерна. В частности, человек может ценить саму по себе неожиданность, связанную с рандомизацией.

1.8. Байесовское принятие решений

1.8.1. Сведения из теории вероятностей: совместные, частные и условные вероятности

Вероятность — это количественный измеритель неопределенности, присущей нашим представлениям и суждениям о возможности появления

тех или иных событий. В теории принятия решений и теории игр чаще всего используется субъективный взгляд на вероятность, т. е. вероятности представляют собой субъективные оценки шансов появления событий лицом, принимающим решение⁶.

Если A — это некоторое событие, то вероятность его мы будем обозначать $P(A)$ ($P(A) \in [0; 1]$). Введем некоторые полезные термины.

Пусть события A и B таковы, что если произошло A , то не могло произойти B . Такую пару событий называют несовместными (взаимоисключающими) событиями. Вероятности несовместных событий складываются. Если A_1, \dots, A_n попарно несовместны, то выполнено

$$\begin{aligned} P(A_1 \text{ или } \dots \text{ или } A_n) &= \\ &= P(\text{произошло хотя бы одно из событий } A_1, \dots, A_n) = \\ &= P(A_1) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

Далее, события A_1, \dots, A_n образуют полную (исчерпывающую) группу (или систему) событий, если хотя бы одно из событий точно происходит:

$$P(A_1 \text{ или } \dots \text{ или } A_n) = 1.$$

Пусть события A_1, \dots, A_n образуют полную группу несовместных событий (или, другими словами взаимноисключающий и исчерпывающий набор событий), т. е. может произойти *одно и только одно* из них. Для такой группы событий выполнено

$$P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1,$$




т. е. сумма вероятностей этих событий должна быть равна единице.

Рассмотрим два таких взаимноисключающих и исчерпывающих набора событий на примере. Человек слушает утренний прогноз погоды и старается определить с его помощью, будет ли дождь в течении дня (от этого зависит, брать ли с собой зонт). Предположим, что переменная «прогноз» может принимать три различных значения: «дождь», «облачно» и «ясно». Соответствующие события Д, О или Я — это взаимноисключающий и исчерпывающий набор событий. Предположим далее, что R — это событие, состоящее в том, что в течении дня будет достаточно сильный дождь, в результате которого человек рискует промокнуть. Событие R и дополнительное к нему событие «не R » — это тоже взаимноисключающий и исчерпывающий набор событий.

⁶Хотя в некоторых случаях вероятность можно трактовать как относительную частоту появления некоторого события в серии повторяющихся испытаний.

В Таблице 1.1 задано совместное распределение вероятностей для двух случайных переменных — утреннего прогноза погоды и фактической погоды (в левом верхнем прямоугольнике). Указанные вероятности имеют вид $P(X \text{ и } Y)$, где X — это Д, О или Я, а Y — R или «не R ». Можно предположить, что эти вероятности отражают внутренние представления человека, накопленный им в течении предыдущей жизни опыт.

Таблица 1.1. Распределение вероятностей для прогноза и фактической погоды

Погода	Прогноз			
	 Д	 О	 Я	Σ
R (дождь)	0,15	0,1	0,05	0,3
Не R (не дождь)	0,05	0,15	0,5	0,7
Σ	0,2	0,25	0,55	1

Суммы по строкам и столбцам — это частные (маргинальные) вероятности. Их также можно назвать безусловными вероятностями (как противоположность условным о которых ниже).

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B , определяется как

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)} \text{ при } P(B) > 0.$$

Рассмотрим вероятность дождливой погоды (R). Безусловная вероятность равна сумме совместных вероятностей по соответствующей строке таблицы:

$$P(R) = 0,15 + 0,1 + 0,05 = 0,3.$$

Пусть теперь человек услышал прогноз погоды. С учетом этой информации какой будет для него вероятность дождя? Пусть прогноз был Д. Безусловная вероятность события Д есть сумма совместных вероятностей по соответствующему столбцу:

$$P(D) = 0,15 + 0,05 = 0,2.$$

Первое слагаемое здесь — это совместная вероятность Д и R : $P(D \text{ и } R) = 0,15$. Поэтому

$$P(R | D) = \frac{P(D \text{ и } R)}{P(D)} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75.$$

Если прогноз был О, то

$$P(R | O) = \frac{P(O \text{ и } R)}{P(O)} = \frac{0,1}{0,1 + 0,15} = 0,4.$$

Если прогноз был Я, то

$$P(R | Я) = \frac{P(Я \text{ и } R)}{P(Я)} = \frac{0,05}{0,05 + 0,5} = \frac{1}{11} \approx 0,09.$$

Наоборот, если человек с утра не слушал прогноза, но знает, какая сегодня была погода, то он, обладая информацией Таблицы 1.1, может судить о прогнозе. Безусловные вероятности у нас равны $P(D) = 0,2$, $P(O) = 0,25$, $P(Я) = 0,55$. Найдем условные вероятности при том, что был дождь (событие R):

$$P(D | R) = \frac{P(D \text{ и } R)}{P(R)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5.$$

Далее,

$$P(O | R) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

и

$$P(Я | R) = \frac{0,05}{0,3} = \frac{1}{6} \approx 0,17.$$

Идея этих расчетов довольно проста. Пусть человек точно знает, что сегодня был дождь (событие R). С учетом этого факта события (D и R), (O и R) и ($Я$ и R) будут составлять взаимоисключающую и исчерпывающую группу. Их вероятности равны 0,15, 0,1 и 0,05 соответственно, но сумма вероятностей не единица, а $P(R) = 0,3$. Для получения условных вероятностей нужно эти вероятности нормировать к единице, то есть поделить каждую на 0,3.

Тот же принцип можно применить к немного другой ситуации. Пусть A_1, \dots, A_n — взаимоисключающий и исчерпывающий набор событий. Сумма их вероятностей равна единице. Пусть мы узнали, что события A_{k+1}, \dots, A_n ($1 < k < n$) точно не произошли, другими словами, произошло событие $B = A_1$ или ... или A_k . Вероятность такого события равна

$$P(B) = P(A_1) + \dots + P(A_k).$$

Условно по событию B мы можем пересчитать вероятности событий A_1, \dots, A_n При $i = 1, \dots, k$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \text{ и } B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)}{P(A_1) + \dots + P(A_k)}.$$

При $i = k+1, \dots, n$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \text{ и } B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0.$$

Пусть в рассматривавшемся примере точно известно, что прогноз был не Я. Вероятность этого равна $P(\text{не Я}) = 0,2 + 0,25 = 0,45$. Условно по этому факту $P(D | \text{не Я}) = 0,2/0,45 = 4/9$, $P(O | \text{не Я}) = 0,25/0,45 = 5/9$ и $P(Я | \text{не Я}) = 0$.

1.8.2. Байесовское обучение. Формула Байеса

Пусть имеется набор взаимоисключающих и исчерпывающих гипотез H_1, \dots, H_n об окружающей обстановке. $\mathbf{P}(H_i)$ — это априорные вероятности, т. е. вероятности до получения дополнительной информации. Это представление индивидуума об окружающей обстановке. Пусть индивидуум получил дополнительную информацию — узнал, что произошло событие D . Ему известны условные вероятности $\mathbf{P}(D | H_i)$. $\mathbf{P}(D | H_i)$ — это вероятность наблюдения этих данных, если верна гипотеза H_i . Требуется скорректировать вероятности с учетом D , т. е. найти $\mathbf{P}(H_i | D)$ — апостериорные вероятности (вероятности, рассчитанные с учетом дополнительной информации).

По определению

$$\mathbf{P}(H_i | D) = \frac{\mathbf{P}(H_i \text{ и } D)}{\mathbf{P}(D)}.$$

Учтем, что $\mathbf{P}(H_i \text{ и } D) = \mathbf{P}(D | H_i)\mathbf{P}(H_i)$ и получим

$$\mathbf{P}(H_i | D) = \frac{\mathbf{P}(D | H_i)\mathbf{P}(H_i)}{\mathbf{P}(D)}.$$

Это формула Байеса. (Ее также называют правилом Байеса, законом Байеса или теоремой Байеса.) В числителе стоит вероятность $\mathbf{P}(D)$, которую можем вычислить по так называемой формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P}(D) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i \text{ и } D) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(D | H_i)\mathbf{P}(H_i).$$

Рассмотрим пример⁷. Компьютеры, продаваемые в России по месту производства бывают «белой» (Б), «красной» (К) и «желтой» (Ж) сборки. Они встречаются в следующей пропорции: 25%, 5% и 70%. Среди компьютеров «белой» сборки 1% дефектных, «красной» — 3% дефектных и «желтой» — 5% дефектных. Пусть случайно купленный компьютер оказался дефектным. Каковы апостериорные вероятности места сборки (т. е. условные по тому факту, что компьютер дефектный)?

Сначала находим совместные вероятности места сборки и наличия дефекта (Таблица 1.2). Апостериорные вероятности рассчитываем по правилу Байеса, нормируя совместные вероятности к единице:

$$\mathbf{P}(Б | D) = \frac{0,0025}{0,039} \approx 0,064 = 6,4\%,$$

⁷Пример условный и указываемые вероятности не имеют отношения к реальной ситуации.

Таблица 1.2. Расчет апостериорных вероятностей места сборки

Гипотеза, H_i	Б	К	Ж	Σ
Априорные вероятности, $P(H_i)$	0,25	0,05	0,7	1
$P(D H_i)$	0,01	0,03	0,05	
$P(D \text{ и } H_i)$	0,0025	0,0015	0,035	0,039
Апостериорные вероятности, $P(H_i D)$	0,064	0,038	0,897	1

$$P(K | D) = \frac{0,0015}{0,039} \approx 0,038 = 3,8\%,$$

$$P(Ж | D) = \frac{0,035}{0,039} \approx 0,897 = 89,7\%.$$

1.8.3. Байесовское принятие решений. Байесовское дерево решений

До сих пор мы рассматривали лотереи, которые происходят по времени после принятия решения индивидуумом. Однако во многих ситуациях принятия решений случайный ход природы по смыслу должен предшествовать принятию решения. Рассмотрим простую ситуацию подобного рода.

Таблица 1.3. Выигрыши для принятия решения о зонте

	Взять зонт (З)	Пойти без зонта (БЗ)
Дождь (R)	20	−60
Нет дождя (не R)	−30	50

Человек решает, взять ли ему с собой зонт. Его выигрыши заданы Таблицей 1.3. Сначала рассмотрим случай, когда человек не имеет информации о прогнозе погоды, только оценивает каким-то образом вероятность дождя исходя из времени года. Обозначим эту априорную субъективную вероятность через p . Дерево решений для принятия решения о том, брать ли зонт, показано на Рис. 1.20.

Если человек берет зонт, то получает ожидаемый выигрыш

$$p \cdot 20 + (1 - p) \cdot (-30) = 50p - 30.$$

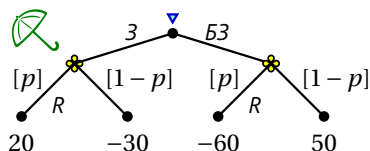


Рис. 1.20. Дерево для принятия решения о зонте

Если он не берет зонт, то получает ожидаемый выигрыш

$$p \cdot (-60) + (1 - p) \cdot 50 = 50 - 110p.$$

Найдем граничную вероятность \bar{p} , при которой человеку безразлично, брать ли зонт (З ~ БЗ). Решаем уравнение

$$50p - 30 = 50 - 110p,$$

откуда $\bar{p} = 0,5$ (см. Рис. 1.21). Например, если априорная вероятность дождя, как и выше, равна $P(R) = 0,3$, то надо идти без зонта, так как $0,3 < \bar{p} = 0,5$.

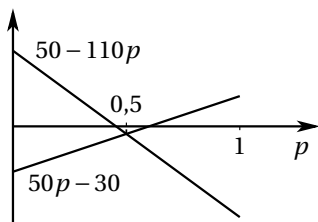


Рис. 1.21. Сравнение ожидаемых полезностей для выбора оптимального решения о зонте

Что будет, если до принятия решения произошло случайное событие, которое несет дополнительную информацию о возможности дождя? Если человек слышал прогноз погоды, то он может использовать эту информацию при принятии решения. Его ожидаемую полезность следует уже рассчитывать на основе соответствующих условных (апостериорных) вероятностей. Если прогноз был Д, то условно по этому факту вероятность дождя равна $P(R | Д) = 0,75$. С учетом этого ($0,75 > 0,5$) делаем вывод, что нужно взять с собой зонт. Если прогноз был О или Я, то следует исходить из вероятностей $P(R | О) = 0,4$ и $P(R | Я) \approx 0,09$. Ясно, что при этих вероятностях человеку не стоит брать зонт ($0,4 < 0,5$ и $0,09 < 0,5$).

Игра 6 (разведка на нефть): Нефтяной компании принадлежит некоторый участок. В наличии или отсутствии нефти можно убедиться с помощью бурения, которое стоит 30 млн руб. Если нефть имеется, то прибыль с месторождения составит 70 млн руб. По предварительным данным шансы, что на участке есть нефть, составляют 60%. Стоит ли компании бурить скважину, если ее интересует суммарная ожидаемая прибыль? ☉

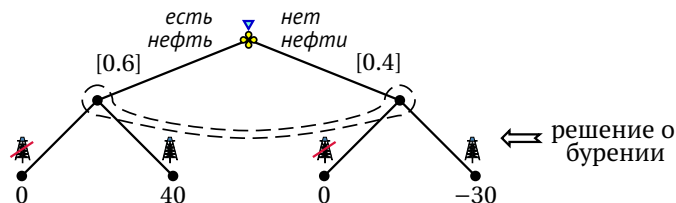


Рис. 1.22. Разведка на нефть — решение о бурении

По поводу этой ситуации можно сказать, что до принятия решения уже имеет место некоторое состояние (свершившийся факт), но лицу, принимающему решение, неизвестно, какое именно состояние имеет место. В экономической теории принято говорить, что есть некоторое состояние природы (или состояние мира). В рассматриваемой ситуации принятия решения имеется два возможных состояния природы: на участке есть нефть и на участке нет нефти. Предполагается, что индивидuum имеет некоторые представления о том, с какой вероятностью может иметь место то или иное состояние мира. В данном случае компания считает, что два состояния имеют вероятности 0,6 и 0,4 соответственно. Чтобы принять правильное решение, компания должна учесть имеющиеся риски.

На Рис. 1.22 эта ситуация принятия решения изображена в виде дерева. Тот факт, что компания не знает, есть ли нефть на участке, с точки зрения дерева решений означает, что она не знает в момент принятия решения, в правой или левой вершине она находится. Этот факт на дереве отображается с помощью так называемого информационного множества. На рисунке информационное множество изображено с помощью контура, содержащего обе вершины, которые фирма не может отличить. Из каждой вершины информационного множества идут ветви, которые соответствуют одинаковым возможным действиям: не бурить скважину или бурить.

Вероятность левой вершины — 0,6, а правой — 0,4. С учетом этих вероятностей можем рассчитать ожидаемые выигрыши от действий, которые можно осуществить в данном информационном множестве. Если компа-

ния решит не бурить скважину, то она в любом случае получит 0, так что ожидаемый выигрыш равен нулю. Если компания решит бурить скважину, то ожидаемый выигрыш будет равен

$$0,4 \cdot 40 + 0,4 \cdot (-30) = 12.$$

Таким образом, выгодно произвести бурение.

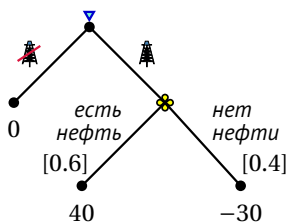


Рис. 1.23. Решение о бурении — «вывернутое» дерево решений

Здесь «Природа» ходит первой, но компания не знает, как сходил «Природа», поэтому их ходы можно поменять местами. При этом дерево решений как бы «выворачивается» (Рис. 1.23). Такая операция позволяет сделать дерево решений более обозримым и позволяет применить к нему несложную обратную индукцию.

Игра 7 (разведка на нефть с сейсмическим исследованием): Нефтяной компании принадлежит участок, и она хочет определить, есть ли на нем нефть. По предварительным данным шансы, что на участке есть нефть, составляют 60%. Компания может предпринять сейсмические исследования, которые стоят 2 млн руб. Если на участке есть нефть, то сейсмические исследования укажут на это в 80% случаев. Если на участке нет нефти, то сейсмические исследования укажут на это в 90% случаев. Точно в наличии или отсутствии нефти можно убедиться только с помощью бурения, которое стоит 30 млн руб. Если нефть имеется, то общая прибыль с месторождения (без учета перечисленных издержек) составит 70 млн руб. ☉

На Рис. 1.24 описанная ситуация принятия решений изображена в виде дерева. При этом решение о бурении без проведения сейсмического исследования представлено в «свернутом» виде, поскольку мы уже провели выше соответствующий анализ.

Попробуем анализировать представленное дерево решений с конца. Пусть сейсмическое исследование дало положительный результат — находимся в информационном множестве Φ . Однако в какой именно вершине

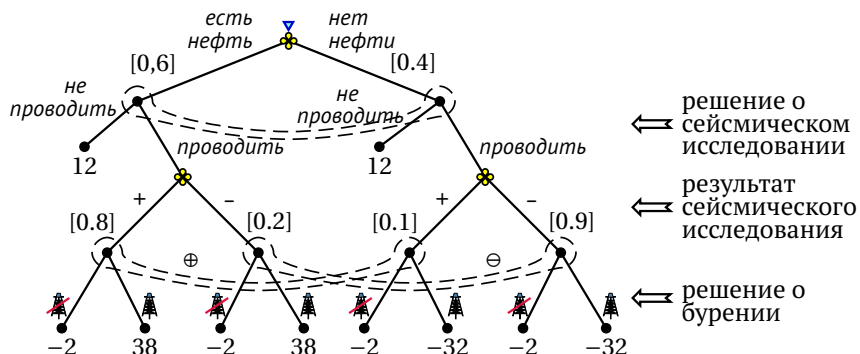


Рис. 1.24. Разведка на нефть — решение о сейсмическом исследовании и бурении

мы находимся, неизвестно, поэтому точно не знаем, каим будет выигрыш в случае тех или иных действий. Вероятность попадания в левую вершину равна $0,6 \cdot 0,8 = 0,48$, а в правую — $0,4 \cdot 0,1 = 0,04$. Общая вероятность попадания в это информационное множество равна $P(\oplus) = 0,48 + 0,04 = 0,52$. Вероятность попадание в левую вершину, если уже в информационном множестве \oplus :

$$P(\text{есть нефть} \mid \oplus) = \frac{0,48}{0,52} = \frac{12}{13} \approx 0,92.$$

То же для правой вершины:

$$P(\text{нет нефти} \mid \oplus) = \frac{0,04}{0,52} = \frac{1}{13} \approx 0,08.$$

Ожидаемая полезность с учетом того, что мы находимся в информационном множестве \oplus равна -2 , если не бурить скважину, и

$$\frac{12}{13} \cdot 38 + \frac{1}{13} \cdot (-32) = \frac{424}{13} = 32 \frac{8}{13},$$

если не бурить. Компании выгодно бурить.

Аналогичные рассуждения можем провести для информационного множества \ominus (соответствующего отрицательному результату сейсмического исследования). Вероятность попасть в левую вершину равна $0,6 \cdot 0,2 = 0,12$, а в правую — $0,4 \cdot 0,9 = 0,36$. Общая вероятность попасть в информационное множество \ominus равна $P(\ominus) = 0,12 + 0,36 = 0,48$. Условные вероятности для двух вершин равны

$$P(\text{есть нефть} \mid \ominus) = \frac{0,12}{0,48} = 0,25$$

и

$$P(\text{нет нефти} | \ominus) = \frac{0,36}{0,48} = 0,75.$$

Ожидаемые полезности равны -2 , если бурить, и

$$0,25 \cdot 38 + 0,75 \cdot (-32) = -14,5,$$

если не бурить. Компании не выгодно производить бурение.

Теперь рассчитаем ожидаемый выигрыш по результатам сейсмического исследования с учетом того, что $P(\oplus) = 0,52$ и $P(\ominus) = 0,48$:

$$0,52 \cdot 32 \frac{8}{13} + 0,48 \cdot (-2) = 16.$$

Если проводим исследование, то ожидаемый выигрыш равен 16, а если нет, то 12. Значит, надо проводить сейсмическое исследование.

Можно описанную логику анализа представить как «выворачивание дерева наизнанку» (Рис. 1.25). Ветка, соответствующая отказу от сейсмического исследования, изображена в развернутом виде. На получившемся дереве решение находится обычной обратной индукцией. Это дерево существенно проще чем то, что изображено на Рис. 1.24. Однако дерево на Рис. 1.24 полезнее тем, что изображает ситуацию с содержательной точки зрения, демонстрирует порядок ходов в явном виде.

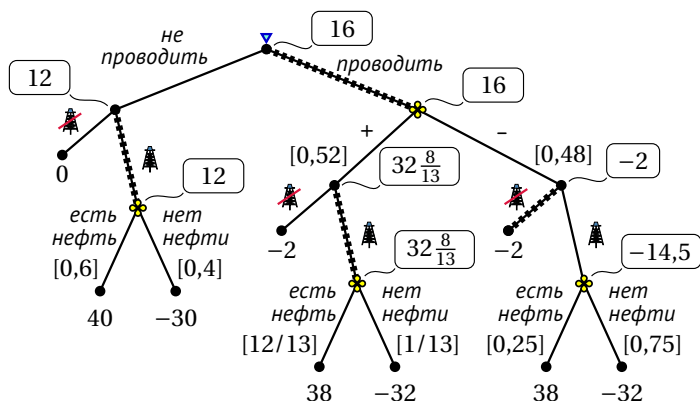


Рис. 1.25. Решение о сейсмическом исследовании и бурении — «вывернутое» дерево решений

Опишем общий алгоритм анализа принятия решения в информационном множестве⁸:

- * Надо рассчитать вероятности попадания в каждую из вершин информационного множества при данных предыдущих действиях индивидуума, перемножая вероятности вдоль пути от начальной вершины.
- * Эти исходные вероятности надо нормировать к единице (т. е. использовать правило Байеса), разделив их на общую вероятность попадания в информационное множество.
- * Выявить оптимальные действия в данном информационном множестве, т. е. дающие максимальный ожидаемый выигрыш по рассчитанным условным вероятностям. Заменить информационное множество на конечные вершины, приписав этим вершинам соответствующий ожидаемый выигрыш.

Задачи

Задача 1 Пусть множество альтернатив имеет вид $\{a, b, c, d\}$. Предпочтения индивидуума на этом множестве удовлетворяют следующим свойствам: $a \succsim a, b \succ b, c \succ c, d \succ d, a \succ d, b \succ d, d \succ c, b \succ a, a \succ c, b \succ c$. Других пар, связанных отношением \succ , нет. Возможно ли построить функцию полезности, представляющую данные предпочтения? Если нет, то почему? Если да, то постройте ее.

Задача 2 Для каждой из частей Таблицы 1.4 рассмотрите изображенные предпочтения. Ответьте на вопрос задачи 1.

Таблица 1.4. Данные для задачи 2

	a	b	c
a	\sim	$>$	$<$
b	$<$	\sim	$>$
c	$>$	$<$	\sim

	a	b	c	d
a	\sim	$<$	$<$	$<$
b	$>$	\sim	$>$	$>$
c	$>$	$<$	\sim	\sim
d	$>$	$<$	\sim	\sim

⁸Этот алгоритм не годится в случае, если индивидуум не обладает идеальной памятью, т. е. может забывать информацию, которой владел ранее.

Задача 3 Когда индивидууму предложили альтернативы A, B, C и D , он заявил, что для него C лучше остальных трех. Когда ему же предложили альтернативы B, C, E и F , он заявил, что для него F лучше остальных трех. А когда индивидууму предложили альтернативы A, D, E и F , он заявил, что для него альтернатива A лучше остальных трех. Какому свойству не удовлетворяют предпочтения этого индивидуума? Почему?

Задача 4 Пусть $W > 0$ — общее богатство некоторого человека, выраженное в рублях. Его функция полезности зависит от W как $u(W) = -1/W$. Имеет ли смысл такая (принимая отрицательные значения) функция полезности? Объясните. Предложите какие-нибудь другие функции полезности, которые соответствуют тем же предпочтениям, что и $u(W) = -1/W$.

Задача 5 [10] Бизнесмен А. Коняшев пошел в воскресенье на бег. Он решает, поставить ли в последнем заезде на лошадь своего приятеля, бизнесмена Б. Удачина, или нет. Б. Удачин знает свою лошадь и знает кое-что о других лошадях, участвующих в заезде. Он сообщил А. Коняшеву, что шансы его лошади выиграть заезд составляют 1 к 9 (т. е. вероятность выигрыша равна 0,1). У Коняшева с собой M руб. Он может поставить на лошадь приятеля c руб. ($c < M$). Если лошадь выигрывает, то он получит z руб., а если не выигрывает, то ничего.

1. Изобразите данную ситуацию при помощи дерева решений.
2. Найдите оптимальное решение — ставить или не ставить — в зависимости от параметров M, c, z в предположении, что А. Коняшев нейтрален к риску.
3. Охарактеризуйте оптимальное решение в предположении, что полезность А. Коняшева зависит от общей денежной суммы x , которую он будет иметь в результате (например, если он поставит на лошадь и проиграет, то $x = M - c$), и его функция полезности имеет вид $u(x) = -1/x$.

Задача 6 Готовясь к экзамену, студент успел выучить только 15 билетов из 20. Он решает, взять билет первым или же вторым. Изобразите эту ситуацию принятия решений в виде дерева. Это должно быть полное и развернутое дерево, на котором следует, в частности, указать исходы и случайные ходы природы с соответствующими вероятностями. Как на этом дереве будет изображен ход другого студента, который возьмет билет первым, если рассматриваемый студент решит взять билет вторым? Как сложную лотерею, которая возникает, если рассматриваемый студент решит взять билет

вторым, преобразовать в простую лотерею? Проанализируйте эту ситуацию посредством сворачивания дерева принятия решений. Какое решение будет оптимальным? Зависит ли ответ на этот вопрос от элементарной функции полезности?

Задача 7 [38] Имеется возможность произвести инвестиции, которые позволяют получить 2 млн руб. с вероятностью 0,6 и потерять 1,2 млн руб. с вероятностью 0,4. Индивидуум *A* соглашается на эти инвестиции, а индивидуум *B* — нет. Имеется следующая информация: предпочтения одного из них задаются функцией $\ln x$ (x измеряется в млн руб.), а предпочтения другого — функцией \sqrt{x} , один из них имеет 1,5 млн руб. и другой — 3 млн руб. Неизвестно, однако, к кому конкретно какая функция и какой капитал относится. Укажите для каждого индивидуума его функцию полезности и величину капитала.

Задача 8 [30] Инвестор с богатством 100 имеет возможность заключить пари, которое удвоит его богатство с вероятностью p и сделает его богатство в половину меньшим с вероятностью $1 - p$. Его функция выигрыша $u(x) = \ln x$.

1. При каких значениях p он согласится на пари?
2. Предположим вместо этого, что он нейтрален к риску (т. е. $u(x) = x$). При каких p он согласится на пари?

Задача 9 Проект требует в первый период инвестиций в размере 300 млн руб. Во второй и третий период он приносит чистый доход 200 млн руб. Вычислите чистую приведенную стоимость проекта при дисконтирующем множителе 0,5.

Задача 10 Проект *A* требует в первый год инвестиций в размере 200 млн руб. На второй и третий год он приносит чистый доход 125 млн руб. Проект *B* требует в первые два года ежегодных инвестиций в размере 100 млн руб. В последующие три года он приносит чистый доход 90 млн руб. Определите, какой проект более выгоден, если денежные потоки дисконтируются по ставке 11% годовых (т. е. дисконтирующий множитель равен $1/1.11$).

Задача 11 Инвестор принимает решение о вложении своего капитала величиной 100 млн руб. на два года. На первый год он имеет три возможных варианта вложения своего капитала:

- * положить деньги на два года в банк и получить в конце 140 млн руб. (вариант *P*);

- * вложить деньги на два года в рискованное предприятие, которое за первый год принесет доход 50 млн руб. или 130 млн руб. с равной вероятностью, а за второй год гарантированно принесет доход 60 млн руб. (вариант Q);
- * хранить деньги дома под подушкой (вариант R).

(Можно вложить только целиком весь капитал в один из трех вариантов.) На второй год, если был выбран вариант R, у инвестора будет два возможных варианта вложения капитала:

- * вложить деньги на один год в рискованное предприятие, на котором может потерять все свои деньги с вероятностью 0,6 или утроить вложенное с вероятностью 0,4 (вариант S);
- * продолжать хранить деньги дома под подушкой (вариант T).

(Опять же можно вложить только целиком весь капитал в один из двух вариантов.)

1. Нарисуйте дерево решений.
2. Для каждой из конечных вершин рассчитайте чистую приведенную стоимость (NPV), считая, что дисконтирующий множитель инвестора равен 0,9.
3. Сворачиванием дерева решений найдите оптимальную стратегию в предположении, что инвестор нейтрален к риску.

Задача 12 Пусть есть одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен \$9. Существует лотерейный билет, который может выиграть \$0 с вероятностью 0,5 (если выпадет «орел») и \$7 с вероятностью 0,5 («решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации.

1. За какую сумму x потребитель купил бы такой билет?
2. За какую сумму y потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из 9 билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «орел», и 9 по \$1, выигрывающих в состоянии мира «решка»)?
3. Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму z он бы его продал?

Задача 13 Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег).

1. Лотерея 70 руб., 20 руб. и 100 руб. с вероятностями $1/3$, $1/2$ и $1/6$ и безрисковый доход величиной 60 руб. для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум рискофоб? нейтрален к риску? рискофил?
2. Пусть вместо этого известно, что лотерея \$3 и \$5 с вероятностями $1/2$ и $1/2$ и лотерея \$3 и \$9 с вероятностями $2/3$ и $1/3$ для индивидуума эквивалентны. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 14 [38]

1. Узнав о ваших выдающихся успехах в изучении теории игр, с вами связались советники в области безопасности известного своей коррумпированностью диктатора Мавала Баррани. Вот что они сказали: «Президент Баррани сейчас сосредоточил войска на границе и мы должны решить, вторгнуться ли в соседнюю богатую нефтью страну Шеллабас. Если мы осуществим вторжение, то для обсуждения этого вопроса будет собран Совет безопасности ООН, и мы оцениваем, что с вероятностью 60% он решит нас наказать. Если он этого не делает, то мы получим все нефтяные скважины Шеллабаса и доходы от них. Баррани рассчитывает, что в этом случае он сможет положить дополнительно \$150 млрд на свои банковские счета. Если ООН атакует, то мы проиграем, а Баррани будет вынужден потратить \$20 млрд тех нефтяных денег, которые он обычно кладет в свой карман, на восстановление армии. Может быть, лучше оставить все как есть, и сказать Баррани, чтобы он ограничился теми \$600 млрд, которые у него уже есть (с учетом того, что он является нейтральным к риску)?».
2. Неожиданно другой эксперт, который до этого момента хранил молчание, сказал следующее: «О чем вы говорите? Как вы можете утверждать, что вероятность вмешательства ООН 60%? Я совершенно уверен, что вероятность этого не меньше 95%!» Должен ли Баррани напасть на Шеллабас в этом случае?
3. Еще один эксперт говорит «Думаю, что мой коллега прав. Однако, следует принять во внимание одно обстоятельство. Позиции президента Баррани на данный момент не очень крепкие. Если он не решится вторгнуться в Шеллабас, то очень вероятно, что рассерженные военные его свергнут, а все деньги, которые у него есть, экспроприируют. Из докладов службы безопасности следует, что вероятность подобного мятежа 20%. Я думаю, что президент Баррани не имеет никакого другого выхода, кроме как осуществить вторжение». Предположите, что эти факты верны. Правильный ли вариант действий предложил эксперт?

Задача 15 Пусть инвестор хочет вложить свой капитал K . Ему доступны два актива: один безрисковый и один рискованный. Доходность безрискового актива составляет 10%. Доходность рискованного актива равна 100% при благоприятном развитии событий и -50% при неблагоприятном. Вероятность благоприятного развития событий равна 50%. Найдите оптимальную структуру портфеля (т. е. доли двух активов в оптимальном портфеле).

Сделайте то же самое, считая, что доходность рискованного актива составит 200% или -50% с равными вероятностями. При этом предположите сначала, что доля каждого из активов не может быть отрицательной, а потом — что доля безрискового актива может быть отрицательной (т. е. инвестор может взять в банке кредит под безрисковую ставку).

Задача 16 Предприниматель планирует завтра получить от внешнеторговых операций 1000 песо. Это будет весь его капитал на завтрашний день. Сам он заинтересован в рублях и имеет некоторую элементарную функцию полезности $u(x)$, выраженную в рублях ($u'(x) > 0$, $u'(x)$ убывает). Он предполагает, что с вероятностью $2/3$ завтрашний курс песо будет равен 15 руб., а с вероятностью $1/3$ — 24 руб. Ему предлагают сегодня продать его завтрашние песо за завтрашние рубли по курсу p руб. Пусть $z \geq 0$ — сумма сделки в песо. (Предполагается, что можно выбрать $z > 1000$, а завтра купить недостающие песо.)

1. При каком курсе p предприниматель выберет такую сумму сделки z , что полностью избавится от риска? Чему будет при этом равна z ?
2. В какую сторону поменяется выбор z по сравнению с предыдущим пунктом, если $p = 16$ руб.? в каком случае предприниматель окажется в лучшем положении — при высоком или при низком курсе песо?
3. Ответьте на тот же вопрос для $p = 20$ руб.

Задача 17 [41] Начальник хочет понять, работает ли Смит энергично или нет. Он может посмотреть на Смита только один раз в течении дня. Он знает, что если Смит работает энергично, то он будет зевать с вероятностью 10%, а если нет, то с вероятностью 50%. До того как начальник посмотрит на Смита, он думает, что с вероятностью 80% Смит работает энергично, но тут он замечает зевок. Какую оценку вероятности энергичной работы теперь должен иметь начальник?

Задача 18 Налоговая инспекция считает, что предприятия в среднем недоплачивают налог на прибыль в 80% случаев. Вероятность того, что в ходе проверки некоторого предприятия будет выявлено такое нарушение, равна 40% для предприятия, которое недоплачивает налог, и 10% для предприятия, которое полностью выплачивает налог (ошибочно). Вычислите

апостериорную вероятность того, что данное предприятие недоплачивает налог на прибыль, если в ходе проверки не было выявлено нарушений.

Задача 19 Известно, что в 10% магазинов цена на фотоаппарат определенной марки не превышает 15000 руб., в 20% магазинов она от 15000 руб. до 17000 руб., в 40% магазинов она от 17000 руб. до 20000 руб. и в 30% магазинов она превышает 20000 руб. Покупатель не хочет покупать фотоаппарат по цене выше 20000 руб. Он зашел в наугад выбранный магазин и купил фотоаппарат. Какова вероятность того, что цена фотоаппарата была ниже 15000 руб.?

Задача 20 [34] Некий человек (P) предстал перед судом по обвинению в совершении тяжкого преступления. Судья априорно считает, что вероятность того, что P мог совершить это преступление равна $1/1000$. Однако имеется свидетель A , который утверждает, что он видел, как P совершил это преступление. Свидетель A хорошо известен судье: вероятность, что этот свидетель ошибается, равна $1/10$.

1. Учитывая свидетельство A , какова вероятность, что P совершил преступление?
2. Пусть выигрыш судьи в случае, если он осудил виновного равен w , если осудил невиновного, то $-x$, если оправдал виновного, то $-y$, а если оправдал невиновного, то z , где w, x, y, z — некоторые положительные числа. Каким будет вердикт судьи в зависимости от параметров w, x, y и z ?

Задача 21 Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход \$1000, но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на 20% меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в 0,1. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

Задача 22 [30] Рассмотрите задачу принятия решений с двумя состояниями (Q и R) и тремя действиями (a, b и c). Выигрыши $u(x, s)$ в зависимости от действий x и состояния s заданы Таблицей 1.5. Состояния Q и R случаются с вероятностями p и $1 - p$ соответственно.

1. Найдите ожидаемый выигрыш $U(x, p) = pu(x, Q) + (1 - p)u(x, R)$ для каждого из действий $x = a, x = b, x = c$ как функцию вероятности p . Нарисуйте эти функции на графике.

Таблица 1.5. Данные для задачи 22

	$x = a$	$x = b$	$x = c$
$s = Q$	0	-10	-4
$s = R$	-8	0	-3

- Для каждого из действий a , b и c определите, при каких условиях на p оно является оптимальным (выпишите неравенства, обеспечивающие оптимальность данного действия). Сопоставьте эти условия с графиком.
- Пусть $V(p)$ — значение ожидаемой полезности в оптимальном решении, если принимающее решения лицо ожидает, что вероятность состояния Q равна p , т. е.

$$V(p) = \max\{U(a, p), U(b, p), U(c, p)\}.$$

Найдите $V(p)$. Объясните, как эту функцию можно найти по графику.

- Принимающий решение индивидум не знает, чему равна вероятность $p = \mathbf{P}(Q)$. Его априорные представления по поводу p состоят в том, что p с одинаковой вероятностью, может быть равно $1/4$ или $3/4$. Какое действие (a , b или c) он выберет? Изобразите дерево решений и упростите его.
- До принятия решения индивидуму говорят, что когда последний раз состояние было получено по распределению с вероятностью p , результатом было состояние s' (равное Q или R). Выбор состояний происходит независимо, а его априорные ожидания такие же, как в пункте 4. Что он выберет при $s' = Q$ и при $s' = R$? Представьте эту ситуацию в виде дерева решений и упростите это дерево.

Задача 23 Преподаватель считает, что 40% студентов знают предмет на 2, 30% — на 3 и 30% — на 4. (Он убежден, что на 5 предмет знает только он сам.) На экзамене студент может отвечать на билет ужасно, средне или бодро. В Таблице 1.6 приведены условные вероятности того, что студент отвечает ужасно, средне и бодро при том, что знает на 2, 3 и 4. (Например, если знает на 2, то в 70% случаев отвечает ужасно, в 20% случаев — средне, а в 10% случаев — бодро.) Выигрыш преподавателя имеет вид $u = -(x - y)^2$, где x — на какой балл студент реально знает предмет, а y — сколько ему поставил преподаватель ($y = 2, 3$ или 4).

Преподаватель видит студента, который ужасно отвечает на билет. На какой балл студент реально знает предмет, он не имеет понятия.

Таблица 1.6. Данные для задачи 23

		Отвечает		
		ужасно	средне	бодро
Знает	2	0,7	0,2	0,1
на...	3	0,3	0,6	0,1
	4	0,1	0,1	0,8

1. Вычислите вероятности того, что $x = 2$, $x = 3$ и $x = 4$ с учетом имеющейся у преподавателя информации.
2. Вычислите соответствующие ожидаемые выигрыши при $y = 2$, $y = 3$ и $y = 4$. Какой балл следует поставить?

Введение в теорию игр

Предмет теории игр. Проблема принятия решений при взаимодействии нескольких лиц. Концепция решения игры. Развернутая форма и дерево игры. Действия, стратегии, исходы и выигрыши. Нормальная форма игры. Различие между кооперативными и некооперативными играми. Парето-оптимум игры. Трансферабельные и нетрансферабельные выигрыши. Понятие торга, точка угрозы (статус-кво), контрактная кривая. Аксиоматический подход к торгу: решение Нэша. Коалиции, блокирование, ядро (C -ядро). Игры с трансферабельной полезностью: характеристическая форма. Ядро для игр в характеристической форме.

2.1. Введение

Игры — это математические модели ситуаций принятия решений, включающих взаимодействие нескольких действующих лиц — игроков. Игроки совместно определяют результат, и каждый старается получить тот результат, который является с его точки зрения наилучшим.

В зависимости от действий, предпринятых игроками, реализуется некоторый исход; у игроков имеются предпочтения на этих исходах и обычно существует конфликт интересов, поскольку различные игроки предпочитают различные исходы. Поэтому каждый игрок сталкивается с

вопросом о том, какие действия являются для него наилучшими. Поскольку игроки взаимозависимы, то ответ на этот вопрос будет зависеть не только от собственных предпочтений игрока, но и от того, как действуют другие игроки. Следовательно, игрок должен делать предсказания по поводу того, что будут делать другие игроки. Человек, который в игре не участвует, может поставить перед собой близкий вопрос о предсказании общего исхода игры. Основываясь на предположении о рациональном поведении всех участвующих игроков, теория игр дает набор инструментов и концепций, с помощью которых можно получить ответы на эти вопросы.

Ситуации, которые можно описать как взаимодействие нескольких игроков, каждый из которых действует в соответствии со своими целями, возникают в самых разных областях — в салонных играх (шаматах, карточных играх), в экономике, политике, военном деле, биологии. Теория игр предлагает набор формальных моделей и концепций, которые можно использовать для анализа подобных ситуаций.

При этом основной целью теории игр является предсказание поведения игроков и отыскание некоторого наиболее правдоподобного исхода (или множества исходов) игры. Концепцией решения (не путать с принятием решений!) называют правило, которое позволяет по данному описанию игры получить такие предсказания. По-видимому, концепция решения должна удовлетворять следующим условиям:

- * давать предсказания, согласующиеся с эмпирическими наблюдениями и интуицией;
- * быть достаточно универсальной и приложимой к широкому кругу практически интересных ситуаций;
- * предсказывать в большинстве случаев единственный исход.

По-видимому, не существует концепции, удовлетворяющей одновременно всем этим условиям, и любая используемая концепция будет лишь компромиссным вариантом.

2.2. Методологический индивидуализм

При анализе поведения группы индивидуумов теория рационального выбора, обсуждавшаяся нами ранее, тесно связана с методологическим индивидуализмом. «Методологический» добавляют, чтобы не было путаницы с индивидуализмом в этическом смысле: если человек придерживается методологического индивидуализма, это вовсе не означает, что он ведет себя откровенно эгоистично или призывает вести себя так; это просто исследовательская точка зрения на движущие силы поведения людей.

Методологический индивидуализм постулирует, что единственная аналитическая единица, которая существует — это индивидуум. Согласно этому подходу, наблюдаемые социальные явления следует объяснять с точки зрения взаимодействий между отдельными целополагающими индивидуумами. Противоположные подходы («коллективизм», «холизм»), постулируют, что надындивидуальные объекты должны быть конечными объясняющими факторами. (Например, согласно марксизму, экономические и социальные явления следует объяснять борьбой классов.)

Не следует думать, что методологический индивидуализм требует, чтобы целое равнялось сумме своих частей. Наоборот, часто анализ в духе методологического индивидуализма призван показать, как сумма частей (взаимодействие индивидуумов) может приводить к результатам, которые не входили непосредственно в их намерения.

Хотя методологический индивидуализм остается идеалом, на который ориентируются при анализе социальных явлений, на практике трудно в полной мере ему следовать. Часто бывает удобнее оперировать надындивидуальными объектами — странами, фирмами, политическими партиями, домохозяйствами и т. д. Однако, это рассматривается как упрощение или как временная (пока не достигнуто лучшее понимание) мера.

2.3. Развернутая форма игры. Дерево игры

Игры, в которых игроки делают более одного хода, и/или в которых игроки делают ходы по очереди, удобно представить в виде дерева. О такой игре говорят, что она представлена в развернутой форме¹.

Дерево состоит из вершин (узлов) и ветвей (дуг). Вершины дерева соответствуют точкам, в которых игроки принимают решения или в которых игра заканчивается. Одна из вершин — начальная; с нее стартует игра. Ветви имеют направление и ведут от одной вершины к другой (при этом стрелки обычно не изображают, только дуги). Ветви, выходящие из вершины, представляют альтернативные варианты действий, которые возможно выбрать в этой вершине. Для каждой вершины, кроме начальной, имеется единственная ветвь, которая в нее входит, и единственная вершина, которая ей предшествует. При этом цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в частности, отсутствие циклов).

Развернутая форма игры должна включать также множество игроков и множество информационных множеств. На дереве игры для каждой из вер-

¹Как и нормальная форма игры, о которой речь пойдет ниже, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом.

шин (кроме конечных) должно быть указано, к какому информационному множеству она принадлежит. (Некоторые информационные множества состоят из одной вершины и для таких вершин информационное множество не изображают в явном виде.) Предполагается, что игрок не может отличить вершины в пределах отдельного информационного множества. Для каждого информационного множества указывается единственный игрок, которому принадлежит в этом множестве ход. Каждой конечной вершине дерева, то есть такой, которая не предшествует ни одной другой вершине, соответствует исход игры и значение полезности (выигрыш) каждого из игроков (кроме «Природы»). Если в игре есть случайные ходы природы, то для каждого такого хода следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ветвей (действий природы), начинающихся в соответствующей вершине.

Различие между деревом решений и деревом игры состоит в том, что имеется несколько игроков, и в конечных вершинах следует указывать выигрыши *всех* этих игроков.

Рассмотрим в качестве примера очень простую игру.

Игра 8: Игрок 1 прячет некий мелкий предмет в левой или правой руке (Л или П). Игрок 2 угадывает, в какой руке предмет (Л или П). Если Игрок 2 угадал, то его выигрыш равен 1, а выигрыш Игрока 1 равен -1 . Если Игрок 2 не угадал, то его выигрыш равен -1 , а выигрыш Игрока 1 равен 1. \odot

Дерево этой игры изображено на Рис. 2.1. В начальной вершине, показанной значком ∇ , ход принадлежит Игроку 1. Информационное множество, отражающее информацию, которой обладает Игрок 2, изображено в виде «облака» (-----). В этом информационном множестве ход принадлежит Игроку 2. Обеим вершинам информационного множества соответствует один и тот же набор допустимых действий. (Игрок 2 должен не иметь возможности отличать правую вершину от левой в том числе и по действиям).

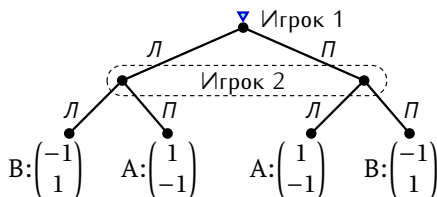


Рис. 2.1. Дерево для Игры 8

2.4. Нормальная форма игры

Самая простая разновидность игр — это игры, в которых отсутствует какая бы то ни было динамика: каждый игрок должен принять только одно решение, и решения, по существу, делаются одновременно, поскольку ни один из игроков не знает, какое решение было принято любым другим игроком. Примером такой ситуации может являться аукцион с заявками в запечатанных конвертах: не зная, каковы предложения конкурентов, каждый из игроков указывает в запечатанном конверте цену; игрок, сделавший самое выгодное предложение (указавший наибольшую цену), получает продаваемый на аукционе предмет за указанную им цену. Игра такого рода называется статической игрой.

Для описания статических игр развернутая форма игры не очень удобна. Такие игры проще всего задавать в нормальной (стратегической) форме. Приведем пример подобного описания.

Игра 9 («Выбор компьютера»): Двое знакомых одновременно выбирают компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в a ($a > 0$) некоторых условных единиц, а второй — в b ($b > 0$) условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду ($c > 0$), если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым. ○

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть <<Игрок 1>> и <<Игрок 2>>) имеет два возможных действия, которые можно условно назвать «IBM» и «Mac». Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) 2×2 . В игре имеется четыре исхода: (IBM, IBM), (IBM, Mac), (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши участников

Игры такого рода, то есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число действий, принято называть биматричными. Мы будем использовать следующее соглашение при изображении биматричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы и его выигрыши записываются в *левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы и его выигрыши записываются в *правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять где чьи действия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем чужой выигрыш. В Таблице 2.1 Игра 9 представлена в подобном биматричном виде. (Биматричное представление игры часто называют просто матричным.)

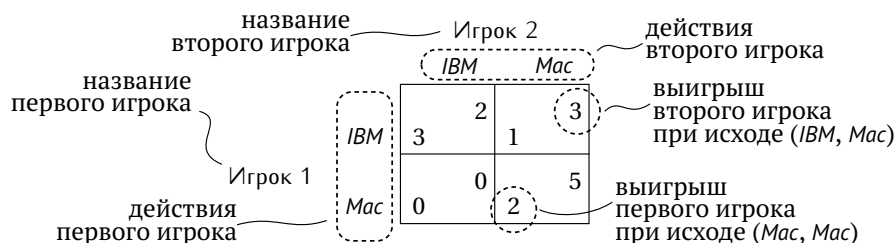
Таблица 2.1. Игра 9 «Выбор компьютера» в (би-)матричном виде

		Игрок 2	
		IBM	Mac
Игрок 1	IBM	$a + c$ c	a b
	Mac	0 0	$b + c$ c

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:

- * множество игроков,
- * множество действий, которые могут выбрать игроки,
- * выигрыши игроков (точнее функции выигрыша, сопоставляющие исходам выигрыши).

Описание игры в виде такого набора и называется нормальной формой игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т. д., и для описания таких игр может понадобиться развернутая форма.

Рис. 2.2. Игра «Выбор компьютера» ($a = 1$, $b = 3$, $c = 2$) и ее элементы

Мы рассмотрели нормальную форму для самых простых игр, в которых игроки выбирают одновременно из некоторого заданного набора действий. Можно ли задать нормальную форму для более сложных игр, например динамических? Можно ли игру в развернутой форме свести к игре в нормальной форме? Да, можно, и в дальнейшем мы подробно разберем как это делать и какие при этом возникают проблемы. Пока же мы только укажем, что основная идея подобного представления игры состоит в том, чтобы вместо действий рассматривать так называемые стратегии. Если иг-

ра достаточно простая, то стратегия будет совпадать с действием, но для сложных игр эти понятия существенно различаются.

Концепция стратегии была введена фон Нейманом². Это одно из основных понятий теории игр. Стратегия игрока — это полный план действий, который задает для каждого информационного множества игрока действие, которое этот игрок намеревается выбрать, если окажется в этом информационном множестве. Это настолько исчерпывающий план поведения в игре, что он не может быть нарушен действиями противника или природы, так как ответ на любую ситуацию, которая может возникнуть в результате таких действий, является частью стратегии. Игрок смело может поручить кому-то другому действовать вместо себя в игре в соответствии с выбранной им стратегией.

Конечно, мы привыкли к тому, что игрок принимает решение о своем ходе в игре только на несколько ходов вперед, а иногда даже только в тот момент, когда он должен сделать данный ход. На практике это так и должно быть, поскольку, например, в таких играх, как шахматы, число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия, с учетом всех возможных обстоятельств. Однако при формальном моделировании многих явлений удобно абстрагироваться от данного практического ограничения и предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом случае.

Следует отметить, что стратегия часто предусматривает определенные действия даже в таких ситуациях, которые не могут возникнуть из-за действий игрока по этой же стратегии кроме как в случае ошибки. Таким образом, понятие стратегии может показаться во многих случаях не очень интуитивно ясным.

В то же время (и примеры этого мы не раз увидим в дальнейшем), само понятие стратегии является очень важным, и важно как раз то, что стратегия задает действия в ситуациях, которые могут не возникать при данном выборе стратегий игроками. Так, например, наличие сильного вооружения у страны влияет не только на ее возможности во время войны, оно также серьезным образом влияет на ее взаимодействие с другими странами в мирное время.

Таким образом, при мы будем часто анализировать игры так, как если бы игра была продумана игроками заранее и заранее, до того, как начинается игра, каждый из игроков выбрал определенную стратегию. Так как стратегии абсолютно исчерпывающие, то набор стратегий всех игроков однозначно определяет исход игры. Это означает, что развернутую форму

²См. [21].

можно свести к более «прямолинейной» нормальной форме. Именно поэтому нормальную форму игры называют также стратегической формой.

Опишем более формально нормальную (стратегическую) форму игры.

Пусть $I = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков (за исключением «Природы») и пусть s_i — стратегия игрока i . Стратегия игрока i (s_i) должна принадлежать множеству его допустимых стратегий S_i . Набор стратегий всех игроков $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ называют профилем стратегий.

Профиль стратегий однозначно задает некоторый исход игры. Например, в шахматах исходами могут быть выигрыш или проигрыш той или другой стороны, а также ничья. Типичный исход игры мы будем обозначать через O , а множество всех возможных исходов — через \mathcal{O} . Часто (например, когда каждому профилю стратегий соответствует один и только один исход) удобно отождествлять исход с профилем стратегий: $O = \mathbf{s}$. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим приемом.

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция — функция выигрыша (в экономической теории ее называют функцией полезности), которую он стремится максимизировать. Обозначим функцию выигрыша i -го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры O она сопоставляет некоторое действительное число — выигрыш или полезность $u_i(O)$. Когда исход отождествляется с профилем стратегий, функция выигрыша сопоставляет выигрыш $u_i(\mathbf{s})$ каждому профилю стратегий $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$.

Таким образом, нормальная (стратегическая) форма игры должна включать следующие элементы:

- * множество игроков I ;
- * для каждого игрока i множество его допустимых стратегий S_i ;
- * для каждого игрока i его функцию выигрыша $u_i(\cdot)$.

В правилах некоторых игр заложен элемент случайности. Если в игре есть такие случайные события, то принято говорить о случайных ходах природы. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.


Игра 10: В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (A) и не проявлять осторожности (B). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист сойдет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность ДТП равна $1/2$, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна $1/10$, а если оба осторожны, то вероятность равна $1/100$.

В случае, если произойдет ДТП, то ущерб пешехода составит 1000, а ущерб автомобилиста — 200. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками, равными 100. ◎

На примере Игры 10 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш. Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Таблица 2.2. Матрица для Игры 10

		Автомобилист	
		A	B
 Пешеход	A	-102 -110	-20 -200
	B	-120 -100	-100 -500

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, то есть реализовался исход (A, A). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит (-1100), а выигрыш водителя — (-300). В противном случае выигрыш пешехода составит (-100), а выигрыш водителя — (-100). Ожидаемые выигрыши равны в этом случае

$$\frac{1}{100} \cdot (-1100) + \frac{99}{100} \cdot (-100) = -110 \quad \text{— для пешехода,}$$

$$\frac{1}{100} \cdot (-300) + \frac{99}{100} \cdot (-100) = -102 \quad \text{— для автомобилиста.}$$

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице 2.2.


Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информации о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих выигрышах.

2.5. Кооперативные игры: постановка проблемы

Какой исход мог бы быть выбран сообществом игроков *в целом*? Ответ на это вопрос не так прост, как может показаться. Мы рассмотрим эту проблему в случае игр, в которых допускается кооперирование между игроками. Это значит, что могут заключаться совместные соглашения, что допускается совместный выбор стратегий и, тем самым, совместный выбор исхода.

Игра 11 («Простой обмен»): У Даши есть фломастер, а у Гоши яблоко. Даша оценивает фломастер в 8, яблоко в 10. Гоша оценивает фломастер в 12, яблоко в 5. Оба игрока могут выбрать одно из двух действий: оставить свою вещь при себе или же отдать другому игроку. Если один игрок получает обе вещи, то его оценки складываются, а выигрыш другого игрока нулевой. ☺

Таблица 2.3. Игра 11 «Простой обмен»



		Гоша	
		оставить	отдать
Даша	оставить	8 5 18	0
	отдать	0 17 10	12

Вообще говоря, в каждой игре имеется некоторое множество исходов \mathcal{O} . В Игре 11, например, имеются следующие четыре исхода:

- * у Даши фломастер, у Гоши яблоко;
- * у Даши фломастер и яблоко, у Гоши ничего;
- * у Даши ничего, у Гоши фломастер и яблоко;
- * у Даши яблоко, у Гоши фломастер.

Если игроки действуют совместно, то они могут реализовать по желанию любой возможный исход из множества \mathcal{O} . Задача состоит в том, чтобы из множества \mathcal{O} выбрать исход, который в некотором смысле будет удовлетворять всех игроков. Предполагается, что игроков интересуют не сами по себе исходы O из множества \mathcal{O} , а выигрыши (полезности), которые они получают в этих исходах, т. е. $u_i(O)$. Рассматривая возможности кооперации, мы можем забыть об исходах и сосредоточиться на полезностях. Множество исходов \mathcal{O} можно отобразить в векторы выигрышей игроков, т. е. в n -мерное пространство векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Вектор выигрышей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ мы будем называть дележом³. Исход игры мы хотим охарактеризовать при помощи соответствующего дележа. Если O — исход игры, то этот исход порождает дележ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(O)$ — это n -мерный вектор, компоненты которого представляют выигрыши игроков в этом исходе, т. е. $\mathbf{u}(O) = (u_1(O), u_2(O), \dots, u_n(O))$. Дележ \mathbf{u} называется допустимым (возможным), если существует какой-нибудь исход O , который его порождает. Это дележ, который физически возможно осуществить. Множество допустимых дележей будем обозначать через \mathcal{U} .

Для Игры 11 мы можем изобразить дележи в виде точек (u_1, u_2) , где u_1 — выигрыш Даши, а u_2 — выигрыш Гоши. Каждому из четырех возможных исходов соответствует одна точка. В рассматриваемой игре все векторы выигрышей разные, поэтому точки друг на друга не накладываются и в целом дележей столько же, сколько исходов (см. Рис. 2.3).

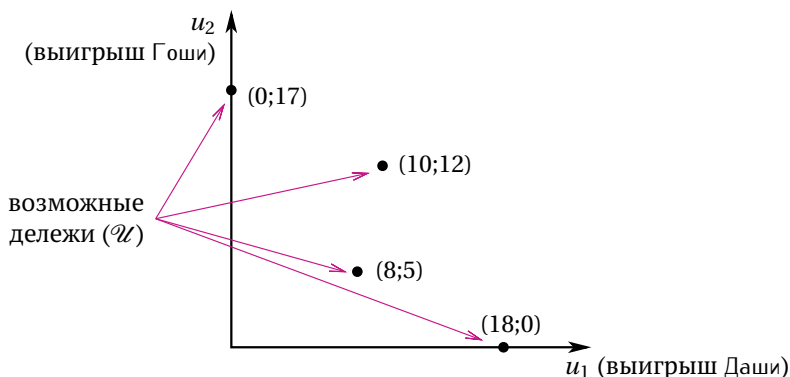


Рис. 2.3. Множество дележей в Игре 11

Можно предположить, что в Игре 11 есть также не отраженные явно возможности по произвольному уменьшению выигрышей. Например, Даша и Гоша могут выбросить часть яблока или поколотить друг друга. Тогда вместе с дележом (u_1, u_2) множество \mathcal{U} должно включать также любой дележ (u'_1, u'_2) такой что $u'_1 \leq u_1$ и $u'_2 \leq u_2$. Соответствующая модификация множества дележей для Игры 11 показана на Рис. 2.4.

По-видимому во многих ситуациях исход игры, соответствующий кооперации игроков, можно выразить в терминах соответствующего дележа. Задача состоит в том, чтобы из множества дележей \mathcal{U} выбрать дележ, который будет удовлетворять всех игроков.

³ Англ. *imputation*.

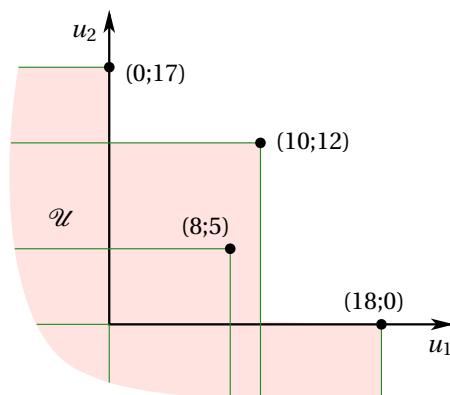


Рис. 2.4. Множество дележей в Игре 11 при наличии возможности произвольного ухудшения положения игроков

Игру называют кооперативной, если игроки могут заключать соглашения, причем

- * механизмы заключения соглашений не моделируются в явном виде в рамках правил игры;
- * соглашения носят обязывающий характер (игрок не может отказаться от сотрудничества, если он уже обещал).

В кооперативной игре может быть достигнут любой допустимый исход, если игроки заключат соответствующее соглашение.

С другой стороны, игру называют некооперативной, если не существует возможностей для взятия на себя обязательств (односторонних или многосторонних), от которых нельзя впоследствии отказаться, кроме тех, которые явным образом включены в описание игры.

Если обязывающие соглашения невозможны, то возникновение сотрудничества проблематично. Например, в Игре 11 рациональные игроки вряд ли выберут пару стратегий (*отдать*, *отдать*). Даже если бы они договорились использовать такие стратегии, то каждый из них не мог бы рационально ожидать, что другой игрок будет придерживаться этого соглашения. А это совершенно лишает смысла любое подобное соглашение. Предположим, что Даша предполагает, что Гоша будет придерживаться этого соглашения и отдаст ей яблоко. Но зачем ей самой при этом отдавать фломастер, если ее выигрыш будет меньше? Похожим образом может рассуждать и Гоша. Набор стратегий (*отдать*, *отдать*) не является устойчивым.

В реальной жизни принудительное исполнение соглашений внешне обеспечивается судами, государственными организациями и давлением общественного мнения. Внутренне их исполнение может быть обеспечено нежеланием нарушать соглашения по моральным причинам.

Важный класс игр — это игры с побочными платежами или, как еще говорят, с трансферабельной полезностью. Пусть полезности оцениваются в единицах, общих для всех игроков (в «деньгах»), и каждый из них имеет право передать часть своего выигрыша другому игроку. Тогда игроки могут договариваться о помощи друг другу за счет передачи выигрыша (за счет побочных платежей) — если есть игроки, которые могут сильно помочь другим игрокам, то эту помощь можно купить, передав взамен часть выигрыша, полученного благодаря такой помощи.

Пусть, например, в Игре 11 выигрыши выражены в рублях, и Даша и Гоша могут передавать друг другу не только предметы, но и деньги. Если они обменялись своими предметами, то их выигрыши будут равны $(10; 12)$. Если, дополнительно, Даша передаст Гоше рубль, то выигрыши будут равны $(9; 13)$. Если Даша передаст Гоше z рублей, то выигрыши будут равны $(10 - z; 12 + z)$. Случай $z < 0$ будет означать передачу денег от Гоши к Даше. Таким образом, если нет ограничений на количество денег, то игрокам доступны любые дележи вида $(10 - z; 12 + z)$, где z — произвольное действительное число. Это прямая, проходящая с северо-запада на юго-восток. Если, к тому же, игроки могут «выбрасывать деньги на ветер», то все точки, лежащие левее и ниже этой прямой, тоже представляют собой допустимые дележи. В целом множество допустимых дележей выглядит так, как изображено на Рис. 2.5.

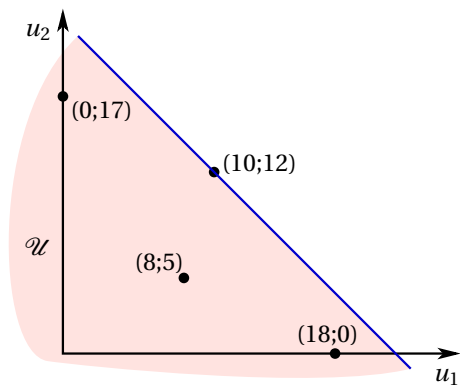


Рис. 2.5. Множество дележей в Игре 11 при трансферабельности выигрышей

В общем случае в игре с трансферабельной полезностью и возможностью произвольно уменьшать выигрыши если дележ (u_1, \dots, u_n) является допустимым, то и любой дележ (u'_1, \dots, u'_n) , такой что $\sum_{i \in I} u'_i \leq \sum_{i \in I} u_i$ является допустимым. (Чтобы получить второй дележ из первого, можно, например, уменьшить выигрыш одного из игроков на величину $\sum_{i \in S} u_i - \sum_{i \in S} u'_i$, а затем произвести побочные платежи.)

Как нетрудно понять, игры с трансферабельными выигрышами можно охарактеризовать числом $v(I)$ — это максимум суммы выигрышей всех игроков $\sum_{i \in I} u_i$ по всем допустимым дележам $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Если можно произвольно уменьшать выигрыши («выбрасывать деньги на ветер»), то число $v(I)$ однозначно задает множество \mathcal{U} . А именно, дележ \mathbf{u} допустим ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) тогда и только тогда, когда сумма выигрышей всех игроков не превышает $v(I)$ ($\sum_{i \in I} u_i \leq v(I)$).

2.6. Оптимальность по Парето

В этом разделе мы рассмотрим важную для экономических приложений концепцию Парето-оптимальности в контексте теории игр.

Тот или иной механизм координации решений отдельных игроков (в том числе механизм достижения соглашений) принято оценивать на основе результатов его работы, т. е. характеристик тех исходов, к которым он приводит, безотносительно самого по себе процесса координации. В духе традиции методологического индивидуализма считается, что подобная оценка исходов должна строиться на основе выигрышей отдельных игроков и ни на чем ином.

Но при сравнении разных исходов возникает следующая трудность. Если мы рассматриваем отдельного игрока, то можем судить о том, насколько хорош исход, по тому выигрышу, который он получит. Однако, если игроков несколько, то их интересы зачастую не совпадают. Возможно ли вообще какое-либо правило коллективной рациональности? Если сравнивать два исхода, O_1 и O_2 , то для одного игрока O_1 может быть предпочтительнее O_2 , а для другого наоборот. Только если мнения всех игроков совпадут, то имеет смысл говорить о том, что один исход *с точки зрения данного сообщества игроков в целом* предпочтительнее другого, и, следовательно, этот другой исход им не подходит. Данный тезис лежит в основе критерия оптимальности, сформулированного Парето.

Оптимумы Парето характеризуются тем, что невозможно одновременно увеличить полезность для всех игроков, или, иначе говоря, тем, что не существует допустимого распределения, которое игроки единодушно предпочитают.

Говорят, что исход $O' \in \mathcal{O}$ доминирует по Парето исход $O \in \mathcal{O}$ (является Парето-улучшением по сравнению с O), если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе O , а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в O , т. е.

$$u_i(O') \geq u_i(O) \text{ для всех игроков } i,$$

и

$$u_j(O') > u_j(O) \text{ для некоторого игрока } j.$$

В Игре 11 исход, когда Даша и Гоша оставляют свои предметы у себя, доминируется исходом, когда они оба отдают свои предметы друг другу. На Рис. 2.6 показано такое Парето-улучшение. В данном случае это строгое Парето-улучшение, поскольку все игроки строго улучшили свое положение.

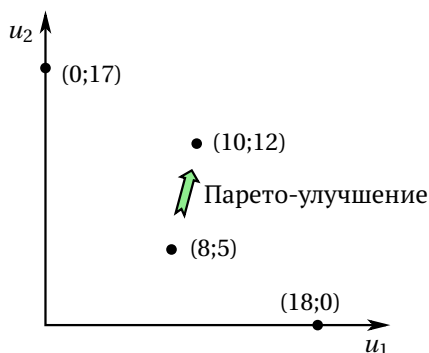
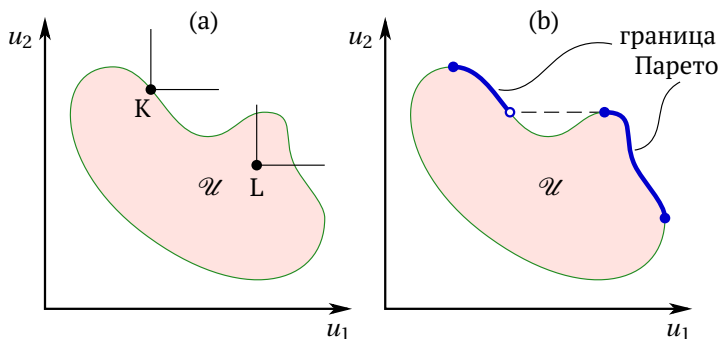


Рис. 2.6. Парето-улучшение в Игре 11

Исход $\hat{O} \in \mathcal{O}$ называется Парето-оптимальным, если не существует другого исхода $O' \in \mathcal{O}$, такого что он доминирует \hat{O} по Парето. Множество всех Парето-оптимальных исходов называют границей Парето.

В случае двух игроков множество дележей \mathcal{U} и Парето-границу можно изобразить графически. Точка L на Рис. 2.7(а) не является Парето-оптимальным дележом, поскольку в прямом угле, направленном вправо-вверх, помимо точки L содержатся еще и другие точки множества дележей \mathcal{U} . Точка M соответствует Парето-оптимальному дележу, поскольку соответствующий ей прямой угол не содержит точек множества \mathcal{U} за исключением самой точки M.

Если множество дележей для игры двух лиц представляет собой некую связную фигуру, то оптимальные по Парето дележи должны располагаться на границе множества \mathcal{U} , обращенной вправо вверх (см. Рис. 2.7(б)).

Рис. 2.7. Парето-граница для множества дележей \mathcal{U}

При каких условиях на параметры в Игре 9 исход (IBM, Мас) является Парето-оптимальным, а при каких нет?



Найдите Парето границу в Игре 10.



Игра 12: Трое друзей, Антон, Борис и Виктор, решают, куда им пойти вместе на выходные. Имеются следующие варианты: кино, бар, боулинг, сауна, рыбалка, хоккей. Друзья имеют следующие предпочтения в отношении этих вариантов:

Антон: боулинг > кино > сауна > бар > рыбалка > хоккей,

Борис: боулинг > хоккей > кино ~ бар > рыбалка > сауна,

Виктор: кино > бар > рыбалка > боулинг > сауна ~ хоккей.



На основе указанных предпочтений можно каждому из исходов приписать некий подходящий уровень полезности. Например, можно нумеровать альтернативы натуральными числами, начиная с худшей. Такой вариант задания функций полезности игроков представлен в Таблице 2.4.

Альтернатива *кино* доминирует по Парето альтернативу *бар*. Действительно, Антон и Виктор получают более высокую полезность от *кино* ($5 > 3$ и $5 > 4$ соответственно), а для Бориса эти альтернативы эквивалентны ($3 = 3$). Альтернатива *боулинг* строго доминирует по Парето альтернативу *хоккей* ($6 > 1$, $5 > 4$ и $2 > 1$). *Кино* и *боулинг* строго доминируют по Парето *сауну*. *Кино* строго доминирует *рыбалку*.

Таблица 2.4. Полезности для Игры 12

	кино	бар	боулинг	сауна	рыбалка	хоккей
Антон	5	3	6	4	3	1
Борис	3	3	5	1	2	4
Виктор	5	4	2	1	3	1

Альтернативы *кино* и *боулинг* не сравнимы между собой по критерию Парето — ни одна из них не доминирует другую. Для Антона лучше *боулинг*, а для Виктора — *кино*. Таким образом, Парето-граница данной игры — это множество $\{\text{кино}, \text{боулинг}\}$. Остальные альтернативы следует признать неподходящими для совместного времяпрепровождения.

В играх с трансферабельной полезностью Парето-граница имеет очень простой вид. Как мы видели, дележ \mathbf{u} является допустимым тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in I} u_i \leq v(I)$. Отсюда следует, что дележ $\hat{\mathbf{u}}$ тогда и только тогда является оптимальным по Парето, когда $\sum_{i \in I} \hat{u}_i = v(I)$.

Рассмотрим дележ \mathbf{u} , такой что $\sum_{i \in I} u_i < v(I)$. Покажем, что для этого дележа найдется Парето-улучшение. Введем обозначение $\Delta = v(I) - \sum_{i \in I} u_i$ и рассмотрим дележ $\tilde{\mathbf{u}}$, для которого $\tilde{u}_i = u_i + \varepsilon$, где $\varepsilon \leq \Delta/n$. Здесь Δ — это разность между максимально достижимым суммарным выигрышем и суммарным выигрышем для дележа \mathbf{u} . Эту разность или ее часть можно поровну раздать игрокам. Для получившегося в результате дележа выполнено

$$\sum_{i \in I} \tilde{u}_i = \sum_{i \in I} u_i + n\varepsilon \leq \sum_{i \in I} u_i + \Delta = v(I),$$

поэтому он является допустимым. В то же время он лучше для каждого из игроков, т. е. $\tilde{\mathbf{u}}$ доминирует \mathbf{u} по Парето. Следовательно, дележ \mathbf{u} неоптимален.

Так в Игре 11 при трансферабельности выигрышей максимально достижимая сумма полезностей равна $v(I) = 10 + 12 = 22$. Дележ $(0; 17)$ (оба предмета у Гоши) не является оптимальным по Парето, поскольку, например, дележ $(0 + 1; 17 + 1)$ является допустимым ($19 < 22$) и обеспечивает каждому из игроков более высокую полезность. Такое Парето-улучшение можно осуществить, передав одновременно яблоко от Гоши Даше и 6 денежных единиц от Даши Гоше.

С другой стороны, рассмотрим дележ $\hat{\mathbf{u}}$, такой что $\sum_{i \in I} \hat{u}_i = v(I)$. Он является допустимым. Если бы для $\hat{\mathbf{u}}$ существовал другой дележ $\tilde{\mathbf{u}}$, который для всех игроков не хуже ($\tilde{u}_i \geq \hat{u}_i$), а хотя бы для одного игрока j лучше ($\tilde{u}_j > \hat{u}_j$), то, суммируя эти неравенства, мы получили бы $\sum_{i \in I} \tilde{u}_i > \sum_{i \in I} \hat{u}_i = v(I)$.

Значит, такой дележ $\hat{\mathbf{u}}$ не является допустимым и не составляет Парето-улучшения для $\hat{\mathbf{u}}$. Следовательно, $\hat{\mathbf{u}}$ невозможно улучшить по Парето.

В заключение укажем, что критерий Парето, конечно, является довольно слабым, поскольку не позволяет сравнивать между собой те исходы, которые не улучшаемы по Парето. Кроме того, критерий Парето игнорирует такие волнующие большинство людей соображения как равенство и справедливость. Как бы то ни было, понятие эффективности (оптимальности) по Парето является одним из ключевых в экономической теории, в других общественных науках, а также в теории игр.

2.7. Задача торга: основные предположения

Процедуру достижения соглашения принято называть торгом (англ. *bargaining*). Рассмотрим, какие компоненты должно включать описание простейшей ситуации торга и какие предположения о результатах торга естественно сделать.

При рассмотрении ситуации торга обычно предполагают, что у каждого игрока i существует минимальное значение выигрыша v_i , который он может себе обеспечить независимо от действий других игроков, если откажется от заключения соглашения. Будем говорить, что дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ удовлетворяет условию участия⁴ для игрока i , если $u_i \geq v_i$. С другой стороны, если это условие не выполнено, т. е. $u_i < v_i$ то можно говорить, что дележ \mathbf{u} блокируется игроком i .

Точку $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято называть точкой угрозы, точкой несогласия или статус-кво⁵. По смыслу точка угрозы является допустимым дележом ($\mathbf{v} \in \mathcal{U}$). Дележ должен принять значение \mathbf{v} , если игроки не придут к соглашению.

Идея состоит в том, что, коль скоро речь идет о сотрудничестве, то следует исключить из рассмотрения любой дележ, при котором некоторые игроки не получают того выигрыша v_i , который они могут себе обеспечить без заключения соглашения.

По-видимому, следует также постулировать, что любое кооперативное решение должно быть оптимальным по Парето. В самом деле, если имеется дележ, который может улучшить положение некоторых из игроков, не затрагивая интересы других, то сообщество игроков должно отказаться от

⁴Это условие также называют условием индивидуальной рациональности. К сожалению, этот термин не очень удачен, поскольку это только одно очень специфическое следствие рациональности отдельного игрока. Поэтому в дальнейшем мы не будем использовать этот термин.

⁵С латинского *status quo* можно перевести как «существующее или сложившееся положение вещей».

текущего дележа в пользу этого более удачного варианта. Другими словами, в играх двух лиц выбранный дележ должен располагаться на границе множества \mathcal{U} , обращенной вправо вверх.

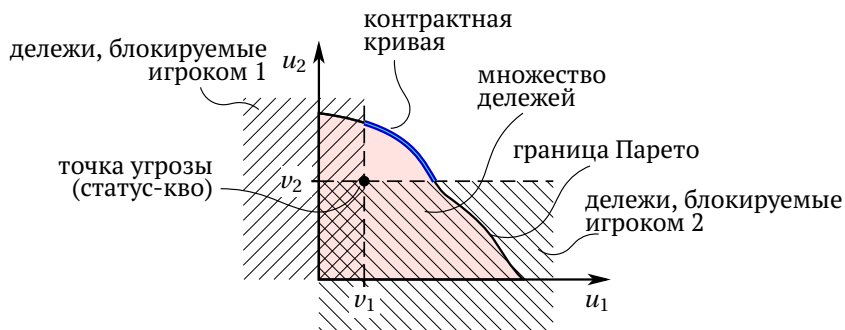


Рис. 2.8. Ситуация торга в случае двух игроков

Таким образом, можно утверждать, что минимальные естественные требования к дележу, который будет выбран при сотрудничестве игроков, должны заключаться в следующем:

- * каждый игрок добровольно соглашается сотрудничать с остальными игроками;
- * выбранный дележ лежит на Парето-границе.

Множество всех дележей, удовлетворяющих этим двум требованиям принято называть контрактной кривой (кривой контрактов) (см. Рис. 2.8).

Найдите в Игре 11 с нетрансферабельными и трансферабельными выигрышами контрактную кривую, предполагая, что точка угрозы — это то, что игроки имеют в исходной ситуации. Изобразите контрактную кривую на графике.

?

Найдите в Игре 12 контрактную кривую, предполагая, что для всех игроков $v_i = 3$.

?

2.8. Торг по Нэшу⁶

По-видимому, компромиссное решение должно быть выбрано на контрактной кривой, если игроки рациональны и действительно заинтересованы в достижении соглашения. Однако, контрактная кривая, вообще говоря, содержит бесконечно много дележей, и возникают сомнения, какой же из них должен быть в конечном итоге выбран.

Можно было бы закончить на этом анализ. Окончательный выбор в значительной мере зависит от специфических обстоятельств, присущих рассматриваемой частной ситуации, в том числе от соотношения сил игроков. Однако в рамках кооперативной теории игр предпринимались попытки создать концепцию, позволяющую выделить определенное решение в случае отсутствия какой бы то ни было дополнительной информации о ситуации. Речь идет о принципах выделения решения, т. е. о нахождении *общего правила* для целой категории ситуаций. Рассмотрим один из подобных подходов; он был предложен Джоном Нэшем⁷ для случая игры *двух лиц*.

Какой дележ $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ из множества допустимых дележей \mathcal{U} реализуется в результате торга? Согласно идее Нэша этот дележ должен зависеть только от точки статус-кво \mathbf{v} и от множества \mathcal{U} . Общее решение проблемы торга — это функция $\mathbf{c}(\cdot)$, которая должна для заданных \mathcal{U} и \mathbf{v} указывать некоторый вектор \mathbf{u}^* из \mathcal{U} :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathcal{U}).$$

Подход Нэша состоял в том, чтобы постулировать набор допущений относительно функции $\mathbf{c}(\cdot)$. Нэш сформулировал следующие пять допущений (аксиом). (Два первых из них мы уже упомянули выше в качестве минимального набора требований к кооперативному решению.)

Допущение 1. Решение \mathbf{u}^* должно быть оптимумом Парето.

Допущение 2. Решение должно удовлетворять условию участия для каждого из игроков⁸. Каждый игрок должен получить выигрыш, не меньший чем тот, который он получил бы в случае отказа от соглашения, т. е. $\mathbf{u}^* \geq \mathbf{v}$.

Допущение 3. Если из множества допустимых дележей \mathcal{U} убрать некоторые из «лишних» дележей, которые не будут выбраны участниками торга, то выбранный ими дележ \mathbf{u}^* не должен поменяться. Другими

⁶Данный параграф основан на [3].

⁷См. [19].

⁸Нэш назвал это условие индивидуальной рациональностью, но, как сказано выше, мы сознательно отказываемся от этого неудачного термина.

словами, если множество дележей \mathcal{U} заменить на более узкое множество \mathcal{W} ($\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$), которое содержит прежнее решение ($\mathbf{u}^* \in \mathcal{W}$), то решение $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathcal{U})$ не изменится, т. е. будет выполнено $\mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathcal{W}) = \mathbf{u}^*$. Это свойство называется независимостью от посторонних альтернатив.

Допущение 4. Решение должно обладать свойством инвариантности по отношению к линейным преобразованиям полезностей. Предположим, что выигрыши игроков в рассматриваемой ситуации торга подвергаются возрастающим линейным преобразованиям⁹. Преобразования задаются парой функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ и превращают \mathcal{U} в $\tilde{\mathcal{U}}$, а \mathbf{v} в $\tilde{\mathbf{v}}$. А именно, данное преобразование сопоставляет каждому дележу из множества \mathcal{U} некоторый дележ из множества $\tilde{\mathcal{U}}$ и наоборот:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2)) \in \tilde{\mathcal{U}}, \text{ если и только если } \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$$

и, кроме того, новая точка угрозы рассчитывается как

$$\tilde{v}_i = \varphi_i(v_i), \quad i = 1, 2.$$

Требование инвариантности решения состоит в том, что решение в новой ситуации должно с точностью до преобразования остаться таким же, как в исходной ситуации, т. е. если $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathcal{U})$ — решение в старой ситуации, то $\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{c}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathcal{U}})$ — решение в новой ситуации, где $\tilde{u}_i^* = \varphi_i(u_i^*)$, $i = 1, 2$.

Допущение 5. Решение не изменится, если поменять игроков местами, назвав первого игрока вторым, а второго первым.

Нэш показал, что существует единственная функция $\mathbf{c}(\cdot)$, определенная для всех задач торга и удовлетворяющая перечисленным условиям. А именно, $\mathbf{u}^* = \mathbf{c}(\mathbf{v}, \mathcal{U})$ представляет собой вектор из \mathcal{U} , который обеспечивает максимум произведения $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$ среди допустимых дележей, удовлетворяющих условию добровольности участия. Другими словами, \mathbf{u}^* является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать } (u_1 - v_1) \cdot (u_2 - v_2) \text{ по } \mathbf{u} = (u_1, u_2) \\ &\text{при ограничениях } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \text{ и } \mathbf{u} \geq \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Целевую функцию здесь можно интерпретировать как произведение «чистых выигрышей», которые получают игроки от соглашения. Соответствующее решение \mathbf{u}^* называют решением Нэша (или точкой Нэша) для проблемы торга.

⁹Под возрастающим линейным преобразованием имеется в виду преобразование, задаваемое функцией вида $\varphi(u) = a + bu$, где $b > 0$.

В случае трансферабельной полезности множество \mathcal{U} состоит из всех таких точек, которые удовлетворяют неравенству $u_1 + u_2 \leq v(I)$, где, как и раньше, $v(I)$ — максимально возможная суммарная полезность, которую могут получить эти два игрока. Точка Нэша в этом случае находится как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } (u_1 - v_1) \cdot (u_2 - v_2) \text{ по } u_1 \text{ и } u_2 \\ & \text{при ограничениях } u_1 + u_2 \leq v(I), \quad u_1 \geq v_1 \text{ и } u_2 \geq v_2. \end{aligned}$$

В оптимальном решении должно быть $u_1 + u_2 = v(I)$. При этом можно выразить u_2 через u_1 , $u_2 = v(I) - u_1$, и подставить в целевую функцию. Получится задача

$$\text{максимизировать } (u_1 - v_1) \cdot (v(I) - u_1 - v_2) \text{ по } u_1.$$

Решая эту задачу получим, что соответствующим случаю трансферабельной полезности решением Нэша будет точка $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$, где

$$u_1^* = \frac{v_1 - v_2 + v(I)}{2} \quad \text{и} \quad u_2^* = \frac{v_2 - v_1 + v(I)}{2}.$$

Можно заметить, что $u_1^* + u_2^* = v(I)$, а $u_2^* - u_1^* = v_2 - v_1$. Таким образом, в этом решении полезности игроков максимально возросли при том ограничении, что разность уровней полезности остается такой же, как и в точке угрозы (так что избыток полезности $v(I) - v_1 - v_2$ делится поровну между игроками). Этот случай иллюстрирует Рис. 2.9.

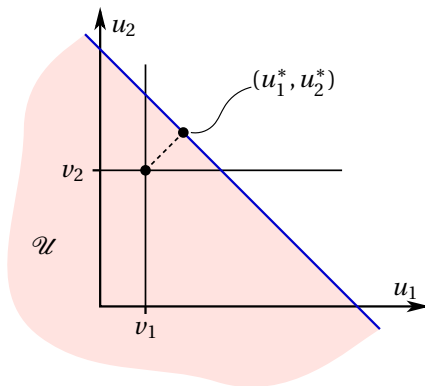


Рис. 2.9. Решение Нэша в случае трансферабельной полезности

Приведем также пример нахождения точки Нэша для игры с нетрансферабельными выигрышами.

Игра 13: [8] Двоим людям предлагают 100 долл., если они смогут разделить эти деньги между собой. Предполагается, что первый из них очень богат, а второй имеет капитал всего в 100 долл. Предполагается также, что полезность суммы денег для каждого игрока пропорциональна ее натуральному логарифму. \odot

Рассмотрим, как должны быть поделены деньги с точки зрения решения Нэша. Исходом игры в данном случае можно считать вектор (x_1, x_2) , где x_1 — сумма, которую получит первый игрок, x_2 — сумма, которую получит второй игрок и $x_1 + x_2 \leq 100$.

Пусть богатство первого игрока равно W . Тогда в одиночку, без сотрудничества со вторым игроком, его полезность составит $v_1 = \ln W$. Если же игроки договорятся, и первый игрок получит дополнительно к своему богатству x_1 , то его полезность составит $u_1 = \ln(W + x_1)$. Эту полезность можно расписать как

$$u_1 = \ln W + \ln(W + x_1) - \ln W = v_1 + \ln\left(1 + \frac{x_1}{W}\right).$$

Если богатство W очень велико по сравнению с x_1 , то относительный прирост богатства x_1 / W мал, и мы можем принять следующее приближение¹⁰:

$$u_1 = v_1 + \frac{x_1}{W}.$$

Второй игрок имеет 100 долл., так что его полезность в состоянии статус-кво равна $v_2 = \ln 100$. Соответственно, если он получит дополнительно x_2 долл., то полезность составит $u_2 = \ln(100 + x_2)$.

Какой вид имеет множество допустимых дележей \mathcal{U} в Игре 13?



В Парето-оптимуме должно выполняться $x_1 + x_2 = 100$ (вся сумма будет поделена между игроками). Из уравнения полезности первого игрока имеем $x_1 = (u_1 - v_1)W$. Отсюда $x_2 = 100 - x_1 = 100 - (u_1 - v_1)W$. Подставив это выражение в функцию полезности второго игрока, получим, что множество дележей \mathcal{U} справа сверху ограничивается дугой, задаваемой уравнением

$$u_2 = \ln(200 - (u_1 - v_1)W).$$

Дуга выгибается вправо вверх. Контрактная кривая состоит из точек, расположенных между этой дугой и точкой угрозы $(\ln W, \ln 100)$.

¹⁰Как известно из математического анализа, $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$ при малых ϵ .

Пусть в Игре 13 $x_1 + x_2 < 100$. Предложите Парето-улучшение.



Чтобы найти решение Нэша, надо на указанной дуге найти точку, которая максимизирует произведение $(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)$. Подставляя уравнение дуги, получим, что следует максимизировать по u_1 функцию

$$(u_1 - v_1) \cdot (\ln(200 - (u_1 - v_1)W) - \ln 100).$$

Однако в этом примере удобнее выразить полезности через x_1 , что приводит к задаче максимизации по x_1 функции

$$\frac{x_1}{W} \cdot \ln\left(\frac{200 - x_1}{100}\right).$$

В максимуме производная этой функции равна нулю. Таким образом, получаем следующее условие первого порядка:

$$\ln\left(\frac{200 - x_1}{100}\right) = \frac{x_1}{200 - x_1}.$$

Решая численно это нелинейное уравнение, найдем, что $x_1 \approx 54,4$, то есть в точке Нэша первый игрок должен получить приблизительно 54,4 долл., а второй — 45,6 долл.

В некотором смысле этот результат кажется странным; из него вытекает, что богатый игрок должен получить больше, чем бедный, нуждающийся в деньгах. Однако такие рассуждения опираются на сравнение полезностей разных лиц, что противоречит логике, заложенной Нэшем. Решение учитывает, что фактически полезность денег у игрока 2 убывает быстро, а у игрока 1 медленно. В результате получается, что игрок 2 стремится получить хоть что-нибудь и при сделке может уступить игроку 1.

Из допущений Нэша, перечисленных выше, только два первых являются достаточно убедительными. (Предположение об инвариантности к линейным преобразованиям можно принять в случае, когда предпочтения игроков имеют вид Неймана—Моргенштерна.) В связи с этим решение Нэша подвергалось критике с различных позиций. Если принять другие допущения, то можно найти и другие решения, отличные от решения Нэша.

2.9. Коалиции и ядро

Если игроков только двое, то рассмотренные выше условия добровольности участия и Парето-оптимальности — это, по-видимому, всё, что мы

можем вывести, исходя только из рациональности игроков, без каких-либо дополнительных соображений. Однако если игроков трое или более, то игроки могут группироваться по разному, образуя коалиции (охватывающие только часть игроков) и заключая соглашения в пределах коалиции. Анализ коалиций представляется очень важным для хорошего понимания взаимозависимостей между игроками, когда их более двух.

Прежде чем дать общие определения, приведем пример, показывающий, что важно учитывать возможность заключать соглашения между частью игроков. Это пример игры с нетрансферабельной полезностью.

Игра 14: Дачи трех игроков расположены по соседству в вершинах прямоугольного треугольника с катетом 120 м. Они рассматривают вариант строительства общей бани стоимостью 150 долл. При этом предполагается, что издержки строительства будут разделены поровну и что побочные платежи невозможны. Выигрыш игрока i равен $u_i = -C_i - L_i$, где C_i — его вклад в строительство бани, а L_i — расстояние от его дома до бани. \odot

Удобно считать, что три дачи имеют координаты $(0;0)$, $(120;0)$ и $(0;120)$ как на Рис. 2.10(a), а баня имеет некоторые координаты (x,y) . Линии уровня (кривые безразличия) игроков представляют собой окружности с центрами в месте расположения дач. Чем ближе к даче игрока, тем выше его выигрыш. Направления улучшения показаны маленькими стрелками. Точка N на рисунке не является оптимальной по Парето. В закрашенной области расположены дележи, которые представляют Парето-улучшение по сравнению с точкой N , поскольку для каждого из трех игроков это более близкие точки, чем N . Одно из возможных (строгих) Парето-улучшений показано стрелкой с зигзагом.

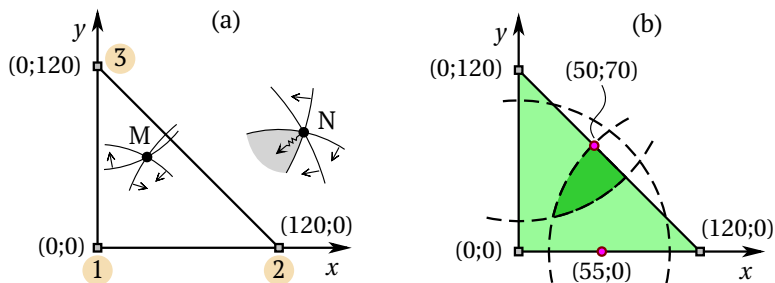


Рис. 2.10. Парето-граница и контрактная кривая для Игры 14

В то же время точка М не предоставляет возможности для Парето-улучшения. Любая другая точка будет дальше от дачи хотя бы одного из игроков. Таким образом, М принадлежит Парето-границе. В целом, как нетрудно догадаться, Парето-граница представляет собой треугольник с вершинами (0;0), (120;0) и (0;120) (см. Рис. 2.10(b)).

Если игрок будет строить баню в одиночку, то она обойдется ему в полную сумму 120 долл. и сможет построить ее в непосредственной близости от дачи. При этом полезность будет равна $v_i = -150$.

Условие участия i -го игрока $u_i \geq v_i$ можно записать как $-50 - L_i \geq -150$ или $L_i \leq 100$. Таким образом, совместная баня должна быть построена в пределах 100 м. от дачи игрока, иначе он не согласится на совместный проект. Три окружности вырезают из Парето-границы контрактную кривую (см. Рис. 2.10(b)).

Однако не все точки контрактной кривой подходят для заключения соглашения. Например, это точка с координатами (50;70). Она удовлетворяет условиям участия, поскольку приносит игрокам выигрыши, превышающие -150 :

$$u_1 = -50 - \sqrt{50^2 + 70^2} \approx -136,02, \quad u_2 = -50 - \sqrt{70^2 + 70^2} \approx -148,99$$

и

$$u_3 = -50 - \sqrt{50^2 + 50^2} \approx -120,71.$$

Однако игроки 1 и 2 при таком варианте получают не очень большие выигрыши. Они могут построить баню вдвоем, что обойдется им в 75 долл. на каждого. Выгодно расположить баню на отрезке между их дачами. Если баню расположить в точке $(x,0)$, то выигрыши составят

$$u_1 = -75 - x \quad \text{и} \quad u_2 = -75 - (120 - x).$$

Если, например, выбрать $x = 55$, то оба игрока получают более высокий выигрыш ($-130 > -136,02$ и $-140 > -148,99$). Можно сделать вывод, что они не согласятся на строительства бани на троих в точке (50;70).

Формально в теории кооперативных игр коалицией называют (непустое) подмножество S множества всех игроков I . Из соображений удобства теоретического анализа коалициями называют и само множество всех игроков, I , и множества $\{i\}$, состоящие из единственного игрока. Таким образом, коалиция — это и все множество I , и отдельный игрок и все возможные случаи между этими двумя крайностями.

В игре с тремя игроками (игре трех лиц) $I = \{1, 2, 3\}$ — это множество всех игроков. В такой игре возможны следующие коалиции:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ называется допустимым (возможным) для коалиции S , если коалиция S автономно от остальных игроков, не входящих в нее, может обеспечить своим членам i выигрыши u_i (где $i \in S$). При этом выигрыши остальных игроков никак не ограничиваются (для членов коалиции S важны только собственные выигрыши). Множество допустимых дележей для коалиции S обозначим через $V(S)$. Ясно, что в прежних обозначениях $V(I) = \mathcal{U}$ для коалиции из всех игроков. Множество $V(\{i\})$ для каждого отдельного игрока i может состоять из всех векторов вида $(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$, где u_j при $j \neq i$ — произвольные числа. Если игрок i может произвольно уменьшать свой выигрыш ниже уровня v_i , то $V(\{i\})$ будет состоять из всех векторов (u_1, \dots, u_n) , таких что $u_i \leq v_i$, а u_j при $j \neq i$ произвольные.

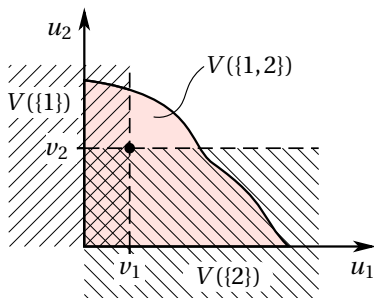


Рис. 2.11. Кооперативная игра двух лиц

В целом описание множеств $V(S)$ для всех коалиций S задает кооперативную игру. Рис. 2.11 иллюстрирует кооперативную игру двух лиц. Очевидна аналогия этой иллюстрации с Рис. 2.8 для ситуации торга.

Множества $V(S)$ допустимых для коалиций дележей могут рассчитываться, например, на основе некоторого семейства некооперативных игр или на основе некоторой задачи принятия решений.

Условно можно вообразить, что некий арбитр помогает игрокам в выработке соглашения и предлагает дележ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, так что полезность для игрока i равна u_i . Для того чтобы это предложение было принято, необходимо, прежде всего, чтобы оно было реалистичным, т. е. чтобы это был допустимый дележ для данной игры в целом (для коалиции из всех игроков). Таким образом, дележ должен быть таким, чтобы $\mathbf{u} \in V(I)$.

Далее, игроки не примут предложенный арбитром дележ \mathbf{u} , если они сочтут его невыгодным для себя. В частности, как указывалось ранее, необходимо предложить игроку i по крайней мере столько, сколько он может

гарантировать себе, действуя в одиночку. Для того, чтобы предложенный дележ был приемлем для всех n игроков, необходимо, чтобы выполнялось $u_i \geq v_i$ для всех i .

Но что если рассматривать не только отдельных игроков, ни и их коалиции? Игроки могут анализировать всевозможные коалиции, и если члены коалиции S поймут, что объединившись и действуя отдельно от остальных они смогут получить больше, чем им предложил арбитр, то они воспользуются этим и откажутся от предложенного дележа.

Если коалиции S выгодно отказаться от дележа \mathbf{u} , т.е. если она может обеспечить своим членам более высокие выигрыши, то говорят, что коалиция S блокирует дележ \mathbf{u} . Формально коалиция S блокирует дележ (u_1, \dots, u_n) , если существует допустимый для нее дележ (u'_1, \dots, u'_n) , такой что $u'_i \geq u_i$ для каждого игрока i из S и $u'_i > u_i$ по меньшей мере для одного игрока¹¹ i из S .

Заметим, что если применить указанное определение блокирования к коалиции из всех игроков, взяв $S = I$, то определение блокирования совпадает с определением доминирования по Парето. Любой допустимый дележ, не являющийся Парето-оптимальным, блокируется коалицией из всех игроков.

Мы можем постулировать, что соглашение между игроками приемлемо, если соответствующий дележ

- * является допустимым,
- * не блокируется ни одной из возможных коалиций.

Множество подобных дележей принято называть S -ядром или просто ядром¹². По-видимому, ядро игры дает приемлемое решение для проблемы заключения совместного соглашения.

По определению все дележи из ядра Парето-оптимальны, то есть ядро является подмножеством границы Парето.

Какая связь существует между ядром и контрактной кривой?



¹¹В этом определении мы предполагаем, что для блокирования достаточно хотя бы одного игрока, выигрыш которого увеличивается (у остальных членов коалиции выигрыши не уменьшаются). Такое определение можно оправдать, например, тем, что в любой игре выигрыши могут быть до некоторой степени трансферабельными, так что игрок, улучшивший свое положение, может поделиться небольшой частью прироста своего выигрыша с другими членами коалиции. Конечно, такие передачи выигрышей желательно в явном виде учесть в множествах $V(S)$, однако это может привести к неоправданному усложнению игры.

¹² S -ядро — это перевод англоязычного термина *core*. Приставку S в русском языке добавляют, чтобы не возникало путаницы с термином *kernel* (K -ядром).

В игре с *трансферабельной полезностью*¹³ коалиция всегда может перераспределить выигрыши между своими членами. Если коалиция S может обеспечить своим членам выигрыши u_i ($i \in S$), то она также может обеспечить им выигрыши u'_i , если только $\sum_{i \in S} u'_i \leq \sum_{i \in S} u_i$ (новая общая сумма выигрышей членов коалиции равна или меньше). Следовательно, в игре с трансферабельной полезностью для описания множества допустимых для данной коалиции дележей, достаточно определить максимальный суммарный выигрыш, которого может достичь эта коалиция (автономно от игроков, не входящих в коалицию). Это будет уже не множество векторов, а одно число. Обозначим такой максимальный суммарный выигрыш для коалиции S через $v(S)$. Дележ \mathbf{u} будет допустимым для коалиции S тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in S} u_i \leq v(S)$.

Функцию $v(\cdot)$, сопоставляющую каждой коалиции S максимально достижимый суммарный выигрыш $v(S)$, называют характеристической функцией. Задав такую функцию для кооперативной игры, получим игру в характеристической форме. Для простых игр удобно записывать коалиции без запятых и скобок, как нижний индекс. Например, вместо $v(\{1,2\})$ можно писать v_{12} .

Для игр с трансферабельной полезностью можно переформулировать определение блокирования в более простом виде. Коалиция S блокирует дележ \mathbf{u} тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in S} u_i < v(S)$.

Учитывая переформулировку определения блокирования, можем сказать, что в игре с трансферабельной полезностью ядро представляет собой множество дележей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, таких что они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i \in I} u_i \leq v(I),$$

$$\sum_{i \in S} u_i \geq v(S) \text{ для всех коалиций } S.$$

Первое условие — дележ из ядра должен быть допустимым, второе — дележ из ядра не блокируется ни одной из коалиций.

Поскольку множество всех игроков I — это тоже коалиция, то $\sum_{i \in I} u_i \geq v(I)$ и первое условие можно записывать в виде равенства:

$$\sum_{i \in I} u_i = v(I).$$

Это условие следует интерпретировать в том смысле, что дележ из ядра должен принадлежать Парето-границе. Если первое условие записать в ви-

¹³Как и раньше предполагаем, что всегда можно отдельному игроку сделать сколь угодно плохо, не затрагивая остальных игроков.

де равенства, в условия неблокирования можно не включать коалицию из всех игроков $S = I$.

Рассмотрим пример игры с трансферабельной полезностью и найдем в ней ядро.

Игра 15 (Джаз-оркестр): [4] Владелец ночного клуба в Париже обещает 1000 долларов певцу (S), пианисту (P) и ударнику (D) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в 800 долларов, ударника и пианиста — в 650 долларов и одного пианиста — в 300 долларов. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие фортепиано владелец клуба считает обязательным. Дуэт певец — ударник зарабатывает 500 долларов за вечер в одной удобно расположенной станции метро, певец зарабатывает в среднем 200 долларов за вечер в открытом кафе. Ударник в одиночку ничего не может заработать. \odot

Суммарный доход трех музыкантов максимален (1000) в случае их совместного выступления в ночном клубе. Если певец выступает отдельно от пианиста с ударником, то все втроем они получают 650 + 200 долларов, если пианист один выступает в ночном клубе, то 300 + 500 долларов. Наконец, суммарный доход равен 800 долларов, если пианист и певец отказываются от участия ударника. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным, учитывая описанные возможности игроков в смысле частичной кооперации и индивидуального поведения?

Для Игры 15 возможные коалиции можно записать как

$$\{S\}, \{P\}, \{D\}, \{S, P\}, \{S, D\}, \{P, D\}, \{S, P, D\}.$$

Характеристическая форма задается следующими выигрышами:

$$\begin{aligned} v_S &= 200, & v_P &= 300, & v_D &= 0, \\ v_{SP} &= 800, & v_{PD} &= 650, & v_{SD} &= 500. \\ v_{SPD} &= 1000, \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D)$ в Игре 15 принадлежит ядру тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} u_S + u_P + u_D &= 1000, \\ u_S + u_P &\geq 800, & u_P + u_D &\geq 650, & u_S + u_D &\geq 500, \\ u_S &\geq 200, & u_P &\geq 300, & u_D &\geq 0. \end{aligned}$$

Это множество можно изобразить в трехмерном пространстве так, как показано на Рис. 2.12. Контрактная кривая (множество Парето-оптимальных дележей, удовлетворяющих условиям участия) имеет следующий вид:

$$\{\mathbf{u} = (u_S, u_P, u_D) \mid u_S + u_P + u_D = 1000, u_S \geq 200, u_P \geq 300, u_D \geq 0\}.$$

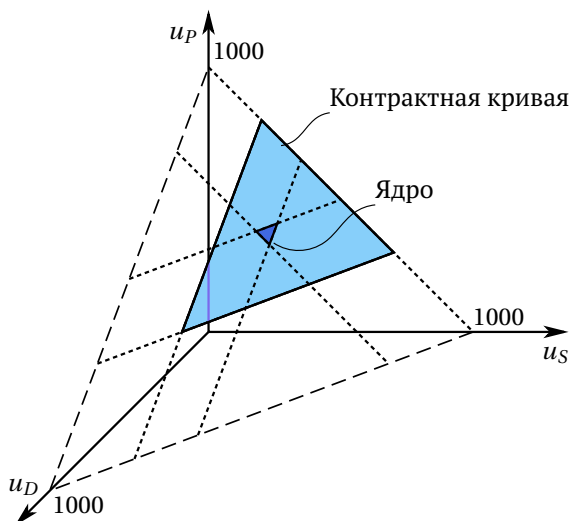


Рис. 2.12. Трехмерная иллюстрация ядра в Игре 15

Это множество можно изобразить также в двумерном пространстве — пространстве выигрышей первых двух игроков, S и P , (см. Рис. 2.13). Выигрыш третьего игрока вычисляется однозначно по выигрышам первых двух игроков по формуле $u_D = 1000 - u_S - u_P$ (отражающей требование Парето-оптимальности). Учитывая это, можно выразить остальные шесть условий как неравенства для u_S и u_P :

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_P + (1000 - u_S - u_P) \geq 650, \quad u_S + (1000 - u_S - u_P) \geq 500, \\ u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad 1000 - u_S - u_P \geq 0$$

или

$$u_S + u_P \geq 800, \quad u_S \leq 350, \quad u_P \leq 500, \\ u_S \geq 200, \quad u_P \geq 300, \quad u_S + u_P \leq 1000.$$

В первой строчке здесь перечислены условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из двух игроков, а во второй строчке — условия, что дележ не должен блокироваться коалициями из одного игрока (т. е. условия участия). Таким образом, вторая строчка дает условия на контрактную кривую (множество Парето-оптимальных и удовлетворяющих условию участия дележей).

Первая проблема: существуют ли на самом деле в рассматриваемой игре такие дележи, которые принадлежат ядру? Могут и не существовать.

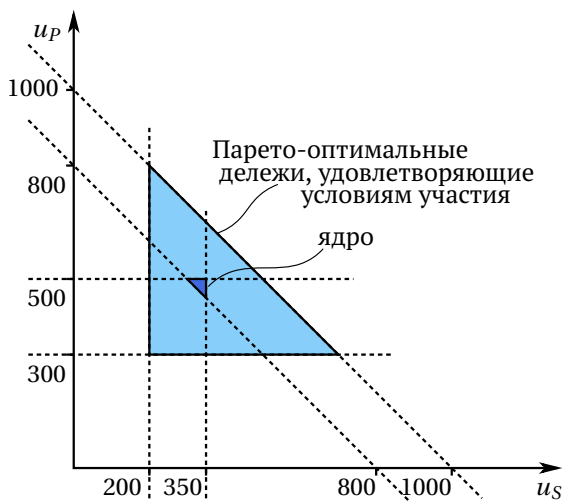


Рис. 2.13. Двумерная иллюстрация ядра в Игре 15

Вторая проблема: если ядро состоит более чем из одного дележа, то какой из них фактически реализуется? Концепция ядра не дает ответа на этот вопрос.

Пусть в Игре 15 ударник в одиночку может заработать некоторую сумму v_D . При каких значениях параметра v_D ядро пусто, а при каких — нет?



2.9.1. Примеры игр с пустым ядром

Существуют игры, ядро которых пусто. Это означает, что для каждого допустимого дележа можно найти коалицию, которая способна его блокировать.

Игра 16 (Наследство): [9] Миллиардер имеет трех племянников. Он завещает свое наследство целиком тому из трех племянников, кого они назовут большинством голосов. ©

Логично предположить, что это игра с трансферабельной полезностью. Например, двое из племянников могут договориться голосовать за одного из

них с тем, чтобы наследник перечислил половину наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему бóльшую часть наследства.

Пусть f — размер наследства. Ядро описанной игры — это множество дележей (u_1, u_2, u_3) , удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= f, \\ u_1 + u_2 &\geq f, \quad u_1 + u_3 \geq f, \quad u_2 + u_3 \geq f, \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что эти неравенства несовместны. Если сложить неравенства для парных коалиций (средняя строчка), то получится

$$2(u_1 + u_2 + u_3) \geq 3f,$$

а это противоречит равенству в первой строчке. Это значит, что любой дележ блокируется хотя бы одной коалицией. Например, симметричный дележ $(f/3, f/3, f/3)$ блокируется коалицией $\{1, 2\}$, которая может обеспечить дележ $(f/2, f/2, 0)$. В свою очередь дележ $(f/2, f/2, 0)$ блокируется коалицией $\{2, 3\}$, которая может обеспечить дележ $(0, 3f/4, f/4)$.

Игра 17 (Мусор): [29] Имеется n игроков. Каждый из игроков обладает мешком мусора и собственным домом. Игра состоит в том, чтобы забросить свой мешок с мусором в чей-либо двор. Выигрыш игрока — это количество мешков в его дворе со знаком минус.

В этой игре для коалиции из всех игроков выполнено

$$v(I) = -n,$$

т. е. ее выигрыш равен общему числу мешков с мусором со знаком минус. Для коалиции S из k игроков при $k < n$ выигрыш равен

$$v(S) = k - n,$$

поскольку коалиция S может перебросить свой мусор тем игрокам, которые в нее не входят; таких игроков $n - k$, и эти игроки могут отплатить коалиции S тем, что сбросят свои $n - k$ мешков с мусоров во дворы ее членов. ◉

Легко показать, что ядро этой игры пусто при $n > 2$. Пусть S_{-i} — это коалиция, состоящая из всех игроков, кроме игрока i . Двор игрока i как бы служит свалкой для игроков коалиции S_{-i} . Выигрыш этой коалиции равен минус единице: $v(S_{-i}) = (n - 1) - n = -1$ — владелец двора, служащего

свалкой, может отомстить только одним мешком с мусором. Чтобы дележ \mathbf{u} принадлежал ядру, требуется, чтобы при этом дележе члены коалиции S_{-i} (при любом i) в сумме получили не менее -1 :

$$\sum_{j \in S_{-i}} u_j \geq v(S_{-i}) = -1 \text{ для всех } i$$

Суммируя эти неравенства по всем $i \in I$, получим

$$(n-1) \sum_{i \in I} u_i \geq -n.$$

Множитель $n-1$ появляется здесь из-за того, что в каждой из суммируемых сумм отсутствует выигрыш одного из n игроков. Если дележ принадлежит ядру, то $\sum_{i \in I} u_i = v(I)$, причем по условиям игры $v(I) = -n$. Таким образом, если дележ \mathbf{u} принадлежит ядру, то должно выполняться неравенство

$$-(n-1)n \geq -n.$$

или

$$-(n-1) \geq -1.$$

Получаем, что при $n > 2$ ни один дележ не может принадлежать ядру. Ядро непусто только при $n \leq 2$.

При $n = 2$ в игре «Мусор» ядро будет непусто. Какой вид оно будет иметь?



Для $n = 3$ в игре «Мусор» выпишите все неравенства, которым должен удовлетворять дележ из ядра, и убедитесь, что эти неравенства несовместны. Изобразите ситуацию графически.



2.9.2. Пример ядра в игре с нетрансферабельной полезностью

Выше для Игры 14 был рассмотрен пример того, что коалиция из двух игроков может заблокировать общее соглашение. Если перебрать таким образом все варианты расположения бани, то можно найти ядро этой игры. Ядро изображено на Рис. 2.14. Точки, которые блокируются коалициями из двух игроков, лежат внутри трех эллипсов. Эллипсы отсекают часть контрактной кривой. Оставшаяся фигура представляет собой ядро. Заметим, что это ядро не в дележах, а в исходах.

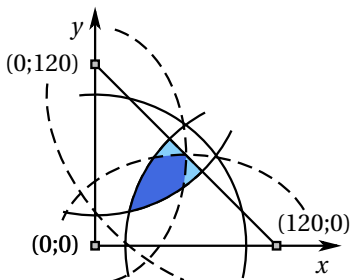


Рис. 2.14. Ядро для Игры 14

2.10. Конституционные соглашения и социальная справедливость

Рассмотрим еще раз Игру 13, в которой два игрока (богатый и бедный) делят 100 долл. Как мы видели, в этой игре точка Нэша оказывается несправедливой — богатый получает больше, чем бедный.

Рассмотрим теперь модификацию этой игры. Пусть игра происходит в два этапа и на первом этапе игроки «принимают конституцию» — т. е. заключают соглашение о том, по каким законам они будут жить на втором этапе. Предполагается, что на первом этапе ни один игрок еще не знает, будет он богатым или бедным. До начала второго этапа природа «бросает монетку» и распределяет роли. Один игрок оказывается богатым (R от англ. *rich*) с богатством W долл., а другой бедным (P от англ. *poor*) с богатством 100 долл., причем игрок может оказаться бедным или богатым с одинаковой вероятностью. Пусть $x_R \in [0; 100]$ — сумма, которую получает богатый, а $x_P = 100 - x_R$ — сумма, которую получает бедный. Их полезности на втором этапе будут равны

$$u_R = \ln(W + x_R), \quad \text{и} \quad u_P = \ln(200 - x_R).$$

Пусть на первом этапе они решают, каковы будут величины x_R и x_P . При этом они ориентируются на свои ожидаемые полезности, поскольку еще не знают, в какой окажутся роли. Ожидаемые полезности игроков будут одинаковы и равны

$$U = 0,5 \ln(W + x_R) + 0,5 \ln(200 - x_R).$$

Поскольку полезности на первом этапе одинаковы, то игра (по достижению соглашения о величине x_R) оказывается бесконфликтной — интересы

игроков полностью совпадают. Очевидно, что они выберут такую величину x_R , чтобы ожидаемая полезность была максимальной. Это соответствует единственному Парето-оптимальному исходу игры.

Производная ожидаемой полезности по x_R равна

$$U' = \frac{1}{2(W + x_R)} - \frac{1}{2(200 - x_R)} = \frac{200 - W - 2x_R}{2(W + x_R)(200 - x_R)}.$$

Поскольку богатство W очень большое, то $200 - W - 2x_R < 0$ при $x_R \in [0; 100]$. Соответственно, производная отрицательна и, следовательно, ожидаемая полезность убывает при росте x_R на отрезке $[0; 100]$. Максимум достигается на левом конце отрезка — богатому должно достаться $x_R = 0$, а бедному — $x_P = 100$.

Предположим теперь, что игроки могут договариваться не только о принципах дележа 100 долл., но и о принципах перераспределения всего имеющегося у них богатства. Это означает, что x_R может быть произвольным числом из отрезка $(-W, 200)$. Величина x_R , дающая максимум ожидаемой полезности, в этом случае должна удовлетворять условию $U' = 0$. Значит, она является решением уравнения $200 - W - 2x_R = 0$, т. е.

$$x_R = -\frac{W - 200}{2}.$$

В результате богатство богатого будет равно

$$W + x_R = \frac{W + 200}{2},$$

а бедного —

$$200 - x_R = \frac{W + 200}{2}.$$

Здесь наблюдается «уравниловка»: в результате перераспределения игроки должны иметь одинаковое богатство. Причем можно заметить, что получившийся исход не будет удовлетворять условиям участия первоначальной игры. Дело в том, что добровольность участия актуальна только для первого этапа. Принятое на первом этапе конституционное соглашение принуждает обоих игроков участвовать в перераспределении, несмотря на то, что одному из них это уже невыгодно (поскольку он оказался богачом).

Результат, который мы получили в частном примере, достаточно общий. Можно предположить, что первоначальное богатство богатого составит W_R , богатство богатого — W_P , а сумма денег которую они будут делить, будет равна A , причем величина W_R достаточно большая, так что

Предположите, что первый игрок не знает, в какой роли окажется, а второй знает, что будет богатым. Покажите, что в этом случае игра не будет бесконфликтной и Парето-граница будет состоять более чем из одной точки.

Проанализируйте ту же ситуацию в предположении, что второй знает, что будет бедным.

$W_R > W_P + A$. В качестве элементарной функции полезности обоих игроков можно взять произвольную дифференцируемую функцию $u(\cdot)$ с положительной и убывающей производной (т. е. полезность возрастает по богатству и игроки являются рискофобами).

Проведите анализ конституционного соглашения в общем случае.

Рассмотренная игра не учитывает один существенный момент. Чтобы приблизить игру к реальности, мы должны учесть, что богатство достается игроку не даром, а он должен его заработать. Игроки от природы обладают разными способностями к зарабатыванию богатства — один более предприимчивый, чем другой. В момент заключения конституционного соглашения они еще не знают, какими способностями их наградила природа. Поразмышляйте над такой игрой. Будет ли конституционный контракт в более сложной игре предусматривать такую же «уравниловку»?

2.11. Сравнение теории кооперативных и некооперативных игр

Вообще говоря, теория кооперативных игр предлагает богатое разнообразие концепций решения. Мы рассмотрели решение Нэша и C -ядро, но есть еще много других подходов¹⁴. Каждая из этих концепций по своему

¹⁴устойчивые множества Неймана—Моргенштерна, вектор Шепли, K -ядро, нуклеолус, переговорные множества Аумана—Машлера, решение Калаи—Смординского и многое другое.

интересна и имеет некоторое разумное обоснование. Но как группа они не составляют ясной и последовательной теории. Большинство различных концепций решения имеют слабую логическую связность, и поэтому их нельзя интерпретировать как частные случаи обобщающей теории. Кроме того, фактически, ни одна из классических концепций теории кооперативных игр не применима к ситуациям неполной информированности игроков и/или динамическим играм с несовершенной информированностью.

Именно этими сложностями объясняется тот факт, что теория некооперативных игр получила гораздо большее распространение в экономическом моделировании. Теория некооперативных игр позволяет делать достаточно определенные предсказания о том, каков будет исход той или иной игры. Оставшаяся часть курса будет посвящена именно некооперативным играм.

Задачи

Задача 24 Предложите пример ситуации из реальной жизни, которая включает стратегическое взаимодействие между несколькими лицами, и представьте эту ситуацию в терминах теории игр, т. е. опишите игроков, выигрыши, порядок ходов, случайные ходы природы, информационные множества, стратегии и т. п.

Задача 25 (бесконфликтные игры) [22] Приведите несколько примеров игр в нормальной форме, в которых каждый игрок имеет два действия, и предпочтения игроков совпадают, так что конфликт интересов отсутствует.

Задача 26 Перед контрольной студент может спрятать шпаргалку в левый карман или же в правый. Во время контрольной преподаватель может расположиться слева или справа от студента. Учебная аудитория устроена таким образом, что если студент будет доставать шпаргалку из левого кармана и преподаватель будет от него слева, то вероятность погореть равна 0,3, а если преподаватель будет от него справа, то вероятность равна 0,2. Если студент будет доставать шпаргалку из правого кармана и преподаватель будет от него слева, то вероятность погореть равна 0,1, а если преподаватель будет от него справа, то вероятность равна 0,5. Если преподаватель заметит шпаргалку, то его выигрыш составит 20, а выигрыш студента составит -100 . Если преподаватель не заметит шпаргалку, то его выигрыш составит 0, а выигрыш студента составит 30.

Запишите эту игру в стратегической (нормальной) форме, указав ожидаемые выигрыши игроков.

Задача 27 [27] Армии генералов А и В разместились на двух противоположных холмах. Они должны решить, атаковать ли врага, который укрепился в долине между холмами. Чтобы атака была успешной, необходимо, чтобы генерал А вовремя получил подкрепление. Вероятность того, что подкрепление подойдет вовремя, равна $1/2$ и зависит от погодных условий, неизвестных генералам. Они договорились, что если А получит подкрепление, он пошлет к генералу В гонца. Однако оба знают, что вероятность того, что гонец сможет пробраться через линию обороны врага, равна лишь $1/3$.

Выигрыши задаются следующим образом. В случае победы выигрыш каждого генерала равен 50. Если оба не будут атаковать, то они получат нулевые выигрыши. Если один атакует, а другой нет, то атаковавший получит выигрыш -50 , а не атаковавший — выигрыш -10 . Наконец, если оба генерала атакуют, но терпят поражение (из-за того, что А не получил подкрепление), каждый из них получает -40 .

1. Представьте эту игру в развернутой форме.
2. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал А может принять решение, послать ли гонца, как в случае прибытия подкрепления, так и при отсутствии подкрепления.
3. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал А всегда атакует, но посылает гонца только в случае получения подкрепления.
4. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал А всегда посылает гонца, но атакует только в случае получения подкрепления.
5. Попробуйте предсказать результат сражения в двух последних случаях (возможно, в вероятностных терминах).

Задача 28 [27] Имеется некоторая книга, которой первоначально владеет Олег, но которую он должен отдать Роману. Олег не имеет возможности отдать книгу непосредственно, но может передать ее через Павла. Олег может передать книгу или оставить ее себе. Павел (если получит книгу от Олега) тоже может передать книгу или оставить ее себе. Роман узнает только, получил он книгу или нет, но (если не получил) не может узнать, кто именно оставил себе книгу. На основе этой информации, он должен решить, наказать ли Олега, Павла или сразу обоих. Пусть для каждого игрока ценность книги равна 200 руб. в денежном выражении, а наказание для каждого (Олега и Павла) связано с потерями в 300 руб. (при этом наказание одного игрока никак не влияет на других игроков). Выигрыш равен разности ценности книги (если она досталась игроку) и ущерба от наказания (если игрок был наказан).

1. Смоделируйте ситуацию как игру трех лиц и представьте ее в развернутой форме.
2. Перечислите стратегии каждого из игроков и запишите игру в нормальной (стратегической) форме.

Задача 29 Рассмотрите экономику, состоящую из двух индивидуумов, Бима и Бома.

1. Предположите, что Бим любит только пряники, а Бом — только пирожки. Имеется фиксированный положительный запас пряников и пирожков. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.
2. Предположите теперь, что для Бима пряники и пирожки комплиментарны, так что он предпочитает потреблять пряники и пирожки в пропорции один к одному, а для Бома пряники и пирожки взаимозаменяемы, и пряник для него эквивалентен пирожку. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 30 Рассмотрите экономику, в которой предпочтения всех потребителей зависят от единственного блага (денег) и функции полезности строго возрастают по этому благу.

1. Предположите, что общий запас денег в экономике фиксирован. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.
2. Пусть существует технология, которая позволяет избавляться от денег. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 31 Множество дележей для игры двух лиц состоит из всех точек, лежащих внутри круга с центром $(0; 0)$ и радиусом 10 и внутри прямоугольника со сторонами, параллельными осям (т. е. это объединение двух фигур). Найдите Парето-границу данной игры, взяв в качестве противоположных вершин прямоугольника одну из следующих пар точек:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $(8; 3), (13; 8);$ | 2. $(1; 9), (7; 14);$ |
| 3. $(-8; 8), (8; 12);$ | 4. $(7; -8), (12; 9);$ |
| 5. $(7; -11), (14; -4);$ | 6. $(-11; 1), (-5; 12);$ |
| 7. $(-13; -9), (-7; 13);$ | 8. $(-11; -9), (14; -4);$ |
| 9. $(-11; -8), (9; 8);$ | 10. $(-6; -9), (7; 12);$ |
| 11. $(-9; -7), (13; 6).$ | |

Решите ту же задачу, взяв вместо прямоугольника треугольник с вершинами в одной из следующих тройках точек:

1. $(-14; -3), (-14; 13), (-2; -3);$
2. $(-4; -11), (-4; 3), (15; -11);$
3. $(-5; -11), (14; -11), (14; 3);$
4. $(-11; -11), (-11; 12), (7; 12);$
5. $(-13; -2), (-6; -2), (-6; 14);$
6. $(7; -13), (7; -4), (14; -4);$
7. $(8; -11), (8; 9), (-8; 9);$
8. $(-9; -11), (-9; 8), (12; 8);$
9. $(-12; -8), (9; -8), (9; 12);$
10. $(7; 3), (7; 9), (13; 3);$
11. $(-1; 8), (8; 8), (-1; 14);$
12. $(2; 4), (12; 4), (12; 9);$
13. $(4; 3), (4; 8), (14; 8);$

Задача 32 Трое друзей, Катя, Люба и Марина, хотят собраться вместе и решают, какой напиток они будут при этом пить. Выигрыши от каждого из возможных вариантов показаны в Таблице 32. Выигрыши рассчитываются по номерам букв имени, фамилии и отчества. (Например, i_2 — это номер второй буквы фамилии в алфавите.) Какие варианты являются Парето-оптимальными?

Таблица 2.5. Данные для задачи 32

	<i>чай</i>	<i>кофе</i>	<i>кола</i>	<i>пиво</i>	<i>вино</i>	<i>водка</i>	<i>коньяк</i>
Катя	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7
Люба	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7
Марина	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7

Задача 33 Имеются два игрока. У них есть 5 левых и 5 правых ботинок, и они могут распределять их между собой. Пусть L_i — количество левых ботинок, доставшихся игроку i , а R_i — количество правых ботинок, доставшихся игроку i . Выигрыш каждого игрока i равен общему числу комплектов пар ботинок, которые ему достались, т. е. $\min\{L_i, R_i\}$.

1. Найдите для этой игры границу Парето.
2. Пусть исходно у игрока 1 имеется 2 левых и 4 правых ботинка, а у игрока 2 — 3 левых и 1 правый. Найдите кривую контрактов.
3. Опишите вид границы Парето в общем случае, когда у игроков в сумме имеется m левых ботинок и n правых.

Задача 34 [40] Два игрока должны достичь соглашения по поводу дележа содержимого бутылки вина. Если они достигнут соглашения (α, β) , где $\alpha \geq$

$0, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то поделят единицу блага соответствующим образом: долю α получит первый, а долю β — второй. Если же они не договорятся, то каждый получит ноль. Предпочтения игроков описываются функциями полезности $u_1(\alpha) = \alpha$ и $u_2(\beta) = \sqrt{\beta}$.

1. Является ли эта игра игрой с трансферабельной полезностью? Объясните.
2. Изобразите эту ситуацию торга на графике в координатах (u_1, u_2) (предполагая, что вино можно выливать).
3. Найдите решение Нэша этой игры.

Задача 35 Коммерческая фирма хочет осуществить инвестиционный проект в городе N-ске. Рассматривается пять вариантов. Городские власти оценивают выигрыш города от этих проектов следующим образом: A: 20, B: 0, C: 40, D: 10, E: 10. Фирма оценивает свой выигрыш от этих проектов следующим образом: A: 0, B: 10, C: 20, D: 30, E: 20.

1. Укажите Парето-оптимальные проекты, считая невозможными побочные платежи. Аргументируйте свой ответ. Приведите графическую иллюстрацию.
2. Укажите Парето-оптимальные проекты, считая побочные платежи возможными. Аргументируйте свой ответ. Приведите графическую иллюстрацию.
3. Пусть, если фирма и город не придут к согласию, то будет выбран проект B. Укажите ядро (по прежнему считая побочные платежи возможными). Приведите графическую иллюстрацию.

Задача 36 [18] Три города строят районную систему водоснабжения с целью использования имеющегося водохранилища. Все города должны быть соединены с водохранилищем водопроводной сетью. Издержки прокладки водопровода (в миллионах долларов) между каждой парой городов и между каждым городом и водохранилищем указаны в Таблице 2.6.

Таблица 2.6. Издержки прокладки водопровода для задачи 36, млн долл.

	Город 1	Город 2	Город 3
Водохранилище	18	21	27
Город 1		15	12
Город 2			24

Самый дешевый способ построить полную систему водоснабжения — это соединить Город 1 с водохранилищем и Городами 2 и 3, так что общие издержки составят $18 + 15 + 12 = 45$ млн долларов. Задача состоит в том, чтобы распределить эти издержки между городами, рассматривая их как игроков в кооперативной игре.

1. Смоделируйте эту задачу как коалиционную игру трех лиц с трансферабельными выигрышами. В качестве выигрыша коалиции S возьмите минимальные издержки строительства системы водоснабжения для городов из этой коалиции со знаком минус. Например, $v(\{1, 2, 3\}) = -45$.
2. Было выдвинуто предложение, что каждый город должен заплатить только за строительство водопровода, который его снабжает водой, вне зависимости от того, пользуются ли этим водопроводом другие города. Это соответствует вектору выигрышей $(-18, -15, -12)$. (Все выигрыши отрицательны, поскольку они соответствуют оплаченным издержкам.) Принадлежит ли этот вектор ядру?

Задача 37 [40] Имеется три игрока. Каждый из Игроков 1 и 2 имеет по одной правой перчатке, а Игрок 3 имеет одну левую перчатку. Пара перчаток стоит 100 руб. Чтобы получить выгоду, игроки должны сотрудничать. Соответствующая кооперативная игра с трансферабельной полезностью полностью задана в Таблице 2.7.

Таблица 2.7. Выигрыши для задачи 37

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	100	100	100

1. Продемонстрируйте, что ядро этой игры состоит ровно из одного вектора.
2. Пусть теперь имеется $n = l + r$ игроков, l из которых владеет левыми перчатками, а r — правыми. Пара перчаток, как и раньше, стоит 1. Найдите общую формулу для $v(S)$ — выигрыша коалиции S , если под выигрышем коалиции подразумевается максимальная совокупная прибыль, которую могут получить члены коалиции благодаря сотрудничеству.

Задача 38 Игра трех лиц задана в характеристической форме в Таблице 2.8.

Таблица 2.8. Выигрыши для задачи 38

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	1	2	3	10	6	9	15

1. Является ли данная игра игрой с трансферабельной полезностью? Объясните.
2. Опишите границу Парето этой игры.
3. Какой вид имеет здесь точка угрозы?
4. Опишите переговорное множество этой игры.
5. Для каждого из перечисленных дележей определите, принадлежит ли он ядру, и если нет, то по какой причине:
(3; 7; 3), (5; 8; 2), (6; 7; 3), (5; 4; 6).
6. Опишите ядро этой игры и изобразите его графически.

Задача 39 [40] Мистер Адамс (А), миссис Бенсон (В) и мистер Купер (С) договорились с зубным врачом на понедельник, вторник и среду соответственно. Это расписание может не соответствовать их предпочтениям из-за разной степени безотлагательности лечения и из-за других факторов. Их предпочтения, выраженные числами, приведены в Таблице 2.9. Эта ситуация порождает игру, в которой могут образовываться коалиции с целью поменяться днем визита к врачу. Например, Адамс и Бенсон могут поменяться и получить совокупный выигрыш 14 вместо 7.

Таблица 2.9. Предпочтения для задачи 39

	пн	вт	ср
А	2	4	8
В	10	5	2
С	10	6	4

1. Рассмотрите эту ситуацию как кооперативную игру с трансферабельной полезностью. Найдите выигрыши всех возможных коалиций.
2. Покажите, что ядро представляет собой многогранник с вершинами в точках (15, 5, 4), (14, 6, 4), (8, 6, 10) и (9, 5, 10).

Задача 40 У Игрока 1 имеется один ананас (А), у Игрока 2 — один банан (В), а у Игрока 3 — один кокос (С). Ценность фруктов для игроков указана в Таблице 2.10. Игроки могут объединяться в коалиции. Члены коалиции могут передавать друг другу имеющиеся у них фрукты. Также возможны побочные платежи. Выигрыш игрока складывается из ценности для него фруктов, которыми он владеет (плюс побочные платежи).

Таблица 2.10. Данные для задачи 40

Игрок 1			Игрок 2			Игрок 3		
А	В	С	А	В	С	А	В	С
10	40	5	30	20	10	0	50	30

1. Запишите данную игру в характеристической форме.
2. Опишите границу Парето этой игры.
3. Проверьте условия существования ядра.
4. Для каждого из указанных дележей проверьте, принадлежит ли он ядру. Если нет, то укажите причину.
(20; 40; 50), (25; 50; 35), (35; 50; 30), (30; 60; 20), (20; 55; 30).
5. Найдите ядро. Укажите множество вершин. Дайте графическую иллюстрацию.

Задача 41 Рассмотрите коалиционную игру четырех лиц $(\{1, 2, 3, 4\}, v)$ с трансферабельными выигрышами. Для каждого i из $\{1, 2, 3, 4\}$ выполнено $v(\{i\}) = 0$. Для остальных коалиций

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 4\}) = v(\{3, 4\}) = 1,$$

$$v(\{1, 4\}) = v(\{2, 3\}) = 0,$$

$$v(\{2, 3, 4\}) = v(\{1, 3, 4\}) = v(\{1, 2, 4\}) = 1,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 3, 4\}) = 2.$$

(Заметьте, что выигрыш каждой коалиции за исключением $\{1, 2, 3\}$ равен максимальному количеству пар, не имеющих общих элементов и состоящих из одного игрока из $\{1, 4\}$ и одного игрока из $\{2, 3\}$, которые можно одновременно сформировать из участников коалиции.)

1. Покажите, что ядро этой игры состоит из единственного вектора выигрышей.

2. Пусть выигрыш коалиции $\{1, 2, 3\}$ стал равным $v(\{1, 2, 3\}) = 1$. Охарактеризуйте ядро новой игры и покажите, что все новые вектора выигрышей из ядра строго лучше для игрока 1, чем вектор выигрышей из ядра первоначальной игры.

Задача 42 Пусть есть группа из n старателей, которые обнаружили много больших слитков золота. Два старателя могут унести только один слиток, так что выигрыш коалиции S из k старателей равен

$$v(S) = \begin{cases} k/2, & \text{если } k \text{ четно,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Покажите, что если есть более двух старателей и старателей четное число, то ядро состоит из единственного распределения, согласно которому каждый из старателей получает $1/2$, а если количество старателей нечетное, то ядро пусто.

Задача 43 (загрязнение окружающей среды) [29] Вокруг озера расположены n фабрик. Сам забор воды бесплатный, но если озеро загрязнено, то может понадобится очистка воды, что связано с издержками. Если k фабрик загрязняют озеро, то издержки по очистке воды для отдельной фабрики равны kc . Сточная вода загрязнена, но фабрика может заплатить за очистку стоков, что связано с издержками b . Предположим, что

$$0 < c < b < nc.$$

Если образуется коалиция S из k фабрик, то все ее члены могут договориться загрязнять и получать выигрыш в размере $k \cdot (-nc)$. Или же все члены ее могут договориться очищать воду и получать выигрыш в размере $k \cdot (-(n-k)c) - kb$. Следовательно, для коалиции S из $k < n$ игроков выполняется

$$v(S) = \max\{k \cdot (-nc), \{k \cdot (-(n-k)c) - kb\}\},$$

а для коалиции из всех игроков

$$v(I) = \max\{-n^2c, \{-nb\}\}.$$

Покажите, что ядро непусто и что дележ $\mathbf{x} = (-b, \dots, -b)$ принадлежит ядру.

Статические игры с полной информацией

Оптимальный отклик. Концепция доминирования. Равновесие в доминирующих стратегиях. Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий. Равновесие по Нэшу. Множественность равновесий и фокальные точки. Оптимальный отклик в смешанных стратегиях. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Гарантированный выигрыш. Игры двух лиц с нулевой суммой.

3.1. Введение

Под статической игрой понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения, не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что игроки принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе одновременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми с полной информацией понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков¹.

¹Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

Статические игры с полной информацией имеют довольно простую структуру и в них *стратегия* совпадает с *действием*. Но, как правило, при обсуждении таких игр речь ведут о стратегиях.

Стандартный способ описания *некооперативной* статической игры с полной информацией — это ее нормальная форма. Соответствующие определения и обозначения уже были введены нами выше. Для игры n лиц множество $I = \{1, \dots, n\}$ — это множество игроков. Через s_i обозначаем стратегию игрока i ; стратегия должна принадлежать множеству допустимых стратегий этого игрока S_i . Совокупность стратегий всех игроков называют профилем стратегий или набором стратегий. То есть профиль стратегий — это

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n),$$

где $s_1 \in S_1$ — стратегия первого игрока, $s_2 \in S_2$ — второго, и т. д.

3.2. Пример некооперативной игры: ценовая конкуренция

Подчеркнем еще раз различие некооперативной и кооперативной игры. В этом нам поможет пример двух фирм, действующих на одном и том же рынке.

Часто фирма может увеличивать свою прибыль, понизив цены, потому что сокращение цен привлекает новых клиентов. Однако, многие из новых клиентов будут украдены у конкурентов этой фирмы. Конечно, когда все фирмы понижают цены, чтобы переманить друг у друга клиентов, они все от этого проигрывают. Рассмотрим упрощенную игру, которая моделирует подобную ситуацию.

Игра 18 (Ценовая конкуренция двух фирм): Каждая из двух фирм может назначить либо высокую, либо низкую цену, т. е. множества допустимых стратегий двух фирм $i = 1, 2$ совпадают:

$$S_i = \{\text{низкая цена, высокая цена}\}.$$

Если обе фирмы назначат высокую цену, то каждая получит прибыль в размере 2 млн руб. Если только одна из фирм назначит высокую цену, то получит убытки в размере 1 млн руб., а конкурирующая фирма — прибыль в размере 3 млн руб. Если обе фирмы назначат низкие цены, то выигрыш каждой будет равен нулю. (См. Таблицу 3.1.) \odot

Рассмотрим эту игру как некооперативную, т. е. такую, в которой невозможны обязывающие соглашения. В этой игре любая фирма получает бо-

Таблица 3.1. Ценовая конкуренция, данные для Игры 18

		Игрок 2	
		низкая цена	высокая цена
Игрок 1	низкая цена	0 0 3 млн –1 млн	–1 млн 2 млн
	высокая цена	–1 млн 3 млн	2 млн 0

более высокую прибыль, если назначает низкую цену, чем если назначает высокую цену. Это не зависит от того, что делает другая фирма — назначает низкую или же высокую цену. Если одна из фирм назначит высокую цену, то конкурирующая фирма имеет стимул переманить всех клиентов, назначив низкую цену. Если фирма назначит низкую цену, то конкурирующая фирма потерпит убытки, если тоже не назначит низкую цену. Для обеих компаний назначать низкую цену — это строго доминирующая стратегия (точное определение этого термина мы введем ниже).

Фирмы могут осознавать, что конкуренция является деструктивной, но все равно назначать низкие цены, поскольку в игре не заложена возможность сотрудничества. Если фирмы договорятся о том, чтобы держать высокие цены, но никаких механизмов, побуждающих выполнять договоренности, не существует, то ни одна из фирм, скорее всего, не станет придерживаться договоренностей. Каждая из фирм могла бы сделать вид, что готова выполнять соглашение, а потом, если конкурент установит высокую цену, установить низкую цену и захватить весь рынок.

Реальные фирмы не обязательно будут действовать в логике такой некооперативной игры. Поскольку соглашение о ценах для обеих фирм существенно выгоднее, чем жесткая ценовая конкуренция, то они имеют очень сильные побудительные мотивы найти какой-нибудь способ сделать соглашение о ценах обязательным для выполнения. Одна из функций антимонопольного законодательства состоит как раз в том, чтобы затруднить достижение соглашений между фирмами о поддержании высоких цен. Как правило, современное антимонопольное законодательство большинства стран в явном виде объявляет подобные соглашения незаконными. Таким образом, заключая соглашение о высоких ценах, фирмы подвергают себя риску быть наказанными за нарушение закона. Более того, поскольку соглашение об ограничении конкуренции не будет иметь законной силы, то если одна сторона нарушит подобное соглашение, то другая сторона не сможет подать на нее в суд за нарушение соглашения.

В то же время, следует учитывать, что описанная игра моделирует си-

туацию статически. Если анализировать ситуацию в динамике, то выводы могут поменяться. Например, каждая фирма может воздерживаться от понижения цен, опасаясь, что если она нарушит молчаливое соглашение, то будет наказана тем, что другие фирмы сделают то же самое.

3.3. Оптимальный отклик

Игра 19 (Координирование инвестиций): Два партнера ($i = 1,2$) одновременно решают, инвестировать ли в проект или нет. Если *оба* инвестируют, то проект окажется успешным и каждый получит доход 1000. В противном случае проект провалится и каждый получит 0. Инвестиции (вне зависимости от успешности проекта) связаны для отдельного партнера с издержками 1. Каждого из партнеров интересует чистый доход. ○

Таблица 3.2. Выигрыши в Игре 19 «Координирование инвестиций»

		Игрок 2	
		инвестировать	не инвестировать
Игрок 1	инвестировать	<u>999</u>	-1
	не инвестировать	0	<u>0</u>

Окончательные выигрыши показаны в Таблице 3.2. Как уже обсуждалось ранее, в отличие от ситуации принятия решений, когда исход зависит только от действий одного лица, принимающего решения (и еще, возможно, от случайных факторов), в играх нескольких лиц исход зависит от действий всех игроков. Таким образом, то, какие действия являются оптимальными для отдельного игрока, зависит от того, какие действия выбрали остальные игроки. Это можно увидеть на примере Игры 19.

Для игры в нормальной форме можно ввести понятие наилучшего отклика (оптимального отклика). Оптимальный отклик — это стратегия (или стратегии), которые приводят к наилучшему для данного игрока исходу при данных стратегиях других игроков.

Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение s_{-i} , что означает «все элементы профиля стратегий s , кроме i -го», т. е.

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_n).$$

При этом будем считать, что (s_i, \mathbf{s}_{-i}) — это то же самое, что \mathbf{s} . Все такие наборы стратегий \mathbf{s}_{-i} являются элементами множества S_{-i} — множества допустимых стратегий всех игроков, кроме i -го.

Для каждого $\mathbf{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ (набора стратегий всех игроков, кроме i -го) мы можем найти оптимальный отклик i -го игрока, решая задачу

$$\text{максимизировать } u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \text{ по } s_i \in S_i.$$

Будем обозначать оптимальный отклик i -го игрока через $R_i(\mathbf{s}_{-i})$. Если для данного игрока оптимальный отклик непуст и однозначен, то это означает, что можно по стратегиям остальных игроков \mathbf{s}_{-i} однозначно установить, какую стратегию выгодно выбрать i -му игроку. Вообще говоря, стратегия, являющаяся оптимальным откликом на \mathbf{s}_{-i} может не быть оптимальным откликом на другие стратегии \mathbf{s}'_{-i} .

В Игре 19 если Игрок 2 решил инвестировать, то Игроку 1 лучше тоже инвестировать, поскольку $999 > 0$. Если же Игрок 2 решил не инвестировать, то Игроку 1 лучше тоже не инвестировать, поскольку $-1 < 0$. Так же точно мы можем найти наилучший отклик Игрока 2 на действия Игрока 1. Найденные оптимальные отклики показаны в Таблице 3.2 подчеркиванием выигрышей рассматриваемого игрока.

3.4. Доминирование

Задача теории игр — по данному описанию игры предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален. Примером является Игра 18, рассмотренная выше. Приведем пример еще двух похожих игр. Первая из игр является, пожалуй, самой известной некооперативной игрой, и рассматривалась много раз в литературе по теории игр с различных точек зрения.

Игра 20 (Дилемма заключенных): Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Прокурор предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 2 года². \odot

²Цифры у разных авторов разные.

Представьте Игру 20 в матричном виде. ?

Игра 21: Проводится телевизионное шоу. Перед двумя участниками шоу стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы ведущий дал тысячу долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал сто долларов ему самому. Участники одновременно и независимо делают выбор, после чего ведущий выполняет их пожелания. ⊙

Описанная игра представлена в Таблице 3.3.

Таблица 3.3. Игра 21

		Игрок 2	
		\$1000 другому	\$100 себе
Игрок 1	\$1000 другому	1000 1000	0 <u>1100</u>
	\$100 себе	<u>1100</u> 0	<u>100</u> <u>100</u>

Во всех этих трех играх у каждого из игроков есть так называемая строго доминирующая стратегия, т. е. такая стратегия, которая заведомо лучше, чем любая другая его стратегия.

Дадим формальное определение строгого доминирования. Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i строго доминирует его стратегию $t_i \in S_i$, если при любых стратегиях $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, выбранных остальными игроками, стратегия s_i лучше, чем стратегия t_i , т. е. выполнено

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}).$$

Например, в игре Игре 21 стратегия *\$100 себе* строго доминирует стратегию *\$1000 другому*, поскольку $1100 > 1000$ (если другой игрок подарит \$1000) и $100 > 0$ (если другой игрок возьмет \$100 себе).

Стратегия называется строго доминирующей, если она строго доминирует любую другую стратегию. Другими словами, стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является его строго доминирующей стратегией, если при любых стратегиях $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, выбранных остальными игроками, она дает игроку i больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $t_i \in S_i$, т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

для всех $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ и всех $t_i \in S_i$, таких что $t_i \neq s_i$.

Определение строго доминирующей стратегии можно дать также с помощью понятия оптимального отклика. Предположим, что при всех \mathbf{s}_{-i} у игрока i имеется одна и только одна стратегия, являющаяся оптимальным откликом, причем при всех \mathbf{s}_{-i} это *одна и та же стратегия*. Тогда эта стратегия является доминирующей стратегией игрока i .

В Таблице 3.3 оптимальные отклики игроков показаны подчеркиванием соответствующих максимальных выигрышей. У каждого игрока отклик однозначен, поскольку в каждом столбце (столбцы соответствуют стратегиям второго игрока) подчеркнут только один выигрыш первого игрока, а в каждой строке (строки соответствуют стратегиям первого игрока) — только один выигрыш второго игрока. Подчеркнутые выигрыши обоих игроков соответствуют одной и той же стратегии *100 себе*. Таким образом, у каждого из игроков есть строго доминирующая стратегия.

В соответствии с определением строгого доминирования, у игрока не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определение (слабо-) доминирования.

Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i (слабо) доминирует стратегию $t_i \in S_i$ (или, другими словами, стратегия t_i доминируется стратегией s_i), если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, стратегия s_i не хуже, чем стратегия t_i , т. е. выполнено

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}),$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\mathbf{s}'_{-i} \in S_{-i}$, такой что при нем стратегия s_i строго лучше, чем стратегия t_i , т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}'_{-i}) > u_i(t_i, \mathbf{s}'_{-i}).$$

Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является его (слабо) доминирующей стратегией, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, она доминирует любую другую его стратегию, $t_i \in S_i$, либо эквивалентна ей, т. е.

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

для всех $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ и всех $t_i \in S_i$.

В терминах оптимального отклика стратегия $s_i \in S_i$ является доминирующей, если она принадлежит оптимальному отклику при любых стратегиях других игроков:

$$s_i \in R_i(\mathbf{s}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Из определения следует, что если стратегия s_i *строго доминирует* стратегию t_i , то стратегия s_i *доминирует* стратегию t_i . Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

Исход игры $\mathbf{s}^* \in S$ является равновесием в доминирующих стратегиях, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией.

Естественно ожидать, что если в игре существуют равновесия в доминирующих стратегиях, то одно из них будет реализовавшимся исходом игры.

При каких условиях на параметры a , b и c будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях в Игре 9 (с. 62)? Каким будет это равновесие?



Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

Игра 22 («Парламентское голосование»): Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные». В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получают выигрыш 1, а белые — -1 , в противном случае все получают 0. \odot

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц, (а) и (б) (см. Таблицу 3.4). Белые выбирают между таблицей (а) и таблицей (б). Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют «за», то вектор их выигрышей будет

$$(1 \text{ (за, за)}, 1 \text{ (за, против)}, 1 \text{ (против, за)}, 0 \text{ (против, против)}).$$

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют «против», то вектор выигрышей будет

$$(1 \text{ (за, за)}, 0 \text{ (за, против)}, 0 \text{ (против, за)}, 0 \text{ (против, против)}).$$

Таблица 3.4. Выигрыши в Игре 22

(а) Белые: за		Красные		(б) Белые: против		Красные	
		за	против			за	против
Зеленые	за	-1 1	-1 1	Зеленые	за	-1 1	0 0
	против	1 1	0 0		против	0 0	0 0

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том, как голосуют другие фракции):

за: $(-1, -1, -1, 0)$,
против: $(-1, 0, 0, 0)$.

Видно, что голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым, в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

3.5. Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже нестрого доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Игра 23: Телеканалы А и В решают, показывать ли прямую трансляцию важного хоккейного матча. Для того чтобы показать матч, канал А вынужден будет отказаться от показа сериала, а канал В — от показа популярного шоу. Если матч будут транслировать оба канала, то подавляющее число зрителей будут смотреть его на канале А, поскольку комментатор канала А более увлекательно комментирует хоккейные матчи. Сериал канала А не очень популярен, так что показ хоккейного матча выгоднее для этого канала. Шоу канала В соберет значительную зрительскую аудиторию, даже

если в это время канал А будет транслировать матч. Выигрыши показаны в Таблице 3.5. ⊙

Таблица 3.5. Данные для Игры 23

		Канал В	
		шоу	хоккей
Канал А	сериал	3	1
	хоккей	9	8



Оптимальные отклики показаны в Таблице 3.5 подчеркиванием. Видно, что каналу А при любом выборе канала В выгоднее показывать хоккейный матч ($9 > 3$ и $8 > 1$). Таким образом, показывать хоккейный матч — это строго доминирующая стратегия канала А. Принимая это во внимание, канал В выберет показ шоу ($4 > 2$). Таким образом, в этой игре должен реализоваться исход (хоккей, шоу).

По примеру Игры 23 проанализируйте Игру 9 «Выбор компьютера» (с. 62) при $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$. При каких других параметрах анализ игры даст аналогичные результаты (найдите условия на параметры a , b и c)?



В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут выбрать другие игроки. Если игрок считает, что другие игроки рациональны, то в некоторых случаях он может однозначным образом сформировать свои ожидания по поводу их действий. Наиболее очевидное следствие рациональности, которое можно учесть при формировании ожиданий, состоит в следующем:

Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию.

Здесь под строго доминируемой стратегией подразумевается стратегия, которую строго доминирует какая-либо другая стратегия. Формально, стратегия $t_i \in S_i$ игрока i называется строго доминируемой, если существует стратегия $s_i \in S_i$, такая что

$$u_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) < u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \text{ для всех } \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Пусть структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, пусть все это *общеизвестно*, то есть не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности. В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет строго доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет строго доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На основе этой идеи строится метод получения решения игры путем последовательного (итеративного) отбрасывания строго доминируемых стратегий.

- * Если у одного из игроков имеется строго доминируемая стратегия, то ее надо отбросить.
- * Следует повторять отбрасывание строго доминируемых стратегий в получающихся «уменьшенных» играх.
- * Как только в игре не остается строго доминируемых стратегий, следует остановиться.

Если в результате описанной процедуры получился «остаток», в котором у каждого игрока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Приведем более сложный пример, в котором стратегии отбрасываются за несколько итераций.

Игра 24 (Два бара): На некотором острове конкурируют между собой два бара. Они могут назначать цены 1 ж , 2 ж или 3 ж за кружку пива (ж — это обозначение для местной денежной единицы, буказоида). На острове имеется 6000 туристов, которые выбирают бар случайным образом, поскольку не знают, каковы цены, причем $2/3$ из них попадает в Бар 1, поскольку он расположен в более удачном месте, а $1/3$ — в Бар 2. Кроме того, есть 6000 местных жителей, которые выбирают бар с наименьшей ценой (если цены одинаковы, то они распределяются поровну между барами). Выигрыш бара — это его выручка³. ○

Прежде всего рассчитаем выигрыши баров. Если, например, оба бара назначат цену пива в 2 ж , то в Бар 1 придут 4000 туристов и 3000 местных жителей, так что его выручка составит

$$2\text{ж} \cdot (4000 + 3000) = 14 \text{ тыс. ж},$$

³Несложно видоизменить игру и ввести издержки, чтобы выигрышем была прибыль.

а в Бар 2 придут 2000 туристов и 3000 местных жителей, так что его выручка составит

$$2\text{ж} \cdot (2000 + 3000) = 10 \text{ тыс. ж},$$

Если Бар 1 выберет цену 1ж, а Бар 2 — цену 3ж, то в Бар 1 придут 4000 туристов и 6000 местных жителей, так что его выручка составит

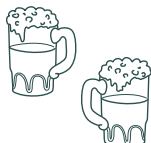
$$1\text{ж} \cdot (4000 + 6000) = 10 \text{ тыс. ж},$$

а в Бар 2 придут 2000 туристов и 0 местных жителей, так что его выручка составит

$$3\text{ж} \cdot (2000 + 0) = 6 \text{ тыс. ж},$$

Продолжая перебирать разные возможности, мы можем заполнить таблицу выигрышей (см. Таблицу 3.6).

Таблица 3.6. Выигрыши для Игры 24 (в тыс. ж)



		Бар 2		
		1ж	2ж	3ж
Бар 1	1ж	7 5	10 4	10 6
	2ж	8 8	14 10	20 6
	3ж	12 8	12 16	21 15

Стратегия 1ж Бара 1 строго доминируется стратегиями 2ж и 3ж, т. е. владельце Бара 1 невыгодно назначать такую цену (см. Рис. 3.1). В Таблице 3.7а эта стратегия перечеркнута.

Если владелец Бара 2 знает о том, что владелец Бара 1 не назначит цену 1ж, то он может при сравнении своих стратегий рассматривать только выигрыши, соответствующие стратегиям 2ж и 3ж Бара 1. Таким образом, от может в своих рассуждениях ограничиться игрой, изображенной в Таблице 3.7б. В этой игре его стратегии 1ж и 3ж строго доминируются стратегией 2ж. Значит, ему выгодна только цена 2ж.

Далее, владельцу Бара 1 достаточно рассмотреть игру, изображенную в Таблице 3.7с. В этой игре стратегия 2ж доминирует для него стратегию 3ж. Это означает, что решение игры находится однозначно — это должен быть набор стратегий (2ж, 2ж).

Если в результате процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стра-

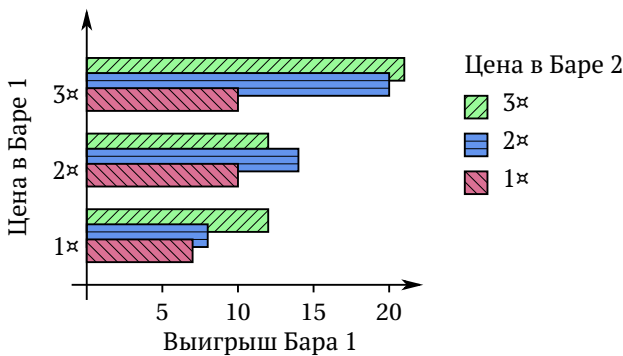
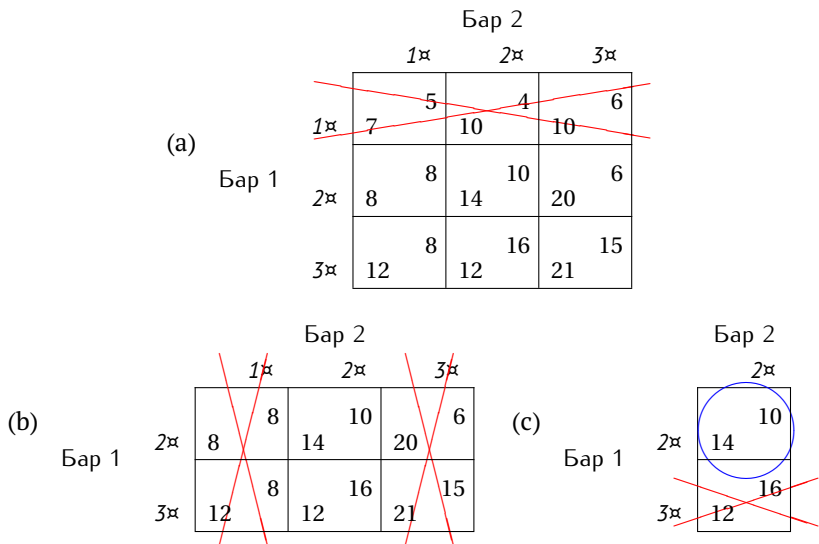


Рис. 3.1. Игра 24 «Два бара». Стратегия 1₽ Бара 1 строго доминируется стратегиями 2₽ и 3₽. Стратегии 2₽ и 3₽ несравнимы

Таблица 3.7. Отбрасывание строго доминируемых стратегий в Игре 24



Какие исходы в Игре 24 являются Парето-оптимальными?



тегия (как в рассмотренной только что Игре 24), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно. Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то, по крайней мере, можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному остатку.

Следует понимать, что в основе рассматриваемого решения лежит не только предположение об общеизвестности структуры игры и рациональности игроков, но и о способности игроков провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть довольно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю...). Для сложной игры может понадобиться достаточно высокий уровень интеллекта.

Заметим, что остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существен.

Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какие стратегии выберут другие. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

3.6. Равновесие Нэша

Существуют игры, в которых ни у одного из игроков нет доминируемой стратегии либо остаток от отбрасывания доминируемых стратегий слишком большой, что не позволяет сделать точное предсказание исхода игры с использованием доминирования. Например, в Игре 19 у обоих игроков по две стратегии, и эти стратегии не сравнимы между собой. Приведем еще один пример подобной игры.

Игра 25 (Chicken): Два хулигана с машинами придумали следующее развлечение. Они едут на полной скорости навстречу друг другу посередине пустынной дороги. Когда машины сблизятся, каждый может либо свернуть, либо продолжать ехать прямо. Если оба свернули, то будет ничья. Если только один свернул, то он объявляется «слабаком». Если оба не свернут, то произойдет столкновение с тяжелыми последствиями. Выигрыши показаны в Таблице 3.8

Таблица 3.8. Выигрыши в Игре 25



		Игрок 2	
		прямо	свернуть
Игрок 1	прямо	<div> <div>-1000</div> <div>-1000</div> </div>	<div> <div>-1</div> <div><u>1</u></div> </div>
	свернуть	<div> <div><u>-1</u></div> <div><u>1</u></div> </div>	<div> <div>0</div> <div>0</div> </div>

Очевидно, что в Игре 25 ни у одного из двух игроков нет доминирующих стратегий.

Можно сделать вывод, что идея доминирования не дает универсальной и достаточно точной концепции решения для некооперативных игр. Более универсальную концепцию решения предложил Джон Нэш. Идея Нэша состоит в том, что профиль стратегий, соответствующий решению, должен быть в определенном смысле *стабильным* или, как еще говорят, *равновесным*.

Можно принять за основу решения следующие предположения:

- * игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия других игроков;
- * ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными другими игроками действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой равновесием Нэша. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания. Запишем определение равновесия Нэша формулами.

Профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$ и ожидания \mathbf{s}_{-i}^e , $i = 1, \dots, n$, составляют равновесие Нэша, если

- * стратегия s_i^* каждого игрока $i = 1, \dots, n$ является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков \mathbf{s}_{-i}^e :

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^e) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^e);$$

- * ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mathbf{s}_{-i}^e = \mathbf{s}_{-i}^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли

они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать и т. д., отходят на второй план. Способ формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания по каким-то причинам оправдываются.

Очевидно, что из данного выше определения равновесия можно исключить ожидания, поскольку они совпадают со стратегиями. Поэтому обычно используют следующее более простое определение.

Профиль стратегий является равновесием Нэша, если стратегия каждого игрока является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков.

Формально профиль стратегий $\mathbf{s}^* \in S$ — это равновесие Нэша, если для всех игроков $i = 1, \dots, n$ выполнено

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*).$$

В терминах введенных ранее функций (отображений) отклика это можно записать более компактно:

$$s_i^* \in R_i(\mathbf{s}_{-i}^*).$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений

$$s_i^* = R_i(\mathbf{s}_{-i}^*), \quad i = 1, \dots, n.$$

Продемонстрируем сначала поиск равновесия Нэша на примере матричной игры.

Игра 26 («Домашний ремонт»): Супруги решили сделать в своей квартире ремонт. Каждый из них может посвятить ремонту 1, 2 или 3 дня. Жена считает, что оптимальный ремонт можно сделать, затратив 4 человеко-дня. Мужа волнует только, чтобы бремя ремонта легло на них как можно более равномерно. Соответственно, полезность мужа имеет вид $u_2 = -|x - y|$, где x — работа жены, y — его работа. Полезность жены имеет вид $u_1 = 8z - z^2$, где $z = x + y$. Рассчитанные выигрыши даны в Таблице 3.9. \odot

В Таблице 3.9 отображения отклика игроков выделены подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — это исход (2, 2), поскольку выигрыши обоих игроков в соответствующей клетке подчеркнуты. Других равновесий в этой игре нет.

Сформулируем еще раз определение равновесия Нэша, но несколькими словами. В равновесии каждый из игроков использует некоторую стратегию. Если данный профиль стратегий является равновесием Нэша,

Таблица 3.9. Выигрыши для Игры 26

		Муж		
		1	2	3
Жена	1	12 <u>0</u>	15 -1	<u>16</u> -2
	2	15 -1	<u>16</u> <u>0</u>	15 -1
	3	<u>16</u> -2	15 -1	12 <u>0</u>

При каких условиях на параметры в Игре 9 (с. 62) будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?



то ни один из игроков не сможет получить выгоду, отклонившись от своей стратегии, при том, что другие игроки не меняют свои стратегии.

Эту переформулировку определения равновесия на примере Игры 26 иллюстрирует Таблица 3.10. Стрелками изображены варианты изменения стратегии одного игрока, приводящие к росту его выигрыша при неизменной стратегии другого игрока. Равновесию Нэша соответствуют такие клетки матрицы, из которых не выходят стрелки, а только входят. Еще раз убеждаемся, что профиль стратегий (2, 2) соответствует равновесию.

Таблица 3.10. Иллюстрация равновесия Нэша в Игре 26

		Муж		
		1	2	3
Жена	1	12 0 ←	15 -1 ←	<u>16</u> -2 ←
	2	15 -1 ↓	<u>16</u> 0 →	15 -1 ↗
	3	<u>16</u> -2 ↓	15 -1 ↖	12 0 ↖

Здесь мы проиллюстрировали еще один метод поиска равновесия Нэша. Если для данного профиля стратегий найдется игрок, которому выгод-

но поменять свою стратегию, то такой профиль стратегий не является равновесным. При этом вовсе не обязательно искать *оптимальный* отклик игрока, достаточно просто указать стратегию, которая дает этому игроку *более высокий* выигрыш при данных стратегиях других игроков. Таким образом, можно искать равновесия Нэша перебором по всем возможным профилям стратегий. В некоторых играх можно выделить большие классы похожих профилей стратегий, которые не могут являться равновесными, и уменьшить трудоемкость такого перебора.

Как и рассмотренные ранее концепции решения, концепция равновесия Нэша может использоваться для предсказания исхода игры. Без преувеличения можно сказать, что равновесие Нэша — это самый мощный и широко используемый инструмент теории некооперативных игр. Привлекательность равновесия Нэша основывается том, что это довольно простая и универсальная концепция решения.

В равновесии Нэша ожидания игроков по поводу стратегий, выбранных другими игроками, сбываются. Требуется только как-то обосновать, почему это может происходить. Концепция равновесия Нэша обосновывалась многими различными способами, главным образом неформально. Мы кратко обсудим некоторых из этих обоснований.

- * *Самоподдерживающиеся соглашения.* Пусть игроки до игры обсуждают, как они должны играть в данную игру. По определению в некооперативных играх обязательные для выполнения соглашения между игроками невозможны. Очевидно, что в таких условиях соглашение между игроками должно быть «самоподдерживающимся» в том смысле, что ни у одного из игроков не должно быть причин не выполнить свои обязательства, если он верит, что другой игрок выполнит свои обязательства. Равновесие Нэша — это решение, которое соответствует подобному самоподдерживающемуся соглашению. Как только соглашение достигнуто, ни одному индивидууму не имеет смысла в одностороннем порядке отклоняться от него. (Один из недостатков этого обоснования состоит в том, что могут существовать равновесия Нэша, которые доминируются по Парето другими равновесиями Нэша. Такие равновесия вряд ли могут быть достигнуты за счет соглашения между игроками.)
- * *Принятое в обществе поведение — эволюционное обоснование.* Представьте себе стратегическое взаимодействие между несколькими игроками, такое что игрок 1 выбран наугад из некоторой группы индивидуумов, игрок 2 выбран наугад из некоторой другой группы индивидуумов, и т. д. «Игрок i » — это роль, в которой выступают разные индивидуумы. Можно считать, что эта ситуация время от времени

повторяется, в каждом повторении участники выбираются случайным образом и примеряют на себя доставшуюся им роль. Если этот процесс придет к некоторому стабильному профилю стратегий, который раз за разом повторяется, то этот профиль стратегий можно рассматривать как принятое в обществе поведение.

Важно, что игроки помнят, к каким результатам приводили действия предыдущих игроков в прошлом, что они стараются выбирать по возможности наилучшие действия и что они экспериментируют с некоторой небольшой вероятностью. В этом случае любое принятое в обществе поведение должно соответствовать равновесию Нэша. Если бы результатом был профиль стратегий, который не является равновесием Нэша, то это означало бы, что по крайней мере один из игроков выбирает свою стратегию не лучшим образом в ответ на стратегию другого игрока, и рано или поздно игрок в этой роли методом проб и ошибок подберет более удачную стратегию, которая и будет использоваться игроками в той же роли в дальнейшем. Другими словами, исход, который не соответствует равновесию Нэша, в некотором смысле нестабилен и он вряд ли может быть результатом общепринятого поведения.

- * *Результат обучения в повторяющейся игре.* Пусть игроки участвуют в одной и той же игре неоднократно. Игра повторяется много раз, и игроки набирают опыт по ходу игры. Каждый игрок просто пытается научиться играть в эту игру и действовать наилучшим для себя образом, учитывая предыдущую историю игры. Можно представить себе, что со временем их игра может прийти к некоторому определенному стабильному профилю стратегий. Если такое случится, то этот профиль стратегий должен составлять равновесие Нэша. (Есть, однако, две проблемы с этой интерпретацией. Во-первых, игра может никогда не стабилизироваться. Во-вторых, повторяющаяся игра — это не то же самое, что исходная игра, на основе которой она строится.)

Приведенные неформальные обоснования наталкивают на мысль, что если есть некоторый профиль стратегий для игры в нормальной форме, который можно принять в качестве решения, то, по-видимому, он и должен быть равновесием Нэша. Другими словами, есть основания утверждать, что необходимое условие для разумного решения игры состоит в том, что оно должно являться равновесием Нэша. Заметим, однако, из этого вовсе не следует обратное утверждение, что любое равновесие Нэша является разумным решением игры. Некоторые равновесия Нэша (и это мы в дальнейшем увидим) являются довольно спорными решениями.

Укажите равновесия Нэша в Игре 25. Подходит ли к этим равновесиям какое-либо из приведенных выше обоснований равновесия Нэша?



Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание строго доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция для анализа некоторых игровых ситуаций может показаться менее адекватной.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

Если профиль стратегий является равновесием Нэша, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, то соответствующий профиль стратегий является равновесием Нэша.

На примере Игры 23 и Игры 24 убедитесь в справедливости утверждений о связи равновесия Нэша и остатка от последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.



Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеями рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями.

Другой (очевидный) факт состоит в том, что равновесие в доминирующих стратегиях всегда является равновесием Нэша.

Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием Нэша.



Однако, если есть равновесие в доминирующих стратегиях, то могут быть и другие равновесия Нэша.

В Игре 22 найдите все равновесия Нэша и убедитесь, что таких равновесия несколько и только одно из них является равновесием в доминирующих стратегиях.



Приведем пример игры, в которой у каждого из игроков имеется много стратегий.

Игра 27 («Дискретный аукцион первой цены»): Продается некий предмет. Имеется n участников, каждый из которых называет цену. В аукционе первой цены, предмет достается участнику, назвавшему наивысшую цену, и он платит ту цену, которую назвал. При равенстве цен победителя определяет жребий. Если обозначить через v_i ценность данного предмета для i -го участника, а через p_i цену, которую от уплатил за предмет, то его выигрыш составит $v_i - p_i$. Если игрок не победит в аукционе и не получит предмет, то его выигрыш будет равен нулю. Аукцион дискретный в том смысле, что как оценки v_i , так и называемые цены p_i могут быть только целочисленными $(0, 1, 2, \dots)^4$. ⊙

Рассмотрим мотивацию i -го игрока. Обозначим через p_{\max} максимальную из цен, которые назвали остальные игроки, а через k количество остальных игроков, которые назвали p_{\max} . Функция выигрыша i -го игрока имеет вид

$$u_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} v_i - p_i, & \text{если } p_i > p_{\max}, \\ (v_i - p_i)/(k+1), & \text{если } p_i = p_{\max}, \\ 0, & \text{если } p_i < p_{\max}. \end{cases}$$

Здесь при $p_i = p_{\max}$ выигрыш рассчитывается как математическое ожидание. С вероятностью $1/(k+1)$ игроку достанется предмет, а с вероятностью $k/(k+1)$ — нет. Поэтому его ожидаемый выигрыш составит

$$\frac{1}{k+1} \cdot (v_i - p_i) + \frac{k}{k+1} \cdot 0 = \frac{v_i - p_i}{k+1}.$$

При $p_{\max} > v_i$ i -му игроку не выгодно побеждать на аукционе, т. е. выгодно выбрать $p_i < p_{\max}$. При $p_{\max} = v_i$ выгодно выбрать любую цену, не превышающую p_{\max} . При $p_{\max} < v_i$ следует выбирать между $p_i = p_{\max}$

⁴Заметим, что в непрерывном случае равновесия для аукциона первой цены не существуют.

и $p_i = p_{\max} + 1$, сравнивая выигрыши $(v_i - p_{\max})/(k+1)$ и $v_i - p_{\max} - 1$. Отображение отклика имеет следующий вид:

$$R_i(\mathbf{p}_{-i}) = \begin{cases} \{0, \dots, p_{\max} - 1\}, & \text{если } p_{\max} > v_i, \\ \{0, \dots, p_{\max}\}, & \text{если } p_{\max} = v_i, \\ p_{\max}, & \text{если } v_i - (k+1)/k < p_{\max} < v_i, \\ \{p_{\max}, p_{\max} + 1\}, & \text{если } p_{\max} = v_i - (k+1)/k, \\ p_{\max} + 1, & \text{если } p_{\max} < v_i - (k+1)/k. \end{cases}$$

В общем случае найти все равновесия Нэша в этой игре затруднительно. Рассмотрим только пример двух игроков с оценками $v_1 = 4$ и $v_2 = 8$. Будем предполагать, что называемые цены не могут превышать 10. Отображения отклика двух игроков приобретают следующий вид:

$$R_1(p_2) = \begin{cases} \{0, \dots, p_2 - 1\}, & \text{если } p_2 = 5, \dots, 10, \\ \{0, \dots, 4\}, & \text{если } p_2 = 4, \\ 3, & \text{если } p_2 = 3, \\ \{2, 3\}, & \text{если } p_2 = 2, \\ p_2 + 1, & \text{если } p_2 = 0, 1. \end{cases}$$

и

$$R_2(p_1) = \begin{cases} \{0, \dots, p_1 - 1\}, & \text{если } p_1 = 9, 10, \\ \{0, \dots, 8\}, & \text{если } p_1 = 8, \\ 7, & \text{если } p_1 = 7, \\ \{6, 7\}, & \text{если } p_1 = 6, \\ p_1 + 1, & \text{если } p_1 = 0, \dots, 5. \end{cases}$$

На Рис. 3.2 оптимальный отклик первого участника показан крестиками, а второго — кружками. Видно, что в игре имеется четыре равновесия Нэша (в них крестики накладываются на кружки).

Во всех равновесиях второй игрок называет на 1 более высокую цену, чем первый, и побеждает на аукционе. Для второго игрока выгодно равновесие с самой низкой ценой — $p_2 = 4$. Для первого же все равновесия эквивалентны.

Проиллюстрируем теперь использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют непрерывные стратегии.

Игра 28 («Международная торговля»): Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин τ_i . Объем торговли между странами⁵ x за-

⁵В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

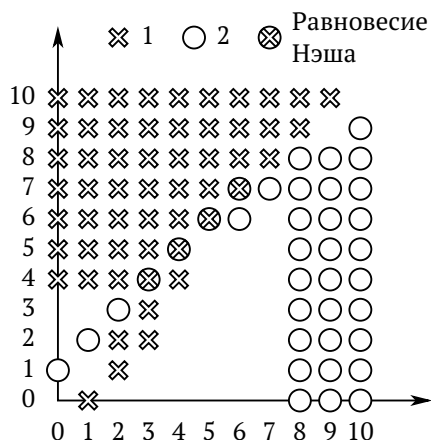


Рис. 3.2. Дискретный аукцион первой цены,

По примеру Игры 27 проанализируйте дискретный аукцион второй цены, то есть такой аукцион, в котором предмет достается участнику, назвавшему наивысшую цену, но платит он предыдущую по величине цену. Убедитесь, что в аукционе второй цены у каждого игрока есть доминирующая стратегия.

?

висит от установленных пошлин как

$$x = 1 - \tau_1 - \tau_2.$$

Цель каждой страны — максимизировать доходы

$$u_i = \tau_i x.$$

⊙

Максимизируем выигрыш первой страны

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2),$$

по τ_1 , считая фиксированным уровень пошлины, установленный второй страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

(Это условие соответствует максимуму, а не минимуму, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев форму целевой функции.)

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша второй страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик первой страны на уровень таможенной пошлины, установленной второй страной, описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1 - \tau_2}{2}.$$

Аналогично отклик второй страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1 - \tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан на Рис. 3.3. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(s) = \text{const}$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Рассмотрим теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в которой решение нельзя найти простым дифференцированием.

Игра 29 («Мороженщики на пляже»): Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т. е. выбирают координату $x_i \in [0, 1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживают $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1 - (x_1 + x_2)/2$. Если мороженщики расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремится обслуживать как можно большую долю пляжа (цену мороженого они менять не могут).

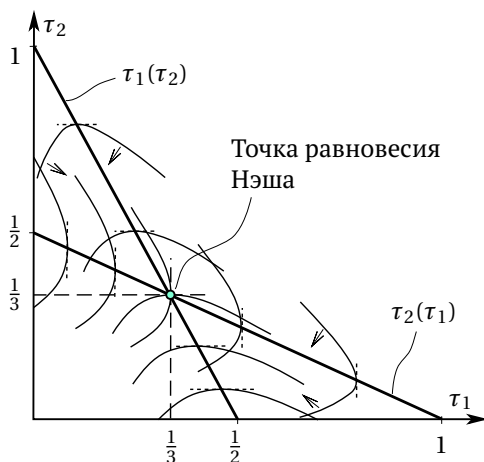


Рис. 3.3. Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»

Эта игра моделирует неценовую конкуренцию, когда продавцы выбирают местоположение, но не цены. Выигрыш игрока i (через j обозначаем другого игрока) равен:

$$u_i(x_i, x_j) = \begin{cases} (x_i + x_j)/2, & \text{если } x_i < x_j, \\ 1/2, & \text{если } x_i = x_j, \\ 1 - (x_i + x_j)/2, & \text{если } x_i > x_j. \end{cases}$$

Графики выигрыша первого игрока для трех возможных ситуаций показаны на Рис. 3.4. Как очевидно из графиков, если $x_2 \neq 1/2$, то у задачи максимизации u_1 по x_1 нет решения. если же $x_2 = 1/2$, то максимум u_1 достигается при $x_1 = 1/2$.

Таким образом, оптимальный отклик первого игрока имеет вид

$$R_1(x_2) = \begin{cases} 1/2, & x_2 = 1/2, \\ \emptyset, & x_2 \neq 1/2. \end{cases}$$

У второго игрока такой же отклик с точностью до замены индексов. Видим, что единственное равновесие — точка $(1/2, 1/2)$, т. е. оба мороженщика должны расположиться посередине пляжа.

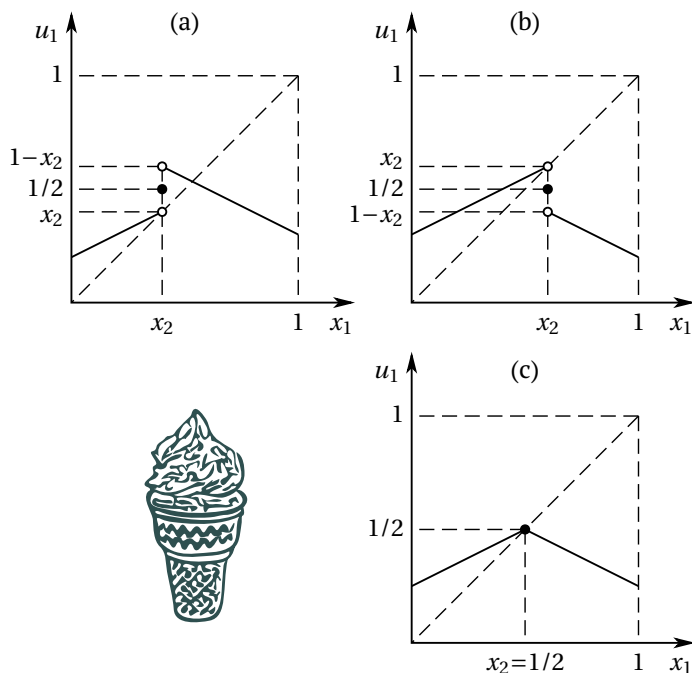


Рис. 3.4. Графики выигрыша первого игрока в Игре 29: (a) $x_2 < 1/2$, (b) $x_2 > 1/2$, (c) $x_2 = 1/2$

Рассмотрите для Игры 29 различные варианты расположения мороженщиков на пляже и проверьте, что все они, кроме $(1/2, 1/2)$, не являются равновесными, указав возможные способы увеличения выигрыша.



3.6.1. Множественность равновесий Нэша и фокальные точки

Фокальные точки — это равновесия, которые чем-то выделяются на фоне других равновесий, какими-то особенностями, которые не включены в формальную модель игры. Такие особенности могут, например, иметь психологическую или социальную основу. Они могут даже основываться на совершенно банальных вещах, например, на названиях действий или их порядковом номере. Фокальные точки могут также возникать из-за того, что один из исходов доминирует другие исходы по Парето.

Игра 30 («Встреча в Нью-Йорке»): [16] Два игрока находятся в разных местах Нью-Йорка, и не могут друг с другом связаться. Они назначили встречу на полдень, но забыли договориться о конкретном месте. Каждый должен решить, куда именно он пойдет. Если они встретятся, то получают удовольствие от совместного обеда, в противном случае каждый будет обедать в одиночестве. Выигрыш от совместного обеда — по 1 у каждого. Выигрыш от обеда в одиночестве — 0 у каждого. Имеется два варианта места встречи — у часов на центральном железнодорожном вокзале Grand Central и на смотровой площадке небоскреба Empire State Building. ☉

В этом примере интересы игроков полностью совпадают. Нет конфликта. Это в чистом виде проблема координации. Но, как и в конфликтной ситуации, здесь оптимальные действия каждого из игроков зависят от того, что, по его предположению, выберет другой. Таким образом, эта бесконфликтная игра тоже содержит стратегический аспект.

Таблица 3.11. Игра 30 «Встреча в Нью-Йорке» в виде матрицы

		Игрок 2	
		GC	ES
Игрок 1	GC	$\underline{1}$ $\underline{1}$	0 0
	ES	0 0	$\underline{1}$ $\underline{1}$

Здесь имеется два возможных равновесия Нэша. (См. Таблицу 3.11.) Этот пример подчеркивает, что концепция равновесия Нэша существенным образом опирается на то, что ожидания сбываются. Сама по себе концепция равновесия Нэша ничего не говорит о том, какое из равновесий должно реализоваться, если их много. В то же время, предполагается, что игроки верно предсказывают, какое это будет равновесие.

Как такое может быть? В данном примере может быть так, что равновесие определяется культурными особенностями. Так, приезжие скорее всего встретятся на смотровой площадке Эмпайр-стейт-билдинг, поскольку это известный туристический объект. Коренные же жители Нью-Йорка скорее предпочтут центральный вокзал.

С другой стороны, может оказаться так, что в районе центрального вокзала расположены более хорошие рестораны. Можно предположить, что исход (GC, GC) дает более высокие выигрыши $(2; 2)$. Тогда он доминирует по Парето исход (ES, ES) , так что этот выбор будет для обоих естественным.

Подобные исходы, которые особо выделяются по каким-то внешним характеристикам и могут быть выбраны в качестве конкретного равновесия, и были названы Томасом Шеллингом [25] фокальными точками.

Можно ли одно из равновесий в Игре 19 «Координирование инвестиций» назвать фокальной точкой?



Можно ли одно из равновесий в Игре 25 «Chicken» назвать фокальной точкой?



3.7. Оптимальный отклик в смешанных стратегиях. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

3.7.1. Смешанные стратегии

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра является подобным примером.

Игра 31 («Инспекция»): Первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором — платить или не платить подходящий налог. Второй — налоговой инспектор, решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взымает в него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его издержки; в случае же проверки исправного налогоплательщика, инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в Таблице 3.12.

Таблица 3.12. Данные для Игры 31

		Инспектор	
		проверять	не проверять
Проверяемый	нарушать	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">-1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <u>1</u> </div> <div style="margin-left: 10px;">← 0</div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">-1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <u>1</u> </div> <div style="margin-left: 10px;">← 0</div> </div>
	не нарушать	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">0</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <u>0</u> </div> <div style="margin-left: 10px;">→ 0</div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">0</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <u>0</u> </div> <div style="margin-left: 10px;">→ 0</div> </div>

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогичным образом, если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору не выгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей. Очевидно, что ни одна из клеток не может соответствовать равновесию Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша. Этот факт также можно подтвердить анализом стрелок, которые в данном случае «идут по кругу и нигде не останавливаются».

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы другой игрок не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достигнуть, внося в выбор стратегии элемент неопределенности, попеременно используя то одну, то другую стратегию.

Те стратегии, которые мы рассматривали раньше, принято называть чистыми стратегиями. Как мы уже говорили ранее, стратегия — это полный план действий игрока. Можно обобщить это понятие, предусмотрев выбор игроком своих чистых стратегий с некоторыми наперед заданными вероятностями. Такие стратегии получили название смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока называется распределение вероятностей на его множестве чистых стратегий.

Мы рассмотрим только простой случай, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно⁶. Пусть у игрока i имеется m чистых стратегий: s_i^1, \dots, s_i^m . Этим стратегиям игрок может приписать вероятности p_i^1, \dots, p_i^m , где $p_i^k \in [0; 1]$ — вероятность, с которой игрок выбирает свою стратегию s_i^k . Сумма таких вероятностей должна быть равна единице. Соответствующий

⁶Соответствующая игра называется конечной.

вектор вероятностей и будет смешанной стратегией игрока:

$$\sigma_i = (p_i^1, \dots, p_i^m).$$

Используя смешанную стратегию, игрок рандомизирует — выбирает одну из своих чистых стратегий случайно, в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Пусть, например, у игрока есть стратегии A и B . Его смешанная стратегия может, например, состоять в том, чтобы выбирать стратегию A с вероятностью 75% и B с вероятностью 25%. Как он может это сделать? Один из способов — бросать монету два раза. Если оба раза выпадет орел, то выбрать B , а если хотя бы один раз выпадет решка, то A .

Заметим, что согласно приведенному определению, распределение вероятностей, приписывающее вероятность единица единственной смешанной стратегии, тоже следует называть смешанной стратегией. Такую смешанную стратегию можно называть чистой. Чтобы выделить в явном виде смешанные стратегии, не совпадающие с чистыми, следует дать несколько иное определение. Смешанная стратегия игрока называется вполне смешанной, если вероятности положительны для каждой чистой стратегии этого игрока.

Многие игры характеризуются тем, что если бы другие игроки узнали точно, какой именно чистой стратегией хочет воспользоваться данный игрок, то они могли бы это использовать в своих интересах. Яркий пример — это футбольный пенальти. Игрок, бьющий пенальти старается, чтобы вратарь не догадался, куда он будет бить. Вратарь же готовится к прыжку в ту или другую сторону. Другой характерный пример — это поведение игроков в покере. Игрок в покере вынужден время от времени блефовать, т. е. играть со слабыми картами так же, как с сильными (и наоборот, вынужден время от времени играть с сильными картами так же, как со слабыми). Если этого не делать, то противник может получить преимущество. Но рандомизация используется и во многих других жизненных ситуациях. Это и ведение войны, когда надо, чтобы противник не угадал твой выбор. Это и многие экономические явления, например, установление то высокой цены, то низкой цены (несезонных скидок).

Конечно, люди редко делают выбор с помощью монеты. Однако, есть многие другие способы вести себя непредсказуемо, чтобы другие игроки не смогли угадать, что именно ты выбрал. Выбор стратегии может определяться некоторым подходящим *сигналом*, который сам игрок может наблюдать, а другие игроки — нет⁷. Например, игрок может выбирать стратегию

⁷Если сигналы, наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции так называемого *коррелированного равновесия*.

в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал.

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им *наибольший ожидаемый выигрыш*. Ожидаемый выигрыш игрока зависит от того, какую смешанную стратегию выберет он сам и от того, какие стратегии выбрали все остальные игроки.

Таблица 3.13. Вероятности исходов при использовании смешанных стратегий в Игре 31

	Проверять	Не проверять
Нарушать	pq	$p(1 - q)$
Не нарушать	$(1 - p)q$	$(1 - p)(1 - q)$

Рассмотрим вычисление ожидаемого выигрыша на примере Игры 31. Обозначим через p вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через q — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика. Если оба игрока выбирают действия независимо друг от друга, то вероятность исхода равна произведению вероятностей, с которыми выбираются соответствующие чистые стратегии. Вероятности четырех возможных исходов указаны в Таблице 3.13. Учитывая это, ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

$$U_1(p, q) = pq \cdot (-1) + p(1 - q) \cdot 1 + (1 - p)q \cdot 0 + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 = \\ = p(1 - 2q),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(p, q) = pq \cdot 1 + p(1 - q) \cdot 0 + (1 - p)q \cdot (-1) + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 = \\ = q(2p - 1).$$

С учетом того, что игроки могут рандомизировать, следует внести изменения в определение оптимального отклика. Наилучшим (оптимальным) откликом игрока на смешанные стратегии, выбранные другими игроками будет смешанная стратегия, которая приносит ему *наибольший ожидаемый выигрыш*.

Найдем оптимальные отклики в Игре 31. Как мы уже видели, ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен $U_1(p, q) = p(1 - 2q)$, а ожидаемый выигрыш инспектора равен $q(2p - 1)$. Оптимальный отклик налогоплательщика находится из решения задачи

$$\text{максимизировать } p(1 - 2q) \text{ по } p \in [0; 1].$$

Соответственно, оптимальный отклик инспектора находится из решения задачи

максимизировать $q(2p - 1)$ по $q \in [0; 1]$.

Вообще говоря, для нахождения оптимального отклика не требуется вычислять полностью ожидаемые выигрыши. Достаточно только вычислить ожидаемые выигрыши от чистых стратегий игрока, а затем сравнить их. Дело в том, что, поскольку игрок максимизирует ожидаемый выигрыш, который линеен по вероятностям, то он будет смешивать несколько разных чистых стратегий, только если они дают ему одинаковый выигрыш (при данных стратегиях других игроков). Если же некоторая чистая стратегия дает меньший ожидаемый выигрыш, чем другая чистая стратегия, то для игрока лучше всего выбирать ее с нулевой вероятностью. Эти свойства существенно облегчают поиск оптимального отклика.

Найдем ожидаемые выигрыши налогоплательщика от двух его возможных действий:

$$\text{нарушать:} \quad q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 0 = 0,$$

$$\text{не нарушать:} \quad q \cdot (-1) + (1 - q) \cdot 1 = 1 - 2q.$$

Если вероятность проверки мала ($q < 1/2$), то $1 - 2q > 0$ и налогоплательщику выгодно не платить налог, т. е. выбрать $p = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т. е. выбрать $p = 0$. Если же $q = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет ($1 - 2q = 0$), и он может выбрать любую вероятность p из интервала $[0, 1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$p(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q < 1/2, \\ [0, 1], & \text{если } q = 1/2, \\ 0, & \text{если } q > 1/2. \end{cases}$$

Найдем теперь ожидаемые выигрыши налогового инспектора:

$$\text{проверять:} \quad p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1,$$

$$\text{не проверять:} \quad p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 0 = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик инспектора:

$$q(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < 1/2, \\ [0, 1], & \text{если } p = 1/2, \\ 1, & \text{если } p > 1/2. \end{cases}$$

Как мы уже видели, во многих играх, в которых игроки стремятся перехитрить друг друга, решение в чистых стратегиях не может существовать. Таким образом, концепция решения подобной игры должна включать рандомизацию и неопределенность по поводу действий других. Вообще говоря, чтобы в такой игре противник не догадался, какую именно чистую стратегию ты выбрал, следует вести себя непредсказуемо. В то же время если ты используешь смешанную стратегию и она выбрана правильно, то тебе нет необходимости скрывать свою смешанную стратегию. Эта идея лежит в основе равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Профиль смешанных стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ является равновесием Нэша в смешанных стратегиях, если стратегия σ_i^* каждого игрока $i = 1, \dots, n$ является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков σ_{-i} .

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т. е. игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 31. Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. 3.5. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности (q и p соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях. В этом равновесии, как это всегда бывает в равновесиях вполне смешанными стратегиями, каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей другого игрока (что может вызвать определенные трудности с интерпретацией данного решения).

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда. Это так называемая теорема Нэша.

В любой конечной игре существует хотя бы одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 9 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т. е. $a < c$ и $b < c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим через p и q вероятности выбора компьютера IBM первым и вторым игроком соответственно. Если первый игрок выберет IBM, то его ожидаемый выигрыш

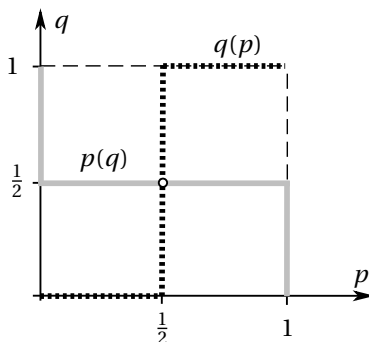


Рис. 3.5. Отображения отклика в игре «Инспекция»

составит

$$q \cdot (a + c) + (1 - q) \cdot a = a + qc,$$

если же Мас, то

$$q \cdot 0 + (1 - q) \cdot c = c - qc.$$

При $q > (c - a)/(2c)$ IBM выгоднее Мас, поскольку $a + qc > c - qc$, при $q < (c - a)/(2c)$ Мас выгоднее IBM. При $q = (c - a)/(2c)$ два типа компьютеров эквивалентны для первого игрока.

Рассчитайте функции ожидаемого выигрыша первого и второго игроков в Игре 9 как функции p и q , т. е. $U_1(p, q)$ и $U_2(p, q)$.

?

Таким образом, оптимальный отклик первого игрока имеет вид

$$p(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q < (c - a)/(2c), \\ [0, 1], & \text{если } q = (c - a)/(2c), \\ 1, & \text{если } q > (c - a)/(2c). \end{cases}$$

Если второй игрок выберет IBM, то его ожидаемый выигрыш составит

$$p \cdot c + (1 - p) \cdot 0 = pc,$$

если же Мас, то

$$p \cdot b + (1 - p) \cdot (b + c) = b + c - pc.$$

При $p > (b+c)/(2c)$ для второго игрока IBM выгоднее Мас, поскольку $pc > b+c-pc$, при $p < (b+c)/(2c)$ Мас выгоднее IBM. При $p = (b+c)/(2c)$ два типа компьютеров эквивалентны для второго игрока. Таким образом, его отклик имеет вид

$$q(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < (b+c)/(2c), \\ [0,1], & \text{если } p = (b+c)/(2c), \\ 1, & \text{если } p > (b+c)/(2c). \end{cases}$$

Кривые наилучшего отклика изображены на Рис. 3.6. Равновесиям соответствуют точки пересечения двух кривых. В данной игре имеется три такие равновесные точки. Видно, что кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$p = \frac{b+c}{2c} \quad \text{и} \quad q = \frac{c-a}{2c}.$$

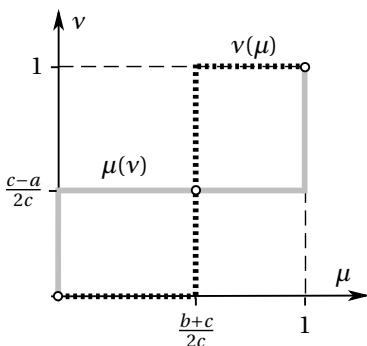


Рис. 3.6. Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях

Найдите равновесия Нэша в смешанных стратегиях в Игре 19 и в Игре 25.



3.7.2. Пример игры 3×2

Приведем пример поиска равновесия в игре, в которой у одного из двух игроков более двух стратегий.

Игра 32: Сын привык жить на иждивении родителей. Хотя родители любят сына, но им не хочется помогать ему, если он бездельничает. Родители могут помогать сыну материально или не помогать. Сын может искать постоянную работу, устроится на временную работу или сидеть дома и целыми днями смотреть по телевизору боевики. Если сын ищет постоянную работу, то он ее не обязательно найдет, но если ему повезет, то он сможет в дальнейшем жить без помощи родителей. Временную работу найти несложно, но платят за нее мало. Выигрыши приведены в Таблице 3.14. Для стратегии «искать работу» даны ожидаемые выигрыши, учитывающие вероятность неудачи.

Таблица 3.14. Данные для Игры 32

		Сын		
		искать работу	временная работа	сидеть дома
Родители	помогать	6 8	2 11	−2 12
	не помогать	−2 4	−1 3	0 0

Очевидно, что в этой игре нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Поэтому найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Найдите в Игре 32 оптимальные отклики игроков в чистых стратегиях. Покажите, что в ней не существует равновесий Нэша в чистых стратегиях.

?

Пусть p — вероятность, с которой родители помогают сыну, q_1 — вероятность, с которой сын ищет работу, q_2 — вероятность, с которой сын работает временно, $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ — вероятность, с которой сын сидит дома.

Найдем оптимальный отклик сына на смешанную стратегию родителей. Ожидаемый выигрыш от поиска постоянной работы равен

$$p \cdot 8 + (1 - p) \cdot 4 = 4p + 4.$$

Ожидаемый выигрыш от временной работы равен

$$p \cdot 11 + (1 - p) \cdot 3 = 8p + 3.$$

Ожидаемый выигрыш от безделья равен

$$p \cdot 12 + (1 - p) \cdot 0 = 12p.$$

Графики вычисленных ожидаемых выигрышей показаны на Рис. 3.7).



Рис. 3.7. Ожидаемые выигрыши сына в Игре 32

Сын безразличен между поиском постоянной работы и временной работой, когда

$$4p + 4 = 8p + 3,$$

т. е. при $p = 1/4$. Сын безразличен между временной работой и бездельем, когда

$$8p + 3 = 12p,$$

т. е. при $p = 3/4$. Таким образом, при $p < 1/4$ (малой вероятности получения родительской помощи) сын будет искать постоянную работу с вероятностью 1, при $p = 1/4$ он будет рандомизировать между поиском постоянной работы и временной работой, при $p \in (1/4; 3/4)$ он выберет временную работу с вероятностью 1, при $p = 3/4$ он будет рандомизировать между временной работой и бездельем, а при $p > 3/4$ (большой вероятности получения родительской помощи) он будет сидеть дома с вероятностью 1.

Проанализируем теперь поведение родителей. Если они будут помогать сыну, то их ожидаемый выигрыш составит

$$q_1 \cdot 6 + q_2 \cdot 2 + (1 - q_1 - q_2) \cdot (-2) = 8q_1 + 4q_2 - 2.$$

Если они не будут помогать сыну, то их ожидаемый выигрыш составит

$$q_1 \cdot (-2) + q_2 \cdot (-1) + (1 - q_1 - q_2) \cdot 0 = -2q_1 - q_2.$$

Родителям безразлично, помогать или нет, когда

$$8q_1 + 4q_2 - 2 = -2q_1 - q_2,$$

т. е. когда

$$q_2 = \frac{2}{5} - 2q_1.$$

Оптимальный отклик родителей имеет следующий вид:

$$p(q_1, q_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_2 < 2/5 - 2q_1, \\ , & \text{если } q_2 = 2/5 - 2q_1, \\ 0, & \text{если } q_2 > 2/5 - 2q_1. \end{cases}$$

Графически этот оптимальный отклик можно показать на «карте» в координатах (q_1, q_2) .

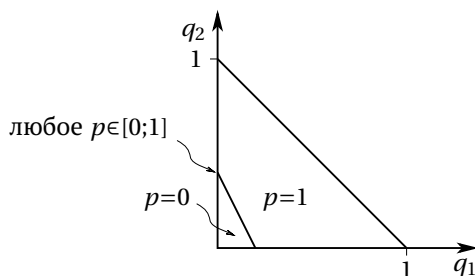


Рис. 3.8. Графическая иллюстрация оптимального отклика родителей в Игре 32

Равновесие Нэша можно найти перебором. По определению p должна быть оптимальным откликом на q_1 и q_2 , а q_1 и q_2 должны быть оптимальным откликом на p .

При $p > 3/4$ сын выберет $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ (т. е. сын бездельничает с вероятностью 1). При этом $q_2 < 2/5 - 2q_1$ и откликом родителей на такие q_1 и q_2 должна быть вероятность $p = 0$ (не помогать с вероятностью 1). Противоречие. Этого не может быть в равновесии.

При $p = 3/4$ сын выберет $q_1 = 0$. Родители могут выбрать вполне смешанную стратегию $p = 3/4$, только если $q_2 = 2/5 - 2q_1$. Таким образом, должно быть $q_1 = 0$, $q_2 = 2/5$ и $q_3 = 3/5$. Это равновесие.

При $p < 3/4$ сын выберет $q_3 = 0$. При этом $q_2 > 2/5 - 2q_1$ и откликом родителей на такие q_1 и q_2 должна быть вероятность $p = 1$. (Если сын не бездельничает, то родителям заведомо выгодно ему помогать, поскольку $6 > -2$ и $2 > -1$.) Противоречие. Этого не может быть в равновесии.

Таким образом, в рассматриваемой игре существует единственное равновесие при $p = 3/4$, $q_1 = 0$, $q_2 = 2/5$ и $q_3 = 3/5$.

3.8. Гарантированный выигрыш. Подход фон Неймана для игры двух лиц с нулевой суммой

3.8.1. Гарантированный выигрыш

Если игрок i выбрал стратегию s_i , то его выигрыш u_i все же должен зависеть от тех стратегий \mathbf{s}_{-i} , которые выбрали другие ($u_i = u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$). Выше мы уже обсуждали эту проблему. Можно заметить, что при выборе s_i игрок i никак не может получить меньше, чем

$$\min_{\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$$

— это выигрыш игрока i , который он бы получил, если бы остальные игроки вздумали сознательно ему вредить, зная, что тот выбрал стратегию s_i . Игрок i в любом случае при надлежащем выборе своей стратегии s_i может обеспечить себе выигрыш, не меньший чем

$$\underline{u}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}).$$

Если игрок i рационален, то это нижняя граница для его выигрыша в любом разумном решении игры. Данную величину принято называть гарантированным выигрышем или максимином. Если некоторый профиль стратегий не обеспечивает хотя бы одному из игроков гарантированного выигрыша, то он вряд ли может быть признан разумным решением игры.

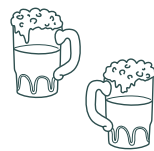
Этот критерий приемлемости решения игры был предложен одним из крупнейших математиков XX века Джоном фон Нейманом. Исторически это был фактически первый принцип поиска решения, который был предложен в теории игр.

Рассмотрим в качестве примера Игру 24. Для того, чтобы найти гарантированный выигрыш Бара 1, следует в каждой из строчек найти его минимально возможный выигрыш. Это 7, 8 и 12 соответственно. Гарантированный выигрыш — максимальный среди них, т. е. 12. Аналогично для Бара 2 минимальные выигрыши по столбцам — это 5, 4 и 6. Следовательно, 6 — гарантированный выигрыш. (См. Рис. 3.15.)

Исходы, в которых $u_1 < 12$ или $u_2 < 6$ не удовлетворяют критерию фон Неймана. На Рис. 3.15 такие исходы отмечены красными крестиками.

Заметим, что любое равновесие Нэша удовлетворяет этому критерию.

Таблица 3.15. Гарантированные выигрыши для Игры 24



Бар 1

		Бар 2					
		1я		2я		3я	
1я	7	5	10	4	10	6	7
2я	8	8	14	10	20	6	8
3я	12	8	12	16	21	15	12*
		5		4		6*	

Найдите гарантированные выигрыши в Игре 26. Какие исходы удовлетворяют критерию фон Неймана? Удовлетворяет ли данному критерию равновесие Нэша этой игры?



Проблема с критерием фон Неймана состоит в том, что для большинства игр он дает очень неточные предсказания — слишком много исходов (и соответствующих профилей стратегий) остается «невычеркнутыми».

3.8.2. Игры двух лиц с нулевой суммой. Теорема о минимаксе

Критерий фон Неймана помогает найти определенное решение в частном случае игры двух лиц с нулевой суммой.

Игры с нулевой суммой таковы, что в них то, что один игрок выигрывает, то другой игрок проигрывает. Сумма выигрышей равна нулю. Это частный случай игр с постоянной суммой. В качестве примера можно привести шахматы. В шахматах и других аналогичных играх если один игрок выиграл, то другой проиграл. Трем возможным исходам в шахматах можно сопоставить векторы выигрышей (1; -1), (-1; 1) и (0; 0) (для ничьей).

Если интересы игроков противоположны, то у них нет основы для сотрудничества. Если игрок поможет другому игроку, то он навредит себе. Интересы игроков диаметрально противоположны.

Но так бывает только в играх двух лиц. Если игроков больше двух, то часть игроков (коалиция) может кооперироваться с целью обеспечить своим членам более высокий выигрыш за счет не-членов.

Игры, в которых сумма выигрышей непостоянна, называют играми с переменной суммой. В игре двух лиц с переменной суммой в отличие от

игр двух лиц с нулевой (или постоянной) суммой возможно получение выгоды от сотрудничества.

Рассмотрим подход фон Неймана. Можем обозначить функцию выигрыша первого игрока через $u(s, t) = u_1(s, t)$. В таком случае $u_2(s, t) = -u(s, t)$. Здесь s — стратегия первого, t — стратегия второго. Гарантированные выигрыши двух игроков равны

$$\underline{u}_1 = \max_s \min_t u(s, t)$$

и

$$\underline{u}_2 = \max_t \min_s (-u(s, t)).$$

Гарантированный выигрыш второго игрока можно переписать в виде

$$\underline{u}_2 = -\min_t \max_s u(s, t).$$

(Минимизировать $-f$ — это все равно, что максимизировать f , а максимизировать $-f$ — это все равно, что минимизировать f .)

Если реализовался исход, в котором игроки имеют выигрыши (u_1, u_2) (где $u_2 = -u_1$), то согласно критерию фон Неймана эти выигрыши должны удовлетворять неравенствам $u_1 \geq \underline{u}_1$ и $u_2 \geq \underline{u}_2$. Таким образом, получаем следующие оценки для выигрышей:

$$\underline{u}_1 \leq u_1 = -u_2 \leq -\underline{u}_2$$

или

$$\max_s \min_t u(s, t) \leq u_1 = -u_2 \leq \min_t \max_s u(s, t).$$

Видим, что выигрыш игрока должен лежать между максимином и минимаксом. Если максимин и минимакс совпадают, то точно знаем те выигрыши, которые игроки должны получить «в любом разумном решении».

Имеет место следующая теорема о минимаксе:

В конечных играх двух лиц с нулевой суммой при использовании смешанных стратегий максимин и минимакс совпадают и однозначно задают выигрыши (имеется «цена игры»).

Отметим важный факт. Равновесие Нэша удовлетворяет критерию фон Неймана. В связи с этим для отыскания решения в смысле фон Неймана достаточно найти равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Рассмотрим пример игры двух лиц с нулевой суммой и найдем в ней решение по фон Нейману.

Игра 33: В поезде к игроку 1 подходит гражданин располагающей наружности — Игрок 2 — и предлагает для развлечения сыграть в игру. Игрок 1

прячет что-нибудь в левой или правой руке. Игрок 2 угадывает. Если Игрок 2 не угадает, то в случае $(Л, П)$ он платит первому 10 руб., а в случае $(П, Л)$ он платит первому 90 руб. Если же Игрок 2 угадает, то Игрок 1 выплачивает ему 50 руб. в каждом из случаев $(Л, Л)$ и $(П, П)$. \odot

Выигрыши описанной игры приведены в Таблице 3.16.

Таблица 3.16. Данные для Игры 33

		Игрок 2	
		Л	П
Игрок 1	Л	50 -50	-10 10
	П	-90 90	50 -50

Пусть p — вероятность выбора $Л$ Игроком 1, а q — вероятность выбора $Л$ Игроком 2. Найдем ожидаемый выигрыш Игрока 1:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= p \cdot (q \cdot (-50) + (1 - q) \cdot 10) + (1 - p) \cdot (q \cdot 90 + (1 - q) \cdot (-50)) = \\
 &= q(-50p - 10p + 90(1 - p) + 50(1 - p)) + 10p - 50(1 - p) = \\
 &= q(140 - 200p) + 60p - 50. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Сначала следует решить задачу минимизации U_1 по q (каким образом Игрок 2 может причинить наибольший вред Игроку 1). Получим следующее решение (оно совпадает с оптимальным откликом Игрока 2):

$$q = \begin{cases} 1, & \text{если } p > 0,7, \\ , & \text{если } p = 0,7, \\ 0, & \text{если } p < 0,7. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\min_q U_1 = \begin{cases} 90 - 140p, & \text{если } p \geq 0,7, \\ 60p - 50, & \text{если } p \leq 0,7. \end{cases}$$

Этот минимум достигает максимума по p при $p^* = 0,7$, так что $\underline{u}_1 = -8$ (см. Рис. 3.9).

Аналогично ищется минимакс. Сначала, максимизируя U_1 по p (и, тем самым, минимизируя U_2 по p — какое значение p должен выбрать Игрок 1,

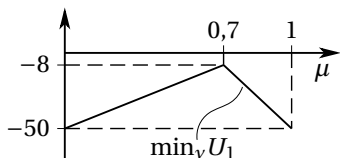


Рис. 3.9. Игра 33

чтобы как можно сильнее навредить Игроку 2) получаем

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } q < 0,3, \\ , & \text{если } q = 0,3, \\ 0, & \text{если } q > 0,3. \end{cases}$$

(Это совпадает с оптимальным откликом Игрока 1, поскольку игра с нулевой суммой, но имеет совсем другой смысл.) Соответствующий максимум равен (в зависимости от q)

$$\max_p U_1 = \begin{cases} 10 - 60q, & \text{если } q \leq 0,3, \\ 140q - 50, & \text{если } q \geq 0,3. \end{cases}$$

Минимум по q этого максимума достигается при $q^* = 0,3$ и равен -8 . Таким образом, $\underline{u}_2 = 8$.

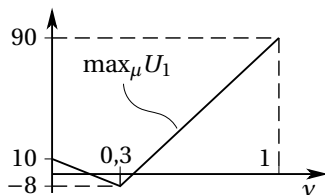


Рис. 3.10. Игра 33

Видим, что, как и предсказывает теорема о минимаксе, минимакс и максимин здесь совпадают. В этой игре Игрок 2 оказывается в выгоде. Таким образом, Игроку 1 лучше не играть в такую игру — гражданин располагающей наружности, по всей видимости, является мошенником.

Подход фон Неймана позволяет анализировать только очень узкий класс игр. Он не очень интересен с точки зрения моделирования экономи-

Найдите в Игре 33 равновесие Нэша в смешанных стратегиях и убедитесь в том, что оно совпадает с решением фон Неймана.



ческих явлений. Интересы игроков редко бывают диаметрально противоположны. Например, если две фирмы производят один и тот же продукт, то они конкурируют друг с другом. Но у таких фирм есть потенциальные возможности сотрудничества, поскольку сумма прибылей фирм — не константа.

Задачи

Задача 44 [10] Во время второй мировой войны японский ВМФ переправлял войска через море Бисмарка, а американские ВВС пытались разбомбить японские суда. Японский ВМФ выбирал между двумя маршрутами — северным и южным. Соответственно, американские ВВС выбирали, в направлении какого маршрута выслать самолеты. В случае, если американские самолеты неверно выбрали бы направление, они не смогли бы нанести достаточно большой урон японским войскам. Южный маршрут длиннее, поэтому при его выборе японскими судами американские самолеты имели возможность нанести больший урон. Матрица этой игры представлена Таблицей 3.17.

Таблица 3.17. Данные для задачи 44

		Японский ВМФ	
		север	юг
Американские ВВС	север	2 -2	2 -2
	юг	1 -1	3 -3

1. Какая из сторон имела слабо доминируемую стратегию? Объясните.
2. Каков результат последовательного отбрасывания слабо доминируемых стратегий?

Задача 45 Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, то есть выбирают его координаты (x, y) . Игрок 1 находится в точке (x_1, y_1) , а игрок

2 — в точке (x_2, y_2) . Игрок 1 выбирает координату x , а игрок 2 — координату y . Каждый стремится, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Проявите, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

Задача 46 (двуполые рыбы) [22] Особи некоторой разновидности двуполых рыб при каждом спаривании выбирают играть ли им роль самца или самки. Каждая рыба имеет некоторую любимую роль, при которой она расходует наименьшее количество ресурсов, что позволяет осуществить большее количество спариваний в будущем. Рыба получает выигрыш H , если спаривается в своей любимой роли и L , если спаривается в другой роли, где $H > L$. (Выигрыши измеряются количеством потомства, которое рыба стремится максимизировать.) Рассмотрите встречу двух рыб, чьи любимые роли совпадают. Каждая рыба имеет два возможных действия: спариваться в произвольной роли или же настаивать на своей любимой роли. Если обе рыбы выбирают произвольные роли, то роли распределяются случайным образом, и выигрыш каждой рыбы составит $\frac{1}{2}(H + L)$ (среднее из H и L). Если каждая из рыб настаивает на своей любимой роли, то рыбы не спариваются, им приходится искать других партнеров, и каждая получает выигрыш S . Чем выше шанс встречи другого партнера, тем больше S .

Представьте эту ситуацию как стратегическую игру и определите для любых заданных значений H и L диапазон значений S , при которых настаивать на своей любимой роли является строго доминирующей стратегией рыбы, причем соответствующий исход не оптимален по Парето.

Задача 47 [40] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.18.

Таблица 3.18. Данные для задачи 47

		Игрок 2		
		X	Y	Z
Игрок 1	A	10 11	9 6	9 10
	B	6 11	6 6	6 9
	C	10 12	9 6	11 9

1. Найдите равновесия Нэша этой игры.

2. Примените последовательное отбрасывание слабо доминируемых стратегий к данной игре. Найдите равновесия Нэша получившейся игры (остатка).
3. Сделайте выводы о связи равновесия Нэша с последовательным отбрасыванием слабо доминируемых стратегий

Задача 48 [40] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.19.

Таблица 3.19. Данные для задачи 48

		Игрок 2		
		X	Y	Z
Игрок 1	A	1 1	0 0	2 0
	B	1 2	1 2	1 1
	C	0 0	1 1	1 1

1. Примените последовательное отбрасывание слабо доминируемых стратегий к данной игре. Продемонстрируйте, что отбрасывая стратегии в разном порядке можно прийти к различным остаткам.
2. Для каждого из получившихся остатков проверьте, соответствует ли он равновесию (равновесиям) Нэша.

Задача 49 [40] Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.20.

1. Найдите несколько возможных последовательностей отбрасывания строго доминируемых стратегий в этой игре. Приводят ли эти последовательности к одному и тому же результату?
2. Найдите все равновесия Нэша этой игры.

Задача 50 [23] Две фирмы, решают, производить ли им компьютеры с дисковыми системами *UltraH* или системы *ExtraD*. Обе фирмы смогут продать больше компьютеров, если их дисководы будут совместимыми. Если обе фирмы выберут дисководы *UltraH*, то выигрыш каждой будет равен 2. Если обе фирмы выберут дисководы *ExtraD*, то выигрыш каждой будет равен 1. Если же они выберут разные системы, то выигрыш каждой будет равен 0.5. Изобразите эту игру в виде матрицы и найдите множество равновесий Нэша. Есть ли среди равновесий оптимальные по Парето?

Таблица 3.20. Данные для задачи 49

		Игрок 2			
		W	X	Y	Z
Игрок 1	A	4 5	4 4	5 4	2 12
	B	7 3	7 8	8 5	6 10
	C	10 2	6 7	6 4	5 9
	D	4 4	9 5	10 4	9 10

Задача 51 [23] Двух свиней, крупную и мелкую, посадили в помещение с рычагом в одном конце и кормушкой в другом конце. Когда свинья нажимает рычаг, теряя тем самым 2 единицы выигрыша, раздаточное устройство подает в кормушку 10 единиц пищи (каждая единица увеличивает выигрыш на единицу). Если крупная свинья доберется до кормушки первой, то мелкая получит только остатки пищи, эквивалентные 1 единице выигрыша. Если же мелкая свинья окажется около кормушки первой, она сможет съесть 4 единицы. Если обе свиньи окажутся у кормушки одновременно, маленькая свинья получит 3 единицы. В Таблице 3.21 показаны выигрыши для стратегий «Нажать рычаг» и «Ждать у кормушки».

Таблица 3.21. Данные для задачи 51

		Мелкая свинья	
		рычаг	кормушка
Крупная свинья	рычаг	5 1	4 4
	кормушка	9 -1	0 0

Найдите в этой игре равновесия Нэша. Какие еще концепции решения здесь можно применить?

Задача 52 [40] Две фирмы продают одинаковые продукты. Размер рынка является фиксированным. Каждый дополнительный процент доли рынка, занимаемой фирмой, дает ей прирост выигрыша 1. Без рекламы каждая из фирм занимает 50% рынка. Издержки рекламы равны 10, но реклама дает

20%-й прирост доли фирмы за счет доли другой фирмы. Фирмы принимают решения об использовании рекламы одновременно и независимо.

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 53 (ястреб — голубь) [22] Два животных борются за некоторую добычу. Каждое может быть мирным или агрессивным. Каждое предпочитает быть агрессивным, если его противник мирный, и мирным, если его противник агрессивный; при данной собственной позиции, каждое животное предпочитает, чтобы его противник был мирным, а не агрессивным. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру и найдите в ней равновесия Нэша.

Задача 54 [28] Компании «ABC девелопмент» и «XYZ-строй» участвуют в конкурсе на постройку комплекса офисных зданий. Та компания, которая предложит построить комплекс за меньшую сумму, выиграет конкурс. В случае одинаковой стоимости, у каждой из компаний шансы выиграть конкурс будут 50%. Предположим, что заявки могут принимать только значения 225 млн руб. и 260 млн руб. Предскажите результат конкурса, если ожидается, что издержки ABC составят 200 млн руб., а XYZ — 220 млн руб. Обе компании интересуют чистая ожидаемая прибыль.

Задача 55 Каждый из n игроков должен независимо от других назвать одну из трех букв: A , B или C . Если ответы всех игроков совпадут, то каждый получает выигрыш 1. В противном случае каждый получит 0.

1. Опишите все возможные равновесия Нэша этой игры. Сколько их?
2. Может ли идея фокальной точки помочь выбрать одно из этих равновесий? Почему?

Задача 56 Каждый из n игроков должен независимо от других назвать одно из чисел от 1 до 100. Если ответы всех игроков совпадут, то каждый получает выигрыш, равный названному числу. В противном случае каждый получит 0.

1. Опишите все возможные равновесия Нэша этой игры. Сколько их?
2. Может ли идея фокальной точки помочь выбрать одно из этих равновесий? Почему?

Задача 57 Два игрока делят между собой 5 орехов. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 0, 1, 2, 3$ или 4. Если $x_1 + x_2 \leq 5$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего. Найдите все равновесия Нэша.

Задача 58 (третий лишний) Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орел» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю. Найдите равновесия Нэша.

Задача 59 Каждый из двух супругов может редко мыть посуду или часто. Каждый любит, когда в раковине не скапливается грязная посуда, но каждому мыть посуду не очень приятно. Их выигрыши в зависимости от выбранных действий показаны в Таблице 3.22.

Таблица 3.22. Данные для задачи 59

		Муж	
		редко	часто
Жена	редко	0	-1
	часто	5	2

1. Покажите, что в игре есть решение в доминирующих стратегиях, причем оно не оптимально по Парето.
2. Предположим, что на самом деле каждый заботится не только о себе, но и о другом супруге, так что выигрыш имеет вид $\tilde{u}_i = (1 - \alpha)u_i + \alpha u_j$, где u_i — свой первоначальный выигрыш (из Таблицы 3.22), а u_j — первоначальный выигрыш другого супруга, $\alpha \in [0; 1]$ — «параметр альтруистичности супругов». Например, если жена моет посуду редко, а муж часто, то при $\alpha = 1/3$ выигрыш жены будет равен

$$\tilde{u}_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-1) = 3,$$

а выигрыш мужа —

$$\tilde{u}_2 = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 5 = 1.$$

Изобразите эту новую игру в виде матрицы, в которой выигрыши представлены как функции параметра α .

3. При каких значениях α в игре имеется решение в доминирующих стратегиях, которое не оптимально по Парето?
4. При каких значениях α в игре имеется решение в доминирующих стратегиях, которое оптимально по Парето?

5. Для значений α , при которых в игре нет решений в доминирующих стратегиях, найдите множество равновесий Нэша.

Задача 60 [37] В американском городе имеются три телеканала, каждый из которых принадлежит одной из крупных компаний: ABC, CBS, и NBC. Каждый из каналов может на выбор передавать вечерний выпуск новостей своей компании в 6:30 вечера («вживую») или в 7:00 вечера (в записи).

Среди зрителей новостей 60% предпочитают смотреть новости в 6:30, а 40% — в 7:00, поскольку в 6:30 по независимому каналу идет сериал. Более того, при непосредственном сравнении программа новостей ABC самая популярная, CBS — на втором месте, а NBC — на последнем по популярности.

Процент зрителей вечерних новостей, приходящийся на каждый из трех каналов, в зависимости от времени выхода новостей в эфир показан в Таблице 3.23. Цель каждого из каналов — максимизировать приходящуюся на него долю зрительской аудитории, поскольку от этого зависит доход от рекламы, получаемый каналом.

Таблица 3.23. Данные к задаче 60

ABC в 6:30		CBS		ABC в 7:00		CBS	
		6:30	7:00			6:30	7:00
NBC	6:30	42% 24%	34% 40%	NBC	6:30	40% 26%	34% 40%
	7:00	34% 40%	26% 18%		7:00	24% 16%	60% 24%

1. Найдите все доминируемые стратегии. Объясните.
2. Исключите доминируемые стратегии, найденные в предыдущем пункте, и найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях полученной таким образом упрощенной игры. Объясните.

Задача 61 [22] Два человека входят в автобус. Два расположенных рядом тесных кресла свободны. Каждый человек должен решить, сидеть или стоять. Сидеть одному более удобно, чем сидеть рядом с другим человеком, а это, в свою очередь, более удобно, чем стоять.

1. Предположим, что каждый человек заботится только о своем собственном комфорте. Смоделируйте ситуацию как стратегическую игру. Есть ли в этой игре равновесие в доминирующих стратегиях? Найдите в ней равновесия Нэша.

2. Предположим, что каждый человек — альтруист. Чтобы не тесниться, он предпочитает стоять, если другой человек сидит, и из вежливости предпочитает стоять, если другой человек стоит. Смоделируйте ситуацию как стратегическую игру. Ответьте на те же вопросы.
3. Сравните, насколько комфортно людям в равновесиях этих двух игр.

Задача 62 Девушка и парень решают, пойти ли им на концерт. Если кто-то из них не пойдет на концерт, то независимо от действий другого получает выигрыш 0. Если оба пойдут на концерт, то каждый из них получает выигрыш a ($a > 0$). Если кто-то из них пойдет на концерт, а другой — нет, то тот, кто пошел на концерт, получит выигрыш b ($b > 0$). Сформулируйте игру в нормальной форме, которая бы моделировала такую ситуацию. Изобразите игру в матричном виде. Проанализируйте данную игру, используя известные вам концепции (наилучший отклик, доминирование, равновесие Нэша). Зависит ли анализ от параметров?

Задача 63 [33] Рассмотрите статическую игру двух лиц, которая приведена в Таблице 3.24.

Таблица 3.24. Данные для задачи 63

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1 2 0	1
	D	3 0 x	1

1. При каких значениях x существует равновесие Нэша, в котором Игрок 2 выбирает R с вероятностью единица? Дайте объяснения и опишите все возможные варианты подобных равновесий.
2. При каких значениях x (если такие есть) решение R Игрока 2 уцелеет при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий? Объясните.

Задача 64 [30] Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.25. Найдите все равновесия Нэша. Какие из них остаются после применения процедуры удаления слабо доминируемых стратегий?

Таблица 3.25. Данные к задаче 64

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	T	0 0	3 4	6 0
	M	4 3	0 0	0 0
	B	0 6	0 0	5 5

Задача 65 [12] Две фирмы имеют по одной вакансии. Фирма i ($i = 1, 2$) предлагает зарплату w_i , где $0 < 1/2w_1 < w_2 < 2w_1$ и $w_1 \neq w_2$. Двое рабочих ищут работу, причем каждый из них может обратиться только в одну из фирм. Рабочие одновременно решают, обратиться в фирму 1 или фирму 2. Если только один из рабочих обращается в фирму, то этот рабочий получает данное место (а его выигрыш будет равен зарплате); если оба рабочих обращаются в одну и ту же фирму, то фирма случайным образом выбирает одного из них (с вероятностью $1/2$), а другой рабочий остается без работы (и получает выигрыш ноль).

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 66 [40] Две политические партии, I и II, имеют каждая по три голоса, которые они могут распределить между тремя партийными кандидатами каждая. Избирается комитет, состоящий из трех членов. Из общего числа шести кандидатов те трое, кто наберет наибольшее количество голосов, будут избраны. В случае равного счета кандидаты, набравшие одинаковое количество голосов, будут выбраны с одинаковыми вероятностями. Выигрыш каждой политической партии равен ожидаемому количеству ее кандидатов, избранных в комитет.

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 67 Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: A, B или C. Альтернатива выбирается голосованием простым большинством голосов. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если

ни одна из альтернатив не наберет большинство, то будет выбрана альтернатива А. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$$u_1(A) = 2, \quad u_1(B) = 1, \quad u_1(C) = 0,$$

$$u_2(A) = 0, \quad u_2(B) = 2, \quad u_2(C) = 1,$$

$$u_3(A) = 1, \quad u_3(B) = 0, \quad u_3(C) = 2.$$

Найдите равновесия Нэша.

Задача 68 Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левая» (L), «правая» (R) и «экологическая» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов. Найдите равновесия Нэша.

Задача 69 Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a > 0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b > 0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c > 0$. При каких соотношениях между a , b и c в игре сложатся равновесия Нэша вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают?

Задача 70 Каждый из двух игроков ($i = 1, 2$) имеет по 3 стратегии: a , b , c и x , y , z соответственно. Заполните выигрыши в игре, используя номера букв своих имени и фамилии (см. Таблицу 70). Номера букв в алфавите указаны в Таблице 3.27. Если в имени или фамилии букв меньше, чем требуется, то повторите буквы (например, *левлевлев*).

1. Есть ли в Вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?
2. Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?
3. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Таблица 3.26. Матрица для задачи 70

		Игрок 2		
		х	у	х
Игрок 1	а	ϕ_1 и ₁	ϕ_4 и ₂	ϕ_7 и ₃
	б	ϕ_2 и ₄	ϕ_5 и ₅	ϕ_8 и ₆
	с	ϕ_3 и ₇	ϕ_6 и ₈	ϕ_9 и ₉

Таблица 3.27. Номера букв русского алфавита

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		а	б	в	г	д	е	ё	ж	з
1	и	й	к	л	м	н	о	п	р	с
2	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы
3	ь	э	ю	я						

Задача 71 Составьте по имени, фамилии и отчеству игру трех игроков, у каждого из которых по две стратегии (а и б, к и л, х и у соответственно), по тому же принципу, как и в задаче 70 (см. Таблицу 71). Ответьте на те же вопросы.

Таблица 3.28. Матрица для задачи 71

		Игрок 3, x		Игрок 2				Игрок 3, y		Игрок 2	
				k	l			k	l		
Игрок 1	a	o ₁ и ₁	φ ₁	o ₅ и ₂	φ ₃	Игрок 1	a	o ₂ и ₅	φ ₅	o ₆ и ₆	φ ₇
	b	o ₃ и ₃	φ ₂	o ₇ и ₄	φ ₄		b	o ₄ и ₇	φ ₆	o ₈ и ₈	φ ₈

Задача 72 Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре...

- (0) не было ни одного равновесия Нэша,
- (1) было одно равновесие Нэша,
- (2) было два равновесия Нэша,

- (3) было три равновесия Нэша,
 (4) было четыре равновесия Нэша.

		X Y	
		1	2
A	?	2	?
B	4	?	0

Задача 73 Пусть в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия. Объясните, почему эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

Задача 74 Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях, и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

Задача 75 («Охота на оленя») [22] Группа охотников состоит из n человек. Каждый из охотников может охотиться на оленя или не зайца. Для поимки оленя требуются коллективные усилия не менее m охотников, где $2 \leq m < n$. Имеется единственный олень. Олень делится поровну между охотниками, которые его добудут. Для поимки зайца достаточно одного охотника, и заяц достается охотнику, который его добудет. (Зайцев хватит на всех охотников.) Каждый охотник предпочитает долю оленя $1/n$ зайцу.

1. Сформулируйте стратегическую игру, которая моделирует эту ситуацию.
2. Запишите игру в матричном виде при $n = m = 2$. Найдите равновесия Нэша.
3. Опишите равновесия Нэша при произвольных n и m . Какие из равновесий Парето-оптимальны?
4. Пусть, каждый охотник предпочитает долю $1/k$ оленя зайцу, но предпочитает зайца любой меньшей доле оленя, где k — целое число, такое что $m \leq k \leq n$. Опишите равновесия Нэша в этой модифицированной игре.

Задача 76 (вклад в общественное благо) [22] Каждый из n человек выбирает, внести ли вклад в обеспечение общественного блага. Благо производится только если по крайней мере k человек вносят вклад (где $2 \leq k \leq n$). Если благо не будет произведено, то сделанные вклады не возмещаются. Каждый человек следующим образом упорядочивает возможные исходы по уменьшению предпочтительности: (i) любой исход, при котором благо производится, и он не вносит вклад, (ii) любой исход, при котором благо производится, и он вносит вклад (iii) любой исход, при котором благо не производится, и он не вносит вклад, (iv) любой исход, при котором благо не

производится, и он вносит вклад. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру, и найдите в ней равновесия Нэша. (Существует ли такое равновесие Нэша, в котором более k человек вносят вклад? Такое, в котором k человек вносят вклад? Такое, в котором менее k человек вносят вклад? Будьте внимательны!)

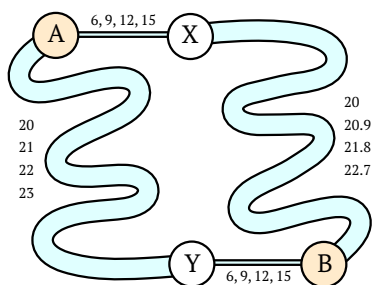
Задача 77 (угадывание двух третей среднего) [22] Каждый из трех человек называет целое число от 1 до K . Если эти три числа различны, человек, чье число оказалось ближе к $\frac{2}{3}$ от среднего этих трех чисел, выигрывает \$1. Если среди чисел есть совпавшие, то \$1 делится поровну между теми, чьи числа оказались ближе к $\frac{2}{3}$ среднего. Существует ли целое число k , такое что профиль действий (k, k, k) , при котором все называют одно и то же число k , является равновесием Нэша? (Если $k \geq 2$, то что произойдет, если что-нибудь назовет меньшее число?) Будет ли равновесием Нэша любой другой профиль? (Какой выигрыш получит тот, чье число будет наибольшим из трех? Может он увеличить этот выигрыш, назвав какое-то другое число?)

Задача 78 (участие избирателя в голосовании) [22] На выборах конкурируют между собой два кандидата (A и B). Из n граждан k поддерживают кандидата A , а $m (= n - k)$ — кандидата B . Каждый гражданин решает, голосовать или нет за того кандидата, которого он поддерживает, или же не участвовать в голосовании, с учетом того, что участие в голосовании связано для него с издержками. Гражданин, не участвовавший в голосовании, получает выигрыш 2, если кандидат, которого он поддерживает, победит, 1 если кандидаты наберут одинаковое количество голосов, и 0 если этот его кандидат проиграет. Гражданин, который участвовал в голосовании, получает в этих трех случаях выигрыши $2 - c$, $1 - c$ и $-c$, где $0 < c < 1$.

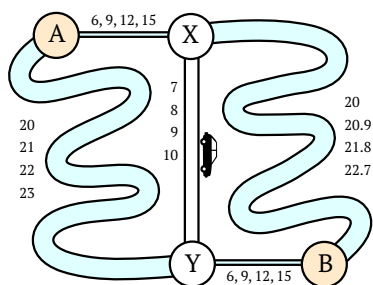
1. Проанализируйте игру при $k = m = 1$.
2. При $k = m$ найдите множество равновесий Нэша. (Является ли профиль действий, в котором каждый голосует, равновесием? Существует ли равновесие Нэша, в котором кандидаты набирают одинаковое количество голосов, причем не все граждане голосуют? Существует ли равновесие Нэша, в котором одни из кандидатов побеждает с преимуществом в один голос? Существует ли равновесие Нэша, в котором одни из кандидатов побеждает с преимуществом в два или более голоса?)
3. Каково множество равновесий Нэша при $k < m$?

Задача 79 (выбор маршрута) [22] Четыре человека должны выехать из A в B в одно и то же время. Доступны два маршрута: один через X , другой

через Y . (См. левую часть Рис. 3.11.) Дороги из A в X и из Y в B обе короткие и узкие; на каждой из них один автомобиль теряет 6 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 3 минуты в расчете на один автомобиль. (Например, если два автомобиля едут из A в X , то каждый автомобиль потеряет 9 минут.) Дороги из A в Y и из X в B длинные и широкие. На дороге из A в Y один автомобиль теряет 20 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 1 минуту в расчете на один автомобиль. На дороге из X в B один автомобиль теряет 20 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 0.9 минут в расчете на один автомобиль. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру, и найдите в ней равновесие Нэша. (Если все четыре человека выберут один и тот же маршрут, то, может быть, любой из них добьется большего успеха, выбрав другой маршрут? Что если трое выберут один и тот же маршрут, а один выберет другой маршрут? Что если каждый из маршрутов выберут двое?)



Первоначальная дорожная сеть



Дорожная сеть
с новой дорогой из X в Y

Рис. 3.11. Путь из A в B : дорожные сети из задачи 79. Числа около каждой из дорог показывают время путешествия одного автомобиля, если по этой дороге едут 1, 2, 3 или 4 автомобиля

Пусть теперь между X и Y построена относительно короткая, широкая дорога, что дает каждому человеку четыре варианта путешествия из A в B : $A-X-B$, $A-Y-B$, $A-X-Y-B$, и $A-Y-X-B$. Предположите, что человек, выбравший путь $A-X-Y-B$ едет по отрезку $A-X$ в то же самое время как и тот, кто выбрал $A-X-B$, а по отрезку $Y-B$ — в то же самое время как и тот, кто выбрал $A-Y-B$. (Можно представить это так, что транспортные потоки стабильны.) На дороге между X и Y один автомобиль теряет 7 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 1 минуту в расчете на один автомобиль. Найдите равновесие Нэша в этой новой ситуа-

ции. Сравните время, затрачиваемое отдельным человеком со тем временем, которое он затрачивал в равновесии, существовавшем до строительства дороги из X в Y .

Задача 80 [30] Рассмотрите игру двух лиц в стратегической форме, в которой $I = \{1, 2\}$ — множество игроков, $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ — множества допустимых действий этих игроков, а

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^2 \quad \text{и} \quad u_2(x_1, x_2) = 8x_2 - x_1 x_2^2 \quad —$$

их функции выигрыша. Найдите равновесия Нэша или покажите, что равновесий нет.

Задача 81 Два охотника ($i = 1, 2$) охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой i -м охотником (u_i), зависит от его усилий (x_i) и общего количества дичи в лесу (y) как $u_i = x_i y$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $y = 6 - x_1 - x_2$. Охотники стремятся добыть как можно больше дичи. Сравните равновесие Нэша и оптимум Парето. Изобразите ситуацию на графике в координатах (x_1, x_2) .

Задача 82 Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании (y_i) зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает (x_i), составляя $x_i / (1 + x_1 + x_2)$ долю от общих запасов нефти в месторождении (1000 баррелей). Рыночная цена нефти — 15 песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3 + x_i)$ песо. Каков будет результат «эгоистичной погони за прибылью»? Покажите, что месторождение будет эксплуатироваться слишком интенсивно.

Задача 83 Робинзон и Пятница договорились, что Робинзон будет заниматься сбором кокосов, а Пятница — ловлей рыбы. Выигрыш Робинзона (первого игрока) равен

$$u_1 = \min\{x_1, y_1\} - X^2/4,$$

а выигрыш Пятницы (второго игрока) равен

$$u_2 = y_2 \sqrt{x_2} - Y^2/8,$$

где x_i — количество кокосов, доставшееся i -му игроку, y_i — количество рыбы, доставшееся i -му игроку, $X = x_1 + x_2$ — общее количество собранных кокосов, $Y = y_1 + y_2$ — общее количество выловленной рыбы. (Выигрыш каждого равен удовольствию от потребленных продуктов минус тягость усилий.) Робинзон выбирает количество собранных кокосов X , а Пятница — количество выловленной рыбы Y .

1. Предположим, что добычу они будут делить пополам. Найдите оптимальный отклик каждого из игроков и равновесие Нэша. Изобразите ситуацию на графике в координатах (X, Y) .
2. Предположим, что доля α добычи остается игроку, который ее добыл, а доля $1 - \alpha$ — другому игроку. Найдите равновесия Нэша в зависимости от параметра α .

Задача 84 Пусть доход X артели есть простая сумма результатов $x_i \geq 0$, создаваемых усилиями отдельных участников $i = 1, \dots, n$. Доход распределяется поровну. Функция полезности $u_i(w_i, x_i)$ каждого участника возрастает по его доходу $w_i = X/n$ и убывает по его усилиям x_i .

1. Найдите равновесие Нэша при $u_i(w_i, x_i) = w_i - x_i^2$. Покажите, что равновесие не оптимально по Парето, подобрав Парето-улучшение. (Подсказка: Парето улучшение можно искать среди симметричных исходов, в которых все участники делают одинаковые усилия.)
2. Решите ту же задачу при $u_i(w_i, x_i) = w_i(1 - x_i)$, где $x_i \in [0; 1]$.
3. Для произвольной дифференцируемой функции $u_i(w_i, x_i)$ покажите, что если хотя бы один участник i в равновесии Нэша осуществляет усилия ($x_i > 0$), то оно не Парето-оптимально. Предложите Парето-улучшение.

Задача 85 [12] Рассмотрим избирателей, равномерно распределенных по «идеологическому спектру» от левой ($x = 0$) до правой ($x = 1$) ориентации. Каждый из кандидатов на некоторую должность одновременно выбирает платформу для своей избирательной кампании, то есть точку x на отрезке $[0; 1]$. Избиратели наблюдают выбор кандидатов, а затем каждый из избирателей голосует за того кандидата, чья платформа оказывается ближе к позиции избирателя в рамках идеологического спектра. Например, если есть два кандидата, и они выбрали платформы $x_1 = 0.3$ и $x_2 = 0.6$ соответственно, то все избиратели левее $x = 0.45$ проголосуют за первого кандидата, а все избиратели правее $x = 0.45$ — за второго, так что второй кандидат выиграет выборы, набрав 55% голосов. Предположим, что кандидаты стремятся только к тому, чтобы их выбрали и им нет дела до своих политических платформ! (Предположим, что те кандидаты, которые предложили одинаковые платформы, поровну делят голоса избирателей, и что при равенстве голосов победитель на выборах определяется жребием с равными вероятностями.)

1. Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях в случае двух кандидатов.

- Опишите равновесие Нэша в чистых стратегиях в случае трех кандидатов.

Задача 86 (Орел или решка) Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль. Покажите, что в этой игре нет равновесий Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 87 [23] Игра моделирует ситуацию, когда правительство хочет помочь безработному, если он ищет работу, и не хочет в противном случае. В свою очередь безработный будет искать работу только если он не получает государственное пособие, причем он может не найти работу, даже если будет искать. Выигрыши равны $(3; 2)$ (для правительства и безработного соответственно), если правительство платит пособие, а безработный пытается искать работу, $(-1; 1)$, если правительство не платит пособие, а безработный пытается искать работу, $(-1; 3)$ если правительство платит пособие, а безработный не пытается искать работу, и $(0; 0)$ в оставшемся случае.

- Изобразите игру в виде матрицы.
- Есть ли в этой игре равновесия Нэша в чистых стратегиях?
- Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 88 [40] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.29.

Таблица 3.29. Данные для задачи 88

		Игрок 2			
		W	X	Y	Z
Игрок 1	T	6	4	2	5
	B	5	6	8	4

- Какая чистая стратегия Игрока 1 или Игрока 2 строго доминируется другой чистой стратегией?
- Опишите все смеси стратегий W и Y Игрока 2, которые строго доминируют стратегию X.
- Найдите для этой игры все равновесия Нэша в чистых стратегиях.

4. Пусть Игрок 1 выбирает T с вероятностью p и B с вероятностью $1 - p$, а Игрок 2 выбирает W с вероятностью q и Y с вероятностью $1 - q$. Найдите значение q (q^*), такое что стратегии T и B дают Игроку 1 один и тот же ожидаемый выигрыш. Найдите значение p (p^*), такое что стратегии W и Y дают Игроку 2 один и тот же ожидаемый выигрыш. Покажите, что при $q = q^*$ стратегии X и Z дают Игроку 2 меньший ожидаемый выигрыш, чем стратегии W и Y . Объясните, почему вероятности p^* , q^* соответствуют равновесию Нэша в смешанных стратегиях.
5. Покажите, что других равновесий Нэша в смешанных стратегиях (кроме упоминавшихся выше) не существует.

Задача 89 [30]

1. Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.30 слева. Для каждого z из промежутка от -1 до 1 изобразите множество всех точек p , таких что p — это вероятность выбора U первым игроком в некотором равновесии Нэша этой игры. (Например, для $z = 2$ — что находится за пределами того промежутка, который требуется проанализировать — имеется три равновесия Нэша, с вероятностями $p = 1$, $p = 0$ и $p = 2/3$ соответственно. Значит, для $z = 2$ требовалось бы нарисовать точки $(2; 0)$, $(2; 2/3)$ и $(2; 1)$.)

Таблица 3.30. Данные к задаче 89

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1 1	0 0
	D	0 0	z z

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1 1	0 0
	D	0 0	z 2

2. Прodelайте то же упражнение для игры, изображенной в Таблице 3.30 справа.

Задача 90 [30] Начальник отдела планирует повысить в должности одного из трех своих подчиненных. Для того чтобы решить, кто это будет, она устроила между ними соревнование. Она будет наблюдать их работу в течение месяца и выберет того, кто трудится наиболее усердно. В случае ничьей, она выберет одного из победителей случайным образом (с равными вероятностями). Каждый из подчиненных может выбрать либо нормальные усилия (N), либо повышенные (E). Повышение приносит полезность 10,

а отсутствие повышения — полезность 0. Издержки повышенных усилий равны 5, а обычных — 0. Выигрыш равен полезности за вычетом издержек.

1. Опишите данную ситуацию как игру в нормальной форме.
2. Найти все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найти все симметричные равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 91 Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, побеждает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, побеждает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, побеждает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает 1, проигравший получает -1 . Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает 0. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 92 Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получают выигрыш 1, а красные — -2 . Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 93 [30] Агентство по защите окружающей среды знает, что фирма собирается осуществить выброс загрязнителя в реку в один из n дней. Чтобы фирма была признана виновной, требуется, чтобы на реке находился инспектор агентства и наблюдал факт загрязнения. К сожалению, ресурсы агентства ограничены, и оно может позволить себе наличие инспектора на реке только в течении одного из n дней. Агентство принимает решение, не зная точно выбора фирмы (в какой из n дней она будет загрязнять реку). Выигрыш фирмы равен -1 , если ее уличат и 1, если не уличат. Выигрыши агентства при тех же исходах равны 1 и -1 .

1. Каким будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях при $n = 2$?
2. Догадайтесь, каким будет равновесие при произвольном n . Убедитесь, что это действительно будет равновесие. Как равновесные выигрыши фирмы и агентства меняются в зависимости от n ?

Динамические игры с полной и совершенной информацией

Понятие динамических игр с совершенной информацией. Не заслуживающие доверия угрозы и обещания. Свертывание игры (обратная индукция). Связь развернутой и нормальной форм. Подыгры. Совершенные в подыграх равновесия. Некооперативный торг.

4.1. Введение

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и принимают решения, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, отдельный игрок может располагать информацией о решениях, которые уже приняты другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (очередность ходов).

Динамические игры моделируют взаимодействия, развивающиеся во времени. Динамической будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее

и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Особый тип игры — это динамическая игра с совершенной информацией. Под игрой с совершенной информацией понимают такую игру, в которой игроки знают все предыдущие действия (предпринятые ими самими или другими игроками) и результаты случайных ходов природы, так что когда игрок должен принять решение, он обладает полной информацией о том, в какой игровой ситуации он находится. Примером динамической игры с совершенной информацией являются шахматы.

Можно ли считать динамической игрой с совершенной информацией шахматы, если то, кто из игроков играет белыми, определяется жребием?



Можно ли считать динамической игрой с совершенной информацией такие карточные игры как бридж или покер?



(Напомним, что игра с полной информацией — это такая игра, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков. Мы продолжаем рассматривать именно такие игры.)

4.2. Динамические игры, полученные на основе статических

Чтобы увидеть различие между динамическими и статическими играми, можно рассмотреть динамическую игру, полученную из статической игры двух лиц. В этой динамической игре возможные действия и выигрыши такие же, как и в исходной статической игре, но один из игроков делает ход раньше другого.

Рассмотрим, например, Игру 9 «Выбор компьютера» при $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ (Таблица 4.1). Это случай, когда оба игрока сильно ценят совместимость компьютеров. Оптимальные отклики показаны подчеркиванием. Если игра статическая, то в ней существует два равновесия, в каждом из которых компьютеры совместимы. Что будет если игроки ходят по очереди?

Предположим, что Игрок 1 имеет возможность принять решение первым и сообщить о нем Игроку 2. При этом можно предсказать как поступит Игрок 2 — он выберет компьютер того же типа, что и Игрок 1, поскольку ценит совместимость. Это оптимальный отклик Игрока 2. Зная этот отклик,

Таблица 4.1. Игра 9 при $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

		Игрок 2		
		IBM	Mac	
Игрок 1	IBM	<u>5</u> <u>3</u> 2	1	5 \leftarrow
	Mac	0 0	<u>3</u> <u>4</u>	3

Игрок 1, может спланировать свои действия оптимальным образом. Ему выгодно выбрать компьютер любимого типа (т. е. IBM), поскольку при этом выигрыш будет выше ($5 > 3$). Таким образом, должен реализоваться исход (IBM, IBM). В этой игре игрок, который имеет возможность сделать выбор первым, получает преимущество.

Проанализируйте динамический вариант Игры 25 «Chicken». Получает ли в этой игре преимущество тот игрок, который ходит первым?



Рассмотрим теперь Игру 9 «Выбор компьютера» при $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ (Таблица 4.2).

Таблица 4.2. Игра 9 при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

		Игрок 2		
		IBM	Mac	
Игрок 1	IBM	3 <u>2</u>	1 <u>2</u>	3 или 1
	Mac	0 0	2 <u>4</u>	2

Здесь решение неоднозначно, так как оптимальный отклик Игрока 2 неоднозначен.

(Потенциально Игрок 2 за счет общения до игры может угрожать Игроку 1. Это угроза может заслуживать доверия, поскольку Игроку 2 все равно. Это отличается от не заслуживающих доверия угроз в играх, которые мы рассмотрим в дальнейшем.)

Проанализируйте динамический вариант Игры 19, в котором один из игроков делает выбор первым. Что поменяется по сравнению со статической игрой?



Проведите анализ Игры 24, предполагая, что Бар 1 выбирает свою цену первым.

Проведите такой же анализ, предполагая, что первым выбирает свою цену Бар 2.



4.3. Пример динамической игры с совершенной информацией

Приведем теперь пример игры, которая с самого начала задана как динамическая.

Игра 34 (Зáмок на острове): [17] Игрок 1 — это предводитель викингов, пытающийся захватить замок, который располагается на острове посреди моря. Войско Игрока 1 приплыло к острову на корабле. Игрок 2 — это хозяин замка. Игрок 2 может либо обороняться, либо капитулировать. Если Игрок 2 примет решение обороняться, то Игрок 1 может либо атаковать замок, либо уплыть с острова. Известно, что если Игрок 1 атакует, то он займет замок. Правда, в этом случае он потеряет значительную часть своего войска, так что ему выгоднее уплыть с острова. Кроме того известно, что если бы игрок Игрок 2 точно знал, что Игрок 1 атакует, то ему выгоднее было бы капитулировать, чем обороняться. ☺

Здесь дано (не совсем полное) описание развернутой формы игры. Как уже обсуждалось ранее, такую игру удобно представить в виде дерева. На Рис. 4.1 показано дерево данной игры с некоторыми условными выигрышами, которые удовлетворяют приведенному описанию.

Изобразите динамические игры из параграфа 4.2 в виде деревьев.



Это игра с совершенной информацией, поскольку Игрок 1, делая выбор, знает предыдущую историю игры, то есть то, какой выбор сделал Игрок 2. Если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, Игрок 1 знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

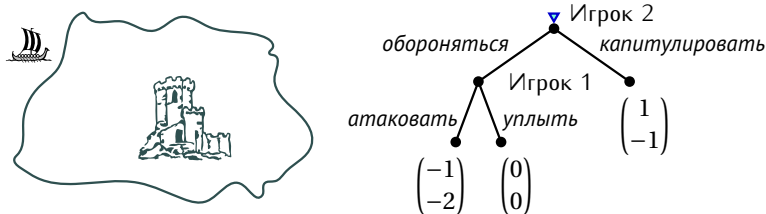


Рис. 4.1. Дерево Игры 34

Проанализируем данную игру. Если бы Игрок 2 верил, что Игрок 1 атакует, то он бы капитулировал, и Игрок 1 взял бы замок без боя. Однако Игрок 2 должен осознавать, что если он будет обороняться, то Игрок 1 предпочтет уплыть. Таким образом, Игрок 2 не капитулирует, а Игрок 1 уплывет ни с чем.

4.4. Не заслуживающие доверия угрозы и обещания

Игра 35 («Просьба о повышении зарплаты»): [17] Клерк хочет добиться, чтобы его месячную зарплату повысили на \$500. Однако, фирма, в которой он работает, любит экономить на зарплате работников, так что прибавку дадут только если клерк каким-то образом сумеет убедить своего босса, что тому выгодно это сделать. По крайней мере, фирма должна проиграть от ухода клерка не менее \$500. Если он действительно настолько ценный работник, то у клерка есть шанс получить прибавку, если ему удастся убедить босса, что он уйдет с работы, если не получит желаемого. ☉

На Рис. 4.2 показано дерево описанной игры. Игра начинается в вершине А, где клерк просит о повышении зарплаты. Тогда в вершине В босс выбирает, согласиться на это повышение или нет. Если он согласится, то игра переходит в вершину С, где клерк либо остается на своей работе, либо уходит. Таким образом, в этой игре есть три возможных исхода.

Если клерк просто скажет боссу, что он уйдет, если ему не повысят зарплату, то босс может не поверить такой угрозе. Чтобы босс воспринял угрозу уйти серьезно, он должен увидеть, что клерку выгодней уйти, если ему не дадут прибавку. Лучший способ сделать угрозу заслуживающей доверия — доказать боссу, что другая фирма готова платить на \$500 в месяц больше. (Конечно, если клерк и в самом деле найдет другую фирму, в которой ему будут платить больше, то можно воспользоваться этой возможностью сразу.)

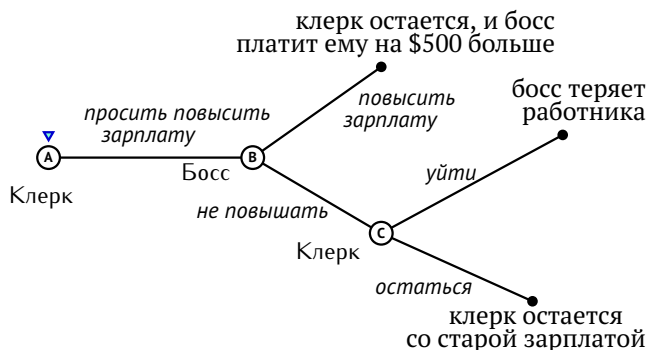


Рис. 4.2. Дерево игры «Просьба о повышении зарплаты»

Другой способ для клерка получить прибавку к зарплате заключается в том, чтобы сообщить каждому в фирме, что он непременно уйдет, если не получит желаемого. Клерк должен сделать так, чтобы ему было невыносимо стыдно остаться на работе в случае, если ему откажут в прибавке. Тем самым он лишит себя свободы действий — он вынужден будет уйти, если не получит прибавку. Поняв это, босс даст свое согласие.

Очевидно, что босс удовлетворит просьбу клерка, только если он будет знать, что в вершине C тот предпочтет уйти. Значит, клерк должен сделать свою угрозу заслуживающей доверия. Это можно осуществить либо за счет высокого выигрыша в случае ухода, или низкого выигрыша, если он останется, при том что просьба о повышении зарплаты не будет удовлетворена. Интересно, что если клерк получит свою прибавку, то игра никогда не попадет в вершину C. В то же время, причиной победы клерка будет осознание боссом того, как тому выгоднее поступить в вершине C. Часто исход игры определяется тем, что *могло бы случиться*, но не случилось.

Вернемся к рассмотренной ранее Игре 34. Если бы Игрок 1 обещал атаковать замок, то Игроку 2 не стоило бы верить. Это тоже не заслуживающая доверия угроза. Однако мы можем рассмотреть более сложную игру, в которой Игрок 1 все же захватит замок.

Игра 36 (Замок-2): Предположим, что ситуация такая же, как и в Игре 34, но до того как примет решение Игрок 2, Игрок 1 может сжечь корабль, на котором приплыл. Если корабля не будет, то можно будет соорудить новый корабль, только если захватить замок. Таким образом, если Игрок 1 сожжет корабль, то у него не будет другого выхода кроме как атаковать. ©

Если Игрок 1 не станет сжигать корабль, то повторится Игра 34, если же Игрок 1 сожжет корабль, то ситуация будет отличаться от Игры 34 только тем, что у Игрока 1 будет меньше выбора — он не сможет уплыть. Дерево этой модифицированной игры изображено на Рис. 4.3.

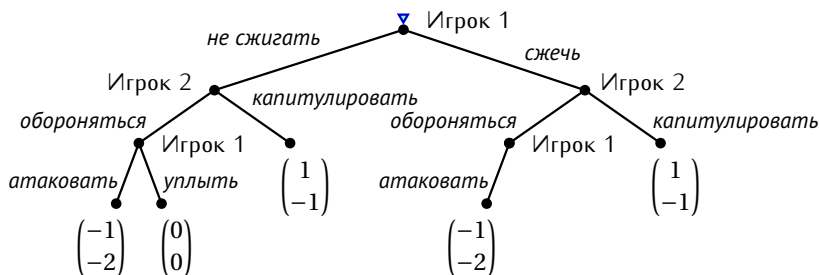


Рис. 4.3. Дерево Игры 36

Потеря корабля заставит Игрока 1 атаковать. Игрок 2 тогда поймет, что Игрок 1 не отступится, и ему выгоднее будет капитулировать. Таким образом, Игроку 1 следует сжечь корабль.

Принято считать, что иметь более широкий выбор — это хорошо. Однако в рассматриваемом случае это не так. Уничтожая корабль, Игрок 1 ограничивает свой выбор, но именно это позволяет ему одержать бескровную победу.

Рассмотрим теперь на примере другой игры не заслуживающие доверия посулы.

Игра 37 («Король и рыцарь»): В некотором королевстве поселился дракон, который опустошает окрестности и пожирает жителей. Король обещает прославленному рыцарю, что отдаст тому половину королевства, если он убьет дракона. Сначала должен принять решение рыцарь. Если он решит сражаться, то точно победит дракона. После того, как дракон побежден, король решает, отдать ли рыцарю полкоролевства. ©

Игра с подходящими под описаниями выигрышами изображена в виде дерева на Рис. 4.4. Очевидно, что как только дракон побежден, то королю не выгодно выполнять свое обещание. Рыцарь может понять, что король не отдаст полкоролевства и откажется сражаться. Такая ситуация не выгодна как рыцарю, так и королю ($0 < 1$ и $-1 < 1$), т. е. исход («сражаться», «отдать полкоролевства») доминирует по Парето исход «не сражаться». Королю выгодно каким-то образом дать понять рыцарю, что он не может не сдержать

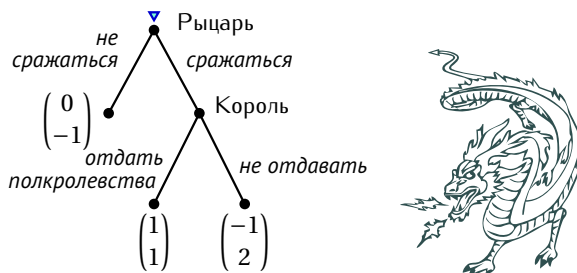


Рис. 4.4. Дерево Игры 37

обещание. Например, может быть, в этой сказочной ситуации есть какая-то страшная клятва, дав которую, король уже будет вынужден выполнить то, что обещал. Эта игра представляет собой еще один пример того, как игрок, лишая себя свободы действий в будущем, получает более высокий выигрыш.

Модифицируйте дерево игры, показанное на Рис. 4.4, включив в игру возможность дать клятву.



4.5. Свертывание игры (обратная индукция)

Решение игры можно найти в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеизвестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом обратной индукции. В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. По сути дела, мы уже пользовались обратной индукцией, анализируя предыдущие игры в этой главе. Рассмотрим еще одну игру, несколько более обширную и подробно объясним, как пользоваться обратной индукцией.

Игра 38: Два школьника, А и В, играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из N камней, берет по очереди один или два камня. Первым ходит А. Игрок, взявший последний камень, проигрывает. ○

На Рис. 4.5(а) изображено дерево этой игры при $N = 4$. Проведем анализ этой игры при $N = 4$, используя обратную индукцию. У игроков в вершинах A_3 , A_4 и B_3 нет выбора, поскольку действие только одно. Эти верши-

ны можно сделать конечными, сопоставив им соответствующие выигрыши. Если осталось два камня, то выгоднее взять один камень, а не два. Это относится к выбору игрока А в вершине A_2 и к выбору игрока В в вершине B_2 . Игру можно свернуть, сопоставив вершине A_2 выигрыши $(1; -1)$, а вершине B_2 — выигрыши $(-1; 1)$. В результате получится дерево, показанное на Рис. 4.5(b).

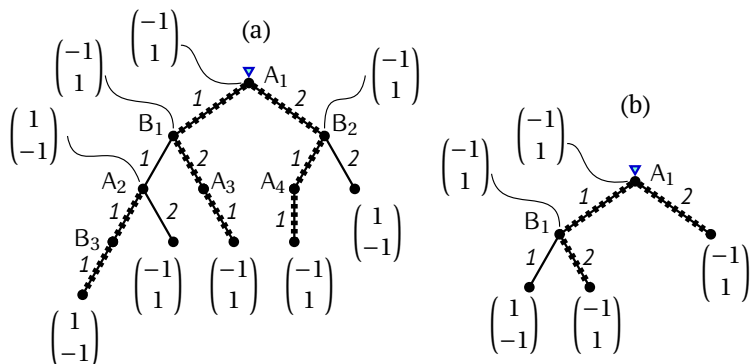


Рис. 4.5. (a) Дерево Игры 38 при $N = 4$. (b) То же дерево после частичного сворачивания

В вершине B_1 игроку В выгоднее взять два камня. В вершине A_1 игроку А все равно, сколько камней брать, один или два, так как в любом случае он проиграет.

Изобразите дерево Игры 38 при $N = 5$. Найдите решение обратной индукцией.

С помощью обратной индукцией найдите решение Игры 38 при произвольном N .

В Игре 38 и ранее рассмотренных в этой главе играх обратная индукция всегда «работала», всегда давала решение. Это общее свойство конечных динамических игр (т. е. игр, дерево которых имеет конечное число вершин и конечное число ветвей).

В конечной динамической игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.

Изобразите графически обратную индукцию на дереве Игры 36 (Рис. 4.3).

?

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока, и игра происходит в 2 этапа, то обратную индукцию бывает удобно провести на основе функции отклика второго игрока на действия первого. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема для игры с непрерывными стратегиями.

Игра 39 («Рэкет»¹): Рэкетеры выбирают, какую долю α ($\alpha \in [0; 1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где p — цена, y — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1 - \alpha) p y - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geq 0$. Рэкетеры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. \odot

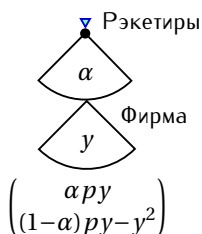


Рис. 4.6. Игра «Рэкет»

На Рис. 4.6 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал $[0; 1] \in \mathbb{R}$), то на рисунке они изображены в виде секторов. При этом из каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору α , начинается некий сектор, соответствующий выбору

¹ Можно интерпретировать игру несколько по другому: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

y . На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

Рэкетеры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприруемой доли выручки этой фирмы. Для того, чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыль по y при заданном α . Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1 - \alpha)p - 2y = 0.$$

Если $\alpha < 1$, то $y > 0$. Поскольку функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т. е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha = 1$ получаем решение $y = 0$. Таким образом, рэкетеры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли α :

$$y(\alpha) = \frac{(1 - \alpha)p}{2}.$$

Зная эту функцию отклика, рэкетеры максимизируют свою целевую функцию², т. е. решают следующую задачу

$$\alpha p y(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha \in [0;1]}$$

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2} \cdot (1 - \alpha)\alpha \rightarrow \max_{\alpha \in [0;1]}.$$

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, то есть рэкетеры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. 4.7.

Существуют динамические игры, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единствен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рис. 4.8 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: (L_1, R_2) и (L_2, R_1) .

²В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

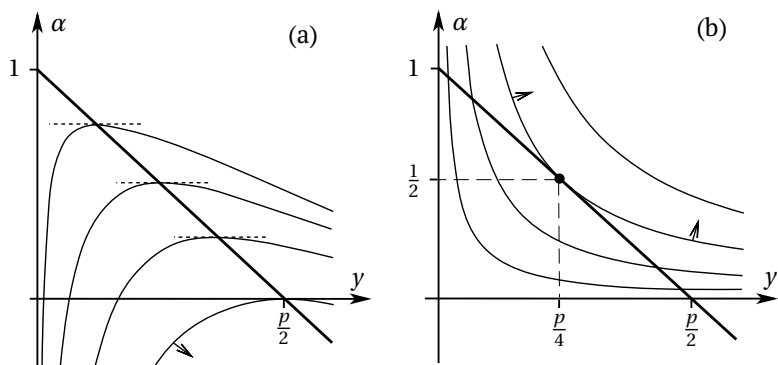


Рис. 4.7. (а) Получение функции отклика фирмы; (б) выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.

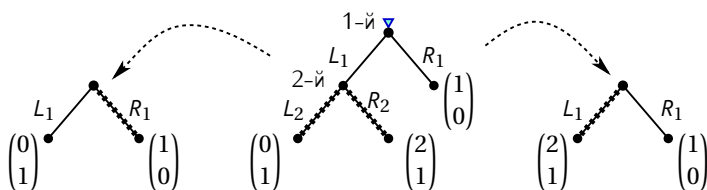


Рис. 4.8. Разветвление решения при использовании обратной индукции

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначности при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

Если в конечной динамической игре с совершенной информацией, не содержащей случайные ходы природы, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то алгоритм обратной индукции дает ровно одно решение.

Рассмотрим обратную индукцию в игре, включающей ходы природы. Это игра с совершенной информацией, и результаты ходов природы становятся известными после того, как ход сделан. В тех вершинах, где ход принадлежит обычному игроку, надо сравнивать выигрыши этого игрока при всех возможных его действиях. В тех вершинах, где ход делает природа, надо рассчитывать ожидаемые выигрыши игроков.

Игра 40 («Дуэль»): Три гусара, Василий, Григорий и Денис, решили устроить дуэль по нестандартным правилам. Гусары становятся по вершинам равностороннего треугольника и каждый может сделать один выстрел в одного из противников. Очередность выстрелов устанавливается жребием. На выбранном расстоянии Василий промахивается в половине случаев, Григорий — в одном случае из пяти, а Денис всегда попадает. Если застрелить Василия, то это принесет 1 очко, Григория — 2 очка, а Дениса — 3 очка. Если гусар никого не застрелит, то получит 0 очков. Если гусара самого застрелят, то его выигрыш становится на 2 очка меньше. \odot

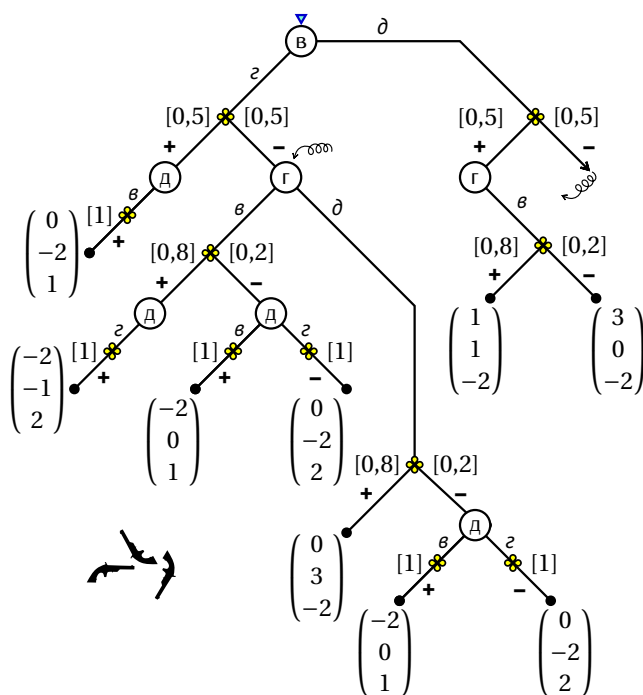


Рис. 4.9. Дуэль

Пусть, например, в соответствии со жребием установлена следующая очередность выстрелов: Василий, потом Григорий, потом Денис. Изобразим эту игру в виде дерева (см. Рис. 4.9). Спиралью со стрелкой для экономии места указана ветвь дерева, которая повторяется. Если Василий не

попадет в Дениса, то ситуация окажется точно такой, как если бы он не попал в Григория.

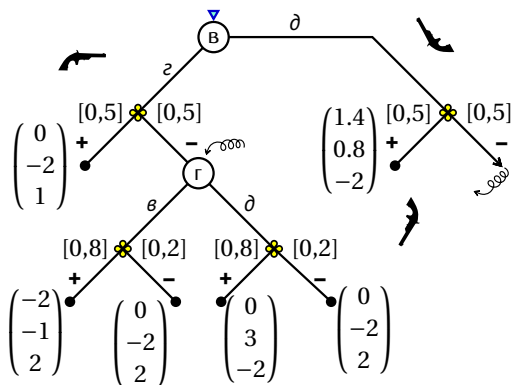


Рис. 4.10. Дуэль, свернутое дерево игры

Свернем частично эту игру, рассмотрев мотивацию Дениса. Денису всегда, когда есть выбор, выгоднее стрелять в Григория, чем в Василия, поскольку это приносит больше очков. Можно также свернуть ветвь, относящуюся к ситуации, когда Василий попадет в Дениса. Григорий, стреляя в Василия попадет в 80% случаев и промахнется в 20% случаев. Ожидаемые выигрыши игроков в этом случае составят $0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 3 = 1,4$ для Василия, $0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 = 0,8$ для Григория и -2 для Дениса. Получим дерево игры, изображенное на Рис. 4.10.

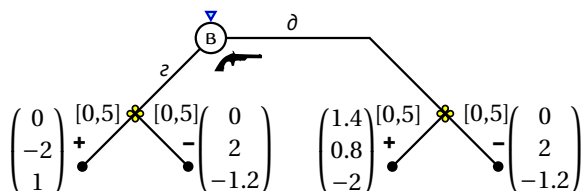


Рис. 4.11. Дуэль, выбор Василия

Далее рассмотрим выбор Григория в случае промаха Василия. Если он выстрелит в Василия, то его ожидаемый выигрыш составит $0,8 \cdot (-1) + 0,2 \cdot (-2) = -1,2$, а если в Дениса, то $0,8 \cdot 3 + 0,2 \cdot (-2) = 2$, т. е. он выстрелит в Де-

ниса. Ожидаемые выигрыши игроков будут в этом случае равны $(0,2, -1,2)$. Эти рассуждения относятся и к левой части дерева (после того, как Василий выстрелит в Григория) и к правой (после того, как Василий выстрелит в Дениса). В результате, в качестве дерева свернутой игры получаем дерево решений для Василия (см. Рис. 4.11).

Выстрелив в Григория, Василий получит нулевой ожидаемый выигрыш. Выстрелив в Дениса, он получит ожидаемый выигрыш $0,5 \cdot 1,4 + 0,5 \cdot 0 = 0,7$. Таким образом, Василий выстрелит в Дениса. Ожидаемый выигрыш от игры составит 0,7 для Василия, 1,4 для Григория и $-1,6$ для Дениса. Несколько парадоксально, но лучше всех стреляющий Денис оказывается в этой игре в самом невыгодном положении.

Разберите, пользуясь приведенным образцом, остальные пять случаев очередности выстрелов в игре «Дуэль». Какая очередность наиболее выгодна для Василия?



Что, если в игре «Дуэль» гусары будут стрелять по очереди друг в друга до тех пор, пока в живых не останется только один гусар? (Это сложный вопрос!)



4.6. Нормальная форма динамической игры. Совершенное в подыграх равновесие

4.6.1. Нормальная форма динамической игры

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции. Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же как мы применяли ее к статическим играм.

Для того чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной (стратегической) форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания

- * множества игроков,
- * множества стратегий каждого игрока,
- * функции выигрыша каждого игрока на множестве возможных профилей стратегий.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

Как уже обсуждалось, в игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока, который предусматривает, что игрок будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, то есть в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину.

Стратегия — это настолько полный план действий, что доверенное лицо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока. Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить себе следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы и производит случайные ходы природы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину и реализуется определенный исход, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этому исходу. При такой интерпретации мы, по сути дела, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью описанного только что алгоритма.

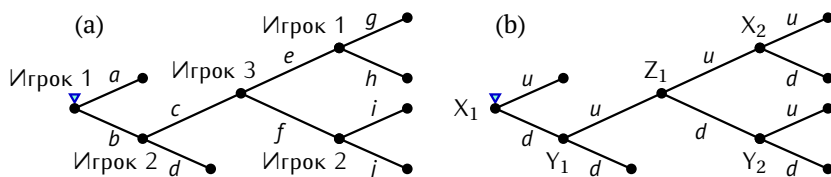


Рис. 4.12. Два дерева игры

Рассмотрим, что такое стратегия на примере динамической игры, изображенной на Рис. 4.12(a). Игрок 1 в этой игре принимает решения в двух вершинах, в каждой из которых выбирает из двух действий. Таким образом, всего Игрок 1 имеет $2 \times 2 = 4$ стратегии, которые можно обозначить следующим образом (a, g) , (a, h) , (b, g) и (b, h) . Более кратко можем записать ag , ah , bg , bh . Аналогично, у Игрока 2 имеется четыре стратегии: ci , cj , di , dj . Игрок 3 принимает решение только в одной вершине и имеет всего две стратегии: e и f .

Если Игрок 1 выберет a , то он уже не будет выбирать между g и h . Таким образом, определение стратегии в определенном смысле избыточно. То же верно для стратегии Игрока 2. Можно избавиться от этой избыточности, взяв в качестве стратегий Игрока 1 a , bg и bh , а в качестве стратегий Игрока 2 — d , ci и cj .

Часто при записи стратегий в играх с конечным числом вершин удобно бывает присвоить каждой вершине однозначную метку (можно просто номер) и обозначать стратегии при помощи этих меток. Например, в игре, дерево которой показано на Рис. 4.12(b), имеется три игрока, X , Y и Z . (По структуре это дерево в точности такое же, как на Рис. 4.12(a).) Вершины обозначены названием игрока с нижним индексом. Хотя в данном примере действия в разных вершинах имеют одинаковые названия, но неоднозначностей не возникает. У игрока X имеются стратегии $(X_1:u, X_2:u)$, $(X_1:u, X_2:d)$, $(X_1:d, X_2:u)$, $(X_1:d, X_2:d)$. У игрока Y имеются стратегии $(Y_1:u, Y_2:u)$, $(Y_1:u, Y_2:d)$, $(Y_1:d, Y_2:u)$, $(Y_1:d, Y_2:d)$. Две стратегии игрока Z можно обозначить просто u и d или несколько более громоздко $Z_1:d$ и $Z_1:u$.

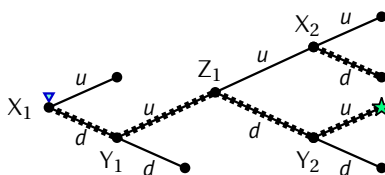


Рис. 4.13. Конечная вершина, соответствующая стратегиям $(X_1:d, X_2:d)$, $(Y_1:u, Y_2:u)$ и $Z_1:d$

На Рис. 4.13 отмечены ветви, соответствующие следующему профилю стратегий трех игроков: $(X_1:d, X_2:d)$, $(Y_1:u, Y_2:u)$ и $Z_1:d$. Видно, что данный профиль стратегий задает однозначно траекторию игры. Траектория идет из начальной вершины по отмеченным ветвям дерева, следующим друг за другом. Та конечная вершина, в которую приводит траектория игры, отмечена звездочкой. По описанной схеме мы можем каждому профилю стратегий сопоставить одну из конечных вершин, исход игры и вектор выигрышей.

Теперь мы разберем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 9 «Выбор компьютера» (с. 62). Предположим, что первый игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рис. 4.14.

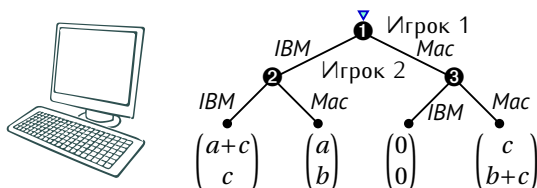


Рис. 4.14. Динамический вариант игры «Выбор компьютера»

Вершины на дереве пронумерованы для удобства обозначения стратегий. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с действиями в вершине **1**. Эти стратегии можно обозначить **1 IBM** и **1 Mac**. Игрок 2 имеет $2 \times 2 = 4$ стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: **2** и **3**. Таким образом, второй игрок имеет следующие стратегии: (**2 IBM**, **3 IBM**), (**2 IBM**, **3 Mac**), (**2 Mac**, **3 IBM**), (**2 Mac**, **3 Mac**). План, соответствующий, например, второй из указанных стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: я выберу IBM, если первый игрок выберет IBM и Mac, если первый игрок выберет Mac.

Таблица 4.3. Нормальная форма динамического варианта игры «Выбор компьютера»

		Игрок 2			
		2 IBM	2 IBM	2 Mac	2 Mac
		3 IBM	3 Mac	3 IBM	3 Mac
Игрок 1	1 IBM	$\frac{a+c}{c}$	$\frac{a+c}{c}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$
	1 Mac	$\frac{0}{0}$	$\frac{b+c}{c}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{b+c}{c}$

В Таблице 4.3 представлена та же игра в нормальной форме. Способ заполнения матрицы следующий. Если, к примеру, первый игрок выберет стратегию **1 Mac**, а второй — стратегию (**2 Mac**, **3 IBM**), то первый игрок выберет Mac, а второй, видя это, в соответствии со своей стратегией выберет IBM (его стратегия предусматривает выбор IBM в ответ на Mac). Данному профилю стратегий соответствуют выигрыши (0;0).

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу 2.1). В игре с тремя типами компьютеров у второго игрока было

бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков бесконечное множество стратегий.

4.6.2. Равновесие Нэша и совершенное в подыграх равновесие Нэша

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Рассмотрим, какие решения дает концепция равновесия Нэша в динамических играх на примере динамического варианта Игры 9 «Выбор компьютера». Возьмем содержательно наиболее интересный случай, когда $a < c$ и $b < c$ (оба игрока сильно ценят совместимость).

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что второй игрок в вершине ② (см. Рис. 4.14) выберет IBM, поскольку $c < b$ (он совместимость ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ③ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В «свернутой» игре первый игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и c (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

первый — ① IBM,
второй — (② IBM, ③ Mac).

В Таблице 4.3 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть три равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т. е. решение, полученное методом обратной индукции в игре с совершенной информацией³, всегда является равновесием по Нэшу.

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ① Mac и (② Mac, ③ Mac) (Рис. 4.14, с. 183). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: второй игрок угрожает первому игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы первый игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции.

³И конечным числом ходов.

Действительно, если второй игрок окажется в точке ②, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку первый игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие, ① IBM и (② IBM, ③ IBM), не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности (второму игроку не имеет никакого смысла выбирать IBM в ответ на выбор Мас первым игроком).

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, не совместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания.

- * При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и информации, доступной игрокам на каждом ходе⁴.
- * Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, включает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр, вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления⁵.

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться невыгодно игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки зрения естественным представляется требование динамической согласованности.

Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.

⁴В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

⁵По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют *refinement* — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов подобного уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют подыгрой. (Это определение подходит только для игр с совершенной информацией, которые мы сейчас рассматриваем.) Подыгра игры с совершенной информацией в развернутой форме, — это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит одна из вершин исходной игры (кроме конечных). В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

Согласно приведенному определению, исходная игра является подыгрой самой себя. Иногда требуется отличать подыгру, которая не совпадает с игрой в целом. Собственная (истинная) подыгра — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры.

В рассматриваемой игре есть три подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ② и ③.

Подсчитайте количество подыгр в Игре 36 и в Игре 38 при $N = 4$.



Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

Совершенным в подыграх равновесием⁶ называется профиль стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого профиля являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры.

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. 4.14 на с. 183). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ② в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ② IBM и ② Mac. Матрица игры представлена в Таблице 4.4.

Таблица 4.4. Одна из подыгр в динамической игре «Выбор компьютера»

		Игрок 2	
		② IBM	② Mac
Игрок 1	②	$a + c$	a
	③	c	b

⁶Концепцию совершенного в подыграх равновесия предложил Рейнхард Зельтен в статье 1965 года [26].

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем второй игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ② выбор IBM. Набор стратегий ① Мас и (② Мас, ③ Мас) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ③, в равновесии Нэша второй игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ① IBM и (② IBM, ③ IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ① IBM и (② IBM, ③ Мас) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным.

В игре с совершенной информацией (с конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукции, является равновесием по Нэшу.

Поскольку решение по обратной индукции по смыслу является решением по обратной индукции в каждой подыгре, то следовательно любое решение по обратной индукции является совершенным в подыграх равновесием. Обратное тоже верно: любое совершенное в подыграх равновесие является решением по обратной индукции.

В игре с совершенной информацией (с конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование указанного свойства позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равновесий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней α , т. е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу по существу включает максимизацию по всем возможным функциям $y(\cdot)$. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по край-

ней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует некоторое определенное решение, известен уже давно⁷, однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с применением компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень реалистичным предсказанием результата игры, если игра достаточно сложна.

4.7. Некооперативный торг

Теперь мы рассмотрим важный класс некооперативных игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые игры торга.

Выше мы уже рассматривали проблему торга с точки зрения теории кооперативных игр. В теории кооперативных игр переговоры между игроками остаются за кадром и не входят в описание игры. Из-за этого оказывается, что либо предсказываемый исход существенно неоднозначен, либо исход предсказывается на основе не вполне убедительных априорных предположений.

Теперь мы рассмотрим торг с точки зрения некооперативной теории игр. При этом переговорный процесс моделируется в явном виде. В явном виде указываются возможные действия игроков на каждом этапе переговорного процесса.

Игра 41 («Торг»⁸): Два игрока (A и B) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно 1. Дележ можно задать долей $x \in [0; 1]$ достающейся игроку A . Если игрок A получает x , то игрок B , соответственно, получает $1 - x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ x_j , где j — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j, 1 - x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок A предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок B — в раундах с четными номерами. Если за n раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает 0.

⁷Эрнст Цермело доказал в начале XX века, что либо белые могут обеспечить себе выигрыш (как бы ни играли черные), либо они не могут обеспечить себе выигрыш, но могут обеспечить ничью, либо черные могут обеспечить себе выигрыш.

⁸См. [24].

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается на дисконтирующий множитель, то есть если игроки договорятся на j -м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1} x_j$ и $\delta_B^{j-1} (1 - x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0, 1)$ — дисконтирующие множители. \odot

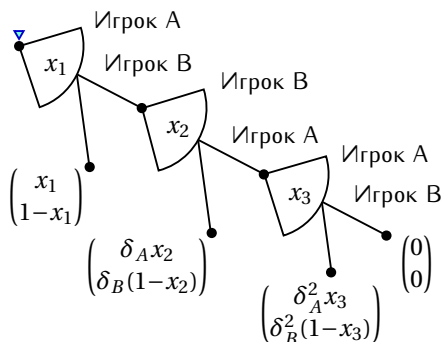


Рис. 4.15. Торг, три раунда

Рассмотрим эту игру при $n = 3$. На Рис. 4.15 показано дерево игры. Проанализируем эту игру, используя обратную индукцию. В последнем раунде игрок В заведомо примет предложение игрока А, если $\delta_B^2 (1 - x_3) > 0$, т. е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку В все равно, принять или отклонить предложение. Игроку А выгодно назвать x_3 как можно большим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок А тогда мог бы немного увеличить x_3 , не изменив выбора игрока В, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок В должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к А, то есть принять его предложение; в противном случае игрок А мог бы предложить x_3 меньше 1 и увеличить при этом свой выигрыш.

Анализ третьего раунда показывает, что игрок А должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок В должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив третий раунд на конечную вершину с выигрышами δ_A^2 и 0.

Во втором раунде игрок А выбирает между δ_A^2 (если отклоняет предложение) и $\delta_A x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку А все равно, какой выбор сделать. Игрок В предпочтет получить выигрыш

$\delta_B(1 - x_2)$, а не 0, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок B в этом случае может уменьшить x_2 , не меняя выбора игрока A , и, тем самым, увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок A принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получают δ_A^2 и $\delta_B(1 - \delta_A)$, если не придут к соглашению (см. Рис. 4.16). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок B примет дележ $x_1 = 1 - \delta_B(1 - \delta_A)$, предложенный игроком A . Выигрыши при этом составят $1 - \delta_B(1 - \delta_A)$ и $\delta_B(1 - \delta_A)$.

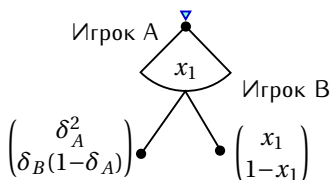


Рис. 4.16. Свернутая игра «Торг», первый раунд

Об описанном торге с поочередными предложениями в условиях полной информации можно сделать два замечания:

- * торг заканчивается на первом раунде;
- * равновесный исход Паретооптимален.

Рис. 4.17 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n = 3$. На этом графике видно, как изменяется граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен толстой кривой, выходящей из начала координат.

Задачи

Задача 94 [10] В игре, изображенной на Рис. 4.18, профсоюз ведет переговоры с фирмой по поводу повышения заработной платы работникам фирмы. Профсоюз должен решить, потребовать ли большого или небольшого повышения заработной платы. Известно, что фирма точно согласится на небольшое повышение, но в случае требования большого повышения может отказаться. Если фирма не согласится, то за этим последует забастовка.

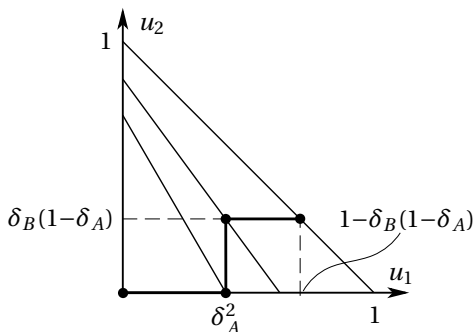


Рис. 4.17. Равновесие в игре «Торг»

ка, которая связана с потерями для обеих сторон (общий выигрыш ниже, чем мог бы быть). Результирующие выигрыши указаны на Рис. 4.18 (сначала выигрыш профсоюза, а затем — фирмы).

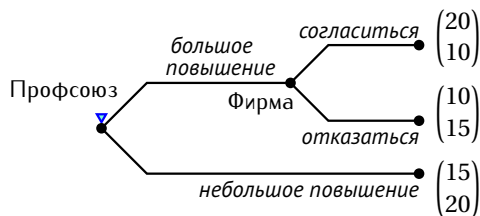


Рис. 4.18. Дерево игры для задачи 94

1. Запишите игру в нормальной (стратегической) форме и найдите равновесие Нэша.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие Нэша.
3. Если выигрыш фирмы при отказе от большого повышения будет равен 5, а не 15, то поменяется ли совершенное в подыграх равновесие Нэша?

Задача 95 Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы в Таблице 4.5, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

Таблица 4.5. Данные к задаче 95

		Жена	
		дома	у друзей
Муж	дома	a b	0 c
	у друзей	d 0	d c

Задача 96 [40] Традиционным вопросом теории отраслевых рынков является вопрос о том, может ли действующий в отрасли монополист сохранить свою позицию, угрожая начать ценовую войну с конкурирующей фирмой, которая войдет на этот рынок. Чтобы проанализировать этот вопрос, рассмотрите следующую ситуацию. Имеется два игрока, конкурент и действующий монополист. Конкурент решает, войти или не входить. Если конкурент входит, что монополист может либо вступить в сговор с конкурентом (при этом цена остается монопольной), либо бороться, установив очень низкую цену. Прибыль при монопольной цене равна 100, а в условиях ценовой войны нулевая. Издержки входа в отрасль для конкурента равны 10. При сговоре прибыль делится поровну между фирмами.

1. Изобразите описанную игру в виде дерева.
2. Найдите равновесия Нэша (в чистых стратегиях). Какие из них получаются при помощи обратной индукции? Какие из них являются совершенными в подыграх? Объясните, в каком смысле другое равновесие представляет собой «не заслуживающую доверия угрозу».

Задача 97 Мать просит своего непослушного ребенка вести себя хорошо. Она обещает, что в случае хорошего поведения даст ребенку конфету. Однако мать мягкосердечна и даже если ребенок вел себя плохо, она предпочитает дать ему конфету.

1. Исходя из того, что ребенок достаточно разумен и может мыслить стратегически, задайте некоторые подходящие выигрыши и запишите игру в развернутой форме.
2. Найдите равновесие по обратной индукции.
3. Запишите игру в нормальной форме и найдите в ней все равновесия Нэша. Какие из равновесий являются совершенными в подыграх.
4. Пусть ситуация повторяется несколько (конечное число) раз. Продолжая исходить из того, что ребенок достаточно разумен, найдите ре-

шение с помощью обратной индукции. Появляется ли у матери стимул не давать ребенку конфету, чтобы в следующий раз он вел себя хорошо?

Задача 98 [37] Рассмотрите конкуренцию между компаниями Airbus и Boeing, в связи с разработкой нового коммерческого реактивного самолета. Предположите, что компания Airbus отстала от Boeing и решает, войти ли на данный рынок.

Если компания Airbus решит не входить, то она заработает нулевую прибыль, а Boeing будет монополистом и заработает 1 млрд долл. прибыли. Если Airbus решит войти на рынок и разработать конкурирующий самолет, то компания Boeing должна решить, примириться ли с этим решением Airbus или начать ценовую войну. В случае мирной конкуренции каждая из фирм заработает 300 млн долл. прибыли. В случае ценовой войны, однако, каждую из фирм ждут убытки в размере 100 млн долл., поскольку цены упадут так сильно, что ни одна из фирм не сможет покрыть свои издержки на разработку самолета.

1. Изобразите эту игру в виде дерева. Используйте обратную индукцию, чтобы найти равновесие.
2. Будет ли компания Boeing не будет удовлетворена равновесным исходом? Какой бы исход она предпочла? Если Boeing будет угрожать, что в случае входа она начнет ценовую войну, то будет ли эта угроза заслуживать доверия? Объясните.
3. Что если Boeing делает первый ход? Будет ли в этом случае существовать проблема не заслуживающей доверия угрозы? Объясните.

Задача 99 Дополните дерево, изображенное на Рис. 4.19 выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. задачу 70 на с. 156).

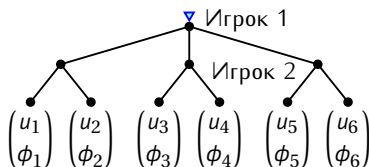


Рис. 4.19. Дерево игры для задачи 99

1. Запишите в получившуюся игру в нормальной форме и найдите все равновесия Нэша.
2. Найдите все совершенные в подыграх равновесия.

Задача 100 Путешественник пытается попасть из пункта *a* в пункт *e* (см. Рис. 4.20). Ему пытается помешать злой волшебник. За один раунд игры волшебник может заблокировать одну из дорог. Если дорога заблокирована, то она остается заблокированной до конца игры. В каждом раунде волшебник ходит первым. После хода волшебника путешественник может проехать из одного города в другой по одной из доступных дорог. Игра заканчивается, когда путешественник достигнет пункта *e* или же когда путешественник окажется в тупике.

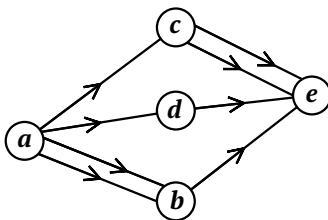


Рис. 4.20. Дорожная сеть для задачи 100

1. Изобразите эту игру в виде дерева и найдите решение с помощью обратной индукции. Кто выигрывает, путешественник или волшебник?
2. Решите ту же задачу в случае, если из пункта *c* в пункт *e* ведет только одна дорога.

Задача 101 [40] Четыре предмета, *K*, *L*, *M* и *N*, по-разному ценятся игроками 1 и 2. Ценность предметов для игроков показана в Таблице 4.6.

Таблица 4.6. Ценность разных предметов для двух игроков в задаче 101

	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>
Игрок 1:	1	2	3	4
Игрок 2:	2	3	4	1

Игрок 1 начинает, выбирая некоторый предмет. После этого игрок 2 выбирает предмет, потом игрок 1 берет еще один предмет, и, наконец, игрок 2 получает оставшийся предмет.

1. Нарисуйте дерево этой игры.
2. Подсчитайте, сколько стратегий имеет каждый из игроков.
3. Найдите совершенные в подыграх равновесия этой игры (в чистых стратегиях).
4. Найдите Парето-границу в этой игре. Какие из равновесий Парето-оптимальны?

Задача 102 [33] Вы и ваш однокурсник (оба нейтральные к риску и максимизирующие свою ожидаемую полезность) нашли на тротуаре две купюры по 100 руб. Ваш преподаватель сказал, что вы можете оставить деньги себе, если сможете договориться о том, как их поделить. Имеется три способа дележа: 200 руб. вам, 0 руб. однокурснику, 100 руб. каждому или же 0 руб. вам, 200 руб. однокурснику. Ваш преподаватель просит вас предложить дележ. Ваш однокурсник, зная, что вы предложили, должен сказать «да» или «нет». Если однокурсник скажет «да», то деньги будут поделены так, как вы предложили, если же он скажет «нет», то вы оба ничего не получите.

1. Изобразите дерево для этой игры, обозначив на нем игроков, ходы и выигрыши.
2. Найдите в этой игре решение с помощью обратной индукции.
3. Изобразите матрицу выигрышей для нормальной формы этой игры.
4. Примените к игре последовательное отбрасывание слабо доминируемых стратегий и найдите остаток.
5. Укажите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
6. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях.
7. Пусть в той же ситуации ваш преподаватель просит вас и однокурсника одновременно назвать свой вариант дележа. Если вы в сумме запросите не более 200 руб., то каждый получит сколько просил, в противном случае вы оба ничего не получите. Ответьте на те же вопросы.

Задача 103 [36] Для игры, дерево которой показано на Рис. 4.21, найдите

1. нормальную форму;
2. все равновесия в доминирующих стратегиях;
3. результат последовательного исключения слабо доминируемых стратегий;
4. все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях;

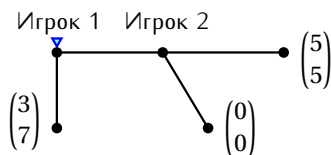


Рис. 4.21. Дерево игры для задачи 103

5. все совершенные в подыграх равновесия.

Задача 104 [36] Рассмотрите развернутую форму игры, изображенной на Рис. 4.22.

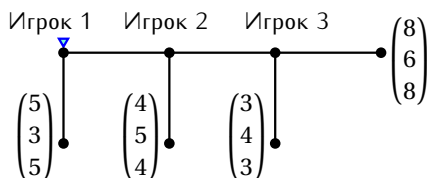


Рис. 4.22. Дерево игры для задачи 104

1. Найдите все совершенные в подыграх равновесия.
2. Найдите нормальную форму (Игрок 1 выбирает матрицы, Игрок 2 — строки, Игрок 3 — столбцы).
3. Примените последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий.
4. Найдите все равновесия Нэша, в том числе в смешанных стратегиях.

Задача 105 Три выборщика, Ольга, Петр и Раиса, должны выбрать одного из четырёх кандидатов в депутаты: w , x , y или z . Правила выбора следующие. Ольга первой берет бюллетень и вычёркивает любого из кандидатов, затем последовательно Петр и Раиса делают то же самое по отношению к ещё не вычеркнутому. Кандидаты имеют для выборщиков численную оценку полезности, заданную в Таблице 4.7.

1. Представьте игру в виде дерева. Предлагается использовать обозначение w для стратегии «вычеркнуть w » и т. д.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие.

Таблица 4.7. Данные для Игры 105

	Ольга	Петр	Раиса
w	5	1	4
x	3	4	0
y	2	2	5
z	0	3	2

Задача 106 Два игрока по очереди называют число от 1 до 10. Каждый раз все названные с начала игры числа складываются. Выигрывает тот, кто получит в сумме 100. Найдите решение с помощью обратной индукции.

Задача 107 [40] В игре «Многоножка» два игрока ходят по очереди. На каждом ходе игрок может либо остановиться (S), либо продолжить (C). На каждом ходе игроку более выгодно остановиться, чем продолжить, если другой игрок остановится сразу после этого, но менее выгодно остановиться, чем продолжить, если другой игрок продолжит, вне зависимости от того, какие действия будут выбраны впоследствии. Игра заканчивается после конечного числа периодов. Пример подобной игры показан на Рис. 4.23.

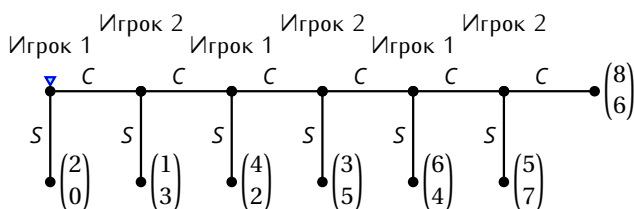


Рис. 4.23. Дерево игры «Многоножка» для задачи 107

1. Найдите совершенное в подыграх равновесие этой игры. Каким будет исход игры?
2. Какие исходы игры доминируют по Парето исход, соответствующий совершенному в подыграх равновесию? Найдите Парето-границу множества исходов.
3. Покажите, что в игре есть другие равновесия Нэша, но все они приводят к тому же исходу, что и совершенное в подыграх равновесие.

Задача 108 [36] Имеется 5 руб. Игрок 1 предлагает вариант дележа этих денег. Дележ возможен только в целых числах, причем Игрок 1 не вправе предложить 5 руб. себе или 0 руб. себе, но может предложить любую промежуточную сумму. Игрок 2 может принять или отклонить предложенный дележ. Если он примет дележ, то деньги будут поделены именно таким образом, а если отклонит, то никто из игроков ничего не получит. Пусть m_i — это денежный выигрыш игрока i и пусть полезность игрока i равна $m_i - cm_{-i}$, где $0 \leq c < 1$ — параметр, а m_{-i} — денежный выигрыш другого игрока.

1. Изобразите развернутую форму этой игры.
2. Найдите совершенные в подыграх равновесия в зависимости от параметра c . Как зависит решение от c ?

Задача 109 [30] Рассмотрите следующую двухпериодную политическую игру. Есть два игрока, рабочий класс и элита. В первый период элита решает, произвести ли перераспределение богатства или нет. Затем рабочие решают, организовать ли революцию. Выигрыши следующие. В случае революции рабочие получают 15, а элита получает 0, и на этом игра кончается. Если революция не происходит, но происходит перераспределение, то рабочие получают 10, а элита 15. Если ни революция, ни перераспределение не происходят, рабочие получают 0 а элита 25. В двух последних случаях начинается второй этап игры.

В начале второго этапа природа решает, будут ли рабочие иметь возможность устроить революцию. Вероятность того, что революция осуществима, равна q . Все видят результат хода природы. После этого элита снова решает, провести ли перераспределение. В случае, когда революция не происходит, элита получает дополнительный выигрыш 25, если она не осуществляет перераспределение, а рабочие ничего не получают. Если происходит перераспределение, то рабочие дополнительно получают 10, а элита дополнительно получает 15. Революция во втором периоде приносит рабочим дополнительный выигрыш 15, а элите — 0. Революция во втором периоде возможна только если природа дала рабочим возможность ее осуществить.

1. Нарисуйте дерево игры.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие.
3. Почему высокое значение q позволяет предотвратить революцию?

Задача 110 (трудовое соглашение) Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной пла-

ты ($w \geq 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы. Фирма в течении срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($L \geq 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w, L) = wL - 2L^2,$$

где $2L^2$ — издержки работы для членов профсоюза. Фирма максимизирует свою прибыль

$$\pi(w, L) = 2\sqrt{L} - wL.$$

Найдите решение с помощью обратной индукции.

Задача 111 (справедливый дележ пирога) В игре участвуют n игроков. Нужно разделить пирог между игроками, то есть выбрать вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером 1 режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается 1-му игроку.

1. Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

Задача 112 [30] Предположим, что действия ребенка a влияют как на его собственный доход $c(a)$, так и на доход матери $p(a)$. Эгоистичный ребенок заботится только о своем собственном доходе, в то время как альтруистичная мать заботится как о собственном доходе, так и о доходе ребенка. Предположим, что $c(a) \leq p(a)$ при всех a . Мать может передавать свои деньги ребенку. Ее выигрыш — это наименьший из двух доходов после передачи денег. Предположим, что сначала ребенок выбирает свои действия, а затем мать решает, сколько денег дать ребенку.

1. Предположите, что a может принимать значения из промежутка $[0; 1]$, $p(a) = 10 - a^2$ и $c(a) = a$. Каким будет совершенное в подыграх равновесие?
2. Какими свойствами будет обладать совершенное в подыграх равновесие в общем случае? Если требуется, придумайте несколько примеров с различными подходящими функциями.
3. Сравните равновесный исход с границей Парето.

Задача 113 [30] Игрок 1 выбирает любое действительное число a между 0 и 1, а игрок 2 говорит «да» или «нет». Если игрок 2 скажет «да», выигрыши в рублях будут равны $x_1 = a$ and $x_2 = 1 - a$. Если он скажет «нет», то выигрыши в рублях будут равны $x_1 = x_2 = 0$.

1. Предположите, что функция выигрыша каждого игрока зависит только от его собственного выигрыша в рублях. Опишите все равновесия Нэша в этой игре.
2. Опишите все совершенные в подыграх равновесия.
3. Пусть теперь функция выигрыша игрока i имеет вид $u_i = x_i - \beta x_j$, где x_i — его собственный выигрыш в рублях, x_j — выигрыш другого игрока, а β — положительный параметр. (Можно интерпретировать такие функции как следствие обоюдной зависти.) Опишите все совершенные в подыграх равновесия.

Динамические игры с несовершенной информацией

Моделирование одновременных ходов в развернутой форме игры. Информационные множества. Игры с идеальной памятью. Игры с почти совершенной информацией. Сравнение смешанных и поведенческих стратегий. Повторяющиеся статические игры. Сотрудничество в повторяющихся играх.

5.1. Введение

Каждой вершине в развернутой форме игры соответствует единственная предыстория — то есть последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину. Особенностью рассматриваемых в предыдущей главе игр с совершенной информацией является то, что каждый игрок перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — действия, выбранные ранее им и другими игроками. Другими словами, игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом разделе мы рассмотрим класс игр, называемых играми с несовершенной информацией, в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры.

Чтобы отобразить ограниченность информации на дереве игры, используют так называемые информационные множества. Информационное множество отображает тот факт, что игрок не знает, в какой вершине дерева находится (т. е. не знает точно, какова была предыстория игры). Если

игрок не может отличить две вершины дерева, то они принадлежат одному и тому же информационному множеству. Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной (и полной) информацией: в играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина.

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества. Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Игра 42 («Чёт или нечет»): Первый игрок загадывает чет или нечет, а второй отгадывает. Если угадал, то он получает 1, а первый –1, если не угадал, то наоборот. (См. матрицу игры в Таблице 5.1.) ⊙

Таблица 5.1. Выигрыши Игры 42 «Чет или нечет»

		Игрок 2	
		чет	нечет
Игрок 1	чет	<div>1</div> <div>−1</div>	<div>−1</div> <div>1</div>
	нечет	<div>−1</div> <div>1</div>	<div>1</div> <div>−1</div>

Игру 42 можно рассматривать как статическую или как динамическую игру. Если эта игра рассматривается как динамическая, то следует учесть, что когда Игрок 2 делает ход, он не знает, что выбрал Игрок 2. Таким образом, следует две вершины, в которых делает ход Игрок 2, объединить информационным множеством, как это показано на Рис. 5.1.

По сравнению с развернутой формой игр с совершенной (и полной) информацией, в развернутой форме игр с несовершенной информацией появляется еще один элемент — информационное множество. Какие требования накладываются на дерево игры, содержащее информационные множества с более чем одной вершиной? Во-первых, каждая вершина дерева игры (кроме конечных) должна принадлежать одному и только одному информационному множеству. Во-вторых, по смыслу определения информационного множества, в каждой вершине информационного множества ход

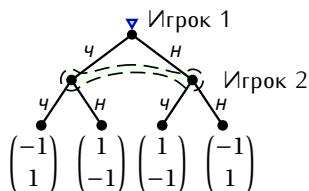


Рис. 5.1. Дерево Игры 42 «Чет или нечет»

должен принадлежать одному и тому же игроку. В-третьих, множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества должны быть одинаковыми (в противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится).

Посмотрим на дерево игры, представленное на Рис. 5.1. Это дерево содержит два информационных множества. В первом информационном множестве ход принадлежит Игроку 1. Это информационное множество содержит только одну вершину — начальную. Во втором информационном множестве ход принадлежит Игроку 2. Это информационное множество содержит две вершины, следующие за начальной. В первую из вершин Игрок 2 попадает, если Игрок 1 выбирает *ч*, а во вторую — если Игрок 1 выбирает *н*. Поскольку Игрок 2 не знает, что именно выбрал Игрок 1, то эти две вершины должны содержаться в одном и том же информационном множестве. Далее, во втором информационном множестве в обеих вершинах Игрок 2 выбирает из вариантов *ч* и *н*. То есть, как и требуется, в пределах одного и того же информационного множества возможные действия одни и те же.

Еще один вид требований к дереву игры появляется, если предположить, что игроки не забывают ту информацию, которой они обладают. Это так называемые игры с идеальной памятью. Игра в развернутой форме называется игрой с идеальной памятью, если игроки всегда помнят то, что они ранее знали, и то, что они ранее делали. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. 5.2).

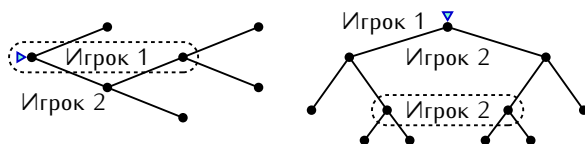


Рис. 5.2. Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью

5.2. Нормальная форма динамической игры с несовершенной информацией

5.2.1. Соответствие между нормальной и развернутой формой игры

Как мы знаем, существуют два представления любой игры — представление в нормальной и развернутой форме. Каковы соотношения между ними?

Сначала мы рассмотрим, что такое нормальная (стратегическая) форма игры с несовершенной информацией. Для этого надо понять, что такое стратегия в такой игре.

Как обычно, стратегия — это полный план действий. Но нужно учесть, что когда игрок должен сделать ход, он может исходить только из того, что находится в данном информационном множестве, но не имеет возможности выбирать действие в зависимости от того, в какой именно вершине он находится, поскольку не различает вершины в пределах информационного множества.

Таким образом, в данном случае стратегия игрока должна указывать, какие тот выберет действия, если окажется в том или ином своем информационном множестве. (В играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, поэтому такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением.)

Зная определение стратегии, мы можем динамическую игру представить в нормальной форме. Далее мы можем игру в нормальной форме рассматривать как статическую и представить такую статическую игру в развернутой форме. Так мы можем осуществить перевод игры из развернутой формы в нормальную, а затем из нормальной опять в развернутую.

Рассмотрим на примере¹, как влияет подобный двойной перевод на

¹Данный пример похож на пример, который Роберт Ауман привел в своей нобелевской

развернутую форму игры.

Игра 43: Рита должна решить, получат ли они с Колей одинаковые выигрыши — а именно, каждый 10 — или же она получит в 10 раз больше, а Костя — в 10 раз меньше. Если Рита предложит несправедливый вариант, то Костя может наказать Риту, сделав так, что выигрыши обоих станут нулевыми (конечно, он и сам от этого пострадает).

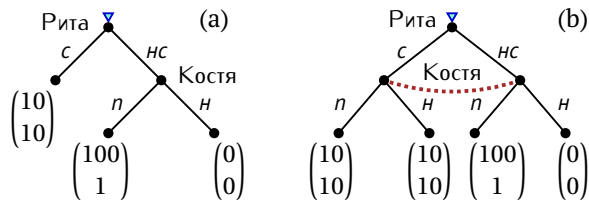


Рис. 5.3. (а) Исходное дерево Игры 43; (б) дерево игры после «двойного перевода»

Дерево этой игры показано на Рис. 5.3(а). Здесь *c* — «справедливый вариант», *nc* — «несправедливый вариант», *n* — «принять предложенный вариант», *h* — «наказать». Если мы представим игру в нормальной форме, то получим Таблицу 5.2.

Таблица 5.2. Нормальная форма Игры 43

		Костя	
		<i>n</i>	<i>h</i>
Рита	<i>c</i>	10 10	10 10
	<i>nc</i>	1 100	0 0

Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. 5.3(б). (На рисунке информационное множество представлено жирной пунктирной линией.) Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме.

Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма. Это объясняется тем, что нормальная фор-

лекции.

ма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С помощью нее можно представлять корректно только статические игры. Если операцию «двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить с любой статической игрой (например, с Игрой 42, представленной деревом на Рис. 5.1), то дерево игры не поменяется (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно). Использование нормальной формы для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

Рассмотрите модифицированную Игру 43, в которой Костя имеет возможность наказать Риту (и себя) и в том случае, если она выберет справедливый вариант. Получите нормальную форму игры, а затем постройте по нормальной форме развернутую.



5.2.2. Подыгры и совершенное в подыграх равновесие

Пользуясь нормальной формой, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от ранее данного.

Определение совершенного в подыграх равновесия Нэша в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако, в играх с несовершенной информацией следует дать несколько другое определение подыгры.

Что такое подыгра в данном случае? Это вершина и все, что следует за ней. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Нельзя подыгрой разрывать информационные множества.

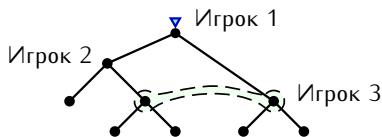


Рис. 5.4. Игра, в которой нет подыгр кроме всей игры в целом

На Рис. 5.4 изображена игра, в которой нет собственных (истинных) подыгр. Это связано с тем, что если начать подыгру из любой вершины,

кроме начальной, то она разорвет информационное множество Игрока 3, а это недопустимо.

В играх с несовершенной информацией «неподходящие» равновесия могут возникать так же точно, как «неподходящие» равновесия Нэша возникают в играх с совершенной и полной информацией, такие как не заслуживающие доверия обещания и угрозы. В некоторых играх такие равновесия можно исключить в играх с несовершенной (и полной) информацией с применением совершенного в подыграх равновесия.

Игра 44: Фирма 1 решает, войти ли в отрасль, где Фирма 2 является монополией. Если Фирма 1 не войдет, то Фирма 2 будет продолжать получать монопольную прибыль. Если Фирма 1 решит войти, то каждая из двух фирм может вести себя либо агрессивно (например, назначая низкую цену на продукцию), либо мирно. Каждой из фирм не выгодно вести себя агрессивно, как бы ни вела себя конкурирующая фирма. При мирном поведении обеих фирм Фирме 1 выгодно войти в отрасль, поскольку она получит довольно высокую олигопольную прибыль. При агрессивном поведении хотя бы одной из фирм Фирме 1 не выгодно входить. Фирме 2 не выгодно, чтобы Фирма 1 входила, поскольку тогда она перестанет быть монополией и ее прибыль упадет.

На Рис. 5.5 изображено дерево данной игры с подходящими под описание выигрышами. На дереве n означает «не входить», v — «войти», a — вести себя агрессивно, m — вести себя мирно.

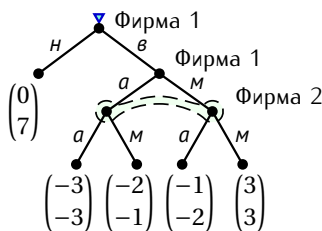


Рис. 5.5. Дерево игры Игры 44

У Фирмы 1 имеется четыре стратегии: na , nm , va и vm . Нормальная форма игры представлена в Таблице 5.3. Оптимальные отклики указаны подчеркиванием выигрышей. Видно, что здесь имеется три равновесия Нэша.

Два из трех равновесий не являются совершенными в подыграх. Действительно, данная подыгра уже представляет собой статическую игру, в которой каждый игрок имеет два действия. Матрица такой игры показана

Таблица 5.3. Нормальная форма Игры 44, соответствующая дереву, показанному на Рис. 5.5

		Фирма 2	
		<i>a</i>	<i>м</i>
Фирма 1	<i>на</i>	$\begin{array}{c} \underline{0} \quad \underline{7} \\ 0 \quad \underline{7} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \quad \underline{7} \end{array}$
	<i>нм</i>	$\begin{array}{c} \underline{0} \quad \underline{7} \\ 0 \quad \underline{7} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \quad \underline{7} \end{array}$
	<i>ва</i>	$\begin{array}{c} -3 \quad -3 \\ -3 \quad -2 \end{array}$	$\begin{array}{c} -1 \\ -2 \quad \underline{-1} \end{array}$
	<i>вм</i>	$\begin{array}{c} -2 \\ -1 \quad \underline{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} \underline{3} \quad \underline{3} \end{array}$

в Таблице 44. В данной подыгре обе фирмы выбирают *м* (это строго доминирующая стратегия).

Таблица 5.4. Подыгра в Игре 44

		Фирма 2	
		<i>a</i>	<i>м</i>
Фирма 1	<i>a</i>	$\begin{array}{c} -3 \quad -3 \\ -3 \quad -2 \end{array}$	$\begin{array}{c} \underline{-1} \\ -2 \quad \underline{-1} \end{array}$
	<i>м</i>	$\begin{array}{c} -2 \\ \underline{-1} \quad \underline{-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} \underline{3} \quad \underline{3} \end{array}$

Равновесия (*на*, *a*) и (*нм*, *a*) не являются совершенными в подыграх, поскольку профили стратегий (*a*, *a*) и (*м*, *a*) не являются равновесиями в подыгре из Таблицы 5.4.

Концепция совершенного в подыграх равновесия не всегда может «работать на полную мощность» в отношении игр с несовершенной информацией, поскольку такие игры содержат информационные множества, состоящие более чем из одной вершины, в то время как подыгра должна содержать информационное множество целиком, так что порой имеется единственная подыгра — это вся игра в целом, так что любое равновесие Нэша является совершенным в подыграх. Даже если игра имеет более одной подыгры, неспособность концепции совершенных в подыграх равновесий «резать» информационные множества может привести к тому, что неподходящие равновесия не будут исключены.

5.3. Обратная индукция и игры с почти совершенной информацией

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. 5.4 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. (Конечно, мы могли бы применить к этой игре концепцию равновесия Нэша и условиться, что это и есть применение обратной индукции, но результат не будет таким же интуитивно убедительным, как в случае игр с совершенной информацией.) Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

Но существует класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать играми с почти совершенной информацией. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Игру с почти совершенной информацией можно разбить на несколько этапов, $t = 1, \dots, T$. Каждый этап, фактически, представляет собой набор статических игр с одновременным выбором действий. В рамках любого этапа t каждый из игроков знает всю предысторию (все действия, выбранные на предыдущих этапах $1, \dots, t-1$), более того, эта предыстория *общезвестна*.


Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в статических играх, составляющих игру с почти совершенной информацией, могут быть пустыми (как, например, на первом этапе Игры 44, дерево которой представлено на Рис. 5.5).

В этих играх каждая конечная вершина некоторого этапа начинает подыгру. Поэтому в данном случае хорошо работает обратная индукция и концепция совершенного в подыграх равновесия. Множество решений по обратной индукции совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Сначала при использовании обратной индукции на последнем, T -м, этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем каждая из этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T-1$ этапом, и т. д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из

Таблица 5.5. (а) Игра «Набеги на банки» на втором этапе; (b) «свернутая» игра «Набеги на банки» на первом этапе



(а)

Игрок 2

L_4

R_4

<div><div>L_3</div><div>Игрок 1</div></div> <div><div><div><div>$\underline{3}$</div><div>$\underline{3}$</div></div><div><div>0</div><div>$\underline{1}$</div></div></div><div><div>2</div><div>$\underline{1}$</div></div></div>
--

(b)

Игрок 2

L_2

R_2

<div><div>L_1</div><div>Игрок 1</div></div> <div><div><div><div>v_2</div><div>0</div></div><div><div>v_1</div><div>1</div></div></div><div><div>2</div><div>1</div></div></div>
--

Множество равновесий Нэша в игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1 = v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша, поскольку $v_1 = v_2 = 3 > 2$: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапе соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша (3;3).

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них (по аналогии с играми с совершенной информацией) выполнено следующее.

В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

5.4. Повторяющиеся игры. Сотрудничество в повторяющихся играх

Характерный пример игры с почти совершенной информацией — повторяющаяся конечное число раз статическая игра. Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. 5.7 показывает как это сделать на примере Игры 18 «Ценовая конкуренция двух фирм» (с. 105).

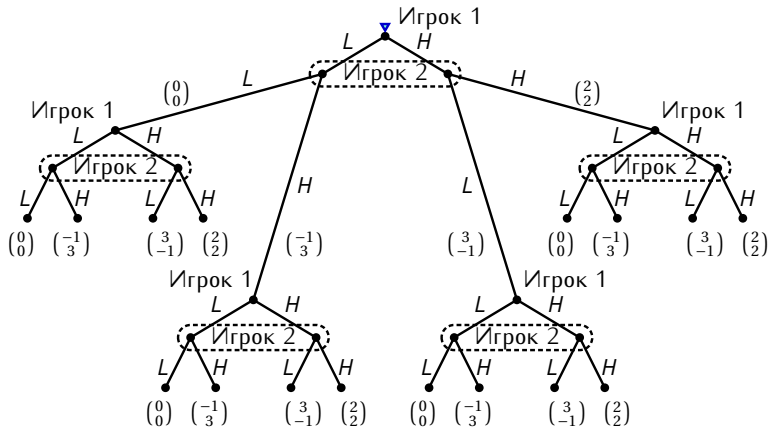


Рис. 5.7. Дважды повторяющаяся Игра 18

Аналогично, чтобы получить дерево T раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине $T - 1$ раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр, в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если u_{it} — выигрыш, полученный i -м игроком в результате t -го повторения игры (на t -м «раунде»), то общий выигрыш в T раз повторяющейся игре составит

$$u_i = \sum_{t=1}^T u_{it}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_i \in (0; 1)$ — дисконтирующий множитель i -го игрока. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{t=1}^T \delta_i^{t-1} u_{it}.$$

Поскольку повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, совершенные в подыграх равновесия в них

можно находить обратной индукцией.

Проанализируем повторяющуюся Игру 18. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым все сводится к анализу однократно повторенной Игры 18, равновесие которой нам известно: каждая фирма назначит низкую цену.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в «свернутой» игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это 0 для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая сворачивать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой T раз повторенное равновесие однократной Игры 18.

В случае повторения игры можно было бы ожидать появления сотрудничества между игроками. Но в данном случае догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре не подтверждается. Это может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на T -м раунде. И в самом деле, если бы игра повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в бесконечно повторяющейся игре рассчитывается по формуле²

$$u_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} u_{it}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений, в бесконечно повторяющейся Игре 18 (бесконечно длящейся конкуренции) возможно возникновение сотрудничества (так называемого молчаливого сговора по поводу высоких цен).

Рассмотрим стратегии следующего вида:

²Поскольку $\delta_i \in (0; 1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

- * назначать высокую цену, если на предыдущих ходах другой игрок назначал высокую цену (в том числе, в первом раунде тоже назначить высокую цену);
- * назначать низкую цену, если хотя бы на одном из предыдущих раундов другой игрок назначил низкую цену.

Стратегия, согласно которой игрок выбирает какие-то одни действия, а после наступления определенного события до конца игры — некоторые другие действия, называется триггерной стратегией (стратегией с переключением).

Если дисконтирующие множители δ_1, δ_2 достаточно высоки, то указанные триггерные стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие. Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того как фирма назначила низкую цену (выбрала L), конкурирующая фирма во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшейся от сотрудничества фирме будет выгодно назначать низкую цену во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в k -м раунде, то фирма не может получить больше, чем

$$\sum_{t=1}^{k-1} \delta_i^{t-1} \cdot 2 + \delta_i^{k-1} \cdot 3 + \sum_{t=k+1}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 0.$$

(Она получит 2 в раундах $1, \dots, k-1$, 3 в раунде k и 0 в раундах $k+1, k+2, \dots$) Если же ни одна из фирм не будет отклоняться от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 2.$$

Значит, чтобы отклоняться было невыгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 2 \geq \sum_{t=1}^{k-1} \delta_i^{t-1} \cdot 2 + \delta_i^{k-1} \cdot 3 + \sum_{t=k+1}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 0$$

или

$$\sum_{t=k}^{\infty} \delta_i^{t-1} \cdot 2 \geq \delta_i^{k-1} \cdot 3.$$

Сделаем в сумме замену индекса: $s = t - k$. Тогда это неравенство будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \delta_i^{s+k-1} \cdot 2 \geq \delta_i^{k-1} \cdot 3$$

или, после деления на δ_i^{k-1} ,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \delta_i^s \cdot 2 \geq 3.$$

Воспользуемся теперь формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - \delta_i} \cdot 2 \geq 3,$$

что эквивалентно неравенству $\delta_i \geq \frac{1}{3}$.

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для фирм и им будет выгодно отклониться от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

При каких условиях на дисконтирующие множители триггерные стратегии составляют равновесие в Игре 21 на с. 109?



Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся Игре 18. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии, согласно которым независимо от предыстории фирмы всегда назначают низкие цены, тоже составляют равновесие.

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1 - \delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и, кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в каком-либо равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный выигрыш.

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоре-

мы можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в Игре 18.

5.5. «Лишние» равновесия в динамических играх с несовершенной информацией

Совершенное в подыграх равновесие — недостаточно сильная концепция равновесия, поскольку не «вычищает» некоторые неестественные равновесия.

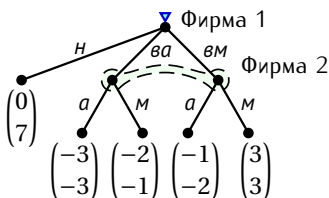


Рис. 5.8. Еще один вариант дерева Игры 44

Например, дерево Игры 44 можно привести к эквивалентному виду, показанному на Рис. 5.8 (ср. с Рис. 5.5). На дереве *н* означает «не входить», *ва* — войти и вести себя агрессивно, *вм* — войти и вести себя мирно. Решение Фирмы 1 о входе в отрасль на данном дереве игры совмещено с решением о поведении после входа.

Таблица 5.6. Нормальная форма Игры 44

		Фирма 2	
		<i>а</i>	<i>м</i>
Фирма 1	<i>н</i>	<u>0</u> <u>7</u>	0 <u>7</u>
	<i>ва</i>	-3 -3	-2 <u>-1</u>
	<i>вм</i>	-1 -2	<u>3</u> <u>3</u>

В Таблице 5.6 эта альтернативная развернутая форма игры преобразована к нормальной форме. Полученная нормальная форма сильно напоминает нормальную форму, которая изображена в Таблице 5.3, только в Таблице 5.6 первые две из стратегий Фирмы 1 объединены в одну стратегию n (если фирма не войдет в отрасль, то ей не нужно будет делать выбор между a и m). Видно, что в игре имеется два равновесия Нэша: (vm, m) и (n, a) . Оба равновесия являются совершенными в подыграх, поскольку имеется только одна подыгра — игра в целом.

В первом из этих равновесий Фирма 1 перестает быть монополией и обе фирмы ведут себя мирно. Второе из этих равновесий можно интерпретировать как угрозу со стороны Фирмы 2 быть агрессивной по отношению к Фирме 1, если та войдет в отрасль. Если Фирме 1 считает, что Фирма 2 выполнит свою угрозу, то ей выгодно не входить в отрасль. Но проблема с этим равновесием состоит в том, что как только Фирма 1 войдет, Фирме 2 уже невыгодно быть агрессивной.

Здесь мы незначительно модифицировали дерево игры, не меняя сущности самой игры, и это привело к появлению неубедительного равновесия. Конечно, можно было бы использовать дерево Рис. 5.5. Но избавиться от «лишних» совершенных в подыграх равновесий можно не только видоизменением дерева игры, но и усилением концепции решения. Такую концепцию — совершенное байесовское равновесие — мы еще рассмотрим в дальнейшем.

5.6. Смешанные и поведенческие стратегии

Пока что мы абстрагировались от возможности рандомизации в динамических играх. Но в отличие от игр с совершенной информацией, в играх с несовершенной информацией решение в чистых стратегиях может не существовать, как показывает следующий пример. Отсутствие решений в чистых стратегиях заставляет рассматривать смешанные стратегии по аналогии со статическими играми.

Игра 46: Расширим Игру 42 «Чет или нечет», добавив для Игрока 1 возможность отказаться от участия в игре (o). Если Игрок 1 откажется, оба игрока получают выигрыш 0,2. Дерево этой игры представлено на Рис. 5.9. \odot

Нормальная форма Игры 46 показана в Таблице 5.7. По подчеркнутым оптимальным откликам видно, что в этой игре нет равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нор-

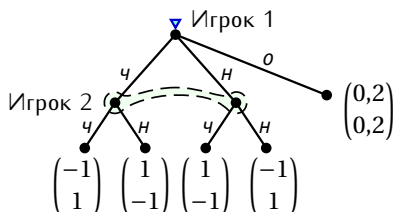


Рис. 5.9. Дерево Игры 46 (расширенной игры «Чет или нечет»)

Таблица 5.7. Нормальная форма Игры 46

		Игрок 2	
		ч	н
Игрок 1	ч	$\begin{matrix} -1 & \underline{1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \underline{1} & -1 \end{matrix}$
	н	$\begin{matrix} \underline{1} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & \underline{1} \end{matrix}$
	о	$\begin{matrix} 0,2 & \underline{0,2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,2 & \underline{0,2} \end{matrix}$

мальной форме. Согласно такой интерпретации, *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии до начала игры.

Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях для Игры 46, пользуясь ее нормальной формой.



Однако более предпочтительной кажется другая концепция: игроки рандомизируют при выборе действия по достижении определенного информационного множества. Эта концепция (локальная рандомизация) лучше соответствует идеологии динамических игр.

В первом случае говорят о смешанной стратегии, во втором случае — о поведенческой стратегии. Стратегию с рандомизацией действий принято называть поведенческой стратегией. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве.

соответствие между ними достигается при выполнении условий $p_{yч} = \alpha\gamma$, $p_{yн} = \alpha(1 - \gamma)$ и $q = \beta$.

По данным смешанным стратегиям однозначно (кроме случая, когда $p_{yч} + p_{yн} = 0$) определяются поведенческие:

$$\alpha = p_{yч} + p_{yн}, \quad \beta = q, \quad \gamma = \frac{p_{yч}}{p_{yч} + p_{yн}}.$$

Вероятность γ рассчитывается как условная вероятность по формуле Байеса. Это вероятность того, что Игрок 1 на втором ходе выберет ч, при том условии, что на первом ходе он выбрал у.

Таблица 5.8. Распределение вероятностей на конечных вершинах для примера эквивалентности поведенческих и смешанных стратегий

вершина	поведенческие	смешанные
a	$\alpha\beta\gamma$	$p_{yч}q$
b	$\alpha\beta(1 - \gamma)$	$p_{yч}(1 - q)$
c	$\alpha(1 - \beta)\gamma$	$p_{yн}q$
d	$\alpha(1 - \beta)(1 - \gamma)$	$p_{yн}(1 - q)$
e	$1 - \alpha$	$p_{оч} + p_{он} = 1 - p_{yч} - p_{yн}$

В дальнейшем мы везде, где это не приводит к неоднозначности, будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Для игры изображенной на Рис. 5.2(b), рассмотрите следующую смешанную стратегию Игрока 2: с вероятностью 1/2 во всех информационных множествах выбирать левую ветвь, и с вероятностью 1/2 во всех информационных множествах выбирать правую ветвь. Покажите, пользуясь этой стратегией, что смешанные и поведенческие стратегии в данной игре не эквивалентны. Приведите другие примеры, показывающие, что смешанные и поведенческие стратегии в данной игре не эквивалентны.



Алгоритм обратной индукции можно естественным образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная

обратная индукция. Смешанные стратегии в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 45 «Набеги на банки» (с. 210). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре, кроме того, существуют равновесия в смешанных стратегиях.

Обозначим через μ_1 вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_1), а через v_1 — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора L_2). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим μ_2 и v_2 (вероятности выбора L_3 и L_4 соответственно).

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. 5.11). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $v_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по $3/2$. Структура равновесий в «свернутой» игре первого этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в «свернутой» игре при $v_1, v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $v_1 = 1/2$.

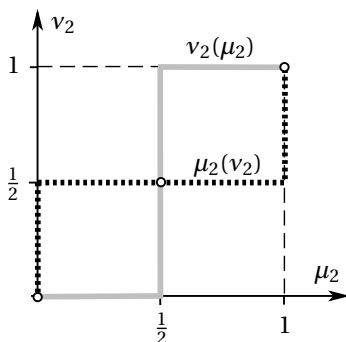


Рис. 5.11. Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»

Задачи

Задача 114 (раз-два-три) Каждый из двух игроков одновременно называет одно из трех чисел: 1, 2 или 3. При совпадении второй игрок дает первому названное и совпавшее число (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которые они оценивают в $1/2$. Какую сумму z первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

Задача 115 Рассмотрите игру в нормальной форме, заданную Таблицей 5.9. Покажите, что этой игре могут соответствовать разные игры в развернутой форме, приведя соответствующие примеры. Изобразите эти примеры в виде дерева.

Таблица 5.9. Данные для задачи 115

		Игрок 2		
		X	Y	Z
Игрок 1	U	1 2	1 2	1 2
	D	2 1	4 3	6 5

Задача 116 [33] Две фирмы, TopDog и HotDog одновременно решают, начать ли производство на новом рынке. Выигрыши показаны в Таблице 5.10. «In» означает «начать производство», «Out» — «не начинать».

Таблица 5.10. Данные для задачи 59

		HotDog	
		In	Out
TopDog	In	1 2	5 3
	Out	3 6	3 3

Предположите сначала, что до того, как фирмы принимают свои решения, фирма TopDog (только она) должна объявить о своих намерениях «начать производство» или «не начинать» (объявить «i» или «o»). TopDog может

не сдерживать обещание, но если она это делает, то понесет издержки в размере c . (Издержки вычитаются из указанных выигрышей.)

1. Изобразите дерево этой игры.
2. Опишите и перечислите возможные стратегии обоих игроков.
3. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в случае, когда $c = 4$.
4. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в случае, когда $c = 1$.
5. Опишите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в зависимости от параметра $c > 0$ ($c \neq 2$).

Задача 117 [36] Игрок 1 ходит первым. Он может сразу закончить игру, что даст всем игрокам выигрыш 4. Или же он может принять участие в игре 2×2 с Игроком 2, выигрыши которой указаны в Таблице 5.11.

Таблица 5.11. Данные для задачи 117

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	A	6 6	3 0
	B	0 0	2 2

1. Найдите единственное совершенное в подыграх равновесие этой игры.
2. Совпадает ли это равновесие с результатом последовательного отбрасывания слабо доминируемых стратегий?

Задача 118 В игре участвуют два игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит \$1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся \$2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой оба игрока оценивают выше,

чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих — отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. 5.12. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

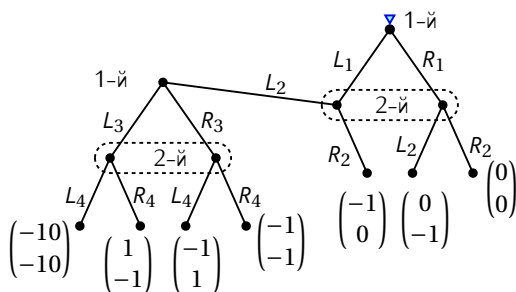


Рис. 5.12. Дерево для игры для задачи 118

Задача 119 [33] Государство хочет заставить двух парней, Андрея и Бориса (для краткости А и В), пройти службу в армии. Оно может преследовать по суду того, кто уклоняется от воинской повинности, однако имеющихся ресурсов недостаточно, чтобы наказать сразу обоих. Пусть выигрыш каждого из парней составит 3, если он отслужит в армии, 4, если он не будет служить в армии и не понесет ответственности, и 0, если он не будет служить в армии и понесет ответственность.

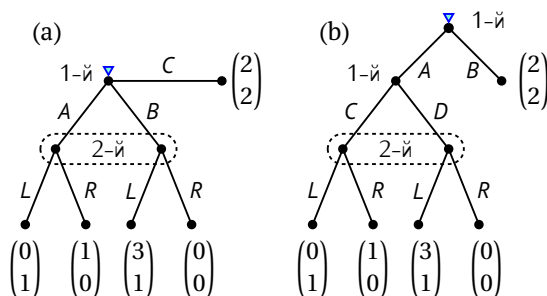
Предположите сначала, что государство проверяет сначала А, а затем уже В, и преследует по суду только первого из обнаруженных уклоняющихся от армии. Структура игры общеизвестна. Считая игроками только А и В (но не государство), запишите развернутую форму игры (дерево игры), запишите нормальную форму (матрицу выигрышей, А выбирает строки), укажите в явном виде стратегии игроков и найдите все равновесия Нэша и совершенные в подыграх равновесия Нэша в следующих случаях:

1. когда сначала А должен решить, служить ли в армии, и В имеет возможность наблюдать решение А до того, как сам примет решение;
2. когда А и В одновременно принимают решение, служить ли в армии.

- Пусть теперь государство проверяет А и В в случайном порядке, того и другого с одинаковой вероятностью, а все остальное такое же, как и выше. Ответьте на те же вопросы для предположений пункта 1.
- Ответьте на те же вопросы для предположений пункта 2.

Задача 120

- Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 5.13а. Представьте ее в нормальной форме и найдите все равновесия Нэша (в чистых стратегиях).

**Рис. 5.13.** Две игры, данные для задачи 120

- Объясните, почему множество равновесий Нэша для этой игры совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.
- Для игры, изображенной на Рис. 5.13b, найдите все совершенные в подыграх равновесия. Объясните, почему множество совершенных в подыграх равновесий в ней не совпадает с множеством равновесий Нэша.
- Объясните, почему две рассматриваемые игры естественно считать в определенном смысле эквивалентными.
- Объясните, почему множества совершенных в подыграх равновесий в двух играх не совпадают. Сделайте вывод о недостатках этой концепции равновесия.

Задача 121 [42] Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 5.14.

- Перечислите стратегии каждого из игроков.
- Запишите игру в стратегической форме.
- Какие из стратегий Игрока 1 являются строго доминируемыми? Какие из стратегий Игрока 2 являются строго доминируемыми?

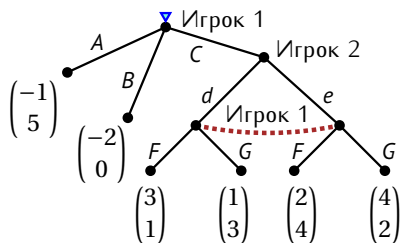


Рис. 5.14. Дерево игры для задачи 121

4. Какие в этой игре есть равновесия Нэша в чистых стратегиях?
5. В подыгре, начинающейся в информационном множестве Игрока 2, найдите все равновесия Нэша.
6. Для подыгры, начинающейся в информационном множестве Игрока 2, вычислите ожидаемую полезность Игрока 1 в равновесии Нэша в смешанных стратегиях.
7. Найдите совершенное в подыграх равновесие игры в целом.

Задача 122 [8] Игра, дерево которой изображено на Рис. 5.15, начинается с центральной вершины, в которой ход делает природа. Каждый из трех игроков имеет одно информационное множество с двумя вершинами, в котором он делает ход, выбирая из двух возможных действий (a и b для Игрока 1, c и d для Игрока 2, e и f для Игрока 3).

Вычислите ожидаемые выигрыши в зависимости от выбора игроков и постройте нормальную форму игры. Найдите все равновесия Нэша.

Задача 123 [8] Случайно выбирается целое число z с возможными значениями 1, 2, 3 (каждое имеет вероятность $1/3$). Игрок 1, не зная результата этого хода, выбирает целое число x с возможными значениями 1, 2, 3. Игрок 2, не зная ни результата случайного хода, ни выбора Игрока 1, выбирает целое число y с возможными значениями 1, 2, 3. Выигрыши двух игроков определяются следующим образом:

$$u_1 = |y - z| - |x - z|, \quad u_2 = |x - z| - |y - z|,$$

т. е. целью является выбор числа, по возможности близкого к z .

1. Вычислите ожидаемые выигрыши в зависимости от выбора игроков и изобразите нормальную форму игры.

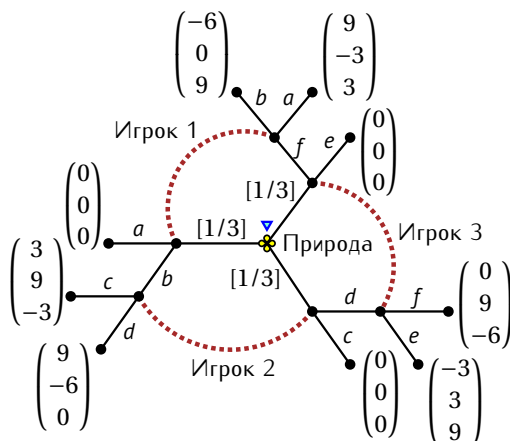


Рис. 5.15. Дерево задачи 122

2. Изобразите развернутую форму игры.

Задача 124 Рассмотрите дерево решений для одного игрока, представленное на Рис. 5.16.

1. Пусть игрок использует смешанную стратегию, которая заключается в выборе с равными вероятностями $1/3$ трех чистых стратегий: (B, W, Y) , (T, W, Z) и (T, X, Z) . Найдите соответствующую поведенческую стратегию.
2. Пусть теперь игрок использует смешанную стратегию, которая заключается в выборе с равными вероятностями $1/2$ стратегий (T, W, Z) и (T, X, Z) . Найдите соответствующую поведенческую стратегию.

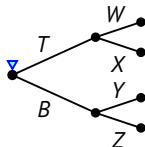


Рис. 5.16. Дерево решений для задачи 124

Задача 125 Пусть в игре, дерево которой приведено на Рис. 5.17, Игрок 1 выбирает стратегии (A, F) , (B, E) и (B, F) с одинаковыми вероятностями $1/3$ (еще одну свою стратегию выбирает с вероятностью 0), а Игрок 2 выбирает стратегию C с вероятностью $2/5$. Можно ли для данной смешанной стратегии Игрока 2 подобрать соответствующую ей поведенческую стратегию? Объясните полученный результат.

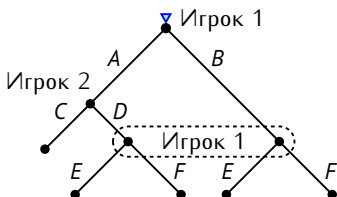


Рис. 5.17. Дерево игры для задачи 125

Задача 126 Каждый из двух студентов, снимающих на двоих квартиру, может слушать свою любимую музыку часто (F) или редко (R). Выигрыши указаны в Таблице 5.12. Игра играется дважды, и после первого этапа игроки знают исход этого этапа.

Таблица 5.12. Данные для задачи 126

		Игрок 2	
		F	R
Игрок 1	F	-1 -1	2 -2
	R	2 -2	1 1

1. Сколько стратегий у каждого из игроков в этой игре?
2. Найдите множество совершенных в подыграх равновесий этой игры.
3. Найдите множество равновесий Нэша этой игры.
4. Что будет, если игра повторяется несколько (конечное число) раз.

Задача 127 (нефтяной картель) [13] Предположим, что есть только две страны, производящие нефть, Иран и Ирак. Каждая из стран может выбрать добычу на уровне 2 или 4 миллионов баррелей в день. В зависимости

от их решений общий объем производства на мировом рынке будет равен 4, 6 или 8 миллионов баррелей в день. Цена за баррель в этих трех случаях будет равна 25 долл., 15 долл., и 10 долл. соответственно. Издержки производства одного барреля равны 2 долл. для Ирана и 4 долл. для Ирака.

1. Изобразите матрицу нормальной формы этой игры и заполните ее выигрышами.
2. Покажите, что в единственном равновесии обе фирмы выбирают высокий уровень добычи и что это равновесие не оптимально по Парето.
3. Теперь предположите, что эта игра повторяется каждый день. Обе страны соглашаются сотрудничать (т. е. выбирать низкий уровень добычи). При этом каждая страна угрожает другой триггерной стратегией: «Если ты хотя бы раз выберешь высокий уровень добычи, то я буду всегда выбирать высокий уровень добычи». Покажите, что если процентная ставка достаточно мала (дисконтирующий множитель достаточно близок к единице), то этот набор стратегий составляет равновесие Нэша.

Задача 128 [13] Многие виды рыб страдают от паразитов, которые прикрепляются к их жабрам. Часто такие рыбы формируют симбиозные отношения с рыбами другого вида, меньшего размера, для которых паразиты являются главным источником пищи. Однако такие отношения требуют взаимного доверия, так как большая рыба должна устоять перед искушением съесть меньшую рыбу, а меньшая рыба должна устоять перед искушением вынуть кусок пищи из большей рыбы, получая таким образом пищу с меньшими усилиями, чем если бы она выбирала крошечных паразитов.

Предположим, что Большая рыба и Маленькая рыба играют в игру, показанную в Таблице 5.13, многократно (бесконечное число раз). В таблице C означает «сотрудничать», а D — не сотрудничать. Выигрыш каждой рыбы — это сумма ее выигрышей за все периоды, взвешенных с дисконтирующим множителем δ , где $0 < \delta < 1$.

1. Покажите, что эффективный по Парето исход (C, C) может быть достигнут в каждом раунде бесконечно повторяющейся игры как совершенное в подыграх равновесие Нэша, если множитель δ достаточно близок к единице и каждый игрок использует триггерную стратегию, сотрудничая до тех пор, пока другой игрок сотрудничает, и отказываясь от сотрудничества до конца игры, как только другой игрок перестанет сотрудничать в некотором раунде. Найдите общие выигрыши игроков в таком равновесии.

Таблица 5.13. Матрица выигрышей для задачи 128

		Маленькая рыба	
		C	D
Большая рыба	C	5	8
	D	8	0

- Рассмотрите следующую триггерную стратегию Маленькой рыбы: чередовать C, D, C, \dots пока Большая рыба чередует D, C, D, \dots . Если Большая рыба отклонится от этой схемы, то до конца игры выбирать D . Пусть Большая рыба при этом использует дополнительную стратегию: чередовать D, C, D, \dots пока Маленькая рыба чередует C, D, C, \dots . Если же Маленькая рыба отклонится от этой схемы, то до конца игры выбирать D . Покажите, что эти две стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие Нэша при δ достаточно близком к единице. Найдите общие выигрыши игроков в таком равновесии. Проверьте, что выигрыши обоих рыб в этом равновесии меньше, чем в равновесии, описанном в предыдущем пункте.
- Предположим, что Маленькая рыба и Большая рыба используют триггерную стратегию следующего вида: они чередуют C, D, C, \dots до тех пор, пока другая рыба делает то же самое. Если одна из рыб отклонится от этой схемы, то другая рыба до конца игры выбирает D . Покажите, что эта пара стратегий составляет совершенное в подыграх равновесие Нэша при δ достаточно близком к единице.
- Придумайте для рассматриваемой игры какие-нибудь другие интересные совершенные в подыграх равновесия Нэша.

Статические игры с неполной информацией (байесовские)

Байесовские игры. Байесовские равновесия. Асимметричность информации.

6.1. Введение

Ранее мы предполагали, что все игроки знают функции выигрыша остальных игроков. Но это неявно подразумевает, что каждый из игроков может получить всю ту информацию, которая определяет эти выигрыши. Такое упрощающее предположение может оказаться слишком ограничительным. Многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от него. Например, в ситуации торга один игрок может не знать точно, каким будет выигрыш другого игрока, если соглашение не будет достигнуто, или как тот дисконтирует будущие выигрыши.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно цели других игроков и другую важную информацию. Выигрыши игроков могут зависеть от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Чтобы это учесть, можно дополнительно ввести воображаемый случайный ход, который происходит в начале игры, и который определяет, какой именно частной информацией будет обладать каждый из игроков. Эта частная информация называется типом игрока. (Тип игрока i будем обо-

значать θ_i .) Каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип θ_i , но не знает точно типы остальных игроков.

Можно считать, что первый ход делает *природа*. Она сопоставляет каждому из игроков случайную переменную, которая указывает тип этого игрока. При этом природа использует некоторое известное всем игрокам заранее совместное распределение типов игроков.

Такого рода игры называют играми с неполной информацией или байесовскими играми. Эти игры ввел Дж. Харшани в своей статье 1968 года [14]. Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной поскольку позволяет моделировать различные ситуации, в которых игроки в разной степени информированы или, другими словами, *асимметрично* информированы.

В этой главе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящена глава 7.

Описание статической байесовской игры, ее нормальная форма, должно включать в себя следующие составляющие:

- * множество игроков;
- * для каждого игрока — множество типов;
- * распределение вероятностей на множествах типов;
- * для каждого игрока — множество возможных действий;
- * для каждого игрока — функции выигрышей, сопоставляющие данному набору типов и данному профилю стратегий выигрыши игроков.

Видим, что, описание нормальной формы игры с неполной информацией (в отличие от нормальной формы игры с полной информацией) включает не только игроков и их функции полезности, но также и их типы и вероятности появления типов игроков. Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые множества действий¹. Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками стратегий, но и от того, какие именно типы $\theta_1, \dots, \theta_n$, участвуют в игре.

Рассмотрим пример байесовской игры.


Игра 47 («Субботник»): В игре участвуют два игрока $i = 1, 2$. Каждый из них решает, прийти ли на субботник. Полезность чистоты в результате субботника для игрока i составляет v_i . Величина v_i может быть равна 36 (если игрок имеет тип H) или 12 (если игрок имеет тип L). Кроме того, выигрыш

¹Если рассматривается ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий чрезвычайно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.

игрока уменьшается, если он сам участвует в субботнике, поскольку приходится трудиться. Если один игрок участвовал в субботнике, то его выигрыш на 24 меньше, а если оба участвовали, то выигрыш каждого на 12 меньше. Игрок знает только свой тип, но не тип другого игрока. Игрок 1 может быть типа H с вероятностью μ , а Игрок 2 может быть типа H с вероятностью ν (и другой игрок знает эту вероятность). Типы двух игроков независимы. \odot

Игра представлена в Таблице 6.1. В таблице «+» означает «прийти на субботник», а «-» означает «не прийти». Рядом с типом игрока указана вероятность его появления.

Таблица 6.1. Матрица выигрышей в Игре 47 «Субботник»



Игрок 1

		Игрок 2			
		$H \ [\nu]$		$L \ [1 - \nu]$	
		+	-	+	-
$H \ [\mu]$	+	24	36	0	12
	-	12	0	-12	0
	+	24	36	0	12
	-	12	0	-12	0
$L \ [1 - \mu]$	+	0	-12	0	-12
	-	12	0	-12	0

В данной игре Игрока 1 может быть двух типов: H и L . Игрок 2 тоже может быть двух типов: H и L . *Независимость типов* игроков (ее еще неформально называют *некоррелированностью типов*) означает, что вероятность некоторого набора типов всех игроков получается перемножением вероятностей отдельных типов. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков. Например, в рассматриваемой игре вероятность того, что Игрок 1 имеет тип L равна $1 - \mu$, вероятность того, что Игрок 2 имеет тип H равна ν , а значит, вероятность того, что в игре участвуют типы (L, H) равна $(1 - \mu)\nu$.

Существует две различные интерпретации типа игрока. Согласно первой интерпретации каждый игрок — это один и тот же индивидуум, но обладающий разными характеристиками в зависимости от каких-то случайных факторов. Например, игрок может в момент участия в игре иметь хорошее настроение или плохое. Другой пример: в карточных играх игроку могут достаться те или иные карты.

Рассмотрите модификацию Игры 47, в которой оба игрока знают не только свой тип, но и тип другого игрока. Объясните, почему игра фактически распадается на четыре отдельные игры с полной информацией. Найдите равновесия Нэша в каждой из этих четырех игр и дайте их содержательную интерпретацию.



Согласно второй интерпретации роль i -го игрока могут играть разные индивидуумы, обладающие разными характеристиками. Природа случайным образом выбирает одного из этих индивидуумов на роль i -го игрока. Например, на рынке могут случайным образом встретиться покупатель и продавец, и между ними происходит некоторая игра торга.

6.2. Равновесие Байеса—Нэша

Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией, стратегия игрока описывает, как будет действовать *каждый* из типов данного игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу θ_i данного игрока некоторые действия $s_i(\theta_i)$.

Естественное обобщение рациональности поведения игрока в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых предположениях относительно стратегий других игроков. Результат такой оптимизации — оптимальный отклик.

Поскольку игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* относительно этого типа. Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие». Если типы игроков независимы, то расчет ожидаемого выигрыша упрощается, поскольку можно непосредственно использовать безусловные вероятности появления типов других игроков.

Найдем оптимальный отклик Игрока 1 в Игре 47 на стратегию (+, -) Игрока 2 (участвовать в субботнике, если он имеет тип H , и не участвовать, если имеет тип L). Каким будет выбор первого игрока, если он имеет тип H ? Поскольку типы игроков некоррелированы, то при расчете ожидаемого выигрыша используются безусловные вероятности типов другого игрока, т. е. ν для H и $1-\nu$ для L . Если Игрок 1 ожидает, что стратегией Игрока 2 является

(+, -), то его ожидаемая полезность от действий + и - равна соответственно

$$+ : v \cdot 24 + (1 - v) \cdot 12 = 12 + 12v,$$

$$- : v \cdot 36 + (1 - v) \cdot 0 = 36v.$$

Следовательно, первый игрок типа H может выбрать +, если выполнено условие

$$12 + 12v \geq 36v$$

или

$$v \leq 1/2.$$

Рассмотрим теперь выбор первого игрока, если он имеет тип L . Если он ожидает, что стратегией второго игрока является (+, -), то его ожидаемая полезность от двух вариантов действий равна

$$+ : v \cdot 0 + (1 - v) \cdot (-12) = 12v - 12,$$

$$- : v \cdot 12 + (1 - v) \cdot 0 = 12.$$

Первый игрок типа L в любом случае выберет -, поскольку $12v - 12 < 12$ для всех $v \in [0; 1]$.

В Таблице 6.2 указаны рассчитанные ожидаемые выигрыши обоих игроков при $\mu = 3/4$, $v = 2/3$. Оптимальные отклики показаны подчеркиванием выигрышей.

Для байесовских игр Джоном Харшаньи предложена концепция равновесия, аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией². Это так называемое равновесие Байеса—Нэша (или байесовское равновесие Нэша). Его также часто называют просто байесовским равновесием.

Профиль стратегий $(\bar{s}_1(\cdot), \dots, \bar{s}_m(\cdot))$ является байесовским равновесием в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta_i \in \Theta_i$ каждого игрока i действия $\bar{s}_i(\theta_i)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии.

Как и в обычном равновесии Нэша, равновесная стратегия каждого из игроков представляет собой оптимальный отклик на равновесные стратегии других игроков. Также по аналогии с обычным равновесием Нэша можно дать следующую характеристику равновесия Байеса—Нэша.

В равновесии ни один из типов ни одного из игроков не имеет стимула менять свои действия по сравнению с теми действиями, которые предписываются равновесной стратегией.

²См. [14].

Таблица 6.2. Ожидаемые выигрыши для в Игры 47

		+, +	+, -	-, +	-, -
Игрок 1, H	+	24	20	<u>16</u>	<u>12</u>
	-	<u>36</u>	<u>24</u>	12	0
Игрок 1, L	+	0	-4	-8	-12
	-	<u>12</u>	<u>8</u>	<u>4</u>	<u>0</u>
		+, +	+, -	-, +	-, -
Игрок 2, H	+	24	21	<u>15</u>	<u>12</u>
	-	<u>36</u>	<u>27</u>	9	0
Игрок 2, L	+	0	-3	-9	-12
	-	<u>12</u>	<u>9</u>	<u>3</u>	<u>0</u>

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим условия на параметры μ и ν , при которых в Игре 47 профиль стратегий «если игрок имеет тип H , то он придет на субботник; если игрок имеет тип L , то он не придет», т. е. $((+, -), (+, -))$, будет равновесием Байеса—Нэша.

Тип L любого из игроков всегда выбирает $-$. Поэтому достаточно рассмотреть поведение типа H . Как мы видели, тип H Игрока 1 выбирает $+$ при $\mu \leq 1/2$. Для Игрока 2 рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям на вероятность μ , поскольку игроки одинаковы с точностью до замены обозначений: тип H Игрока 2 выбирает $+$ при $\nu \leq 1/2$. Таким образом, условия

$$\mu \leq 1/2, \quad \nu \leq 1/2$$

гарантирует, что набор стратегий $((+, -), (+, -))$ будет байесовским равновесием.

Теперь взглянем на ту же игру с другой стороны. Предположим, что $\mu = 3/4$, $\nu = 2/3$ и найдем здесь все байесовские равновесия. (Понятно, что равновесия рассмотренного только что вида в этом случае быть не может.)

Нормальная форма в Таблице 6.3 получена на основе данных из Таблицы 6.2. Выигрыш каждого из двух игроков представлен как двухэлементный вектор, первый элемент которого соответствует выигрышу типа H , а второй элемент — выигрышу типа L .

Таблица 6.3. Нормальная форма Игры 47

		Игрок 2			
		+, +	+, -	-, +	-, -
Игрок 1	+, +	(24; 0) (24; 0)	(24; <u>12</u>) (20; -4)	(<u>36</u> ; 0) (<u>16</u> ; -8)	(<u>36</u> ; <u>12</u>) (<u>12</u> ; -12)
	+, -	(21; -3) (24; <u>12</u>)	(21; <u>9</u>) (20; <u>8</u>)	(27; -3) (<u>16</u> ; <u>4</u>)	(27; <u>9</u>) (<u>12</u> ; <u>0</u>)
	-, +	(<u>15</u> ; -9) (<u>36</u> ; 0)	(<u>15</u> ; <u>3</u>) (<u>24</u> ; -4)	(9; -9) (12; -8)	(9; <u>3</u>) (0; -12)
	-, -	(<u>12</u> ; -12) (<u>36</u> ; <u>12</u>)	(<u>12</u> ; <u>0</u>) (<u>24</u> ; <u>8</u>)	(0; -12) (12; <u>4</u>)	(0; <u>0</u>) (0; <u>0</u>)

Выигрыши, соответствующие оптимальным откликам в Таблице 6.3 подчеркнуты. Равновесиям Байеса—Нэша соответствуют такие клетки, в которых все четыре выигрыша подчеркнуты. Видно, что рассматриваемая игра имеет два симметричных равновесия: $((+, -), (-, -))$ и $((-, -), (+, -))$. В каждом из этих равновесий один игрок приходит на субботник, только если имеет тип H , а другой игрок в любом случае не приходит на субботник.

Заметим, что среди байесовских равновесий выделяют объединяющие и разделяющие. Объединяющее равновесие — это такое, в котором все типы игрока действуют одинаково. В разделяющем равновесии все типы игрока действуют по-разному. В данном случае равновесия являются объединяющими для одного игрока и разделяющими для другого.

Следует отметить, что между равновесием Байеса—Нэша и равновесием Нэша существует более глубокая связь, чем отмечено выше. Данное ранее определение равновесия Байеса—Нэша основано на том, что каждый тип каждого игрока максимизирует свою ожидаемую полезность. Вместо этого можно предполагать, что каждый игрок максимизирует общую ожидаемую полезность, которая рассчитывается как математическое ожидание по возможным типам этого игрока с соответствующими вероятностями. Эти два подхода фактически эквивалентны между собой³. Если использовать нормальную форму с этой общей ожидаемой полезностью, то равновесие Нэша в ней будет соответствовать равновесию Байеса—Нэша в исходной игре.

Найдем такую нормальную форму для Игры 47 при $\mu = 3/4$, $\nu = 2/3$. Для этого нужно найти математические ожидания выигрышей из Таблицы 6.3, используя вероятности $3/4$ и $1/4$ для Игрока 1 и $2/3$ и $1/3$ для Игрока 2. На-

³Различие проявляется только если вероятность какого-то типа может быть нулевой.

пример, профилю стратегий $((+, +), (-, -))$ соответствуют выигрыши

$$\frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot (-12) = 6$$

и

$$\frac{2}{3} \cdot 36 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 28.$$

Соответствующая матрица выигрышей с подчеркнутыми оптимальными откликами представлена в Таблице 6.4. В игре имеется два равновесия Нэша, совпадающие с найденными ранее: $((+, -), (-, -))$ и $((-, -), (+, -))$.

Таблица 6.4. Нормальная форма Игры 47 — по ожидаемым выигрышам игроков

		Игрок 2			
		+, +	+, -	-, +	-, -
Игрок 1	+, +	16 18	20 14	24 10	<u>28</u> 6
	+, -	13 21	17 17	17 <u>13</u>	<u>21</u> <u>9</u>
	-, +	7 27	<u>11</u> 17	3 7	-3 7
	-, -	4 <u>30</u>	<u>8</u> <u>20</u>	-4 10	0 0

6.3. Статические байесовские игры с коррелированными типами

Исходно игрок знает только свой тип. Но типы игроков могут быть взаимосвязаны между собой в вероятностном смысле. Поэтому по своему типу игрок в некоторых случаях может делать выводы о том, какого типа другие игроки. Может быть так, что игрок по своему типу может точно определить тип другого игрока. В байесовской игре неполнота информации означает, что по крайней мере один игрок не точно знает тип некоторого другого игрока.

«Знает» или «не знает» здесь определяется по формуле Байеса. Отсюда и название. Игры называются байесовскими из-за того, что их анализ должен быть вероятностным и построен на условных вероятностях. Зная свой тип и общее распределение типов, игрок может создать себе определенное

представление о типах других игроков, если воспользуется условным распределением (условным относительно своего типа, который с точки зрения этого игрока не является случайным).

Следующий пример не является полноценной игрой. По сути это ситуация байесовского принятия решения, подобная той, которые мы рассматривали в главе 1, поскольку выбор в нем делает только один игрок. Однако этот пример включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Он показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над этой игрой позволяют сломать некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры. Кроме того, это пример игры в которой типы не являются независимыми (игры с *коррелированными типами*).

Игра 48 («Вахтер»): На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать A и B). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть 2 типа вахтера (обозначим их соответственно a и b). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом, если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит -1 , а если чужим, то 1 . Если вахтер не проверит посетителя, то получит выигрыш 0 . \odot

Посетитель в этой игре не имеет никакого выбора. По сути дела, эта игра вахтера с природой. Матрица игры приведена в Таблице 6.5. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена p_{Aa} и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.

Таблица 6.5.

		Посетитель	
		A	B
Вахтер	a	проверять	$\frac{-1}{0} \quad [p_{Aa}]$
	a	не проверять	$\frac{1}{0} \quad [p_{Ba}]$
	b	проверять	$\frac{-1}{0} \quad [p_{Ab}]$
	b	не проверять	$\frac{1}{0} \quad [p_{Bb}]$

Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $p_{Aa}/(p_{Aa} + p_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой,

если он кажется своим, равна $p_{Ba}/(p_{Aa} + p_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа a , если он проверяет документы, равен

$$\frac{p_{Aa}}{p_{Aa} + p_{Ba}} \cdot (-1) + \frac{p_{Ba}}{p_{Aa} + p_{Ba}} \cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа b , если он проверяет документы, равен

$$\frac{p_{Ab}}{p_{Ab} + p_{Bb}} \cdot (-1) + \frac{p_{Bb}}{p_{Ab} + p_{Bb}} \cdot 1,$$

а если не проверяет, то 0.

Если вахтер опытен, то вероятность p_{Aa} велика по сравнению с вероятностью p_{Ba} , а вероятность p_{Ab} велика по сравнению с вероятностью p_{Bb} , и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у тех, кто ему кажется чужими и не будет проверять документы у тех, кто ему кажется своими.

Задачи

Задача 129 [34] Фирма SUN — монополист на рынке научных компьютерных рабочих станций. Однако SUN столкнулась с потенциальным конкурентом — фирмой MOON. SUN и MOON делают ходы одновременно: SUN выбирает одну из двух цен на свои компьютеры, высокую или низкую, а MOON выбирает, войти ли в рынок или не входить. Вход в отрасль связан для MOON с издержками. Если MOON не войдет, то SUN останется монополистом. Если MOON войдет, то они будут некоторое время конкурировать, но затем фирма с более высокими издержками вынуждена будет уйти из отрасли, а фирма с более низкими издержками останется монополистом. Известно, что с 50%-й вероятностью издержки SUN ниже чем издержки MOON. SUN знает свои издержки, когда устанавливает свою цену, а MOON не знает издержки SUN. Издержки MOON известны обеим фирмам.

В Таблице 6.6 показаны дисконтированные прибыли этих двух фирм в зависимости от выбранных действий и отношения между издержками.

1. Для каждой из фирм опишите множество чистых стратегий
2. Сконструируйте стратегическую форму этой игры и найдите все равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях.

Задача 130 [40] Вычислите все равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях в следующей статической игре с неполной информацией, построенной на основе двух игр, показанных в Таблице 6.7. Выигрыши в берутах из

Таблица 6.6. Данные для задачи 129

Издержки фирмы MOON ниже		SUN	
		высокая	низкая
		войти	не входит
MOON	войти	100, 20	100, 5
	не входит	0, 90	0, 30

Издержки фирмы SUN ниже

Издержки фирмы MOON ниже		SUN	
		высокая	низкая
		войти	не входит
MOON	войти	-20, 60	-20, 20
	не входит	0, 120	0, 70

левой или из правой игры на основе жребия с равной вероятностью. Предполагается, что Игрок 1 знает, какая игра выбрана, а Игрок 2 — нет.

Таблица 6.7. Данные для задачи 130

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	1, 1	0, 0
	B	0, 0	0, 0

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	0, 0	0, 0
	B	0, 0	2, 2

Задача 131 В игре участвуют два игрока — водитель и автоинспектор. Водитель может либо превышать скорость (+), либо не превышать (-). Автоинспектор может либо контролировать водителя (+), либо сачковать (-). Водители бывают двух типов — наглые (70%) и робкие (30%). Автоинспекторы тоже бывают двух типов — старательные (60%) и ленивые (40%). Каждый из двух игроков знает свой тип, но не знает тип другого игрока. Типы игроков независимы. Выигрыши в зависимости от типов игроков и их действий представлены в Таблице 6.8. Найдите все равновесия Байеса—Нэша этой игры.

Таблица 6.8. Игра «Водитель — автоинспектор»

		Автоинспектор				
		Старательный		Ленивый		
Водитель		+	-	+	-	
Наглый	+	30 -10	0 20	10 -10	0 20	[0,7]
	-	-10 0	0 0	-40 0	0 0	
Робкий	+	30 -30	0 10	10 -30	0 10	[0,3]
	-	-10 0	0 0	-40 0	0 0	
		[0,6]		[0,4]		

Задача 132 Два партнера ($i = 1, 2$) одновременно решают, инвестировать ли в проект или нет. Если оба инвестируют, то проект окажется успешным и каждый получит доход v_i . В противном случае проект провалится и каждый получит 0. Инвестиции (вне зависимости от успешности проекта) связаны для отдельного партнера с издержками c . Каждого из партнеров интересует чистый доход. В природе встречаются два типа партнеров. Партнеры типа H получают высокий доход от проекта, $v_i = 2$, и встречаются с вероятностью μ . Партнеры типа L получают низкий доход от проекта, $v_i = 1$, и встречаются с вероятностью $1 - \mu$. Типы двух партнеров независимы.

1. При каких условиях на параметры μ , c будет существовать равновесие (Байеса—Нэша) в котором каждый из партнеров инвестирует, если и только если имеет тип H ?
2. Найдите все возможные равновесия в зависимости от параметров μ , c .

Задача 133 [30] Рассмотрите следующую игру двух лиц с неполной информацией между друзьями А (он выбирает строки) и В (выбирает столбцы), которые живут на большом расстоянии друг от друга. Они играют в игру по телефону. Каждый имеет по две стратегии, C и T . Прогноз погоды по радио верно предсказывает, что по крайней мере в одной из двух местностей будет дождь. Вероятности равны $P(\text{дождь у } A) = 1/3$, $P(\text{дождь у } B) = 1/3$, $P(\text{дождь у обоих}) = 1/3$. Каждый знает только погоду в своей местности. Матрица выигрышей не зависит от состояния природы и имеет вид, показанный в Таблице 6.9.

Таблица 6.9. Данные к задаче 133

		Игрок В	
		С	Т
Игрок А	С	5	6
	Т	2	1

1. Предположите, что это игра с полной информацией. Найдите все равновесия Нэша.
2. Покажите, что когда каждый игрок играет С при дожде и Т при ясной погоде, то это равновесие Байеса—Нэша.
3. Сравните выигрыши. Какова роль информации в этой игре?

Задача 134 Имеется два игрока — продавец единицы некоторого неделимого товара и покупатель. Продавец готов отдать свой товар не меньше, чем за c руб., а покупатель готов купить товар не больше, чем за v руб. Покупатель знает свою оценку v , но не знает оценку продавца c , только распределение вероятностей для нее. Аналогично продавец знает свою оценку c , но не знает оценку покупателя v , только распределение вероятностей для нее. Игроки одновременно объявляют, хотят ли они участвовать в сделке. Если хотя бы один откажется, то сделка не состоится и каждый получит выигрыш 0. Если оба согласятся, то сделка происходит по некоторой цене p . При этом выигрыш продавца будет равен $p - c$, а выигрыш покупателя — $v - p$.

Предположите, что распределение оценок независимо, оценка продавца c может принимать значения 1 или 3 с равными вероятностями, а оценка покупателя v — значения 2 или 4 с равными вероятностями.

1. Пусть цена известна заранее и равна $p = 2,5$. Найдите все байесовские равновесия этой игры.
2. Пусть имеется посредник, который знает оценки обоих игроков и он устанавливает цену на уровне среднего, т. е. $p = (c + v)/2$. Он сообщает эту цену только после того, как игроки объявят, свое решение об участии в сделке. Найдите все байесовские равновесия этой игры.

Задача 135 [30] Рассмотрите следующую игру с двумя состояниями, А и В. Выигрыши указаны в Таблице 6.10. Состояния равновероятны.

Таблица 6.10. Данные к задаче 135

Игрок 1	A	Игрок 2		Игрок 1	B	Игрок 2	
		L	R			L	R
	U	6, 0	4, 1		U	0, 0	1, 1
	M	0, 0	0, 1		M	6, 0	4, 1
	D	5, 1	3, 0		D	5, 1	3, 0

1. Предположим, что ни один из игроков не знает, какое состояние реализовалось. Найдите (единственное) равновесие Байеса—Нэша.
2. Предположим теперь, что игрок 1 знает истинное состояние, а игрок 2 — нет. Что будет в этом случае?
3. Сравните равновесия. При каком информационном режиме игрок 1 находится в более выгодном положении?

Задача 136 [30] Рассмотрите пример интересного класса игр, называемых играми «отправитель — получатель». Игрок 1 обладает некоторой частной информацией, но не имеет возможности выбирать действия. Игрок 2 имеет возможность выбирать действия. Выигрыши каждого игрока зависят как от частной информации (типа игрока 1), так и от действий игрока 2. Игрок 1, однако, играет в этой игре не пассивную роль. Он может послать сообщение игроку 2, информируя его о своем типе.

Предположим, что игрок 2 имеет три варианта действий: x , y и z . Игрок 1 может быть типа A или типа B . Игрок 2 полагает, что оба типа одинаково вероятны. В Таблице 6.11 указаны выигрыши этих двух игроков в зависимости от типа игрока 1 и действий игрока 2. Игрок 1 может послать одно из двух сообщений: α или β . Стратегия игрока 1 — это выбор сообщения в зависимости от своего типа, а стратегия игрока 2 — это выбор действия в зависимости от сообщения, которое он получает. (Такого рода игры развивают понятие равновесия Байеса—Нэша, потому что игрок 2 должен спросить себя, какие представления относительно типа игрока 1 он имеет после получения от него сигнала.)

1. Предположим, что у игроков есть исправно работающие телефоны. В случае, когда игрок 1 использует стратегию $A \rightarrow \alpha$, $B \rightarrow \beta$, какой вывод о типе игрока 1 сделает игрок 2, если он получит сигнал α ? Тот же вопрос для стратегии $A \rightarrow \alpha$, $B \rightarrow \alpha$.

Таблица 6.11. Данные к задаче 136

		Игрок 2		
		x	y	z
Природа (тип игрока 1)	A	3 2	2 0	0 -1
	B	0 1	2 2	3 0

- Покажите, что не существует равновесия Байеса—Нэша, в котором игрок 1 может сигнализировать свой тип. Покажите, что в единственном равновесии игрок 2 выбирает y вне зависимости от того, какой сигнал посылает игрок 1.
- Предположим, что у игрока 1 есть голубь. Если он посылает голубя, тот добирается до игрока 2 с вероятностью 0,5. Когда игрок 1 использует стратегию $A \rightarrow$ голубь, $B \rightarrow$ ничего, какой вывод о типе игрока 1 сделает игрок 2, если он увидит голубя? Тот же вопрос для стратегий $A \rightarrow$ голубь, $B \rightarrow$ голубь и $A \rightarrow$ ничего, $B \rightarrow$ ничего.
- Покажите, что существует равновесие, в котором игрок 1 посылает голубя, если он типа A , и не посылает, если он типа B , а игрок 2 выбирает x , если он получает голубя, и y , если не получает.
- Что лучше для этих игроков — телефон или голубь?

Задача 137 [39] Богатство отца составляет 3 млн долл. с вероятностью $1/5$, 6 млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot 4/5$, 12 млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^2$, и т. д. (то есть $3 \cdot 2^k$ млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^k$ для каждого $k \geq 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln w$. (Указание: $3^9 > 2^{14}$.)

Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом, каждый из братьев говорит «Да» или «Нет» (одновременно). Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом тип каждого брата — это элемент множества $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$.

1. Каково распределение вероятностей по типам?
2. Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.
3. Опишите равновесие (Байеса—Нэша) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие.
4. Существует ли в этой игре другое равновесие?
5. Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $3 \cdot 2^K$ млн долл. (для некоторого $K \geq 1$). Охарактеризуйте равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

Задача 138 [40] Игрок 1 бывает двух типов: a и b . Игрок 2 тоже бывает двух типов: c и d . Условные вероятности для этих типов равны

$$P(c | a) = 1, \quad P(c | b) = 3/4, \quad P(a | c) = 3/4, \quad P(a | d) = 0.$$

1. Проверьте, что эти условные вероятности можно получить из совместного распределения типов двух игроков, найдя такое распределение (т. е. вероятности четырех возможных комбинаций типов).
2. Предположите как обычно, что каждый игрок знает свой собственный тип и условные вероятности, указанные выше. Игрок 1 выбирает T или B , а Игрок 2 L или R . Выигрыши в зависимости от типов и действий игроков указаны в Таблице 6.12 (кроме комбинации типов (a, d) , имеющей нулевую вероятность).
3. Найдите для этой игры все равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях.

Задача 139 [12] Рассмотрите дуополию Курно, действующую на рынке с обратной функцией спроса $P(Q) = a - Q$, где $Q = q_1 + q_2$ — общий объем продаж на рынке. Обе фирмы имеют одинаковые функции общих издержек $C_i(q_i) = cq_i$, но сталкиваются с неопределенным спросом. Спрос высокий ($a = a_H$) с вероятностью θ и низкий ($a = a_L$) с вероятностью $1 - \theta$. Более того, информация асимметрична: фирма 1 знает, высокий или низкий спрос, а фирма 2 не знает. Остальные параметры ситуации общеизвестны. Две фирмы одновременно выбирают количества.

1. Каковы множества стратегий двух фирм?
2. Сделайте предположения относительно параметров a_H , a_L , θ и c . Каким будет равновесие Байеса—Нэша этой игры?

Таблица 6.12. Данные для задачи 138

(a, c)		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	2	0
	B	3	1

(b, c)		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	2	0
	B	0	1

(b, d)		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	2	0
	B	3	1

Динамические байесовские игры и совершенное байесовское равновесие

Динамические байесовские игры. Совершенное в подыграх равновесие в динамических байесовских играх. Представление игр с неполной информацией (байесовских игр) в виде игр с несовершенной информацией. Использование формулы Байеса для расчета представлений в информационных множествах. Совершенное байесовское равновесие.

7.1. Введение

Начнем этот параграф с рассмотрения разновидности игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статических игр с полной информацией, т. е. динамические байесовские игры (динамические игры с неполной информацией).

В качестве примера динамической байесовской игры, рассмотрим вариант Игры 37 «Король и рыцарь».

Игра 49 («Честный король и рыцарь»): Пусть в отличие от Игры 37 рыцарь знает, что короли бывают двух типов: честные и нечестные. Для честного короля принципиально важно сдержать свое слово и отдать рыцарю половину королевства, если тот победит дракона. Если рыцарь победит драко-

на, и честный король не сдержит своего слова, то его выигрыш будет равен $x = 0$, в отличие от нечестного короля, для которого $x = 2$ (Рис. 7.3). Вероятность встретить честного короля равна p . Рыцарь, принимая свое решение, не знает, с королем какого типа он имеет дело. ⊙

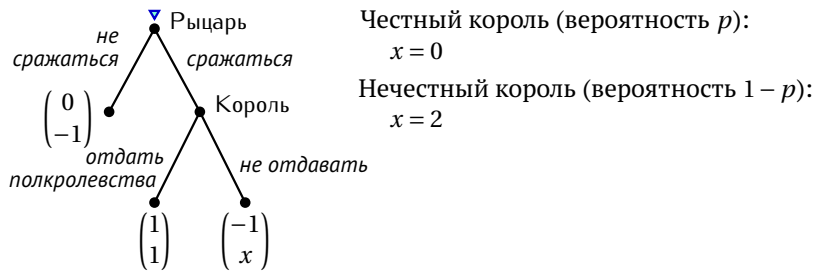


Рис. 7.1. Дерево Игры 49

Рассмотренную ранее концепцию решения для статических игр с неполной информацией — байесовское равновесие (равновесие Байеса—Нэша) — можно применить и к динамическим играм с неполной информацией. Но данная концепция может давать «лишние» равновесия в динамических играх, в которых игроки ходят по очереди, а не одновременно. Покажем это на примере Игры 49.

Таблица 7.1. Матрица выигрышей в Игре 49 «Честный король и рыцарь», приведенной к «статическому» виду

Рыцарь

сраж.

не сраж.

		Король			
		честный $[p]$		нечестный $[1-p]$	
		отд.	не отд.	отд.	не отд.
Рыцарь	сраж.	1 1	-1 0	1 1	-1 2
	не сраж.	0 -1	0 -1	0 -1	0 -1

Если привести игру к «статическому» байесовскому виду, то получится матрица, показанная в Таблице 7.1. Для того, чтобы получить нормальную форму Игры 49, следует рассчитать ожидаемые выигрыши рыцаря в зависимости от стратегии короля. Если короли обоих типов отдают полкоролевства, то ожидаемый выигрыш рыцаря равен 1, а если не отдают, то -1 . Если

честный король отдает, а нечестный нет, то ожидаемый выигрыш равен

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1.$$

Если честный король не отдает полкоролевства, а нечестный отдает, то ожидаемый выигрыш рыцаря равен

$$p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1 = 1 - 2p.$$

Остальные выигрыши в нормальной форме очевидны.

Нормальная форма рассматриваемой игры при $p = 0,75$ показана в Таблице 7.2. Выигрыши, соответствующие оптимальным откликам, указаны подчеркиванием. Видно, что в игре имеется два равновесия Нэша. Равновесие (*сражаться*, (*отдать*, *не отдавать*)) вполне естественно. Честный король отдает полкоролевства, а нечестный король — нет. При этом, поскольку вероятность, что король честный, относительно велика, рыцарю выгодно сражаться ($0,5 > 0$).

Таблица 7.2. Нормальная форма Игры 49 при $p = 0,75$

		Король (честный, нечестный)			
		(отд., отд.)	(отд., не отд.)	(не отд., отд.)	(не отд., не отд.)
Рыцарь	сраж.	<u>1</u> (<u>1</u> ; 1)	<u>0,5</u> (<u>1</u> ; <u>2</u>)	-0,5 (0; 1)	-1 (0; <u>2</u>)
	не сраж.	0 (<u>-1</u> ; <u>-1</u>)	0 (<u>-1</u> ; <u>-1</u>)	<u>0</u> (<u>-1</u> ; <u>-1</u>)	<u>0</u> (<u>-1</u> ; <u>-1</u>)

Другие два равновесия представляются неестественными. В обоих равновесиях честный король не отдает полкоролевства. Рыцарь, зная это, не будет сражаться ($-0,5 < 0$ для одного равновесия и $-1 < 0$ для другого). Король любого типа при том, что рыцарь не сражается, получает вне зависимости от своей стратегии -1 , и он не может выиграть от изменения своей стратегии.

Частично эту проблему «лишних» равновесий можно снять, если рассматривать не только игру целиком, но и подыгры, т. е. «скрестить» совершенное в подыграх равновесие Нэша и равновесие Байеса—Нэша.

После того как рыцарь решит сражаться, начинается подыгра, в которой король одного из типов выбирает, отдавать полкоролевства или нет. В этой подыгре у рыцаря нет ходов, а у короля такие же четыре стратегии, как и в игре в целом. Таким образом, нормальная форма рассматриваемой

подыгры — это *первая строчка* матрицы, изображенной в Таблице 7.2. Очевидно, что в этой подыгре честный король отдаст полкоролевства, а нечестный нет. Значит, первое из равновесий является совершенным в подыграх, а два других не являются.

Мы рассмотрели пока только случай $p = 0,75$. Но ясно, что в подыгре, начинающейся после того, как рыцарь решит сражаться, король будет использовать стратегию (*отдать, не отдавать*) вне зависимости от вероятности p .

Если рыцарь не будет сражаться, то он в любом случае получит 0. Если рыцарь будет сражаться, то он с вероятностью p он получит полкоролевства и выигрыш 1, а с вероятностью $1 - p$ останется ни с чем и получит выигрыш -1 . Ожидаемый выигрыш был вычислен выше; он равен $2p - 1$. Рыцарю выгодно сражаться, если $p > 0,5$, т. е. если честные короли встречаются достаточно часто (тогда $2p - 1 > 0$). Рыцарю не выгодно сражаться, если $p < 0,5$, т. е. если честные короли встречаются редко (тогда $2p - 1 < 0$). (При $p = 0,5$ ему все равно, но такая ситуация вряд ли может возникнуть.)

Таким образом, при $p > 0,5$ единственным совершенным в подыграх равновесием Байеса—Нэша будет (*сражаться, (отдать, не отдавать)*), а при $p < 0,5$ совершенным в подыграх равновесием Байеса—Нэша будет (*не сражаться, (отдать, не отдавать)*). В вырожденном случае $p = 0,5$ существуют два совершенных в подыграх равновесия. Указанные равновесия являются *разделяющими*, поскольку согласно равновесной стратегии короля выбор действий зависит от типа короля.

7.2. Представление байесовских игр в виде динамических игр с несовершенной информацией

Важная идея, принадлежащая Дж. Харшаньи, состоит в том, что байесовские игры (игры с неполной информацией) можно представить как динамические игры с несовершенной информацией, если ввести в качестве дополнительного игрока *природу*, делающую случайные ходы. То, что игрок не знает типы других игроков, проявляется просто в том, что он не полностью владеет информацией о ходах, сделанных ранее природой. Это отражается с помощью соответствующего задания информационных множеств. Таким образом, анализ игр с неполной информацией можно всегда свести к анализу игр с полной, но несовершенной информацией.

На Рис. 7.2 показано построенное по этому принципу дерево игры «Вахтер» (Игра 48 на с. 239). Знаками «+» обозначены действия «проверить», а знаками «-», соответственно, «не проверить».

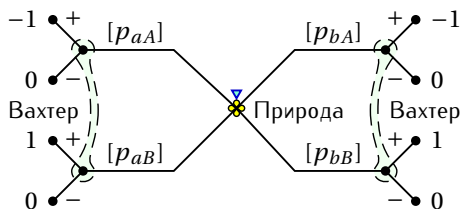


Рис. 7.2. Дерево игры «Вахтер»

Природа выбирает с соответствующими вероятностями одно из четырех возможных состояний: Aa , Ba , Ab или Bb . (Здесь Ba , например, означает, что посетитель чужой, но кажется вахтеру своим. Вахтер не различает A и B (свой или чужой), но различает a и b (кажется своим или кажется чужим). Это несовершенство информации отражается на дереве с помощью информационных множеств: состояния Aa и Ba неотличимы для вахтера и состояния Ab и Bb тоже для него неотличимы.

Таким же образом можно представить и динамическую байесовскую игру. Например, с учетом случайного хода природы дерево игры Игры 49 будет выглядеть так, как изображено на Рис. 7.3. Такое представление Игры 49 позволяет использовать для поиска решения обратную индукцию. Рассмотрим, как это делать.

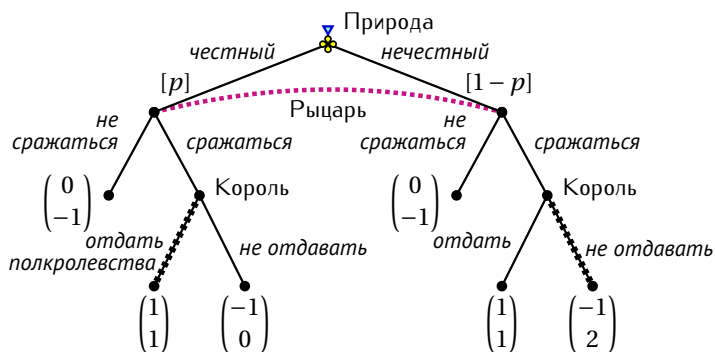


Рис. 7.3. Дерево Игры 49 со случайным ходом природы

В этой игре рыцарь может предсказать, что сделает король определенного типа. Если король честный, то он отдаст полкоролевства (так как $1 > 0$).

Если король нечестный, то он оставит полкоролевства себе (так как $1 < 2$). Соответствующие действия помечены на Рис. 7.3 жирным пунктиром. После свертывания игра превращается в ситуацию принятия решения для рыцаря (Рис. 7.4). Как несложно проверить, полученные с помощью обратной индукции решения будут совпадать с найденными ранее совершенными в подыграх равновесиями.

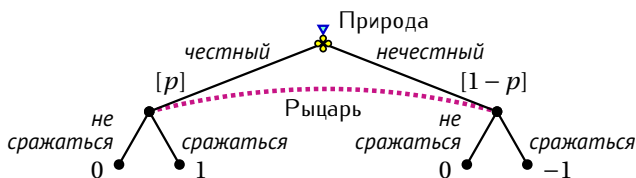


Рис. 7.4. Дерево свернутой Игры 49 — принятие решения рыцарем

Рассмотрите принятие решения рыцарем (Рис. 7.4). Покажите, что он будет сражаться при $p > 0,5$ и не будет сражаться при $p < 0,5$. Выпишите для каждого из случаев профили стратегий игроков и убедитесь, что они совпадают с найденными выше совершенными в подыграх байесовскими равновесиями.



Рассмотрим еще одну подобную игру.

Игра 50: [17] В два конверта кладется по 1000 руб., а третий конверт остается пустым. Конверты тасуются, игрок В наугад берет один из конвертов и изучает его содержимое. Затем происходит одноэтапный торг. Игрок А предлагает купить конверт, доставшийся игроку В, за p руб. ($p \geq 0$), при этом он не имеет возможности узнать, что находится в конверте. Игрок В может либо принять это предложение, либо отклонить его. ☉

В этой игре игрок В может быть одного из двух типов: ему может достаться конверт с деньгами или пустой конверт. Первый тип игрока В встречается с вероятностью $2/3$, а второй — с вероятностью $1/3$. Дерево игры изображено на Рис. 7.5.

Рассмотрим оптимальный отклик игрока В каждого из типов на цену p , предложенную игроком А.

Если бы А предложил купить конверт за любую положительную цену, меньшую 1000 руб., то В согласился бы, только если бы конверт был пуст.

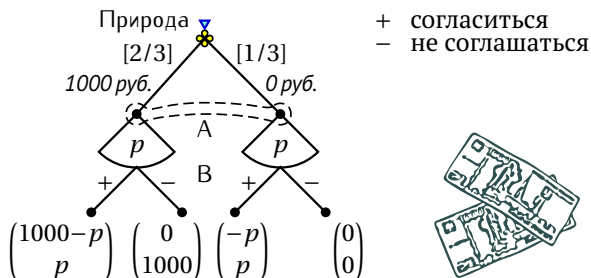


Рис. 7.5. Дерево Игры 50

(Например, если бы А предложил купить конверт за 50 руб., то В отдал бы конверт за 50 руб., если бы конверт был пустым, и не согласился бы на сделку, если бы в нем лежали 1000 руб. Таким образом, для А выгоднее предложить 0 руб., чем 50 руб.)

Если бы А предложил купить конверт за цену, большую 1000 руб., то В согласился бы в любом случае, независимо от наличия денег в конверте.

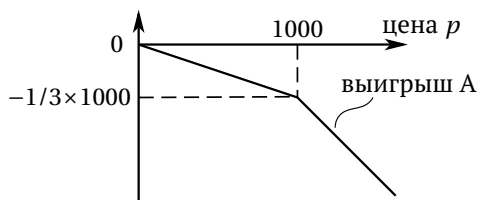


Рис. 7.6. Функция выигрыша игрока А в (свернутой) Игре 50 с учетом оптимального отклика игрока В.

Рассмотрим теперь решение игрока А. Какую цену p он должен предложить? Учитывая отклик В, выигрыш А при разных уровнях цены составил бы:

$$p > 1000: \quad 2/3 \times (1000 - p) + 1/3 \times (-p) = 2/3 \times 1000 - p,$$

$$p = 1000: \quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times (-1000) = -1/3 \times 1000,$$

$$p < 1000: \quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times (-p) = -1/3 \times p,$$

$$p = 0: \quad 2/3 \times 0 + 1/3 \times 0 = 0.$$

Выигрыш как функция цены убывает. Максимум достигается в нуле (см. Рис. 7.6). (При расчете выигрышей здесь игрок А предполагается нейтраль-

ным к риску. Анализ не сильно изменится, если ввести в анализ возрастающую элементарную функцию полезности.) Следовательно, А должен предложить 0 руб.

Проанализируйте Игру 50, предполагая, что ожидаемый выигрыш игрока А рассчитывается в соответствии с возрастающей элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ и А исходно обладает богатством K . Подсказка: найдите знак производной по цене ожидаемой полезности игрока А (где полезность рассчитывается с учетом отклика игрока В).



Проанализируйте модифицированный вариант Игры 50, в котором все конверты должны достаться игроку В, игрок В заглядывает в один из трех конвертов, а игрок А предлагает деньги за один из тех двух конвертов, в которые игрок В еще не заглядывал.



Пусть если игрок А в Игре 50 приобретает конверт у игрока В, то прилетает волшебник в голубом вертолете и удваивает количество денег, лежащих в конверте (т. е. $0 \rightarrow 0$ и $1000 \rightarrow 2000$). Проанализируйте этот модифицированный вариант игры,



Заметим, что в рассмотренных примерах не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор рыцаря, поскольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако, зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией.

В связи с этим проблема «лишних равновесий» решается далеко не полностью. Некоторые неподходящие равновесия могут проистекать из того факта, что в динамической игре игроки имеют основание менять свои

представления о вероятностях тех или иных типов в процессе игры. Такая процедура пересмотра ожиданий не предусматривается байесовским равновесием. Это делает байесовское равновесие некорректным инструментом для анализа динамических игр с неполной информацией. В дальнейшем мы рассмотрим более подходящую концепцию решения — совершенное байесовское равновесие. Эту концепцию можно применить, чтобы «вычистить» равновесия, порождаемые концепцией совершенного в подыграх равновесия Байеса—Нэша,

7.3. Ожидания в информационных множествах и совершенное байесовское равновесие

Использование развернутой формы игры со случайными ходами природы и информационными множествами предоставляет богатые возможности для моделирования и анализа самых различных жизненных ситуаций, характеризующихся неполнотой и/или несовершенством информации. При этом можно учесть не только исходное распределение информации между игроками, но и изменение такого распределения в процессе игры. Отдельный игрок может приобретать информацию в динамике, наблюдая ходы других игроков, которые уже владеют этой информацией. Можно изучать внутреннюю структуру явлений, в которых наблюдается передача информации другим игрокам или утаивание информации.

Как мы видели, анализируя динамические игры с совершенной информацией, важно, чтобы стратегия игрока была оптимальным откликом на стратегии других игроков не только в игре в целом, но и в каждой подыгре. (Это принято называть «последовательной рациональностью».) Но особенностью байесовских игр, представленных в развернутой форме, является то, что не каждое из информационных множеств начинает отдельную подыгру. Правильно было бы распространить требование последовательной рациональности на любое информационное множество, которое может возникнуть в игре.

Но что если игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины? Тогда его оптимальный выбор (при данных стратегиях других игроков) может зависеть от того, в какой именно вершине он находится. В подобных обстоятельствах ему приходится делать некоторые предположения относительно того, в какой вершине он находится или, более точно, с какой *вероятностью* он может находиться в той или иной вершине.

Можно ввести понятие системы представлений (ожиданий) игрока¹. Си-

¹ Англ. *beliefs* — мнение, убеждения, представления, вера.

стема представлений игрока задает для каждого информационного множества данного игрока некоторое распределение вероятностей на вершинах этого информационного множества. Каждой вершине сопоставляется некоторая вероятность (из отрезка $[0; 1]$). В целом сумма вероятностей по вершинам информационного множества равна 1.

Например, в начале игры игроки могут иметь некоторые исходные представления по поводу типа каждого игрока. Но эти представления не должны быть неизменными. Игроки могут корректировать данные представления по мере того, как идет игра, с учетом действий, выбираемых другими игроками.

Пусть все игроки выбрали некоторые стратегии. Как по данному профилю стратегий найти представления в информационных множествах? Покажем, как это делать, для случая чистых стратегий.

Пусть в игре отсутствуют случайные ходы природы. Рассмотрим некоторого игрока и информационное множество, в котором этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая данному профилю стратегий и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. Рациональный игрок должен ожидать, что если игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор, то он будет находиться именно в этой вершине.

В качестве примера рассмотрим игру, изображенную на Рис. 7.7(а). Это развернутая форма простой статической игры. Если Игрок 2 ожидает, что Игрок 1 выберет стратегию R , то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

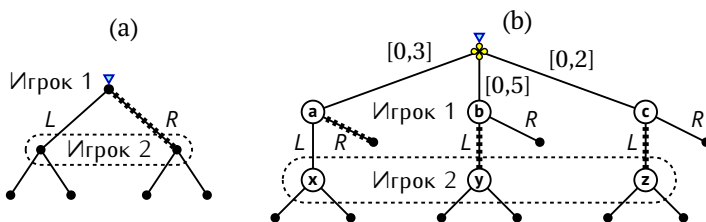


Рис. 7.7. Примеры вычисления представлений по стратегиям

Рассмотрим теперь игру, изображенную на Рис. 7.7(b). Пусть Игрок 1 использует стратегию $(a:R, b:L, c:L)$. Эта игра включает случайный ход природы, поэтому представления здесь рассчитываются несколько более сложно. Вероятности следует пересматривать в соответствии с формулами условных вероятностей, рассмотренными нами в параграфе 1.8 «Байесовское принятие решений».

В данном случае вероятность того, что игра приведет в вершину x равна нулю, в вершину y — 0,5, а в вершину z — 0,2. Общая вероятность того, что игра приведет в информационное множество Игрока 2 равна 0,7. Эта вероятность не равна единице. Чтобы получить вероятности попадания в вершины информационного множества условные относительно факта попадания в это информационное множество, надо привести сумму вероятностей к единице, для чего поделить соответствующие безусловные вероятности на их сумму 0,7. Получим, что представления Игрока 2 в его информационном множестве должны иметь вид $(0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7})$.

Найдите представления Игрока 2 в игре, изображенной на Рис. 7.7(b), если Игрок 1 использует стратегии $(a:L, b:R, c:L)$, $(a:L, b:L, c:R)$ и $(a:L, b:R, c:R)$.



Если рациональный игрок в информационном множестве имеет такого рода представления (ожидания), то на их основе он выберет такой план последующих действий, который может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию совершенного байесовского равновесия.

Совершенное байесовское равновесие состоит из двух компонент:

- * профиля стратегий всех игроков,
- * для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, его представления.

Для того, чтобы профиль стратегий и представления игроков составляли совершенное байесовское равновесие, необходимо выполнение следующих условий.

- * Выбранная игроком стратегия последовательно рациональна при данных представлениях и данных стратегиях остальных игроков.
- * Представления каждого игрока согласуются там, где это возможно, с профилем стратегий.

Поясним эти условия.

Стратегия игрока является последовательно рациональной в данном информационном множестве, если ожидаемый выигрыш игрока максима-

лен при данных представлениях и при данных стратегиях остальных игроков. Профиль стратегий является последовательно рациональным для данной системы представлений, если это выполнено для стратегии любого игрока в каждом его информационном множестве.

В каком смысле система представлений должна быть согласована с профилем стратегий, мы рассмотрели выше. Следует особо пояснить, что такое «где это возможно». Некоторые информационные множества в процессе игры будут достигаться с нулевой вероятностью при данном профиле стратегий, и для таких информационных множеств невозможно рассчитать условные вероятности попадания в вершины. Про такие информационные множества говорят, что они лежат вне равновесной траектории. Мы будем рассматривать только слабую концепцию совершенного байесовского равновесия, которая предписывает только, чтобы в информационных множествах вне равновесной траектории существовали *некоторые* представления. (Конечно, эти представления не могут быть совсем произвольными, поскольку вероятности должны быть неотрицательными и сумма их должна быть равна единице.)

Так если в игре, изображенной на Рис. 7.7(b), Игрок 1 использует стратегию $(a:R, b:R, c:R)$, то информационное множество Игрока 2 лежит вне траектории игры (достигается с вероятностью 0) и предпочтения там не определены.

Совершенное байесовское равновесие предоставляет возможности для анализа не только игр с неполной информацией, но и игр с несовершенной информацией. Поскольку игры с несовершенной информацией имеют похожую структуру (включают отсутствие информации и моделирование ожиданий), то могут использоваться аналогичные приемы анализа. Действительно, неважно, из-за чего возникло информационное множество — из-за ненаблюдаемого случайного хода природы или из-за ненаблюдаемых ходов других игроков. В любом случае можно потребовать, чтобы соответствующий игрок имел некоторые ожидания — распределение вероятностей на множестве вершин данного информационного множества.

Рассмотрим, как находить совершенное байесовское равновесие, на примере Игры 44 с развернутой формой, показанной на Рис. 5.8. Мы видели ранее, что в этой игре существуют «лишние» совершенные в подыграх равновесия.

Представления Фирмы 2 в ее информационном множестве можно задать с помощью вероятности β того, что она оказалась в левой вершине информационного множества (вероятности того, что Фирмы 1 выбрала *ва*, при условии, что она вошла). Для правой вершины вероятность соответственно равна $1 - \beta$ (Рис. 7.8).

Если Фирмы 2 имеет такие представления, то при выборе агрессивной

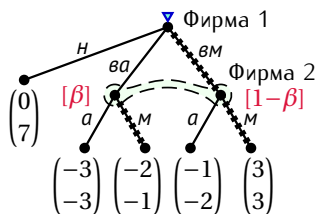


Рис. 7.8. Поиск совершенного байесовского равновесия Игры 44

политики (a) ее ожидаемый выигрыш составит

$$\beta \cdot (-3) + (1 - \beta) \cdot (-2) = -\beta - 2,$$

а при выборе миролюбивой политики (m) —

$$\beta \cdot (-1) + (1 - \beta) \cdot 3 = 3 - 4\beta.$$

Фирма 2 выберет a, только если $-\beta - 2 \geq 3 - 4\beta$, т. е. только если $\beta \geq 5/3$. Вероятность не может превышать единицы, поэтому Фирма 2 выберет m вне зависимости от стратегии Фирмы 1.

Далее, оптимальным откликом Фирмы 1 на то, что Фирма 2 ведет себя миролюбиво, является вход в отрасль и миролюбивое поведение (bm), поскольку при этом ее выигрыш максимален ($3 > -2$ и $3 > 0$).

При такой стратегии Фирмы 1 Фирма 2 должна ожидать, что она находится в правой вершине, т. е. $\beta = 0$. Мы нашли совершенное байесовское равновесие в этой игре. Это профиль стратегий (bm, m) и представления, определяемые вероятностью $\beta = 0$.

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть похожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с данным профилем стратегий. Тогда вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т. е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило не применимо.)

Описанный способ вычисления вероятностей соответствует обычным правилам для условных вероятностей. Пусть событие B_j означает, что процесс игры привел в определенную вершину информационного множества ($j = 1, \dots, m$), а событие A , что процесс игры привел в это информационное множество (в одну из вершин). Тогда вероятность события B_j при условии события A равна

$$\mathbf{P}\{B_j | A\} = \frac{\mathbf{P}B_j}{\mathbf{P}A},$$

где $\mathbf{P}\{A\} = \sum_{k=1}^m \mathbf{P}\{B_k\}$. Чтобы можно было применить эту формулу, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($\mathbf{P}\{A\} \neq 0$).

Поясним сказанное на примере дерева, изображенного на Рис. 7.9(a). Если третий игрок считает, что первый игрок выбирает левую ветвь с вероятностью 0,4, и что второй игрок выбирает левую и правую ветви с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина c будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0,4 \cdot 0,5 = 0,2$, а вершина d — с вероятностью 0,6. Таким образом, он должен сопоставить вершине c вероятность

$$\frac{0,2}{0,2 + 0,6} = 0,25,$$

а вершине d — вероятность

$$\frac{0,6}{0,2 + 0,6} = 0,75.$$

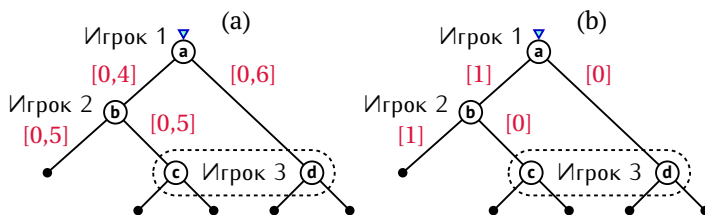


Рис. 7.9. (a) Игрок 3 должен сопоставить вершинам c и d вероятности 0,25 и 0,75 соответственно. (b) Ожидания Игрока 3 могут быть произвольными

Как уже говорилось, не всегда можно по данному набору стратегий сформировать представления. Например, в игре изображенной на Рис. 7.9(b), при указанных о стратегиях Игроков 1 и 2 Игрок 3 не может сформировать представлений в своем информационном множестве. Игрок 3 может получить ход только в результате ошибок Игроков 1 и 2, и трудно судить, какая из ошибок более вероятна.

Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы соотношений: представления в информационных множествах находятся в соответствии с равновесным профилем стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе представлений в информационных множествах и равновесных стратегий других игроков.

Рассмотрим пример нахождения совершенного байесовского равновесия в смешанных стратегиях.

Игра 51: Студент может готовиться к зачету или не готовиться. На зачете преподаватель дает студенту одну задачу. Вероятность решить задачу равна 90% для студента, который готовился, и 10% для студента, который не готовился. По результатам решения задачи преподаватель может поставить зачет или не ставить. Само по себе решение задачи не важно ни студенту, ни преподавателю. Если студент готовился и получил зачет, то выигрыш студента равен 1, а выигрыш преподавателя равен 2. Если студент готовился и не получил зачет, то выигрыш студента равен -1 , а выигрыш преподавателя равен -1 . Если студент не готовился и получил зачет, то выигрыш студента равен 2, а выигрыш преподавателя равен 0. Если студент не готовился и не получил зачет, то выигрыш студента равен 0, а выигрыш преподавателя равен 1.

Дерево Игры 51 изображена на Рис. 7.10. На дереве g означает «готовиться», ng — «не готовиться», p — «решает задачу», np — «не решает», z — «зачет», nz — «незачет».

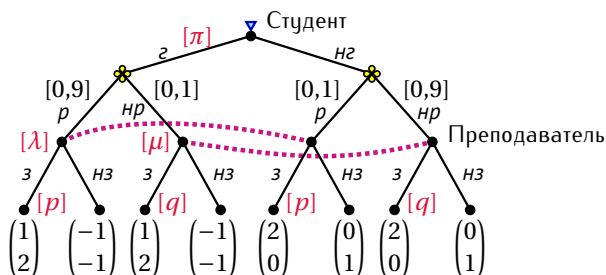


Рис. 7.10. Поиск совершенного байесовского равновесия Игры 51

Обозначим через π вероятность того, что студент готовится (g), через p вероятность того, что преподаватель ставит зачет, если студент решил задачу, а через q вероятность того, что преподаватель ставит зачет, если сту-

дент не решил задачу. Пусть кроме того λ — вероятность, что студент готовился к зачету при условии, что он решил задачу, а μ вероятность, что студент готовился к зачету при условии, что он не решил задачу. Вероятности λ и μ задают представления преподавателя в двух его информационных множествах.

Если студент готовится к зачету, то его ожидаемая полезность равна

$$0,9(p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1)) + 0,1(q \cdot 1 + (1 - q) \cdot (-1)) = 0,9(2p - 1) + 0,1(2q - 1) = 1,8p + 0,2q - 1.$$

Если студент не готовится к зачету, то его ожидаемая полезность равна

$$0,1(p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 0) + 0,9(q \cdot 2 + (1 - q) \cdot 0) = 0,2p + 1,8q.$$

Студенту безразлично, готовиться или нет, при

$$1,8p + 0,2q - 1 = 0,2p + 1,8q,$$

т. е. при $p = q + 5/8$. Если студенту безразлично, то он может выбрать любую вероятность $\pi \in [0; 1]$. При $p > q + 5/8$ (т. е. когда результаты решения задачи достаточно существенно влияют на вероятность получения зачета) студенту выгоднее готовиться к зачету ($\pi = 1$). При $p < q + 5/8$ ему выгодно не готовиться ($\pi = 0$). В целом получаем следующий оптимальный отклик студента:

$$\pi(p, q) = \begin{cases} 1, & p > q + 5/8, \\ [0, 1], & p = q + 5/8, \\ 0, & p < q + 5/8. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь представления преподавателя в его информационных множествах. Вероятность того, что студент готовился и решил задачу равна $\pi \cdot 0,9$. Вероятность того, что студент не готовился и решил задачу равна $(1 - \pi) \cdot 0,1$. Общая вероятность того, что студент решил задачу (т. е. вероятность того, что игра приведет в левое информационное множество) равна $\pi \cdot 0,9 + (1 - \pi) \cdot 0,1$. Таким образом, в левом информационном множестве вероятность левой вершины (вероятность того, что студент готовился, при том, что он решил задачу) равна

$$\lambda(\pi) = \frac{\pi \cdot 0,9}{\pi \cdot 0,9 + (1 - \pi) \cdot 0,1} = \frac{9\pi}{1 + 8\pi}.$$

Аналогичным образом вычисляется вероятность левой вершины в правом информационном множестве (вероятность того, что студент готовился, при том, что он не решил задачу):

$$\mu(\pi) = \frac{\pi \cdot 0,1}{\pi \cdot 0,1 + (1 - \pi) \cdot 0,9} = \frac{\pi}{9 - 8\pi}.$$

Пусть студент решил задачу (преподаватель находится в левом информационном множестве). При данных представлениях $(\lambda, 1 - \lambda)$ ожидаемая полезность преподавателя, если он поставит зачет, равна

$$\lambda \cdot 2 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 2\lambda.$$

Если он не поставит зачет, то ожидаемая полезность равна

$$\lambda \cdot (-1) + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1 - 2\lambda.$$

Преподавателю безразлично, ставить или не ставить зачет, при

$$2\lambda = 1 - 2\lambda,$$

т. е. при $\lambda = 1/4$. При $\lambda > 1/4$ преподавателю выгоднее поставить зачет. В целом оптимальные действия преподавателя имеют следующий вид:

$$p(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1/4, \\ [0, 1], & \lambda = 1/4, \\ 0, & \lambda < 1/4. \end{cases}$$

Если студент не решил задачу (преподаватель находится в правом информационном множестве), то рассуждения аналогичны, только надо λ заменить на μ . Оптимальные действия преподавателя имеют такой же вид:

$$q(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 1/4, \\ [0, 1], & \mu = 1/4, \\ 0, & \mu < 1/4. \end{cases}$$

Мы нашли систему соотношений, определяющих совершенное байесовское равновесие. Решение этой системы будем искать перебором.

Пусть студент наверняка готовится, т. е. $\pi = 1$. Тогда преподаватель вне зависимости от результата решения задачи считает, что студент готовился, т. е. $\lambda = 1$ и $\mu = 1$. При таких представлениях преподаватель в любом случае ставит зачет, т. е. $p = 1$ и $q = 1$. Однако, если преподаватель в любом случае ставит зачет, то студенту не выгодно готовиться ($\pi = 0$). Такого не может быть в равновесии.

Если студент наверняка не готовится, т. е. $\pi = 0$, то преподаватель вне зависимости от результата решения задачи считает, что студент не готовился, т. е. $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. При таких представлениях преподаватель в любом случае не ставит зачет, т. е. $p = 0$ и $q = 0$. Поскольку преподаватель в любом случае не ставит зачет, то студент действительно не будет готовиться. Мы нашли одно из равновесий. Это равновесие в чистых стратегиях.

Разберем теперь случай, когда студент использует вполне смешанную стратегию, т. е. $\pi \in (0; 1)$. Такое может быть только если студенту все равно, готовиться или нет, т. е. если $p = q + 5/8$. Очевидно, что при этом $p > 0$ и $q < 1$. Можно выделить два возможных случая: $q \in (0; 1)$ и $q = 0$.

Пусть студент использует вполне смешанную стратегию ($\pi \in (0; 1)$) и преподаватель точно не ставит зачет, если студент не решил задачу ($q = 0$). Чтобы такое было в равновесии, преподаватель должен рандомизировать, если студент решил задачу, поскольку должно выполняться $p = 0 + 5/8 = 5/8$. Такая рандомизация выгодна преподавателю, только если ему все равно, т. е. если $\lambda = 1/4$. Преподаватель будет иметь такие представления в левом информационном множестве только при

$$\frac{9\pi}{1+8\pi} = \frac{1}{4},$$

т. е. при $\pi = 1/28$. Тогда в правом информационном множестве

$$\mu = \frac{\pi}{9-8\pi} = \frac{1}{244}.$$

Поскольку $\mu < 1/4$, преподавателю действительно не выгодно ставить зачет, если студент не решил задачу. Значит, мы нашли еще одно равновесие.

Пусть теперь студент использует вполне смешанную стратегию ($\pi \in (0; 1)$) и преподаватель рандомизирует, если студент не решил задачу ($q \in (0; 1)$). Такая рандомизация выгодна преподавателю, только если ему все равно, т. е. если $\mu = 1/4$. Преподаватель будет иметь такие представления в правом информационном множестве только при

$$\frac{\pi}{9-8\pi} = \frac{1}{4},$$

т. е. при $\pi = 3/4$. Тогда в левом информационном множестве

$$\lambda = \frac{9\pi}{1+8\pi} = \frac{27}{28},$$

Поскольку $\lambda > 1/4$, преподавателю выгодно всегда ставить зачет, если студент решил задачу, т. е. $p = 1$. Отсюда $q = 1 - 5/8 = 3/8$, т. е. студент действительно рандомизирует. Значит, мы нашли третье равновесие.

Таким образом, мы нашли три совершенных байесовских равновесия со следующими параметрами:

$$\pi = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

$$\pi = \frac{1}{28}, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{244}, \quad p = \frac{5}{8}, \quad q = 0$$

и

$$\pi = \frac{3}{4}, \quad \lambda = \frac{27}{28}, \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad p = 1, \quad q = \frac{3}{8}.$$

Заметим, что в данном случае множество совершенных байесовских равновесий совпадает с множеством равновесий Нэша.

Представьте Игру 51 в нормальной (стратегической) форме. Покажите, что одна из чистых стратегий преподавателя является строго доминируемой. Отбросьте эту стратегию и найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях получившейся игры. Проверьте, что множество равновесий Нэша такое же, как и множество совершенных байесовских равновесий (с точностью до различия между смешанными и поведенческими стратегиями).



7.4. Сок или пиво. Интуитивный критерий

В Игре 51 при любом поведении студента оба информационных множества преподавателя достигаются с ненулевой вероятностью. В связи с этим не возникает сложностей с вычислением представлений в этих информационных множествах.

Рассмотрим игру, в которой есть информационные множества, которые при некоторых стратегиях достигаются с нулевой вероятностью и поэтому в них невозможно сформировать ожидания однозначно. В этой игре имеются «лишние» совершенные байесовские равновесия.

Игра 52: Игрок 1 — это случайный посетитель бара. Он может быть одного из двух типов — сильным или слабым. Если Игрок 1 сильный, то он предпочитает пиво, а если слабый — то сок. Сильным Игрок 1 бывает с вероятностью 90%. Игрок 2 — постоянный посетитель бара и задира. Он получает удовольствие, если подерется со слабым Игроком 1. В то же время, он предпочитает не связываться с сильным Игроком 1. Игрок 1 знает, какого он типа, а Игрок 2 не знает, какого типа Игрок 1.

Исходный выигрыш Игрока 1 равен 20. Он уменьшается на 10, если игрок пьет нелюбимый напиток. Кроме того, выигрыш уменьшается на 20, если с игроком дерутся.

Исходный выигрыш Игрока 2 равен 10. Он увеличивается на 10, если игрок дерется со слабым и уменьшается на 10, если игрок дерется с сильным.

Дерево игры представлено на Рис. 7.11.



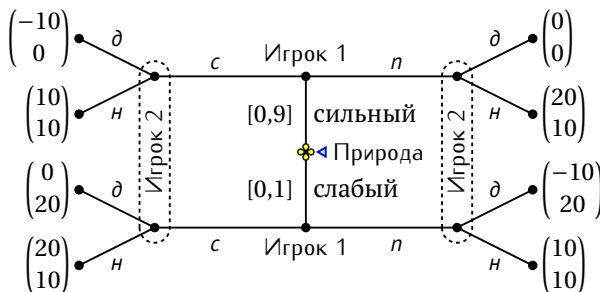


Рис. 7.11. Дерево Игры 52 «Сок или пиво»

Сначала мы представим эту игру в нормальной форме и найдем в ней все равновесия Нэша, а потом рассмотрим, какие из них являются совершенными байесовскими равновесиями.

Какие стратегии имеются у Игрока 1? Стратегия должна иметь следующий вид: если сильный то пить сок или пиво, и если слабый пить сок или пиво. Следовательно, всего Игрок 1 имеет четыре стратегии, которые можно обозначить следующим образом: $(с, с)$, $(с, п)$, $(п, с)$, $(п, п)$.

Стратегия Игрока 2 обусловлена наблюдаемой им информацией: пьет ли Игрок 1 сок или пиво. Таким образом, стратегия Игрока 2 должна предусматривать его действия (драться — $д$ и не драться — $н$) в случае, когда он наблюдает сок и в случае, когда он наблюдает пиво. Игрок 2 имеет четыре стратегии, которые можно обозначить следующим образом: $(д, д)$, $(д, н)$, $(н, д)$, $(н, н)$. Например применение стратегии $(н, д)$ означает, что Игрок 2 не дерется, если видит сок и дерется, если видит пиво.

Для того чтобы заполнить матрицу нормальной формы, требуется вычислить ожидаемые выигрыши Игрока 2 в зависимости от того, дерется ли он с сильным Игроком 1, и дерется ли он со слабым Игроком 1 (Таблица 7.3). С кем именно будет драться Игрок 2, зависит от его стратегии и от стратегии Игрока 1. Например, если сильный Игрок 1 пьет пиво, а слабый — сок, т. е. используется стратегия $(п, с)$, а Игрок 2 выбрал стратегию $(н, д)$, то Игрок 2 будет драться с сильным Игроком 1 и не будет драться со слабым Игроком 1, так что его ожидаемый выигрыш составит 1.

Рассуждая таким образом, мы можем найти выигрыши Игрока 2 при всех возможных профилях стратегий. Выигрыши двух типов Игрока 1 в зависимости от профиля стратегий найти несложно, пользуясь деревом игры. Например, как уже говорилось, при профиле стратегий $((п, с), (н, д))$ Игрок 2 будет драться с сильным Игроком 1 и не будет драться со слабым Игроком 1. При этом сильный Игрок 1 получит выигрыш 0, а слабый — вы-

Таблица 7.3. Расчет ожидаемых выигрышей Игрока 1

С сильным	Со слабым	Ожидаемый выигрыш
∂	∂	$0 \cdot 0,9 + 20 \cdot 0,1 = 2$
∂	n	$0 \cdot 0,9 + 10 \cdot 0,1 = 1$
n	∂	$10 \cdot 0,9 + 20 \cdot 0,1 = 11$
n	n	$10 \cdot 0,9 + 10 \cdot 0,1 = 10$

игрыш 20. Эти рассуждения позволяют нам получить нормальную форму игры (см. Таблицу 7.4).

Таблица 7.4. Нормальная форма Игры 52

		Игрок 2 (с, п)			
		∂, ∂	∂, n	n, ∂	n, n
Игрок 1 (сильн., слаб.)	c, c	$(-10; \underline{0})$ 2	$(-10; 0)$ 2	$(\underline{10}; \underline{20})$ <u>10</u>	$(10; \underline{20})$ <u>10</u>
	c, n	$(-10; -10)$ 2	$(-10; \underline{10})$ 1	$(\underline{10}; -10)$ <u>11</u>	$(10; 10)$ 10
	n, c	$(\underline{0}; \underline{0})$ 2	$(\underline{20}; 0)$ <u>11</u>	$(0; \underline{20})$ 1	$(\underline{20}; \underline{20})$ 10
	n, n	$(\underline{0}; -10)$ 2	$(\underline{20}; \underline{10})$ <u>10</u>	$(0; -10)$ 2	$(\underline{20}; 10)$ <u>10</u>

В Таблице 7.4 оптимальные отклики указаны подчеркиванием выигрышей. В игре есть два равновесия Нэша. Оба равновесия являются *объединяющими*, поскольку в этих равновесиях оба типа Игрока 1 ведут себя одинаково (пьют один и тот же напиток). В обоих равновесиях если Игрок 2 видит «неравновесный» напиток, то он вступает в драку. Если же Игрок 2 видит «равновесный» напиток, то он не вступает в драку. Равновесия показаны на Рис. 7.12.

Оба равновесия — совершенные байесовские. Действительно, можно подобрать представления Игрока 2 в обоих информационных множествах, которые будут соответствовать данным равновесиям. Обозначим через μ вероятность того, что Игрок 1 является сильным при том, что он пьет «неравновесный» напиток. При каких условиях на μ представления $(\mu, 1 - \mu)$ соответствуют равновесию?

Рассмотрим равновесие, в котором оба типа Игрока 1 пьют пиво. Если

Игрок 2, видя, что Игрок 1 пьет сок, и имея представления $(\mu, 1-\mu)$, выберет драку, то его ожидаемый выигрыш будет равен

$$\mu \cdot 0 + (1 - \mu) \cdot 20 = 20 - 20\mu.$$

Если он не будет драться, то ожидаемый выигрыш будет равен 10. Чтобы Игрок 2 дрался, видя сок, требуется, чтобы вероятность μ удовлетворяла следующим условиям:

$$20 - 20\mu \geq 10$$

или $\mu \leq 1/2$. Для второго равновесия, в котором оба типа Игрока 1 пьют сок, рассуждения аналогичные и условия на μ точно такие же.

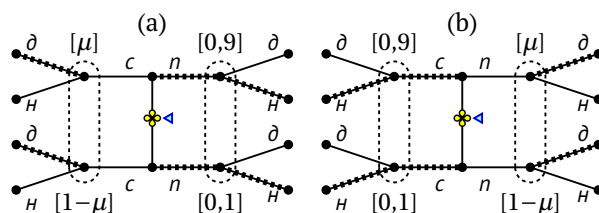


Рис. 7.12. Два равновесия Игры 52 «Сок или пиво»

Равновесие, в котором оба типа Игрока 1 пьют сок, кажется неестественным. Неестественность этого равновесия связана с не очень правдоподобными представлениями Игрока 2 в том случае, когда он наблюдает пиво. Для исключения подобных равновесий Чо и Крепс придумали так называемый интуитивный критерий². Рассмотрим этот критерий на примере данного равновесия.

Слабый игрок пьет сок и имеет 20 в равновесии. Если отклонится и выпьет пива, то получит -10 и 10 . В любом случае это меньше, чем 20 . Он не станет отклоняться. Сильный игрок пьет сок и имеет 10 в равновесии. Если отклонится и выпьет пиво, то получит 0 или 20 . Он может надеяться изменить представления Игрока 2 и убедить того, что он сильный. То есть потенциально он (в отличие от слабого) может отклониться. Следовательно, Игрок 2 должен при виде Игрока 1, пьющего пиво, сделать вывод, что тот сильный, т. е. что $\mu = 1$. При этом лучше не драться. Но если Игрок 2 при виде пива не будет драться, то сильному Игроку 1 действительно выгодно пить пиво.

Можно представить, что сильный Игрок 1 демонстративно пьет пиво и тем самым как бы произносит следующую речь, обращенную к Игроку 2:

²См. [11]

Я сильный. Чтобы это доказать, я выпью пиво вместо сока. Подумай, если бы я был слабым, то мне в любом случае не выгодно было бы пить пиво вместо сока, даже если бы это убедило тебя, что я сильный. В то же время, если я сильный, то мне выгодно пить пиво вместо сока, коль скоро это убедит тебя, что я сильный.

Первое из равновесий удовлетворяет интуитивному критерию — никакому из типов Игрока 1 не выгодно переубеждать Игрока 2.

Рассмотрите модификацию Игры 52, в которой сильный Игрок 1 предпочитает драться.

Будет ли существовать равновесие, в котором сильный Игрок 1 будет пить сок с целью притвориться слабым и получить удовольствие от драки?



Задачи

Задача 140 Инвестор предлагает предпринимателю вложить деньги в его фирму в обмен на долю s в фирме, где $s \in [0; 1]$. Инвестор не знает, какова прибыль Π этой фирмы в настоящее время, но предполагает, что она может быть 10, 70 или 100 с равными вероятностями. Предприниматель может согласиться или отказаться.

Если предприниматель отказывается от предложения, выигрыш предпринимателя будет равен Π , а выигрыш инвестора будет равен 60. Если инвестор примет предложение, то выигрыш предпринимателя будет равен $(1 - s)(\Pi + 80)$, а выигрыш инвестора будет равен $s(\Pi + 80)$. Инвестор нейтрален к риску.

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Определите, как будет вести себя предприниматель каждого из типов в зависимости от доли s .
3. Найдите совершенное байесовское равновесие. (Для этого надо найти оптимальную для инвестора долю s , в предположении, что предприниматель ведет себя благожелательно по отношению к инвестору, т. е. когда ему безразлично, принять или нет предложение инвестора, то он его принимает.)

Задача 141 [27]

1. Для игры, представленной на Рис. 7.13, перечислите стратегии игроков и найдите стратегическую (нормальную) форму.

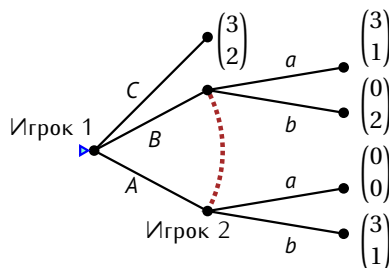


Рис. 7.13. Дерево игры для задачи 141

2. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найдите все совершенные в подыграх равновесия Нэша в чистых стратегиях.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.

Задача 142 [36] Нейтральный к риску продавец имеет некоторый предмет, который для него ничего не стоит, и сталкивается с единственным покупателем. Продавец делает покупателю единственное предложение вида «не хочешь — не бери», назначая цену $p \geq 0$. Есть два типа покупателей (A и B), встречающиеся с одинаковой вероятностью. Если покупатель первого типа купит предмет по назначенной продавцом цене p , то он получит полезность $\ln(11 - p)$. В той же ситуации покупатель второго получит полезность $4 - p$. Покупатель любого типа получит нулевую полезность, если он не купит предмет.

1. Найдите оптимальное поведение покупателей обоих типов в зависимости от назначенной продавцом цены p .
2. Какова оптимальная для продавца цена p ? (Предполагайте, что покупатель ведет себя благожелательно по отношению к продавцу, т. е. если ему безразлично, покупать или нет, то он покупает.)
3. Пусть на тех же условиях «не хочешь — не бери» продавец может предложить покупателю лотерею вместо фиксированной цены. Найдите какую-нибудь лотерею, которая обеспечивает продавцу более высокий доход, чем оптимальная фиксированная цена.

Задача 143 Школьнику дают домашнее задание по русскому языку с вероятностью $2/3$. Если задание не дано, то он сообщает об этом матери. Если задание дано, то школьник может обмануть мать и сказать, что задания не давали, либо сказать правду и сесть делать уроки, вместо того, чтобы пойти гулять. Если школьник сказал правду и сел делать уроки, то и школьник, и его мать получают выигрыш 0. Если школьник сказал, что задание не дано, то мать может посмотреть в дневник и узнать, так ли это на самом деле, но такой контроль отрывает мать от просмотра сериала. Если задание на самом деле не было дано или если школьник обманул мать и его не проконтролировали, то он идет гулять и получает выигрыш 2 (он думает только о сегодняшнем дне и его не волнует будущая двойка за невыполненное задание). Если школьника уличили в обмане, то его наказывают и он получает выигрыш -3 . Выигрыши матери следующие: -1 , если она проверила дневник, вне зависимости от результата проверки, 0, если она не проверила дневник при том, что домашнее задание не было дано, и -2 , если она не проверила дневник при том, что домашнее задание было дано. Найдите в этой игре все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 144 [40] Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 7.14.

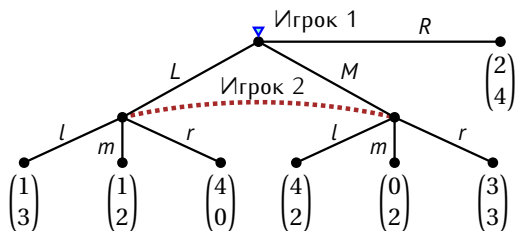


Рис. 7.14. Дерево игры для задачи 144

1. Запишите игру в стратегической форме и рассчитайте все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
2. Рассчитайте все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях.
3. Пусть $(\mu, 1-\mu)$ — представления Игрока 2 в его информационном множестве для левой и правой вершины соответственно. Найдите оптимальные действия Игрока 2 в зависимости от этих представлений.

4. Пользуясь результатами предыдущих пунктов покажите, что в игре нет совершенных байесовских равновесий в чистых стратегиях.
5. Рассчитайте все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях. (Учтите, что у каждого из игроков есть действия, которые никогда не выгодно выбирать. Это упрощает расчеты.)

Задача 145 Страна 1 готовится напасть на Страну 2 и запустила проект по созданию некоторого мощного оружия³. С вероятностью $2/3$ создание оружия будет успешным, а с вероятностью $1/3$ проект окончится неудачей. После завершения проекта Страна 1 будет решать, напасть ли на Страну 2 или нет. Если нападения не последует, то обе страны получают выигрыши 3. Если Страна 1 начнет войну, то Страна 2 не будет знать, обладает ли Страна 1 опасным оружием или нет. При этом Страна 2 должна решить, бороться ли с агрессором или сдаться. Если Страна 2 сдастся, то ее выигрыш будет равен -3 , а выигрыш Страны 1 будет равен 6. Если Страна 2 решит бороться, то при наличии у агрессора оружия она будет разгромлена и получит выигрыш -9 , а Страна 1 получит выигрыш 0. Если оружия нет, то агрессор будет побежден и получит выигрыш -12 , а Страна 2 получит выигрыш 3.

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Найдите нормальную форму игры и вычислите все байесовские равновесия в чистых стратегиях.
3. Для каждого из найденных равновесий проверьте, существуют ли представления, которые бы его поддерживали как совершенное байесовское равновесие.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях.
5. Объясните, почему Стране 1 выгодно продемонстрировать, что она обладает оружием. Объясните, почему возможность демонстрации муляжа вместо несуществующего оружия подрывает эти стимулы.

Задача 146 (Карточный блеф) В начале игры игроки (1 и 2) вносят по 1 руб. После этого с равной вероятностью Игрок 1 получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее Игрок 1 может повысить ставку, добавив 2 руб. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает Игрок 2. Если Игрок 1 повышает, то делает ход Игрок 2. Он либо уравнивает, добавляя 2 руб., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает Игрок 1, если карта старшая, и Игрок 2, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает Игрок 1.

³По мотивам игры из [43].

1. Нарисуйте дерево игры.
2. Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях.
3. Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто Игрок 1 будет блефовать, т. е. повышать, имея младшую карту? Как часто Игрок 2 будет уравнивать?
4. Для каждого из игроков определите, согласится ли он добровольно участвовать в такой игре. Каким должен быть возмещающий платеж одного другому, чтобы оба не отказались играть.

Задача 147 (Сигнализирование на рынке труда) [40] Работник может иметь высокую (H) или низкую (L) производительность с равными вероятностями $1/2$. Доход, который работник приносит фирме, зависит от его типа: $p_H = 10$ и $p_L = 8$ соответственно. Работник знает свою производительность, но фирма, которая хочет нанять работника, не знает.

Работник любого типа может получить дополнительное образование. Дополнительное образование не увеличивает доход от деятельности работника, но может служить сигналом для фирмы: работник типа H может получить образование без дополнительных издержек, тогда как для работника типа L издержки образования равны 3.

Фирма выбирает, какую заработную плату платить работнику — высокую $w_H = 6$ или низкую $w_L = 4$. При этом она может учитывать, получил ли работник дополнительное образование или нет. Выигрыш фирмы равен произведенному работником доходу за вычетом заработной платы. Выигрыш работника равен заработной плате за вычетом издержек образования. Однако работник может совсем отказаться от данной работы и связанного с ней обучения. В этом случае он получит свою резервную полезность, которая зависит от типа: $r_H = 3$ и $r_L = 2$, а фирма получит нулевой выигрыш.

1. Найдите развернутую форму этой игры.
2. Найдите стратегическую форму этой игры, и найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях. Являются ли найденные равновесия объединяющими? Удовлетворяют ли они интуитивному критерию?

Задача 148 [34] Имеется два игрока (1 и 2) и организатор игры. Организатор игры бросает монету, которая изготовлена таким образом, что в 80% случаев падает орлом вверх (и этот факт известен обоим игрокам). Результат подбрасывания монеты сообщается только Игроку 1. Игрок 1 сообщает

Игроку 2 результат — «орел» или «решка» (не обязательно правдиво). Игрок 2, зная только то, что ему сообщил Игрок 1, должен угадать, как упала монета. На этом игра заканчивается.

Выигрыши определяются следующим образом. Игрок 2 просто получает 1 руб., если угадал, и 0 руб., если не угадал. Независимо от того, как упала монета, Игрок 1 получает 2 руб., если Игрок 2 сказал «орел», и 0 руб., если тот сказал «решка». Кроме того, Игрок 1 дополнительно получает 1 руб., если его сообщение было правдивым, и 0 руб., если оно было ложным.

1. Представьте игру в развернутой форме.
2. Найдите соответствующую нормальную форму.
3. Найдите все равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия.

Задача 149 [36] Рассмотрите игру «схвати доллар», которая играется в три раунда между двумя игроками. В начале игры на кону имеется один доллар и с каждым раундом количество денег удваивается.

Сначала Игрок 1 может схватить доллар. Если он этого не сделает, то Игрок 2 может схватить 2 доллара. Наконец, если Игрок 2 не сделает этого, то Игрок 1 выбирает, схватить ли 4 доллара или оставить 8 долларов Игроку 2. Игрок, который не взял деньги, получает ноль. Полезность игроков задается ожидаемым количеством полученных денег.

1. Нарисуйте развернутую форму.
2. Каково совершенное в подыграх равновесие этой игры?
3. Покажите, что в любом равновесии Нэша Игрок 1 должен сразу же схватить деньги.
4. Имеется ли равновесие Нэша, которое не является совершенным в подыграх?
5. Предположим, что это байесовская игра, в которой есть «нестандартный» альтруистический тип Игрока 1, полезность которого — сумма денежных выплат Игроку 2 и ему самому. Предположим, что вероятность нестандартного типа равна 30%. Опишите совершенное байесовское равновесие, в котором Игрок 1 стандартного типа на первом раунде всегда оставляет деньги.
6. Продолжая альтруистический случай, ответьте на вопрос о том, существует ли совершенное байесовское равновесие, в котором Игрок 1 стандартного типа на первом раунде применяет вполне смешанную стратегию. Если такое равновесие существует, то дайте его полное описание.

Задача 150 [36] Президенту США Берту К. Трею предстоит вскоре вести переговоры с премьер-министром Хапистана. Премьер-министр Хапистана считает, что президент Трей может быть одного из двух типов: разумный (R) или сумасшедший (C). Вероятность типа R равна p ($p \in (0; 1)$). До переговоров президент Трей может разбомбить некую третью страну (B) или не бомбить (N). Издержки бомбардировки равны нулю для президента сумасшедшего типа и единице для президента разумного типа. После бомбардировки премьер-министр может предложить президенту или хорошую сделку (g), которая принесет президенту выигрыш $A > 0$, или плохую сделку (b), которая ничего не принесет президенту. Премьер-министр получает единицу, если предложит хорошую сделку президенту сумасшедшего типа, единицу, если предложит плохую сделку президенту разумного типа, и ноль в остальных случаях.

1. Изобразите развернутую форму игры.
2. Рассчитайте нормальную форму этой игры. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях при $p = 3/4$ и $A = 2$.
3. Рассмотрите (объединяющее) совершенное байесовское равновесие, при котором президенты обоих типов не используют бомбардировку (N, N), а премьер-министр в любом случае предлагает плохую сделку (b, b). При каких параметрах существует такое равновесие? Какими представления премьер-министра в его информационных множествах поддерживается такое равновесие?
4. Рассмотрите (разделяющее) совершенное байесовское равновесие, при котором разумный президент не использует бомбардировку, сумасшедший использует бомбардировку (N, B), премьер-министр предлагает хорошую сделку при бомбардировке и плохую без бомбардировки (g, b). При каких параметрах существует такое равновесие? Какими представления премьер-министра в его информационных множествах поддерживается такое равновесие?
5. Предположите, что $p = 3/4$ и $A = 2$. Рассмотрите (гибридное) совершенное байесовское равновесие, при котором разумный президент использует вполне смешанную стратегию, сумасшедший всегда выбирает B , премьер-министр использует вполне смешанную стратегию при бомбардировке и всегда выбирает b без бомбардировки. Найдите вероятности для смешанных стратегий и представления премьер-министра в его информационных множествах. Объясните, почему найденные стратегии и ожидания составляют равновесие.

Задача 151 [31] Ответчик по судебному делу предстает перед судьей. Ответчик либо невиновен ($x = 0$), либо виновен ($x = 1$) в нанесении ущерба в

размере 1 тыс. руб. Ответчик знает x и имеет документ, который позволяет однозначно подтвердить x . Судья не может непосредственно наблюдать x . Ее априорные представления состоят в том, что $x = 1$ с вероятностью $1/2$.

Судья и ответчик взаимодействуют следующим образом. Сначала, ответчик по своему желанию может предъявить документ или не предъявлять. Предъявление документа суду связано для ответчика с издержками размером ε тыс. руб. (небольшие затраты на снятие копии, например, $\varepsilon = 0,1$).

Если ответчик предъявит документ, то судья узнает x . Вне зависимости от того, предъявлен документ или нет, судья устанавливает сумму ущерба y (в тысячах руб.), которую должен будет возместить ответчик. Судья стремится вынести справедливое решение, то есть назначить y как можно ближе к x . Ее выигрыш равен $-(x - y)^2$. Ответчик стремится минимизировать свои издержки. Заметьте, что E означает «предъявить документ», а N — «не предъявлять документ».

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Найдите оптимальный выбор судьи (y_1) в случае, если из документа следует, что ответчик виновен ($x = 1$).
3. Найдите оптимальный выбор судьи (y_0) в случае, если из документа следует, что ответчик невиновен ($x = 0$).
4. Пусть p — вероятность, которую судья приписывает событию $x = 1$, если ответчик не предъявил документ. Найдите $\tilde{y} = \tilde{y}(p)$ — оптимальный выбор судьи как функцию этой вероятности.
5. Найдите оптимальный выбор для виновного ответчика при данном \tilde{y} и оптимальном (для судьи) y_1 .
6. Найдите оптимальный выбор для невинного ответчика при данном \tilde{y} и оптимальном (для судьи) y_0 .
7. Используйте результаты предыдущих пунктов для того, чтобы найти совершенные байесовские равновесия этой игры. Перечислите все составляющие найденных вами равновесий.

Общие задачи и задачи на повторение

(В нижеследующих задачах не приводите примеры игр, которые встречались в курсе; постарайтесь сконструировать примеры самостоятельно.)

Задача 152 Приведите пример дерева решений не менее чем с пятью исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое стратегии, действия, исходы и выигрыши в ситуации принятия решений.

Задача 153 Приведите пример игры с природой не менее чем с пятью исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое случайный ход природы, лотерея, ожидаемый выигрыш.

Задача 154 Приведите пример использования формулы Байеса для принятия решений.

Задача 155 Приведите пример дерева решений не менее чем с пятью исходами, включающего ходы природы. Покажите на своем примере, как используется обратная индукция для принятия решений.

Задача 156 Приведите пример динамической игры двух лиц с пятью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое стратегии, действия, исходы и выигрыши в играх.

Задача 157 Приведите примеры игр с трансферабельными и нетрансферабельными выигрышами. Поясните на своих примерах различие между двумя типами игр.

Задача 158 Что такое торг? Приведите пример ситуации торга. Из каких элементов складывается ситуация торга?

Задача 159 Объясните понятия коалиции и блокирования на примере игры с нетрансферабельной полезностью.

Задача 160 Какого рода игры можно представить в характеристической форме? Приведите пример игры в характеристической форме. Какие дележи допустимы в игре в характеристической форме, а какие нет? Какие дележи оптимальны по Парето в игре в характеристической форме, а какие нет?

Задача 161 Дайте определение кооперативных и некооперативных игр. Сравните их на некотором подходящем примере, который бы высвечивал различия двух типов игр.

Задача 162 Приведите пример динамической игры двух лиц с совершенной информацией с пятью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое динамическая игра с совершенной информацией. Покажите на своем примере, как по развернутой форме игры получать ее нормальную форму.

Задача 163 Приведите пример динамической игры двух лиц с семью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое граница Парето. Изобразите границу Парето на графике.

Задача 164 Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в задаче 70 на с. 156. Найдите в этой игре границу Парето. Изобразите ее графически. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

Задача 165 (повторение терминологии) [13] Вы должны уметь давать точные и однозначные определения всех терминов, используемых в теории игр.

1. Дайте определение игры в развернутой форме. Не забудьте включить в ваше определение также определения следующих терминов: дерево игры, траектория игры, вершина, начальная вершина, следующая/предшествующая вершина, конечная вершина, информационное множество, действие.
2. Дайте определение нормальной формы игры.
3. Любая игра в развернутой форме может быть естественным образом преобразована в игру в нормальной форме. Продемонстрируйте, как это делается, на каком-нибудь подходящем примере.

4. Что такое наилучший отклик в нормальной форме игры? Что такое равновесие Нэша?
5. Приведите условия того, что пара стратегий является равновесием Нэша в игре двух лиц в нормальной форме.

Задача 166 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы у каждого игрока одна из стратегий была строго доминируемой. Объясните на этом примере, в каком случае одна стратегия строго доминирует другую.

Задача 167 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы у каждого игрока была доминирующая стратегия. Объясните на этом примере, что такое доминирующая стратегия и что такое равновесие в доминирующих стратегиях.

Задача 168 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий приводило к единственному исходу. Объясните на этом примере смысл процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Задача 169 Приведите пример игры, которая бы имела как Парето-оптимальные, так и не Парето-оптимальные равновесия Нэша.

Задача 170 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре было ровно три равновесия Нэша.

Задача 171 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре не существовало равновесия Нэша. Продемонстрируйте на этой игре нахождение равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 172 [28] Предположим, что Игрок А угрожает возмездием, чтобы удержать Игрока В от некоторых действий, которые могут ему навредить (например, фирма А угрожает начать ценовую войну с фирмой В, если последняя начнет конкурировать с А на рынке, где ранее фирма А была монополистом). Является ли выполнение такого рода угрозы рациональным, если (i) Игрок А предпочел бы не принимать ответных мер, коль скоро В уже осуществил агрессивные действия и (ii) ситуация никогда больше не повторится (так, что мотив сдерживания будущей агрессии полностью отсутствует)? Если это рационально, то почему? Если это не рационально, то зачем вообще делаются угрозы в подобного рода ситуациях?

Задача 173 Приведите пример статической игры трех лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, и покажите на этом примере, как такую игру можно представить в виде дерева. Объясните смысл каждой из составляющих дерева игры.

Задача 174 Приведите пример игры, в которой имеются равновесия Нэша, не являющиеся совершенными в подыграх. Объясните на этом пример смысл понятия совершенного в подыграх равновесия Нэша.

Задача 175 Приведите пример дерева игры двух лиц, в которой первый из игроков имеет два типа, а второй игрок не знает тип первого игрока. Объясните смысл каждой из составляющих дерева игры.

Задача 176 Приведите пример динамической игры двух лиц, на котором можно продемонстрировать различие между смешанной и поведенческой стратегией.

Задача 177 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре существовало единственное равновесие Нэша. Предположите, что игра повторяется дважды и проведите анализ такой повторяющейся игры.

Задача 178 Приведите пример динамической байесовской игры и покажите на этом примере как ожидания (представления) в информационных множествах рассчитываются на основе стратегий игроков.

Задача 179 [2] Министерство желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство — первый игрок — имеет две стратегии: строить 1-й объект, строить 2-й объект. Город — второй игрок — имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно Таблице 8.1.

Таблица 8.1. Данные для задачи 179

		Город	
		принять	отказать
Министерство	1-й объект	-10 5	2 -2
	2-й объект	1 -1	-1 1

Некоторые пояснения к элементам Таблицы 8.1 могут быть, например, такие: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство решает строить первый объект, а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн руб., а министерство теряет 10 млн. руб.; аналогично объясняются остальные выигрыши.

1. Проверьте, что в этой игре нет равновесий Нэша в чистых стратегиях.
2. Найдите равновесия в смешанных стратегиях. Дайте графическую иллюстрацию.
3. Предположите, что министерство делает первый ход. Найдите соответствующее равновесие.

Задача 180 [30] Рассмотрите игру в развернутой форме, дерево которой изображено на Рис. 8.1.

1. Запишите игру в стратегической форме.

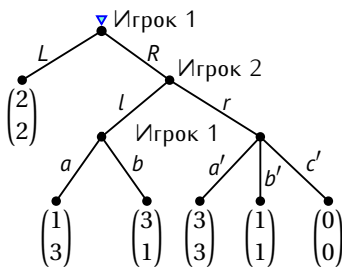


Рис. 8.1. Дерево игры для задачи 180

2. Какие стратегии остаются после применения процедуры удаления слабо доминируемых стратегий в следующем порядке: сначала игрок 1, потом игрок 2, потом снова игрок 1 и т. д.?

Задача 181 Два человека делят 1 млн долл. по следующим правилам. Сначала первый предлагает свой вариант дележа — сумму x млн долл. ($x \in [0; 1]$), которая достанется ему (второму при этом остается $(1 - x)$ млн долл.). Второй может не согласиться с предложенным вариантом. При этом каждому достанется по 0,5 млн долл. Однако из-за промедления в этом случае с вероятностью 0,2 они могут потерять свой миллион (каждый получит 0). Выигрыши игроков измеряются не деньгами.(!) Выигрыши определяются элементарными функциями полезности $u_i = \sqrt{2x_i}$, где x_i — денежная сумма, которая досталась i -му игроку.

1. Изобразите игру в виде дерева. (В том числе изобразите на дереве выигрыши игроков.)
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие. Опишите стратегии игроков в этом равновесии. Как будет поделен миллион?
3. Изобразите на графике множество всех возможных выигрышей (ожидаемых выигрышей) игроков в этой игре — все возможные точки (U_1, U_2) . Пользуясь графиком, определите, является ли равновесие оптимальным по Парето. Аргументируйте свой ответ.
4. Считая ожидаемые выигрыши при несогласии второго с предложенным вариантом точкой угрозы, укажите кривую контрактов и ядро. Принадлежит ли равновесие ядру? Аргументируйте свой ответ.

Задача 182 Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 8.2.

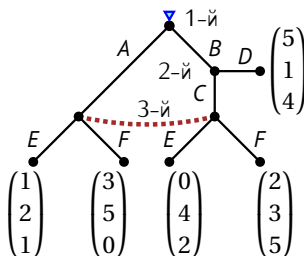


Рис. 8.2. Дерево игры для задачи 182

1. Перечислите стратегии каждого из игроков.
2. Запишите игру в стратегической (нормальной) форме.
3. Какие равновесия Нэша в чистых стратегиях есть в этой игре?
4. Если первый игрок выбирает A с вероятностью 0,2, а второй игрок выбирает C с вероятностью 0,4, то какими должны быть представления третьего игрока в его информационном множестве?
5. Какие имеются совершенные в подыграх равновесия (в чистых стратегиях) игры в целом? Объясните.

Задача 183 [35] Рассмотрите игру двух лиц. Каждому игроку дают 6 красных фишек. После этого игроки тайно и одновременно выбирают, сколько фишек (от 0 до 6) поместить в волшебную шкатулку. Как только оба игрока сделали взнос в шкатулку, шкатулка открывается. Шкатулка является волшебной в следующем смысле. Если общее количество фишек, положенных

в шкатулку не меньше 4, то шкатулка будет содержать точно 6 фишек. Если всего в шкатулку положено 3 или менее фишек, то шкатулка будет содержать 0 фишек. Игроки делят содержимое шкатулки поровну, так что каждый игрок получит из шкатулки либо 0, либо 3 фишки. Игроки, конечно, теряют все фишки, которые они первоначально положили в шкатулку. После того, как шкатулка открыта и фишки поделены между игроками, за каждую фишку игроки получают по \$20. Предположите, что игроки не знакомы друг с другом и не будут встречаться после того, как игра сыграна (поэтому оба игрока будут играть в игру с целью получить как можно больший собственный денежный выигрыш).

1. Запишите полную матрицу выигрышей для этой игры.
2. Какие в этой игре есть равновесия Нэша в чистых стратегиях?
3. Какие исходы в этой игре являются Парето-оптимальными?

Рассмотрите следующие три модификации этой игры. В каждом случае не учитывайте все предыдущие модификации.

4. Предположим, что шкатулка содержит 0 фишек, если общий вклад был меньше 4, а в противном случае (по крайней мере 4 фишки) — все фишки, которые в нее положили плюс 2. Если бы, например, игрок 1 пожертвовал 2 фишки, а игрок 2 — 3 фишки, то шкатулка содержала бы 7 фишек. При этом если шкатулка содержит нечетное число фишек, последняя фишка делится пополам. Половина фишки стоит \$10. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.
5. Пусть выигрыши такие же, как первоначально, но игрок 1 кладет фишки в шкатулку первым, и его взнос видит игрок 2. После этого игрок 2 кладет фишки в шкатулку. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.
6. Предположим, что шкатулка вместо каждой пары положенных в нее фишек выдает 3 фишки. Непарная фишка остается нетронутой. То есть шкатулка следующим образом изменяет количество положенных в нее фишек:

$$0 \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 4, \quad 4 \rightarrow 6 \quad \text{и т. д.}$$

Предположим, как и ранее, что целые фишки и половинки фишек могут быть поровну разделены между игроками. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.

Задача 184 [33] Рассмотрите игры двух лиц, в которых Игрок 1 выбирает действие T или B , а Игрок 2 — L или R . Выигрыши приведены в Таблице 8.2 (но ходы в игре не одновременные).

Таблица 8.2. Данные для задачи 184

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	3 2	1 1
	B	7 1	2 2

- Предположим, что Игрок 1 ходит первым, а Игрок 2 наблюдает действия Игрока 1 перед выбором своих собственных действий.
Изобразите дерево игры и найдите совершенное в подыграх равновесие (или равновесия). Убедитесь, что описали стратегии игроков полностью, как на равновесной траектории, так вне нее.
- Имеется ли какие-либо другие равновесия Нэша (не являющиеся совершенными в подыграх)?
- Теперь предположите, что Игрок 1 ходит первым, но Игрок 2 не может наблюдать действия Игрока 1 перед выбором своих собственных действий.
Изобразите дерево игры и найдите равновесия Нэша и совершенные в подыграх равновесия.
- Теперь предположите, что Игрок 1 ходит первым, а Игрок 2 перед выбором своих собственных действий получает верную информацию о действиях Игрока 1 с вероятностью p ($0 < p < 1$) и неверную с вероятностью $1 - p$. (Например, если Игрок 1 выбрал T , то Игрок 2 с вероятностью p наблюдает T , а с вероятностью $1 - p$ наблюдает B .) Ни один из игроков не знает, верную ли информацию о действиях Игрока 1 получил Игрок 2, но вероятность p является общеизвестной.
Введите ход природы, который определяет, правильно ли наблюдает Игрок 2 ход Игрока 1, и изобразите дерево игры, включая выигрыши игроков в зависимости от их действий. (Указание: Обратите внимание, что Игрок 2 фактически не наблюдает ход Игрока 1; вместо этого он наблюдает некий сигнал, который коррелирован с ходом Игрока 1.)
- Найдите совершенное байесовское равновесие в чистых стратегиях и покажите, что это единственное совершенное байесовское равновесие в чистых стратегиях. (Оно будет единственным совершенным байесовским равновесием также и в смешанных стратегиях, но этого не требуется доказывать.)

Задача 185 [33] Имеется два игрока, R и C , которые имеют возможность вести переговоры по поводу контракта следующим образом. R делает ход первым и может отказаться предлагать контракт (обозначим этот вариант через z), предложить контракт x или же предложить контракт y . Если R откажется предложить контракт, то игра заканчивается, и R и C оба получают нулевой выигрыш. Если R предлагает контракт (x или y), то C узнаёт, что какой-то контракт был предложен, но не будет знать, какой именно. C может либо согласиться на предложенный контракт (a), либо отказаться (r). Если C соглашается, и оказывается, что предложен контракт x , то выигрыш R будет равен 3, а выигрыш C будет равен 2. Если C соглашается, и оказывается, что предложен контракт y , то выигрыш R будет равен 1, а выигрыш C будет равен 3. Если C откажется, то оба получают нулевой выигрыш. Структура игры является общеизвестной.

1. Ясно указав для каждого игрока вершины, в которых он принимает решения, информационные множества и возможные решения, изобразите для этой игры развернутую форму («дерево игры»), а также нормальную форму («матрицу выигрышей»).
2. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях (как совершенные в подыграх, так и нет).
3. Найдите совершенные в подыграх равновесия Нэша в чистых стратегиях.
4. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.
5. Предположите теперь, что выигрыш R , если он отказывается (т. е. выбирает z), равен 2, а не 0, а все остальное остается без изменений. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.

Литература

- [1] Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А. Микроэкономика — третий уровень: в 2 томах.— Новосибирск: Издательство СО РАН, 2008.
- [2] Крушевский А. В. Теория игр.— Вища школа, 1977.
- [3] Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу.— М.: Наука, 1985.
- [4] Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики.— М.: Мир, 1985.
- [5] Нейман, Дж. фон К теории стратегических игр.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
- [6] Нейман, Дж. фон, Моргенштерн, О. Теория игр и экономическое поведение.— Наука, 1970.
- [7] Нэш Дж. Бескоалиционные игры.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
- [8] Оуэн Г. Теория игр.— М.: Мир, 1971.
- [9] Эккланд И. Элементы математической экономики.— Мир, 1983.
- [10] Charmichael F. A Guide to Game Theory. Pearson Education Limited, 2005.
- [11] Cho I., Kreps D. Signaling Games and Stable Equilibria.— The Quarterly Journal of Economics, 1987, 102, №2, 179—221.
- [12] Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, 1992.
- [13] Gintis H. Game Theory Evolving (2nd ed.). Princeton University Press, 2009.
- [14] Harsanyi J. C. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players (parts I, II and III).— Management Science, 1967-1968, 14, 159—182, 320—334, 486—502.

- [15] Kuhn H. W. Extensive Games and the Problem of Information.— In: Contributions to the Theory of Games. Princeton University Press, 1953, 193—216.
- [16] Mas-Colell A., Whinston M. D. , Green J. R. Microeconomic Theory.— Oxford University Press, 1995.
- [17] Miller J. Game Theory at Work: How to Use Game Theory to Outthink and Outmaneuver Your Competition.— McGraw-Hill, 2003.
- [18] Myerson R. Game Theory: Analysis of Conflict. Harvard University Press, 1991.
- [19] Nash, J. F. The Bargaining Problem.— Econometrica, 1950, 18, 155—162.
- [20] Nash J. F. Non-Cooperative Games.— Annals of Mathematics, 1951, 54, 286—295.
- [21] Neumann J. von. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.— Mathematische Annalen, 1928, 100, 295—320.
- [22] Osborne M. An Introduction to Game Theory. Oxford University Press, 2004.
- [23] Rasmusen E. Games and Information: An Introduction to Game Theory (6th ed.). Blackwell, 2006.
- [24] Rubinstein A. Perfect Equilibrium in a Bargaining Model.— Econometrica, 1982, 50, 97—109.
- [25] Schelling T. The Strategy of Conflict.— Harvard University Press, 1960.
- [26] Selten R. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragertragheit, Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft, 1965, 12, 301—324, 667—689.
- [27] Vega-Redondo F. Economics and the theory of games. Cambridge University Press, 2003.
- [28] Bartha P. Kypc «Philosophy 321, Probability and Decision», University of British Columbia, Department of Philosophy, осень 2001 г.
<http://www.philosophy.ubc.ca/faculty/bartha/p321f01/p321syll.htm>
- [29] Bialas W. Kypc «IE675, Game Theory», University at Buffalo, Department of Industrial and Systems Engineering, 2005 г.
<http://www.acsu.buffalo.edu/~bialas/IE675.html>

- [30] Blume L. Курс «Economics 368, Introduction to Game Theory», Cornell University, Department of Economics, 2006 г.
<http://instruct1.cit.cornell.edu/courses/econ368/>
- [31] Carmona G. Курс «Information and Games», Universidade Nova de Lisboa, Department of Economics, весна 2008 г.
<http://docentes.fe.unl.pt/~gcarmona/info/index.html>
- [32] Choy S. K. Курс «MGT337Y: Business Finance», University of Toronto, Joseph L. Rotman School of Management, 2007 г.
<http://www.rotman.utoronto.ca/siu.choy05/mgt337/>
- [33] Crawford V. Курс «Economics 200C, Games and Information», University of California, San Diego, Department of Economics, весна 2003 г.
<http://dss.ucsd.edu/~vcrawfor/econ200C.htm>
- [34] Lee W. Курс «ECON 309, Game Theory», University of Massachusetts, Department of Economics, весна 2007 г.
<http://www.people.umass.edu/woojin/course.htm>
- [35] Lemke R. J. Курс «Econ 310, Industrial Organization», Department of Economics and Business, Lake Forest College, осень 2006 г.
<http://campus.lakeforest.edu/~lemke/econ310/>
- [36] Levine D. K. Курс «201B, Game Theory», Washington University in St. Louis, Department of Economics, 2006 г.
<http://www.dklevine.com/201.htm>
- [37] Marks R. Курс «Strategic Game Theory for Managers», Australian Graduate School of Management, 2006 г.
<http://www.agsm.edu.au/~bobm/teaching/SGTM.html>
- [38] Medina L. F. Курс «Political Science 217, Introduction to Game Theory» University of Chicago, Department of Political Science, зима 2001/2002 г.
<http://home.uchicago.edu/~lfmedina/teaching.htm>
- [39] Morris S. Курс «Economics 703, Microeconomics II, Game Theory, Choice under Uncertainty and Information» University of Pennsylvania, Department of Economics, осень 1996 г.
- [40] Peters H. Курс «Spieltheorie: Skript zur Vorlesung», Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Department of Quantitative Economics, 2006/2007 г.
<http://www.personeel.unimaas.nl/H.Peters/Spieltheorie.htm>
- [41] Rasmusen E. Курс «G601, Industrial Organization I» Indiana University, Kelley School of Business, 2006 г.
<http://www.rasmusen.org/g601/0.g601.htm>

- [42] Signorino C. Курс «PSC 272/472 Theories of International Relations», University of Rochester Political Science Department, весна 2001 г.
<http://www.rochester.edu/College/PSC/signorino/courses/272/>
- [43] Stinchcombe M. B. Курс «Graduate Introductory Game Theory», University of Texas at Austin, Economics Department, осень 2008 г.
<http://www.eco.utexas.edu/~maxwell/>