ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Кафедра системного анализа в экономике

Г.Б. Клейнер, Л.С. Звягин, Г.А. Щербаков

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ:
СБОРНИК СИТУАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Москва
Издательский дом
«НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА»
2018

УДК 330.46:519.87 (075.8)
ББК 65в 631я 73
С 40

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Котельников В.Г.,

доктор технических наук профессор, профессор департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий (Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации);

Прокопчина С.В.,

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры системного анализа в экономике (Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации);

Григорьев С.С.,

кандидат технических наук, доцент, начальник отдела моделирования и системных промышленных технологий (общество с ограниченной ответственностью «Ремтрансинвест».

С 40 **Клейнер Г.Б., Звягин Л.С., Щербаков Г.А.**
Системный анализ и моделирование: сборник ситуационных задач: учебное пособие / под. ред. Г.А. Щербакова. – М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2018. – 506 с.

ISBN 978-5-6040896-0-6

Данное учебное пособие предназначено для практических и теоретических занятий по дисциплине «Системный анализ и моделирование», которые проводятся с целью изучения и усвоения студентами теоретических основ и практических навыков системного анализа с применением математического аппарата и количественного системного анализа реальных экономических процессов и явлений.

Цель учебного пособия – помочь студентам, специализирующимся в экономической сфере, проверить качество усвоения лекционного материала. Систематическое выполнение студентами заданий для самостоятельной работы обеспечит более глубокое понимание и запоминание учебного материала.

УДК 330.46:519.87(075.8)
ББК 65в 631я73

ISBN 978-5-6040896-0-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II.
СИТУАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО СИСТЕМНОМУ АНАЛИЗУ

Коллектив авторов

Г.Б. Клейнер	Вступительная статья, Глава 2 (раздел 2.2)
Г.А. Щербаков	Главы 1, 2, 3
Л.С. Звягин	Главы 4–9, Приложения, Заключение

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

Системный подход в экономике, находящийся в фокусе настоящего учебного пособия, представляет собой относительное новое, быстро развивающееся направление экономической теории. В его основе лежит концепция видения объекта и предмета экономических исследований, согласно которой функционирование экономики на любом уровне – от глобальной мировой экономики до экономики отдельного предприятия – рассматривается в ракурсе создания, взаимодействия, трансформации и ликвидации экономических систем. Данное направление замыкает логическую связку экономических теорий «неоклассическая экономика – институциональная экономика – эволюционная экономика – системная экономика».

Каждое из перечисленных направлений экономической теории опирается на особое видение предметной области экономической теории и смежных областей знания. Так, в центре неоклассической экономики, доминировавшей в мировой экономической теории в период примерно 1920–1980-х гг., стоит автономный рыночный агент (фирма, компания, предприятие, корпорация и т.д.). Фактически каждый такой объект рассматривается как субъект со своими целями, предпочтениями, склонностями (принцип методологического индивидуализма). В институциональной парадигме, получившей наибольшее распространение в течение нескольких следующих за указанным периодом десятилетий, к этим действующим лицам в качестве основных добавляются формальные и неформальные институты. Институты также считаются в принципе отделимыми друг от друга и тем самым в некотором смысле индивидуализированными. Именно институты при таком подходе являются основными факторами поведения агентов (принцип «методологического институционализма»). Эволюционная парадигма, мощно заявившая о себе в конце прошлого – начале нынешнего века, стремится преодолеть статичность обоих подходов и включает в рассмотрение временные тренды и тенденции, обусловленные наличием «генетических» механизмов передачи признаков, причем все это относится и к популяции агентов, и к популяции институтов (принцип «методологической генетики»). Наконец, в рамках системной парадигмы, формирующейся в течение последних двух десятилетий, организации, институты, устойчивые «геноподобные» механизмы развития рассматриваются как частные случаи общего понятия экономической системы (принцип «методологической систематики»).

Основные причины формирования и распространения системного подхода к экономическим явлениям связаны с кризисом ортодоксальной экономической теории (см., напр.: [84]). «Несмотря на всю свою значимость, представления о действительности редко подвергаются анализу, изучению и пересмотру – редко даже получают четкие формулировки», – отмечал один из основоположников теории и методологии менеджмента П. Друкер [33, с. 7]. Указанное наблюдение определяет базовую проблему экономической науки, когда доминирующая и вполне адекватная определенному периоду развития экономическая теория постепенно «закостеневает», переставая со временем соответствовать новым условиям динамично развивающегося сектора реальной экономики. Воспринимаемая как догма, но уже не способная объяснять изменения, происходящие в экономической среде, она обнажает кризис экономической теории, который проявляется в разрыве взаимосвязей между макро- и микроэкономикой; трудностях описания взаимодействия разнородных экономических объектов (например, организаций, индивидов, институтов); недостаточности аппарата для описания иррационального поведения субъектов; осознании значимости факторов, не укладывающихся в рамки традиционной экономической теории, таких как культурные факторы, системы страновых институтов и институциональных траекторий, знаний, склонностей и способностей к имитации и самоимитации и др.

Системный подход в экономике возник в первой трети XX века на базе общей теории систем Л. фон Берталанфи. Он опирался на понимание системы как совокупности (комплекса) взаимосвязанных элементов. Однако «новое издание» системной экономической теории на основе обобщения системной парадигмы Я. Корнаи опирается на иное понимание системы, дуальное по отношению к упомянутому, определяющему систему через внутреннюю структуру. В новой теории экономических систем упор делается на определении системы через ее внешнюю устойчивость и целостность. Синтез этих подходов позволит, как представляется, существенно расширить потенциал развития системной экономики.

Можно выделить два основных отличия «новой системности» от прежней теории систем, созданной трудами Л. фон Берталанфи, У. Эшби, Н. Винера и др. Первое состоит в том, что ранее системный подход опирался, главным образом, на «эндогенное» восприятие системы как множества взаимосвязанных элементов. «Новая системность» основана на «экзогенном» восприятии системы как некоторого фрагмента реальности, выделяемого в пространстве и во времени. В современной версии системного подхода упор делается на целостность[1] образа реальности («гештальт»). Второе отличие связано с существенным усилением субъективной компоненты в понимании системы. Многочисленные исследования последних десятилетий, выявившие роль субъективного фактора в экономическом поведении на всех уровнях и изменившие само понятие рационального экономического поведения, также оказали влияние на восприятие предметной области теории систем в части экономических систем.

В настоящем пособии будут рассматриваться преимущественно экономические системы, т.е. системы, создание и существование которых обеспечивает процессы производства, распределения, обмена и потребления благ и функционирование которых невозможно без участия человека. Все рассматриваемые экономические системы являются, таким образом, «живыми» в том смысле, что функционирование каждой из них основано на деятельности людей: индивидов, коллективов или неопределенных групп и сообществ. Вместе с тем ни один человек как целое не входит полностью в состав какой бы то ни было экономической системы (кроме самого данного индивида), но любая экономическая система использует те или иные интеллектуальные, материальные, эмоциональные или физические возможности людей.

Под системой (в рамках новой теории экономических систем) понимается относительно обособленная и относительно устойчивая в пространстве и во времени часть окружающего мира (рассматриваемого как системосодержащее пространство), характеризующаяся внешней целостностью и внутренним многообразием. Система считается экономической, если она в той или иной степени реализует процессы производства, а также распределения, обмена и потребления благ. К числу экономических систем естественным образом относятся такие образования, как предприятия, организации, рынки, регионы, страны, субъекты РФ и другие подобные виды экономических образований. В качестве экономических систем целесообразно рассматри-

[1] Подобно тому, как понятие множества в математике считается первичным и не имеет строгого определения, понятие целостности также, видимо, должно быть отнесено к числу первичных, воспринимаемых интуитивно и не имеющих строгого определения.

вать также социально-экономические процессы, программы, планы, проекты и т.п. (с включением в эти системы индивидов, участвующих в их деятельности). Экономическая активность индивидов может осуществляться как путем участия в деятельности (или в создании) какого-либо предприятия, так и путем участия в реализации экономических проектов, функционировании сред или включения в экономические процессы. Все это говорит о том, что «мир экономических систем» весьма разнообразен и включает в себя системы, по крайней мере, четырех типов: объекты, проекты, процессы и среды.

Каждое предприятие, рассматриваемое как экономическая система, обладает универсальной внутренней «системной» структурой, состоящей из семи подсистем: ментальной, организационно-культурной, институциональной, когнитивной, имущественно-технологической, имитационной и исторической. При этом каждая из них производит свой «продукт», который частично используется в качестве входного следующей подсистемой, частично – распространяется по каналам межфирменного взаимодействия. Дальнейшие исследования показали, что аналогичную внутреннюю структуру имеют все экономические системы и наличие такой структуры выделяет экономические системы из всего множества систем (рис. 1).

Рис. 1. Состав и функционирование экономической системы
Источник: [53, с. 162].

Сущность системной парадигмы состоит в том, что функционирование экономики (т.е. осуществление процессов производства, распределения, обмена и потребления материальных и нематериальных благ), рассматривается сквозь призму создания, взаимодействия и трансформации экономических систем. Базовый для неоклассической парадигмы принцип «методологического индивидуализма» здесь уступает место принципу «методологической систематики» в том смысле, что основными агентами в экономике считаются не автономные (и пространственно отделенные друг от друга) индивиды, а лишь относительно автономные (возможно, пересекающиеся в геометрическом пространстве) экономические системы. Межсистемное взаимодействие осуществляется через посредство межсистемной среды, имеющей релевантную структуру для перемещения материальных и нематериальных благ. Внутрисистемная среда также имеет сходную структуру, что обеспечивает единство внутри- и внесистемного пространства и экономики в целом. Согласно системной парадигме характер «естественного» функционирования экономической системы определяется не столько ее масштабом, сколько особенностями ее природы, в том числе конфигурацией границ с окружающей средой.

Таким образом, рассмотрение реального экономического объекта в системном ракурсе предполагает его целостность в пространстве и во времени, поэтому системный ракурс обладает чертами, сходными со стратегическим ракурсом. При этом каждая экономическая система является многомерным объектом, одновременно функционирующим в социальной, административной, политической, технологической, культурной и иных сферах.

Применение системной экономики для обоснования решений в таких прикладных сферах, как корпоративное управление, стратегическое планирование, государственное регулирование и др., показывает, что на основе системного подхода в его современном выражении можно не только ставить новые задачи, но и получать ответы на вопросы, издавна стоящие в экономике. Это касается не только проблем внутренней организации тех или иных экономических систем, но и вопросов эффективного взаимодействия между разными системами, включая их слияние и поглощение. Известно, что неучет в экономической политике системных связей между основными компонентами экономики, в частности между финансовым и реальным секторами, обрабатывающими и добывающими видами промышленной деятельности, инфраструктурой и производством, а также возникший дисбаланс между системными факторами гетерогенности и волатильности экономики, с одной стороны, и гомогенности и стабильности – с другой, стали причинами мирового экономического кризиса 2008–2009 гг.

Системный взгляд на экономику требует не только изменения единицы экономического анализа, но и модификации понятий ресурсов и результатов производства, распределения, потребления и обмена благ. Должны быть изучены и виды межсистемных связей, обеспечивающие продолжение и развитие популяции экономических систем в страновой и в мировой экономике. Наконец, в контексте системной экономической теории особого внимания требуют принципы и методы управления экономическими системами и их альянсами.

Развитие системной экономики как концептуальной платформы нового направления экономической теории предполагает решение в качестве первоочередных задач, таких как:

1) разработка базовой классификации (типологии) экономических систем;

2) разработка базовой классификации (типологии) экономических процессов; такая классификация должна корреспондироваться с предыдущей;

3) разработка базовой классификации (типологии) взаимосвязей между выявленными классами систем и классами экономических процессов;

4) создание релевантной по отношению к перечисленным классификациям базовой типологии экономических благ как результатов и ресурсов деятельности экономических систем;

5) анализ и классификация взаимосвязей между классами экономических благ и классами экономических систем, благ и процессов;

6) разработка базовой классификации процессов управления экономическими системами различных типов;

7) построение общей структурной модели взаимодействия компонент системной экономики: экономических систем, благ, а также хозяйственных и управленческих процессов в контексте системной экономики;

8) исследование процессов создания и функционирования устойчивых группировок (комплексов) экономических систем в рамках общей структурной модели функционирования системной экономики.

В целом разработка полномасштабной системной экономической теории находится, как представляется, в русле магистральных тенденций развития научной мысли в сфере социального анализа – движения от видимого к невидимому, в частности движения от эмпирического исследования поведения традиционных экономических агентов – юридических и физических лиц, к анализу влияния систем на агентов и обратного влияния. Одновременно идет процесс расширения границ системного видения экономики за счет включения в сферу междисциплинарного рассмотрения областей, относящихся к пограничным с экономикой в том или ином пространстве областям знания: философии, антропологии, социологии, психологии и др.

Системная экономическая теория как промежуточная платформа для нового витка развития экономической науки может сыграть свою роль при условии разработки специального категориального, структурно-логического и аксиоматического аппарата системного моделирования, аналогичного аппарату математического моделирования в неоклассической теории, метафорического моделирования в институциональной теории и биологического моделирования в эволюционной теории (см.: [53, с. 35–38, 160–163, 194]).

Член-корреспондент РАН,
доктор экономических наук
Г.Б. Клейнер

ЧАСТЬ I

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Глава 1
ВОЗНИКНОВЕНИЕ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА И ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ, СФОРМИРОВАННЫЕ В ПРОЦЕССЕ ЕГО РАЗВИТИЯ

1.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА КАК ОТДЕЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Сложно определить период, когда возникла необходимость введения целостного подхода при изучении свойств объекта. Эта потребность фактически ощущалась всеми исследователями, но решалась ими различным образом. Одни ученые допускали, что множество элементов организма приводится в организованное целое при помощи некоторой неорганической силы, которая, находясь все время в «надорганическом состоянии», обладает специфическим качеством «одухотворения» и формирования организованного целого (например, «энтелехия Дриша», «мнема Блейлера», «руководящая сила Клода Бернара» и др.). Такую позицию занимали виталисты всех направлений (хотя некоторые из них давали объективные оценки целостности). Другие полностью отрицали что-либо специфическое в целостной организации и делали попытку объяснить ее, исходя только из свойств элементов, входящих в целостные образования. Так возник механистический подход к объяснению целого [4, с. 18].

До середины XIX столетия в науке доминировал метод исследования, который обобщенно можно назвать «элементаризмом». Данная разновидность механицизма (наиболее представленная в таких науках, как математика, механика, физика и т.п.) утверждала приоритет единичного, частного перед целым. С точки зрения элементаристов, целое вторично, существует лишь некоторая интегральная характеристика суммы составляющей его частей. Элементаризм (который целесообразно также называть «фрагментаризмом») сформировался в период расцвета механики, и целый ряд важных открытий в различных отраслях науки был обеспечен за счет применения данного метода. Вместе с тем его приложение к таким объектам, как биологическая, психическая, социальная, экономическая система, проявило невысокую эффективность.

Фрагментарность исследований в полной мере получила отражение в структуре научных знаний. Традиционные направления: физические, биологические, социальные, технические и прочие науки – развивались локализовано и были сфокусированы на исследовании элементов или фрагментов окружающей действительности, выделенных из нее в соответствии с задачами собственных научных исследований. Каждый специалист в фокусе своего научного интереса выделял лишь отдельный фрагмент системы, не изучая ее в целом. Фрагментарность исследований отражалась во все более углубленном познании все более локальных проблем, каждая из которых сама по себе интересна и важна. Вместе с тем очевиден и недостаток подобного дифференцированного подхода к процессу приращения научных знаний: подмена целостного видения объекта совокупностью фрагментов порождает некорректную оценку проблемной ситуации, принятие неверных управляющих решений и, как следствие, ведет к чрезмерному расходованию ресурсов в ходе реализации указанных решений.

В условиях нарастающего разочарования исследовательского сообщества в эффективности действующего аналитического подхода к изучению и объединению достигнутых результатов сформировалась устойчивая тенденция к исследованию специфических свойств именно целостного объекта, рассматриваемого в качестве отдельной системы. Появилась необходимость в учете всех воздействующих факторов, в оценке влияния каждого из них, в понимании связей между различными явлениями. При этом становилась все более очевидной потребность в выработке универсального рабочего принципа, способного составить «концептуальный мост» между результатами, получаемыми при изучении свойств целостного объекта, и результатами, достигаемыми в ходе тонкого аналитического эксперимента. Подобный принцип призван способствовать выявлению логических соотношений между отдельными фактами и одновременно обеспечивать осуществление научных изысканий на более высоком уровне.

Сначала указанная потребность в смене аналитических принципов в науке выразилась в развитии механистического мировоззрения за счет т.н. «редукционизма» (от лат. reductio – возвращение, приведение обратно), постулирующего возможность объяснения сложных явлений с помощью законов, свойственных явлениям более простым. Содержание данного метода исследования заключается в вычленении из целого интересующих элементов, изучении их по отдельности и определении на этой основе закономерностей целого. Указанный подход, органически свойственный человеческому мышлению, сформировался как самостоятельный способ познания окружающей действительности в XVII веке. Его содержание весьма точно было сформулировано Декартом: «Расчлените каждую задачу на столько частей, сколько потребуется, чтобы их было легко решить» [32, с. 229]. Иными словами, исследование особенностей объекта осуществлялось через выявление особенностей составляющих элементов. И.Н. Дрогобыцкий отмечает фундаментальный недостаток данного подхода: «При анализе нарушается целостность системы. При расчленении не только утрачиваются существенные свойства системы (разобранный автомобиль не поедет, расчлененный организм не может жить, лишенное управленческих связей предприятие ожидает банкротство), но и исчезают существенные свойства ее частей (оторванный руль не рулит, сорванный плод не растет, выделенный из предприятия отдел сбыта не имеет перспектив самостоятельного развития). Поэтому результатом анализа является лишь вскрытие структуры, знание о том, как система работает, и непонимание того, почему и зачем она это делает» [32, с. 229]. Редукционизм абсолютизировал принцип редукции (сведения сложного к простому и высшего к низшему), но игнорировал появление эмерджентных свойств в системах более высоких уровней организации.

Под давлением практических проблем в конце XIX – начале XX столетия в недрах науки зародилось новое направление, закладывавшее в фокус исследований системность изучаемого объекта, его место в системе вышестоящего уровня [11]. Сторонники данного направления стали все более настоятельно указывать, что именно система является тем изоморфным принципом, который проникает через все границы, исторически сложившиеся между различными науками, несмотря на то что эти науки изучают как будто качественно различные классы явлений: организмы, общество, машины. Поиски «системы» как более высокого и общего для многих явлений принципа функционирования должны были дать значительно больше, чем только одни аналитические методы при изучении частных процессов [100, с. 16–17].

С различных исходных позиций шли к современному пониманию системности философская мысль и конкретно-практическая научная и техническая методология. В своем движении к единой, объективной истине они непременно должны были сойтись, сопоставить результаты, установить общность и различия. Примечательно, что философия примерно на столетие раньше вышла «в район встречи», на высшую позицию в понимании системности материи и сознания, а также их соотношения. Философия в данном контексте выполнила функцию интеграции наук, организации взаимосвязей и взаимодействия между различными направлениями. Она одновременно мотивировала возникновение ряда научных направлений. В частности, в 1930-е годы философия явилась источником возникновения обобщающего направления, названного теорией систем. Считающийся основоположником этого направления Л. Берталанфи впервые сделал доклад о своей концепции на философском семинаре, пользуясь в качестве исходных понятий терминологией философии [11].

По мере развития системных исследований стало очевидно, что речь идет не о какой-то единственной, претендующей на общенаучное значение концепции, а о новом направлении исследовательской деятельности, выработке принципов научного мышления, формировании нового подхода к объектам исследования. Это нашло отражение в понятии «системный подход», характеризующем многообразие конкретных форм и направлений системных исследований. Ф.И. Перегудов и Ф.П. Тарасенко обоснованно обращают внимание на направления научной деятельности классиков системного подхода: Ампер – физик, Трентовский – философ, Федоров – геолог, Богданов – медик, Винер – математик, Берталанфи – биолог, Пригожин – физик [79, с. 24]. Подобная палитра научных интересов наглядно иллюстрирует универсальность системного подхода как метода исследования сложных систем.

Таблица 1.1

Основные функции системного подхода

Название	**Характеристика**
Мировоззренческая	выступает основой мировоззрения человека
Эвристическая	является инструментом научного открытия
Объясняющая	дает описание объектов и процессов природы и общества
Методологическая	представляет собой систему методов получения знания о тех или иных объектах и процессах
Прогностическая	дает возможность построения прогнозов развития систем

Источник: [97, с. 304].

Одной из первых естественных наук, где объекты исследования рассматривались как системы, стала биология. Преимущество изучения целостного организма выражено, например, в ранних работах И.П. Павлова. Так, еще в конце XIX столетия выдающийся отечественный физиолог выдвинул идею, что наиболее нормальные функции организма можно изучать не у ограниченного в подвижности животного, т.е. в условиях вивисекции, а у целостного, ненаркотизированного животного. Так появились его знаменитые методы исследования: изучение кровяного давления, фистульные методы при изучении пищеварения и, наконец, изучение высшей нервной деятельности. В области физиологических исследований И.П. Павлов первым употребил выражение «система» для некоторых специальных случаев своей экспериментальной работы [4, с. 19, 20][1].

Существенное значение для возникновения и закрепления системных представлений имели в биологии т.н. «организмические концепции», противопоставлявшиеся механицизму утверждением, что интегрированные (целостные) характеристики живого не могут быть выведены из элементаристских представлений. В классической биологии единицами анализа были организм и биологический вид. При этом высшим обобщением явилась эволюционная теория, объясняющая происхождение и развитие видов. Однако сама эволюционная теория, поставив вопрос о механизме эволюции, в частности о механизмах наследственности и изменчивости, вплотную подвела к необходимости более широкого понимания процессов жизни. Главным предметом системных исследований в биологии стало многообразие связей в живой природе, их разнокачественность соподчинения. Именно на путях углубления представлений о системе связей осуществляется поиск решения проблемы иерархического строения живой природы, а также связанной с этим проблемой управления. Системное мышление в биологии начало формироваться сразу в двух направлениях. Во-первых, произошло расширение сферы исследований за пределы организма, что вырази-

[1] Речь идет, прежде всего, о формировании динамического стереотипа. Как известно, эта система создается тем, что изо дня в день повторяется стереотипный порядок одних и тех же условных раздражителей. В результате длительной тренировки этот порядок раздражителей, обнаруживаемый по специфическому для данного раздражителя количеству слюны, проявляет себя даже в том случае, когда применяется один и тот же раздражитель [3, с. 18].

лось в формировании и развитии учений о биоценозах и биогеоценозах. Во-вторых, в биологии организма внимание исследователей все более перемещалось от отдельных процессов к их взаимодействию. Было обнаружено, что основные сложные проявления жизни, долго не находившие объяснения с прежних методологических принципов, связаны с внутренним взаимодействием, с организованностью. Это – саморегуляция и регенерация, генетический и физиологический гомеостазис и т.п. Проникновение в биологию идей кибернетики способствовало оформлению этих представлений, все более группировавшихся вокруг понятия «система». Стало ясно, что эволюцию нельзя понять вне развернутых представлений об организованности [36, с. 4–5].

Уже к середине XX столетия в среде биологов-экспериментаторов назрела необходимость целостного подхода к объяснению материала, накопленного в результате аналитического подхода к предмету. В отчетливой и красочной форме эту потребность выразил Уоддингтон в предисловии к книге Б. Гудвина «Временная организация клетки» (1966 г.). Подчеркивая необходимость разработки теоретической биологии, направленной на понимание принципов организации биологических систем, он писал: «Мы можем восхищаться теориями, говорящими нам о назначении структуры в простейших живых объектах, таких как, например, вирусы, которые почти целиком состоят из нуклеиново-кислотного стержня, заключенного в белковую оболочку, но мы не можем удовлетвориться ими. Нам необходимо развить, исходя из этого, надструктурную теорию, которая позволила бы нам понять организацию высших, наиболее сложных форм жизни. Однако разработка такого базиса, необходимого биологии для того, чтобы проделать путь от вируса до мыши, является, вероятно, еще более грандиозной задачей, чем та, которую решала физика на пути от атомного ядра к молекуле, полупроводнику и звезде» (цит. по: [4, с. 21].

В дальнейшем мощная линия перестройки и обогащения концептуального аппарата биологии будет связана с развитием экологии, в рамках которой живая природа представляется как сложная многоуровневая система. Прообразом и одним из блестящих примеров системного подхода к окружающему миру может служить учение о биосфере В.И. Вернадского. С методологической точки зрения концепция выдающегося русского ученого существенным образом опирается на принцип целостности. Причем впервые в истории познания этот принцип в последовательной научной форме был проведен в столь грандиозных масштабах. Если в предшествующей науке речь шла почти исключительно о целостности некоторого заранее данного объекта, достаточно ясно ограниченного от окружающей среды, то для Вернадского целостность биосферы является не постулатом, а предметом и, в известном смысле, даже результатом исследования. Можно утверждать, что подобный подход, ставящий во главу угла поиск реальной системы по некоторому типу (типам) связей является специфическим для значительной части системных исследований, связанных с решением комплексных проблем управления, с проектированием сложных технических систем и т.п. [36, с. 5–6].

Сначала «системность» была только лозунгом, призывом обратиться к античному представлению о целостности мироустройства и на базе интеграции последних научных достижений создать общую теорию систем. Предметом теории должны были стать принципы и закономерности, справедливые для систем вообще, независимо от их физической, биологической или социальной природы. Однако уже вскоре стало очевидным, что, двигаясь в этом направлении, можно создать только новую, еще более абстрактную теорию, чем уже существующие математические теории. Тем не менее важность призыва к системности трудно переоценить. Им ознаменовался переход от одномерной к принципиально новой – многомерной научной парадигме. Неоспоримо также и то, что системный подход стал тем новым, что было привнесено в науку XX столетием.

В тот период был организован целый ряд попыток создания специальных научных концепций, опирающихся на новые методологические идеи. В науке уже появилось и укрепилось представление о несводимости целого к сумме его частей. В связи с этим возник принцип исследования от целого к частям. В качестве специфического объекта исследования выделялись механизмы функционирования и развития. Увидели свет работы, где объект исследования выявлялся по типу рассматриваемых связей (а не наоборот). Существенный прогресс связан с английским нейрофизиологом и кибернетиком У.Р. Эшби, который в 1948 г. использовал понятие «гомеостаз» для обоснования моделирования широкого круга систем (биологических, технических, социальных) с обратной связью[1]. Л. Берталанфи, исследуя саморегуляцию открытых биологических систем, расширил понятие «эквифинальность», установив, что конечное состояние системы может быть достигнуто множеством различных путей[2]. У. Бакли, изучая морфогенетические процессы в социокультурных системах, продвинулся еще дальше и предложил обратный принцип «мультифинальность», согласно которому одинаковые исходные условия могут привести к несхожим конечным состояниям системы [32, с. 56]. В конце 1940-х годов Э. Шредингер, а затем и Н. Винер существенно расширили понятие «энтропия» до понимания его как меры дезорганизации систем любой природы[3].

[1] Гомеостазис – свойство системы сохранять в процессе взаимодействия со средой значения существенных переменных в некоторых заданных пределах. Существенными называют характеристики, тесно связанные с основным качеством системы, нарушение которого приводит к ее разрушению. Понятие было впервые введено в 1878 г. французским ученым Г. Бернаром, понимавшим гомеостаз как свойство внутренней устойчивости организма к возмущающим воздействиям внешней среды, позволяющее поддерживать параметры жизнедеятельности в определенных границах. В 1929 г. американский физиолог У. Кеннон предложил применять понятие «гомеостаз» применительно к концепции «мудрости тела». Следует учитывать, что гомеостатичность сложных систем обеспечивается посредством взаимодействия целого комплекса обеспечивающих процессов и вспомогательных связей. При этом абсолютный гомеостаз недостижим, что подтверждается в биологическом организме возникновением болезней и неизбежностью старения, а применительно к техническим системам – их износом и способностью адекватно реагировать строго на определенные воздействия [41, с. 9, 11].

[2] Феномен «эквифинальности» установил Х. Дриш, понимавший под ним направленность развития клетки на различных этапах жизни. Позднее было установлено, что эквифинальность является фундаментальным свойством систем любой природы. Было принято считать, что одинаковые исходные условия в известной структуре дают одинаковые результаты. Поэтому поведение системы с известной структурой является полностью предсказуемым, а ее будущее состояние жестко привязано к исходным условиям и закону преобразования. В русской философии эта же идея была выражена Л. Карсавиным в терминах соборности и общины [67, с. 57]. Позднее на смену эквифинальности пришло понимание саморазвития систем, способности их воспроизводить свою структуру и отношения между элементами [114, с. 30–31].

[3] Эта мера простирается от максимальной энтропии (H=1), т.е. хаоса, полной неопределенности, до исчезновения энтропии (H=0), соответствующего наивысшему уровню организации, порядка. Понятие энтропия, изначально введенное Р. Клаузисом для более удобного описания работы тепловых двигателей, позже усилиями ряда исследователей, и в первую очередь Л. Больцмана, получило универсальное значение, определяя многие закономерности в поведении макроскопических систем. В 1930-х годах энтропия стала мерой вероятности информационных систем и явилась основой теории информации (работы Л. Сцилларда, К. Шеннона). Связь между энтропией и вероятностью выражается формулой Больцмана: $H = \sigma \ln W$, где H – энтропия, W – термодинамическая вероятность состояния. Существенно, что Больцман, связав второй принцип термодинамики с

Таблица 1.2

Этапы развития понятия «энтропия»

Понятие энтропии	Год	Автор
Мера рассеяния тепловой энергии в замкнутой термодинамической системе	1852 г.	Клаузис, Больцман
Мера вероятности информационных систем (мера количества информации)	1929 г.	Сциллард, Шеннон
Мера дезорганизации систем любой природы	1944 г.	Шредингер, Винер

Источник: [60, с. 15].

Для выработки единых обобщающих терминов, единого языка общения представителей разных наук Н. Винер еще в 1934 г. собрал в Принстоне на семинар ученых многих специальностей (нейрофизиологов, инженеров-связистов, конструкторов вычислительной техники и т.д.). Для названия новой науки об общих принципах управления в живых организмах и машинах был принят термин «кибернетика», а существующее словосочетание «кибернетический подход» может рассматриваться как первая интегральная концепция естествознания, объединяющая гуманитарное и формальное знания. Однако в последующем в связи с неоднозначной трактовкой термина «кибернетика» и употреблением его во многих работах, связанных с разработкой технических аналогов живых организмов, этот термин стал использоваться в более узком смысле – как одно из направлений теории систем, занимающееся процессами управления техническими объектами [37, с. 11–12].

Реакцией на исключительно бурный рост аналитических подходов в науке, все более удаляющих творческую мысль от того, что длительное время называлось проблемой, стала попытка упорядочения разрозненных системных подходов в рамках универсальной концепции под названием «общая теория систем» [100, с. 17]. Ее основоположником выступил австрийский биолог Л. Берталанфи [10; 11; 121], который в 1930-е гг. ввел понятие открытой системы и сформулировал основные идеи и закономерности нового обобщающего направления. Берталанфи описывал общие зако-

теорией вероятности, показал, что убывание энтропии не является невозможным, а только маловероятным. Второй принцип термодинамики становится констатацией того факта, что информация теряется различными способами. Это ведет к увеличению энтропии системы, но, чтобы приобрести новую информацию и уменьшить энтропию, следует произвести новые измерения, т.е. затратить энергию [60, с. 15].

номерности таких сложных систем, как биологические или социальные. Для исследования разнородных систем применялся математический аппарат, благодаря чему абсолютно разные системы описывались с помощью единого формального аппарата, что также позволило установить единство реальности. Было исследовано взаимодействие систем с внешней средой, обмен веществом, энергией, информацией, энтропией и доказано, что в системах устанавливается динамическое равновесие, направленное в сторону усложнения организации. Системы любой природы адаптируются в ответ на внешние воздействия благодаря внутренним механизмам. Эти механизмы обеспечивают достижение равновесия в системах. В 1950-е гг. Л. Берталанфи в Канаде организовал институт системных исследований, целью которого являлось накопление эмпирических данных из различных наук и обобщение их на основе единых научных принципов, основанных на идее единства и изоморфизма законов [114, с. 31].

Следует отметить, что существенный вклад в формирование системных представлений внес в начале XX столетия (в 1911 г., еще до Берталанфи) российский исследователь А.А. Богданов (Малиновский) [13]. Однако в силу исторических причин предложенная им всеобщая организационная наука – тектология (от греч. «тектон» – строитель) не нашла распространения и практического применения [37, с. 12].

Важной сферой внедрения в общественное сознание идей системного подхода стала современная техника. Научно-техническая революция существенно изменила исходные принципы конструирования современных технических систем, для которых характерны большие масштабы по числу конструктивных элементов, по объему выполняемых функций и т.п.; наличие определенной целостности, функционального единства; сложность поведения; высокая степень автоматизации; нерегулярные во времени поступления внешних воздействий и т.д. Это привело к возникновению таких понятий, как большие и сложные системы, обладающие специфическими для них проблемами. Разработка и конструирование указанных систем внесли существенные изменения в общие методы технического мышления: системный подход стал рассматриваться как важнейший компонент современной технического процесса. Необходимость решения этих проблем вызвала к жизни множество приемов, методов, подходов, которые постепенно накапливались, развивались, обобщались, образуя в конце концов определенную технологию преодоления количественных и качественных сложностей. Единство технической системы, подчинение изделия системе, стратегия поведения системы, системность в проектировании и т.д. – вот исходные установки новых методов технического мышления. Гигантское возрастание сложности технических объектов привело к тому, что в процессе конструирования оказываются связанными в единое целое тысячи предприятий, сотни тысяч исполнителей. В результате складывается и живет по своим законам другая, неразрывно связанная с технической системой, – система по созданию системы [36, с. 6–7].

Понятие «система», ранее употреблявшееся эмоционально и бессодержательно, превратилось в специальную общенаучную категорию. Начали появляться обобщающие научные направления, которые исторически иногда возникали параллельно на разной прикладной или теоретической основе и носили различные наименования: в инженерной деятельности – «методы проектирования», «методы инженерного творчества», «системотехника»; в военных и экономических вопросах – «исследование операций»; в политическом и административном управлении – «конфликтология», «политология», «футурология», «программно-целевое управление»; в прикладных научных исследованиях – «имитационное моделирование», «методология эксперимента» и т.д. [79, с. 5].

Системные идеи получили распространение и в некоторых психологических концепциях, выступивших против психологического атомизма, сведения психологических феноменов к их физиологической основе и поставивших во главу угла целостность психологических структур. С этого времени структурный подход к психологической деятельности фактически получил всеобщее признание, стал неотъемлемой частью современной психологии.

С системными идеями тесно связана и общая теория знаковых систем. Существуют лингвистическая, логическая, психологическая и социологическая трактовка знака, каждая из которых опирается на специфические способы подхода к знаковым системам и использует соответствующие методы анализа. Принципиальная задача семиотики (общей теории знаковых систем) состоит в синтезировании этих подходов.

Системная направленность исследований пробивает себе дорогу и в других областях современной науки. Среди них, прежде всего, следует отметить кибернетику, в которой понятие «система» является одним из основных. Решаемые кибернетикой задачи по информационному моделированию функций живых организмов, исследования по бионике, развитие теории самоорганизующихся систем, приложение кибернетики к социальным исследованиям и т.д. – для всех этих направлений характерны постановка и решение системных задач [36, с. 7].

Последовательное приложение системного принципа к явлениям различного класса (организму, машинам, обществу) не является простой сменой терминологии, перестановкой лишь порядка исследовательских приемов. Системный подход к исследованию является прямым следствием перемены теоретического подхода к пониманию изучаемых объектов, то есть в некоторой мере следствием изменения самой формы мышления экспериментатора. Наиболее характерной чертой системного подхода является то, что в исследовательской работе не может быть аналитического изучения какого-то частичного объекта без точной идентификации этого частного в большой системе [100, с. 17].

В СССР теорию систем изначально активно развивали философы (В.Г. Афанасьев, В.Н. Садовский, В.С. Тюхтин, А.И. Уёмов, Ю.А. Урманцев [8, 89, 101, 102] и др.). Ими были разработаны концептуальные основы, терминологический аппарат, исследованы закономерности функционирования и развития сложных систем, обозначены другие проблемы, связанные с философскими и общенаучными основами системных исследований. Однако философская терминология не всегда легко преломляется к практической деятельности. Поэтому потребности практики в СССР и в зарубежье привели к тому, что в 1960-е гг. при постановке и исследовании сложных проблем проектирования и управления довольно широкое распространение получили следующие термины:

- «системотехника» – понятие, перенесенное из терминологии переведенной книги Г. Гуда и Р. Макола «System Engineering» [23] в 1962 г. Ф.Е. Темниковым (основателем первой в стране кафедры, развивающей теорию систем, созданной в Московском энергетическом институте под названием «Системотехника») и широко используемое в последующем применительно к техническим системам;
- «системология» – термин, предложенный в 1965 г. И.Б. Новиком, независимо – В.Т. Куликом [61], использовавшийся Б.С. Флейшманом [104], В.В. Дружининым, Д.С. Конторовым и др.;

- «исследование операций» – термин, обозначающий направление, возникшее для исследования военных операций, применялся в различных сферах, в т.ч. и в экономике [37, с. 13].

Для обобщения дисциплин, связанных с исследованием и проектированием сложных систем, используется термин «системные исследования», а иногда сохраняется термин «системный подход», который широко применялся в первые годы становления теории систем в двух смыслах – в смысле методологического направления философии и в прикладном аспекте – как синоним понятия «комплексный подход» [37, с. 13].

Параллельно с направлениями, однозначно фокусировавшимися на понятии «система», возникали междисциплинарные направления, которые развивались как самостоятельные, но фактически были ориентированы на системные исследования. Наиболее известными из этих направлений системных исследований, возникших в 1970-е гг., являются следующие:

- «ситуационное моделирование» или «ситуационное управление» (см. работы Д.А. Поспелова [85], Ю.И. Клыкова, Л.С. Загадской-Болотовой [98, гл. 7]);
- «информационный подход» к анализу систем (см. работы А.А. Денисова [26, 27, 28, 29]);
- «концептуальное метамоделирование», предложенное в 1980–1990-е гг. в работе В.В. Нечаева [73];
- «системология феноменального», развиваемая в работах Б.Ф. Фомина [42]) [37, с. 15].

В 1971 г. советский физиолог П.К. Анохин представил «теорию функциональных систем», сравнимую по уровню обобщенности с теорией Берталанфи. Однако в отличие от общей теории систем, которая длительное время пребывала в поиске возможных путей применения, теория Анохина стала импульсом к активному развитию именно практической исследовательской работы [4, с. 55].

В 1981 г. А.Д. Урсул в книге «Философия и интеграционные – общенаучные процессы» обосновал необходимость разработки нового вида знаний – общенаучных понятий, методов и средств познания [57, с. 17], а В.П. Боголепов определил в качестве задачи теории организации «установление законов, закономерностей и принципов организационных отношений в любых естественно-природных явлениях, машинах и социальных сообществах» [57, с. 18].

В 1980-е гг. возникла синергетика – научное направление, занимающееся исследованием общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения упорядоченных временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной физической природы (физических, химических, биологических, социальных). Термин «синергетика» (от греч. synergetikos – совместный, согласованно действующий) ввел немецкий физик Г. Хакен при исследовании механизмов кооперативных процессов в лазере. Однако еще раньше, в 1960-е гг., И.И. Пригожин пришел к идеям синергетики (хотя вначале этот термин не использовал) из анализа химических реакций. Теоретической основой его моделей является нелинейная термодинамика. Пригожин исследовал диссипативные процессы, в результате которых из неупорядоченных однородных состояний под воздействием флуктуаций могут происходить разрушения прежней и возникать качественно новые организации за счет диссипации (рассеяния) энергии, использованной системой, и получения из среды новой энергии [37, с. 15].

На сегодняшний день синергетика доказала свою эффективность применительно к исследованию самых разных систем: в искусстве и творчестве [34], в истории и социологии [39, 40, 69], в биологии – Т. Пу [88], В.-Б.Занг [35], В.П. Милованов [68, 69] активно применяют синергетический подход в экономике. В последнее время наблюдается все большее сближение теории систем и синергетики. В частности, синергетические исследования используются в теории систем при пояснении закономерности самоорганизации. В перспективе, по-видимому, на основе объединения теории систем и синергетики возможно становление теории развивающихся систем как интегральной концепции современной теории познания [37, с. 15].

На основании вышеизложенного можно констатировать, что системный подход – специфическая реакция на бурный и длительный процесс дифференциации в науке, который привел к возникновению огромного количества непохожих одна на другую наук. Это то, что объединяет отдельные науки в единую науку, форма методологической интеграции современной науки. Происходящие в нем открытия в рамках конкретных наук довольно быстро становятся достоянием всей науки. Системный подход – единство методологической интеграции и дифференциации при доминировании тенденции объединения, собирания методологического комплекса [97, с. 303].

Между тем системный подход не является сформировавшимся, застывшим в своем развитии способом познания окружающей действительности и находится в перманентном поиске новых и совершенствовании известных форм приложения. Академик Анохин выделяет четыре доминирующие тенденции в развитии данной теории [4, с. 23–24].

1. Первая состоит в том, чтобы сделать системный подход достаточно понятным с формулировочной точки зрения и направить все внимание на философский смысл системного подхода, примененного, в частности, к социальным явлениям. В этих поисках система выступает как научная и философская категория, ведущая к усовершенствованию познавательного процесса. Такое направление, в основном разрабатываемое философами и историками, развивается по пути исключительно теоретического поиска и теоретической оценки, при которых трудно пока говорить о каком-либо практическом применении системного подхода в исследовательской работе.

2. Представителями второй тенденции являются сторонники математической формализации системы или математической теории систем (М. Месарович, А. Раппопорт, В. Кухтин и др.).

3. Последователи системного подхода, поддерживающие третье направление, считают, что теория систем должна вырасти из изучения натуральных систем и затем стать конкретным инструментом исследования. Такие системы должны помогать исследователю ставить новые, более прогрессивные задачи научных исследований, быть способным объяснять накопленный ранее материал и преодолеть только аналитический подход к исследовательской работе. Эта категория ученых ожидает, что теория систем проложит «концептуальный мост» через пропасть, пока еще разделяющую синтетический и аналитически подходы к объектам исследования.

4. К четвертому направлению примыкают сторонники системного подхода, которые под этим углом зрения анализируют социально-экономические системы.

В таблице 1.3 приведен обзор основных теорий и концепций, сформированных в рамках системного подхода, а в следующем разделе дано более подробное описание некоторых базовых научных подходов, составивших фундамент системного движения в мировой науке.

Таблица 1.3

Системные концепции, их авторы и характеристики

Название	Период возникновения	Авторы	Характеристика
Тектология	1924 г.	А.А. Богданов (Малиновский)	
Общая теория систем (несколько вариантов)	1930-е гг.	Л. Берталанфи, К. Боулдинг, Дж. Гиг, М. Месарович, У.Р. Эшби, В.Г. Афанасьев, И.В. Блауберг, С.П. Никаноров, В.Н. Садовский, В.С. Тюхтин, А.И. Уёмов, Ю.А. Урманцев, Э.Г. Юдин и др.	Формирование понятийного аппарата систем; попытка создания строгой теории; выявление общих закономерностей функционирования и развития систем любой природы
Системно-кибернетический подход	1934 г.	Н. Винер, У.Р. Эшби, Ст. Бир, В.М. Глушков, А.И. Берг, Л.П. Крайзмер, Н.Е. Кобринский, Л.Т. Кузин, Е.З. Майминас, Л.А. Растригин и др.	Выделение общих законов управления; гомеостатический, целевой, управленческий характер систем; наличие прямой и обратной отрицательной и положительной обратной связей; процессы управления рассматриваются как процессы переработки информации; теория автоматического регулирования; теория информации; теория оптимального управления; теория алгоритмов; становление химической, технической, экономической и т.п. кибернетики
Структурализм (несколько вариантов)		К. Леви-Стросс, М.П. Фуко, Ж. Лакан, Р. Барт, Л. Гольдман, А.Р. Радклифф-Браун и др.	Выявление структур, имеющихся в культуре; применение структурных методов в изучении различных продуктов человеческой деятельности в целях выявления логики порождения, строения и функционирования объектов духовной культуры; выделение и анализ эпистем – способов фиксации связей между словами и вещами

Продолжение Таблицы 1.3

Функционализм (несколько вариантов)		Г. Спенсер, Т. Парсонс, Б. Малиновский, Р. Мертон, Н. Луман, К. Гемпель, Ч. Миллс и др.	Выявление функций как наблюдаемых следствий, которое служит саморегуляции и адаптации системы; исследование функциональных потребностей и их обеспечения структурами; выделение явных и латентных функций, функций и дисфункций; исследование проблем адаптации и саморегуляции систем
Структурный функционализм (несколько вариантов)		Р. Бейлз, Р. Мак-Айвера, Р. Мертон, Т. Парсонс, Н. Смелсер, Э. Шилз и др.	Равновесие и спонтанная регуляция систем; наличие в обществе инструментальной и функциональной рациональности; общество как система имеет технико-экономическую, профессиональную и стратификационную структуры
Имитационное моделирование	1950-е гг.	Дж. Форрестер, А.В. Федотов (имитационное динамическое моделирование), А.А. Емельянов	
Системология	1950-е гг.	В.Т. Кулик, И.Б. Новик, Б.С. Флейшман, В.В. Дружинин, Д.С. Конторов, Б.Ф. Фомин и др.	Наука о системах, которая интегрирует в себя общую теорию систем, частные и отраслевые теории систем, системотехнику
Системотехника (System Engineering)	1962 г.	Г. Гуд, Р. Макол, Ф.Е. Темников, В.В. Дружинин, Д.С. Конторов, В.И. Николаев, А. Холл, Г. Честнат	Прикладное, инженерное направление знаний о системах, определяющее их моделирование, проектирование, конструирование и регулирование
Синергетический подход	1960-е гг.	И. Пригожин, И. Стенгерс, Г. Хакен, А.П. Руденко и др.	Исследование процессов самоорганизации в системах любой природы; объяснение поведения сложных нелинейных систем, находящихся в неравновесных состояниях спонтанным образованием структур; роль динамического хаоса и флуктуаций в развитии системы; наличие многообразия путей развития систем в условиях хаоса

Окончание Таблицы 1.3

Исследование операций	1960-е гг.	Р. Акофф, Е.С. Вентцель, Т. Саати, М. Сасиени, У. Черчмен, Ф. Эмери и др.	Направление кибернетики, основанное на аппарате оптимального математического программирования, теории массового обслуживания, математической статистики, теории игр и пр.
Системный анализ	1960-е гг.	Корпорация RAND, Ч. Дэвис, С. Зигфорд	
	Конец 1960-х – 1970-е гг.	Э. Квейд, В. Кинг, Д. Клиланд, С. Оптнер, С. Янг, Э. Янч, Ю.И. Черняк, Е.П. Голубков, Н.Н. Моисеев, Ф.И. Перегудов, В.Н. Сагатовский, Ф.П. Тарасенко, В.З. Ямпольский, С.А. Валуев, В.Н. Волкова, Ю.И. Дегтярев, А.А. Емельянов, В.Н. Козлов, Д.Н. Колесников и др.	
Математические теории систем (несколько вариантов)		М. Месарович, Л.В. Кантарович, В.С. Немчинов и др.	Математические определения систем, основанные на теории множеств, логике, математическом программировании, теории вероятностей и статистике; математические описания структуры, функций и состояний систем
Ситуационное моделирование	1970-е гг.	Д.А. Поспелов, Ю.И. Клыков, Л.С. Загадская-Болотова	Анализируются результаты функционирования системы в различных ситуациях, исследуется динамика изменения этих результатов
Информационный подход	1973 г.	А.А. Денисов	
Концептуальное метамоделирование и проектирование	1990-е гг.	В.В. Нечаев, С.П. Никаноров	

Источник: составлено по: [97, с. 284–285; 37, с. 14].

Вопросы для самоконтроля

1. Раскройте содержание понятий «элементаризм» и «фрагментаризм»? С какой отраслью науки связано развитие элементаризма?

2. Объясните, чем обусловлена необходимость возникновения системного подхода в исследовании объекта?

3. Назовите основоположников системного подхода и отрасли науки, которые они представляли.

4. Раскройте содержание понятия «редукционизм» как метода исследования объекта.

5. Какая отрасль знаний послужила платформой возникновения обобщающего направления, названного теорией систем?

6. Когда и где Л. Берталанфи впервые сделал доклад о необходимости создания обобщающего теоретического направления, позже названного теорией систем?

7. Перечислите основные функции системного подхода.

8. Какая из естественных наук стала первой дисциплиной, где объекты исследования рассматривались как системы?

9. Раскройте содержание организмических концепций в биологии и объясните, в чём заключается их противопоставление концепциям, развивавшимся в рамках механистического подхода?

10. В чём состоит вклад А.А. Богданова (Малиновского) в развитие системного подхода?

11. В чём заключается вклад учения о биосфере В.И. Вернадского в развитие системного подхода?

12. Раскройте содержание понятий «эквифинальность», «мультифинальность», «гомеостазис», «энтропия».

13. Чем обусловлено ускоренное развитие системного подхода в середине XX века?

14. Какое место занимал «кибернетический подход» в общем развитии системного подхода?

15. Перечислите четыре доминирующие тенденции в развитии системного подхода и раскройте их содержание.

16. Перечислите основные теории и концепции, сформированные в рамках системного подхода. Назовите их авторов.

Литература для самостоятельной работы

1. *Афанасьев В.Г.* Проблема целостности в философии и биологии. – М.: Мысль, 1984. – 416 с.

2. *Берталанфи Л.* Общая теория систем – обзор проблем и результатов / Системные исследования: Ежегодник. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.

3. *Богданов А.А.* Всеобщая организационная наука: (Тектология). – 3 изд. заново перераб. и доп. – Л.-М.: Книга, 1929. – Ч. 3. – 221 с.

4. *Винер Н.* Кибернетика и общество. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.

5. *Гуд Г.Х., Макол Р.* Системотехника: Введение в проектирование больших систем. – М.: Советское радио, 1962. – 383 с.

6. *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 423 с.

7. *Захарченко Н.Н., Минеева Н.В.* Основы системного анализа: Часть I. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета экономики и финансов, 1992. – 78 с.

8. *Звягин Л.С., Катаргин Н.В.* Системный анализ и моделирование. – М.: Финансовый университет, 2016. – 412 с.

9. *Квейд Э.* Анализ сложных систем. – М.: Советское радио, 1969. – 520 с.

10. *Клейнер Г.Б.* Системный кризис, системный анализ, системный менеджмент [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.kleiner.ru/arpab/sis-kriz.html (дата обращения: 10.01.2014).

11. *Кричевский А.И.* Основы системного анализа. – Новосибирск, 2010. – 136 с.

12. *Оптнер С.* Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Советское радио, 1969. – 216 с.

13. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высш. школа, 1989. – 361 с.

14. *Садовский В.Н.* Основания общей теории систем: Логико-методологический анализ. – М.: Наука, 1974. – 279 с.

15. *Сурмин Ю.П.* Теория систем и системный анализ. – К.: МАУП, 2003. – 368 с.

16. *То Кен Сик.* Системный подход и системный анализ для исследования социально-экономических объектов и принятия управленческих решений. – Южно-Сахалинск: Изд-во Сах ГУ, 2014. – 168 с.

17. *Тюхтин В.С.* Отражение, система, кибернетика: Теории отражения в свете кибернетики и системного подхода. – М.: Наука, 1972. – 256 с.

18. *Уёмов А.И.* Системный подход и общая теории систем. – М.: Мысль, 1978. – 272 с.

19. *Черняк Ю.И.* Анализ и синтез систем в экономике. – М.: Экономика, 1970. – 151 с.

20. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.

21. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

1.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ, СФОРМИРОВАННЫЕ НА ОСНОВЕ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

1.2.1. Зарождение кибернетики. Внедрение системного подхода в управлении сложными объектами

Термин «кибернетика» имеет глубокую историю и на понятийном уровне применялся еще в Древней Греции философом Платоном, который называл кибернетикой искусство административного управления провинциями. Таким образом, уже в античный период кибернетика связывалась (как минимум, на уровне терминологии) с управлением общественными процессами.

Первым в отчетливой форме вопрос о необходимости научного подхода к управлению сложными системами выдвинул М.-А. Ампер. В работе «Опыт о философии наук, или аналитическое изложение классификации всех человеческих знаний» (вышедшей двумя частями в 1834 г. и в 1843 г.) он предпринял попытку классификации различных отраслей научных знаний, где третьей по счету поставил науку об управлении государством, названную им «кибернетикой». «Беспрестанно правительству приходится выбирать среди различных мер ту, которая более всего пригодна к достижению цели, – писал ученый, – и лишь благодаря углубленному и сравнительному изучению различных элементов, доставляемых ему для этого выбора, знанием всего того, что касается управляемого им народа, – характера, воззрений, истории, религии, средств существования и процветания, организаций и законов, – может оно составить себе общие правила поведения, руководящие им в каждом конкретном случае. Эту науку я называю кибернетикой от слова кибернет, обозначавшего сперва, в узком смысле, искусство управления кораблем, а затем постепенно получившего у самих греков гораздо более широкое значение искусства управления вообще» [79, с. 21]. Таким образом, М.-А. Ампер не только дал методологическое наполнение понятию «кибернетика», определил его место в системе научных знаний, но также сформулировал базовые системные черты новой науки [79, с. 21].

Практически одновременно идеи системности относительно управления государством прозвучали в работах философа-гегельянца Б. Трентовского. «Применение искусства управления без сколько-нибудь серьезного изучения соответствующей теории подобно врачеванию без сколько-нибудь глубокого понимания медицинской науки», – писал польский ученый [79, с. 21]. В 1843 г. на польском языке была издана монография Трентовского «Отношение философии к кибернетике как искусству управления народом», включившая курс лекций, который он читал во Фрайбургском университете. Основной целью монографии была выработка научных принципов деятельности «кибернета» (от древнегреческого «kubernētēs» – рулевой, кормчий, в современной терминологии, руководитель – лицо, принимающее решение). Ученый отмечал, что результативное управление требует учета всех основных внутренних и внешних факторов, способных оказать влияние на объект управления. При подготовке мер управляющего воздействия кибернет должен учитывать региональные особенности, а также действовать с учетом временного аспекта. Иными словами, даже руководствуясь одной идеологией, следует по-разному управлять в Австрии, Пруссии или России, точно как и в одном и том же государстве необходимо завтра управлять иначе, чем сегодня [2, с. 12].

Основные трудности управления, согласно Трентовскому, вытекают из неординарности поведения человека: «Люди не математические символы и не логические категории, и процесс управления – это не шахматная партия. Недостаточное знание целей и стремлений людей может опрокинуть любое логическое построение. Людьми очень трудно командовать и предписывать им наперед заданные действия. Приказ, если кибернет вынужден его отдавать, всегда должен четко формулироваться. Исполняющему всегда должен быть понятен смысл приказа, его цели, результат, который будет достигнут, и кара, которая может последовать за его невыполнением, – последнее обязательно». Б. Трентовский осознавал, что как общество, так и сам человек являются системами, которые содержат совокупность противоречий, разрешение которых составляет суть развития. По этой причине кибернет, руководствуясь общественными интересами, обязан одни противоречия локализовать, другие – усиливать, направляя развитие событий к нужной цели. «Кибернет не проектирует будущее, как старается сделать некий радикальный философ, – он позволяет будущему рождаться своим собственным независимым способом. Он оказывает будущему помощь как опытный и квалифицированный политический акушер» [79, с. 22].

Вышеизложенные положения научной позиции Б. Трентовского позволяют осознать глубину его продвижения в понимании системности общественных отношений, сложности управления социальными группами, необходимости алгоритмизации человеческой деятельности. Однако общество середины XIX столетия оказалось не готовым воспринять идеи системности в общественном управлении. «Практика управления еще могла обходиться без науки управления. Кибернетика родилась слишком рано и была позабыта» [79, с. 23].

Потребовалось еще полстолетия, чтобы системная проблематика вновь оказалась в фокусе научного интереса. На этот раз объектом исследований оказались структурные и организационные аспекты развития систем. Знаковым стало открытие, осуществленное академиком Е.С. Федоровым (1891 г.) в области минералогии и кристаллографии. Российский ученый установил факт ограниченности видов кристаллической решетки (230 типов) при том, что практически любое вещество при определенных обстоятельствах способно кристаллизоваться. Таким образом было продемонстрировано, что огромное многообразие минералов и кристаллов использует для своего строения ограниченное количество типов структур. Выводы, выходящие за рамки своей науки, сделал сам ученый, предположивший, что невообразимое разнообразие природных тел реализуется из ограниченного и небольшого числа исходных форм. Е.С. Федоров отметил аналогичные закономерности в области архитектурных конструкций, музыкальных произведений, языковых построений, строения вещества и ряда других систем. Развивая системные представления, отечественный ученый установил ряд других закономерностей развития систем. В частности, им было выявлены такие свойства систем как самоорганизация, способность к приспособлению («жизненная подвижность»), к повышению стройности [2, с. 12–13]. Указанные выводы позволяют обоснованно отнести Е.С. Федорова к основоположникам теории систем.

1.2.2. Всеобщая организационная наука (тектология) А.А. Богданова

Следующим этапом в развитии системных представлений явились работы А.А. Богданова (настоящая фамилия – Малиновский), который в начале XX столетия начал формировать свою системную теорию, названную им «тектология». В 1911 г. был опубликован 1-й том, а в 1925 г. – 3-й том его основного труда «Всеобщая организационная наука (тектология)». Указанная книга по содержанию намного обогнала свое время, предвосхитив многие идеи классиков системного подхода. Богданов опередил работы Н. Винера и Л. Берталанфи более чем на 30 лет и может заслуженно считаться автором первого варианта общей теории систем и предшественником кибернетики [100, с. 7].

Тектология в дословном переводе с греческого языка означает «учение о строительстве». Сам Богданов понимал тектологию как развитую и обобщенную методологию науки. Он ставил задачу выработки универсальных организационных методов, которые положили бы предел анархичности в дроблении организационного опыта. Критикуя особенности мышления, воспитанного на специализации, Богданов осуществил попытку заложить обобщенные методологические основы науки, объединяющей организационный опыт человечества.

Тектологию Богданов рассматривал как науку, находящуюся в тесной связи с тремя основными циклами научного знания: с науками математическими, естественными (физико-биологическими) и общественными. По сути, она была задумана как дисциплина, обладающая развитой обобщенной методологией. Объединяя специализированные научные методы, решая вопросы универсально-практического характера организованности форм, А.А. Богданов создал уникальную концепцию системного подхода к анализу явлений в природе и социуме. В тектологии Богданова впервые сформулированы основные положения системного подхода и теории самоорганизации систем [100, с. 9–10].

Исходным пунктом тектологии является признание необходимости подхода к изучению любого явления с точки зрения его организации. Принять организационную точку зрения – значит изучать любую систему с точки зрения как отношений всех ее частей, так и отношений ее как целого со средой, т.е. со всеми внешними системами. Законы организации систем едины для любых объектов, самые разнородные явления объединяются общими структурными связями и закономерностями: «...структурные отношения могут быть обобщены до такой же степени формальной чистоты схем, как в математике отношения величин, и на такой основе организационные задачи могут решаться способами, аналогичными математическим. Более того, отношения количественные я рассматриваю как особый тип структурных, и самую математику – как раньше развившуюся, в силу особых причин, ветвь всеобщей организационной науки: этим объясняется гигантская практическая сила математики как орудия организации жизни» [15, с. 309].

С организационной точки зрения Богданов все сводил к изменениям, действиям и противодействиям элементов, объединенных в комплексы. В соответствии с организационной точкой зрения мир рассматривался как находящийся в непрерывном изменении, в нем нет ничего постоянного, все суть изменения, действия и противодействия. В результате взаимодействия изменяющихся элементов наблюдатель может выделить некоторые типы комплексов, различающиеся по степени их организованности [14, с. 9].

Понятие «комплекс» в тектологии тождественно современному термину «система» [82, с. 24]. Комплексы по характеру организации делятся на организованные, неорганизованные и нейтральные. В организованных комплексах «целое больше суммы своих частей», в неорганизованных – меньше, а в нейтральных – «целое равно сумме своих частей». Иными словами, чем больше целое отличается от суммы самих частей, тем более оно организовано. В неорганизованных комплексах целое меньше суммы своих частей. И, наконец, в нейтральных комплексах целое равно сумме своих частей [14, с. 9].

Среди множества организационных форм А.А. Богданов выделяет два универсальных типа систем – централистический (эгрессия) и скелетный (дегрессия). Для систем первого типа (эгрессия – от латинского «выхождение из ряда») характерно наличие центрального, более высокоорганизованного комплекса, по отношению к которому все остальные комплексы играют роль периферии. Системы второго типа, напротив, образуются за счет организационно низших группировок, выделяемых сложноорганизованными пластичными комплексами. Здесь наблюдается единство и различие пластичности и прочности. Дегрессия (от латинского «схождение вниз») имеет важнейшее положительное значение с организационной точки зрения: лишь она делает возможным развитие пластичных форм, охраняя нежные комбинации от их грубой среды [14, с. 9–10].

Специальному анализу подвергаются основные организационные механизмы – механизмы формирования и регулирования систем. К формирующим механизмам относятся конъюгация (соединение комплексов), ингрессия (вхождение элемента одного комплекса в другой) и дезингрессия (распад комплекса). Универсальный регулирующий механизм обозначается термином «подбор»: это понятие А.А. Богданов заимствовал из биологии и применил его к процессам сохранения и разрушения всех видов систем [14, с. 10].

Структура любой системы рассматривалась Богдановым как результат непрерывной борьбы противоположностей, сменяющей одно состояние равновесия системы другим. «Системное расхождение заключает в себе тенденцию развития, направленную к дополнительным связям», – писал ученый [15, с. 17]. Одновременно системное расхождение заключает в себе и другую тенденцию, развивающую определенные условия неустойчивости – обострение системных противоречий. Противоречия эти на известном уровне их развития способны перевешивать значение дополнительных связей [14, с. 33].

А.А. Богданов уделил большое внимание проблеме системной целостности общества и его отдельных подсистем различного рода. В докладе «Организационные принципы единого хозяйственного плана» он обосновал два положения: (а) общество как организованное целое есть сумма человеческих активностей, развертывающихся в природной среде; (б) каждая отрасль народного хозяйства, предприятие, работник как часть организационной системы выполняет в ней и для нее свою определенную функцию. Эти два исходных момента лежат в основе равновесия и развития экономики как всякой организационной системы [14, с. 285–291]. Рассматривая такие системы, А.А. Богданов указывал, с одной стороны, на «организмичность» политических систем, организационных структур, их отдельных звеньев и т.д., наличие у них собственных интересов (в сохранении и укреплении своей стабильности, своего места в общественном разделении труда, положения, влияния, власти и пр.) и средств для их реализации, в чем выражается консервативное начало структуры. С другой стороны, структуре присущи лабильность, изменчивость, способность к развитию, выражающие функциональную сторону организации. Этот подход позволяет изучать и объективно оценивать влияние организационных структур на процессы общественной жизнедеятельности, которое нередко бывает очень большим и даже решающим [14, с. 30, 33].

Представляют интерес и соображения А.А. Богданова о том, что государство является более устойчивым и общественно эффективным, если оно имеет слитную, централизованную структуру при неблагоприятных обстоятельствах («отрицательном организационном подборе») или (при «положительном подборе») структуру, основанную на федерации, автономии, самоуправлении [14, с. 30–31, 244–245].

Кроме биологии и обществознания, важным источником идей и образов был для А.А. Богданова язык. Во «Всеобщей организационной науке» и других работах он многократно возвращался к одному из своих любимых тезисов об исторической роли языка как фактора, организующего общественное сознание, полагая, что «слово предшествует мышлению». Не менее увлекало его присутствие в языке «скрытой системности» – регулярных звуковых и смысловых соответствий между словами различных, но связанных общим происхождением языков. При этом имелись в виду, в первую очередь, достижения сравнительно-исторического метода, позволившего систематизировать эти соответствия и частично восстановить историческое прошлое языка. А.А. Богданов писал о языкознании как о «ранее всех развившейся части идеологической науки» [13, с. 14].

Вслед за «Тектологией» А.А. Богданова в ряде общественных наук в СССР и за рубежом появились теории, посвящавшие свое основное внимание организационным формам, структурам соответствующих сторон или явлений общественной жизни. Они в той или иной мере отвлекались от социально-экономического и политического содержания изучаемых форм и явлений, но вносили определенный вклад в их исследование и имели самостоятельную научную ценность. Таков, например, структурализм К. Леви-Строса, а также некоторые системные исследования в области источниковедения. Примером подобного рода исследований в правоведении может служить нормативизм Г. Кельзена, представленный автором в его книге «Чистое учение о праве», впервые изданной в 1934 г. [45, с. 7–8; 14, с. 23].

По мнению ряда советских и зарубежных ученых, существует глубокое родство тектологии с такими современными общенаучными направлениями, как кибернетика, системный подход, структурализм, теория катастроф, синергетика и пр. По сути, Богданов высказал идею изоморфизма различных организационных структур, на которой базируется как кибернетический анализ, так и общая теория систем Л. Берталанфи. Целый ряд понятий, разработанных в тектологии («цепная связь», «закон наименьших», «принцип минимума»), оказывается верным с кибернетической точки зрения. Наконец, А.А. Богданов не только предвосхитил одну из базовых идей кибернетики – идею обратной связи (в его терминологии – бирегулятора), но и проиллюстрировал ее примерами, схожими с теми, что привел и классик системного подхода У.Р. Эшби [14, с. 11].

По убеждению М.И. Сетрова, «многие общетеоретические проблемы системного подхода разработаны А. Богдановым полнее и более строго, чем в современной теории систем и кибернетике». В этой связи можно также привести утверждение Н.Н. Моисеева, что «таблица Д. Менделеева, биогеохимия В. Вернадского, теория биогеоценозов В. Сукачева и Н. Тимофеева-Ресовского – все эти универсальные системы знаний составляют гордость русской и советской науки. Теория организации А. Богданова может быть поставлена в один ряд с подобными учениями» [91, с. 59; 72, с. 145; 14, с. 13].

В последней четверти XX века о «Тектологии» Богданова начали писать некоторые зарубежные авторы. Так, в 1975 г. в ежегоднике «General Systems» была опубликована статья Дж. Горелика (Университет Британской Колумбии, Канада) под названием «Основные идеи «Тектологии» А.А. Богданова: универсальная организационная наука». Автор показывает сходство задач созданного в 1954 г. Общества по разработке проблем общей теории систем и задач тектологии, появившейся на 40 лет раньше, и приходит к выводу о том, что «Тектология» является исторически первым развернутым вариантом общей теории систем и предшественником кибернетики [124]. Дж. Горелик ставил перед собой задачу привлечь к «Тектологии» внимание западной научной общественности и, действительно, в этой части сделал немало: в частности, перевел на английский язык и опубликовал «Очерки всеобщей организационной науки» (Самара: Госиздат, 1921 г.) – краткое изложение «Тектологии» [122, с. 265]. В своих более поздних работах, в частности в опубликованной в 1987 г. статье «Тектология» А.А. Богданова, общая теория систем и кибернетика», Дж. Горелик уточняет свое понимание значения всеобщей организационной науки. Теперь он склонен считать, что хотя «тектология содержит все исходные идеи, позднее развитые и популяризируемые общей теорией систем и кибернетикой», она – нечто большее, ее специфическая область – «все формы организации в природе и человеческой деятельности», и она представляет собой «предельное расширение любой теории систем» [123; 14, с. 13–14].

«Создателем действительно обобщенной теории систем» называет А.А. Богданова другой канадский ученый Р. Маттесич. В его обширной книге «Инструментальное рассуждение и системная методология» имеется специальный параграф, озаглавленный «Кто отец теории систем – Богданов или Берталанфи?» [126]. Р. Маттесич недвусмысленно решает этот вопрос в пользу А.А. Богданова и, более того, выражает крайнее недоумение, как Л. Берталанфи, размышляя в 1920-

е годы над системными проблемами, смог пропустить немецкое издание «Тектологии» Богданова (сразу после издания в 1926 г. оно было отрецензировано в германской научной литературе), а впоследствии во всех своих многочисленных работах ни разу не упомянуть имени А.А. Богданова [126, с. 283–284; 14, с. 14].

Как указывалось ранее, Богданов предвосхитил многие положения современных кибернетических и системных теорий. Вместе с тем теория Богданова была на долгие годы забыта и о ней вспомнили только тогда, когда другие исследователи начали приходить к тем же результатам. Возрождение интереса к идеям Богданова произошло лишь в середине XX столетия – в период бурного распространения идей научно-технической революции. Развитие современных технических дисциплин показало, что многие положения кибернетики и общей теории систем предвосхищены отечественным ученым. В результате «Всеобщая организационная наука» возрождалась к новой жизни. В советских и зарубежных изданиях стали публиковаться статьи о «Тектологии» – по сути дела, первые попытки ее строгого научного анализа. Идеи теории организации развивались, в том числе, в трудах представителей отечественного естествознания И.И. Шмальгаузена, В.Н. Беклемишева и ряда других специалистов, вклад которых во многих отношениях явился решающим в развитие теории Богданова [14, с. 8; 2, с. 13].

1.2.3. Теория открытых систем Людвига фон Берталанфи

До конца XIX в. естественные науки основывались на концепциях физики, которая, в свою очередь, базировалась на принципах редукционизма, направленного на разделение любой системы на отдельные части. Анализ системы подразумевал идентификацию ее отдельных частей и выявление влияющих факторов. Физика анализировала исключительно замкнутые, изолированные системы, стремящиеся к равновесному состоянию. Все явления, не укладывавшиеся в эту концепцию, рассматривались как метафизические, выходящие за рамки естественных наук и по этой причине не заслуживавшие внимания. Академик Энтов такого рода упрощения в науке вполне справедливо характеризует как «подметание мусора под буфет», имея в виду уход авторов от объяснения тех или иных фактов в случае, когда последние не укладываются в логику выдвигаемой теории [115, с. 85]. Неоспоримо, что игнорируя какой-либо аспект экономической реальности, невозможно ей дать адекватное описание.

Однако в конце XIX в. ученые-физики столкнулись с примерами ограниченности принципов редукционизма, а в середине 1920-х годов подобная ситуация проявилась и в биологии. Новые взгляды начали получать все большее распространение. Прорыв в научном мышлении в значительной мере связан с открытиями Людвига фон Берталанфи в области биологии организмов, сделанного в 1930-е годы. Австрийский биолог обнаружил, что в оценке динамики поведения организмов физические концепции проявили неадекватность. Он установил, что поведение живых существ не может быть представлено просто как суммарное поведение отдельных их частей. Живой организм представляет собой нечто большее, чем сумму отдельных элементов, поскольку использует для организации их взаимодействия принцип синергизма. Кроме того, многие формы существования организмов характеризуются увеличением или сохранением внутренней упорядоченности (или ростом негэнтропии). Поэтому для объяснения феноменов, подобных синергии и негэнтропии, биология нуждалась в новых концепциях [100, с. 13].

Данные обстоятельства подтолкнули Л. Берталанфи к разработке биологической теории открытых систем, которая была построена не на редукционном анализе основных элементов живой системы, а на учете функциональных и взаимосвязанных критериев ее существования. Организмы существуют в тесной взаимосвязи с окружающим миром. Их функции и структура поддерживаются с помощью непрерывного обмена информацией с внешним окружением. Организм представляет собой комплексную систему, состоящую из множества взаимосвязанных, объединенных в единое целое элементов. Ключевыми понятиями в этой теории стали концепции самоорганизации как способа прогрессивной дифференциации; эквифинальности, отражающей независимость финального состояния от начальных условий; и телеологии, описывающей зависимость поведения организма от неких «известных ему заранее» целей в будущем. Некоторые черты открытых, в отличие от закрытых систем состоят в том, что при соответствующих условиях открытая система достигает состояния равновесия, в котором ее структура остается постоянной, но в противоположность обычному равновесию это постоянство сохраняется в процессе непрерывного обмена и движения составляющего ее вещества. Физические системы отличаются от живых образований тем, что закрыты по отношению к внешнему миру, тогда как живые организмы являются открытыми. Жизненный процесс организмов предполагает наличие входящего из внешней среды потока материи, тип и объем которого определяются в соответствии с системными характеристиками организма. Так же осуществляется выход из системы в окружающую среду материи как результата функционирования системы. Подобным образом организмы получают дополнительную энергию, которая позволяет достигать негэнтропии, а также обеспечивает устойчивость системы по отношению к окружающей среде [100, с. 13–14].

Теория открытых систем Берталанфи стала предшественницей общей теории систем, которая будет рассмотрена ниже.

1.2.4. Кибернетика Норберта Винера

По-настоящему действительное и массовое развитие системных понятий, общественное понимание системности окружающего мира, общества и человеческой деятельности стартовало с 1948 г., когда вышла в свет книга профессора Массачусетского технологического института Н. Винера «Кибернетика» [18]. Изначально американский математик видел кибернетику в качестве «науки об управлении и связи в животных и машинах», что отражало интерес Винера к аналогиям процессов в живых организмах и машинах. Однако довольно скоро выяснилось, что подобная трактовка существенно ограничивает область применения кибернетики, и уже в следующей работе [19] Винер с позиций кибернетики рассматривал процессы, реализующиеся в общественной жизни. Ученый установил общность принципов управленческой деятельности для совершенно различных объектов природы и общества. Согласно его взглядам, управление сводится к передаче, хранению и переработке информации, то есть к различным сигналам, сообщениям, сведениям. Он впервые понял принципиальное значение информации в процессах управления и определил значение кибернетики как науки, изучающей сложные динамические системы, способные воспринимать, хранить и перерабатывать информацию, а также использовать ее для управления и регулирования. В соответствии с этим основу категориального аппарата кибернетики составили такие понятия, как «управление», «система», «модель», «информация» [37, с. 15].

Н. Винер существенно расширил понятие энтропии до понимания ее как меры дезорганизации систем любой природы. С помощью энтропии стало возможным количественно оценить такие качественные понятия, как «хаос» и «порядок». Информация и энтропия связаны потому, что они характеризуют реальную действительность с точки зрения именно упорядоченности и хаоса, при этом если информация – мера упорядоченности, то энтропия – мера беспорядка; одно равно другому, взятому с обратным знаком. Энтропия и информация служат, таким образом, выражением двух противоположных тенденций в процессах развития. Альтернативность и взаимосвязь понятий энтропии и информации нашли отражение в формуле: $H + J = 1$ (const). Если система эволюционирует в направлении упорядоченности, то ее энтропия уменьшается. Но это требует целенаправленных усилий, внесения информации, т.е. управления. Количество информации, отождествляемое Винером с отрицательной энтропией (негэнтропией), становится, подобно количеству вещества или энергии, одной из фундаментальных характеристик явлений природы. Введение понятия энтропии в теорию информации явилось, по выражению Бройля, «наиболее важной и красивой из идей, высказанных кибернетикой», и рассматривается как большой вклад XX века в научную мысль. Это положение называют еще вторым «краеугольным камнем» кибернетики. Отсюда толкование кибернетики как теории организации, теории борьбы с мировым хаосом, с безудержным возрастанием энтропии [60, с. 16].

Сначала новая наука привела ученое сообщество в замешательство, связанное с тем, что кибернетики берутся за рассмотрение и технических, и биологических, и экономических, и социальных объектов и процессов. Возник даже спор: имеет ли кибернетика свой предмет исследования. Первый международный конгресс по кибернетике, состоявшийся в 1956 г. в Париже, принял предложение считать кибернетику не наукой, а «искусством эффективного действия». Столь же настороженно кибернетика была встречена и в СССР. Однако по мере развития кибернетики, выработки ее собственных методов, уточнения понятийного аппарата, получения конкретных результатов в разных областях стало очевидным, что кибернетика является самостоятельной отраслью науки, со своим, характерным только для нее предметом изучения, со своими специфическими методами исследования [79, с. 25–26].

В становление данной науки внесли заметный вклад и отечественные ученые. В период острых дискуссий о содержании кибернетики ими были, в частности, сформулированы наиболее емкие определения. Так, в 1959 г. академик А.Н. Колмогоров в предисловии к книге английского кибернетика У.Р. Эшби писал: «Сейчас уже поздно спорить о степени удачи Винера, когда он в своей известной книге в 1948 году выбрал для новой науки название «кибернетика». Это название достаточно установилось и воспринимается как новый термин, мало связанный со своей греческой этимологией. Кибернетика занимается изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить и перерабатывать информацию и использовать ее для управления и регулирования. При этом кибернетика широко пользуется математическим методом и стремится к получению конкретных специальных результатов, позволяющих как анализировать такого рода системы (восстанавливать их устройство на основании опыта обращения с ними), так и синтезировать их (рассчитывать схемы систем, способных осуществлять заданные действия). Благодаря этому своему конкретному характеру кибернетика ни в какой мере не сводится к философскому обсуждению природы «целесообразности» в машинах и философскому анализу изучаемого ею круга явлений» [116, с. 7–8]. Председатель Научного совета по кибернетике при АН СССР академик А.И. Берг следующим образом характеризует кибернетику: «Кибернетика – это наука об управлении сложными динамическими системами. Термин «сложность» здесь применяется как философская категория. Динамические системы на производстве, в природе и в человеческом обществе – это системы, способные к развитию, к изменению своего состояния. Сложные динамические системы образуются множеством более простых или элементарных систем или элементов, взаимосвязанных и взаимодействующих». И далее, имея в виду советскую школу кибернетики: «Предметом кибернетики являются процессы управления, происходящие в сложных динамических системах. Подобные системы постоянно встречаются в производственной деятельности, в естествознании и обществе. Целью советской кибернетики является разработка и реализация научных методов управления сложными процессами для повышения эффективности человеческого труда, для изыскания наиболее рациональных путей перехода от социализма к коммунизму» [103, с. 155–156, 179; 19, с. 21].

Эти емкие определения указывают, что предметом кибернетики является исследование систем. Важно подчеркнуть, что, хотя при изучении системы на каком-то этапе потребуется учет ее конкретных свойств, для кибернетики, в принципе, несущественно, какова природа этой системы, т.е. является ли она физической, биологической, экономической, организационной или даже воображаемой, нереальной системой. То, что кибернетические методы могут применяться к исследованию объектов, традиционно «закрепленных» за той или иной наукой, должно рассматриваться не как «постороннее вмешательство неспециалистов», а как рассмотрение этих объектов с другой точки зрения. Более того, при этом происходит взаимное обогащение кибернетики и других наук: с одной стороны, кибернетика получает возможность развивать и совершенствовать свои модели и методы, с другой – кибернетический подход к системе определенной природы может прояснить некоторые проблемы данной науки или даже выдвинуть перед ней новые проблемы, а главное – содействовать повышению ее системности [79, с. 25–26]. Так, Н. Винер, отвечая на вопрос о тенденциях развития естественных наук, сказал: «Главные проблемы биологии также связаны с системами и их организацией во времени и пространстве. И здесь самоорганизация должна играть огромную роль. Поэтому мои предположения в области наук о жизни касаются не только их постепенной ассимиляции физикой, но и обратного процесса – постепенной ассимиляции физики ими» [4, с. 21–22].

С кибернетикой Винера связаны такие продвижения в развитии системных представлений, как типизация моделей систем, выявление особого значения обратных связей в системе, подчеркивание принципа оптимальности в управлении и синтезе систем, осознание информации как всеобщего свойства материи и возможности ее количественного описания, развитие методологии моделирования вообще и в особенности идеи математического эксперимента с помощью ЭВМ. Все это, без преувеличения, сыграло революционизирующую роль в развитии общественного сознания, человеческой практики и культуры, подготовило почву для того невиданного ранее размаха компьютеризации, которая происходит на наших глазах [79, с. 26]. С именем американского ученого связано развитие не только математического моделирования систем, классификации моделей, но и компьютерных технологий. К. Шеннон и У. Эшби на этой основе развивают теорию информации и кибернетические системы управления [114, с. 30].

Заслугой Н. Винера является установление того факта, что совокупность различных новых дисциплин (например, таких как «теория информации», «теория алгоритмов», «теория автоматов», в разработке некоторых из которых Винер непосредственно участвовал) естественно объединяется в новую науку с достаточно определенным собственным предметом исследования [55, с. 7–8].

Американский математик имел предшественников не только в Платоне и Ампере, в Максвелле и Гиббсе. Здесь уместно вспомнить об отечественной науке. Например, теория автоматического регулирования ведет свое начало не только от Дж. Максвелла, но и от видного русского ученого и государственного деятеля XIX века И.А. Вышнеградского. Следует также упомянуть и знаменитого П.Л. Чебышева. В 1900-е годы в Екатеринославе Я.И. Грдина опубликовал работы по динамике живых организмов, в которых рассматривались динамические системы «с волевыми связями». Сам Винер ссылается на работы академиков А.Н. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Академик И.Д. Павлов в 1930-е годы вплотную подошел к сравнению мозга и электрических переключательных схем (впоследствии, однако, многие хотели противопоставить его Винеру). В.И. Шестаков, независимо от К.Э. Шеннона, открыл применимость математической логики к теории таких схем. В теории связи Винер ссылается на статистические методы академиков А.Н. Колмогорова и П.А. Козуляева. Известна пионерская работа академика В.А. Котельникова о пропускной способности «эфира и проволоки» (1933 г.) и т.д. К сожалению, суровая обстановка 1930–1940-х годов препятствовала обобщению отечественного вклада в данную область науки [82, с. 24].

В этой связи вновь встает вопрос о связи винеровской кибернетики с теорией А.А. Богданова. Известный советский кибернетик Г.Н. Поваров писал по этому поводу: «Естественно подумать также об отношении кибернетики Винера к тектологии А.А. Богданова. Их сопоставляли уже не раз, но всегда бегло и не в пользу русского автора. Здесь не место для подробного обсуждения этой сложной темы, но кажется, что по существу Богданов во многом был предшественником Винера, по крайней мере в системной части кибернетики. Философские и политические заблуждения Богданова известны, но только ли они определяют его научное лицо? Никто не отрицает научных заслуг В. Оствальда или А. Пуанкаре только потому, что они оставались идеалистами, да и Винер отнюдь не во всем материалист. Сам Богданов отделял тектологию от своих философских теорий. Он определял ее как «всеобщую организационную науку», но нередко толковал ее как некую теорию систем; термин «комплекс» у него в тектологии значит просто «система». Многочисленные параллели с Винером и особенно с Эшби бросаются в глаза, хотя, в отличие от позднейших кибернетиков, Богданов пользуется исключительно качественными методами... Было бы справедливо, если бы нынешние кибернетики рассмотрели тектологию вновь и решили, что в ней достойно внимания, а что только заблуждение и абсурд» [82, с. 24].

Вместе с тем разумно также воздержаться от преувеличенных оценок винеровской кибернетики. Простое сравнение идей Винера с идеями Трентовского и Богданова показывает, что кибернетика не смогла дойти до рассмотрения действительно сложных систем и что кибернетике Винера характерен некоторый техницизм, современная разновидность механицизма. В рассмотрении информационных процессов качественная сторона информации принесена в жертву количественной; принцип оптимальности реализуется только в полностью формализованных задачах; при моделировании интеллекта учитывается только логическая компонента мышления. Это, действительно, так, но все же стремление некоторых специалистов по информатике отмежеваться от винеровской кибернетики выглядит как реакция на ее недостатки. Справедливее рассматривать кибернетику Винера как важный этап в развитии системных представлений, давший ценные идеи и результаты, этап, на котором встретились непреодоленные трудности и обнаружились недостатки самой теории [79, с. 26–27].

1.2.5. Общая теория систем Людвига фон Берталанфи

Параллельно и независимо от развития кибернетики разрабатывался еще один подход к системной науке – общая теория систем. Идея построения теории, приложимой к системам любой природы, была выдвинута Л. Берталанфи [120]. Один из путей реализации этой идеи австрийский биолог видел в поисках структурного сходства законов, установленных в различных дисциплинах, и выявлении на основе их обобщения общесистемных закономерностей. После создания теории открытых систем (см. выше)[1] Л. Берталанфи работал над проблемой ее

[1] Одним из важнейших достижений Л. Берталанфи является введение понятия открытой системы. В отличие от кибернетического подхода, где изучаются внутрисистемные обратные связи, а функционирование систем рассматривается просто как отклик на внешние воздействия, Берталанфи подчеркивает особое значение обмена системы веществом, энергией и информацией (негэнтропией) с окружающей средой. В открытой системе уста-

адаптации к другим отраслям знаний. Эта деятельность, направленная на преодоление замкнутого, изолированного характера научных исследований, породила у него идеи относительно нового понимания единства науки, создания системных законов и обобщающих теорий, способных объединить различные научные направления [100, с. 14–15].

Руководствуясь задачей формулировки и разработки принципов, применимых ко всем системам, Берталанфи выдвинул первую в современной науке обобщенную концепцию, цель которой заключалась в разработке математического аппарата описания разных типов систем, а также в установлении изоморфизма законов в различных областях знания, управляющих формированием системных объектов [100, с. 15].

Впервые системообразующая концепция знаний, названная «общей теорией систем», была представлена в научных изданиях за 1945 год. Работая с 1946 года в США и Канаде, Берталанфи создает общество своих единомышленников с собственной программой действий, закрепленных в уставе общества следующим образом: (1) исследовать изоморфизм понятий, законов и моделей, применяемых в различных областях знаний, с целью взаимного обмена полученными результатами; (2) способствовать развитию тех областей науки, в которых ощущается недостаток в моделях и теориях; (3) минимизировать дублирование теоретических исследований; (4) содействовать интеграции знаний через установление связи между специалистами разных профилей. С 1956 г. общество издает ежегодники «General Systems» (под редакцией Л. Берталанфи и А. Раппопорта) [75, с. 19].

В развитие идей Берталанфи в 1959 г. при Кейсовском технологическом институте (США) создан «Центр системных исследований». В 1963 г. компания «International Business Machines Corporation» организовала институт системных исследований. Ряд организаций создал соответствующие отделы (RAND Corporation, Sistem Development Corporation) и др. Прошли десятки международных симпозиумов в США, Японии, СССР, Польше, Болгарии. Выходит ряд специальных изданий: «Mathematical Sistemtheory», «IEEE Transactiononsystemsscience and

---

навливается динамическое равновесие, которое может быть направлено в сторону усложнения организации (вопреки второму закону термодинамики, благодаря вводу негэнтропии извне), и функционирование является не просто откликом на изменение внешних условий, а сохранением старого или установлением нового подвижного внутреннего равновесия системы. Здесь усматриваются как кибернетические идеи гомеостазиса, так и новые моменты, имеющие свои истоки в биологии [79, с. 27–28].

Cybernetics» (издание американского института радиоинженеров), ежегодник «Системные исследования» (в СССР с 1969 г.).

Берталанфи и его последователи работали над тем, чтобы придать общей теории систем формальный характер. Однако заманчивый замысел построить общую теорию систем как новую логико-математическую дисциплину не реализован полностью до сих пор. В то же время действительную ценность общей теории систем представляет не столько ее математическое оформление, сколько разработка целей и задач системных исследований, развитие методологии анализа систем, установление общесистемных закономерностей, так как в отличие от кибернетики, занимающейся анализом механизмов обратной связи, общую теорию систем интересует динамическое взаимодействие внутри систем со многими переменными [100, с. 16].

Общая теория систем сыграла важную роль в развитии современной науки и техники. Не подменяя специальные системные теории и концепции, имеющие дело с анализом определенных классов систем, она сформулировала общие методологические принципы системного исследования. Однако в изменившемся интеллектуальном климате стали модными построения моделей и абстрактные обобщения. В результате, общая теория систем оказалась не изолированной концепцией, а стала скорее одной из многих в группе параллельно развивавшихся теорий. Все подобные теории имеют общие черты:

1) они сходятся в том, что необходимо как-то решать проблемы, характерные для бихевиоральных и биологических наук и не имеющие отношения к обычной физической теории;

2) эти теории вводят новые по сравнению с физикой понятия и модели, например обобщенное понятие системы, понятие информации, сравнимое по значению с понятием энергии в физике;

3) данные теории имеют дело преимущественно с проблемами со многими переменными;

4) вводимые такими теориями модели являются междисциплинарными по своему характеру и далеко выходят за пределы сложившегося разделения науки;

5) такие понятия, как «целостность», «организация», «телеология» и «направленность движения или функционирования», за которыми в механистической науке закрепилось представление как о ненаучных или метафизических, ныне получили полные права и рассматриваются как чрезвычайно важные средства научного анализа [100, с. 16].

1.2.6. Теория функциональных систем П.К. Анохина

Изложение своего системного подхода, впервые представленного в работах «Теория функциональной системы» и «Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем» (1970, 1971 гг. [5, 3]), академик Анохин предваряет критикой теории Берталанфи. Он задается вопросом, почему общая теория систем, мотивированная достаточного радикальными и даже эволюционными задачами в борьбе с механистическим аналитизмом, не оказалась способной приобрести всеобщую симпатию экспертного сообщества и не вызвала немедленного преобразования самой логики научного исследования. По мнению ученого, для объяснения того «ничтожного результата», который был получен при обсуждении «общей теории систем» имеются две причины:

1) автор общей теории систем и его последователи пошли по неправильному пути как в поисках понятия системы, так и в общей тактике ее разработки. При всякой попытке сформулировать понятие системы все исследователи попадают в заколдованный круг традиционных понятий. Непрерывно цитируются «целостность», «организменность», «взаимодействие», «организованная сложность», «упорядоченное множество» и другие подобные термины, которые становятся даже центральными критериями понятия системы. Ясно, что все эти термины по самой своей сути являются лишь вариациями понятия целостности. Именно поэтому, не выходя за пределы понятийного поля целостности, все эти определения не дают какого-либо существенного скачка как в понимании системы, так и в ее конкретной разработке. Между тем главный смысл системного подхода состоит именно в том, что любая деталь наблюдения или экспериментирования должна быть неизбежно вписана в какой-то из узловых механизмов внутренней архитектоники системы. Практически никакая новая научная тема не могла бы быть сформулирована вне конкретной внутренней архитектоники системы, где эта тема только и может получить широкий познавательный смысл. Точно так же и трактовка полученных результатов даст наибольший эффект, если она будет построена на основе системных механизмов;

2) интеллектуальный климат для принятия системного воззрения изменился. Однако подавляющее большинство ученых с большим трудом отказываются от устоявшихся традиций рассматривать все научное накопление в аналитическом аспекте [4, с. 56].

П.К. Анохин обратил внимание на роль системообразующего фактора, поиск и формулировка которого являются обязательным положением для всех видов и направлений системного подхода. Эта ключевая проблема определяет как само понятие системы, так и всю стратегию его применения в исследовательской работе. В результате отсутствия системообразующего фактора все имеющиеся определения системы случайны, не отражают ее истинных свойств и потому неконструктивны (т.е. не способны выдвигать новых, более широких задач для исследования). Без определения системообразующего фактора ни одна концепция по теории систем не может быть плодотворной. Трудно допустить без него существование какой-либо теории систем и прежде всего общей теории систем [4, с. 24, 25, 26].

Можно утверждать, что определение «общая», использованное в названии теории Берталанфи, не располагает соответствующим логическим основанием. Данное определение вносит существенные ограничения в ее конструктивное применение в научно-исследовательском процессе. Говорить об общей теории систем можно лишь в случае, когда представлены убедительные доказательства того, что она может быть отнесена к самым разнообразным классам явлений, то есть выявляются какие-то общие черты в разнообразных классах явлений, например в неорганической природе, организме, машинах, обществе. В этой связи можно построить следующий ряд логических положений:

1) теория может получить право стать общей только в том случае, если она вскрывает и объединяет собой такие закономерности процессов или механизмов, которые являются изоморфными для различных классов явлений;

2) изоморфизм явлений различных классов может быть выявлен только в том случае, если найден вполне убедительный критерий изоморфности. Чем более значимым является этот критерий для разбираемых явлений, тем более выраженным является их изоморфизм;

3) для принятия «общей теории систем», пригодной для различных классов явлений, наиболее важным критерием изоморфности, естественно, является изоморфность системообразующего фактора. Это обстоятельство (отсутствие системообразующего фактора) не дает возможности установить изоморфность между явлениями различного класса, а следовательно, и не может сделать теорию Берталанфи общей. И это же обстоятельство неизменно препятствует общей теории систем стать инструментом конкретного научного исследования [4, с. 26].

П.К. Анохин, говоря о значении системного подхода, акцентирует внимание на существующих недостатках в понимании системы и системного подхода. Термин «система» имеет весьма древнее происхождение и большей частью употребляется там, где речь идет о чем-то собранном вместе, упорядоченном, организованном. Но может ли взаимодействие компонентов, взятое само по себе, создать что-то системное, то есть что-то упорядоченное? Взаимодействие, взятое в его общем виде, не может сформировать системы и «множества компонентов». Следовательно, и все формулировки понятия системы, основанные только на «взаимодействии» и «упорядочении» компонентов, оказываются сами по себе несостоятельными. Трудность развития системного подхода вообще и «общей теории систем» Берталанфи в частности состоит именно в том, что обсуждение ведется на уровне глобальных свойств системы. Большинство исследователей не делают попытки проникнуть во внутренние архитектонику системы и дать сравнительную оценку специфических свойств ее внутренних механизмов. Не вскрыв своеобразных механизмов, составляющих внутреннюю архитектонику системы, нельзя приблизиться к самой решающей цели системного подхода – обеспечению органического единства в исследовательском процессе системного уровня функционирования с индивидуальной характеристикой каждого дробного элемента или механизма, принимающего участие в этом функционировании. В проблему определения понятия системы следует, согласно Анохину, ввести некоторые дополнительные аспекты, которые придали бы этому понятию конкретные механизмы организованного целого, детерминистически достоверного и логически понятного [4, с. 20, 30, 32, 45].

По мнению П.К. Анохина, смысл системного подхода состоит в том, что элемент или компонент функционирования не должен пониматься как самостоятельное и независимое образование. Он должен пониматься как элемент, чьи оставшиеся степени свободы подчинены общему плану функционирования системы, направляемому получением полезного результата. Компонент должен быть органическим звеном в кооперации с другими компонентами системы. Должен быть конкретный фактор, который «упорядочивает» систему. До тех пор пока системологи не определят точно фактор, который радикально ограничивает степени свободы участвующих в данном множестве компонентов, все разговоры о системе и ее преимуществах перед несистемным подходом будут неплодотворными. По мнению П.К. Анохина, таким императивным фактором, использующим все возможности системы, является полезный результат системы и формируемая им обратная афферентация. Именно достаточность или недостаточность результата определяет поведение системы. Включение в анализ результата как решающего звена системы значительно изменяет общепринятые взгляды на систему вообще и дает новое освещение ряду вопросов, подлежащих глубокому анализу. Прежде всего, оказывается возможным представить целиком в терминах результата как всю деятельность системы, так и ее всевозможные изменения. Эта деятельность может быть полностью выражена в вопросах, отражающих различные этапы формирования системы: (1) какой результат должен быть получен; (2) когда именно должен быть получен результат; (3) какими механизмами должен быть получен результат; (4) как система убеждается в достаточности полученного результата? Эти четыре вопроса, по убеждению автора теории функциональных систем, разрешаются основными узловыми механизмами системы. Вместе с тем в них выражено все то, ради чего формируется система [4, с. 32, 33, 46].

Таким образом, формирование системы подчинено получению определенного полезного результата, а недостаточный результат может целиком реорганизовать систему и сформировать новую, с более совершенным взаимодействием компонентов, дающим достаточный результат. Не может быть понятия системы без ее полезного результата. Роль результата во всех превращениях системы делает невозможной какую-либо формулировку системы, не основанную на роли результата в ее деятельности, т.к. только он может «изменить неорганизованное множество в организованное». В этой связи П.К. Анохин вводит термин «взаимосодействие». Он считает, что в системе с полезным результатом ее деятельности более пригоден не термин «взаимодействие», а термин «взаимосодействие». Такая система должна представлять собой подлинную кооперацию множества, усилия которого направлены на получение конечного полезного результата. А это значит, что всякий компонент может войти в систему только в том случае, если он вносит свою долю содействия в получение запрограммированного результата [4, с. 34].

Резюмируя, П.К. Анохин дает определение понятия «система», наиболее точно отражающее содержание его научного подхода: «Системой можно назвать только такой комплекс избирательно вовлеченных компонентов, у которых взаимодействие и взаимоотношения принимают характер «взаимосодействия» компонентов на получение фокусированного полезного результата». Конкретным механизмом взаимодействия компонентов является освобождение их от избыточных степеней свободы, ненужных для получения данного конкретного результата, и, наоборот, сохранение всех степеней свободы, которые способствуют получению результата. В свою очередь, результат через характерные для него параметры и благодаря обратной афферентации имеет возможность реорганизовать систему, создавая такую форму взаимодействия между ее компонентами, которая является наиболее благоприятной для получения именно запрограммированного результата [4, с. 35].

Таким образом, именно отсутствие результата во всех формулировках системы и делает их неприемлемыми с операциональной точки зрения. Этот дефект полностью устраняется в развиваемой Анохиным теории функциональной системы, имеющей в качестве базовых нижеследующие положения.

1. В функциональной системе результат представляет собой ее органическую часть, оказывающую решающее влияние как на ход ее формирования, так и на все ее последующие реорганизации.

2. Наличие вполне определенного результата как решающего компонента функциональной системы делает недостаточным понятие «взаимодействие» в оценке отношений компонентов системы между собой. Именно результат отбирает все адекватные для данного момента степени свободы компонентов системы и фокусирует их усилие на себе.

3. Если деятельность системы заканчивается полезным в каком-то отношении результатом, то «взаимодействие» компонентов данной системы всегда будет протекать по типу их взаимосодействия, направленного на получение результата.

4. Взаимодействие компонентов системы достигается тем, что каждый из них под влиянием афферентного синтеза или обратной афферентации освобождается от избыточных степеней свободы и объединяется с другими компонентами только на основе тех степеней свободы, которые вместе содействуют получению надежного конечного результата.

5. Включение результата в функциональную систему исключает необходимость применять как несовершенные формулировки самой системы, так и многие другие [4, с. 40].

Архитектура, в которой результат оказывает центральное организующее влияние на все этапы формирования функциональной системы, а сам полезный результат является, несомненно, функциональным феноменом, получила название «функциональной системы». Одним из характерных свойств функциональной системы является динамическая изменчивость входящих в нее структурных компонентов, изменчивость, продолжающаяся до тех пор, пока не будет получен соответствующий полезный результат. На первый план в формировании функциональных систем выступают законы результата и динамической мобилизуемости структур, обеспечивающие быстрое формирование функциональной системы и получение данного результата. Свойство внезапной мобилизуемости структурных элементов организма в соответствии с непрерывными функциональными требованиями, которые функция предъявляет к структуре, – это возможность моментального построения любых дробных комбинаций, обеспечивающих функциональной системе получение полезного приспособительного результата [4, с. 40, 41].

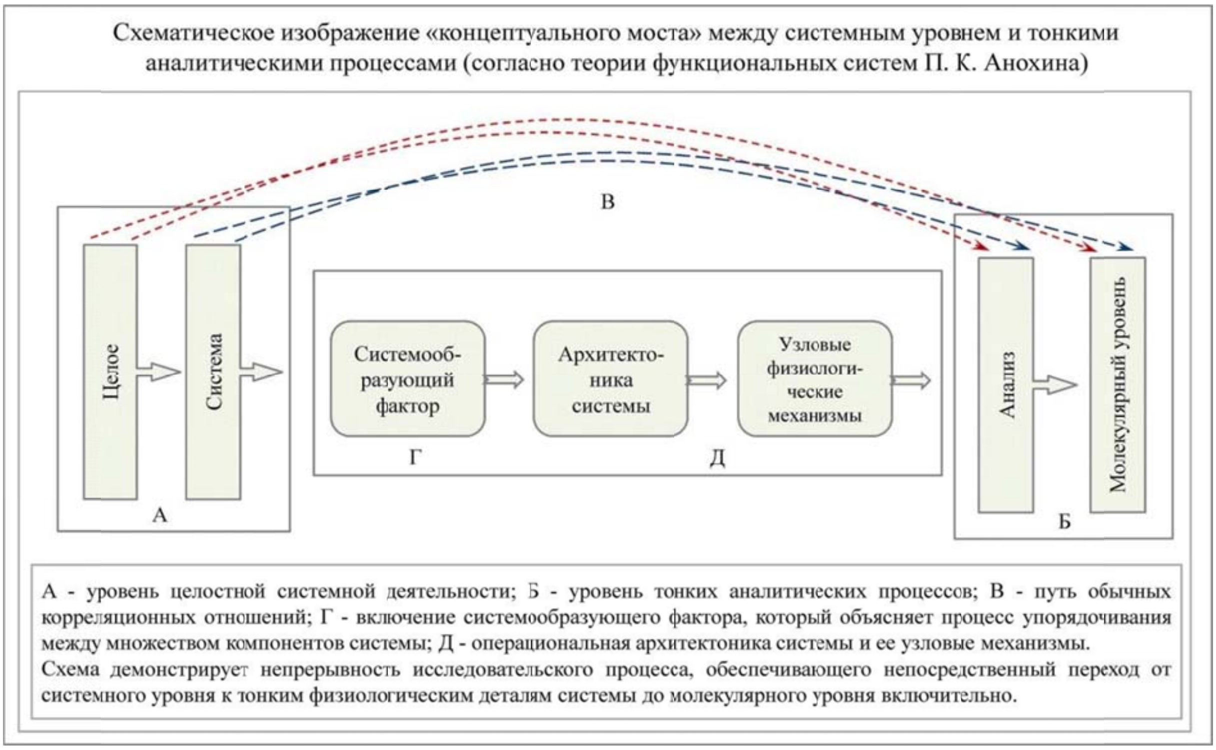


Рис. 1.1 – Схематическое изображение «концептуального моста» между системным уровнем и тонкими аналитическими процессами

Источник: [4, с. 25].

Любой комплекс и любое множество становятся системой только благодаря результату. Вместе с тем система не может быть стабильной, если сам результат своими существенными параметрами не влияет на систему обратной афферентацией. А если это так, то любая система должна подчиняться этим правилам. Все эти соображения приводят к окончательному и фундаментальному выводу о составе иерархии: все функциональные системы независимо от уровня своей организации и от количества составляющих их компонентов имеют принципиально одну же функциональную архитектуру, в которой результат является доминирующим фактором, стабилизирующим организацию систем. При образовании иерархии систем всякий более низкий уровень систем должен как-то организовать контакт результатов, что и может составить следующий более высокий уровень систем и т.д. [4, с. 44].

Практически система может стать методологическим принципом исследования и перебросить концептуальный мост от синтетических обобщений к аналитическим деталям только в том случае, если она будет иметь четко очерченную, физиологически достоверную и логически оправданную внутреннюю архитектонику. Внутренняя архитектоника функциональной системы выражает собой дальнейшее развитие идеи взаимодействия компонентов системы, она раскрывает ее тонкие механизмы, при помощи которых компоненты системы освобождаются от избыточных степеней свободы, чтобы установить взаимосвязь с другими компонентами на основе императивного влияния результата на всю систему [4, с. 46].

1.2.7. Теория системодинамики И.И. Пригожина

Крупный «прорыв в незнаемое» в изучении систем осуществлен бельгийской школой во главе с И.И. Пригожиным.

Теории Пригожина предшествовало открытие Э. Лоренца (Массачусетский технологический институт), означавшее фактический переворот в науке. При исследовании атмосферных явлений в 1961 г. было установлено наличие т.н. «странного аттрактора» (аттрактора Лоренца). Он содержал в себе несколько притягивающих областей, но траектории системы не оказывались надолго в рамках одного из них, расходились и потом снова сближались, случайно перемешивались, никогда не дублируя друг друга. Таким образом, нелинейные хаотические системы проявили чувствительность к малым воздействиям. Расхождения в траекториях накапливались экспоненциально. Лоренц назвал это явление «эффектом бабочки», утверждая, что, взмах крыльев бабочки в Айове способен спровоцировать волну эффектов, которые могут достигнуть высшей точки в дождливый сезон в Индонезии. Следствием этого является неравновесность нелинейных динамических систем и невозможность их предсказания. Фрактальной особенностью странного аттрактора является то, что каждая часть системы отображает в себе целую систему, и при постоянном увеличении обнаруживаются новые и новые детали. Для фрактала оказываются бесполезными понятия длины (объема) или топологической размерности, а мир как иерархическое построение представляет собой фрактальную структуру, т.е. отдельные элементы отображают систему целиком [114, с. 33].

Исследуя неравновесные физические системы[1], И.И. Пригожин установил применимость принципов термодинамики к системам любой природы [87]. Выяснилось, что открытые системы при определённых обстоятельствах, поглощая вещество и энергию окружающего пространства, способны осуществлять качественный рывок к усложнению. Системы возникают на микроуровне и развиваются по причине возникновения необратимых процессов в результате неустойчивости динамических систем [114, с. 32]. Наряду с констатацией уже известных положений (иерархичность уровней организации систем; несводимость друг к другу и невыводимость друг за друга закономерностей разных уровней организации; наличие наряду с детерминированными случайных процессов на каждом уровне организации и др.) ученый предложил новую, оригинальную теорию системодинамики, в которой наибольший интерес представляют положения, раскрывающие механизм самоорганизации систем [79, с. 28].

Открытые сложные системы, включая экономические, демонстрируют поразительные способности к самоорганизации: «новые упорядоченные структуры могут возникать из неупорядоченного хаоса и сохраняться неизменными при наличии постоянного притока энергии» [110, с. 13]. Механизмы обратной связи и нелинейные взаимодействия частиц делают возможным их совместную деятельность на более высоких уровнях, возникают системные свойства, которых нет у составных частей. «Порядок в сложных системах зарождается самопроизвольно, в первую очередь на границе между порядком и ха-

[1] За результаты этих исследований И.И. Пригожин в 1977 г. был награжден Нобелевской премией.

осом. Когда упорядоченность слишком велика, невозможны изменения, когда слишком велик хаос, немыслима непрерывность. Сложность на одном уровне приводит к простоте на другом. Беспорядок часто является предварительным условием для появления новой формы порядка» [114, с. 32].

Содержание научной позиции И.И. Пригожина заключается в следующих положениях:

1) хаос рассматривается как носитель возможной упорядоченности, как созидательное начало, конструктивный механизм эволюции. Отсюда процесс развития выступает формированием порядка из хаоса, которое представляет собой процесс самоорганизации под воздействием многообразных факторов. Хаотические колебания, возникающие в системах, – предвестники и спутники изменений уклада системы;

2) хаос – динамическое изменчивое явление. В нем постоянно образуются флуктуации, которые представляют собой случайные отклонения величин, характеризующих систему, состоящую из большого числа частиц, от их среднего значения. Флуктуации стремятся вывести систему из равновесия, стараются завладеть ею, что приводит к разрушению прежних структур и переходу системы в новое состояние;

3) переход в новое состояние осуществляется через точки бифуркации, которые выступают как ситуации раздвоения, когда перед системой открываются различные варианты развития. В точке бифуркации система как бы делает выбор, который определяет ее дальнейшую эволюцию [81, с. 204]. При этом переход через бифуркацию случаен. И.И. Пригожин отмечал: «Когда система, эволюционируя, достигает точки бифуркации, детерминистическое описание становится непригодным. Флуктуация вынуждает систему выбирать ту ветвь, по которой будет проходить дальнейшая эволюция системы. Переход через бифуркацию – такой же случайный процесс, как бросание монеты. Существование неустойчивости можно рассматривать как результат флуктуации, которая сначала была локализована в малой части системы, а затем распространилась и привела к новому макроскопическому состоянию» [86, с. 56]. Переход на более высокий уровень упорядоченности получил название диссипативной структуры [97, с. 192–194].

Концепция И.И. Пригожина дает убедительные объяснения с точки зрения изменения хода времени в системах и ускорения развития. Возникновение флуктуации, по сути, представляет собой зарождение новой системы, ее времени и временных характеристик. Развитие нелинейных процессов, возрастание роли новых структур, заполнение ими пространства системы вызывает процессы ускорения развития. Согласно теории Пригожина, материя не является пассивной субстанцией; ей присуща спонтанная активность, вызванная неустойчивостью неравновесных состояний, в которые равно или поздно приходит любая система в результате взаимодействия с окружающей средой. Важно, что в такие переломные моменты (называемые «особыми точками» или «точками бифуркации») принципиально невозможно предсказать, станет ли система менее организованной или более организованной («диссипативной», по терминологии Пригожина). Согласно теории изменения, проистекающей из понятия диссипативной структуры, когда на систему, находящуюся в сильно неравновесном состоянии, действуют, угрожая ее структуре, флуктуации, наступает критический момент – система достигает точки бифуркации. Пригожин и Стенгерс считали, что в точке бифуркации принципиально невозможно предсказать, в какое состояние перейдет система. Случайность подталкивает то, что остается от системы, на новый путь развития, а после того, как путь (один из многих возможных) выбран, вновь вступает в силу детерминизм – и так до следующей точки бифуркации [87, с. 28–29].

1.2.8. Синергетика Германа Хакена

Процессы саморазвития в сложных системах исследуются общенаучной теорией самоорганизации – синергетикой, которая направлена на поиск законов эволюции открытых неравновесных систем любой природы. Термин «синергетика» (от греч. synergetikos – совместный, согласованно действующий) введен в 1970-х годах в оборот немецким исследователем Г. Хагеном, который рассматривал ее как междисциплинарную науку, связанную с различными областями физики, химии, биологии, кибернетики и др. [114, с. 32].

Г. Хакен определяет синергетику как науку о взаимодействии [110, с. 20] или как «науку о коллективном поведении, организованном и самоорганизованном, причем поведение это подчинено общим законам» [110, с. 25]. Синергетика исследует такие взаимодействия элементов системы, которые приводят к возникновению пространственных, временных или пространственно-временных структур в макроскопических масштабах [114, с. 32]. «Я назвал новую дисциплину «синергетикой» не только потому, что в ней исследуется совместное действие многих элементов систем, но и потому, что для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизацией, необходимо кооперирование различных дисциплин», – писал Хакен [109].

Проблемы синергетики многоплановы и предполагают несколько направлений их решения. В работах Г. Хакена изложены принципы, позволяющие в рамках единого подхода рассматривать широкий класс явлений самоорганизации, происходящих как в мире живого, так и в неорганическом мире. Особое значение при этом придается роли коллективных кооперативных эффектов в процессах самоорганизации. Появление синергетики было подготовлено широким кругом специалистов различных областей. Как указывалось выше, заметную роль в этом плане играли работы И.И. Пригожина и его коллег, посвященные разработке методов термодинамического анализа явлений самоорганизации [60, с. 17–18]. Не меньшую, чем неравновесная термодинамика, роль в изучении процессов самоорганизации и анализе диссипативных структур получили теория информации и теория оптимизации. Информацию легко выразить через энтропию и наоборот, причем связь эта не формальна. Если в термодинамике энтропия – это мера беспорядка, то в теории информации – это мера недостатка информации в системе, мера неопределенности [60, с. 18].

В рамках синергетики особо подчеркивается нелинейный, неравновесный и случайный характер систем. При их развитии возникают особые точки (бифуркации), проходя которые система качественно изменяется. Отечественные ученые, академики Арнольд и Самарский, развивали синергетику в части теории бифуркации, теории катастроф, теории хаоса и фракталов. Отечественный ученый А.Д. Смирнов [94; 95; 96] использовал теорию бифуркаций для анализа инфляционных процессов в переходной экономике, для описания переходов от режимов высокой инфляции к низкой, а также для описания мирового финансового кризиса. Эти два состояния характеризуются качественно различной динамикой экономики. Оказалось, что простейшие математические модели, созданные для описания физических, метеорологических, биологических процессов, применимы для анализа социальных и экономических систем. Бифуркации были обнаружены в динамической модели Кейнса, катастрофы – в модели Калдора, детерминированный хаос – в паутинообразной модели рынка [35].

Идеи И.И. Пригожина и Г. Хагена обладают значительным творческим потенциалом. Предназначенные для объяснения процессов самоорганизации сложных систем и составляющих их эффектов, они довольно широко применяются для объяснения социальных систем. Они эффективны при осмыслении социальных катастроф, переходных периодов, реформирования общества, а также управления в условиях социальных потрясений [97, с. 194]. Так, толкование понятия «хаос» создателями синергетики существенно отличается от общепринятого понимания хаоса как максимума энтропии. В синергетике хаос больше ассоциируется с понятием случайности, с хаотическим разнообразием флуктуаций в сложной системе, хаотическими отклонениями каких-то параметров от нормы. В основе такого хаоса возможно активное начало, причем в определенных условиях даже единичное отклонение, малое воздействие какого-то параметра может стать существенным для макропроцесса: может развиться новая организация [87]. Например, в состоянии неустойчивости социальной среды деятельность каждого отдельного человека может влиять на макроскопический процесс (роль личности в истории). Отсюда вытекает необходимость осознания каждым человеком огромного груза ответственности за судьбу всей социальной системы, всего общества. Потенциал выдающегося индивида может проявиться в открытом обществе, особенно в режиме его неустойчивости. Открытость системы – необходимое, но не достаточное условие для ее самоорганизации. Все зависит от соотношения потенциалов индивида и среды, от характера взаимодействий, а порой от игры случая, от информированности противоположных начал.

Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите о происхождении термина «кибернетика».
2. Кто впервые выдвинул вопрос о необходимости научного подхода к управлению сложными системами?
3. Изложите основные положения научный позиции Б. Трентовского относительно системности в управлении государством. Какой смысл вкладывал учёный в понятие «кибернет»?
4. Расскажите об открытии Е.С. Фёдорова в области минералогии и кристаллографии, послужившем мощным импульсом в формировании теории систем.
5. В чём состоит вклад А.А. Богданова в развитие системных представлений? Как ученый назвал свою теорию?
6. Оцените место и роль идей А.А. Богданова в становлении системного подхода?
7. Раскройте содержание понятия «тектология». Какой смысл в указанное понятие вкладывал А.А. Богданов?
8. Как соотносится понятие «комплекс» в трактовке А.А. Богданова с современным термином «система»? Какие комплексы по характеру организации выделял российский ученый? Объясните различия между различными видами комплексов.
9. Какие универсальные типы систем выделил А.А. Богданов среди множества других организационных форм? В чём их различия?
10. Как идеи системной целостности А.А. Богданов применял к проблемам государственного и народнохозяйственного развития?
11. Какие научные теории можно охарактеризовать как идущие в развитие «всеобщей организационной науки «тектология»»?
12. Какие идеи А.А. Богданова фактически предвосхитили ключевые идеи основоположников системного подхода?
13. Какие обстоятельства подтолкнули Л. Берталанфи к разработке биологической теории открытых систем?
14. Раскройте содержание концепций самоорганизации, эквифинальности и телеологии.
15. Какой смысл изначально вкладывал Н. Винер в понятие «кибернетика»? Какую трансформацию претерпели научные взгляды ученого в отношении объекта исследования кибернетики?
16. Какое содержание Н. Винер вкладывал в понятие «энтропия»? В чём новизна понимания энтропии в научных взглядах американского учёного?

17. Расскажите о вкладе отечественных ученых в развитие кибернетики.

18. Какие трансформации системных представлений связаны с кибернетикой Н. Винера?

19. Имеются ли преемственные связи между кибернетикой Н. Винера и тектологией А.А. Богданова?

20. Какая идея лежала в основе создания общей теории систем?

21. Когда общая теория систем Л. Берталанфи была впервые представлена научному сообществу?

22. Какие основные задачи преследовал Л. Берталанфи и его единомышленники при создании общей теории систем?

23. Приведите примеры популяризации идей Л. Берталанфи на международном уровне.

24. Какие недостатки общей теории систем Берталанфи отмечал академик Анохин?

25. Какой основной принцип исследования, по мнению П.К. Анохина, должен лежать в основе системного подхода?

26. Раскройте содержание теории функциональных систем П.К. Анохина.

27. Какой смысл закладывал академик Анохин в понятия «системообразующий фактор» и «полезный результат»?

28. Что понимал П.К. Анохин под термином «взаимосодействие»?

29. В чём заключается функция системы как «концептуального моста» между синтетическими обобщениями и аналитическими процессами?

30. Какое влияние оказало открытие «странного аттрактора» Лоренца на формирование теории системодинамики И.И. Пригожина?

31. Назовите и прокомментируйте основные положения теории системодинамики И.И. Пригожина.

32. Раскройте содержание понятий «диссипативная система», «флуктуация», «точка бифуркации» (в рамках научной позиции И.И. Пригожина).

33. Кто является автором теории самоорганизации сложных систем? Когда возникла междисциплинарная наука «синергетика»?

34. Какие исследования послужили основой для возникновения синергетики как науки?

35. Расскажите о происхождении термина «синергетика».

36. Какие задачи ставил Г. Хакен перед синергетикой как наукой?

37. Какие свойства систем находятся в фокусе исследований в рамках научной дисциплины «синергетика»?

Литература для самостоятельной работы

1. *Анохин П.К.* Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. – М.: АН СССР. Отд-ние физиологии, 1971. – 61 с.

2. *Анохин П.К.* Очерки по физиологии функциональных систем. – М., 1975.

3. *Анохин П.К.* Теория функциональной системы // Успехи физиол. наук. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 19–54.

4. *Берталанфи Л.* История и статус общей теории систем // Системные исследования: Ежегодник, 1972. – М.: Наука, 1973. – С. 20–37.

5. *Берталанфи Л.* Общая теория систем – обзор проблем и результатов // Системные исследования: Ежегодник. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.

6. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. l. – 304 с.

7. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. 2. – 351 с.

8. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Сов. радио, 1968.

9. *Винер Н.* Кибернетика и общество. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.

10. История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики / отв. ред. С.Ю. Малков, А.В. Коротаев. – М.: КомКнига, 2005. – 192 с.

11. *Квейд Э.* Анализ сложных систем. – М.: Советское радио, 1969. – 520 с.

12. *Квейд Э.* Методы системного анализа // Новое в теории и практике управления производством США. – М., 1971.

13. *Кельзен Г.* Чистое учение о праве Ганса Кельзена. Вып. I. – М.: Изд-во ИНИОН АН СССР, 1987.

14. *Колмогоров А.Н.* Предисловие к русскому изданию // Эшби У.Р. Введение в кибернетику / под ред. В.А. Успенского. – М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2015. – 432 с.

15. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высш. школа, 1989. – 361 с.

16. *Пригожин И.* Время, структура и флуктуации (Нобелевская лекция) // Успехи физических наук. – 1980. – Т. 131.

17. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 431 с.

18. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.

19. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: наука о взаимодействии. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 320 с.

ГЛАВА 2
ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

2.1. ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА КАК САМОСТОЯТЕЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

Постепенно системный подход перерос рамки метода, «помогающего руководителю выбирать предпочтительный курс действий» [44] в проблемных ситуациях. Во 2-й половине XX столетия уже стало очевидным, что все теоретические и прикладные концепции образуют единый поток – «системное движение». Системность стала не только теоретической категорией, но и осознанным аспектом практической деятельности. Поскольку большие и сложные системы по необходимости стали предметом изучения, управления и проектирования, потребовалось обобщение методов исследования систем и методов воздействия на них. Должна была возникнуть некая прикладная наука, являющаяся «мостом» между абстрактными теориями системности и живой системной практикой. Она и возникла – сначала в разных областях и под разными названиями, но постепенно оформилась в науку, которая получила название «системный анализ» [79, с. 5–6].

Можно отметить следующие обстоятельства, повлиявшие именно в этот период на расширение использования системного подхода и его трансформацию в научное направление:

а) в середине XX столетия существенно возросли сложность и комплексность проблем, некоторые из которых приобрели глобальный формат;

б) в условиях международной конкуренции существенно выросли расходы на реализацию проектов, повысились требования к качеству управленческой практики. Возникла необходимость в специалистах «широкого профиля», имеющих знания в своей и смежных областях деятельности, способных к обобщению этих знаний, использованию аналогий, построению комплексных моделей;

в) произошло резкое наращивание объёмов информации и сокращение времени на выработку решений. Сами знания уже сформировали настолько сложный и многопрофильный информационный массив, что ориентироваться в нем становилось все сложнее, и даже представители смежных отраслей научного знания, исследуя один объект, видели его по-разному [114, с. 35].

Впервые понятие «системный анализ» прозвучало в конце 1940-х гг. в связи с задачами военного управления в работах корпорации RAND (США) [64]. В 1948 г. он был принят группой оценки систем оружия, в 1950 г. – отделом анализа стоимости вооружения. В 1952 г. был реализован проект создания сверхзвукового бомбардировщика B-58, ставшего первой разработкой, поставленной на системную основу [6, с. 15].

Первая крупная публикация по системному анализу (непереведенная в СССР) увидела свет в 1956 г. (авторы – А. Канн и С. Монк, опубликована корпорацией RAND). Спустя год вышла монография Г. Гуда и Р. Макола «Системотехника» (издана в СССР в 1962 г.), где была представлена общая методика проектирования сложных технических систем. Методология системного анализа была детально разработана и изложена в напечатанной в 1960 г. работе Ч. Хитча и Р. Маккина «Военная экономика в ядерный век» (издана в СССР в 1964 г.). В этом же году был издан один из наиболее удачных учебников по системотехнике – работа А. Холла «Опыт методологии для системотехники» (переведена в СССР в 1975 г.). В 1965 г. вышел фундаментальный труд Э. Квейда «Анализ сложных систем для решения военных проблем» (издана в СССР в 1969 г.). В ней представлены основы новой научной дисциплины – анализа систем (метод оптимального выбора при решении сложных проблем в условиях неопределенности – переработанный курс лекций по анализу систем, прочитанный работниками корпорации RAND для руководящих специалистов Министерства обороны и промышленности США). В 1965 г. вышла книга С. Оптнера «Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем» [6, с. 15–16]. Русский перевод этой книги [76] дал импульс распространению системного анализа в СССР. Он нашел широкое применение в трудах Центрального экономико-математического института (работы Ю.И. Черняка [105; 106; 107] и пр.), в работах томской и других школ системных исследований [79; 78]. В 1980-е гг. дисциплина «системный анализ» была введена в учебные планы вузов СССР Ф.И. Перегудовым (заместителем Министра высшего и среднего специального образования СССР того периода) [37, с. 14].

Термин «системный анализ» трактуется в публикациях неоднозначно. В работе Д. Клиланда и В. Кинга [54] он определяется как «приложение системных концепций к функциям управления, связанным с планированием» или со стратегическим планированием и целевой стадией планирования, а Ю.И. Черняк [106] даже подчеркивает, что это методология исследования целенаправленных систем. В работе Э. Квейда системный анализ употребляется как синоним термина «анализ систем» [43], а в работе Янга – как «системное управление организацией» [118]. Рассматривался системный анализ также и как развитие методологии исследования операций, и как «формализованный здравый смысл» (например, Э. Квейд [43]). В работах А.А. Денисова, Ю.И. Дегтярева, Н.Н. Моисеева системный анализ ориентирован на использование математических методов [30; 25; 71; и др.]. Например, Н.Н. Моисеев связывает системный анализ с принятием решений с помощью математических методов, но в то же время считает, что «системный анализ – это обширная синтетическая дисциплина, включающая в себя целый ряд разделов, носящих характер самостоятельных научных дисциплин» [71, с. 7]. В то же время уже в первых работах по системному анализу подчеркивалось, что системный анализ – это способ мышления, способ решения проблемы (С. Оптнер [76]), упрощение сложного (Ю.И. Черняк [107]) и что математический аппарат вовсе не является неотъемлемой частью системного анализа (Д. Клиланд, В. Кинг [54, с. 124]) [37, с. 16].

Л. С. Звягин и Н.В. Катаргин, обобщая различные подходы, дают расширенное определение, согласно которому системный анализ – это прикладное направление теории систем, которое:

1) применяется в тех случаях, когда задача (проблема) не может быть сразу представлена с помощью формальных, математических методов, т.е. имеет место большая начальная неопределенность проблемной ситуации;

2) уделяет внимание процессу постановки задачи и использует не только формальные методы, но и методы качественного анализа;

3) опирается на основные понятия теории систем и философские концепции, лежащие в основе исследования общесистемных закономерностей;

4) помогает организовать процесс коллективного принятия решения, объединяя специалистов различных областей знаний;

5) требует обязательной разработки методики системного анализа, определяющей последовательность этапов проведения анализа и методы их выполнения, а также участия специалистов различных областей знаний;

6) исследует процессы целеобразования и занимается разработкой и применением средств работы с целями (в том числе разработкой методик структуризации целей);

7) использует в качестве метода исследования расчленение большой неопределенности на более обозримые, лучше поддающиеся исследованию компоненты, при сохранении целостного (системного) представления об объекте исследования и проблемной ситуации [37, с. 16–17].

Понятия «системный подход» и «системный анализ» – не синонимы. Системный подход выступает по отношению к системным аналитическим исследованиям своеобразной концептуальной и философской базой. В свою очередь системный анализ не просто редуцирует положения системного подхода, а наполняет их конкретным содержанием и наделяет соответствующей интерпретацией применительно к конкретной проблеме [74, с. 17].

Системный подход ценен, прежде всего, тем, что формулирует общесистемные законы, которые улавливают зависимости между отдельными сторонами и свойствами систем. Подчеркнем, что системные законы носят общесистемный характер, т.е. они свойственны системам любой природы. Среди них выделяются:

- *закон соотношения целого и части* – система как целое больше суммы составляющих ее частей. Этот закон восходит к утверждению древних мыслителей о том, что целое больше его частей;

- *закон совокупных свойств системы*, или *закон эмерджентности* – свойства системы не сводятся к свойствам ее элементов, а являются результатом их интеграции;

- *закон зависимости свойств системы не только от свойств составляющих элементов, но и взаимосвязей между ними*. Другая трактовка этого закона такова: две системы, содержащие тождественные элементы, могут быть несхожими по свойствам благодаря различию в характере и архитектонике связей;

- *закон взаимосвязи структуры и функции*, заключающийся в констатации взаимообусловленности структуры и функций системы;

- *закон функциональной целостности системы*, констатирующий функциональную интеграцию элементов в функции системы;
- *закон простоты и сложности системы*, согласно которому чем проще система, чем из меньшего числа элементов и связей она состоит, тем меньше проявляет она системное качество, а чем сложнее система, тем более непохожим является ее системный эффект по сравнению со свойствами каждого элемента;
- *закон ограничения разнообразия системы* У.Р. Эшби, который говорит о том, что организованные системы отличаются ограничением разнообразия;
- *закон закрытых систем* – закрытые системы подчиняются второму закону термодинамики и стремятся к максимальной неупорядоченности;
- *закон открытых систем* – открытые системы благодаря вводу негоэнтропии могут сохранять высокий уровень организованности и развиваться в направлении увеличения порядка и сложности;
- *закон взаимосвязи сложности системы и ее устойчивости*, который говорит о том, что усложнение систем ведет к обретению системой дополнительной устойчивости. Чем сложнее система, тем менее она устойчива. Но для того, чтобы не разрушиться, система вынуждена находить дополнительные источники устойчивости;
- *закон равновесия системы*, констатирующий, что только тогда система находится в равновесии, когда каждый ее элемент находится в состоянии равновесия, определяемом другими элементами;
- *закон многообразия (плюрализма) системных представлений*, согласно которому целостность системы никогда не может быть сведена только к одной ее модели. При дополнительных поисках обязательно найдется такая модель системы, которая будет непохожей на предыдущую;
- *закон адаптации систем*, утверждающий, что чем выше адаптивность системы, тем она имеет большую вероятность потерять свою идентичность;
- *закон развития системы*, согласно которому развитие системы осуществляется не благодаря укреплению элементов и связей, а посредством возникновения зон неупорядоченности, хаоса, которые формируют точки бифуркации, переход через которые выводит систему на новый уровень упорядоченности;

- *закон продуктивности хаоса*, полагающий, что любая объективная неупорядоченность, любой реальный хаос содержат в себе элементы и даже очаги самоорганизации [97, с. 307–309].

Названный перечень сложно назвать исчерпывающим. По всей видимости, обоснование системных законов представляет собой процесс, который только набирает силу в современной науке и будет развиваться по нескольким направлениям: (а) обоснование общесистемных законов, объясняющих системы независимо от их природы; (б) формулирование законов систем определенной природы и осмысление в свете системности имеющихся; (в) поиск закономерностей системного мышления, анализа, познания [97, с. 309].

Системный анализ занимает особое место в структуре научных дисциплин. С одной стороны, он, базируясь на идеологии системного подхода, составляет контекст или исследовательское поле, на котором специальная наука осознает характер, состояние и соответствие (или несоответствие) наличных или создаваемых ею методологических средств специфическим задачам исследования и конструирования сложных объектов. С другой стороны, системный анализ выступает своеобразным координатором, позволяющим применительно к разрешению конкретной системной проблемы превратить конгломерат специальных дисциплин в систему знаний и методов, имеющую четкую целевую направленность и управляемую иерархическую структуру. Благодаря этому не только создаются условия для ускоренного внедрения научных результатов в практику, но и происходит органическое интегрирование фундаментальных и прикладных знаний в целенаправленный комплекс, позволяющий разрешать проблемы, которые не могут быть разрешены в рамках отдельных дисциплин [74, с. 17].

Воплощая собой результат качественного развития системного подхода, системный анализ в прикладном плане является преемником исследования операций – направления кибернетики, основанного на аппарате оптимального математического программирования, теории массового обслуживания, математической статистики, теории игр и пр. Его возникновение явилось по существу реакцией прикладной науки на потребности решения экономических, военно-технических, административно-управленческих и других крупномасштабных проблем, где применение операционных методов оказалось малоэффективным [74, с. 11].

Хотя системный анализ находится в развитии, сегодня он выступает уже как самостоятельная научная дисциплина, имеющая свой объект деятельности, накопившая достаточно мощный арсенал средств и обладающая значительным практическим опытом [79, с. 5–6]. Эта дисциплина ориентирована на разрешение системных проблем, возникающих в различных сферах человеческой деятельности, путем интегрирования разрозненных научных знаний и методов в единый технологический процесс комплексного исследования на базе системной идеологии. В.И. Новосельцев предмет системного анализа определяет следующим образом:

а) в теоретическом плане это концепции и принципы постановки и разрешения практических проблем на основе системной идеологии;

б) способы интегрирования методов и результатов исследования специальных дисциплин в целевую технологию, направленную на разрешение возникшей проблемы;

в) методики, приемы и модели комплексного исследования сложных системных объектов [74, с. 11].

Методологические подходы в системном анализе объединяют совокупность сложившихся в практике аналитической деятельности приемов и способов реализации системной деятельности. Наиболее важными среди них выступают системный, структурно-функциональный, конструктивный, комплексный, ситуационный, инновационный, целевой, деятельностный, морфологический и программно-целевой подходы. Их характеристика представлена в таблице 2.1 [97, с. 280].

Таблица 2.1

Характеристика основных подходов в системном анализе

Подходы	Характеристика подходов
Системный	- Несводимость свойств целого к сумме свойств элементов - Поведение системы определяется как особенностями отдельных элементов, так и особенностями ее структуры - Существует зависимость между внутренними и внешними функциями системы - Система находится во взаимодействии с внешней средой, обладает соответствующей ей внутренней средой - Система представляет собой развивающуюся целостность
Структурно-функциональный	- Выявление структуры (или функций) системы - Установление зависимости между структурой и функциями системы - Построение соответственно функций (или структуры) системы

Продолжение Таблицы 2.1

Конструк-тивный	- Реалистический анализ проблемы - Анализ всех возможных вариантов разрешения проблемы - Конструирование системы, действие по разрешению проблемы
Комплекс-ный	- Рассмотрение всех сторон, свойств, многообразия структур, функций системы, ее связей со средой; - рассмотрение их в единстве; - выяснение степени значимости взятых в единстве характеристик системы в ее сущности.
Проблем-ный	- Выделение проблемы как противоречия между какими-либо сторонами объекта, определяющими его развитие; - определение типа проблемы, ее оценка; - выработка способов разрешения проблемы.
Ситуаци-онный	- Выделение проблемного комплекса, лежащего в основе ситуации; - выделение основных характеристик ситуации; - установление причин возникновения ситуация и следствий их развертывания; - оценка ситуации, её прогнозирование; - разработка программы деятельности в данной ситуации.
Инноваци-онный	- Констатация проблемы обновления; - формирование модели нововведения, обеспечивающего разрешение проблемы; - внедрение нововведения; - управление нововведением, его освоение и реализация.
Норматив-ный	- Констатация проблемы системы; - установление рациональных норм системы; - преобразование системы в соответствии с нормами.
Целевой	- Определение цели системы; - декомпозиция цели на простые составляющие; - обоснование целей; - построение «дерева целей»; - оценка экспертами всех «ветвей» «дерева целей» относительно времени и ресурсов достижения.
Деятель-ностный	- Определение проблемы; - определение объекта деятельности; - формулировка целей и задач деятельности; - определение субъекта деятельности; - формирование модели деятельности; - осуществление деятельности.
Морфоло-гический	- Максимально точное определение проблемы; - нахождение наибольшего числа в пределах всех возможных вариантов разрешения проблемы; - реализация системы путем комбинирования основных структурных элементов или признаков;

Окончание Таблицы 2.1

	- применение методов морфологического моделирования: систематического покрытия поля; отрицания и конструирования; морфологического ящика; сопоставления совершенного с дефектным, обобщения и др.
Программно-целевой	- Определение проблемы; - формулирование целей; - построение программы достижения целей.

Источник: [97, с. 281].

Важнейшей составной частью методологии системного анализа выступают методы. Их арсенал довольно велик. Разнообразны и подходы авторов при их выделении. Ю.И. Черняк методы системного исследования делит на четыре группы: (1) неформальные, (2) графические, (3) количественные и (4) моделирование [106]. А.В. Игнатьева и М.М. Максимцов [38, с. 62] дают классификацию методов исследования систем управления, разделяя их на три основные группы: (1) методы, основанные на использовании знаний и интуиции специалистов; (2) методы формализованного представления систем и (3) комплексированные методы. Таблица 2.2 представляет возможный вариант такой классификации. В качестве ее оснований предлагается использовать тип знания, обрабатываемый методом; способ реализации, в качестве которого могут выступать либо интуиция, либо знание; выполняемые функции, сводящиеся к получению, представлению и обработке информации; уровень знания – теоретический либо эмпирический; форма представления знания, которая может быть качественной либо количественной [97, С. 283].

Таблица 2.2

Методы системного анализа

Основание классификации	**Методы системного анализа**
Тип знания	- Философские методы (диалектический, метафизический и т.п.); - общенаучные методы (системный, структурно-функциональный, моделирование, формализация и т.п.); - частнонаучные методы (свойственны конкретной науке: методы моделирования социальных, биологических систем и т.п.); - дисциплинарные методы (применяются в той или иной дисциплине, входящей в какую-нибудь отрасль науки, семиотические, лингвистические и т.п.).

Окончание Таблицы 2.2

Способ реализации	- Интуитивные методы («мозговая атака», «сценарии», экспертные методы и т.п.); - научные методы (анализ, классификация, системного моделирования, методы логики и теории множеств и т.п.).
Выполняемые функции	- Методы получения информации (системное наблюдение, описание, экспертные методы, игровые методы и т.п.); - методы представления информации (группировка, классификация и т.п.); - методы анализа информации (классификация, обобщение, методы анализа информационных систем и т.п.).
Уровень знания	- Теоретические методы (анализ, синтез, теоретизация и т.п.); - эмпирические методы (игровые методы, морфологические методы, экспертные оценки и т.п.).
Форма представления знания	- Качественные методы, опирающиеся на качественный подход к объекту (метод «сценариев», морфологические методы); - количественные методы, использующие аппарат математики (метод «Дельфи», статистические методы, методы теории графов, комбинаторики, кибернетики, логики, теории множеств, лингвистики, исследования операций, семиотики, топологии и т.п.).

Источник: [97, с. 283].

Таким образом, системный анализ к настоящему времени развился в отдельное междисциплинарное научное направление («знание, выступающее в виде средства и метода получения нового знания» [7, с. 419]), в котором на практике реализуется базовый принцип системного подхода к изучению явлений: разрешить практическую системную проблему можно только в том случае, если противопоставить ей адекватный по сложности управляемый и координируемый комплекс научных методов и знаний, охватывающий своими познавательными возможностями наиболее существенные стороны явлений, обусловивших возникновение и развитие данной проблемы как таковой. Имея в качестве цели локализацию проблемной ситуации или, по меньшей мере, выяснение ее причин, системный анализ привлекает для этого широкий спектр средств, использует возможности различных наук и практических сфер деятельности. В системном анализе, являющемся, по сути, прикладной дисциплиной, огромное значение уделяется методологическим аспектам любого системного исследования. С другой стороны, прикладная направленность системного анализа приводит к использованию всех современных средств научных исследований – математики, вычислительной техники, моделирования, натурных наблюдений и экспериментов [74, с. 18; 79, с. 6].

Объектом системного анализа, в теоретическом аспекте является процесс подготовки и принятия решений, а в прикладном аспекте – многие конкретные проблемы, возникающие при создании и функционировании систем. Следует отметить, что объект системного анализа является в то же время объектом целого ряда других научных дисциплин, как общетеоретических, так и прикладных. В отличие от многих наук, главной целью которых является открытие и формулирование объективных законов и закономерностей, присущих предмету изучения, системный анализ в основном направлен на выработку конкретных рекомендаций, в том числе и на основе использования достижений теоретических наук в прикладных целях. Можно сказать, что системный анализ выполняет роль каркаса, объединяющего все необходимые методы, знания и действия для решения проблемы [60, с. 20].

Практический системный анализ проводится согласно заранее известному порядку действий – алгоритму, определяющему структуру системного исследования от первоначальной формулировки проблемы до ее ликвидации (локализации) (рис. 2.1). Понятие «алгоритм» закрепилось изначально в математической науке и подразумевало проведение четко определенной последовательности однозначно понимаемых операций над числами или другими математическими объектами. В системном анализе произошел отход от чисто математической трактовки алгоритма: сохраняя логическую принудительность последовательности действий, допускается, что в алгоритме данной деятельности могут присутствовать и такие действия, которые не формализованы; важно лишь, чтобы этот этап алгоритма успешно выполнялся человеком, хотя и не осознанно. Здесь важными являются следующие моменты: (1) всякая деятельность алгоритмична; (2) не всегда алгоритм реальной деятельности осознается (композитор сочиняет музыку, водитель мгновенно реагирует на изменения дорожной ситуации, вратарь ловит мяч – «не думая»); (3) в случае неудовлетворенности результатом деятельности возможную причину неудачи следует искать в несовершенстве алгоритма. Это означает – пытаться выявить алгоритм, исследовать его, искать «слабые места», устранять их, т.е. совершенствовать алгоритм и, следовательно, повышать системность деятельности. Таким образом, явная алгоритмизация любой практической деятельности является важным средством ее развития [79, с. 9].

Одна из особенностей исследования в системном анализе, позволяющая постепенно, поэтапно разрешать возникающие в системе противоречия, – наличие аналитического и синтетического способов познания объекта. Суть анализа состоит в разделении целого на части, в представлении сложного в виде совокупности более простых компонент. Но чтобы познать целое, сложное, необходим и обратный процесс – синтез. Значение данного метода заключается не только в том, что сложное целое разделяется на все менее сложные части, а в том, что, будучи объединенными, эти части вновь должны сформировать единое целое. Иными словами, структура исследования проблемной ситуации в системном анализе может быть в общем виде описана цепочкой «декомпозиция – анализ – синтез».

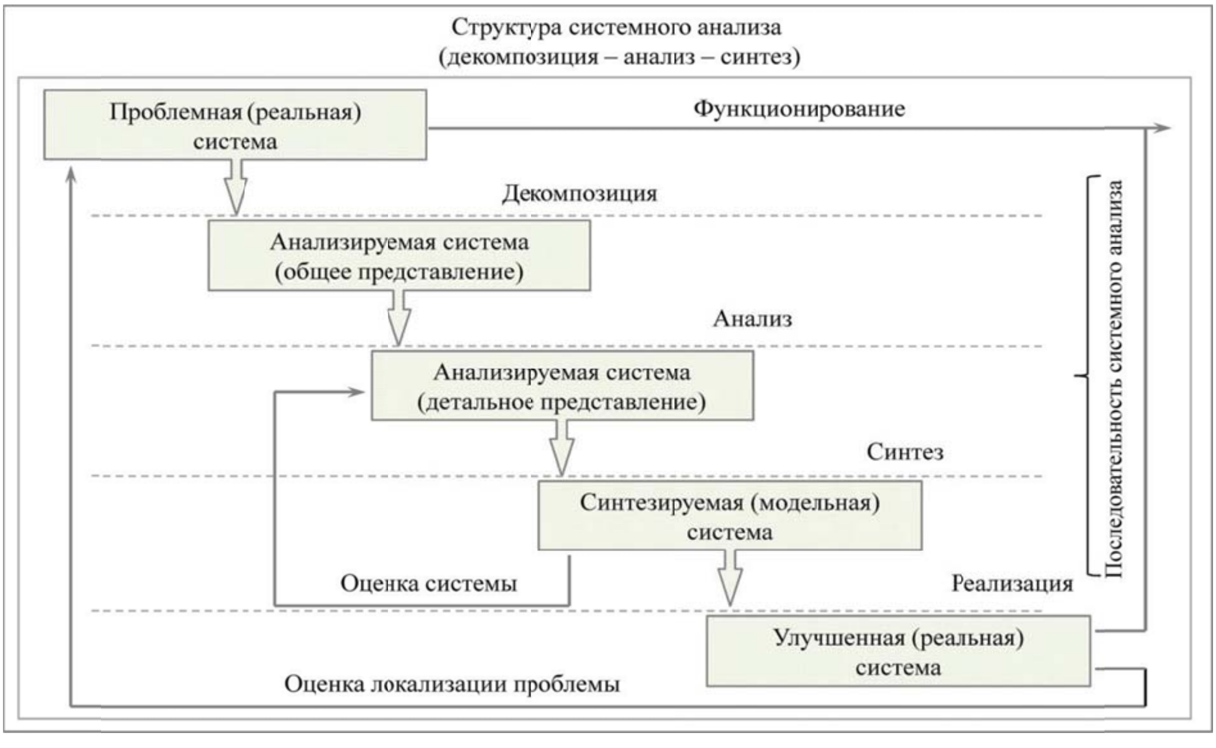


Рис. 2.1. Структура системного анализа

Процесс разрешения проблемы реализуется не одноактно, а разделяется на ряд последовательных этапов так, чтобы ими охватывался весь жизненный цикл проблемной ситуации. В связи с этим возникает необходимость определения этапов системного анализа, в совокупности образующих его методику (методику системного анализа), которую можно назвать опорной или базовой. В таблице 2.3 приведены подходы различных авторов по данному вопросу. Одним из наиболее оптимальных и содержательных представляется подход, предложенный И.Н. Дрогобыцким. Он предусматривает реализацию в ходе системного анализа нижеследующих этапов (см.: [32, с. 329–344]).

1. Формулирование проблемы и определение системы, в деятельности которой она существует. Для большинства наук и научных направлений отправной точкой, или начальным этапом исследования, является постановка задачи. В системном анализе это, как правило, промежуточный этап, которому предшествует длительная, кропотливая и сложная работа по структурированию исходной проблемы. Начинается она с того, что инициатор проведения системных исследований (заказчик, клиент, руководитель, рационализатор) дает первоначальную формулировку проблемы. В большинстве случаев она только обозначает сферу интересов и содержит в себе лишь очень приблизительное видение того, что, собственно, необходимо исследовать. Даже в том случае, когда первоначальная формулировка проблемы внешне имеет вполне конкретный характер, это не означает, что так же будет звучать и постановка задачи. Отмеченные причины обязывают аналитика считать любую исходную формулировку проблемы лишь «нулевым приближением» постановки задачи на проведение системного исследования и обусловливают состав и содержание работ на двух последующих этапах системного анализа.

2. Формирование проблематики. Открытость и многосторонние связи проблемосодержащей системы обусловливают необходимость относиться к решаемой проблеме не как к отдельно взятой, а как к совокупности взаимосвязанных с ней проблем. Для обозначения этой совокупности используют термин проблематика. Следовательно, на втором этапе системного анализа существующая проблема расширяется до проблематики путем ее (проблемы) проецирования на интересы каждой системы из ближайшего окружения, тем или иным образом связанной с проблемосодержащей системой.

3. Конфигурирование проблемы. Одним из ключевых результатов расширения проблемы до проблематики является перечень тех точек зрения, которые необходимо учесть при решении проблемы. Более того, следует иметь в виду, что процесс рассмотрения исходной проблемы из каждой конкретной точки зрения может описываться с помощью своего специфического языка. Совокупность всех языков, на которых будет описываться решаемая проблема, называют конфигуратором системы. Число языков, входящих в конфигуратор, должно быть достаточным для отражения всех существенных сторон решаемой проблемы.

4. Постановка задачи. Располагая первоначальной формулировкой подлежащей решению проблемы, ее проблематикой и конфигурацией, можно приступить к постановке задачи. Кроме собственно задания на проведение аналитических работ задача должна подсказывать направление поиска возможных вариантов решения проблемы.

5. Определение целей. Выработка цели есть зеркальное отражение формулирования проблемы. Цель описывает результат, подлежащий достижению, т.е. является желаемым результатом деятельности. На данном этапе системного анализа определяется, что необходимо сделать для решения или уменьшения существующей проблемы.

6. Выбор критериев. Для того чтобы правильно сделать выбор в пользу того или иного пути разрешения проблемы, необходимо иметь средства для сравнения допустимых альтернатив. Таким средством служат критерии. В данном случае под критерием понимают любое основание сравнения альтернатив. Это означает, что критерием качества альтернативы может служить любой ее признак, значение которого можно зафиксировать как минимум в порядковой шкале.

7. Генерирование альтернатив. Основной вопрос при решении любых проблем независимо от их области содержания и характера – вопрос выявления и выбора наиболее подходящей альтернативы решения. Альтернативы – это два (или несколько) взаимно исключающих варианта решений. При наличии информации, достаточной для определения численных значений целевой функции, из альтернативных вариантов выбирается тот, который обеспечивает максимальное достижение цели. Генерирование альтернатив является очень трудным и творческим этапом системного анализа. Его сущность заключается в поиске идей, подходов, предложений и рекомендаций, на множестве которых будет формироваться базовый перечень допустимых вариантов решения исходной проблемы, который еще называют перечнем допустимых альтернатив. И если в этот перечень по каким-то причинам не попала наилучшая альтернатива, то никакие методы выбора, никакие изощренные процедуры сравнения альтернатив и, тем более, никакие инструментальные средства их поддержки ее не обнаружат. Следовательно, на данном этапе системного анализа необходимо мобилизовать все силы и интеллектуальные ресурсы для того, чтобы в перечень допустимых альтернатив попали действительно стоящие альтернативы, в том числе и оптимальная.

8. Моделирование. На данном этапе системного анализа стоит задача увязать воедино глобальную цель системы, ее критерии и ограничения с допустимыми альтернативами таким образом, чтобы получить возможность сравнивать эффективность определяемых ими путей достижения цели. Такая увязка осуществляется посредством моделирования, конечный результат которого – модель – и представляет собой тот клубок, в котором в концентрированном виде сосредоточены и взаимно переплетены все ключевые аспекты решаемой проблемы.

9. Синтез решения. Если проблемная ситуация описывается единой моделью (причинно-следственной или математической), то реализация последней автоматически приводит к искомому результату. То есть этапы моделирования и синтеза решения в этом случае объединяются и реализуются одновременно. Во всех других случаях поиск решения, которое будет подлежать реализации как средство ликвидации или уменьшения существующей проблемы, выделяется в отдельный самостоятельный этап системного анализа. Его суть заключается в том, чтобы на основании сравнения отдельных альтернатив (с помощью модели или без нее) выбрать оптимальную.

10. Реализация решения. Любое решение, выработанное в ходе проведения системного анализа, должно быть реализовано. Более того, кроме непосредственного решения проблемы внедрение в практику результатов системного анализа преследует цель дальнейшего развития системы. Применительно к экономическим системам это связано не столько с наличными ресурсами, сколько со способностью их рационально использовать.

Таблица 2.3

Этапы системного анализа (по различным авторам)

№	Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.	Черняк Ю.И.	Оптнер С-Л.	Дрогобыцкий И.Н.	Казиев В.М.	Никаноров С.П.	Янг С.	Федоренко Н.П.	Симанков В.С.
1.	Определение конфигуратора	Анализ проблемы	Идентификация симптомов	Формулирование проблемы и определение системы	Абстрагирование и конкретизация.	Обнаружение проблемы	Определение цели организации	Формулирование проблемы	Определение проблемы
2.	Постановка проблемы	Определение системы	Определение актуальности проблемы	Формирование проблематики	Анализ и синтез	Оценка актуальности проблемы	Выявление проблемы	Определение целей	Определение целей системы
3.	Расширение проблемы до проблематики	Анализ структуры системы	Определение целей	Конфигурирование проблемы	Индукция и дедукция	Анализ ограничений проблемы	Диагноз	Сбор информации	Анализ системы
4.	Выявление целей	Формулирование общей цели и критерия	Определение структуры системы и ее дефектов	Постановка задачи	Формализация.	Определение критериев	Поиск решения	Разработка максимального количества альтернатив	Синтез системы
5.	Формирование критериев	Декомпозиция цели	Определение возможностей	Определение цели	Структурирование	Анализ существующей системы	Оценка и выбор альтернативы	Отбор альтернатив	Реализация системы
6.	Агрегирование критериев	Выявление потребностей в ресурсах, композиция целей	Нахождение альтернатив	Определение критериев и ограничений	Макетирование	Поиск возможностей (альтернатив)	Согласование решения	Построение модели в виде уравнений, программ или сценария	

Окончание Таблицы 2.3

7.	Генерирование альтернатив и выбор	Прогноз и анализ будущих условий	Оценка альтернатив	Генерирование альтернатив	Алгоритмизация	Выбор альтернативы	Утверждение решения	Оценка затрат	
8.	Исследование ресурсных возможностей	Оценка целей и средств	Выработка решения	Моделирование	Моделирование	Обеспечение признания	Подготовка к вводу в действие	Испытание чувствительности решения (параметрическое исследование)	
9.	Выбор формализации (модели)	Отбор вариантов	Признание решения	Синтез решения	Программное управление	Принятие решения (принятие ответственности)	Управление применением решения		
10.	Оптимизация модели	Диагноз существующей системы	Запуск процесса решений	Реализация решения	Распознавание, классификация и идентификация образов	Реализация решения	Проверка эффективности		
11.	Декомпозиция	Построение комплексной программы развития	Управление процессом реализации решения		Экспертное оценивание и тестирование и другие процедуры	Определение результатов решения			
12.	Наблюдения и эксперименты над системой	Проектирование организации	Оценка реализации и ее последствий						
13.	Построение системы								

Источник: составлено по: [65, с. 122; 32, с. 329–344].

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите причины, повлиявшие в середине XX века на расширение использования системного подхода и его трансформацию в научное направление.

2. В какой сфере деятельности и когда впервые прозвучало понятие «системный анализ»?

3. Когда были осуществлены первые крупные публикации по системному анализу? Назовите авторов указанных работ.

4. Какое понимание термина «системный анализ» закладывается различными авторами?

5. Дайте расширенное определение системного анализа, обобщающее подходы различных авторов.

6. Являются ли понятия «системный подход» и «системный анализ» тождественными? Если нет, то укажите различия.

7. Назовите общесистемные законы, отражающие зависимости между частями и свойствами системы.

8. По каким направлениям будет развиваться процесс обоснования системных законов в современной науке?

9. Опишите место системного анализа как науки в структуре научных дисциплин.

10. На что ориентирован системный анализ как наука?

11. Определите предмет системного анализа.

12. Назовите объекты системного анализа в теоретическом и прикладном аспектах.

13. Назовите основные методологические подходы в системном анализе, представьте их характеристику.

14. Назовите основные методы системного анализа.

15. Что такое алгоритм практического системного анализа? Опишите структуру системного анализа.

16. Перечислите этапы системного анализа (согласно научному подходу И.Н. Дрогобыцкого), раскройте содержание каждого из них.

17. Проведите сравнительный анализ данных таблицы «Этапы системного анализа (по различным авторам)». Опишите особенности научных подходов.

Литература для самостоятельной работы

1. *Дегтярев Ю.И.* Системный анализ и исследование операций. – М.: Высш. школа, 1996. – 336 с.

2. *Денисов А.А., Колесников Д.Н.* Теория больших систем управления. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 288 с.

3. *Звягин Л.С., Катаргин Н.В.* Системный анализ и моделирование. – М.: Финансовый университет, 2016. – 412 с.

4. *Игнатьева А.В., Максимцов М.М.* Исследование систем управления. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

5. *Квейд Э.* Анализ сложных систем. – М.: Советское радио, 1969. – 520 с.

6. *Квейд Э.* Методы системного анализа // Новое в теории и практике управления производством США. – М., 1971.

7. *Клиланд Д., Кинг В.* Системный анализ и целевое управление. – М.: Советское радио, 1979. – 279 с.

8. *Кричевский А.И.* Основы системного анализа. – Новосибирск, 2010. – 136 с.

9. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

10. *Новосельцев В.И.* Системный анализ: современные концепции (издание второе, исправленное и дополненное). – Воронеж: Изд-во «Кварта», 2003. – 360 с.

11. *Оптнер С.* Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Советское радио, 1969. – 216 с.

12. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высш. школа, 1989. – 361 с.

13. *Сурмин Ю.П.* Теория систем и системный анализ. – К.: МАУП, 2003. – 368 с.

14. *Черняк Ю.И.* Простота сложного. – М.: Знание, 1975. – 206 с.

15. *Шульц Д.Н.* Основы системного анализа (общая теория систем). – Пермь: Permuniversitypress, 2015. – 230 с.

16. *Янг С.* Системное управление организацией. – М.: Советское радио, 1972. – 455 с.

2.2. СИСТЕМНАЯ ПАРАДИГМА В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ НАУКЕ

Прошло более полувека с тех пор, как системный анализ вошел в практику научных исследований. К настоящему моменту в экспертном сообществе в целом сложилось понимание необходимости системного подхода к решению проблем социального, технического, культурологического и любого другого характера. Не является исключением и экономическая наука, где исследования с системных позиций открывают весьма широкие перспективы.

Системный подход не является чем-то принципиально новым в экономике: к развитию ее методологии до системного уровня, интуитивно стремились уже в XVII–XVIII веках основоположники научной экономики У. Петти, Ф. Кене, А. Смит, Д. Рикардо и др. Для них было характерно рассматривать хозяйственные явления в их взаимосвязи, а решения, принимаемые экономическими агентами, – с учетом всего того, что влияет на экономику извне и происходит в ней самой [75, с. 50].

В работах классиков системного анализа Л. Берталанфи, Н. Винера и У. Эшби, ориентированных на создание обобщающей теории систем, хозяйствующий субъект (экономическая система) зачастую выступал в качестве одного из типовых объектов исследования. В период наиболее активного развития общей теории систем, пришедшийся на 1960-е гг. и связанный с именами Р. Акоффа, С. Бира, М. Месаровича, Р. Калмана, Дж. Форрестера и др., экономическая тематика также занимала важное место. Заметным вкладом в сближение экономической теории и теории систем явились труды отечественных исследователей Ю.Н. Гаврильца, В.М. Глушкова, В.И. Данилова-Данильяна, М.Г. Завельского, Б.Н. Михалевского, Ю.И. Черняка и др. В последние два десятилетия данное направление эволюционирует в работах Г.Б. Клейнера, В.И. Маевского, И.Н. Дрогобыцкого, В.С. Степина, Л.П. и Р.Н. Евстигнеевых, Е.В. Попова, О.В. Иншакова, Д.С. Чернавского, В.В. Попкова и А.Н. Батурина, П.О. Лукши и М.В. Белоусенко, Е.А. Ерохиной и др. Однако лишь с появлением идей Я. Корнаи [58, 59] возникло реальное основание рассматривать положения теории систем и системного анализа в экономической науке в качестве самостоятельной парадигмы, развивающейся наряду с уже признанными направлениями экономической мысли, как неоклассическая, институциональная и эволюционная [52, с. 116].

Ключевые причины возникновения в начале XXI столетия новой трактовки системного подхода применительно к хозяйственным процессам связаны с кризисом традиционной экономической теории. Указанный кризис различим в таких проявлениях, как разрыв между макро- и микроэкономикой; сложность установления взаимодействия между разнородными экономическими объектами (например, институтами, организациями и индивидами); ограниченность имеющегося аппарата описания поведенческой иррациональности экономических агентов; осознание значения факторов, не укладывающихся в рамки ортодоксальной экономической теории (культурные факторы, комплексы страновых институтов и институциональных траекторий, системы знаний, склонностей и способностей к имитации и самоимитации и др.) [52, с. 116].

Одним из проявлений кризиса доминирующей экономической теории является также неспособность объяснить природу цикличности экономического развития, точнее – причину периодической смены экономической конъюнктуры.

К настоящему времени практически каждая из ведущих экономических школ в рамках теорий, вполне корректно описывающих хозяйственные реалии своего периода, представила собственный анализ изменений, происходящих в экономической среде. К самостоятельным факторам, становившимся первоначальной движущей силой экономической динамики, различные исследователи относили следующие: недопотребление (Ж. Сисмонди, Т. Мальтус, К. Робертус, Т. Гертцка); перекапитализацию (М. Бунятян, А. Афтальон, Ж. Лескюр, Л. Поле); перепроизводство товарного капитала (К. Маркс, Р. Гильфердинг, К. Каутский); изменения денежной массы (Э. Лавеле, К. Жюгляр, А. Шпитгоф, Т. Веблен, М.И. Туган-Барановский); экспансию и сжатие банковского кредита, деятельность банков (А. Шпитгоф, Г. Кассель, А. Гансен, Р. Хоутри, М. Фридмен); расширение и сокращение объемов инвестиций (Дж. М. Кейнс, Р. Харрод, П. Сэмюэлсон, Э. Хансен, Дж. Хикс); изменения в формировании рациональных ожиданий (Т. Сарджент, Р. Лукас), экзогенные шоки (К. Викселль, Э. Прескотт, Ф. Кидланд) и т.д. [22, с. 9]. Однако при смене рыночной конъюнктуры, сопровождавшейся наступлением очередной рецессии, теории проявляли неадекватность сложившейся экономической ситуации, а построенные на их основе прогнозы становились ошибочными. Например, знаменитый Гарвардский барометр в 1929 году еще показывал рост в то время, когда экономика США уже испытывала разрушительное воздействие Великой депрессии. Сложное эконометрическое построение ОВЕ при ретроспективном анализе не обнаруживало рецессии 1960–1961 гг., а наиболее разработанная и совершенная Уортонская модель – негативных событий 1957–1958 гг. [62, с. 218].

Экономические потрясения 2008–2009 гг. вновь стали откровением «для всей экономической науки, основное течение которой уже давно увязло в зыбучих песках мертвой схоластики». Мировая экономическая наука, оказалась не в состоянии дать убедительное обоснование причин ряда последовавших экономических потрясений регионального и странового масштабов, а также длительного периода угнетенного состояния, в котором оказалась мировая экономика в настоящее время. Несостоятельность «пресловутого «мейнстрима», уже три десятилетия текущего в никуда, огибая очевидные свидетельства своей несостоятельности» [21, с. 41], его неадекватность вызовам современного уровня развития мирового хозяйства ставит вопрос о выработке новой парадигмы экономической науки, способной представить полноценную трактовку происходящих экономических явлений и перспектив экономического роста.

Таким образом, современный период содержит серьезный исторический вызов и невозможность общества развиваться в экономической парадигме предшествовавшего этапа общественного развития. Необходима замена моделей экономической политики, инструментов регулирования ведущих рынков (таких как финансовый, фондовый и др.). Требуются новые подходы в экономической теории, где до сих пор нередко отсутствует базовый элемент хозяйственного процесса – «человеческий» фактор, выступающий естественным «резонатором» многоцелевых рефлексий по отношению к событиям, происходящим в экономике. Поиск путей оживления экономической теории требует создания нового направления экономической теории, которое – в противоположность доминирующим в настоящее время научным постулатам – должно строиться на понимании экономического развития как неравномерного, неравновесного и в целом неопределенного процесса со сложной внутренней структурой, включающей совокупность экономических, технологических, политических, социально-психологических элементов [31, с. 7]. Указанное направление может опираться на весь комплекс экономических знаний, не только полученных в процессе развития действующих теоретических догм, но и формирующихся в рамках новых перспективных направлений экономической теории. Одним из таких направлений является системная экономика (Я. Корнаи, Г.Б. Клейнер, И.Н. Дрогобыцкий и др.), открывающая новые горизонты познания экономических явлений как целостных системных образований, имеющих свою организационную структуру и подчиненных достижению конкретных целей. Ее имплементация в систему экономических знаний способна вывести научные исследования кризиса за рамки традиционного методологического подхода, обеспечить формирование целостного видения природы экономических явлений и их роли не только в движении хозяйственной конъюнктуры среднесрочного цикла (традиционное представление), но и в эволюции экономической системы, происходящей в долгосрочном периоде.

В рассматриваемой парадигме экономика (в широком смысле) представляется как целое системное образование, объединяющее четыре базовые подсистемы («экономическая квадрига»)[1]:

1) экономическую науку (экономическую теорию как систему накопленных знаний и научных представлений о механизмах развития экономики, economics);

2) социально-экономическую политику (совокупность стратегических решений в области экономики, economic policy);

3) сферу управления хозяйством (совокупность экономических организационно-передаточных институтов и механизмов, транслирующих принятые решения до реализации, management);

4) хозяйственную практику (сектор ведения реального хозяйства, economy) [13, с. 108–109].

В отличие от неоклассической доктрины, центральное место в которой отведено поведению экономического агента, или от эволюционной теории, где основной единицей является наследуемая рутина (укоренившаяся тенденция), в фокусе системной экономики находится *социально-экономическая система*, под которой понимается *локализованная в пространстве и/или во времени относительно автономная часть мирового (странового, регионального) социально-экономического контину-*

[1] Четырехэлементное представление структуры экономики («квадратура») не противоречит ее трехэлементной структуризации (см.: [47, с. 35–40], а является детализацией последней, где экономическая политика разделена на собственно политику и управление с целью отделить тактические процессы (управление) от стратегических (формирование экономической политики) [52, с. 112].

ума, обладающая внешней целостностью и внутренним многообразием [52]. В категорию социально-экономических систем естественным образом входят хозяйствующие субъекты, регионы, страны, отрасли, рынки, устойчивые социальные группы, кластеры и т.п. В качестве подобных систем следует также рассматривать экономические и социальные процессы, проекты, планы, программы и пр. (с отнесением к данным системам индивидов, обеспечивающих их функционирование) [48].

Согласно системной парадигме, социально-экономическое пространство (арена, на которой во времени и в пространстве протекает жизнь общества, природы, человека) рассматривается с точки зрения возникновения, функционирования, взаимодействия и трансформации разнообразных социально-экономических систем.

Указанные процессы протекают не линейно, а в формате экономических циклов. «Весь мир волн, охватывающий самые разные ступени бытия, а также бесконечное многообразие форм, дает в пространстве тождественные копии временных переходов, и во времени – пространственных», – писал А.А. Богданов [13, с. 70]. Существование указанных копий дает возможность вычленить в пространственно-временном континууме циклы и зафиксировать их в виде структур, отпечатавшихся в своей временной динамике, с четко обозначенными периодами подъемов и кризисов. Под влиянием закономерностей цикла, изменяющихся в зависимости от его фаз (стадий), происходит развитие и связанная с ним трансформация экономической системы.

Пространственные и временные границы экономической системы наглядно различимы в рамках научного подхода Г.Б. Клейнера, согласно которому функционирование реального хозяйства (экономики в узком смысле) определяет взаимодействие четырех системных секторов (внутренних подсистем): объектного, средового, проектного и процессного, включающих однотипные системы:

1) объекты – системы, ограниченные в пространстве, однако не ограниченные во времени. Сформированная одноразово, каждая объектная система способна существовать достаточно долго, постоянно приспосабливаясь к изменению условий внешней среды. Ее функция (миссия) состоит в объединении неоднородных элементов в целое для целеориентированной хозяйственной деятельности (производства товаров и/или предоставления услуг) и поддержании данного объединения в работоспособном состоянии в текущий период и в обозримой перспективе (предприятия, организации, страны и пр.);

2) среды – системы, не ограниченные ни во времени, ни в пространстве. Их функция (миссия) состоит в формировании условий для обмена продукцией, ресурсами, информацией, знаниями в рамках деятельности различных субъектов хозяйствования (торговля, рынки, логистические структуры и др.). Средовую систему можно сравнить с некоторой хозяйственной средой, в пределах которой действуют определенные условия для экономически полезной деятельности;

3) процессы – системы, не несущие пространственных ограничений, однако ограниченные по времени функционирования. Функция (миссия) процессных систем состоит в оптимизации состояния и гармонизации деятельности всех экономических систем. Процессы дают необходимый импульс развитию экономических систем в определенном направлении и на определенных временных интервалах (научно-технический прогресс, интеллектуализация производства, инновационные процессы, инфляция и пр.);

4) проекты (события) – системы, имеющие ограничение в пространстве и во времени и представляющие собой разовые мероприятия, масштабные акции, строительство и прочие виды созидательной деятельности. Их функция (миссия) состоит в инновационном обновлении внешней среды и энергетической поддержке других систем. Проектные системы тяготеют к активному использованию занимаемого пространства и расширению его разнообразия (организация, реформирование денежной системы, взаимоотношений хозяйствующих субъектов, инновационная политика и пр.) [32, с. 66–68]. В качестве примеров проектных (событийных) систем Г.Б. Клейнер также приводит такие экономические события, как резкое снижение нефтяных цен на мировых рынках, обвальное падение фондовых площадок и т.д. [49, с. 141–149; 50, с. 99–114; 52, с. 114; 48]. Графически указанное взаимодействие отражено на рис. 2.2.

Для эффективного функционирования экономики требуется существование в ней достаточного разнообразия и паритета всех типов систем. Паритет систем рассматривается как идеальное состояние, краткий период равновесия, к которому стремится экономика, а любое отклонение от указанного состояния, согласно тектоническому парадоксу А.А. Богданова, движение в сторону кризиса. «Например, брошенное прямо вверх тело, долетев до высшей точки своей траектории, остается там один момент в равновесии: момент кризиса, образующего переход от движения вверх, с прогрессивным замедлением, к движению вниз, с ускорением; на бесконечно малый промежуток достигается, чтобы немедленно и нарушиться, полная дезингрессия активностей первоначального толчка вверх с активностями тяготения» [13, с. 66–67].

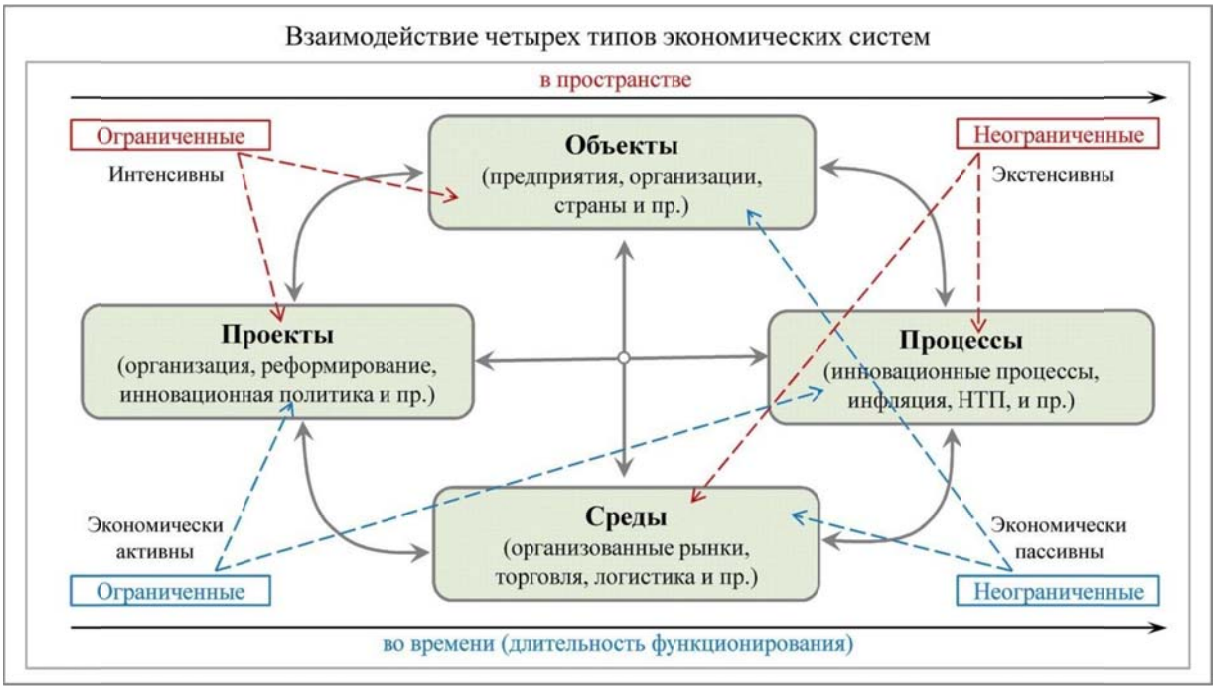


Рис. 2.2. Взаимодействие 4-х видов экономических систем (согласно научному подходу Г.Б. Клейнера)
Источник: [48].

Указанный тезис находит свое подтверждение в оценке кризиса Г.Б. Клейнером как состояния «неустойчивого равновесия, обеспеченного равнодействием противоположно действующих групп факторов». В подобной постановке антонимом этого понятия, а следовательно, и целью преодоления кризиса, становится достижение гармонии – согласованности масштабов и направленности факторов развития системы [48]. Гармонизацию внутрисистемных отношений в экономической системе следует принять в качестве способа динамичного «уравновешивания» негативных и позитивных итогов взаимодействия множества отношений и связей в экономических элементах при поддержании целостности структурного формирования во внешней среде.

Системы, ограниченные во времени (процесс, проект), экономически активны – готовы совершать существенное количество действий за единицу времени; системы, не ограниченные по времени (объект, среда), экономически пассивны; системы, ограниченные в пространстве (объект, проект), интенсивны – стремятся к интенсивному использованию занимаемого пространства; системы, не имеющие пространственных ограничений (процесс, среда), экстенсивны. Таким образом, среда абсолютно пассивна, проект абсолютно активен. Наиболее существенным следствием функционирования совокупности экономических систем в виде четырех классов является поддержание баланса между экономическим разнообразием в пространстве / во времени и унификацией (стандартизацией) пространства и времени. Ключевые компетенции по поддержанию этого баланса делятся между всеми типами экономических систем следующим образом:

1) объекты и среды обеспечивают сохранение межпериодных связей (непрерывности экономического времени);

2) среды и процессы ответственны за сокращение разнообразия хозяйственного пространства;

3) объекты и проекты обеспечивают расширение многообразия (диверсификацию) пространства;

4) проекты и процессы обеспечивают дифференциацию времени [48].

Экономический процесс следует рассматривать как циклически воспроизводящуюся последовательность состояний вышеперечисленных типов систем и характера их взаимодействия. Так, взаимодействие объектных и проектных систем имеет, как правило, конкурентный характер, результат которого находится в прямой зависимости от соотношения их величин. Крупный объект в состоянии заблокировать реализацию проекта (нейтрализовать возникновение события) путем его поглощения собственной внутренней средой и переориентирование потенциала проекта на другие цели. В свою очередь, масштабный проект (крупное событие) может нейтрализовать функционирование объекта. Процесс тоже в состоянии поглотить проект и минимизировать его результат даже при схожих величинах обеих систем. При превалировании размеров проекта над размерами процесса проект нарушает его реализацию [48].

Таким образом, каждой стадии «циклического процесса соответствует определенное соотношение масштабов и поведение систем, определяемое их внутренним состоянием: доминированием, угнетенностью или нейтралитетом по отношению друг к другу. Текущее состояние систем оказывает непосредственное влияние на эффективность и качество хозяйственных процессов. Например, при объектной недостаточности (дисфункции объектных систем) снижается устойчивость экономической системы. Событийная недостаточность (дефицит проектов, событий) приводит к застою. При средовой недостаточности (дисфункции средовых систем) осложняется экономический обмен, происходит натурализации хозяйств и нарастает неопределенность в функционировании хозяйственного механизма. Процессная недостаточность (дефицит процессных систем) ведет к фрагментации экономики [51, с. 77].

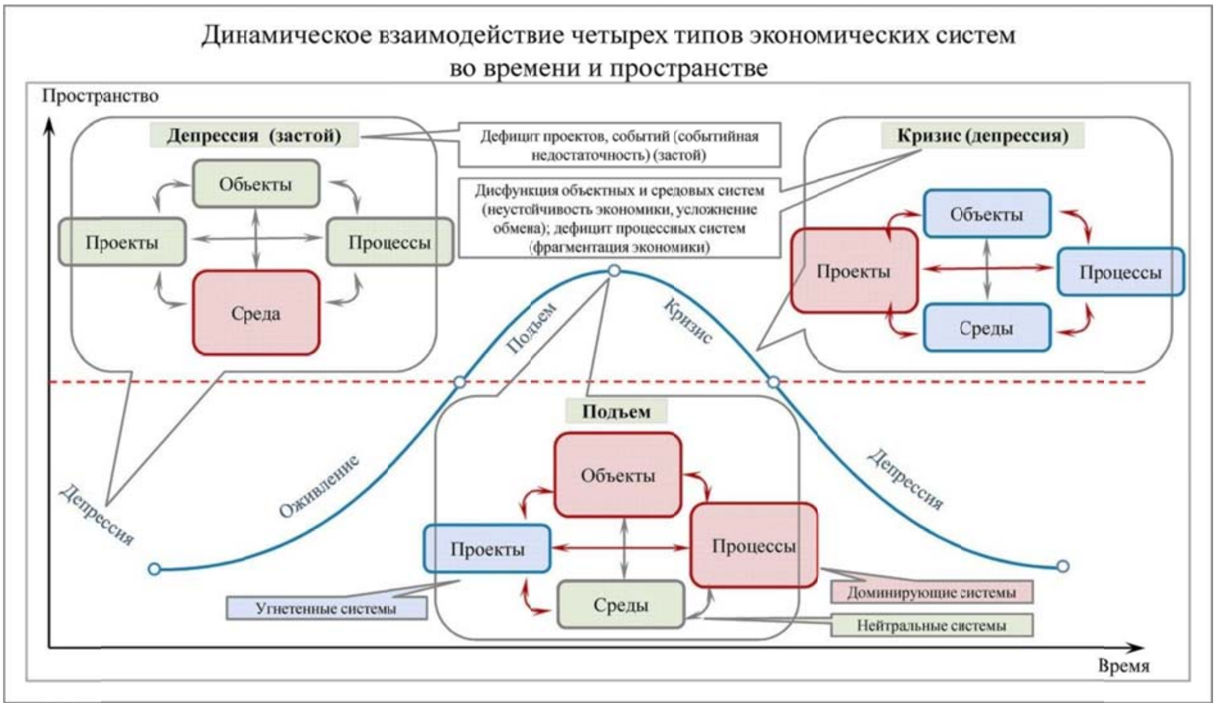


Рис. 2.3. Динамическое взаимодействие 4-х видов экономических систем в пространстве и во времени (согласно научному подходу Г.Б. Клейнера)
Источник: составлено по материалам [48].

Механизм экономического цикла в терминах концепции пространственно-временного взаимодействия экономических систем будет выглядеть следующим образом. В период подъема происходит ускоренное развитие объектных и процессных систем, контрольные параметры которых по мере наращивания количественных показателей постепенно выходят за допустимые пределы, определяемые реальными потребностями экономики. Возникающая как следствие гипертрофия объектных и процессных систем, выраженная в количественных нарушениях внутрисистемного баланса, приводит к смене экономических тенденций, способствует переходу от повышательной к понижательной стадии среднесрочного цикла. На указанной стадии происходят кризисные события: деградация объектных и процессных систем и развитие конкурентной проектной (событийной) системы. Исчерпание потенциала развития проектной системы запускает процесс преодоления кризиса, который происходит за счет восстановления старых или установления новых количественных пропорций, обеспечивающих дальнейшее развитие хозяйственной системы и переход к новому оживлению, а затем подъему в рамках среднесрочного экономического цикла.

Рис. 2.4. Структура кризиса как системы и производство «токсичных» продуктов

Источник: [48].

Наиболее драматичная фаза экономического цикла – кризис – является локализованным во времени и пространстве явлением, охватывающим весь комплекс базовых хозяйственных процессов – производства, обмена, распределения и потребления. Так как указанные хозяйственные процессы имеют единый источник и схожие признаки, это явление следует рассматривать в качестве целостной экономической системы. Поскольку кризис как система локализован в пространстве и во времени, Г.Б. Клейнер относит его к событийным (проектным) системам [48]. Кризис, рассматриваемый в качестве экономической системы, имеет аналогичную со всеми прочими экономическими системами функциональную структуру. Независимо от вида, она обладает схожей функциональной макроструктурой, объединяющей 7 подсистем: (1) ментальную – создающую ментальные модели; (2) культурную (культурные типы и ценности); (3) институциональную (внутренние институты системы); (4) когнитивную (внутрисистемный опыт и знания); (5) организационно-технологическую (услуги, товары); (6) имитационную (опыт внешних ситуационных моделей); (7) историческую (ситуационные модели, составленные на основе опыта функционирования системы). Как экономическая система кризис формирует «токсичные» продукты («токсичные подсистемы»), способные внедряться и подрывать устойчивое функционирование других систем (проектов, процессов, организаций). Такими токсичными продуктами становятся: (а) «прокризисное» мышление; (б) потеря общих ориентиров и ценностей, нарушение системы восприятия и оценок благ, замена виртуальными ценностями реальных; (в) институты поддержания кризиса (свертывание кредита, сокращение периода кредитования, снижение инвестиционного планирования – прекращение реализации крупных, долгосрочных проектов, их замещение малыми, немасштабными проектами); (г) утрата способности стратегического видения и оценки перспектив развития экономики, уменьшение планового горизонта; (д) дезорганизация; (е) усиление внимания к негативным ситуациям в функционировании других объектов; (з) повышение чувствительности к собственному негативному опыту; (и) создание новых кризисных систем (репродуктивная, воспроизводственная функция, осуществляется непосредственно с объектом) [48].

Вопросы для самоконтроля

1. Представьте описание процесса сближения экономической теории и системного подхода.

2. Что явилось ключевой причиной появления в XXI веке новой трактовки системного подхода применительно к хозяйственным процессам?

3. Появление каких работ дало реальные основания рассматривать положения теории систем и системного анализа в экономической науке в качестве самостоятельной парадигмы, развивающейся наряду с уже признанными направлениями экономической теории?

4. Назовите зарубежных и отечественных авторов, развивающих положения системной экономики в настоящее время.

5. Дайте определение экономики в широком смысле, назовите и охарактеризуйте четыре базовые подсистемы экономики («экономическая квадрига»).

6. Дайте определение социально-экономической системы с позиции системной экономики.

7. Опишите взаимодействие четырех секторов (внутренних систем) экономики в узком смысле (согласно пространственно-временной концепции взаимодействия систем Г.Б. Клейнера).

8. Опишите экономический процесс и механизм экономического цикла в категориях системной экономики.

9. Охарактеризуйте с позиций системной экономики кризис как фазу экономического цикла. Представьте функциональную макроструктуру кризиса. Какие «токсичные» продукты возникают в результате его реализации?

Литература для самостоятельной работы

1. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. l. – 304 с.

2. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. 2. – 351 с.

3. Длинные волны: Научно-технический прогресс и социально-экономическое развитие / С.Ю. Глазьев, Г.И. Микерин, П.Н. Тесля и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. – 224 с.

4. *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 423 с.

5. *Клейнер Г.Б.* Кризис: что, кому и когда делать (попытка метаанализа) // Государственная антикризисная политика в условиях мирового финансово-экономического кризиса. Межкафедральный сборник научных трудов. – М.: Финакадемия. – С. 35–40.

6. *Клейнер Г.Б.* Системный кризис, системный анализ, системный менеджмент [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.kleiner.ru/arpab/sis-kriz.html (дата обращения: 10.01.2014).

7. *Клейнер Г.Б.* Системная парадигма и экономическая политика // Общественные науки и современность. – 2007. – № 2. – С. 141–149.

8. *Клейнер Г.Б.* Системная парадигма и экономическая политика // Общественные науки и современность. – 2007. – № 3. – 99–114.

9. *Клейнер Г.Б.* Системная экономика как платформа развития современной экономической теории // Вопросы экономики. – 2013. – № 6. – С. 4–28.

10. *Клейнер Г.Б.* Стратегия системной гармонизации экономики России // Экономические стратегии. – 2008. – № 5-6. – С. 72–79.

11. *Клейнер Г.Б.* Устойчивость российской экономики в зеркале системной экономической теории. Часть 1 // Вопросы экономики. – 2015. – № 12. – С. 107–123.

12. *Корнаи Я.* Инновации и динамизм: взаимосвязь систем и технического прогресса // Вопросы экономики. – 2012. – № 4. – С. 4–31.

13. *Корнаи Я.* Системная парадигма // Вопросы экономики. – 2002. – № 5. – С. 4–22.

14. *Полтерович В.М.* Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. – 1998. – № 1. – С. 46–66.

Глава 3
ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ОТ ДЕЛОВЫХ БАРОМЕТРОВ ДО СОВРЕМЕННЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

3.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Качественный этап в развитии экономического предвидения связан с внедрением метода моделирования – группировки исследуемых соотношений в модель, которую обобщенно можно представить в качестве упрощенного изображения действительного объекта (явления). При всем разнообразии моделей и особенностей их построения объединяющим является обстоятельство, что во всех моделях в различной степени достигается воспроизведение конкретных реальных процессов. Можно утверждать, что теоретическое представление о каких-либо процессах является, по сути, совокупностью разных моделей, отражающих важнейшие особенности существующих объектов и явлений (хотя реальность существенно содержательнее и многообразнее) [9, с. 6]. Использование указанного метода обусловлено трудностями, а иногда и невозможностью непосредственного (прикладного) изучения действительного объекта (процесса). В этом случае проще построить и исследовать его условный образ – модель, посредством которой могут быть реально воспроизведены действующее единство и взаимосвязи, как минимум, главных принципиальных зависимостей изучаемого процесса.

Исследование экономических процессов с применением моделирования является весьма плодотворным способом анализа текущей хозяйственной ситуации и прогнозирования ее динамики. Так как принципы анализа и прогнозирования практически не отличаются, то для получения прогнозов зачастую применяются инструменты, аналогичные моделям текущего анализа. Иными словами, модель, составленная и опробованная на основе реальных показателей, пригодна для прогнозирования ситуации в будущем. Вместе с тем никакая модель не способна абсолютно корректно воспроизвести все непосредственные соотношения и взаимосвязи исследуемого процесса. Указанный факт необходимо учитывать при использовании моделей.

А. Эйнштейн считал, что модели должны быть «настолько простыми, насколько возможно, но не проще» (цит. по: [66, с. 21]). Схожую позицию занимал авторитетный голландский эконометрик Я. Тинберген: «Общая тенденция состоит в том, чтобы ограничить в дальнейшем использование сложных понятий. Модель необязательно должна быть сложной» [99, с. 26]. Численность связей, объединяемых экономической моделью, обусловлена обстоятельствами построения указанной модели и глубиной познания объекта, к которой стремятся ее создатели. Необходимо учитывать: чем амбициознее цели моделирования, чем шире палитра предметных задач, решению которых служит модель, тем меньше вероятность достижения ее высокой прикладной полезности. Модель следует строить под определенные задачи, сформулированные под четкие цели, позволяющие изначально определить структуру модели и правильно установить иерархию анализируемых переменных.

Первые попытки математической обработки экономической информации были осуществлены еще в XVIII веке. В 1738 г. Ш. Дюто (Франция) впервые провел сравнительный анализ цен двух временных периодов методом сложения цен на некоторые товарные позиции за каждый период. В 1766 г. Дж. Карли (Италия) вывел среднее арифметическое значение относительных изменений товарных цен за два временных периода. Эти несложные опыты представляют собой два распространенных подхода к построению индексов: «индекс как отношение совокупностей элементов, и индекс как совокупность отношений элементов» [56, с. 227].

3.2. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ БАРОМЕТРЫ

Со времени признания кризисов как периодических явлений рыночного хозяйства начались более основательные работы по анализу и прогнозу социально-экономических процессов с активным использованием экономико-статистических данных. Уже К. Жюгляр в 1862 г., исследуя статистические показатели торговой и банковской деятельности, пытался установить признаки приближающихся кризисов.

Таким образом французский ученый заложил основы экономической семиологии, предоставившей теоретическую основу для построения т.н. «единого экономического показателя», представленного через четверть века независимо друг от друга статистиками А. Де-Фовиллем и М. Нейман-Шпаллартом. Это был первый опыт создания экономических «барометров» (термин введен Де-Фовиллем) – экономико-математических моделей, выступающих в качестве средства анализа и прогнозирования конкретных процессов на основе имеющейся статистической информации, оцениваемой с помощью методов математической статистики.

Концепция экономического барометра основана на идее, что отдельные элементы хозяйственного процесса содержат показатели, динамика которых опережает изменение остальных элементов и которые могут по этой причине служить индикаторами последующих совокупных изменений экономической динамики. Так как базовым показателем хозяйственной конъюнктуры являются цены, то анализ и прогнозирование их динамики стали основной целью создания ранних экономических барометров. Специфические методы указанного построения могут быть объединены в три основных последовательно реализуемых этапа:

1) отбор индикаторов конъюнктуры (производство, торговый оборот, грузооборот, цены, денежное обращение, оплата труда и пр.), осуществляемый как на основании экспертных мнений о значимости определенных показателей в экономическом процессе, так и путем предварительного математико-статистического анализа, определяющего специфические характеристики каждого показателя;

2) построение индексов (методы объединения значений конъюнктуры);

3) анализ временных рядов (методы выделения конъюнктурных отклонений в совокупной динамике показателей хозяйственной активности).

Дополнительно к указанному эмпирическому материалу добавлялись различные «качественные характеристики» (экспертные оценки), являвшиеся составной частью прогнозного материала.

История практического применения математико-статистического метода в экономике, по сути, начинает отсчет с периода, когда бурный рост американского капитализма сформировал спрос на постоянное и углубленное изучение экономической конъюнктуры. Указанная работа потребовала создания специализированных наблюдательных учреждений, первым из которых (или одним из первых) стала Статистическая организация Роджера Бэбсона [119].

Р. Бэбсон утверждал, что его прогностическая система базируется на «законе Ньютона», согласно которому действие вызывает равное противодействие. Барометр Бэбсона, издававшийся с 1910 г., представлял собой сводный индекс экономической активности США, включавший ряд приведенных в сопоставимый вид «чувствительных» показателей конъюнктуры (строительство, чековый оборот, внешняя торговля, банкротства, иммиграция и пр.). Графически данный индекс был представлен как ломаная линия со временем в абсциссе и стоимостью в ординате. Получавшаяся кривая интерполировалась «линией X-Y», соответствующей росту основной деятельности, увеличению благосостояния в расчетный период. Главная кривая конъюнктуры – уровень Бэбсона – имела довольно необычную форму ломаной кривой, выровненной на годовых промежутках – без изломов во время календарного года (отрезок A-D, рис. 3.1). Текущий (незаконченный) год представлялся в уровне прямой, горизонтальной линией (отрезок C-D). Уровень Бэбсона прокладывался так, чтобы площадь, формируемая кривой индекса с одной стороны уровня, соответствовала по величине площади с другой стороны, то есть Р. Бэбсон следовал одному из условий математического метода наименьших квадратов, скрывая его под заявленным действием физического закона Ньютона. Основываясь на предположении о приблизительной эквивалентности между областями, представляющими бум, и теми, которые характеризуют депрессию, Бэбсон предсказывал изменения конъюнктуры в тот момент, когда констатировалось видимое преобладание совокупности площадей с одной стороны уровня над их совокупностью с другой стороны. Полагаясь также на многочисленные оценки ситуации ведущими представителями бизнеса, Бэбсон составлял таким образом своего рода «индекс уверенности» инвесторов [12, с. 182].

В Статистической организации Р. Бэбсона был хорошо налажен сбор экономической информации, которая достаточно активно подвергалась простейшей обработке (таблицы и диаграммы по различным отраслям производствам и регионам США, ежемесячные картограммы хозяйственной конъюнктуры и пр.). На более глубокую обработку данных барометр Бэбсона не претендовал. Работы Р. Бэбсона, по сути, имели довольно слабое отношение к математической статистике, однако были плотно подогнаны к прикладным задачам биржевой спекуляции. Вместе с тем, несмотря на отсутствие особой научности в построениях Бэбсона, движение конъюнктуры излагалось им с очевидным пониманием дела.

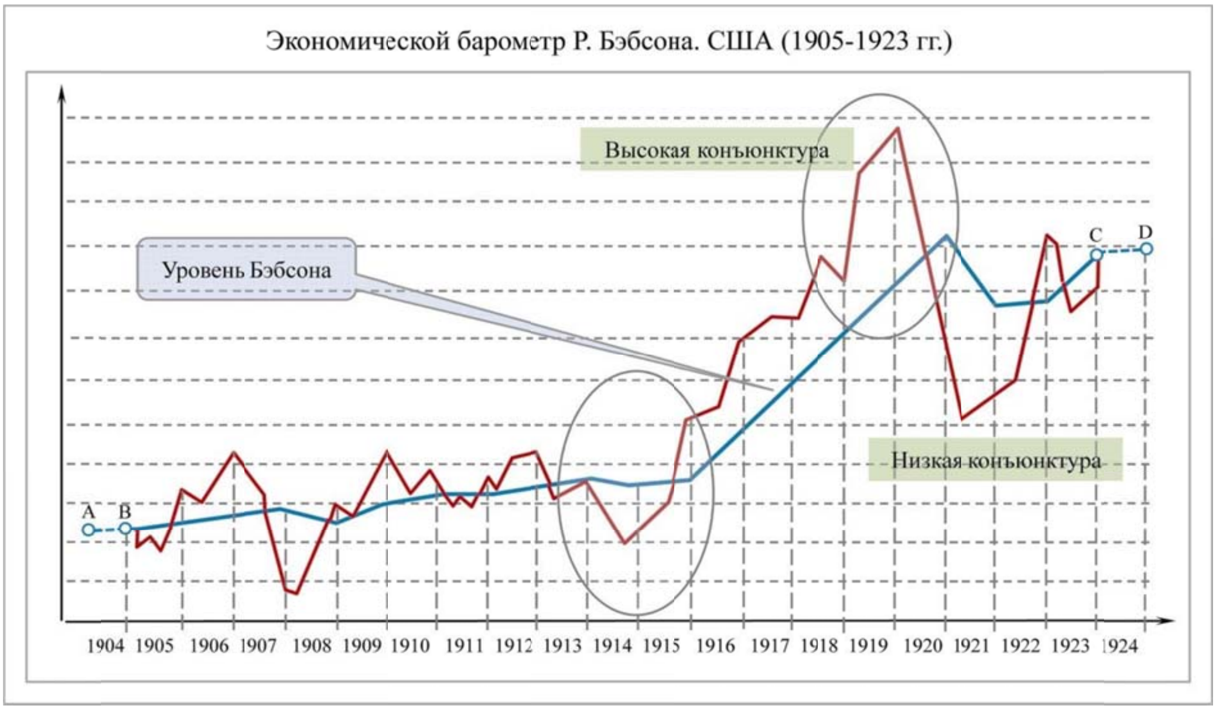


Рис. 3.1. Экономической барометр Р. Бэбсона. США (1905–1923 гг.)
Источник: [119; 56, с. 252].

На абсолютно ином принципе была основана подготовка прогнозов Экономического бюро Брукмайра. Для созданного в 1911 г. барометра бюро использовало индекс стоимости наиболее чувствительных к колебаниям конъюнктуры ценных бумаг, показатели которых на 4–6 месяцев опережали изменения оптовых цен. Позже бюро классифицировало уже 3 группы индикаторов – цены акций, банковские ресурсы и торгово-промышленная конъюнктура, которые сводились путем статистической обработки и выявления для группы усредненного показателя. Полученные кривые составляли барометрический рисунок, прогнозы которого были основаны на наблюдении, что после того, как банковская сфера демонстрирует первоначальные вариации (увеличение или уменьшение), несколькими месяцами позже следует изменение курсов акций и еще несколькими месяцами спустя – смена показателей основной хозяйственной деятельности [131, с. 79]. Указанная система прогноза основывалась на мнении, вдохновленном работами И. Фишера, что деньги и кредит – независимая переменная в деловом цикле. Поскольку барометр Брукмайра базировался на систематической экспертизе последовательностей между тенденциями различных индексов, его можно во многом рассматривать в качестве прототипа Гарвардского экономического барометра – самого знаменитого из построений данного типа.

Создание Гарвардского барометра непосредственно связано с Уорреном Пирсонсом, профессором Гарвардского университета, впервые объединившим прекрасное понимание законов экономической конъюнктуры с научно организованным математико-статистическим анализом.

Номенклатура Гарвардского индекса «главных деловых обстоятельств» (Index of General Business Conditions) или экономический барометр Комитета экономических исследований Гарвардского университета был построен У. Пирсонсом на основе годовых данных в 1916 г. [129]. Систематическая публикация его результатов на базе месячной информации началась с 1919 г. в изданиях Гарвардского экономического общества «Weekly Letter» и «Review of Economic Statistics». Первоначально барометр включал 5 групп индикаторов, которые затем были объединены в 3 кривые (Speculations, Business, Money), отражающие состояние фондового (A), товарного (B) и денежного (C) рынков. Каждая из указанных кривых составляла среднее арифметическое значение рядов включенных в нее показателей.

В основу прогнозной модели Гарвардского комитета, было заложено свойство каждой отдельной кривой воспроизводить динамику других в некоторой последовательности и с некоторым отставанием. Барометр отражал выявленные эмпирические закономерности и экстраполировал их на ближайшие месяцы. По убеждению автора Гарвардского барометра У. Пирсонса (базировавшемуся на статистическом исследовании динамики кривых в 1903–1914 гг.), движение кривой спекуляции (A) должно примерно на 8 месяцев опережать кривую торговли (B), а кривая «B», в свою очередь, на 4 месяца опережать кривую денег (C). Такая последовательность на практике отмечалась в период кризиса 1919–1920 гг., что принесло Гарвардскому барометру популярность в деловых кругах. Такие же методы прогноза были приняты некоторыми крупными корпорациями США для планирования их деятельности. «Американская компания телефонов и телеграфов» использовала гарвардскую методологию, чтобы в 1921 г. создать свой барометр (Индекс хозяйственной активности США по месячным данным, начиная с 1877 г.) [70, с. 299]. «Дженерал моторс» обычно сравнивал прогноз Гарварда со своими собственными оценками продаж [130, с. 184–189].

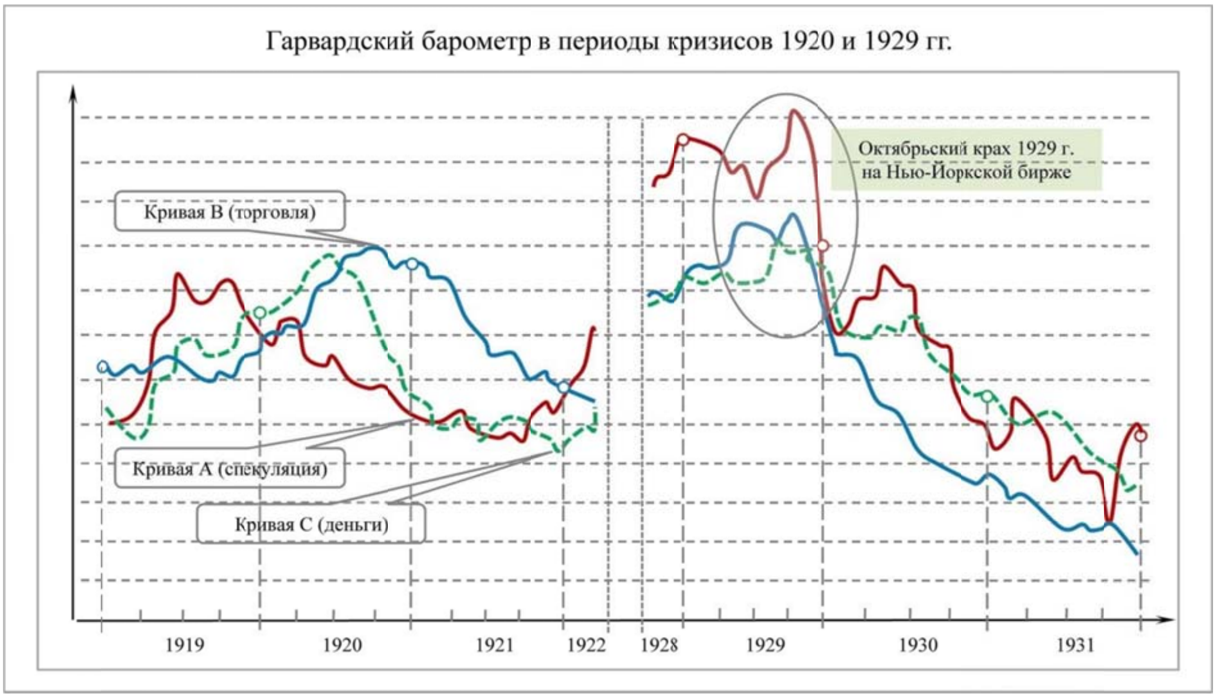


Рис. 3.2. Гарвардский барометр в периоды кризисов 1920 и 1929 гг.
Источник: составлено по: [56, с. 255].

Успех Гарвардского барометра способствовал созданию множества аналогичных моделей, заполнивших страницы американских и европейских конъюнктурных журналов. Создававшие их учреждения, изначально ориентированные на подготовку оперативных бизнес-отчетов, в 1920-е годы развились до уровня научной респектабельности. Только в США был создан ряд негосударственных статистических агентств (И. Фишер пишет о 80-ти), которые с различной степенью успешности занимались «деловыми» предсказаниями [12, с. 194].

В США авторитетным аналитическим и прогнозным учреждением было Экономическое бюро И. Фишера. Несмотря на общие черты с Гарвардским институтом – ассоциацию с известным академическим учреждением – оно существенно отличалось по целям и внутренней организации. Гарвардское бюро, располагавшее квалифицированным персоналом, занятым на полный рабочий день, было организовано как бизнес, задача которого состояла в том, чтобы предоставить участникам рынка анализ экономической ситуации для краткосрочного и долгосрочного планирования их деятельности (прогнозы предлагались компаниям годовой подпиской). Профессор Йельского университета И. Фишер, наоборот, оказывал услуги, разработанные первоначально как образовательный инструмент, рассчитанный на широкую публику. Позже Фишер наладил полномасштабный консультационный бизнес, но изначально его заявления публиковались на еженедельной основе в специальной газетной колонке.

В Великобритании в 1922 г. А. Боули учредил Экономическое бюро Кембриджского и Лондонского университетов (Cambridge and London Economic Service), находившееся под существенным влиянием идей Гарвардского комитета.

Во Франции ведущим учреждением для исследования хозяйственной конъюнктуры стал в тот период Статистический институт при Парижском университете (Institut de statistique de l'universite de Paris). Указанный институт, возглавляемый Л. Маршем, выполнял одновременно с исследовательскими также и академические задачи.

В Италии Падуанский и Римский статистические институты с 1925 г. издавали под руководством К. Джинни данные по хозяйственной конъюнктуре «Indici del movimento Economico Italiano», а с 1931 г. Римский институт начал их систематическую публикацию в экономическом издании «La vita economica italiana».

Австрийский конъюнктурный институт под руководством Хайека (затем О. Моргенштерна) ежемесячно размещал в своем издании т.н. «некоторые типичные ряды развития конъюнктуры» («Einige typische Reihen zur Konjunkturentwicklung»): рынок товаров, рынок капиталов, финансовый рынок (обороты биржи, процентная ставка, курсы акций индустриальных компаний, учетные векселя, индекс чувствительных товаров, производственный выпуск, экспорт продукции, безработица).

С принятия барометрического метода Гарвардского бюро начал исследования в области конъюнктуры учрежденный при Государственном статистическом управлении Германский конъюнктурный институт (Institut für Konjunkturforschung, ГКИ). Его руководитель Э. Вагеман предложил наиболее интересную модель, сведенную в систему индикаторов, названную «экономическими барометрами» («Die allgemeinen deutschen Wirtschaftsbarometer»).

Кроме вышеуказанных прогнозных учреждений исследованиями конъюнктуры занималось множество более мелких учреждений в Европе и Америке, включая некоторые специализированные печатные органы. Так, журнал «The Annalist» составлял индекс деловой активности (Index of Business Activity), состоявший из показателей грузооборота, производства электроэнергии, выпуска важнейших товаров, индустриального потребления шерсти и хлопка. Временные ряды, составлявшие данный индекс, были элиминированы от сезонных волн и уровней. В США готовились также показатели фондовой торговли журнала «Barron's», индекс Доу-Джонса (Dow-Jones Index) и др.

Попытка создать экономический барометр была осуществлена Конъюнктурным институтом при Наркомфине РСФСР, созданным в 1920 г. (чуть позже Гарвардского бюро). Сначала институт углубленно занимался только процессами сферы обращения (например, организовал сбор ценовой статистики, составил ряд индексов, касающихся различных аспектов товарного рынка). Однако во время НЭП он развил активную деятельность по исследованию движения показателей отечественной и мировой экономики. Аналогично статистическим учреждениям США, при создании показателя совокупной хозяйственной активности («Единого экономического показателя динамики народного хозяйства СССР») Конъюнктурный институт дополнял его самыми различными временными рядами (производственный выпуск, денежное обращение, товарооборот, цены, занятость и пр.), а при составлении барометра покупательной способности денег (ключевого показателя сферы денежного обращения) допускал вероятность прогноза на основе исключительно эмпирического исследования статистических данных.

По иронии широкое международное признание Гарвардского барометра совпало с началом сбоев в его работе. Не очень хорошие результаты прогнозов в 1923 г. были списаны на эффект государственного вмешательства в экономику, изменившего последовательность кривых. Действительно, в тот период Федеральная резервная система активизировала денежные интервенции в целях выправления деловых тенденций.

Крах на Уолл-стрит в 1929 г. – непредвиденный и недооцененный Гарвардским комитетом – нанес разрушительный удар по раннему экономико-статистическому прогнозному методу. Великая депрессия сделала коммерчески бесполезными работу бизнес-барометров 1930-х годов, продолжавших предсказывать быстрое восстановление. В 1935 г. индекс Гарварда прекратил выходить, а Гарвардское экономическое общество закрыло Комитет по экономическим исследованиям. Другие барометры «скончались» в те же самые годы.

3.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

В обстановке полной дискредитации барометрических (симптоматических) методов базовым способом макроэкономического анализа и прогноза стала разработка динамических моделей межотраслевого баланса. Исторически попытки модельной имитации межотраслевых связей заключались в отражении их исключительно равновесной, балансовой стороны. Указанный подход базируется на простом предположении, что при учете совокупного потребления продукции всех отраслей (не исключая потери и пополнение запасов), объем выпущенной за определенный период продукции окажется тождественным величине потребленной продукции. Первый опыт создания модели национального хозяйства на основе применения балансового метода связан с работой Ф. Кенэ «Экономическая таблица» (1758 г.), где рассматривался случай простого воспроизводства (являвшегося только составной частью более крупного процесса – расширенного воспроизводства). Однако практическая попытка создания межотраслевого баланса была предпринята в СССР, когда В.Г. Громан в 1923–1924 гг. разработал методологию составления межотраслевого баланса, а экономисты ЦСУ СССР под руководством П.И. Попова в 1926 г. впервые в мире на практике осуществили его расчет.

Вместе с тем достаточно развитое математическое построение межотраслевого баланса, предоставляющего значительные возможности прогноза и анализа, впервые было осуществлено в 1936 г. [77] американским ученым (российского происхождения) В.В. Леонтьевым в его работах, посвященных изучению структуры национального хозяйства США. Необходимо отметить, что указанные работы проводились под серьезным впечатлением от Великой депрессии 1929–1933 гг., продемонстрировавшей, что стихийный характер экономического развития является не достоинством, а недостатком рынка, чреватым для экономики огромными рисками. В данный период закрепляется идея о необходимости более активного вмешательства государства в рыночные процессы.

В.В. Леонтьев предложил два вида динамического межотраслевого построения, первый из которых в научной литературе был назван «открытой», второй – «замкнутой» моделью [63]. Первый вид построения описывает эндогенное определение инвестиций (для чего применяется обычный акселератор) и выражается группой неоднородных линейных дифференциальных уравнений:

$$X_i - \sum_{k=1}^{m} \ a_{ik}X_k - \sum_{k=1}^{m} \ b_{ik}X_k = Y_i,$$

где X – валовые выпуски отраслей;

a_{ik} – коэффициенты прямых затрат;

b_{ik} – коэффициенты затрат основного капитала;

Y – экзогенный конечный продукт.

Второй вид построения, описывающий эндогенное определение инвестиций и личного потреблении, характеризуется группой однородных линейных дифференциальных уравнений:

$$X_i - \sum_{k=1}^{m} \ a_{ik}X_k - \sum_{k=1}^{m} \ b_{ik}X_k - \sum_{k=1}^{m} \ C_{ik}X_k - \sum_{k=1}^{m} \ d_{ik}X_k = 0,$$

где a_{ik} – коэффициенты текущего потребления;

d_{ik} – коэффициенты потребления накопленных потребительских товаров.

Леонтьев продемонстрировал, что «замкнутое» построение способно сочетаться с экзогенными переменными (экспорт, госзакупки и пр.) и может применяться для анализа влияния на экономическое развитие различных мер антикризисной политики государства [9, с. 11–12; 55, с. 13–14].

Динамическая модель межотраслевого баланса длительное время не рассчитывалась на конкретных статистических данных и не применялась для подготовки прогнозных материалов. Вероятно, указанный факт был продиктован убеждением, что «замкнутая» модель пригодна только для установления пропорций межотраслевого распределения какого-либо заданного ресурса. Однако данное утверждение справедливо только для статической межотраслевой модели, а не динамической (включая «замкнутую»), которая, как доказал В.В. Леонтьев, способна корректно работать, если личное потребление и инвестиции определяются не статической группой коэффициентов, а коэффициентами, выражающими зависимость указанных показателей от динамики прочих переменных как в дискретной, так и в непрерывной формах [9, с. 12–13; 55, с. 14–15].

В связи с этим примечательна динамическая модель Дж. фон Неймана, содержащая (как частный случай) модель Леонтьева и имеющая отличие от последней в том, что допускает одновременный выпуск нескольких товарных позиций в каждом производственном процессе (отрасли). Таким образом был устранен существенный изъян построения Леонтьева, состоящий в оперировании категорией «чистой» отрасли. Однако наиболее заметные результаты обеих моделей достигнуты при допущении о неизменности во времени технологии, что в условиях стремительного технологического прогресса представляет весьма существенный недостаток.

Серьезный переход к практическому использованию динамических межотраслевых моделей произошел только в середине 1960-х годов. Тогда же начали использоваться экономические модели с применением методов гармонического анализа, заимствованного экономической наукой из физики, астрономии и метеорологии [16, с. 5–26]. Экономическая мысль вновь обратилась к математико-статистическим методам, однако уже не столько для создания макроэкономических моделей, сколько для изучения локальных проблем, в первую очередь, для исследования товарного рынка и закономерностей его функционирования.

Тем не менее основным упущением всех моделей балансового метода (как статических, так и динамических) остается их неспособность гарантировать своевременное выявление существующих и формирующихся в экономическом развитии диспропорций и, соответственно, рассчитать варианты их локализации и последующего устранения [17, с. 5]. Указанный недостаток межотраслевых балансов значительно снижает их полезность для применения в прогнозировании, которое призвано не только учитывать сформировавшиеся диспропорции, но и не допускать появления новых. Безусловно, достижение абсолютной пропорциональности является невыполнимой задачей. Экономическое развитие неизбежно вызывает возникновение новых дисбалансов. Равновесное состояние (пропорциональность), к которому стремится экономическая система, постоянно находится под противоположно направленным воздействием как внешних, так и внутренних факторов.

Асинхронность процессов, составляющих в совокупности экономическую динамику, является важным свойством экономической системы, способствующим обращению прежних пропорций в диспропорции. По этой причине она также должна быть отражена в модельном воспроизведении экономической действительности.

3.4. СОВРЕМЕННЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Кроме исследования В.В. Леонтьева в 1930-е годы стали появляться другие работы по математико-статистическому анализу, а также созданию различных функций и кривых предложения и спроса отдельных товаров. Целью таких работ было нахождение непосредственной зависимости рынка отдельных товаров (предложения или спроса) от цены. Однако конкретная зависимость в хозяйственной практике обременена набором факультативных переменных. По этой причине в отличие от предыдущих, достаточно несложных работ подобного рода, экономисты теперь стремились в уравнении регрессии отразить больше соотношений, чтобы оно насколько возможно вернее продемонстрировало как прошлое, так и будущее движение изучаемого показателя.

В настоящее время эконометрическое моделирование является наиболее распространенным методом изучения циклических процессов, оно обладает гибкой методологией, обеспечивающей не только подготовку прогнозов, но и выполнение задач планирования социально-экономических процессов, выработки и реализации оптимальных вариантов хозяйственного развития, разработанных с помощью модели.

Можно выделить два принципиальных подхода к созданию эконометрических моделей макроэкономического уровня.

Основу первого из них составили идеи Л. Клейна и А. Голдбергера, реализованные в 1950-х годах на основе модели экономики США на период 1929–1952 гг. (модель Клейна-Голдбергера). Модель, представлявшая собой систему балансовых и регрессионных уравнений, являлась подчеркнуто агрегированной и была ориентирована на построение среднесрочных прогнозов ведущих экономических показателей (производственный выпуск, ВВП, капитальные вложения в основной капитал, рост цен потребительских товаров и пр.) [20]. Дальнейшее развитие данный подход получил в начале 1970-х годов – в период теоретического доминирования в эконометрическом моделировании кейнсианской доктрины, выделявшей агрегированный спрос в качестве основного движущего механизма хозяйственной динамики. Эконометрические построения состояли из 200–300 уравнений регрессионного типа; их коэффициенты рассчитывались на основе недлительных периодов относительно стабильного экономического развития. Последующие кризисные потрясения 1970-х – начала 1980-х годов стали серьезным испытанием не только для мирового хозяйства, но и для экономической теории. Именно тогда возникла известная «критика Лукаса», обращенная против «агрегированных» методов моделирования крупных экономических систем [125, с. 19–46]. Научная позиция Р. Лукаса заключалась в том, что практика моделирования сложных макроэкономических систем и построения крупноразмерных моделей из 200–500 балансовых и регрессионных уравнений разбивается о нестационарность экономического развития, обнаруживающуюся на длительных временных интервалах. Непредвиденные шоки и циклические потрясения влекут заметные структурные трансформации экономической системы, требующие переформатирования тяжелых математических построений и кардинального пересчета всех коэффициентов регрессионных зависимостей [1, с. 10].

Появление второго подхода в моделировании, обусловленное «критикой Лукаса», заключается в необходимости дезагрегирования сложных модельных построений и составления подробного теоретического описания каждого из вычлененных секторов большой экономической системы. Подобные модели незначительной размерности предполагают подробное изучение определяющих динамику ведущих хозяйственных показателей. Одним из наиболее удачных построений подобного рода стала квартальная модель голландской экономики FKSEC, созданная в 1991 г. для кратко- и среднесрочного прогнозирования хозяйственной активности [1, с. 11].

В 1980–1990-е годы оформилось третье направление, заключавшееся в моделировании не только неслучайных процессов, но и нестационарной макроэкономической динамики. Теоретическое обоснование данного направления было представлено Ч. Нельсоном и Ч. Плоссером, заявившими о необходимости изучения стохастических возмущений в динамике макроэкономических показателей [128, с. 139–162]. В 1990–2000-е годы были созданы первые подобные построения. Одной из наиболее успешных стала квартальная макроэкономическая модель французского национального хозяйства MESANGE, применяемая для подготовки прогнозов на кратко- и среднесрочный периоды, а также оценки эффективности мер экономической политики [127]. Для описания движения основных макроэкономических показателей авторы построения применили метод коинтеграционного анализа и дезагрегировали производственный сектор на ведущие структурные подгруппы [1, с. 11–12].

Серьезная работа по созданию крупных эконометрических систем проводилась в СССР, где плановая экономика создавала реальные условия достижения «народно-хозяйственного оптимума», то есть наиболее рационального распределения ресурсов. По мнению советских экономистов, «задача оптимизации функционирования народного хозяйства в масштабе всей страны возникает лишь в условиях социалистического способа производства, обеспечивающего принципиальную возможность ее теоретического и практического решения» [93, с. 3].

Первые центры экономико-математических исследований в СССР были открыты в 1958 г. в Новосибирске во главе с В.С. Немчиновым и Ленинграде во главе с Л.В. Канторовичем (после его переезда в 1960 г. в Новосибирск лабораторию возглавил В.В. Новожилов). В 1963 г. в Москве создан ЦЭМИ АН СССР (Центральный экономико-математический институт). На базе указанного учреждения, а также ГВЦ и НИЭИ Госплана СССР, ИЭиОПП СО АН СССР в 1960–1970-е гг. сформировалась самостоятельная школа экономического моделирования (локализованная в Москве, Ленинграде и Новосибирске) активно и достаточно успешно конкурировавшая с ортодоксальной политэкономией социализма [83, с. 9]. Разработка в СССР прикладных межотраслевых эконометрических моделей связана с именами отечественных экономистов: В.А. Волконского, Э.Ф. Баранова, Л.А. Конюса, Ф.Н. Клоцвога, В.В. Коссова, Б.Н. Михалевского, В.Л. Макарова, О.Д. Проценко, А.Д. Смирнова, Б.М. Смехова, Н.Ф. Шатилова, Л.В. Канторовича. Последний в 1975 г. получил (совместно с Т. Купмансом) Нобелевскую премию «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

При всей значимости эконометрических исследований их объединяет один недостаток – в них отсутствуют или недооценены качественные экспертные оценки. Современная экономическая наука все реже пытается объяснить особенности мирохозяйственной динамики в рамках прозрачных, логически и интуитивно выверенных моделей, предлагая взамен все более сложные способы его вероятностного моделирования. Многие риски рассчитываются на основе безупречно составленных математических построений, базирующихся на точных цифрах, на выверенных количественных параметрах.

Вместе с тем проведенная работа оказалась полезной в том плане, что вовлекла в изучение других экономических проблем современные методы математико-статистического содержания. Таким образом, проблема совершенствования систем экономического предвидения, моделирования вариантов развития хозяйственного комплекса остается открытой, и от ее решения во многом зависит достижение сбалансированности процессов будущего экономического развития, стабильности мировой хозяйственной системы.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём заключается содержание метода «экономическое моделирование»? Назовите причины использования моделей для исследования экономического объекта (процесса).

2. Назовите виды моделирования, применяемые в технических, естественных, социальных и других науках.

3. Какие этапы включает процесс моделирования (процесс создания модели в широком понимании)?

4. Какие субъективные факторы оказывают влияние на качество создаваемых моделей?

5. Дайте определение понятия «модель» (в широком понимании).

6. По каким параметрам может достигаться сходство модели с объектом-оригиналом?

7. Какие функции выполняют модели (классификация моделей по характеру выполняемых функций)?

8. Какие типы задачи решает исследователь при построении модели?

9. Какие этапы включает процесс создания модели реального объекта (в узком понимании)?

10. Раскройте содержание понятий «описательное моделирование» и «нормативное моделирование». В чем заключается основное различие между указанными видами моделирования? Приведите схему построения описательной модели и схему построения нормативной модели.

11. Какие цели достигаются при описательном моделировании? Что является целью нормативного моделирования?

12. Классифицируйте модели: а) по форме представления; б) по типу исследуемых процессов; в) по признаку развития процессов во времени; г) по подаче информации в модели. Приведите примеры.

13. Раскройте содержание понятий: «структурные», «факторные», «комбинированные» модели; «детерминированные», «стохастические» модели; «статические», «динамические» модели; «дискретные», «непрерывные», «дискретно-непрерывные» модели.

14. На какие виды подразделяется математическое моделирование? Раскройте содержание каждого из видов указанного моделирования.

15. Какие основные группы эконометрических построений используются для анализа и прогнозирования? Раскройте содержание каждой из них.

16. Расскажите о концептуальных моделях измерений на основе байесовского регуляризирующего подхода. Какие преимущества при

создании моделей даёт использование данного подхода по сравнению с «традиционными» математическими методами?

17. К какому периоду относятся первые попытки сравнительного анализа статистических данных, характеризующих показатели экономической активности?

18. Раскройте содержание понятия «экономическая семиология».

19. Объясните суть барометрического метода в экономическом анализе и прогнозе. Назовите имена экономистов-статистиков, впервые построивших экономические барометры.

20. На чём основана идея построения экономического барометра?

21. Раскройте содержание основных этапов обработки информации в рамках барометрического метода.

22. К какому периоду относится активное распространение экономических барометров и для каких целей они применялись?

23. Раскройте содержание и назовите принципиальное различие между экономическим барометром Статистической организации Р. Бэбсона и построением Экономического бюро Брукмайра.

24. Опишите принцип работы экономического барометра Комитета экономических исследований Гарвардского университета («Гарвардский барометр»). Приведите примеры использования принципов работы Гарвардского барометра для построение других аналитико-прогностических моделей в США и за рубежом.

25. Расскажите о работе по созданию «Единого экономического показателя динамики народного хозяйства СССР».

26. Какой принцип заложен в основу действия динамических моделей межотраслевого баланса?

27. Когда, где и кем был осуществлен первый опыт создания модели национального хозяйства на основе применение балансового метода?

28. Когда, где и кем была разработана методология составления межотраслевого баланса и на практике произведен его расчет?

29. Опишите принцип действия «открытой» динамической модели и «замкнутой» динамической модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева.

30. В чём заключается содержательный недостаток моделей балансового метода (как статических, так и динамических)?

31. Опишите два принципиальных подхода к созданию эконометрических моделей макроэкономического уровня.

32. Расскажите об экономико-математических исследованиях в СССР в рамках работ по достижению «народно-хозяйственного оптимума».

Литература для самостоятельной работы

1. *Айвазян С.А., Бродский Б.Е.* Макроэконометрическое моделирование: подходы, проблемы, пример эконометрической модели российской экономики / Препринт # WP/2005/192. – М.: ЦЭМИ РАН, 2005.

2. *Анчишкин А.И., Ершов Э.Б.* Принципы народнохозяйственного прогнозирования. – М., 1966. – С. 4–5. [Тез. докл. на науч. сессии «Методологические проблемы долгосрочного экономического прогнозирования»].

3. *Багриновский К.А., Левицкий Е.М., Меньшиков С.М.* Межотраслевые динамические модели экономики США // Проблемы построения и использования народно-хозяйственных моделей / под ред. С.М. Меньшикова. – Новосибирск, 1971.

4. *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ / пер. с англ. С.А. Николаенко; под ред. и с предисл. Р.М. Энтова. – М.: Финансы и статистика, 1981.

5. *Громова Н.М., Громова Н.И.* Основы экономического прогнозирования. Издательство «Академия естествознания». 2006. – URL: http://www.rae.ru/monographs (дата обращения: 15.10.2011).

6. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы / пер. с англ. и предисл. А.А. Рывкина. – М.: Статистика, 1980.

7. *Левицкий Е.М., Меньшиков С.М., Чижов Ю.А.* Моделирование американской экономики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975. – 245 с.

8. *Леонтьев В.В. и др.* Исследования структуры американской экономики. – М.: Госстатиздат, 1958.

9. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. – М.: Дело, 2000.

10. *Тинберген Я., Бос Х.* Математические модели экономического роста. – М., «Прогресс», 1967.

ЧАСТЬ II

СИТУАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО СИСТЕМНОМУ АНАЛИЗУ

ВВЕДЕНИЕ

Любые методы системного анализа, так же как и методы исследования операций и теории управления, опираются на математическое описание тех или иных фактов, явлений, процессов, т.е. на математическое моделирование. Употребляя слово «модель» будем иметь в виду некоторое описание, отражающее именно те особенности изучаемого процесса, которые интересуют исследователя. Точность, качество такого описания определяются, прежде всего, соответствием модели тем требованиям, которые предъявляются исследованию, соответствием получаемых с помощью модели результатов изучаемому процессу.

Построение математических моделей – это важный этап исследования и проектирования любой системы. От качества модели зависит судьба всего последующего анализа. Модель должна достаточно правильно отражать явления и быть удобной для использования.

Для комплексного анализа и прогнозирования перспектив развития народного хозяйства страны используются экономико-математические модели, которые различаются целями и принципами построения, способами функционирования и степенью агрегации показателей.

Модель есть некоторое отображение системы, построенное так, чтобы с его помощью можно было исследовать поведение системы и таким образом получать представление о том, как будет действовать в аналогичных ситуациях реальная система.

Любая модель может лишь приближенно отобразить свойства оригинала, но если наиболее важные черты отображены достаточно точно, то она будет неоценимым средством для изучения и усовершенствования системы, для управления изучаемыми процессами.

В более узком смысле эконометрическими моделями считаются системы уравнений, которые учитывают вероятностный характер изучаемых процессов. Уравнения эконометрической модели содержат также и случайные переменные, а ее параметры устанавливаются статистически на основе временных рядов или других выборочных данных.

Математическое моделирование является инструментом, который позволяет перейти от качественного анализа к анализу, который использует количественные статистические значения исследуемых величин. Без математических моделей нельзя построить надежный прогноз, как в инженерных, так и экономических научных исследованиях. Поэтому умение строить и анализировать модели реальных явлений и процессов необходимо специалистам различных областей.

Глава 4
ПОСТРОЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Во многих областях человеческой деятельности приходится сталкиваться с необходимостью установления закона поведения той или иной характеристики изучаемого процесса: потока требований на обслуживание, продолжительности обслуживания, ошибки измерения и т.д. Решение этой задачи предполагает анализ уже известных видов функций распределения и выбор наиболее подходящих. На основе данных эксперимента или наблюдений формируют дискретный или непрерывный вариационный ряд и определяют различные числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и др. Эти величины позволяют сделать первое предположение о гипотетическом законе распределения. Известно, что многие теоретические законы обладают определенными характерными особенностями, которые можно использовать при выборе типа закона. Например, важной особенностью закона распределения Пуассона является доказанное теоретически совпадение математического ожидания и дисперсии. Для экспоненциального закона характерно равенство математического ожидания и среднего квадратического отклонения. В случае нормального закона распределения все опытные значения должны отличаться от математического ожидания не более, чем на три средних квадратических отклонения. Если указанные теоретические особенности законов проявляются в практическом материале, то есть достаточно оснований для предварительного выбора и последующей проверки конкретного закона.

В общем случае выбор соответствующего закона распределения для случайных величин является довольно сложной проблемой. Если ориентироваться только на экспериментальные данные, то иногда можно подобрать несколько законов, каждый из которых будет более или менее точно отображать реальные данные. Форму, тип закона целесообразно определять исходя из смысла изучаемого явления и всестороннего анализа данных. Наибольшее распространение в природе, в инженерных исследованиях имеют случайные величины, распределенные по нормальному, показательному и биномиальному законам. Встречаются и стохастические величины, подчиняющиеся законам распределения Пуассона, Максвелла, Фишера, а также случайные характеристики, имеющие χ^2 - или γ - распределения.

Сделав выбор вида закона распределения случайной величины, необходимо его конкретизировать для имеющихся значений – для этих целей часто используется математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. После формирования интегральной функции распределения и плотности вероятности (последняя – для непрерывных случайных величин) необходимо проверить правильность сделанного выбора закона – другими словами, следует оценить согласование построенного закона распределения и фактического вариационного ряда. Для решения этого вопроса применяют различные критерии согласия. Таким образом, подытоживая все выше сказанное, отметим, что процесс построения закона распределения независимо от его вида состоит из двух этапов:

- распределение числовых характеристик случайной величины и формирование функций распределения гипотетического закона распределения;
- сверка согласования выбранного закона распределения с эмпирическими данными на основе статистических критериев.

Необходимо отметить, что анализ правильности выбора закона может привести к разным выводам. В одних случаях гипотеза о выбранном законе не отвергается и тогда построенный закон может быть использован для оценки и прогнозирования явления или процесса. Возможен и другой вариант: гипотеза о выбранном законе отвергается, в этом случае следует вернуться к эмпирическим данным для нового анализа и выбора иного вида закона распределения. Проверка гипотезы о конкретном законе осуществляется путем сравнения фактических и вычисленных теоретических частот. Отклонения фактических частот от теоретических можно охарактеризовать следующим образом:

- схождения между ними можно считать случайными, они не противоречат друг другу, и предположение о законе распределения признается верным;

- различие фактических и теоретических частот нельзя объяснить случайностью, и предположение о законе распределения признается ошибочным, необходимо попытаться подобрать другой закон.

4.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

В результате наблюдений получено эмпирическое распределение величины X с частотами $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$. В результате выбора закона определены теоретические частоты $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (k – число значений или частичных интервалов).

А. ***Критерий согласия Пирсона*** $\left(\chi^2\right)$**.**

За меру расхождения частот принимают величину:

$$\chi_p^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \tag{4.2.1}$$

По уровню значимости α= 0,05 (0,1; 0,01) и числу степеней свободы $q = k - 2$ в таблице Пирсона (приложение А) находят χ_{kp}^2. Если $\chi^2 < \chi_{kp}^2$, то гипотеза о законе не отвергается, он может быть использован. Если $\chi^2 \geq \chi_{kp}^2$, то гипотеза о рассматриваемом законе распределения отвергается.

Б. ***Критерий согласия Колмогорова.***

По вариационному ряду составляют эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$. Выбрав закон, формируют теоретическую функцию $F(x)$, определяют максимальное отличие $F^*(x)$ и получают характеристику Колмогорова:

$$\lambda = \max\left|F^*(x) - F(x)\right| / \sqrt{n}\,. \tag{4.2.2}$$

Пользуясь специальными таблицами (приложение Б), находят вероятность $P(\lambda)$. Если эта вероятность меньше 0,01, то гипотезу о выбранном законе распределения отвергают. Если вероятность больше (или равна) 0,01, то расхождения между эмпирической и теоретической функциями признают несущественными, а гипотезу о выбранном законе распределения вполне согласованной с экспериментом.

Замечание. Если $\lambda \leq$ 0,29, то вероятность равна единице.

В. ***Критерий согласия Ястремского.***

Известный статистик Б.С. Ястремский доказал, что меру близости теоретического и фактического распределений можно характеризовать величиной:

$$A = \frac{|Q-k|}{\sqrt{|2k+4Z|}}, \qquad (4.2.3)$$

где $Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i q_i}$, $q_i = 1 - p_i$, p_i – теоретическая вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i; k – число групп; $Z = 0{,}6$ при $k < 20$.

Если $A \leq 3$, то расхождение между теоретическим и фактическим распределениями несущественно.

Если $A > 3$, то это расхождение существенно и его невозможно объяснить влиянием случайных факторов, поэтому теоретический закон распределения следует отклонить.

Г. ***Критерий согласия Романовского.***

Этот критерий используется для оценки степени приближения эмпирического распределения к теоретическому. Он тесным образом связан с критерием согласия Пирсона и состоит в том, что вычисляют величину:

$$R = \frac{\chi^2 - q}{\sqrt{2q}}, \qquad (4.2.4)$$

где $\chi_p^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$, q – число степеней свободы, $q = k - 2$.

Если $R<3$, то это означает, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о законе распределения. В противном случае гипотеза отвергается.

Критерий В.И. Романовского является хорошим дополнением к критерию Пирсона.

4.3. ПОСТРОЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Этот закон используется во многих процессах и, в частности, в описании потока клиентов (заявок, требований) в системах массового обслуживания. Он описывает дискретные случайные величины, т.е. величины, которые могут принимать отдельные изолированные значения из некоторого интервала.

Предположим, что в результате наблюдений за случайной величиной получен дискретный вариационный ряд:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

где x_i – значения случайной величины, n_i – частота соответствующих x_i, $n=\sum_{i=1}^{k} n_i \ (i=1, 2,..., k)$.

Если предположить, что случайная величина подчиняется закону распределения Пуассона, то вероятности каждого значения должны определяться по формуле:

$$P_i \approx \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}, \qquad (4.3.1)$$

где λ – параметр закона, совпадающий с математическим ожиданием:

$$\lambda = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i .$$

Другими словами, чтобы сформировать закон, необходимо вычислить по опытным значениям математическое ожидание и подставить в формулу (4.3.1).

Определяя для каждого значения x_i вероятность P_i, находят соответствующие теоретические частоты:

$$m_i = n \cdot P_i .$$

Пример 4.1. Было проведено 200 наблюдений (каждое длилось 2 мин.), в результате отмечалось следующее распределение покупателей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	41	62	45	22	16	8	4	2

Проверим, можно ли описать этот поток с помощью закона распределения Пуассона (является ли он простейшим)?

Решение. Определим среднее число заявок (клиентов):

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 41 + 1 \cdot 62 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 22 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 2}{200} = 1{,}8 .$$

Сформируем функцию вероятностей распределения Пуассона по формуле (4.3.1):

$$P_i = \frac{(1{,}8)^{x_i} \cdot e^{-1{,}8}}{x_i!} .$$

А. Проверим по критерию Пирсона, подходит ли этот закон. Для этого каждому значению x_i поставим в соответствие вероятность P_i, определим m_i и рассчитаем $\chi^2_{\text{р}}$:

$$P_0 = \frac{(1{,}8)^0 \cdot e^{-1{,}8}}{0!}, \; P_1 = \frac{(1{,}8)^1 \cdot e^{-1{,}8}}{1!}, \; P_2 = \frac{(1{,}8)^2 \cdot e^{-1{,}8}}{2!} \text{ и т.д.}$$

Все расчеты проведем в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Пирсона

x_i	n_i	P_i	m_i	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
0	41	0,1653	33	64	1,939
1	62	0,2975	60	4	0,067
2	45	0,2678	54	81	1,500
3	22	0,1607	32	100	3,125
4	16	0,0723	14	4	0,286
5	8	0,0260	5	9	1,800
6	4	0,0078	2	4	2,000
7	2	0,0026	0	4	2,000
$\sum$	200	1,0000	-	-	12,72

Замечание. Последнее значение m_i равно нулю. Так как мы избегаем деления на ноль, то в этом случае разделим на n_i.

Имеем $\chi_p^2 = 12{,}72$, $\alpha = 0{,}05$, $q = 8 - 2 = 6$. По таблицам Пирсона (приложение А) находим $\chi_{kp}^2 = 12{,}6$. В результате $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$.

Вывод: расчетное и критическое значения достаточно близки, т.к. расчетное значение χ_p^2 все же больше критического, то возможность применения закона сомнительна.

Б. Проверим по критерию Колмогорова. Предварительно найдем фактические (p_i^*) и теоретические вероятности (p_i), затем сформируем эмпирическую (F^*) и теоретическую (F) функции распределения (таблица 4.2) и найдем их разности.

Таблица 4.2

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Колмогорова

x_i	p_i^*	F_i^*	p_i	F_i	$\lvert F_i^* - F_i \rvert$
0	0,205	0	0,165	0	0
1	0,31	0,205	0,298	0,165	0,04
2	0,225	0,515	0,268	0,463	0,052
3	0,11	0,74	0,161	0,731	0,009
4	0,08	0,85	0,072	0,892	0,042
5	0,04	0,93	0,026	0,964	0,034
6	0,02	0,97	0,007	0,99	0,02

Окончание Таблицы 4.2

7	0,01	0,99	0,003	0,997	0,007
	-	1	-	1	-

По формуле (4.2.2) рассчитаем характеристику Колмогорова:

$$\lambda = \frac{0{,}052}{\sqrt{200}} = 0{,}004 .$$

Вывод: вероятность $P(\lambda)$=1, по данному критерию использование закона вполне допустимо.

В. Оценим закон распределения Пуассона по критерию Ястремского. Для нахождения величины Q построим вспомогательную расчетную таблицу 4.3.

Таблица 4.3

Вспомогательная расчетная таблица

n_i	m_i	p_i	q_i	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i q_i}$
41	33	0,165	0,835	2,323
62	60	0,298	0,702	0,095
45	54	0,268	0,732	2,049
22	32	0,161	0,839	3,725
16	14	0,072	0,928	0,308
8	5	0,026	0,974	1,848
4	2	0,007	0,993	2,014
2	0	0,003	0,997	2,006
			Σ	14,368

Таким образом, Q = 14,368. Поскольку k = 8, Z = 0,6, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$A = \left| \frac{14{,}368 - 8}{\sqrt{16 + 2{,}4}} \right| = 1{,}484 .$$

Вывод: поскольку A< 3, то по этому критерию гипотеза о законе принимается.

Г. Проверим пригодность закона распределения Пуассона по критерию согласия Романовского.

Поскольку χ_p^2 = 12,72, q= 8 – 2 = 6, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$R = \frac{12{,}72 - 6}{\sqrt{12}} = 1{,}94 .$$

Вывод: величина R меньше 3 – значит, в соответствии с этим критерием гипотеза о законе распределения Пуассона не отвергается.

Замечание. В данном примере оказалось, что по трем критериям согласия из четырех закон распределения Пуассона не отвергается. Следовательно, общий вывод состоит в возможности применения закона распределения Пуассона к данному ряду.

4.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО ЗАКОНА

Для описания времени обслуживания часто используется показательный закон. Его характерной особенностью служит равенство среднего значения и среднего квадратического отклонения.

Предположим, что в результате наблюдений за длительностью обслуживания получен непрерывный вариационный ряд:

x_i	$(x_0, x_1]$	$(x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$	…	$(x_{k-1}, x_k]$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

Здесь указаны интервалы времени и количество заявок, обслуживаемых за соответствующее время. Величина $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – количество клиентов.

Считая, что длительность обслуживания подсчитывается по показательному закону, составим функцию вероятностей для времени обслуживания:

1) на основе плотности вероятности:

$$P_i = \mu \cdot e^{-\mu x_i}, \qquad (4.4.1)$$

где μ – интенсивность обслуживания, $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$.

2) на основе функции распределения:

$$F_i = 1 - e^{-\mu x_i}, \qquad (4.4.2)$$

$$P_i = e^{-\mu \alpha_i} - e^{-\mu \beta_i}, \qquad (4.4.3)$$

где α – начало интервала, β – конец интервала.

Теоретические частоты находят таким образом:

1) $m_i = n \cdot \Delta \cdot P_i$ – в случае нахождения плотности вероятности (Δ – длина интервала).

2) $m_i = n \cdot P_i$ – в случае нахождения функции распределения.

Далее по известным критериям согласия проводят проверку.

Пример 4.2. В автомагазине проведено наблюдение за временем обслуживания 60 покупателей. Получено следующее распределение (в мин.): 2, 6, 4, 11, 3, 18, 5, 21, 3, 26, 2, 35, 4, 8, 3, 14, 5, 19, 1, 24, 5, 9, 3, 15, 3, 20, 4, 8, 3, 13, 4, 9, 1, 12, 3, 14, 2, 8, 4, 13, 7, 4, 8, 3, 9, 2, 10, 4, 4, 8, 3, 9, 4, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 7. Составить ряд, разбив значения на 7 интервалов, и проверить возможность использования показательного закона.

Решение. Сгруппируем все значения.

(α_i, β_i)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
n_i	30	16	7	3	2	1	1

Определим среднее время обслуживания:

$$\bar{x} = \frac{2{,}5 \cdot 30 + 7{,}5 \cdot 16 + 12{,}5 \cdot 7 + 17{,}5 \cdot 3 + 22{,}5 \cdot 2 + 27{,}5 \cdot 1 + 32{,}5 \cdot 1}{60} = 7{,}3$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{7{,}3} = 0{,}137; \ \Delta = 5.$$

Составим плотность вероятности по формуле (4.4.1):

$$P_i = \frac{0{,}137}{e^{0{,}137 x_i}} = 0{,}137\, e^{-0{,}137 x_i}.$$

Составим функцию распределения по формуле (4.4.3):

$$P_i = e^{-0{,}137\alpha_i} - e^{-0{,}137\beta_i}.$$

А. Используем критерий Пирсона.

Таблица 4.4

Проверка расчетов по плотности вероятности

x_i	n_i	P_i	$m_i = nP_i\Delta$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
2,5	30	0,0973	29	1	0,0345
7,5	16	0,049	15	1	0,0667
12,5	7	0,0248	7	0	0
17,5	3	0,0125	4	1	0,25
22,5	2	0,0063	2	0	0
27,5	1	0,0032	1	0	0
32,5	1	0,0016	1	0	0
$\sum$	60	0,1949			0,3512

Имеем $\chi_p^2 = 0{,}3512$, $\alpha = 0{,}05$, $q = 7 - 2 = 5$. По таблицам Пирсона (приложение А) находим $\chi_{kp}^2 = 11{,}1$.

В результате $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$.

Вывод: гипотеза о показательном законе не отвергается.

Расчеты по показательному закону можно вести также на основе функции распределения по формуле (4.43).

Таблица 4.5

Проверка расчетов по функции распределения

(α_i, β_i)	n_i	$e^{-\mu\alpha_i}$	$e^{-\mu\beta_i}$	P_i	$m_i = nP_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
0–5	30	1	0,5041	0,4959	30	0	0
5–10	16	0,5041	0,2541	0,2500	15	1	0,067
10–15	7	0,2541	0,1281	0,1260	8	1	0,125
15–20	3	0,1281	0,0646	0,0635	4	1	0,250
20–25	2	0,0646	0,0325	0,0321	2	0	0
25–30	1	0,0325	0,0164	0,0161	1	0	0
30–35	1	0,0164	0,0083	0,0081	0	1	1
Σ	60	-	-	0,991	60	-	1,442

Имеем $\chi_p^2 = 1,442$, $\alpha = 0,05$, $q = 7 - 2 = 5$. По таблицам Пирсона (приложение А) находим $\chi_{kp}^2 = 11,1$. В результате $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$.

Вывод: гипотеза о показательном законе не отвергается.

Б. Используем критерий Колмогорова.

Таблица 4.6

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Колмогорова

x_i	p_i^*	F_i^*	p_i	F_i	$\lvert F_i^* - F_i \rvert$
2,5	0,50	0	0,097269	0	0
7,5	0,27	0,50	0,049032	0,097269	0,402731
12,5	0,12	0,77	0,024717	0,146301	0,620365
17,5	0,05	0,88	0,012459	0,171018	0,712315
22,5	0,03	0,93	0,006281	0,183478	0,749856
27,5	0,02	0,97	0,003166	0,189758	0,776908
32,5	0,02	0,98	0,001596	0,192924	0,790409
	-	1,00	-	-	-

По формуле (4.2.2) рассчитаем характеристику Колмогорова ($\max \lvert F_i^* - F_i \rvert = 0,79049$):

$$\lambda = \frac{0,7904}{\sqrt{60}} = 0,102 .$$

Вывод: вероятность $P(\lambda)$=1, по данному критерию использование закона вполне допустимо.

В. Используем критерий Ястремского.

Таблица 4.7

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Ястремского

n_i	m_i	p_i	q_i	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i q_i}$
30	29	0,0973	0,9027	0,0382
16	15	0,049	0,951	0,070102
7	7	0,0248	0,9752	0
3	4	0,0125	0,9875	0,253165
2	2	0,0063	0,9937	0
1	1	0,0032	0,9968	0
1	1	0,0016	0,9984	0
			Σ	0,361466

Таким образом, Q = 0,3614. Поскольку k = 7, Z = 0,6, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$A = \left| \frac{0{,}3614 - 7}{\sqrt{14 + 2{,}4}} \right| = 1{,}63 .$$

Вывод: поскольку A< 3, то по этому критерию гипотеза о законе принимается.

Г. Используем критерий Романовского.

Поскольку χ_p^2 = 1,442, q= 7 – 2 = 5, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$R = \frac{1{,}442 - 5}{\sqrt{10}} = -1{,}125 .$$

Вывод: величина R меньше 3 – значит, в соответствии с этим критерием гипотеза о законе распределения Пуассона не отвергается.

4.5. ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

Для формирования нормального закона имеется две функции:

1. Плотность вероятности:

$$P_i(x_i) \approx \frac{1}{\sigma} f(t_i),$$

где $t_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$, $f(t)$ – функция четная, значения функции $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ – находят по таблицам (приложение В);

$\sigma(x)$ – среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$,

где $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, $\bar{x}^2 = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n}$.

$$P_i = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right), \tag{4.5.1}$$

где $m_i = nP_i\Delta$, Δ – длина интервала.

2. Функция вероятностей:

$$P_i = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция нечетная, значения функции $\Phi(t)$ находят по таблицам (приложение Г)

$t_1 = \dfrac{\alpha - \bar{x}}{\sigma}$, $t_2 = \dfrac{\beta - \bar{x}}{\sigma}$, α – начало интервала, β – конец интервала.

$$P_i = \Phi\left(\frac{\beta_i - \bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{x}}{\sigma}\right), \tag{4.5.2}$$

$$m_i = nP_i.$$

Пример 4.3. В результате измерения диаметров у 150 деталей получен ряд отклонений от номинального размера. Проверить гипотезу о том, что данные отклонения подчиняются нормальному закону.

Отклонение от номинала x_i	Частота n_i	x_i
24,5–27,5	1	26
27,5–30,5	4	29
30,5–33,5	13	32
33,5–36,5	23	35
36,5–39,5	22	38
39,5–42,5	29	41
42,5–45,5	29	44
45,5–48,5	16	47
48,5–51,5	11	50
51,5–54,5	2	53
	150	

Решение. Для нахождения среднего квадратического отклонения составим вспомогательную расчетную таблицу.

Таблица 4.8

Вспомогательная расчетная таблица

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
26	3	78	676	2028
29	6	174	841	5046
32	13	416	1024	13312
35	23	805	1225	28175
38	28	1064	1444	40432
41	32	1312	1681	53792
44	29	1276	1936	56144
47	14	658	2209	30926
50	2	100	2500	5000
Σ	150	5883	-	234855

Имеем $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i n_i}{n} = \dfrac{5883}{150} = 39{,}22$, $\bar{x^2} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \dfrac{234855}{150} = 1565{,}7$.

Тогда $\sigma(x) = \sqrt{\bar{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{1565{,}7 - (49{,}22)^2} = 5{,}24$.

Сформируем функции:

1) По формуле (4.5.1) – $P_i = \frac{1}{5{,}62} f\left(\frac{x_i - 39{,}22}{5{,}24}\right)$.

2) По формуле (4.5.2) – $P_i = \Phi\left(\frac{\beta_i - 39{,}22}{5{,}24}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - 39{,}22}{5{,}24}\right)$.

А. Используем критерий Пирсона.

Таблица 4.9

Расчеты по плотности вероятности

x_i	n_i	$\frac{x_i - 39{,}22}{5{,}24}$	P_i	$m_i = nP_i$	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
26	3	-2,52	0,003179	1	2	0,50
29	6	-1,95	0,011365	5	1	0,20
32	13	-1,38	0,029362	13	0	0,00
35	23	-0,81	0,054808	25	3	0,12
38	28	-0,23	0,074101	33	29	0,88
41	32	0,34	0,071814	32	0	0,00
44	29	0,91	0,050291	23	41	1,78
47	14	1,48	0,026594	12	4	0,33
50	2	2,06	0,009116	4	4	1,00
Σ	150	-	-	149	-	4,81

Имеем $\chi_p^2 = 4{,}81$, $\alpha = 0{,}05$, $q = k - 2 = 10 - 2 = 8$.

По таблицам Пирсона (приложение А) находим $\chi_{kp}^2 = 15{,}5$.

В результате $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$.

Вывод: гипотеза о нормальном законе не отвергается.

Таблица 4.10

Расчет по функции вероятности

(α_i, β_i)	$\frac{\alpha_i - 39{,}22}{5{,}24}$	$\frac{\beta_i - 39{,}22}{5{,}24}$	Φ_1	Φ_2	P_i	m_i	$(n_i - m_i)^2$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
24,5–27,5	-2,81	-2,24	-0,4976	-0,4875	0,0101	2	2	1
27,5–30,5	-2,24	-1,66	-0,4875	-0,4515	0,036	5	0	0
30,5–33,5	-1,66	-1,09	-0,4515	-0,3621	0,0894	13	0	0
33,5–36,5	-1,09	-0,52	-0,3621	-0,1985	0,1636	25	2	0,08

Окончание Таблицы 4.10

36,5–39,5	-0,52	0,05	-0,1985	0,0199	0,2184	33	23	0,696
39,5–42,5	0,05	0,63	0,0199	0,2357	0,2158	32	0	0
42,5–45,5	0,63	1,20	0,2357	0,3849	0,1492	22	44	2
45,5–48,5	1,20	1,77	0,3849	0,4616	0,0767	12	6	0,5
48,5–51,5	1,77	2,34	0,4616	0,4909	0,0293	4	6	1,5
Σ	-	-	-	-	-	148	-	5,776

Имеем $\chi_p^2 = 3{,}75$, $\alpha = 0{,}05$, $q = k - 2 = 10 - 2 = 8$.

По таблицам Пирсона (приложение А) находим $\chi_{kp}^2 = 15{,}5$.

В результате $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$.

Вывод: гипотеза о нормальном законе не отвергается.

Б. Используем критерий Колмогорова.

Таблица 4.11

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Колмогорова

x_i	p_i^*	F_i^*	p_i	F_i	$\left\|F_i^* - F_i\right\|$
26	0,02	0	0,003179	0	0
29	0,04	0,02	0,011365	0,003179	0,016821
32	0,09	0,06	0,029362	0,014544	0,045456
35	0,15	0,15	0,054808	0,043906	0,102761
38	0,19	0,30	0,074101	0,098714	0,201286
41	0,21	0,49	0,071814	0,172815	0,313852
44	0,19	0,70	0,050291	0,244629	0,455371
47	0,09	0,89	0,026594	0,29492	0,598413
50	0,01	0,99	0,009116	0,321514	0,665153

По формуле (4.2.2) рассчитаем характеристику Колмогорова:

$$\lambda = \frac{0{,}665}{\sqrt{150}} = 0{,}054 .$$

Вывод: вероятность $P(\lambda)$=1, по данному критерию использование закона вполне допустимо.

В. Используем критерий Ястремского.

Таблица 4.12

Проверка закона распределения Пуассона по критерию Ястремского

n_i	m_i	p_i	q_i	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i q_i}$
3	1	0,003179	0,996821	4,012757
6	5	0,011365	0,988635	0,202299
13	13	0,029362	0,970638	0
23	25	0,054808	0,945192	0,169278
28	33	0,074101	0,925899	0,818206
32	32	0,071814	0,928186	0
29	23	0,050291	0,949709	1,648102
14	12	0,026594	0,973406	0,34244
2	4	0,009116	0,990884	1,0092
			Σ	8,202281

Таким образом, Q = 8,2022. Поскольку k = 9, Z = 0,6, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$A = \left| \frac{8{,}2022 - 9}{\sqrt{18 + 2{,}4}} \right| = 0{,}17 .$$

Вывод: поскольку A< 3, то по этому критерию гипотеза о законе принимается.

Г. Используем критерий Романовского.

Поскольку χ_p^2 = 5,776, q= 9 – 2 = 7, то по формуле (4.2.3) имеем:

$$R = \frac{5{,}776 - 7}{\sqrt{14}} = -0{,}326 .$$

Вывод: величина R меньше 3 – значит, в соответствии с этим критерием гипотеза о законе распределения Пуассона не отвергается.

ГЛАВА 5
МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

Математическое программирование – самостоятельное направление математики, рассматривающее методы решения задач оптимизации. Каждая задача оптимизации содержит три важнейших элемента:

- набор переменных, удовлетворяющих определенным требованиям (неотрицательность, целочисленность и др.):
- систему ограничивающих условий, отражающих технологические и экономические особенности процессов;
- целевую установку, экстремальное значение которой необходимо найти.

Методы решения оптимизационных задач зависят от свойств переменных, вида функции многих переменных (целевой функции), вида ограничений.

Для экономической системы целевая функция – это функция эффективности ее функционирования и развития или также функция затрат.

Перед математическим программированием стоят следующие проблемы:

- моделирование экономических задач;
- поиск методов оптимального решения (плана) на основе построенной математической модели;
- анализ полученного оптимального решения при изменении внешних условий.

5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Условно задачи математического программирования, которые заключаются в исследовании функции на экстремум, на переменные которой наложены определенные ограничения, можно классифицировать следующим образом:

- задачи детерминированного и стохастического программирования (в зависимости от присутствия вероятностных переменных);

- задачи динамического и статического программирования (в зависимости от учета фактора времени);

- задачи линейного и нелинейного программирования (в зависимости от вида целевой функции и ограничений).

Задачи, в которых переменные, а также параметры ограничений и целевой функции не являются случайными величинами, называются *детерминированными*. Например, если в экономико-математической модели величины заданы своими математическими ожиданиями, то такая задача относится к детерминированным. Задачи, в которых критерий оптимальности и ограничения содержат случайную составляющую, т.е. включают неопределенность, называются *стохастическими*.

Задачи, в которых нахождение оптимального решения можно рассматривать как мгновенный акт, называются *статическими*. Задачи, в которых нахождение оптимального решения экономико-математической модели можно рассматривать не как застывшую задачу, а в динамике, находя решение на несколько периодов времени, называются *динамическими*. В динамическом программировании рассматриваются методы, позволяющие путем многошаговой оптимизации получить общий оптимум. Например, если субъект в ходе принятия решения изменяет свое информационное состояние, получая или теряя информацию, то в этом случае решение целесообразно принимать поэтапно (многошаговое решение). Например, если рассматривается план развития предприятия до 2010 года, должны быть обоснованы значения соответствующих микроэкономических показателей не только на 2010 год, а и на все промежуточные годы, т.е. учтена динамика развития хозяйственной деятельности данного предприятия.

Задачи, в которых критерий оптимальности (целевая функция) и система ограничений являются линейными, а переменные принимают любые неотрицательные значения, называются *задачами линейного программирования (ЗЛП)*. В противном случае возникает *задача нелинейного программирования*. Важным преимуществом задач линейного программирования является то, что для их решения разработан универсальный метод – симплекс-метод. Для некоторых классов ЗЛП разработаны более эффективные методы решения. Например, распределительные задачи можно решить симплекс-методом, однако более эффективным для их решения является метод потенциалов.

Линейные модели зачастую являются неадекватными природе моделируемого объекта или процесса, поэтому приходится строить нелинейные модели. Решать нелинейные задачи более сложно, чем линейные, поскольку нет универсальных методов решения таких задач. Для некоторых видов нелинейных задач разработаны численные специальные эффективные методы решения, такие как метод наискорейшего спуска, метод дробления шага. Однако на практике чаще используют линейные экономико-математические модели. Часто нелинейные зависимости аппроксимируют линейными. Модели линейного программирования находят широкое применение при решении плановых задач в различных сферах хозяйственной деятельности.

Задачи, в которых критерий оптимальности является суммой функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, называются *задачами сепарабельного программирования.*

Задачи, в которых на переменные наложено условие целочисленности, называются *задачами целочисленного программирования*. Многие экономические задачи характеризуются тем, что объемы управляемых ресурсов могут принимать только целые значения, такие как автомобили, бытовая техника и другие объекты. Особую группу составляют *задачи дискретного программирования*, в которых переменные могут принимать отдельные значения, например 0 или 1.

Задачи, в которых критерий оптимальности является выпуклой функцией, называются *задачами выпуклого программирования*. Для таких задач существует ряд эффективных и обоснованных методов их решения. ЗЛП являются частным случаем задач выпуклого программирования.

Задачи, в которых критерий оптимальности является квадратичной функцией и система ограничений линейная, называются *задачами квадратичного программирования*.

Рассматривают также отдельные классы *задачи дробно-линейного программирования*, когда система ограничений являются линейной, а целевая функция – дробно-линейная; *задачи параметрического программирования*, когда система ограничений является линейной, а целевая функция содержит параметр.

Особый класс представляют *задачи теории игр*, которые широко применяются в рыночной экономике. Среди них наиболее изучены матричные парные игры.

Следует заметить, что многие классы параметрических задач стремятся преобразовать так, чтобы была возможность использовать для решения методы линейного программирования.

5.2. ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Процесс построения математической модели начинается с ответов на следующие вопросы:

1) для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать переменные задачи?

2) какие ограничения должны связывать переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3) в чем состоит цель задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать этой цели?

Рассмотрим некоторые общие модели и задачи.

5.2.1. Задача производственного планирования

Некоторый экономический объект (предприятие, цех, фирма) может производить n видов определенной продукции. В процессе производства используется m видов ресурсов (сырья). Применяемые технологии характеризуются нормами затрат сырья на единицу производимого продукта – a_{ij} – норма расхода сырья i-го вида на производство единицы продукции j-го вида. Известны ограничения на ресурсы, которые расходуются в процессе производства – b_i – запас сырья i-го вида, а также доход от реализации единицы продукции j-го вида – c_j. Определить план производства, который принесет наибольший суммарный доход экономическому объекту.

Для построения экономико-математической модели условие задачи удобно представить в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Вид сырья	Норма расхода сырья i-го вида на производство единицы продукции j-го вида				Запас сырья
	Вид продукции				
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Доход от единицы продукции	c_1	c_2	…	c_n	

Обозначим через x_j – количество продукции j-го вида.

В рамках описанных выше технологий на производство всей продукции первого вида расход сырья первого вида составит $a_{11}x_1$, на производство всей продукции второго вида – $a_{12}x_2$, и, так далее, на производство всей продукции n-го вида – $a_{1n}x_n$. Общие затраты сырья первого вида можно представить в виде суммы:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n.$$

Поскольку запасы сырья ограничены, то эта сумма не должна превышать величину запаса сырья первого вида – b_1, т.е.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1.$$

Проведя аналогичные рассуждения для всех видов сырья, получим остальные неравенства системы ограничений:

$$\begin{gathered} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{gathered}$$

К системе ограничений также должны быть добавлены требования неотрицательности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поскольку количество продукции любого вида не может быть отрицательным.

Доход, получаемый от реализации всей продукции первого вида равен c_1x_1, от реализации всей продукции второго вида – c_2x_2, и так далее, от реализации всей продукции n-го вида – c_nx_n. Суммарный доход равен:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Таким образом, задача заключается в нахождении таких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

и обращают функцию дохода $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ в максимум.

5.2.2. Задача оптимальной загрузки оборудования

Предприятию нужно выпустить продукции $П_1$ по плану N_1 единиц, продукции $П_2$ – N_2 единиц, и так далее, продукции $П_k$ – N_k единиц. Продукция обрабатывается на взаимозаменяемом оборудовании $B_1, B_2, \ldots, B_m$ различной мощности. Также известны следующие величины: a_{ij} – норма времени на обработку единицы продукции i-го вида на оборудовании j-го вида; A_j – фонд времени оборудования j-го вида, c_{ij} – себестоимость обработки продукции i-го вида на оборудовании j-го вида. Спланировать выпуск продукции $П_j$, чтобы себестоимость ее была наименьшей и план выпуска продукции был выполнен.

Для построения экономико-математической модели условие задачи удобно представить в таблице 5.2.

Таблица 5.2

Вид оборудования	**Себестоимость обработки продукции *i*-го вида на оборудовании *j*-го вида**				**Фонд времени оборудования**
	Вид продукции				
	$П_1$	$П_2$	…	$П_k$	
B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	A_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	A_2
…	…	…	…	…	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}	A_m
План выпуска продукции	N_1	N_2	…	N_k	

Обозначим x_{ij} – количество продукции i-го вида, которая обрабатывается на оборудовании j-го вида.

Фактические затраты времени на обработку всей продукции $П_1$ на оборудовании B_1 составят $a_{11}x_{11}$, на обработку всей продукции $П_2$ на оборудовании B_1 – $a_{12}x_{12}$, и, так далее, на обработку всей продукции $П_k$ – $a_{1n}x_{1n}$. Общие затраты времени на обработку всей продукции на оборудовании B_1 можно представить в виде суммы:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1k}x_{1k}.$$

Поскольку фактические затраты времени не могут превышать отведенные фонды, то эта сумма не должна превышать A_1, т.е.

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1k}x_{1k} \le A_1.$$

Проведя аналогичные рассуждения для всех оборудования, получим остальные неравенства системы ограничений:

$$a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2k}x_{2k} \le A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mk}x_{mk} \le A_m.$$

Поскольку по условию задачи план должен быть выполнен, то имеем систему ограничений:

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = N_1.$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = N_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{1m} + x_{2m} + \ldots + x_{mk} = N_k.$$

К системе ограничений также должны быть добавлены требования неотрицательности переменных x_{ij}, поскольку количество продукции любого вида не может быть отрицательным.

Общая себестоимость обрабатываемой продукции равна:

$$z = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1k}x_{1k}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2k}x_{2k}+\ldots$$
$$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mk}x_{mk}.$$

Таким образом, задача заключается в нахождении таких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_{ij} \le A_j, \quad (j = \overline{1,m})$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = N_i, \quad (j = \overline{1,k})$$
$$x_{ij} \ge 0, (i = \overline{1,m}), \quad (j = \overline{1,k})$$

и обращают функцию себестоимости $z = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ в минимум.

5.2.3. Задача о смесях

К таким задачам относится класс математических моделей, касающийся экономических проблем, связанных с изготовлением различных смесей (сплавов металлов, химических веществ, производства нефтепродуктов, рационов, диет и др.).

Фирма имеет возможность покупать m различных видов сырья и приготавливать различные виды смесей. Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов). Продукция должна удовлетворять хотя бы минимальным требованиям с точки зрения полезности (питательности). Перед руководством фирмы стоит задача определить количество каждого i-го вида сырья, образующего смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу смеси и ее питательности.

Пусть x_i – количество i-го вида сырья в смеси; m – количество видов сырья; n – количество ингредиентов в смеси; a_{ij} – количество ингредиента j-го вида, содержащегося в единице i-го вида сырья; b_j – минимальное количество ингредиента j-го вида, содержащегося в единице смеси; c_i – стоимость единицы сырья i-го вида; q – минимальный общий вес смеси, используемый фирмой.

Для построения экономико-математической модели условие задачи удобно представить в таблице 5.3.

Таблица 5.3

Вид ингредиента	**Количество ингредиента *j*-го вида, содержащегося в единице *i*-го вида сырья**				**Минимальное количество ингредиента**
	Виды сырья				
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы сырья	c_1	c_2	…	c_n	

В единице сырья первого вида содержится a_{11} единиц первого ингредиента, а во всем сырье первого вида этого ингредиента будет $a_{11}x_1$. Этого же ингредиента в единице сырья второго вида содержится a_{12} единиц, а во всем сырье второго вида этого ингредиента будет $a_{12}x_2$ и так далее, $a_{1n}x_n$ – количество первого ингредиента в n-м виде сырья. Общее количество сырья первого вида, содержащегося во всех смесях равно:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n.$$

Поскольку известно, что минимальное количество ингредиента первого вида, содержащегося в единице смеси, должно быть b_1, имеем следующее ограничение:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1.$$

Рассмотрим второй вид ингредиента. Необходимо учесть содержание этого ингредиента во всем количестве смеси первого сырья, второго и т.д. до n-го вида сырья. Суммируя отдельные значения количества единиц второго вида ингредиента во всех смесях, получим общее количество второго вида ингредиента. Она должно быть не меньше минимального количества ингредиента второго вида, содержащегося в единице смеси b_2. Аналогично предыдущим рассуждениям, можно установить соотношения между содержанием ингредиента любого вида во всех смесях и минимальным количеством этого ингредиента в смеси. В результате придем к системе ограничений на питательность смеси:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющие собой количества ингредиента первого, второго и т.д., до n-го вида, не могут быть отрицательными. В случае, если какой-либо ингредиент не входит в состав смеси, то соответствующая переменная будет равно нулю. Таким образом, придем к системе ограничений на неотрицательность переменных:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.$$

В связи с тем, что известен минимальный общий вес смеси q, используемый фирмой, придем к ограничению на расход смеси:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq q.$$

Зная, что цена единицы сырья первого вида c_1, можем вычислить стоимость всего сырья первого вида – c_1x_1. Аналогично стоимость всего сырья второго вида – c_2x_2 и т.д., стоимость всего сырья n-го вида – c_nx_n. Суммарная стоимость всех видов сырья, используемых в приготовлении смеси, равна сумме всех этих стоимостей.

Таким образом задача о смесях заключается в нахождении величин x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq q. \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

и дают минимум целевой функции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

5.2.4. Транспортная задача

Одной из часто встречающихся задач хозяйственного управления является *задача по разработке рационального плана транспортных перевозок*. Основная цель организации перевозок – минимизация затрат на их осуществление. Такая задача носит название *транспортной*.

Транспортная задача принадлежит к специальному классу распределительных задач линейного программирования. Пусть нужно перевезти однородный груз из m пунктов отправления A_1, A_2,…, A_m в n пунктов потребления B_1, B_2,…, B_n. Известны: количество груза a_i (запасы), находящееся у i-го поставщика (постоянно), а также объемы потребностей в нем b_j (заявки) j-го потребителя. Известны также затраты на перевозку единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю – тариф – c_{ij}. Необходимо распределить груз таким образом, чтобы затраты на его перевозку были минимальными.

Обозначим x_{ij} – количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Решение (план перевозок) определяется матрицей размерности $(m \times n)$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Общий вывозимый груз от поставщиков не должен превышать имеющихся у него запасов – это условие выражается системой:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \le a_1. \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \le a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \le a_m. \end{gathered}$$

Заявки, поданные пунктами потребления, должны быть выполнены, что приводит к системе:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1. \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{gathered}$$

Естественно, что все неизвестные не могут принимать отрицательные значения, т.е. $x_{ij} \ge 0, (i = 1,2,..., m,\ j = 1,2,..., n)$.

Общая стоимость перевозок равна:

$$\begin{gathered} z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots \\ + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}. \end{gathered}$$

Таким образом, задача заключается в нахождении таких переменных $x_{ij} \ge 0, (i = 1,2,..., m,\ j = 1,2,..., n)$, которые удовлетворяют системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,m}), \quad (j = \overline{1,n})$$

и обращают функцию транспортных расходов $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ в минимум.

Обобщая рассмотренные примеры, можно сделать следующие выводы:

- ограничения в задачах линейного программирования могут быть выражены как равенствами, так и неравенствами;
- линейная функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму;
- переменные в задачах всегда неотрицательны.

В экономике задачи условной оптимизации возникают при реализации принципа оптимальности в планировании и управлении, суть которого состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйственного субъекта.

Реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это означает решить экстремальную задачу:

$$\min f(\overline{X}), \overline{X} \in D, \text{ или } \max f(\overline{X}), \overline{X} \in D,$$

где $f(\overline{X})$ – целевая функция – математическая запись критерия оптимальности.

В задаче линейного программирования (ЗЛП) нужно найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции $f(\overline{X})$:

$$\min f(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{5.2.1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ \{\le,=,\ge\}\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ \{\le,=,\ge\}\, b_2, \\ .... \ .... \ .... \ .... \ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ \{\le,=,\ge\}\, b_m, \\ x_j \ge 0; j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

В формулах (5.2.1), (5.2.2) $a_{ij}, b_i, c_j \ \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ – заданные постоянные величины, причем $b_i \ge 0$; символ $\{\le,=,\ge\}$ означает, что в конкретной ЗЛП возможно ограничение типа равенства или неравенства (в ту или другую сторону).

ЗЛП (5.2.1), (5.2.2) можно записать в следующих формах: канонической, векторной, матричной.

Каноническая форма ЗЛП имеет вид (5.2.3):

$$\begin{gathered} \min f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ , \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = \overline{1,m}), \\ x_j \ge 0, \ b_i \ge 0, (i = \overline{1,m}), (j = \overline{1,n}) \end{gathered} \tag{5.2.3}$$

Векторная форма ЗЛП имеет вид (5.2.4):

$$\begin{gathered} \min f(\overline{X}) = CX \ , \\ A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B \, , \\ x \ge 0 \, , \ B \ge 0 \end{gathered} \tag{5.2.4}$$

где $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ ... \\ a_{im} \end{pmatrix} (i = \overline{1,m}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, C = (c_1, c_2, ..., c_n), X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Матричная форма ЗЛП имеет вид (5.2.5):

$$\min f(\overline{X}) = CX\,,$$
$$AX = B,\ X \geq 0\,, B \geq 0\,, \tag{5.2.5}$$

где $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$.

✓ *Планом ЗЛП* или *допустимым решением ЗЛП* называется вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет системе ограничений (5.2.2).

✓ *Оптимальным планом ЗЛП* или *оптимальным допустимым решением ЗЛП* называется *план ЗЛП*, который оптимизирует целевую функцию (5.2.1).

✓ *Областью допустимых решений ЗЛП* называется совокупность точек, удовлетворяющих системе ограничений (5.2.2).

✓ Множество называется *выпуклым*, если вместе с двумя точками ему принадлежит и отрезок их соединяющий.

✓ Точка множества называется *граничной*, если в любой ее окрестности содержатся как точки, которые принадлежат множеству, так и точки, которые ему не принадлежат.

✓ Совокупность граничных точек множества образует его *границу*. Граница выпуклого многоугольника на плоскости состоит из отрезков или прямых.

✓ Точки, в которых пересекаются отрезки или прямые границы многоугольника, называются *вершинами*.

✓ *Пересечением областей* называется множество точек, которые принадлежат каждой из этих областей.

✓ *Выпуклой комбинацией точек многоугольника* является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

Для решения ЗЛП приведем следующие утверждения.

Теорема 1. Область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Теорема 2. Оптимальное значение целевая функция задачи линейного программирования достигает в вершине многоугольника решений.

Теорема 3. Если оптимальное значение целевая функция задачи линейного программирования достигает в нескольких точках многоугольника решений, то она принимает это же значение в любой точке, которая является их выпуклой комбинацией.

5.3. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический метод решения ЗЛП основан на утверждениях, приведенных в пункте 5.2. Согласно теореме 2, оптимальное решение находится в вершине области допустимых решений и поэтому решить ЗЛП – найти вершину области допустимых решений, координаты которой дают оптимальное значение целевой функции.

Графический метод используют для решения ограниченного класса задач с двумя переменными, иногда с тремя переменными. Надо заметить, что для трех переменных эта область является недостаточно наглядной.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП

1. Построить прямые линии, уравнения которых получаем заменой в системе ограничений (5.2.2) знаков неравенств на знаки равенств.
2. Определить полуплоскости, соответствующие каждому неравенстве задачи.
3. Найти многоугольник решений ЗЛП, учитывая, что $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.
4. Построить вектор направлений $\overline{ON}$ =(с $_1$,с $_2$), который указывает направление наибольшего возрастания целевой функции ЗЛП (5.2.1).
5. Построить прямую z, которая проходит через область допустимых решений, перпендикулярно к вектору $\overline{ON}$: $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Это линия уровня.
6. Переместить прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в направлении вектора $\overline{ON}$ в случае максимизации целевой функции (или в противоположном направлении в случае минимизации целевой функции), найти вершину многоугольника решений ЗЛП, в которой целевая функция достигает экстремального значения.

7. Определить координаты точки, в которой целевая функция достигает оптимальное значения, и вычислить экстремальное значение целевой функции в этой точке.

Реализацию графического метода решения ЗЛП рассмотрим на примерах.

Пример 5.3.1. Решить ЗЛП графическим методом:

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \le -5, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 7x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (5.3.1)$$

$$\max z = x_1 + 4x_2 \qquad (5.3.2)$$

Решение. Для построения области допустимых решений, которая состоит из пересечения полуплоскостей, соответствующих каждому неравенству системы ограничений (5.3.1), запишем уравнения граничных прямых:

$$l_1\colon x_1 + 5x_2 = 5;\ l_2\colon x_1 + x_2 = 6;\ l_3\colon 7x_1 + x_2 = 7.$$

Замечание. Для удобства построения прямой линии ее уравнение можно привести к виду в отрезках на осях:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1, \qquad (5.3.3)$$

где параметры a, b – длины отрезков, отсекаемых прямой на соответствующих осях Ox_1, Ox_2.

Замечание. Если уравнение прямой линии имеет вид: $Ax_1 + Bx_2 = 0$, то она проходит через точку с координатами (0;0). Для ее построения следует выразить x_2 через x_1 и найти еще одну точку.

Для приведения уравнения прямой l_1 к виду (5.3.3.) разделим обе его части на 5: $\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{1} = 1$. Таким образом, прямая l_1 отсекает на оси Ox_1

5 единиц, на оси Ox_2 1 единицу. Аналогично имеем для l_2: $\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{6}=1$ и l_3: $\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{7}=1$.

Для определения полуплоскостей, которые отвечают ограничениям системы (5.3.1), в ограничения нужно подставить координаты какой-либо точки, не лежащей на граничной прямой. Если получим верное неравенство, то все точки из этой полуплоскости являются решениями данного неравенства. В противном случае выбирают другую полуплоскость.

Замечание. В качестве точки сравнения целесообразно выбирать, если это возможно, точку О (0,0).

Таким образом, первая и вторая искомые полуплоскости расположены в противоположную сторону от начала координат ($0-5\cdot0\le-5$; $7\cdot0+0\ge7$), а вторая – в сторону начала координат ($0+0\le6$). Область допустимых решений на рис. 5.1 заштрихована.

Замечание. В силу ограничений $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, область допустимых решений ЗЛП всегда лежит в первой четверти координатной плоскости.

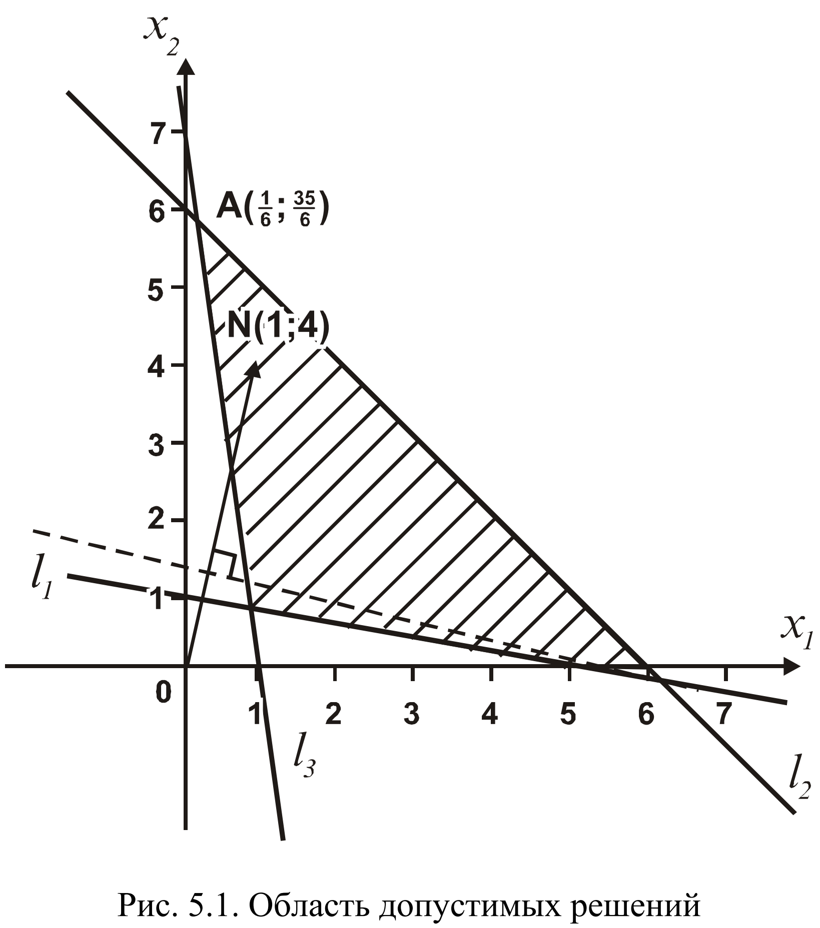


Рис. 5.1. Область допустимых решений

Для нахождения оптимального плана, который будет находиться в вершине многоугольника решений, нужно построить вектор направлений $\overline{ON}=(c_1,c_2)$, который указывает направление наибольшего возрастания целевой функции $z = c_1x_1 + c_2x_2$.

В данной задаче вектор направлений $\overline{ON} = (1, 4)$: он начинается в точке O (0,0) и заканчивается в точке N (1, 4).

Далее строим прямую, которая проходит через область допустимых решений, перпендикулярно к вектору $\overline{ON}$, и называется *линией уровня целевой функции.* Передвигаем линию уровня в направлении вектора $\overline{ON}$ в случае максимизации целевой функции z и в направлении противоположном $\overline{ON}$, в случае минимизации z, до последнего пересечения с областью допустимых решений. В результате определяется точка или точки, где целевая функция достигает экстремального значения, или устанавливается неограниченность целевой функции z на множестве решений задачи.

Таким образом, точкой максимума целевой функции z является точка A пересечения прямых l_2 и l_3.

Для вычисления оптимального значения целевой функции z найдем координаты точки A. Поскольку точка A – это точка пересечения прямых l_2 *и* l_3, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений, составленной из уравнений соответствующих граничных прямых:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 6, \\ 7x_1 + x_2 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + \ x_2 = 6, \\ 6x_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 35/6, \\ x_1 = 1/6. \end{cases}$$

Таким образом, точка A имеет координаты $x_1 = 1/6$, $x_2 = 35/6$.

Для вычисления оптимального значения целевой функции нужно подставить в нее координаты точки A.

Подставив координаты точки A в целевую функцию (5.4), получим:

$$max\, \mathrm{z} = 1/6 + 4\cdot(35/6) = 47/2.$$

Пример 5.3.2. Построить на плоскости область допустимых решений системы линейных неравенств (5.3.4) и найти наибольшее и наименьшее значения целевой функции (5.3.5):

$$\begin{cases} 4x_1 - \ \ x_2 \geq 0, \\ \ x_1 \ +3x_2 \geq 6, \\ \ x_1 \ -3x_2 \leq 6, \\ \ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{5.3.4}$$

$$z = -2x_1 - x_2 \tag{5.3.5}$$

Решение. Для построения области допустимых решений, которая состоит из пересечения полуплоскостей, соответствующих каждому неравенству системы ограничений (5.3.4), запишем уравнения граничных прямых:

$$l_1\text{: } 4x_1 - x_2 = 0;\ l_2\text{: } x_1 + 3x_2 = 6;\ l_3\text{: } x_1 - 3x_2 = 6;\ l_4\text{: } x_2 = 1.$$

Прямая l_1 проходит через точку с координатами (0;0). Для ее построения выразим x_2 через x_1: $x_2 = 4x_1$. Найдем еще одну точку, через которую проходит прямая l_1, например (1;4). Через точку с координатами (0;0) и точку с координатами (1;4) проведем прямую l_1.

Для приведения уравнения прямой l_2 к виду в отрезках на осях (5.3.3) разделим обе его части на 6: $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{2} = 1$. Таким образом, прямая l_2 отсекает на оси Ox_1 6 единиц, на оси Ox_2 – 2 единицы. Аналогично имеем для l_3: $\frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{2} = 1$. Прямая l_4 параллельна оси Ox_1 и проходит через точку с координатами (0;1).

Для определения полуплоскостей, которые отвечают ограничениям системы (5.3.4) в ограничения нужно подставить координаты какой-либо точки, не лежащей на граничной прямой. В силу ограничений $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, область допустимых решений ЗЛП лежит в первой четверти координатной плоскости.

Область допустимых решений на рис. 5.2 заштрихована.

Построим вектор направлений $\overline{ON} = (-2,-1)$. Далее строим линию уровня, перпендикулярно к вектору $\overline{ON}$.

Для нахождения наибольшего значения целевой функции передвигаем линию уровня в направлении вектора $\overline{ON}$ до последнего пересечения с областью допустимых решений. Таким образом, точкой максимума целевой функции z является точка A (пересечение прямых l_1 и l_2).

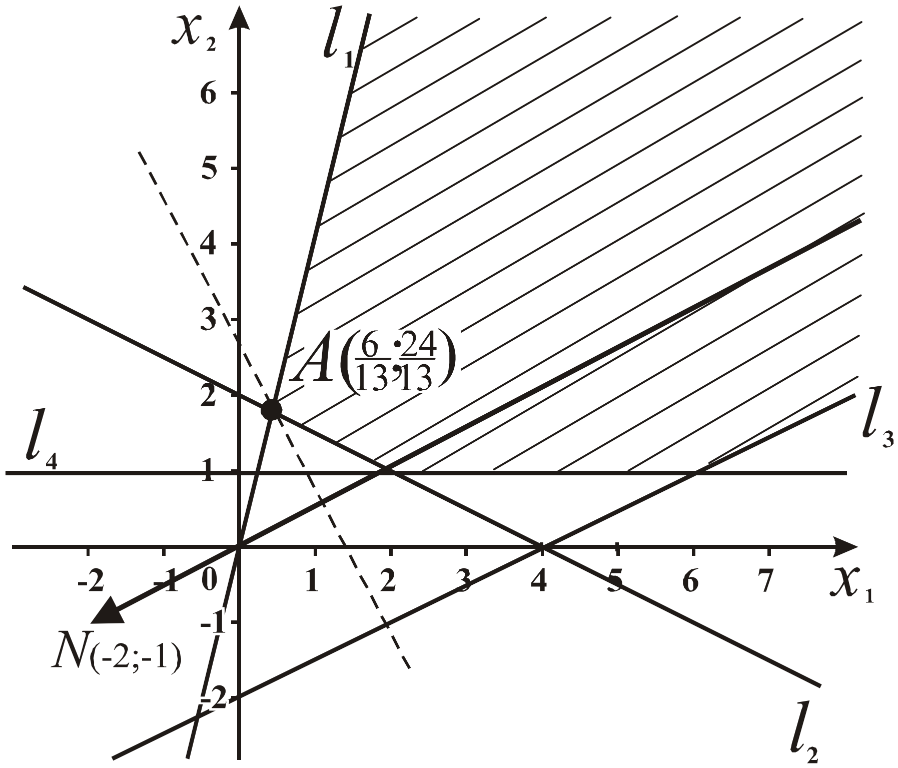


Рис. 5.2. Область допустимых решений

Для вычисления оптимального значения целевой функции z найдем координаты точки A. Поскольку точка A – это точка пересечения прямых l_1 и l_2, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений, составленной из уравнений соответствующих граничных прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4x_1, \\ 13x_1 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 24/13, \\ x_1 = 6/13. \end{cases}$$

Таким образом, точка A имеет координаты $x_1 = 6/13$, $x_2 = 24/13$.

Подставив координаты точки A в целевую функцию (5.3.5), получим оптимальное значение целевой функции:

$$max\ z = -2\cdot(6/13) - (24/13) = -36/13.$$

Для нахождения наименьшего значения целевой функции передвигаем линию уровня в направлении, противоположном вектору $\overline{ON}$

до последнего пересечения с областью допустимых решений. В этом случае целевая функция неограниченна в области допустимых решений, т.е. ЗЛП минимума не имеет.

В результате решения ЗЛП возможны следующие случаи:

- целевая функция достигает оптимального значения в единственной вершине многоугольника решений;
- целевая функция достигает оптимальное значение в любой точке ребра многоугольника решений (ЗЛП имеет альтернативные опорные планы с одинаковыми значениями z);
- ЗЛП не имеет оптимальных планов;
- ЗЛП имеет оптимальный план в случае неограниченной области допустимых решений.

5.4. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Графический метод решения ЗЛП целесообразно использовать только для задач с двумя переменными. В случае большего числа переменных используют универсальный метод решения ЗЛП – симплекс-метод.

В основе симплекс-метода лежит алгоритм симплексных преобразований системы линейных уравнений, дополненный правилом, которое обеспечивает переход к лучшему опорному плану.

5.4.1. Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП

1. Определение начального опорного плана ЗЛП.
2. Построение симплексной таблицы.
3. Проверка опорного плана на оптимальность с помощью оценок оптимальности. Если все оценки удовлетворяют условию оптимальности, то опорный план является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок не удовлетворяет условию оптимальности, то переходят к новому опорному плану или устанавливают, что оптимального плана задача не имеет.
4. Переход к новому опорному плану задачи осуществляется путем определения генерального элемента и построением следующей симплексной таблицы.

5. Повторение действий, начиная с п.3.

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода на примере.

Пример 5.4.1. Решить ЗЛП (5.3.1), (5.3.5) симплекс-методом.

Решение. Для решения ЗЛП необходимо, чтобы все свободные члены системы ограничений (5.3.1) были неотрицательными. Для этого первое неравенство системы умножим на (–1):

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1 + \ x_2 \le 6, \\ 7x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Замечание. Если требуется максимизировать целевую функцию, то удобнее перейти к нахождению минимума, используя соотношение:

$$\max z = -\min(-z).$$

Перейдем к минимуму в нашей задаче:

$$\min(-z) = -x_1 - 4x_2$$

Приведем задачу к канонической форме, вводя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 в систему ограничений (5.4.1).

Замечание. Если неравенство имеет знак «≤», то дополнительную переменную вводят со знаком «+»; если неравенство имеет знак «≥», то дополнительную переменную вводят со знаком «–».

ЗЛП (5.4.1) в канонической форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + \ x_2 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + x_2 - x_5 = 7, \\ x_i \ge 0, (i = 1,\dots,5) \end{cases}$$

$$\min(-z) = -x_1 - 4x_2\ .$$

Для получения первоначального базиса используют векторы, образующие единичную матрицу. Если таких векторов недостаточно, вводят искусственные переменные в систему ограничений: если дополнительная переменная имеет знак минус, то в это уравнение вводят искусственную переменную со знаком плюс; если дополнительная переменная имеет знак плюс, то в это уравнение искусственную переменную вводить не нужно. Искусственные переменные одновременно вводятся в целевую функцию z с неизвестным положительным коэффициентом M.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_6 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + x_2 - x_5 + x_7 = 7, \\ x_i \geq 0, (i = 1,...,7) \end{cases} \qquad (5.4.2)$$

$$\min(-z) = -x_1 - 4x_2 + Mx_6 + Mx_7.$$

В векторной форме система ограничений (5.4.2) имеет вид:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 + p_6x_6 + p_7x_7 = p_0,$$

где $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$p_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Переменные x_1 и x_2 являются основными, x_3, x_4, x_5 – дополнительными, x_6, x_7 – искусственными. Векторы p_6, p_4, p_7 образуют единичный базис, причем p_6 – первый базисный вектор.

Заполним первую симплекс-таблицу. Исходная симплекс-таблица заполняется следующим образом. В первой строке записывают коэффициенты целевой функции. В столбец «Базис» записывают базисные векторы. В столбце «С» записывают коэффициенты целевой функции при базисных векторах. В столбцах *«p_0», «p_1», «p_2», «p_3», «p_4», «p_5», «p_6», «p_7»* записывают компоненты соответствующих векторов.

Для заполнения клеток таблицы, которые находятся в двух последних строках, нужно элементы столбца «C» умножить на соответствующие элементы рассчитываемого столбца и отнять число, стоящее в первой строке (за исключением столбца «p_0»). Например, для заполнения клеток столбца «p_2» умножим элементы столбца «C» на соответствующие элементы столбца «p_2» и отнимем число – 4: $M \cdot 5 + 0 \cdot 1 + M \cdot 1 - (-4) = 4 + 6M$. Коэффициент при M записывают в М-строку, число без M вносят в z–строку.

Таблица 5.4

Первая симплексная таблица

Базис	***C***	p_0	**– 1**	**– 4**	**0**	**0**	**0**	**M**	**M**	**С.О.**
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	
p_6	M	5	1	5	–1	0	0	1	0	5/1
p_4	*0*	6	1	1	0	1	0	0	0	6/1
p_7	M	7	7	1	0	0	–1	0	1	7/7
z-строка		0	1	4	0	0	0	0	0	
M-строка		12	8	6	–1	0	–1	0	0	

Последние две строки симплекс-таблицы называются ***индексными.*** В них, начиная со второго столбца «p_1», содержатся оценки оптимальности, с помощью которых проверяют оптимальность опорного плана, соответствующего данной таблице. Значение составляющих опорного плана расположено в столбце «p_0», причем небазисным переменным присваивают нулевые значения.

Первой симплекс-таблице 5.4 соответствует опорный план:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 5, x_7 = 7.$$

Критерий оптимальности проверяют по M-строке, а если она отсутствует, то по z-строке.

5.4.2. Критерий оптимальности опорного плана

Если в индексной строке среди оценок оптимальности есть хотя бы одна положительная, то опорный план не является оптимальным.

Если в индексной строке все оценки оптимальности для небазисных переменных являются отрицательными числами, то опорный план является оптимальным и единственным.

Если в индексной строке небазисным переменным отвечают нулевые оценки, а среди оценок оптимальности нет положительных, то опорный план является оптимальным, но не единственным.

В нашем случае опорный план, соответствующий первой симплекс-таблице, оптимальным не является.

Для перехода к следующей симплекс-таблице в *М*-строке выбирают наибольшую положительную оценку, начиная со столбца «p_1». В нашем случае – это число 8 в столбце «p_1».

✓ Столбец, содержащий наибольшую положительную оценку, называется *разрешающим*. Он показывает, какой вектор следует ввести в базис.

В нашем случае вектор «p_1» следует ввести в базис.

Найдем *симплексное отношение оптимальности* θ_0: элементы столбца «p_0» разделим на положительные элементы разрешающего столбца.

✓ Строка, соответствующая наименьшему отношению оптимальности θ_0, называется *разрешающей*. Она показывает, какой вектор следует вывести из базиса.

В нашем случае $\theta_0 = \min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{7}\right\} = \min\{5, 6, 1\} = 1$. Таким образом, вектор p_7 следует вывести из базиса. Кроме того, вектор p_7 можно исключить из рассмотрения, поскольку он является искусственным.

✓ *Генеральный элемент* – это элемент, который расположен на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

В нашем случае это число 7.

Переход к следующей симплекс-таблице осуществляют по правилам:

- все элементы разрешающей строки делят на генеральный элемент;

- разрешающий столбец дополняют нулями;

- если в разрешающей строке есть нули, то соответствующие столбцы переписывают без изменений;

- все другие элементы рассчитывают с помощью метода прямоугольников: если *г* – генеральный элемент, *с* – старый элемент, *а* и *b* –

элементы разрешающей строки и разрешающего столбца, то n – новый элемент находят по формуле:

$$\begin{array}{cc} a & c \\ г & b \end{array} \qquad n = \frac{c \cdot г - a \cdot b}{г}$$

Таким образом, вторая симплекс-таблица имеет вид (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Вторая симплексная таблица

Базис	**С**	p_0	**– 1**	**– 4**	**0**	**0**	**0**	**М**	**С.О.**
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
p_6	М	4	0	34/7	–1	0	1/7	1	4/(34/7)=14/17
p_4	0	5	0	6/7	0	1	1/7	0	5/(6/7)=30/7
p_1	– 1	1	1	1/7	0	0	–1/7	0	1/(1/7)=7
z-строка		– 1	0	27/7	0	0	1/7	0	
M-строка		4	0	34/7	–1	0	1/7	0	

Этой симплексной таблице соответствует опорный план:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5,\ x_5 = 0,\ x_6 = 4.$$

Он не является оптимальным, так как в М-строке есть положительные оценки.

По правилам, описанным выше, перейдем к третьей симплексной таблице (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Третья симплексная таблица

Базис	**С**	p_0	**– 1**	**– 4**	**0**	**0**	**0**	θ_0
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
p_2	– 4	14/17	0	1	–7/34	0	1/34	
p_4	0	73/17	0	0	3/17	1	2/17	(73/17)/(3/17)=73/3
p_1	– 1	15/17	1	0	1/34	0	–5/34	(15/17)/(1/34)=30
z-строка		–71/17	0	0	27/34	0	1/34	

В этой таблице отсутствует M-строка, поскольку искусственные векторы выведены из базиса, и в дальнейшем не рассматриваются.

Третьей симплексной таблице соответствует опорный план:

$$x_1 = 15/17,\ x_2 = 14/17,\ x_3 = 0,\ x_4 = 73/17,\ x_5 = 0.$$

Он не является оптимальным, так как в z-строке есть положительные оценки.

Перейдем к четвертой симплексной таблице (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Четвертая симплексная таблица

Базис	**C**	p_0	**– 1**	**– 4**	**0**	**0**	**0**
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	-4	35/6	0	1	0	7/6	1/6
p_3	0	73/3	0	0	1	17/3	2/3
p_1	– 1	1/6	1	0	0	–1/6	–1/6
z-строка		–47/2	0	0	0	–9/2	–1/2

Этой симплекс-таблице соответствует опорный план:

$$x_1 = 1/6,\ x_2 = 35/6,\ x_3 = 73/3,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.$$

Он является оптимальным и единственным, так как в z-строке нет положительных оценок. Значение целевой функции $\min(-z) = -47/2$, значит,

$$\max z = -\min(-z) = 47/2.$$

Замечание.

- Если в симплексной таблице есть две одинаковые положительные наибольшие оценки оптимальности, то выбирают любую.
- Если в разрешающем столбце симплексной таблицы нет положительных чисел, то целевая функция является неограниченной на области допустимых решений ЗЛП, т.е. ЗЛП не имеет решений.
- В последней симплексной таблице нет необходимости заполнять все клетки, а нужно только заполнить z-строку и столбец p_0.

5.5. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С каждой ЗЛП связана другая линейная задача, которая называется *двойственной* (первоначальная задача называется *исходной*).

Пара двойственных задач имеет следующий вид:

Исходная задача Двойственная задача:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \; .... \; .... \; .... \; .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_i \ge 0; i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{n1}y_n \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{n2}y_n \ge c_2, \\ .... \; .... \; .... \; .... \; .... \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + ... + a_{nm}y_m \ge c_n, \\ y_j \ge 0; j = \overline{1,m} \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad \min f = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$$

5.5.1. Свойства двойственных задач

1. Если целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в ограничениях приводят к виду «$\le$», а в задаче на минимум – вид «$\ge$».

2. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица в двойственной задаче являются транспонированными по отношению друг к другу.

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений исходной задачи, а число ограничений двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи.

5. Правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

6. Предполагается, что переменные в обеих задачах являются неотрицательными.

Двойственные пары задач подразделяются на симметричные и несимметричные. В *симметричных задачах* ограничения прямой и двойственной задач являются неравенствами, переменные могут принимать неотрицательные значения. В *несимметричных задачах* ограничения прямой задачи могут быть уравнениями, а двойственной неравенствами, переменные могут принимать любые значения.

Замечание. Двойственная задача к двойственной будет исходной.

Замечание. Для построения двойственной задачи следует проверить выполнение для исходной задачи следующих условий:

а) во всех ограничениях свободные члены содержатся в правой части неравенства (равенства), члены с неизвестными – в левой;

б) все ограничения неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств в них были направлены в одну и туже сторону;

в) знаки неравенств системы ограничений связаны с оптимизацией целевой функции таким образом: $\leq \ \Rightarrow \ \max$; $\geq \ \Rightarrow \min$

Между взаимно двойственными ЗЛП имеет место взаимосвязь, которая следует из теорем двойственности.

5.5.2. Теоремы двойственности

- Если одна из пары двойственных задачах имеет оптимальный план, то вторая также имеет решение, а значения целевых функций для оптимальных планов совпадают, то есть $z_{\max} = f_{\min}$.

- Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то вторая задача вовсе не имеет решений.

- Пара двойственных задач не имеет решений.

- Если исходная задача имеет оптимальный план, найденный с помощью симплекс-метода, то оптимальный план двойственной задачи расположен в последней таблице. y_1 равно модулю оценки оптимальности для вектора, который в первой симплекс-таблице был первым базисным вектором и т.д.

- Если в результате подстановки оптимального плана исходной задачи в систему ограничений этой задачи i-е ограничение обращается в равенство, то соответствующая i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

- Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то соответствующее i-е ограничение исходной задачи выполняется для оптимального плана.

Пример 5.5.1. Записать двойственную задачу для ЗЛП (5.3.1), (5.3.2). Выписать решение двойственной задачи.

Решение. Поскольку исходная задача на максимум, то во всех ограничениях системы (5.3.1) должен быть знак «≤». Для этого обе части третьего неравенства умножаем на (–1) и меняем знак неравенства на противоположный. Таким образом, получим:

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \le -5, \\ \;\; x_1 + x_2 \le 6, \\ -7x_1 - x_2 \le -7, \\ x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{5.5.1}$$

$$\max z = x_1 + 4x_2 . \tag{5.5.2}$$

Для задачи (5.5.1), (5.5.2) запишем двойственную. Для этого:

Выпишем матрицу коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (5.5.1):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

и транспонируем ее (т.е. поменяем местами строки и столбцы):

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

На основе транспонированной матрицы составим систему ограничений двойственной задачи, причем в неравенствах ограничений будет знак «≥» и в правой части этих неравенств будут стоять коэффициенты целевой функции (5.5.2), т.е. 1 и 4:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 - 7y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + y_2 - y_3 \ge 4, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Коэффициентами целевой функции двойственной задачи будут числа, стоящие в правой части ограничений исходной задачи (5.5.1), причем целевая функция будет минимизироваться:

$$\min f = -5y_1 + 6y_2 - 7y_3 .$$

Итак, двойственная задача имеет вид (5.5.3), (5.5.4):

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 - 7y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + y_2 - y_3 \ge 4, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases} \tag{5.5.3}$$

$$\min f = -5y_1 + 6y_2 - 7y_3 . \tag{5.5.4}$$

Исходная и двойственная ЗЛП имеют разный экономический смысл. Решая одну задачу можно не решать другую, а сразу выписать ее решение. Решение двойственной задачи y_1, y_2, y_3 находится в z-строке последней симплексной таблицы в дополнительных столбцах (а именно, в столбцах p_3, p_4, p_5). Нужно помнить, что решение выписывается с учетом неотрицательности переменных. В нашем случае решение следующее:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 9/2,\ y_3 = 1/2.$$

При подстановке этого решения в целевую функцию двойственной задачи (5.5.4) должно получится число, стоящее в z-строке последней симплексной таблицы в столбце p_0. Проверим:

$$\min f = -5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{9}{2} - 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{47}{2} = \max z.$$

Пример 5.5.2. Записать двойственную задачу для ЗЛП.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min z = -7\, x_1 + 3x_2 .$$

Решение. Поскольку исходная задача на минимум, то в системе ограничений должны быть знаки «≥». Таким образом, после соответствующих преобразований система ограничений исходной задачи примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \ge -5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Целевая функция при этом остается прежней, а именно: $\min z = -7\, x_1 + 3x_2$. Выпишем матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и транспонируем: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

На основе A^T составим систему ограничений для двойственной задачи, причем в ограничениях будет знак «≤» и в правой части неравенств будут стоять коэффициенты из целевой функции исходной задачи. Целевая функция будет максимизироваться и состоять из коэффициентов, стоящих в правой части неравенств исходной задачи. Таким образом, двойственная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 + y_3 \le -7, \\ y_1 + y_2 + 4y_3 \le 3, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max f = y_1 - 5y_2 + 6y_3 .$$

5.6. МЕТОДЫ АНАЛИЗА КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ ИГР

✓ *Теория игр* – это математическая теория конфликтных ситуаций.

✓ Ситуация называется *конфликтной*, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

✓ *Целью теории игр* является разработка рекомендаций относительно рационального способа действий в условиях разумного поведения участников конфликтной ситуации.

✓ *Игра* – это упрощенная модель конфликтной ситуации, которая определяется правилами, указывающими: порядок чередования ходов, правила проведения каждого хода, количественный результат игры.

Правилами игры называются допустимые действия каждого игрока, которые направлены на достижение определенной цели.

Ходом называется вариант действия игрока в процессе игры.

✓ *Стратегией игрока* называется линия поведения, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

✓ *Оптимальной стратегией* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний результат.

Рассмотрим матричную игру, в которой две стороны (игрока) A и B. Их интересы прямо противоположны. Одна сторона выиграет то, что проиграет другая. Положим, что игрок A стремится увеличить свой выигрыш, а игрок B – уменьшить свой проигрыш.

✓ *Чистой стратегией* A_i игрока A называется возможный ход, который игрок A выбрал с вероятностью 1.

Пусть игрок A имеет m чистых стратегий (A_1, A_2, …, A_m), а игрок B – n чистых стратегий (B_1, B_2, …, B_n). В результате применения игроком A стратегии A_i и игроком B стратегии B_j однозначно определяется результат игры c_{ij} – это величина, которую выиграет игрок A и проиграет игрок B.

Игру считают заданной, если известны все значения c_{ij}, которые записывают в виде матрицы-таблицы, называемой *платежной матрицей,* в которой строки – *стратегии игрока A*, столбцы – *стратегии игрока B*, а элементы матрицы c_{ij} – *выигрыши игрока A*. Это матричная игра $m \times n$.

Стратегии	B_1	B_2	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
A_2	c_{11}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Игра называется *приведенной к нормальной форме*, если она записана в виде матрицы.

✓ *Задача каждого из игроков* – найти наилучшую стратегию игры, в предположении, что противник разумен и делает все, чтобы тоже получить лучший для себя результат.

✓ *Решить игру* – указать оптимальные стратегии для каждого игрока.

Вначале нужно проанализировать игру по *принципу максимина (минимакса).*

5.6.1. Алгоритм принципа максимина (минимакса)

1. В каждой строке платежной матрицы, соответствующей определенной стратегии A_i игрока А, находят минимальное из чисел a_{ij}:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \ j = \overline{1,n}. \tag{5.6.1}$$

Это гарантированный выигрыш игрока А при использовании стратегии A_i. Очевидно, что игроку А выгодно выбирать такую стратегию A_i, для которой значение гарантированного выигрыша было бы самым большим.

2. Определяют число $v_{нц}$, которое находится по формуле (5.6.2)

$$v_{нц} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \ j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}. \tag{5.6.2}$$

Оно называется *нижней ценой игры* или *максимином* $v_{нц}$. Соответствующая стратегия называется *максиминной.*

✓ *Максимин* – это гарантированный выигрыш, который игрок А может себе обеспечить в игре против разумного противника.

Максиминная стратегия неустойчива. Если игрок А будет придерживаться максиминной стратегии, и игрок В догадается об этом, то игрок В может ухудшить положение игрока А.

3. В столбцах платежной матрицы, которые соответствует стратегиям B_j, находят максимальное из чисел a_{ij}:

$$\beta_j = \max_i a_{ij},\ i = \overline{1,m}. \tag{5.6.3}$$

Это худшее, что ожидает игрока В при использовании стратегий B_j – самый большой из проигрышей. Очевидно, что игрок В старается уменьшить свой проигрыш, то есть он должен выбрать стратегию, которая дает самый маленький проигрыш.

4. Определяют число $v_{вц}$, которое находится по формуле (5.6.4):

$$v_{вц} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij},\ j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}. \tag{5.6.4}$$

Оно называется *верхней ценой игры* или *минимаксом* $v_{вц}$. Соответствующая стратегия называется *минимаксной.*

✓ *Минимакс* – это гарантированный проигрыш, который игрок В может себе позволить в игре против разумного противника.

Минимаксная стратегия также неустойчива.

✓ *Принцип минимакса* – это принцип осторожности, который рекомендует игрокам соблюдение максиминной и минимаксной стратегий. Он вытекает из предположения об осторожности игроков, то есть из желания разрешить конфликтную ситуацию лучшим образом для всех участников.

Замечание. Нижняя цена игры всегда не превосходит верхнюю цену игры.

✓ *Цена игры* – это объективно возможный средний результат, характеризующий игру $v_{нц} \le v \le v_{вц}$.

✓ Если $v_{нц} = v_{вц} = v$, то выигрыш А является определенным числом, а такая игра называется *определенной игрой в чистых стратегиях* или *игрой с седловой точкой*.

✓ Выигрыш v называется *значением игры*, равен элементу $(a_{i_0 j_0})$.

✓ Элемент $(a_{i_0 j_0})$ является одновременно минимальным в строке i_0, максимальным в столбце j_0 и называется *седловой точкой*. Седловой точке отвечают оптимальные стратегии, совокупность которых является решением игры.

Замечание. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для второго игрока отклонения от его оптимальной стратегии не может быть выгодным. Отступление сторонами от их оптимальных стратегий ухудшает их собственное положение.

Пример 5.6.1. Решить матричную игру с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эта матричная игра имеет размерность (3x4), т.е. игрок А имеет три стратегии, а игрок В – четыре. Запишем ее в нормальной форме.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	3	2	5	7	2
A_2	5	**4**	6	5	(4)
A_3	2	3	1	6	1
β_j	5	(4)	6	7	

Используя алгоритм принципа минимакса (максимина), имеем:

$$v_{нц} = \max \alpha_i = \max \{2, 4, 1\} = 4,$$

$$v_{вц} = \min \beta_j = \min \{5, 4, 6, 7\} = 4.$$

Поскольку $v_{нц} = v_{вц}$, то эта игра определена в чистых стратегиях или является игрой с седловой точкой. Седловая точка $a_{22} = (A_2, B_2) = 4$, цена игры v=4. Таким образом, совокупность оптимальных стратегий A_2 и B_2 является решением игры.

Если игра не имеет седловой точки, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более чистых стратегий с определенными вероятностями. Такая сложная стратегия называется *смешанной.*

✓ *Смешанной стратегией* игроков А (В) называются выражения вида:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},\ S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

где $p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ q_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, $\sum p_i = 1$, $\sum q_j = 1$,

p_i – вероятность использования чистой стратегии A_i,

q_j – вероятность использования чистой стратегии B_j.

Замечание. Любая конченная игра имеет решение в чистых или смешанных стратегиях.

Матричные игры тесно взаимосвязаны с задачами линейного программирования.

Каждой матричной игре можно поставить в соответствие две двойственные задачи, отражающие интересы сторон.

Для игрока A задачу записывают по столбцам, для игрока B – по строкам; знаки неравенств для игрока A будут «≥», для B – «≤». Правые части ограничений и коэффициенты целевых функций в обеих задачах равны 1, у задачи для игрока A цель min , у задачи для игрока B – max.

Для игрока A Для игрока B

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{m1}x_m \geq 1, \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{m2}x_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \dots + c_{mn}x_m \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \leq 1, \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n \leq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \dots + c_{mn}y_n \leq 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \to \min \qquad f = y_1 + y_2 + \dots + y_n \to \max$$

где $x_i = \dfrac{p_i}{v}$, $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $z = f = 1/v$.

5.6.2. Последовательность действий при решении игры $m \times n$

1. Проверка матрицы игры на наличие седловой точки.

2. При отсутствии седловой точки сведение игры к двойственным задачам.

3. Решение одной из пары двойственных задач.

4. Выписывание решения игры в смешанных стратегиях.

Замечание. Задача не изменится, если ко всем элементам платежной матрицы прибавить число.

Замечание. Сократить размерность матрицы можно исключением одинаковых строк или столбцов, исключением больших столбцов или меньших строк.

Решение матричной игры в смешанных стратегиях рассмотрим на примере.

Пример 5.6.2. Решить матричную игру с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Вначале с помощью принципа максимина (минимакса) определим минимаксную и максиминную стратегии. Для этого в строках платежной матрицы найдем минимальные числа, в столбцах – максимальные из числа.

A\B	B_1	B_3	B_3	
A_1	–2	2	0	–2
A_2	–1	3	–1	–1
A_3	4	–3	1	–3
	4	3	1	

В нашем случае $v_{нц} = \max\{-2, -1, -3\} = -1$, $v_{вц} = \min\{4, 3, 1\} = 1$.

Таким образом, в нашем случае цена игры: $-1 \le v \le 1$.

Поскольку диапазон цены игры и платежная матрица содержат отрицательные числа, то ко всем элементам платежной матрицы следует прибавить число, которое приведет к положительному диапазону цены игры. Здесь это число равно 3.

Платежная матрица приобретет вид $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, новая цена игры будет принадлежать промежутку $2 \le v \le 4$.

Матричная игра сводится к паре двойственных задач линейного программирования.

Для игрока *A*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \ge 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

Для игрока *B*

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 4y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max f = y_1 + y_2 + y_3$$

Замечание. Решать симплекс-методом целесообразно задачу для игрока *B*, поскольку в этой задаче нет необходимости вводить искусственные переменные.

Приведем ЗЛП для игрока *B* к каноническому виду и перейдем к минимуму:

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 + y_4 = 1, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_5 = 1, \\ 7y_1 + 4y_3 + y_6 = 1, \\ y_i \ge 0, i = (1, ..., 6) \end{cases}$$

$$\min(-f) = -y_1 - y_2 - y_3$$

Имеем двойственную ЗЛП, которую будем решать симплекс-методом:

Таблица 5.8

Симплексный метод решения ЗЛП

Базис	C	p_0	–1	–1	–1	0	0	0	
			p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
p_4	0	1	1	5	3	1	0	0	1/1
p_5	0	1	2	6	2	0	1	0	1/2
p_6	0	1	7	0	4	0	0	1	1/7
z – строка		0	1	1	1	0	0	0	
p_4	0	6/7	0	5	17/7	1	0	–1/7	(6/7):5=6/35
p_5	0	5/7	0	6	6/7	0	1	–2/7	(5/7):6=5/42
p_1	–1	1/7	1	0	4/7	0	0	1/7	
z – строка		–1/7	0	1	3/7	0	0	–1/7	
p_4	0	11/42	0	0	12/7	1	–5/6	2/21	(11/42):(12/7) =11/72
p_2	–1	5/42	0	1	1/7	0	1/6	–1/21	(5/42):(1/7) =5/6
p_1	–1	1/7	1	0	4/7	0	0	1/7	(1/7):(4/7) =1/4
z – строка		–11/42	0	0	2/7	0	–1/6	–1/7	
p_3	–1	11/72	0	0	1	7/12	–5/12	1/18	
p_2	–1	7/72	0	1	0				
p_1	–1	4/72	1	0	0				
z – строка		–22/72	0	0	0	–1/6	–1/36	–1/9	

Оптимальный план: $y_1 = 4/72$, $y_2 = 7/72$, $y_3 = 11/72$, $\max f = -\min(-f) = 22/72$.

Найдем $v + 3 = 1/f = 1:(22/72) = 36/11$, значит цена игры равна $v = 3/11$.

Найдем вероятности использования чистых стратегий B_j: $q_j = y_j \cdot v$

$$q_1 = \frac{4}{72}\cdot\frac{36}{11} = \frac{2}{11},\ q_2 = \frac{7}{72}\cdot\frac{36}{11} = \frac{7}{22},\ q_3 = \frac{11}{72}\cdot\frac{36}{11} = \frac{1}{2},$$

тогда оптимальная смешанная стратегия $S_B^o = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 2/11 & 7/22 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Оптимальный план $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/36$, $x_3 = 1/9$. Найдем вероятности использования чистых стратегий A_i: $p_i = x_i \cdot v$

$$p_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{36}{11} = \frac{6}{11},\ p_2 = \frac{1}{36}\cdot\frac{36}{11} = \frac{1}{11},\ p_3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{36}{11} = \frac{4}{11},$$

тогда оптимальная смешанная стратегия $S_A^o = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 6/11 & 1/11 & 4/11 \end{pmatrix}$.

Таким образом, игроку A рекомендуется из 11 раз стратегию A_1 использовать 6 раз (чаще всего), стратегию A_2 – 1 раз, стратегию A_3 – 4 раза. Игроку B рекомендуется из 22 раз стратегию B_1 использовать 4 раза, стратегию B_2 – 7 раз, стратегию A_3 – 11 раз (чаще всего). Если кто-то из участников будет отклоняться от этих рекомендаций, то он ухудшит свое собственное положение.

Глава 6
РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Изучение процессов и явлений разной природы связано с показателями, характеризующими различные стороны этих процессов. Рассматривая причинно-следственные связи, из множества причин выбирают наиболее существенные, освобождаясь от элементов случайности и действия второстепенных величин.

Вначале анализа явление должно быть проинтерпретировано с содержательной точки зрения. На основе логического анализа исследователь решает, какую из переменных рассматривать как зависимую (следствие, показатель), или переменную, подлежащую объяснению с помощью функции регрессии, и какие переменные в ходе анализа считать объясняющими (причины), независимыми или предсказывающими. Причины и следствие должны быть объяснены теорией.

На уровень развития одного показателя могут оказывать влияние множество факторов, степень влияния которых различна. Эти закономерности нужно учитывать при проведении анализа изучаемого процесса или явления, планировании и прогнозировании. Для изучения форм связи между показателем и факторами на основе статистических данных используется ***регрессионный анализ***.

Задача регрессионного анализа состоит в установлении формы зависимости между переменными, оценке функции регрессии, прогнозе значений зависимой переменной.

6.1. ОДНОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

6.1.1. Построение однофакторных моделей

Линейной регрессией Y на X называется односторонняя стохастическая линейная зависимость между случайными величинами показателя Y (объясняемой, зависимой переменной) и фактора X (объясняющей, независимой переменной), которая находятся в причинно-следственных отношениях.

Рассмотрим модель линейной регрессии. Допустим, что имеем результаты n пар независимых наблюдений, изображённых в виде множества точек в декартовой системе координат. Предположим, что между показателем y и фактором x существует стохастическая линейная зависимость. Суть задачи состоит в том, чтобы в декартовой системе координат найти линию, которая «наилучшим» образом соответствует заданному множеству точек. В этом случае линейная парная регрессионная модель имеет вид:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon ,$$

где y – зависимая переменная, x – объясняющая переменная, ε – возмущения (остатки) – величина случайная, которая характеризует влияние неучтенных факторов.

Классический регрессионный анализ оценок a и b параметров α и β основан на методе наименьших квадратов (основоположники – К. Гаусс, П. Лаплас).

Уравнение регрессии будем искать в виде линейного уравнения (6.1.1):

$$\hat{y} = a + bx . \tag{6.1.1}$$

Зависимость (6.1.1), которая характеризует среднее значение показателя y для данного значения фактора x, называется *регрессией*. Она характеризует тенденцию изменения показателя, обусловленную влиянием изменения фактора.

Для нахождения оценок параметров a и b применяют метод наименьших квадратов. Для этого составляют систему линейных уравнений Гаусса:

$$\begin{cases} an + b\sum x_i = \sum y_i, \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum y_i x_i . \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Интерпретация оценок параметров уравнения прямой линии регрессии: изменение величины фактора X на единицу при прочих равных условиях вызовет изменение показателя Y на количество единиц, равное значению b. При нулевом уровне независимой переменной (фактора) X величина a определяет значение показателя.

Для выбора и обоснования типа кривой регрессии нет универсального метода. Для описания односторонней стохастической зависимости между явлениями чаще всего применяются полиномиальная регрессия: $\hat{y}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$, гиперболическая регрессия: $\hat{y}=a+b\frac{1}{x}$, степенная регрессия: $\hat{y}=ax^b$. Применяются также показательная $\hat{y}=ab^x$, экспоненциальная $\hat{y}=e^{a+bx}$, логарифмическая $\hat{y}=a+b\ln x$ и другие функции. О характере зависимости между экономическими явлениями часто судят по внешнему виду эмпирического графика регрессии. Однако при малом числе наблюдений этот путь приводит к неудовлетворительным результатам. В каждом случае следует проверять возможность применения линейной регрессии хотя бы на ограниченном участке изменения переменных.

Если показатель y при росте x состоит из двух частей – постоянной (не зависящей от x) и переменной (уменьшающейся с ростом x), то для описания зависимости y от x следует применить уравнение гиперболы.

Если показатель y отражает процесс, который под влияние фактора х происходит с ускорением (или замедлением), то применяются полиномы.

Если процесс вначале ускоренно развивается, а затем затухает и приближается к некоторому предельному значению, то можно применить логистическую функцию $\hat{y}=a/(1+bc^x)$.

Замечание. Нелинейность связей в некоторых случаях может быть следствием качественной неоднородности изучаемой совокупности. Регрессионный анализ таких совокупностей не может быть эффективным. Поэтому любая нелинейность связей должна критически анализироваться.

Рассмотрим нелинейную регрессию в виде параболы второй степени:

$$\hat{y}=a+bx+cx^2. \qquad (6.1.2)$$

Оценку параметров уравнения (6.1.2) можно проводить с помощью метода наименьших квадратов, используя систему уравнений Гаусса:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum x + c\sum x^2, \\ \sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3, \\ \sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$\hat{y} = a + bx_1 + cx_2,$$

для оценки параметров которого, используется метод наименьших квадратов, как будет показано в пункте 6.4.

В уравнении гиперболы $\hat{y} = a + b\dfrac{1}{x}$, заменяя переменную $z = \dfrac{1}{x}$, получим линейное уравнение регрессии $\hat{y} = a + bz$, оценка параметров которого может быть произведена по методу наименьших квадратов.

Уравнение логарифмической функции:

$$\hat{y} = a + b\ln x \quad (6.1.4)$$

линейно по параметрам. Оценку параметров уравнения логарифмической функции (6.1.4) можно проводить с помощью метода наименьших квадратов, используя систему уравнений Гаусса:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum \ln x, \\ \sum y\ln x = a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Модель степенной регрессии:

$$\hat{y} = ax^b \quad (6.1.6)$$

нелинейная относительно оцениваемых параметров. Однако логарифмирование уравнения (6.1.6) приводит его к линейному виду $\ln\hat{y} = \ln a + b\ln x$.

Оценку параметров этого уравнения можно проводить с помощью метода наименьших квадратов, используя систему уравнений Гаусса:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x, \\ \sum \ln x \ln y = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2. \end{cases} \qquad (6.1.7)$$

6.1.2. Оценка качества моделей

А. **Оценка силы взаимосвязи показателей** Y и X:

- Коэффициент корреляции.

Если между двумя величинами Y и X существует *линейная* регрессия, то мы можем оценить степень, интенсивность связи между обеими величинами с помощью коэффициента корреляции r.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}, \qquad (6.1.8)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Свойства коэффициента корреляции:

1) коэффициент корреляции изменяется на отрезке от –1 до 1, т.е. $-1 \le r \le 1$.

2) при $r = \pm 1$ корреляционная связь представляет линейную функциональную зависимость.

3) при $r = 0$ линейная корреляционная связь отсутствует.

Выполнив преобразования в формуле (6.1.8), получим формулу (6.1.9) для вычисления коэффициента корреляции r:

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2}}. \qquad (6.1.9)$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Чем ближе коэффициент корреляции к ± 1, тем теснее, интенсивнее связь между *X* и *Y*. Чем ближе он к 0, тем слабее исследуемая связь.

- Коэффициент детерминации.

Одной из наиболее эффективных оценок силы взаимосвязи показателей является коэффициент детерминации.

Коэффициент детерминации R^2 равен квадрату эмпирического коэффициента корреляции между двумя рядами наблюдений: фактическими и теоретическими значениями зависимой переменной и вычисляется по формуле (6.1.10):

$$R^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}. \qquad (6.1.10)$$

Чем ближе к единице значение коэффициента детерминации, тем теоретические значения $\hat{y}$ более точно аппроксимируют фактические значения *y*. Регрессионное уравнение оценено тем лучше, чем больше коэффициент детерминации (чем он ближе к единице).

Величина $100\,R^2$ показывает, на сколько процентов изменения *Y* обусловлено изменением *X*.

Б. **Оценка значимости уравнения регрессии.**

Для проверки значимости уравнения регрессии необходимо установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных для описания зависимой переменной.

- Проверка гипотезы об отсутствии линейной связи между объясняемой и объясняющей переменной.

Вычисляем *t*-статистику по формуле (6.1.11):

$$t=r\cdot\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \qquad (6.1.11)$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k=n-2$ степенями свободы. По таблицам Стьюдента (приложение Д) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k находят табличное значение $t_{кр}(\alpha, n-2)$-статистики. Если $|t| \geq |t_{кр}|$, то с заданной надёжностью 1-α нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента при переменной x в уравнении регрессии отвергают.

Замечание. Чаще все используется уровень значимости α в 95% – достаточный, чтобы быть достоверным. Это означает, что в 95% случаев результат будет правдивым. Однако, как показывает практика, это значение также вводит в заблуждение. Нет статистических программ, показывающих вам значения «95%» или «0,95» для указанного уровня значимости. Вместо этого они показывают «0,05», что означает, что полученный результат ложен (неправилен) в пяти процентах (0,05) случаев (то же самое, что в 95% процентов случаев правдив).

- Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции (проверка гипотезы $r = 0$***).***

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции (т.е. о том, что между наблюдаемыми переменными не существует линейной зависимости) принимают F-статистику, вычисляемую по формуле (6.1.12):

$$F = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2), \qquad (6.1.12)$$

которая имеет распределение Фишера с 1 и $n-2$ степенями свободы. По таблицам Фишера (приложение Е) по заданной надёжности 1-α и числу степеней свободы $n-2$ находят табличное значение $F_{кр}$. Если $|F| \geq |F_{кр}|$, то с заданной надёжностью 1-α гипотезу об отсутствии корреляционной связи между случайными величинами X и Y следует отвергнуть и принять альтернативную гипотезу о наличии зависимости между этими случайными величинами.

Замечание. Для парной регрессии $t^2 = F$, поэтому проверка значимости коэффициента корреляции эквивалентна проверке отличия от нуля коэффициента при переменной x.

В. **Прогноз: построение доверительных интервалов.**

- Построение доверительного интервала для прогнозного значения.

Предположим, что мы хотим распространить нашу модель на другие значения независимой переменной и поставить проблему прогнозирования среднего значения y соответствующего некоторому данному значению x_0, которое может лежать как между выборочными наблюдениями от x_1 до x_n, так и вне этого интервала. Прогноз может быть точечным или интервальным.

Точечный прогноз – это вычисленное по уравнению $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ значение y_0.

Интервальный прогноз – это доверительный интервал, покрывающий с заданной надежностью 1-α ожидаемую величину y_0:

$$\hat{y}_0 - \Delta y \le y_0 \le \hat{y}_0 + \Delta y, \tag{6.1.13}$$

где

$$\Delta y = t(n-2,\alpha)\sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-2}} \ . \tag{6.1.14}$$

- Построение доверительного интервала для коэффициента β_1

Можно построить доверительный интервал для параметра β_1, который покрывает истинное значение параметра β_1 с заданной надежностью 1-α:

$$b_1 - \Delta b_1 \le \beta_1 \le b_1 + \Delta b_1, \tag{6.1.15}$$

где

$$\Delta b_1 = t(n-2,p)\sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{(n-2)\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} \ . \tag{6.1.16}$$

- Построение доверительного интервала для коэффициента корреляции r.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции r находят по формуле (6.1.17):

$$r_T - \Delta r \le r \le r_T + \Delta r, \qquad (6.1.17)$$

где

$$\Delta r = \frac{2(1-r)}{\sqrt{n-2}}. \qquad (6.1.18)$$

Для *нелинейных регрессий* рассчитывают индекс корреляции равный квадратному корню из коэффициента детерминации, вычисляемого по формуле (6.1.10).

Оценку надежности индекса корреляции проводят с помощью F - статистики, вычисляемой по формуле (6.2.19):

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m-1}, \qquad (6.1.19)$$

где m – число параметров в уравнении регрессии. По таблицам Фишера (приложение Е) по заданной надёжности 1-α и числу степеней свободы $(m-1)$ и $(n-m-1)$ находят табличное значение $F_{кр}$. Если $|F| \ge |F_{кр}|$, то с заданной надёжностью 1-α можно сделать вывод о надежности индекса корреляции.

Адекватность построенной модели изучаемому процессу может быть установлена с помощью средней ошибки аппроксимации (среднего процента расхождения теоретических значений и фактических):

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum \frac{|y - \hat{y}|}{\hat{y}} \cdot 100\%. \qquad (6.1.20)$$

При моделировании экономических показателей чаще всего допускается 5-процентная погрешность (иногда 7-процентная, редко 10-процентная). Модель считается адекватной (а значит и пригодной), если $\bar{k} \le 5\%$.

Поскольку одна и та же тенденция может быть выражена разными моделями, то часто используют ряд функций, а затем и выбирают наиболее предпочтительную. Выбор наиболее предпочтительной модели можно проводить на основе остаточного среднеквадратического отклонения (остаточной дисперсии):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum (y_\Phi - y_T)^2}{n-m}}, \qquad (6.1.21)$$

где m – число параметров в уравнении.

Лучшей будет та функция, у которой σ_0 меньше.

Пример 6.1. Исследовать зависимость объема прибыли от количества торговых точек. Сделать прогноз в предположении, что количество торговых точек будет увеличено до 25.

Объем прибыли, (тыс. грн.), y	2,2	2,25	2,24	2,1	2,9	3,1	1,9	1,85	2,16	1,68
Количество торговых точек, (шт.), x	15	17	16	13	18	19	11	10	14	9

Решение. Для нахождения параметров линейного уравнения регрессии (6.1.1) с помощью системы линейных уравнений Гаусса (6.1.2) составим вспомогательную расчетную таблицу 6.1.

Таблица 6.1

Вспомогательная расчетная таблица

x	x^2	y	xy	y^2
15	225	2,2	33	4,84
17	289	2,25	38,25	5,0625
16	256	2,24	35,84	5,0176
13	169	2,1	27,3	4,41
18	324	2,9	52,2	8,41
19	361	3,1	58,9	9,61
11	121	1,9	20,9	3,61
10	100	1,85	18,5	3,4225
14	196	2,16	30,24	4,6656
9	81	1,68	15,12	2,8224
142	2122	22,38	330,25	51,8706

Замечание. Вспомогательную расчетную таблицу 6.1 удобно строить в пакете EXCEL.

Система линейных уравнений Гаусса (6.1.2) в нашем случае примет вид:

$$\begin{cases} 10a + 142b = 22{,}38, \\ 142a + 2122b = 330{,}25. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты a и b: $a = 0{,}5633, b = 0{,}1179$.

Тогда уравнение прямой линии регрессии y на x (6.1.1) примет вид:

$$y = 0{,}5633 + 0{,}1179x.$$

Найдем показатели тесноты связи показателя Y и фактора X.

Воспользовавшись формулой (6.1.9), найдем коэффициент корреляции:

$$r = \frac{10 \cdot 330{,}25 - 142 \cdot 22{,}38}{\sqrt{10 \cdot 2122 - (142)^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 51{,}8706 - (22{,}38)^2}} = 0{,}9073$$

Таким образом, $r = 0{,}9073$. Это значит, что между переменными X и Y высокая степень взаимосвязи. Коэффициент детерминации, найденный по формуле (6.1.10), равен $R^2 = 0{,}8232$. Это означает, что регрессионное уравнение оценено хорошо, так как R^2 близок к единице, фактор X на 82,32% предопределяет изменение Y.

Для проверки гипотезы об отсутствии линейной связи между объясняемой и объясняющей переменной вычислим t-статистику по формуле (6.1.11):

$$t = 0{,}9073\sqrt{\frac{10-2}{1-0{,}8232}} = 6{,}1037.$$

По таблицам Стьюдента (приложение Д) находим табличное значение $t_{кр}(\alpha, n-2)$-статистики, t(0,05;8)=2,306. Так как наблюдаемое значение t-статистики больше критического, то гипотезу об отсутствии линейной связи между объясняемой и объясняющей переменной следует отвергнуть.

Для проверки гипотезы о значимости коэффициента корреляции вычислим F – статистику по формуле (6.1.12):

$$F = \frac{0{,}8232}{1-0{,}8232}(10-2) = 37{,}2559.$$

По таблицам Фишера (приложение Е) находим табличное значение $F_{кр}(1;8;0{,}95) = 5{,}32$. Так как наблюдаемое значение F- статистики больше критического, то гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции следует отвергнуть. Коэффициент корреляции значительно отличается от нуля, поэтому между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость.

Для построения доверительных интервалов для параметра β и коэффициента корреляции r, найдем $\overline{x} = 14{,}2; \overline{y} = 2{,}238$, затем вспомогательные вычисления проведем в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Вспомогательные вычисления

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$
15	0,8	0,64	2,3	2,36	-0,16	0,0256
17	2,8	7,84	2,25	2,6	-0,35	0,1225
16	1,8	3,24	2,24	2,48	-0,24	0,0576
13	-1,2	1,44	2,1	2,12	-0,02	0,0004
18	3,8	14,44	2,9	2,72	0,18	0,0324
19	4,8	23,04	3,1	2,84	0,26	0,0576
11	-3,2	10,24	1,9	1,88	0,02	0,0004
10	-4,2	17,64	1,85	1,76	0,09	0,0081
14	-0,2	0,04	2,16	2,24	-0,08	0,0064
9	-5,2	27,01	1,68	1,64	0,04	0,0016
		105,6				0,3126

По формуле (6.1.16) имеем:

$$\Delta b_1 = 2{,}306 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3126}{8 \cdot 105{,}6}} = 0{,}044358.$$

Тогда доверительный интервал с 95% надежностью для параметра β по формуле (6.1.15) имеет вид:

$$0{,}1179 - 0{,}044358 \le \beta \le 0{,}1179 + 0{,}044358;$$

$$0{,}07355 \le \beta \le 0{,}16225.$$

Полученный доверительный интервал не содержит нуля, поэтому можно говорить об отличии параметра β_1 от нуля.

Для нахождения доверительного интервала для коэффициента корреляции r найдем Δr по формуле (6.1.18):

$$\Delta r = \frac{2\cdot(1-0{,}9073)}{\sqrt{10-2}} = \frac{0{,}0927}{2{,}83} = 0{,}03275.$$

Коэффициент корреляции имеет следующий доверительный интервал, найденный по формуле (6.1.17):

$$0{,}9073 - 0{,}03275 \le r \le 0{,}9073 + 0{,}03275;$$

$$0{,}86465 < r \le 0{,}94005.$$

Доверительный интервал для коэффициента корреляции говорит о высокой степени линейной корреляционной связи между переменными.

Предположим, что количество торговых точек будет увеличено до 25, тогда x = 25. Подставив это значение в построенное уравнение прямой линии регрессии, получим:

$y_0 = 0{,}5633 + 0{,}1179\cdot 25 = 3{,}5108$ – это ожидаемый объем прибыли.

Для нахождения доверительного интервала для прогнозного значения вычислим по формуле (6.1.14) величину Δy:

$$\Delta y == 2{,}306\cdot\sqrt{\frac{0{,}3126}{8}} = 0{,}4558.$$

Найдем доверительный интервал для прогнозного значения по формуле (6.1.13):

$$3{,}5108 - 0{,}4558 \le y_0 \le 3{,}5108 + 0{,}4558;$$

$$3{,}055 \le y_0 \le 3{,}9666.$$

Таким образом, при наличии 25 торговых точек объем прибыли будет от 3055 до 3966,6 тыс. гривен.

Замечание. Для построения регрессионной модели и оценки силы взаимосвязи показателей Y и X удобно использовать пакет EXCEL. Для этого при нахождении уравнения регрессии, в падающем меню *Сервис*⇒ выбрать команду *Анализ данных*⇒ выбрать инструмент анализа *Регрессия*⇒ в разделе *Входные данные* в текстовом поле *Входной интервал Y* ввести диапазон для *Y*⇒ в разделе *Входные данные* в текстовом поле *Входной интервал X* ввести диапазоны для X ⇒ в разделе *Параметры вывода* в опции *Новый рабочий лист* установить флажок

Результаты расчетов для данного примера с помощью пакета электронных таблиц EXCEL имеют вид:

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,907318995
R-квадрат	0,823227759
Нормир. R-квадрат	0,801131228
Стандартная ошибка	0,198554137
Наблюдения	10

Y	X
2,2	15
2,25	17
2,24	16
2,1	13
2,9	18
3,1	19
1,9	11
1,85	10
2,16	14
1,68	9

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	1	1,468770038	1,46877003	37,255974	0,000288272
Остаток	8	0,315389962	0,03942374		
Итого	9	1,78416			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	0,563314394	0,281461936	2,00138746	0,0803433	-0,08573841	1,212367202
Переменная X 1	0,117935606	0,019321773	6,10376721	0,0002883	0,073379488	0,162491724

На основании данных таблицы можно сделать такие выводы:

- множественный коэффициент $R = 0,907$;
- уравнение множественной регрессии $y = 0,563 + 0,117X$;
- F-статистика $37,26$.

Сравнивая полученное значение с F_{kp}, найденным по таблице Фишера ($F_{кр}(1;8;0,95) = 5,32$), получим, что $F > F_{kp}$, т.е. уравнение регрессии значимо.

- t-статистика для коэффициента b равна 6,104, для коэффициента.

Сравнивая t_{kp}, найденное по таблице Стьюдента t(0,05;8) = 2,306, с t-статистикой, получаем, что t-статистика больше t_{kp}. Следовательно, коэффициенты b достаточно надежен.

- доверительный интервал для параметра b уравнения регрессии: (0,073;0,162).

Для наглядного представления изобразим графически данные примера, и прямую линию, соответствующую построенной модели.

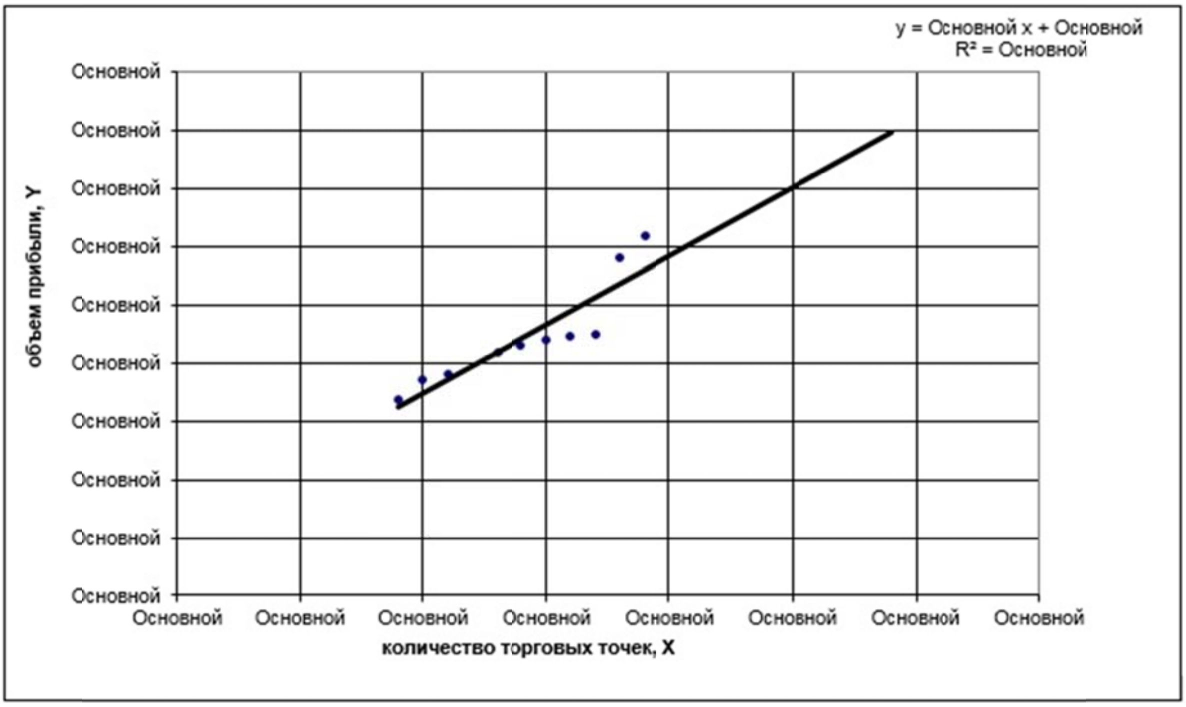


Рис. 6.1. Диаграмма уравнения прямой линии регрессии Y на X

Замечание. Удобно изображать графически данные в виде диаграмм, выбрав соответствующую им линию регрессии в пакете Excel. Для этого нужно войти в опцию *Вставка*$\Rightarrow$ в появившемся меню выбрать опцию *Диаграмма*$\Rightarrow$ в появившемся окне Мастер диаграмм в меню Тип выбрать опцию *Точечная*$\Rightarrow$ в появившемся окне указать рассматриваемый диапазон данных. Для изображения линии регрессии на точечной диаграмме активизировать одну из точек, правой кнопкой мыши вызвать меню, выбрать опцию *Добавить линию тренда* $\Rightarrow$ в появившемся окне *Линия тренда* во вкладке *Тип* выбрать в данном случае *Линейная* $\Rightarrow$ войти во вкладку *Параметры* и выбрать опцию *Показывать уравнение на диаграмме,* затем выбрать *достоверности аппроксимации (R^2).*

Пример 6.2. Исследовать зависимость показателя y и фактора x с помощью логарифмической, степенной и полиномиальной регрессий.

x	18,4	25,6	27,9	30,8	32,8	35,3	38,5	45,6	34,7	23,9	19,3
y	75,8	64,8	61,5	60,8	48,8	59,7	54,8	57,3	56,8	64,8	80,7

Решение. Для построения логарифмической, степенной и полиномиальной регрессий рассчитаем вспомогательную таблицу 6.3.

Для оценки параметров уравнения параболической функции составим систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.3):

$$\begin{cases} 685{,}8 = 11b_0 + 332{,}8b_1 + 10752{,}3b_2, \\ 20150{,}01 = 332{,}8b_0 + 10752{,}3b_1 + 367725{,}34b_2, \\ 636413{,}56 = 10752{,}3b_0 + 367725{,}34b_1 + 13195797{,}04b_2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем b_0=142,83, b_1= – 4,599, b_2= 0,06. По формуле (6.1.2) уравнение параболической функции имеет вид:

$$y = 142{,}83 - 4{,}599x + 0{,}06x^2.$$

Для оценки параметров уравнения логарифмической функции составим систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.5):

$$\begin{cases} 685{,}8 = 11b_0 + 37{,}112b_1, \\ 2292{,}02 = 37{,}12b_0 + b_1 126{,}04. \end{cases}$$

Таблица 6.3

Вспомогательная расчетная таблица

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$y\ln x$	$\ln y$	$\ln x \ln y$
18,4	75,8	338,56	6229,50	114622,87	1394,72	25662,85	2,91	8,48	220,76	4,33	12,60
25,6	64,8	655,36	16777,22	429496,73	1658,88	42467,33	3,24	10,51	210,12	4,17	13,53
27,9	61,5	778,41	21717,64	605922,13	1715,85	47872,22	3,33	11,08	204,71	4,12	13,71
30,8	60,8	948,64	29218,11	899917,85	1872,64	57677,31	3,43	11,75	208,39	4,11	14,08
32,8	48,8	1075,84	35287,55	1157431,71	1600,64	52500,99	3,49	12,18	170,33	3,89	13,57
35,3	59,7	1246,09	43986,98	1552740,29	2107,41	74391,57	3,56	12,70	212,76	4,09	14,57
38,5	54,8	1482,25	57066,63	2197065,06	2109,80	81227,30	3,65	13,33	200,06	4,00	14,62
45,6	57,3	2079,36	94818,82	4323738,01	2612,88	119147,33	3,82	14,59	218,88	4,05	15,46
34,7	56,8	1204,09	41781,92	1449832,73	1970,96	68392,31	3,55	12,58	201,45	4,04	14,33
23,9	64,8	571,21	13651,92	326280,86	1548,72	37014,41	3,17	10,07	205,67	4,17	13,24
19,3	80,7	372,49	7189,06	138748,80	1557,51	30059,94	2,96	8,76	238,88	4,39	13,00
332,8	685,8	10752,3	367725,34	13195797,04	20150,01	636413,56	37,12	126,04	2292,02	45,36	152,71

Решив эту систему, найдем b_0=155,14, b_1= – 27,5. По формуле (6.1.4) уравнение логарифмической функции имеет вид:

$$y = 155,14 - 27,5 \ln x$$

Для оценки параметров уравнения степенной функции составим систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.7):

$$\begin{cases} 45,36 = 11 \ln b_0 + 37,12 b_1, \\ 152,71 = 37,12 \ln b_0 + 126,04 b_1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\ln b_0$=5,54, b_1= – 0,42. Откуда b_0 =254,87. По формуле (6.1.6) уравнение степенной функции имеет вид:

$$y = 254,87 x^{-0,42}.$$

Для каждой из полученных моделей найдем индекс корреляции по формуле, F -статистику по формуле (6.2.22), среднюю ошибку аппроксимации по формуле (6.1.23). Для адекватных моделей вычислим остаточную дисперсию по формуле (6.1.24). Результаты представим в таблице 6.4.

Таблица 6.4

Модель	**Уравнение**	**R**	**F**	**$F_{кр}$**	$\bar{k}$	σ_0
параболическая	$y = 142,83 - 4,599x + 0,06x^2$	0,93	22,41	4,74	3,96	3,88
логарифмическая	$y = 155,14 - 27,5 \ln x$	0,85	20,83	4,46	5,27	0,65
степенная	$y = 254,87 x^{-0,42}$	0,84	19,17	4,46	4,83	4,78

Сравнивая значения F -статистики с $F_{кр}$, можно сделать вывод о надежности индекса корреляции для соответствующих нелинейных моделей. Для построенных моделей можно сделать вывод, что все модели являются адекватными, поскольку средняя ошибка аппроксимации не превышает 5–7%, однако наилучшей является логарифмическая модель, которая имеет наименьшую остаточную дисперсию.

6.1.3. Модели рядов динамики

Частным случаем однофакторных моделей являются модели рядов динамики, которые характеризуют развитие показателя во времени (товарооборота, объема выпуска продукции, производительности труда и т.д.).

Ряды динамики, как правило, представляют в виде таблицы. Для изображения часто ряда используют графики и диаграммы, которые позволяют заметить сложившиеся тенденции в изменении показателей. Закономерность в развитии значений ряда в одних случаях проявляется четко, в других – она может быть «размыта» за счет случайных или вполне определенных причин.

Изучая ряды динамики, стремятся выявить основную, главную тенденцию в изменении показателей. Аналитическое моделирование рядов динамики проводит с помощью тех же экономико-математических моделей, что и в случае однофакторных моделей: линейной, параболической, гиперболической, показательной, степенной, логарифмической.

Выравнивание по прямой $y = a + bx$ дает эффект, как правило, в тех случаях, когда абсолютные приросты в среднем одинаковы. Параметры уравнения можно интерпретировать так: «*a*» – среднее значение показателя в базисном году, «*b*» – его средний абсолютный прирост по годам. Применение гиперболической функции $y = a + b / x$ целесообразно в тех случаях, когда темпы роста показателя (или его уменьшения) имеют тенденцию к снижению, а параметры выражают следующие величины: «*a*» – предельное значение показателя (достижимая норма), а «*b*» – коэффициент отклонения от нормы. Выравнивание по функции $y = a \cdot b^x$ производится в основном, когда темпы роста показателя, рассчитанные по отношению к предыдущему периоду, более или менее постоянны. При этом параметр «*b*» характеризует средний темп роста изучаемого показателя.

Наибольшая трудность в математическом моделировании (и в выравнивании рядов динамики, в частности) заключается в выборе подходящей модели, формы аналитической зависимости. Иногда вид уравнения можно подобрать, ориентируясь на графическое изображение ряда. Иногда о типе уравнения можно судить, исходя из сути показателя. Но даже когда тенденция развития показателя известна, ее (тенденцию) можно выразить с помощью различных уравнений. Этот момент предопределяет использование нескольких моделирующих функций для выравнивания одного и того же ряда динамики с последующей их оценкой и выбором наиболее предпочтительной.

Параметры выбранных для моделирования функций можно находить различными путями. Наиболее точным приемом является метод наименьших квадратов. На его основе для каждой из функций формируют специальную систему уравнений Гаусса. Для указанных функций приведем соответствующие системы уравнений Гаусса в таблице 6.5:

Таблица 6.5

Системы уравнений Гаусса для простейших моделей

Модель	Уравнение	Система уравнений Гаусса
Линейная	$y = a + bx$	$\begin{cases} \sum y = na + b\sum x \\ \sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \end{cases}$ (6.1.22)
Параболическая	$y = a + bx + cx^2$	$\begin{cases} \sum y = na + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{cases}$ (6.1.23)
Гиперболическая	$y = a + \frac{b}{x}$	$\begin{cases} \sum y = na + b\sum 1/x \\ \sum y/x = a\sum 1/x + b\sum 1/x^2 \end{cases}$ (6.1.24)
Экспоненциальная	$y = a \cdot e^{bx}$	$\begin{cases} \sum \ln y = n\ln a + b\sum x \\ \sum x\ln y = \ln a\sum x + b\sum x^2 \end{cases}$ (6.1.25)
Степенная	$y = a \cdot x^b$	$\begin{cases} \sum \ln y = n\ln a + b\sum \ln x \\ \sum (\ln x)\ln y = \ln a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 \end{cases}$ (6.1.26)
Логарифмическая	$y = a + b\ln x$	$\begin{cases} \sum y = na + b\sum \ln x \\ \sum y\ln x = a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 \end{cases}$ (6.1.27)

В каждой из систем (6.1.26) – (6.1.31) y – анализируемый показатель; x – фактор времени; n – количество наблюдений; a, b, c – параметры моделей.

Отчет временного показателя x начинают с 1. Основываясь на опытных значениях x и y, определяют все суммы и подставляют их в системы, в результате чего получают системы уравнений относительно неизвестных параметров. Решая системы, находят конкретные значения параметров и подставляют их в уравнения моделирующих функций, которые должны статистически оцениваться и используются на практике.

Адекватность экономико-математической модели может быть установлена с помощью средней ошибки аппроксимации, вычисляемой по формуле (6.1.23). Выбор наиболее предпочтительной модели можно проводить на основе остаточного среднеквадратического отклонения (остаточной дисперсии), рассчитываемого по формуле (6.1.24). Оценку надежности уравнения проводят по критерию Фишера, вычисляя F-статистику.

Пример 6.3. Проанализировать показатели реализации продукции на предприятии за ряд лет. Найти уравнения линейной, параболической и гиперболической, показательной, степенной и логарифмической зависимостей. Проверить адекватность полученных математических моделей, определить наилучшую модель.

Год	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Объем реализации изделий, тыс. тонн	19,1	22,9	23,7	23,9	24,5	26,6	25,7	26,1	26,2	27,6

Решение. Данные таблицы показывают, что реализация продукции неуклонно возрастала, хотя происходило это неравномерно. Очевидно, существует ряд факторов, под влиянием которых изменяется величина объема реализации. Некоторые из факторов могут действовать долгосрочно, а другие – кратковременно; некоторые могут быть важными, другие – случайными.

Составим вспомогательную расчетную таблицу 6.6 и на ее основе сформируем системы Гаусса.

В последней строке таблицы 6.6 указаны суммы всех значений для каждого столбца.

Таблица 6.6

Вспомогательные расчеты для формирования систем Гаусса

x	y	x^2	x^3	x^4	yx	yx^2	$1/x$	$1/x^2$	y/x
1	19,1	1	1	1	19,1	19,1	1	1	19,1
2	22,9	4	8	16	45,8	91,6	0,5	0,25	11,45
3	23,7	9	27	81	71,1	213,3	0,33333	0,11111	7,9
4	23,9	16	64	256	95,6	382,4	0,25	0,0625	5,975
5	24,5	25	125	625	122,5	612,5	0,2	0,04	4,9
6	26,6	36	216	1296	159,6	957,6	0,16666	0,02777	4,43333
7	25,7	49	343	2401	179,9	1259,3	0,14285	0,02040	3,67142
8	26,1	64	512	4096	208,8	1670,4	0,125	0,01562	3,2625
9	26,2	81	729	6561	235,8	2122,2	0,11111	0,01234	2,91111
10	27,1	100	1000	10000	271	2710	0,1	0,01	2,71
55	245,8	385	3025	25333	1409,2	10038,4	2,92896	1,54976	66,3133

Продолжение Таблицы 6.6

$\ln y$	$x\ln y$	$\ln x$	$\ln x\ln y$	$(\ln x)^2$	$y\ln x$
2,94968	2,94968	0	0	0	0
3,13113	6,26227	0,69314	2,17033	0,48045	15,8730
3,16547	9,49642	1,09861	3,47763	1,20694	26,0371
3,17387	12,6955	1,38629	4,39993	1,92181	33,1324
3,19867	15,9933	1,60943	5,14806	2,59029	39,4312
3,28091	19,6854	1,79175	5,87860	3,21040	47,6608
3,24649	22,7254	1,94591	6,31738	3,78656	50,0098
3,26193	26,0954	2,07944	6,78300	4,32407	54,2734
3,26575	29,3918	2,19722	7,17560	4,82779	57,5672
3,29953	32,9953	2,30258	7,59745	5,30189	62,4000
31,9734	178,290	15,1044	48,9480	27,6502	386,385

Для определения параметров уравнения линейной функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.21):

$$\begin{cases} 245{,}8 = 11a + 55b, \\ 1409{,}2 = 55a + 385b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем a = 20,76, b = 0,6945. Таким образом, получим уравнение линейной модели $y = 20{,}76 + 0{,}6945x$.

Для определения параметров уравнения параболической функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.22):

$$\begin{cases} 245{,}8 = 11a + 55b + 385c, \\ 1409{,}2 = 55a + 385b + 3025c, \\ 10038{,}4 = 385a + 3025b + 25333c. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем a = 18,46, b = 1,845, c = – 0,105. Таким образом, получим уравнение параболической модели $y = 18{,}46 + 1{,}845\,x - 0{,}105\,x^2$.

Для определения параметров уравнения гиперболической функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.23):

$$\begin{cases} 245{,}8 = 11a + 2{,}939b, \\ 66{,}31 = 2{,}939a + 1{,}55b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем a = 66,156, b = -80,117. Таким образом, получим уравнение гиперболической модели $y = 66{,}156 - \dfrac{80{,}117}{x}$.

Для определения параметров уравнения экспоненциальной функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.24):

$$\begin{cases} 31{,}973 = 11\ln a + 55b, \\ 178{,}29 = 55\ln a + 385b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\ln a$ = 3,034, b = 0,295, тогда a = 20,799. Таким образом, получим уравнение экспоненциальной модели $y = 20{,}799e^{0{,}295x}$.

Для определения параметров уравнения степенной функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (6.1.25):

$$\begin{cases} 31{,}973 = 11\ln a + 15{,}1b, \\ 49{,}95 = 15{,}1\ln a + 27{,}65b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $\ln a$ = 2,993, b = 0,135, тогда a = 19,947. Таким образом, получим уравнение степенной модели $y = 19{,}947x^{0{,}135}$.

Для определения параметров уравнения логарифмической функции запишем систему уравнений Гаусса по формуле (3.1.26):

$$\begin{cases} 245{,}8 = 11a + 15{,}1b, \\ 386{,}385 = 15{,}1a + 27{,}65b. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем a = 19,858, b = 3,126. Таким образом, получим уравнение логарифмической модели $y = 19{,}858 + 3{,}126 \ln x$.

Для нахождения средней ошибки аппроксимации, остаточного среднеквадратического отклонения, F – статистики для построенных моделей построим вспомогательную расчетную таблицу 6.7.

В последней строке таблицы 6.7 указаны суммы всех значений соответствующих столбцов.

Для линейной модели средняя ошибка аппроксимации, найденная по формуле (6.1.23), $\bar{k}$ = 33,78/10 = 3,378 меньше 5%. Значит, линейная модель адекватна фактическим данным и пригодна для дальнейшего использования. Остаточная дисперсия, рассчитанная по формуле (6.1.24) при m = 2, равна 1,17. Для оценки надежности уравнения линейной модели по формуле (6.1.22), найдем F-статистику: F=29,16. По таблицам распределения Фишера (приложение Е) найдем $F_{кр}$ (1;8;0,05) = 5,32. Поскольку $F > F_{кр}$, то уравнение линейной модели можно считать надежным с вероятностью 0,95.

Проведя аналогичные исследования для остальных моделей, результаты представим в таблице 6.8.

Из сравнения средних ошибок аппроксимации видно, что только для гиперболической функции она выходит за 5% уровень, у остальных моделей эта характеристика не выходит за 5% уровень и приблизительно одинаковая. Если оценивать преимущество, то очевидно, что лучшей является логарифмическая модель, поскольку у нее остаточное среднеквадратичное отклонение σ_0 меньше всего.

6.2. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ ДАННЫХ И ОСТАТКОВ

В процессе исследования экономических явлений в качестве исходных статистических значений используют экономические величины, характеризующие размер исследуемых показателей и требующие эконометрического анализа и оценки.

Таблица 6.7

Вспомогательная расчетная таблица

	Линейная модель				Параболическая модель				Гиперболическая модель			
$y_ф$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$
19,1	21,45	10,97	5,54	9,77	20,20	5,45	1,21	19,18	-13,96	236,81	1093,03	1485,41
22,9	22,15	3,39	0,56	5,91	21,73	5,38	1,37	8,12	26,10	12,25	10,22	2,30
23,7	22,84	3,75	0,73	3,02	23,05	2,81	0,42	2,33	39,45	39,92	248,07	221,13
23,9	23,54	1,54	0,13	1,09	24,17	1,10	0,07	0,17	46,13	48,19	494,03	464,26
24,5	24,23	1,10	0,07	0,12	25,07	2,27	0,32	0,24	50,13	51,13	657,03	652,94
26,6	24,93	6,71	2,80	0,12	25,77	3,24	0,70	1,40	52,80	49,62	686,61	796,55
25,7	25,62	0,31	0,01	1,08	26,25	2,10	0,30	2,79	54,71	53,03	841,62	907,86
26,1	26,32	0,82	0,05	3,01	26,53	1,61	0,18	3,79	56,14	53,51	902,48	996,12
26,2	27,01	3,00	0,66	5,91	26,60	1,49	0,16	4,06	57,25	54,24	964,36	1067,60
27,1	27,71	2,18	0,37	9,77	26,46	2,44	0,42	3,52	58,14	53,39	963,75	1126,56
24,58		33,78	10,92	39,79		27,89	5,15	45,62		652,09	6861,20	604,18

Продолжение Таблицы 6.7

	Экспоненциальная модель				Степенная модель				Логарифмическая модель			
$y_ф$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$	y_T	k	$(y_Ф - y_T)^2$	$(y_T - \bar{y})^2$
19,1	21,42	10,84	5,39	9,97	19,95	4,25	0,72	21,46	19,86	3,82	0,57	22,30
22,9	22,06	3,79	0,70	6,33	21,91	4,53	0,99	7,15	22,03	3,97	0,77	6,53
23,7	22,72	4,30	0,95	3,45	23,14	2,42	0,31	2,07	23,29	1,75	0,17	1,66
23,9	23,40	2,12	0,25	1,38	24,06	0,66	0,03	0,27	24,19	1,21	0,09	0,15
24,5	24,10	1,64	0,16	0,23	24,80	1,19	0,09	0,05	24,89	1,57	0,15	0,10
26,6	24,83	7,14	3,15	0,06	25,41	4,66	1,41	0,70	25,46	4,48	1,30	0,77
25,7	25,57	0,51	0,02	0,98	25,95	0,96	0,06	1,88	25,94	0,93	0,06	1,85

Окончание Таблицы 6.7

26,1	26,34	0,89	0,06	3,08	26,42	1,22	0,10	3,40	26,36	0,98	0,07	3,17
26,2	27,12	3,41	0,85	6,47	26,85	2,41	0,42	5,14	26,73	1,97	0,28	4,61
27,1	27,94	2,99	0,70	11,26	27,23	0,48	0,02	7,03	27,06	0,16	0,00	6,13
24,58		37,63	12,22	43,22		22,79	4,14	49,14		20,84	3,45	47,27

Таблица 6.8

Характеристики оценки построенных моделей

Модель	$\overline{k}$	σ_0		F	$F_{кр}$	
Линейная	3,378	1,17	адекватна	29,16	5,32	надежна
Параболическая	2,79	0,86	адекватна	62,03	5,59	надежна
Гиперболическая	65,21	-	неадекватна	0,7	5,32	ненадежна
Экспоненциальная	3,76	1,24	адекватна	28,3	5,32	надежна
Степенная	2,28	0,72	адекватна	95,04	5,32	надежна
Логарифмическая	2,08	0,66	адекватна	109,64	5,32	надежна

При этом следует иметь в виду, что показатели временных рядов часто имеют своеобразную особенность: следующее значение в определенной мере зависит от предшествующих значений. Такое явление получило название *автокорреляции*.

6.2.1. Автокорреляция данных

Автокорреляцией данных называется явление взаимосвязи последующих значений показателя от его предшествующих значений.

Наличие автокорреляции данных ведет к ухудшению уравнения регрессии, увеличению величины ошибок оценок параметров, расширению доверительных интервалов, снижению показателей значимости.

Выявление автокорреляции, возможное ее исключение (или уменьшение до допустимого уровня), делает дальнейшее моделирование зависимости признаков и прогнозирование более надежным и достоверным.

Для уменьшения автокорреляции абсолютных значений показателей существуют различные способы. Почти все они основаны на исключении главной

временной тенденции (тренда) из начальных данных.

Уровень автокорреляции измеряют с помощью *нециклического коэффициента автокорреляции первого порядка*, который равняется парному коэффициенту корреляции между исходным временным рядом и рядом, смещенным на один период:

$$r_a(y)=\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}y_i y_{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}y_i\sum_{i=1}^{n-1}y_{i+1}}{\sqrt{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)^2}\sqrt{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}y_{i+1}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_{i+1}\right)^2}}. \qquad (6.2.1)$$

Для того чтобы сделать вывод о наличии автокорреляции в исследуемом динамическом ряду, фактическое значение коэффициента сравнивают с критическим $r_{kp}(n-1,\alpha)$ (приложение Ж). Если $|r_a(y)|>r_{kp}$, то можно утверждать, что автокорреляция данных присутствует. В противоположном случае, то есть если $|r_a(y)|<r_{kp}$, можно говорить об ее отсутствии.

Пример 6.4. Исследовать на автокорреляцию динамический ряд:

t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
y	19,1	22,9	23,7	23,9	24,5	26,6	25,7	26,1	26,2	27,6

Решение. Для расчета нециклического коэффициента автокорреляции первого порядка построим вспомогательную таблицу.

Таблица 6.9

Вспомогательная таблица для расчета коэффициента автокорреляции

y_i	y_{i+1}	y_i^2	y_{i+1}^2	$y_i\, y_{i+1}$
19,1	22,9	364,81	524,41	437,39
22,9	23,7	524,41	561,69	542,73
23,7	23,9	561,69	571,21	566,43
23,9	24,5	571,21	600,25	585,55
24,5	26,6	600,25	707,56	651,7
26,6	25,7	707,56	660,49	683,62
25,7	26,1	660,49	681,21	670,77
26,1	26,2	681,21	686,44	683,82
26,2	27,1	686,44	734,41	710,02
218,7	226,7	5358,07	5727,67	5532,03

По формуле (6.2.1) имеем:

$$r_a(y) = \frac{9 \cdot 5532{,}03 - 218{,}7 \cdot 226{,}7}{\sqrt{9 \cdot 5358{,}07 - 218{,}7^2}\sqrt{9 \cdot 5727{,}07 - 226{,}7^2}} = 0{,}843\,.$$

Критическое значение коэффициента автокорреляции, найденное по таблице (приложение Д), таково $r_{kp}(n-1,\alpha) = r_{kp}(9;0{,}05) = 0{,}366$. Поскольку $|\,r_a(y)\,| > r_{kp}$, то можно сделать вывод, что между уровнями показателя y автокорреляция присутствует.

6.2.2. Автокорреляция остатков

Методика применения метода наименьших квадратов предполагает, что значения случайной переменной попарно не коррелированы, или они попарно независимы в вероятностном смысле. Если же переменные содержат тренд или циклические колебания, то последовательные остатки могут быть коррелированны. Такой вид корреляции называется автокорреляцией остатков или *возмущений*.

Причины возникновения автокорреляции.

1. В модель не включен фактор, играющий существенную роль в изучаемом процессе.

2. Неверно выбрана спецификация модели.

3. Имеются значительные ошибки в информационной базе, используемой в моделировании.

4. Не учтено влияние малозначимых переменных, действие которых проявляется в отклонениях.

Автокорреляция остатков затрудняет применение классических методов анализа временных рядов. В моделях регрессии, которые описывают зависимости между случайными значениями взаимозависимых величин, она снижает эффективность применения МНК.

Для определения автокорреляции остатков используют *критерий Дарбина-Уотсон*а. Суть его состоит в том, что рассчитывается *d*-статистика по формуле (6.2.2):

$$d = \sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 , \qquad (6.2.2)$$

где $e_i = y_{\Phi i} - y_{Ti}$, $y_{\Phi i}$ – фактические значения показателя, y_{Ti} – соответствующие теоретические значения показателя.

Статистика Дарбина-Уотсона применяется для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков e_i первого порядка (нулевая гипотеза). Для этого по таблицам (приложение 3) находят (при данном уровне значимости, числе наблюдений и независимых переменных) доверительные интервалы, в пределах которых нулевая гипотеза принимается, отвергается или не может быть принята или отвергнута. Вычисленное значение d сравнивается с интервалами, найденными в соответствии со значениями $d_H(n,m,\alpha)$ и $d_B(n,m,\alpha)$ (приложение 3). Здесь n – количество наблюдений, m – число факторов, α – уровень значимости. Все интервалы можно представить в таблице 6.10.

Таблица 6.10

Расчет интервалов

Принимаем гипотезу о существовании положительной автокорреляции	**Зона неопределенности**	**Принимаем гипотезу об отсутствии автокорреляции**	**Зона неопределенности**	**Принимаем гипотезу о существовании отрицательной автокорреляции**
$0 \; d_H$		$d_B \; 4-d_B$		$4-d_H \; 4$

Пример 6.5. Исследовать логарифмическую модель $y = 19{,}858 + 3{,}126 \ln x$, построенную по данным динамического ряда примера 6.3, на наличие автокорреляции остатков.

Решение. Для расчета *d*-статистики построим вспомогательную таблицу 6.11.

Таблица 6.11

Вспомогательная таблица для расчета *d*-статистики

x	$y_{\Phi i}$	y_{Ti}	$e_i = y_{\Phi i} - y_{Ti}$	e_{i-1}	$(e_i - e_{i-1})^2$	e_i^2
1,00	19,10	19,86	-0,76			0,57
2,00	22,90	22,03	0,87	-0,76	2,67	0,77
3,00	23,70	23,29	0,41	0,87	0,22	0,17
4,00	23,90	24,19	-0,29	0,41	0,49	0,09
5,00	24,50	24,89	-0,39	-0,29	0,01	0,15
6,00	26,60	25,46	1,14	-0,39	2,34	1,30
7,00	25,70	25,94	-0,24	1,14	1,91	0,06
8,00	26,10	26,36	-0,26	-0,24	0,00	0,07
9,00	26,20	26,73	-0,53	-0,26	0,07	0,28
10,00	27,10	27,06	0,04	-0,53	0,33	0,00
				Σ	8,03	3,45

Замечание. Таблицу 6.11 удобно строить в пакете EXCEL. Для этого при нахождении уравнения регрессии, в падающем меню *Сервис*$\Rightarrow$ выбрать команду *Анализ данных*$\Rightarrow$ выбрать инструмент анализа *Регрессия*$\Rightarrow$ в разделе *Входные данные* в текстовом поле *Входной интервал Y* ввести диапазон для *Y*$\Rightarrow$ в разделе *Входные данные* в текстовом поле *Входной интервал X* ввести диапазоны для X_1 *и* $X_2 \Rightarrow$ в разделе Параметры вывода в опции *Новый рабочий лист* установить флажок $\Rightarrow$ в разделе *Остатки* в опции *Остатки* установить флажок. В результате на странице *Вывод* итогов получим таблицу *Вывод остатка*, состоящую из трех столбцов: *наблюдение, предсказанное Y, остатки*. Вставим второй столбец, в который введем исходные данные для *Y*. Скопируем четвертый столбец без последнего элемента и вставим его в пятый, начиная со второй строки. В шестом столбце найдем разность между элементами четвертого и пятого столбцов и возведем ее в квадрат, а в седьмом столбце возведем в квадрат элементы четвертого. Найдем сумму элементов шестого и седьмого столбцов в отдельности.

С помощью формулы (6.2.2) найдем *d*-статистику:

$$d = \sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 8{,}03/3{,}45 = 2{,}33$$

Вычисленное значение *d* сравнивается с интервалами, найденными в соответствии со значениями $d_H(n,m,\alpha)$ и $d_B(n,m,\alpha)$ (приложение З). Здесь *n* – количество наблюдений, *m* – число факторов, α – уровень значимости. Найдем по таблице (приложение З) нижнее и верхнее значения статистики Дарбина-Уотсона при 5%-ном уровне значимости, то есть при α=0,05: $d_H(10;1;0{,}05) = 0{,}88$ и $d_B(10;1;0{,}05) = 1{,}32$. Расчет доверительные интервалов для *d*–статистики представим в таблице 6.12:

Таблица 6.12

Расчет интервалов

Принимаем гипотезу о существовании положительной автокорреляции	**Зона неопределенности**	**Принимаем гипотезу об отсутствии автокорреляции**	**Зона неопре определенности**	**Принимаем гипотезу о существовании отрицательной автокорреляции**
0 d_H		d_B $4-d_B$		$4-d_H$ 4
0 0,88		1,32 2,68		3,12 4

Из таблицы видно, что *d*-статистика удовлетворяет неравенству:

$$1{,}32 < 2{,}33 < 2{,}68,$$

значит, по критерию Дарбина-Уотсона, принимаем гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков.

Замечание. Если значение d-статистики удовлетворяет неравенствам $d_H < d < d_B$ или $4 - d_B < d < 4 - d_H$, то при выбранном уровне значимости невозможно сделать вывод о наличии или об отсутствии автокорреляции остатков, необходимо дальнейшее исследование. Это является недостатком критерия Дарбина-Уотсона.

6.3. ПРОБЛЕМА МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТИ

На практике при количественной оценке параметров эконометрической модели довольно часто сталкиваются с проблемой взаимосвязи между объясняющими переменными. Если взаимосвязь довольно тесная, то оценка параметров модели может иметь большую погрешность. Такая взаимосвязь между объясняющими переменными называется ***мультиколлинеарностью***. Проблема мультиколлинеарности возникает только для случая множественной регрессии, поскольку в парной регрессии одна объясняющая переменная. Оценка коэффициента регрессии может оказаться незначимой не только из-за несущественности данного фактора, но и из-за трудностей, возникающих при разграничении воздействия на зависимую переменную двух или нескольких факторов. Это проявляется, когда факторы изменяются синхронно. Связь зависимой переменной с изменениями каждого из них можно определить, только если в число объясняющих переменных включается только один из этих факторов.

Природа мультиколлинеарности нагляднее всего проявляется, когда между объясняющими переменными существует строгая линейная связь. Это строгая мультиколлинеарность, когда невозможно разделить вклад каждой переменной в объяснение поведения результативного показателя. Чаще встречается нестрогая, или стохастическая мультиколлинеарность, когда объясняющие переменные коррелированы между собой. В этом случае проблема возникает только тогда, когда взаимосвязь переменных влияет на результаты оценки регрессии.

Основные последствия мультиколлинеарности:

1) понижается точность оценки параметров регрессии, что проявляется в трех аспектах:

- ошибки некоторых оценок становятся очень большими;
- эти ошибки сильно коррелированными друг с другом;
- выборочные дисперсии сильно возрастают;

2) коэффициенты некоторых введенных в регрессию переменных оказываются незначимыми, но в силу экономических соображений именно эти переменные должны оказывать заметное влияние объясняемую переменную;

3) оценки коэффициентов становятся очень чувствительными к выборочным наблюдениям (небольшое увеличение объема выборки приводит к очень сильным сдвигам в значениях оценок).

Причины возникновения мультиколлинеарности:

1) в модель включены факторные признаки, характеризующие одну и ту же сторону явления;

2) уравнение регрессии содержит в качестве факторных признаков такие показатели, суммарное значение которые представляет собой постоянную величину;

3) в модели использованы факторные признаки, являющиеся составными элементами друг друга;

4) в моделирующую функцию включены факторные признаки, по смыслу дублирующие друг друга.

Проблема мультиколлинеарности является обычной для регрессии временных рядов, т.е. когда данные состоят из ряда наблюдений в течение некоторого периода времени. Если две или более объясняющие переменные имеют ярко выраженной временной тренд, то они будут тесно коррелированы и это может привести к мультиколлинеарности.

Если среди парных коэффициентов корреляции независимых переменных существуют такие, значение которых приближается или равно множественному коэффициенту корреляции, то это говорит о возможности существования мультиколлинеарности.

Если в эконометрической модели получено малое значение параметра b_k при большом коэффициенте детерминации R^2 и при этом F-критерий существенно отличается от нуля, то это говорит о наличии мультиколлинеарности.

6.3.1. Методы исследования мультиколлинеарности

- Нахождение и анализ корреляционной матрицы.

Стохастическая связь между переменными характеризуется величиной коэффициента корреляции между ними. Чем ближе по абсолютной величине значение коэффициента корреляции к единице, тем сильнее мультиколлинеарность. В общем случае, если при оценке уравнения регрессии несколько факторов оказались незначимыми, то нужно выяснить, нет ли среди них коррелированных между собой. Для этого формируется матрица коэффициентов парной корреляции, которая является симметричной и называется корреляционной матрицей. Она имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \cdots & r_{yx_k} \\ r_{yx_1} & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_k} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & \cdots & r_{x_2x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{yx_k} & r_{yx_1} & r_{x_2x_k} & \cdots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}, \qquad (6.3.1)$$

$$R^* = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & \cdots & r_{x_2x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_1x_k} & r_{x_2x_k} & \cdots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}, \qquad (6.3.2)$$

где r_{yx_j} – коэффициенты парной корреляции между переменной y и одним из факторов, $r_{x_ix_j}$ – коэффициенты парной корреляции между факторами, которые вычисляются по формуле:

$$r_{x_ix_j} = \frac{\overline{X_iX_j} - \overline{X_i}\cdot\overline{X_j}}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}, \qquad (6.3.3)$$

где $\sigma_{X_i} = \sqrt{\overline{X_i^2} - \left(\overline{X_i}\right)^2}$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$, $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum X_i^2$.

Анализ корреляционной матрицы позволяет оценить, во-первых, степень влияния отдельных факторов на результативный показатель, во-вторых, взаимосвязь факторов между собой.

Если коэффициенты парной корреляции между некоторыми факторами близки к единице, это указывает на тесную взаимосвязь между ними, т.е. на наличие мультиколлинеарности. В этом случае один из факторов необходимо исключить из дальнейшего рассмотрения. Встает вопрос, какой именно. Это зависит от конкретной ситуации. Чаще всего для моделирования оставляют тот фактор, который с экономической точки зрения более весом для изучаемого процесса. Можно также оставить фактор, который имеет большее влияние на результативный показатель (т.е. коэффициент корреляции которого с результативным показателем больше). Такого рода анализ проводится для каждой пары факторов. Результатом анализа корреляционной матрицы является установление группы факторов, мало зависимых между собой – они и должны входить в модель.

- Вычисление определителя корреляционной матрицы.

Если в модели больше двух факторов, вопрос о мультиколлинеарности не может ограничиваться информацией, которую дает корреляционная матрица. Более широкая проверка предусматривает вычисление определителя матрицы R^*, $\left(\left|R^*\right| \in [0{,}1]\right)$. Если $\left|R^*\right| = 0$, то существует полная мультиколлинеарность. Если $\left|R^*\right| = 1$, то мультиколлинеарности нет. Чем ближе $|R|$ к нулю, тем увереннее можно утверждать о существовании между переменными мультиколлинеарности.

- Метод Феррара-Глаубера.

Для исследования общей мультиколлинеарности и мультиколлинеар-ности между отдельными факторами используется корреляционная матрица R^*, вычисляемая по формуле (6.3.2).

Для исследования общей мультиколлинеарности используется критерий χ^2. Рассчитывается величина:

$$\chi_p^2 = -\left(n - 1 - \frac{2m+5}{6}\right) \cdot \ln\left(\det\left[R^*\right]\right), \qquad (6.3.4)$$

имеющая χ^2 – распределение с $k = m(m-1)/2$ степенями свободы.

По данной надёжности p и числу степеней свободы $k = m(m-1)/2$ находят табличное значение χ_{kp}^2 (приложение А). Если $\chi_p^2 \le \chi_{pk}^2$, то можно считать, что мультиколлинеарность между объясняющими переменными отсутствует.

Если $\chi_p^2 > \chi_{pk}^2$, то с заданной надёжностью p можно считать, что между факторами существует общая мультиколлинеарность.

Далее исследуется, какая объясняющая переменная порождает мультиколлинеарность, и решается вопрос о ее исключении из дальнейшего анализа.

Для выяснения вопроса, между какими факторами существует мультиколлинеарность, используется F-статистика или t-статистика. Для этой цели используют частные коэффициенты парной корреляции r_{ij} $(i, j = 1,2,...,m)$ между объясняющими переменными, которые вычисляют по формуле:

$$r_{ik} = \frac{-C_{ik}}{\sqrt{C_{ii}C_{kk}}}, \tag{6.3.5}$$

где C_{ik}, C_{ii}, C_{kk} – элементы обратной матрицы $(R)^{-1}$.

В качестве критерия используется величина:

$$t_{ij} = \frac{r_{ij} \cdot \sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{ij}^2}}, \tag{6.3.6}$$

имеющая распределение Стьюдента с $(n-m)$ степенями свободы.

По таблицам Стьюдента (приложение Д) находят критическое значение $t_{kp}(n-m; \alpha)$. Сравнивают критическое значение t_{kp} с расчетным t:

- если $|t_{ik}| \le t_{kp}$, то между объясняющими переменными X_i и X_k коллинеарности нет.

- если $|t_{ik}| > t_{kp}$, то между объясняющими переменными X_i и X_k существует значительная коллинеарность.

Замечание. В случае выявления коллинеарности между парой объясняющих переменных X_i и X_k необходимо исключить из дальнейшего анализа переменную, которая имеет наименьшую корреляцию с показателем Y.

6.3.2. Методы устранения мультиколлинеарности

Если мультиколлинеарность выявлена, необходимо предпринять ряд мер по ее уменьшению и возможному устранению. Необходимо знать, что безошибочных и абсолютно правильных рекомендаций нет, это процесс творческого поиска. Все зависит от степени мультиколлинеарности, от набора факторов, от характера данных.

Различные методы, которые могут быть использованы для смягчения мультиколлинеарности, связаны с информационной базой и делятся на две категории. К первой относятся попытки повысить степень надежности оценок регрессии – увеличить число наблюдений в выборке, за счет сокращения временного периода увеличить дисперсию объясняющих переменных и снизить вариацию случайного числа, уточнить набор объясняющих переменных, включаемых в модель. Ко второй категории относится использование внешней информации, т.е. сбор дополнительных данных и оценок.

- Метод исключения переменных.

Этот метод заключается в том, что высоко коррелированные объясняющие переменные устраняются из регрессии, и она заново оценивается. Отбор переменных, подлежащих исключению, производится с помощью коэффициентов корреляции. Для этого производится оценка значимости коэффициентов парной корреляции r_{ij} между объясняющими переменными X_i и X_j $(i, j = 1,2,...,m;\ i \neq j)$. Если $|r_{ij}| > 0,8$, то одну из переменных можно исключить. Но какую переменную удалить из анализа, решают исходя из экономических соображений.

- Метод линейного преобразования переменных.

Этот метод устранения мультиколлинеарности заключается в переходе к регрессии приведенной формы путем замены переменных, которым присуща коллинеарность, их линейной комбинацией. Если между двумя факторами X_i и X_j существует мультиколлинеарность, то заменяют фактор $X_j^* = X_i - X_j$ после чего проверяют наличие мультиколлинеарности между факторами X_i и X_j^*. При отсутствии мультиколлинеарности вместо фактора X_j рассматривается фактор X_j^*.

- Метод пошаговой регрессии.

Процедура применения пошаговой регрессии начинается с построения простой регрессии. В анализ последовательно включают по одной объясняющей переменной. На каждом шаге проверяется значимость коэффициентов регрессии и оценивается мультиколлинеарность переменных. Если оценка коэффициента получается незначимой, то переменная исключается и рассматривают другую объясняющую переменную. Если оценка коэффициента регрессии значима, а мультиколлинеарность отсутствует, то в анализ включают следующую переменную. Таким образом, постепенно определяются все составляющие регрессии без нарушения положения об отсутствии мультиколлинеарности.

6.3.3. Меры по устранению мультиколлинеарности

- Необходимо изменить спецификацию модели так, чтобы коллинеарность переменных снизилась до допустимого уровня;
- необходимо применить методы оценки, которые, несмотря на существенную коллинеарность, позволяют избежать ее отрицательных последствий. К этим методам оценивания относятся методы с ограничениями на параметры (смешанный оценщик и минимальный оценщик), метод главных компонент, двухшаговый МНК, метод инструментальных переменных, метод наибольшего правдоподобия.

Как уже было показано, устранение мультиколлинеарности может достигаться путем исключения одного или нескольких линейно-связанных факторных признаков. Вопрос о том, какой из факторов следует отбросить, решается на основании экономического, логического, качественного анализа явления. Иногда удается уменьшить мультиколлинеарность путем агрегирования или преобразования исходных факторных признаков. В частности, это может быть объединение межотраслевых показателей с рядами динамики или, например, можно перейти к первым разностям и находить уравнение регрессии для разностей.

Хотя надежных методов выявления коллинеарности не существует, есть несколько признаков, ее выявляющих:

- характерным признаком мультиколлинеарности является высокое значение коэффициента детерминации при незначимости параметров уравнения (по t-статистикам);
- в модели с двумя переменными наилучшим признаком мультиколлинеарности является значение коэффициента корреляции;
- в модели с большим числом (чем два) факторов коэффициент корреляции может быть низким из-за наличия мультиколлинеарности, следует брать во внимание частные коэффициенты корреляции;

- если коэффициент детерминации велик, а частные коэффициенты малы, то мультиколлинеарность возможна.

Пример 6.6. Исследовать данные на мультиколлинеарность; если обнаружена мультиколлинеарность объясняющих переменных, то исключить из рассмотрения переменную, которая коррелирует с остальными объясняющими переменными.

Y	17,44	17,28	17,92	18,88	17,12	21,12	20	20,64	19,68	18,4
X_1	22,95	24,84	29,97	28,08	24,3	32,4	29,97	33,48	29,7	26,73
X_2	3	1,56	2,88	2,28	1,2	2,64	3,48	2,28	2,52	2,4
X_3	2,8	1,148	2,66	1,96	0,77	2,38	3,36	2,17	2,24	2,03

Решение. Для исследования общей мультиколлинеарности применим метод Фаррара-Глаубера.

Для нахождения корреляционной матрицы R построим вспомогательную таблицу 6.13.

В предпоследней строке таблицы 6.12 указаны суммы по столбцам, а в последней – средние значения по столбцам.

Найдем средние квадратические отклонения:

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{\overline{X_1^2} - \left(\overline{X}_1\right)^2} = \sqrt{808{,}64 - (28{,}24)^2} = 3{,}32,$$

Аналогично имеем $\sigma_{X_2} = 0{,}63$, $\sigma_{X_3} = 0{,}72$, $\sigma_Y = 1{,}48$.

Найденные значения средних квадратических отклонений подставим в формулы (6.3.3) для вычисления парных коэффициентов корреляции:

$$r_{x_1x_2} = \frac{\overline{X_1X_2} - \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} = \frac{69{,}23 - 28{,}24 \cdot 2{,}42}{3{,}32 \cdot 0{,}63} = 0{,}37,$$

Аналогично $r_{x_1x_3} = 0{,}41$, $r_{x_2x_3} = 0{,}99$, $r_{yx_1} = 0{,}89$, $r_{yx_2} = 0{,}43$, $r_{yx_1} = 0{,}47$.

Можно сделать вывод о наличии определенной связи между каждой парой факторов. Для данной задачи корреляционная матрица (6.3.1) имеет вид:

Таблица 6.13

Расчет элементов корреляционной матрицы

Y	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	YX_1	YX_2	YX_3	Y^2
17,44	22,95	3	2,8	526,70	9,00	7,84	68,85	64,26	8,40	22,95	3	2,8	304,15
17,28	24,84	1,56	1,14	617,03	2,43	1,32	38,75	28,52	1,79	24,84	1,56	1,14	298,60
17,92	29,97	2,88	2,66	898,20	8,29	7,08	86,31	79,72	7,66	29,97	2,88	2,66	321,13
18,88	28,08	2,28	1,96	788,49	5,20	3,84	64,02	55,04	4,47	28,08	2,28	1,96	356,45
17,12	24,3	1,2	0,77	590,49	1,44	0,59	29,16	18,71	0,92	24,3	1,2	0,77	293,09
21,12	32,4	2,64	2,38	1049,76	6,97	5,66	85,54	77,11	6,28	32,4	2,64	2,38	446,05
20	29,97	3,48	3,36	898,20	12,11	11,29	104,3	100,7	11,69	29,97	3,48	3,36	400,00
20,64	33,48	2,28	2,17	1120,91	5,20	4,71	76,33	72,65	4,95	33,48	2,28	2,17	426,01
19,68	29,7	2,52	2,24	882,09	6,35	5,02	74,84	66,53	5,64	29,7	2,52	2,24	387,30
18,4	26,73	2,4	2,03	714,49	5,76	4,12	64,15	54,26	4,87	26,73	2,4	2,03	338,56
188,48	282,42	24,24	21,52	8086,36	62,76	51,47	692,26	617,5	56,68	282,42	24,24	21,5	3571,35
18,848	28,24	2,42	2,15	808,64	6,28	5,15	69,23	61,75	5,67	28,24	2,424	2,15	357,13

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}89 & 0{,}43 & 0{,}47 \\ 0{,}89 & 1 & 0{,}37 & 0{,}41 \\ 0{,}43 & 0{,}37 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}47 & 0{,}41 & 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } R^* = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}37 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}41 & 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы корреляционной матрицы R характеризуют тесноту связи между факторами. Анализ матрицы R показывает, что наибольшее влияние на показатель Y оказывает фактор X_1, за ним X_3, затем X_2.

Замечание. Для нахождения корреляционной матрицы R удобно использовать пакет электронных таблиц EXCEL. Для этого нужно ввести исходные данные, затем в падающем меню *Сервис*$\Rightarrow$ выбрать команду *Анализ данных*$\Rightarrow$ выбрать инструмент анализа *Корреляция*$\Rightarrow$ в разделе *Входные данные* в текстовом поле *Входной интервал* ввести диапазон исходных данных $\Rightarrow$ в разделе *Параметры вывода* в опции *Выходной интервал* или *Новый рабочий лист* установить флажок.

Замечание. Если команда *Анализ данных* отсутствует в меню *Сервис*, то необходимо запустить программу установки Microsoft Excel и установить *Пакет анализа*. После установки *Пакета анализа* его необходимо выбрать и активизировать с помощью команды *Надстройки*.

Найдем определитель $\left|R^*\right|$ корреляционной матрицы R^*:

$$\left|R^*\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}37 & 0{,}41 \\ 0{,}37 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}41 & 0{,}99 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0{,}37 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}41 + 0{,}37 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}41 - 0{,}41 \cdot 1 \cdot 0{,}41 -$$

$$- 0{,}37 \cdot 1 \cdot 0{,}37 - 0{,}99 \cdot 1 \cdot 0{,}99 = 0{,}0052.$$

Значение определителя корреляционной матрицы близко к нулю, что свидетельствует о наличии значительной мультиколлинеарности.

Замечание. Для вычисления определителя корреляционной матрицы R нужно в пакете EXCEL привести матрицу к симметричному виду относительно главной диагонали. Затем вызвать *Мастер функций*$\Rightarrow$ *Математические*$\Rightarrow$ *МОПРЕД*$\Rightarrow$ в строке *Массив* выделить все данные.

Для исследования общей мультиколлинеарности данных используем критерий χ^2. Рассчитаем величину χ_p^2, определяемую по формуле (6.3.4):

$$\chi_p^2 = -\left(10 - 1 - \frac{2 \cdot 3 + 5}{6}\right) \ln 0{,}0052 = 37{,}69\,,$$

которая имеет χ^2-распределение с $k = m(m-1)/2 = 3(3-1)/2 = 3$ степенями свободы.

По заданной надёжности $p = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 3$ находят критическое значение $\chi_{kp}^2 = 7{,}815$ в таблице значений критерия Пирсона (приложение А). Имеем $\chi_p^2 > \chi_{kp}^2$, значит, с заданной надёжностью $p = 0{,}05$ можно считать, что между факторами исследуемыми существует мультиколлинеарность.

Далее исследуем, какая объясняющая переменная порождает мультиколлинеарность. Найдем обратную матрицу $(R)^{-1}$.

Замечание. Для нахождения обратной матрицы в пакете EXCEL вначале следует выделить поле на листе, в котором буде расположена обратная матрица, затем вызвать *Мастер функций* $\Rightarrow$ *Математические* $\Rightarrow$ *МОБР* $\Rightarrow$ в строке *Массив* выделить все данные $\Rightarrow$ нажать *Ctrl+Shift+Enter.*

Обратная матрица $(R)^{-1}$ к корреляционной матрице такова:

$$(R^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}62 & 8{,}08 & -8{,}71 \\ 8{,}08 & 157{,}23 & -159{,}87 \\ -8{,}71 & -159{,}87 & 163{,}76 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем частные коэффициенты парной корреляции по формуле (6.3.4):

$$r_{12} = \frac{-C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} = \frac{-8{,}08}{\sqrt{1{,}62 \cdot 157{,}23}} = -0{,}51,$$

$$r_{13} = \frac{-C_{13}}{\sqrt{C_{11}C_{33}}} = \frac{8,71}{\sqrt{1,62 \cdot 163,76}} = 0,54,$$

$$r_{13} = \frac{-C_{23}}{\sqrt{C_{22}C_{33}}} = \frac{159,87}{\sqrt{157,23 \cdot 163,76}} = 0,99.$$

Для выяснения вопроса, между какими факторами существует мультиколлинеарность, используем t-статистику. В качестве критерия используем величины, определяемые по формуле (6.3.6).

$$t_{23} = \frac{r_{23} \cdot \sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0,99\sqrt{10-3}}{\sqrt{1-0,99^2}} = \frac{2,634403}{0,008559} = 28,47;$$

аналогично находим $t_{12} = -1,03$; $t_{13} = 1,18$, которые имеют распределение Стьюдентас $n - m = 10 - 3 = 7$ степенями свободы.

Для надёжности $p = 0,05$ и числу степеней свободы 7 по таблице значений критерия Стьюдента (приложение Д) находят критическое значение $t_{kp} = 6,86$. Имеем $|t_{12}| < t_{kp}$, $|t_{13}| < t_{kp}$, следовательно, можно утверждать, что между факторами X_1 и X_2; X_1 и X_3 мультиколлинеарности не существует. Имеем $|t_{23}| > t_{kp}$, следовательно, можно утверждать, что между факторами X_2 и X_3 существует мультиколлинеарность и одна из переменных должна быть исключена. Исключим из рассмотрения переменную X_3, поскольку $|t_{12}| < |t_{13}|$.

6.4. МНОЖЕСТВЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

6.4.1. Построение множественной линейной регрессии

Каждое явление в природе, технике, экономике, общественной жизни определяется комплексом причин. На уровень развития одного показателя могут влиять много факторов. Уровень влияния факторов на показатель может существенно различаться. Все эти закономерности следует учитывать во время проведения эконометрического анализа, прогнозирования и планирования.

При существовании линейной зависимости объясняемой переменной (показателя) Y от нескольких объясняющих переменных (факторов) $x_1, x_2, ..., x_m$ общее выражение уравнения множественной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m, \tag{6.4.1}$$

где у – зависимая переменная, $x_1, x_2, ..., x_m$ – независимые факторы, $a_{0,} a_1, a_2, ..., a_m$ – параметры модели. Здесь через $\hat{y}$ обозначены теоретические значения показателя, рассчитываемые по модели (6.4.1).

Модель описывает совместное одновременное влияние факторов на показатель. Задача исследования состоит в оценке параметров регрессии $b_1, b_2, ..., b_m$ по результатам выборочных наблюдений над переменными, которые включены в модель. Построение модели проводят с помощью метода наименьших квадратов, решая систему уравнений Гаусса (6.4.2):

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_{1i} + a_2\sum x_{2i} + ... + a_m\sum x_{mi} = \sum y_i, \\ a_0\sum x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i} + ... + a_m\sum x_{1i}x_{mi} = \sum y_i x_{1i}, \\ a_0\sum x_{2i} + a_1\sum x_{1i}x_{2i} + a_2\sum x_{2i}^2 + ... + a_m\sum x_{2i}x_{mi} = \sum y_i x_{2i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum x_{mi} + a_1\sum x_{1i}x_{mi} + a_2\sum x_{2i}x_{mi} + ... + a_m\sum x_{mi}^2 = \sum y_i x_{mi}. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

Данную систему можно решать, используя ранее рассмотренный подход: вычислить все вспомогательные суммы, подставить их в систему и, преобразуя ее с помощью алгебраических преобразований, найти неизвестные параметры уравнения. Это так называемая классическая схема построения многофакторной модели.

Важным этапом регрессионного анализа является оценка практической значимости построенной модели. Проверку значимости модели проводят на основании показателей тесноты связи между признаками y

и $\hat{y}$ с помощью *множественного коэффициента корреляции* R*,* который выявляет зависимость между фактическими и теоретическими значениями объясняемой переменной. Его вычисляют по формуле (6.4.3):

$$R = r_{y\hat{y}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i \hat{y}_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i\right)^2}} \qquad (6.4.3)$$

Чем более близок множественный коэффициент корреляции R к единице, тем лучше данная модель описывает фактические данные.

Коэффициент детерминации R^2 равен квадрату множественного коэффициента корреляции. Он измеряет долю общей дисперсии относительно среднего $\overline{Y}$, которую можно объяснить регрессией.

Полезным является построение интервальных границ для коэффициента множественной регрессии.

Доверительный интервал для множественного коэффициента корреляции находится по формуле (6.4.4):

$$R - \Delta_R \le R_{\Phi} \le R + \Delta_R, \qquad (6.4.4)$$

где $\Delta_R = t_{кр}(n - m - 1, \alpha)\dfrac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}}$,

$t_{кр}(n - m - 1, \alpha)$ – критическая точка, найденная по таблицам Стьюдента (приложение Д).

Для проверки значимости уравнения регрессии применяют критерий Фишера, вычисляя фактическое значение F-статистики по формуле (6.4.5):

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}. \qquad (6.4.5)$$

По таблице критических точек Фишера (приложение Е) находят критическое значение статистики $F_{кр}(n - m - 1, m, \alpha)$, где n – количество наблюдений, m – количество факторов, α – уровень значимости.

Если $F < F_{кр}$, то уравнение регрессии не является надежно значимым. Если $F \ge F_{кр}$, то уравнение регрессии является значимым.

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{S^2_{\text{ост}}}{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}} = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}}, \tag{6.4.6}$$

где $S^2_{\text{ост}} = \dfrac{\sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2}{n-2}$ – остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Величина стандартной ошибки совместно с t-распределением Стьюдента при $n-2$ степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительного интервала.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т.е. определяется фактическое значение t-критерия Стьюдента: $t_b = \dfrac{b}{m_b}$ которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α и числе степеней свободы $(n-2)$. Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как $b \pm t_{\text{табл}} \cdot m_b$. Поскольку знак коэффициента регрессии указывает на рост результативного признака y при увеличении признака-фактора x ($b > 0$), уменьшение результативного признака при увеличении признака-фактора ($b < 0$) или его независимость от независимой переменной ($b = 0$) (см. рис. 6.2), то границы доверительного интервала для коэффициента регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например, $-1{,}5 \le b \le 0{,}8$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициента регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные величины и даже ноль, чего не может быть.

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{S^2_{\text{ост}} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum\left(x-\overline{x}\right)^2}} = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n}. \tag{6.4.7}$$

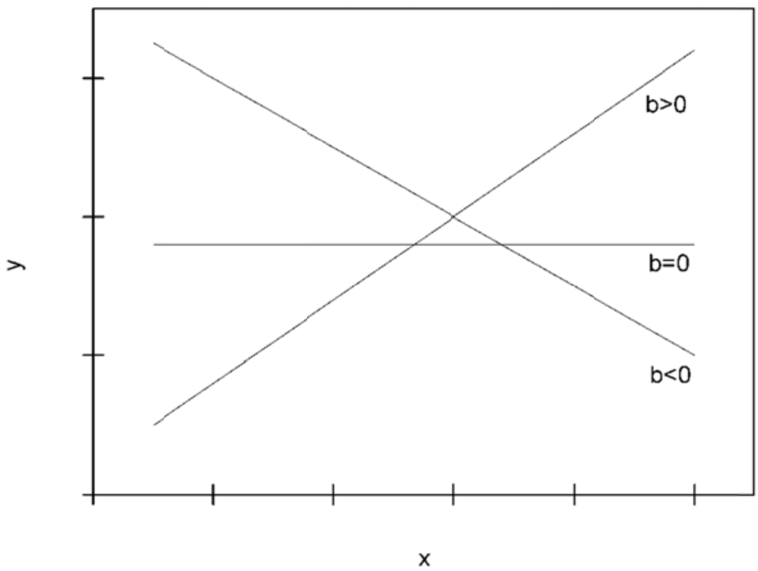


Рис. 6.2. Наклон линии регрессии в зависимости от значения параметра b

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии. Вычисляется t-критерий: $t_a = \dfrac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $n-2$ степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}. \qquad (6.4.8)$$

Фактическое значение t-критерия Стьюдента определяется как $t_r = \dfrac{r}{m_r}$.

Прогноз. Предположим, что мы хотим распространить построенную модель на другие значения факторных переменных и решить проблему прогнозирования среднего значения y, которое отвечает некоторым данным значениям $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Эти новые значения $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}$ могут лежать как между выборочными наблюдениями, так и вне соответствующих интервалов. Точечный прогноз представляет собой вычисленное по уравнению множественной регрессии ((6.4.1) значение:

$$y_0 = a_0 + a_1 x_{10} + a_2 x_{20} + ... + a_m x_{m0}. \quad (6.4.9)$$

Существует связь между t-критерием Стьюдента и F-критерием Фишера:

$$t_b = t_r = \sqrt{F}. \quad (6.4.10)$$

В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказываемое $\hat{y}_p$ значение как точечный прогноз $\hat{y}_x$ при $x_p = x_k$, т.е. путем подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ соответствующего значения x. Однако точечный прогноз явно нереален. Поэтому он дополняется расчетом стандартной ошибки $\hat{y}_p$, т.е. $m_{\hat{y}_p}$, и, соответственно, интервальной оценкой прогнозного значения $\hat{y}_p$:

$$\hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p} \le \hat{y}_p \le \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p},$$

где $\Delta_{\hat{y}_p} = m_{\hat{y}_p} \cdot t_{\text{табл}}$, а $m_{\hat{y}_p}$ – средняя ошибка прогнозируемого индивидуального значения:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_p - \overline{x}\right)^2}{n \cdot \sigma_x^2}}. \quad (6.4.11)$$

Пример 6.7. Построить линейную регрессионную модель по данным примера 6.6.

Решение. В примере 6.6 из дальнейшего рассмотрения была исключена переменная X_3. Используем линейную двухфакторную модель:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2, \quad (6.4.12)$$

В соответствии с методом наименьших квадратов параметры a_0, a_1, a_2 найдем как решение системы линейных уравнений Гаусса следующего вида:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} X_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} X_{1i} + a_1\sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{1i}, \\ a\sum_{i=1}^{n} X_{2i} + a_1\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} + a_2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{2i}. \end{cases} \qquad (6.4.13)$$

Вспомогательные вычисления удобно проводить в таблице:

Таблица 6.14

Расчет коэффициентов системы

Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2	X_1Y	X_2Y
17,44	22,95	3,00	526,70	9,00	68,85	400,25	52,32
17,28	24,84	1,56	617,03	2,43	38,75	429,24	26,96
17,92	29,97	2,88	898,20	8,29	86,31	537,06	51,61
18,88	28,08	2,28	788,49	5,20	64,02	530,15	43,05
17,12	24,30	1,20	590,49	1,44	29,16	416,02	20,54
21,12	32,40	2,64	1049,76	6,97	85,54	684,29	55,76
20,00	29,97	3,48	898,20	12,11	104,30	599,40	69,60
20,64	33,48	2,28	1120,91	5,20	76,33	691,03	47,06
19,68	29,70	2,52	882,09	6,35	74,84	584,50	49,59
18,40	26,73	2,40	714,49	5,76	64,15	491,83	44,16
188,48	282,42	24,24	8086,36	62,76	692,26	5363,76	460,65

В последней строке записывают суммы чисел в столбце.

Система уравнений для определения параметров регрессии имеет вид:

$$\begin{cases} 10a_0 + 282{,}42a_1 + 24{,}24a_2 = 188{,}48, \\ 282{,}42a_0 + 8086{,}36a_1 + 692{,}26a_2 = 5363{,}76, \\ 24{,}24a_0 + 5363{,}76a_1 + 62{,}76a_2 = 460{,}65. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем $b_0 = 0{,}028$, $b_1 = 0{,}63$, $b_2 = 0{,}42$, тогда уравнение множественной регрессии (6.4.1) имеет вид:

$$\hat{Y} = 0{,}028 + 0{,}63\,X_1 + 0{,}42\,X_2\,.$$

Пример 6.8. Для модели, построенной в примере 6.7, найти множественный коэффициент корреляции R, коэффициент детерминации R^2, для множественного коэффициента корреляции R найти доверительный интервал, коэффициенты эластичности.

Решение. Для вычисления множественного коэффициента корреляции R построим вспомогательную таблицу:

Таблица 6.15

Расчет элементов коэффициента R

Y	X_1	X_2	$\hat{Y}$	Y^2	$\hat{Y}^2$	$Y \cdot \hat{Y}$
17,44	22,95	3,00	15,77	304,15	248,56	274,96
17,28	24,84	1,56	16,35	298,60	267,36	282,55
17,92	29,97	2,88	20,14	321,13	405,72	360,95
18,88	28,08	2,28	18,70	356,45	349,61	353,01
17,12	24,30	1,20	15,86	293,09	251,50	271,50
21,12	32,40	2,64	21,57	446,05	465,43	455,64
20,00	29,97	3,48	20,40	400,00	415,97	407,91
20,64	33,48	2,28	22,10	426,01	488,56	456,21
19,68	29,70	2,52	19,82	387,30	392,86	390,07
18,40	26,73	2,40	17,90	338,56	320,30	329,30
188,48	282,42	24,24	188,61	3571,35	3605,87	3582,11

В соответствии с формулой множественный коэффициент корреляции равен:

$$R = r_{Y\hat{Y}} = \frac{10\cdot 3582{,}11 - 188{,}48\cdot 188{,}61}{\sqrt{10\cdot 3571{,}35 - 188{,}88^2}\cdot\sqrt{10\cdot 3065{,}87 - 188{,}61^2}} \approx 0{,}9997\ .$$

В нашем случае $R^2 = 0{,}9997^2 = 0{,}9995$. То есть 99,95% дисперсии показателя Y можно объяснить с помощью построенной модели зависимости от X_1 и X_2. Рассчитанный коэффициент указывает на высокую степень соответствия математической модели фактическим данным.

Для нахождения доверительного интервала для множественного коэффициента корреляции R найдем по таблицам Стьюдента (приложение Д) находим критическую точку $t_{кр}(10-2-1;\ 0{,}05)=2{,}365$, поэтому:

$$\Delta_R = 2{,}365 \cdot \frac{1-0{,}9995}{\sqrt{10-2-1}} = 0{,}003\ .$$

Тогда доверительный интервал, найденный по формуле (6.4.4), имеет вид:

$$0{,}9997-0{,}003 \le R_Ф \le 0{,}9997+0{,}003 \text{ или } 0{,}9967 \le R_Ф \le 1{,}0027.$$

Поскольку коэффициент множественной корреляции должен находиться в границах от 0 до 1, то доверительным интервалом для него будет:

$$0{,}9967 \ \le R_Ф \le 1\ ,$$

что указывает на удачный подбор модели.

Для проверки значимости уравнения регрессии рассчитаем F – статистику по формуле (3.4.5) $F=\dfrac{0{,}9995}{1-0{,}9995}\cdot\dfrac{10-2-1}{2}=94{,}37$.

По таблицам Фишера (приложение Е) найдем критическое значение $F_{кр}(10-2-1;2;\ 0{,}05)=F_{кр}(7;2;0{,}05)=4{,}74$. Поскольку $F \ge F_{кр}$, то уравнение множественной регрессии (3.4.1) следует считают надежным.

Вычислим прогноз для $X_1 = 350$ и $X_2 = 3$. Тогда по формуле (3.4.8) следует ожидать, что значение показателя будет равно:

$$\hat{Y} = 0{,}028 + 0{,}63 \cdot 30 + 0{,}42 \cdot 3 = 20{,}21\ .$$

6.4.2. Матричный подход

Построение модели линейной регрессии возможно проводить матричным методом. При этом результаты наблюдений y_i, значения объясняющих переменных, параметры b_i функции регрессии записываем в виде матриц:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{m2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

При этом вводят переменные:

Y – вектор-столбец наблюдений над результативным показателем;

X – матрица данных, причем первый столбец всегда состоит из единиц;

A – вектор-столбец коэффициентов регрессии.

Тогда уравнение регрессии в матричной форме имеет вид:

$$Y = XA \ . \qquad (6.4.14)$$

Используя МНК, получим в качестве решения системы нормальных уравнений вектор-столбец искомых параметров регрессии:

$$A = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} X^T Y \ , \qquad (6.4.15)$$

где X^T – транспонированная матрица.

Таким образом, можем установить последовательность выполняемых действий:

- составить матрицу X ;
- выписать вектор Y ;
- получить транспонированную матрицу X^T ;
- найти произведение матриц $X^T \cdot X$;
- найти произведение матрицы X^T на вектор $Y - X^T Y$;
- определить обратную матрицу $\left(X^T \cdot X\right)^{-1}$;
- составить произведение $\left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot Y$, провести вычисления и определить вектор коэффициентов уравнения;
- записать моделирующее уравнение.

Переход к матричной форме позволяет, во-первых, представить алгоритм нахождения коэффициентов уравнения в более компактном конкретном виде, а во-вторых, использовать по этому алгоритму любой пакет программ, позволяющий проводить действия с матрицами.

Покажем на конкретном примере, как проводятся вычисления и находятся параметры линейного уравнения множественной регрессии.

Пример 6.9. Построить модель, которая характеризует зависимость между показателем Y, факторами X_1 и X_2. Провести анализ взаимосвязи на основе полученной модели.

Y	2,72	3,04	2,84	2,89	2,58	2,64	2,52	2,75	2,63
X_1	15,6	13,5	15,3	14,9	15,1	16,1	16,7	15,4	17,1
X_2	106,3	128,5	118	121,2	120	118,4	108,4	110	105,9

Решение. Оценим параметры модели по МНК. Выпишем основные матрицы, входящие в исследование:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 15,6 & 106,3 \\ 1 & 13,5 & 128,5 \\ 1 & 15,3 & 118 \\ 1 & 14,9 & 121,2 \\ 1 & 15,1 & 120 \\ 1 & 16,1 & 118,4 \\ 1 & 16,7 & 108,4 \\ 1 & 15,4 & 110 \\ 1 & 17,1 & 105,9 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2,72 \\ 3,04 \\ 2,84 \\ 2,89 \\ 2,58 \\ 2,64 \\ 2,52 \\ 2,75 \\ 2,63 \end{pmatrix}$$

Замечание. В матрице X всегда первый столбец состоит из единиц – это связано с присутствием в уравнении свободного члена a_0.

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15,6 & 13,5 & 15,3 & 14,9 & 15,1 & 16,1 & 16,7 & 15,4 & 17,1 \\ 106,3 & 128,5 & 118 & 121,2 & 120 & 118,4 & 108,4 & 110 & 105,9 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 139,7 & 1036,7 \\ 139,7 & 2177,39 & 16037,72 \\ 1036,7 & 16037,72 & 119909,3 \end{pmatrix}, \quad X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 24,61 \\ 380,854 \\ 2841,525 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$\left(X^T \cdot X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 293{,}1429 & -9{,}443905 & -1{,}271315 \\ -9{,}443905 & 0{,}335143 & 0{,}036824 \\ -1{,}271315 & 0{,}036824 & 0{,}006075 \end{pmatrix}$$

Определим оценки параметров модели по формуле (6.4.11):

$$A = \begin{pmatrix} 293{,}1429 & -9{,}443905 & -1{,}271315 \\ -9{,}443905 & 0{,}335143 & 0{,}036824 \\ -1{,}271315 & 0{,}036824 & 0{,}006075 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24{,}61 \\ 380{,}854 \\ 2841{,}525 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}023567 \\ -0{,}137011 \\ -0{,}00141 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $a_0 = 5{,}0236$; $a_1 = -0{,}137$; $a_2 = -0{,}00141$ и искомая модель имеет вид:

$$Y = 5{,}0236 - 0{,}137 X_1 - 0{,}00141 X_2 .$$

Оценка коэффициентов уравнения.

Оценку значимости коэффициентов уравнения также можно проводить на основе матричного подхода. Для этого вначале определяют дисперсии оценок параметров: $\sigma^2(a_0)$, $\sigma^2(a_1),\ldots,$ $\sigma^2(a_m)$. Эти величины будут диагональными элементами матрицы: $S = \sigma^2 (X^T \cdot X)^{-1}$. После этого устанавливают t-статистики по коэффициентам:

$$t_0 = \frac{a_0}{\sigma(a_0)},\ t_1 = \frac{a_1}{\sigma(a_1)},\ldots,\ t_m = \frac{a_m}{\sigma(a_m)} \qquad (6.4.16)$$

Для рассматриваемого примера 6.9 матрица $\left(X^T \cdot X\right)^{-1}$ известна. Если ее диагональные элементы умножить на σ_0^2 = 0,011851, найденное по формуле (6.1.21) то получим такие результаты:

$$\sigma^2(a_0) = 234{,}1429 \cdot 0{,}01185 = 3{,}4739,\ \sigma(a_0) = 1,\ 86385;$$

$$\sigma^2(a_1) = 0{,}335143 \cdot 0{,}01185 = 0{,}00397,\ \sigma(a_1) = 0,\ 063021;$$

$$\sigma^2(a_2) = 0,006075 \cdot 0,01185 = 0,000072,\ \sigma(a_2) = 0,008485.$$

t – статистики Стьюдента, устанавливающие значимость коэффициентов регрессионного уравнения, определяются по формулам (6.4.16), и для рассматриваемого примера таковы:

$$t(a_0) = \frac{5,0236}{1,86385} = 2,696;$$

$$t(a_1) = \frac{-0,137}{0,063021} = -2,17;$$

$$t(a_2) = \frac{-0,00141}{0,008485} = -0,166.$$

Зададим уровень значимости $\alpha = 0,1$, тогда:

$$t_{kp}(n-l;\alpha) = t_{kp}(9-3;0,1) = t_{kp}(6;0,1) = 1,943.$$

Сравнивая значения t-статистик, можно сделать вывод, что коэффициент a_2 является незначимыми.

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ имеем $t_{kp}(6;0,05) = 2,447$, поэтому коэффициенты a_1 и a_2 незначимы в построенном уравнении регрессии.

6.4.3. Построение множественной регрессионной модели с использованием EXCEL

Уравнение линейной регрессии можно построить в пакете электронных таблиц Excel.

В состав пакета Excel входит набор способов анализа данных, который называется *Пакетом анализа* и предназначен для решения различных заданий. Для ознакомления с этим пакетом, следует в меню окна Excel выбрать опцию *Сервис* и в появившемся меню нужно выбрать опцию *Анализ данных*. В результате получим окно (рис. 6.3).

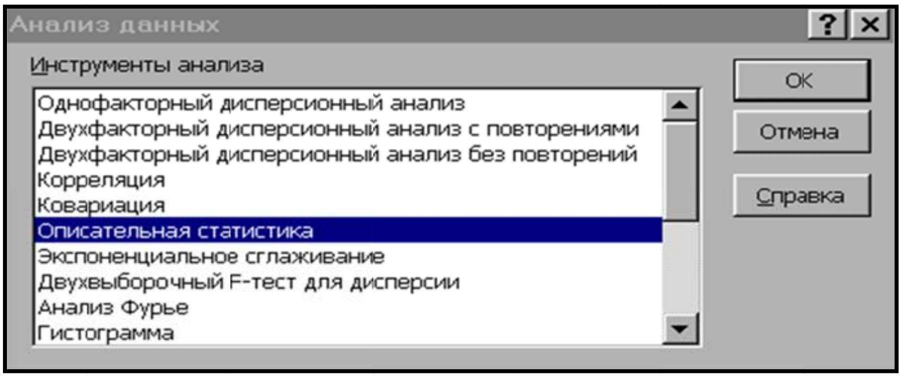


Рис. 6.3. Окно «Анализ данных»

С помощью клавиш прокрутки можно выбрать любую из приведенных функций анализа.

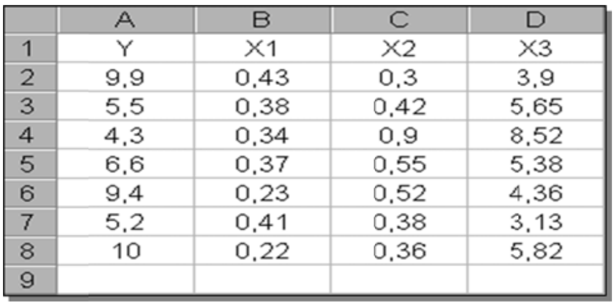
А. Построение корреляционной матрицы

Пример 6.10. Построить корреляционную матрицу по следующим данным:

Y	X_1	X_2	X_3
9,9	0,43	0,3	3,9
5,5	0,38	0,42	5,65
4,3	0,34	0,9	8,52
6,6	0,37	0,55	5,38
9,4	0,23	0,52	4,36
5,2	0,41	0,38	3,13
10	0,22	0,36	5,82

Решение.

1. Ввести данные на Лист 1. После ввода данных, получим таблицу в окне электронной таблицы Excel, изображенную на рис. 6.4.



	A	B	C	D
1	Y	X1	X2	X3
2	9,9	0,43	0,3	3,9
3	5,5	0,38	0,42	5,65
4	4,3	0,34	0,9	8,52
5	6,6	0,37	0,55	5,38
6	9,4	0,23	0,52	4,36
7	5,2	0,41	0,38	3,13
8	10	0,22	0,36	5,82
9				

Рис. 6.4. Таблица ввода данных

2. Выбираем опцию *Сервис*.

3. Выбираем опцию *Анализ данных*. В результате появится окно, изображенное на рис. 6.3.

4. Выбираем опцию *Корреляция*. В результате появится окно, изображенное на рис. 6.5.

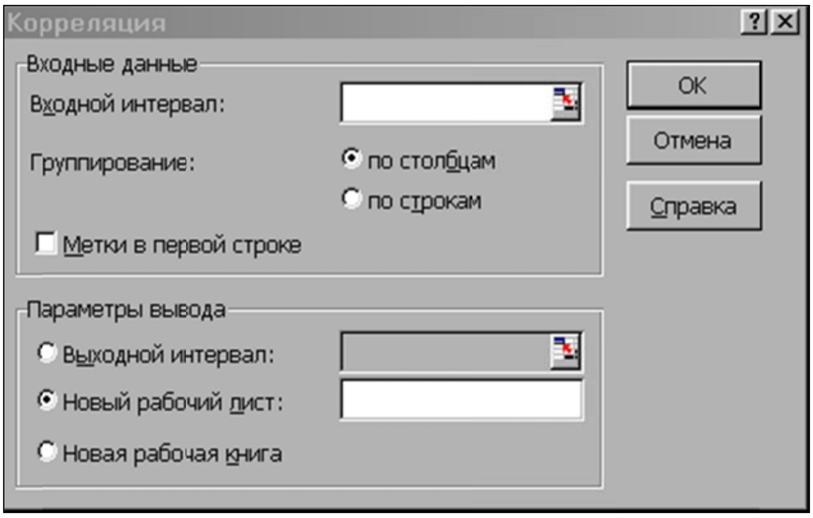


Рис. 6.5. Окно Корреляция

5. Активизируем окно *Входной интервал* (установить стрелку мыши в окне и нажать левую клавишу)

6. Выбираем ячейку А 2 и при нажатой левой клавише мыши передвигаемся к ячейке D8.

Номера ячеек, из которых будут взяты исходные данные, автоматически заносятся в окно *Входной интервал*.

7. Ставим флажок в окне *Новый рабочий лист*.

8. Нажимаем кнопку  .

В результате получим корреляционную матрицу, представленную на рис. 6.6.

	A	B	C	D	E
1		*Столбец 1*	*Столбец 2*	*Столбец 3*	*Столбец 4*
2	Столбец 1	1			
3	Столбец 2	-0,4588261	1		
4	Столбец 3	-0,5774924	-0,13374074	1	
5	Столбец 4	-0,3921199	-0,2514865	0,81120203	1

Рис. 6.6. Корреляционная матрица

Б. Построение модели множественной линейной регрессии и ее анализ

Пример 6.11. По данным примера 14 найти коэффициент корреляции, индекс детерминации, уравнения множественной линейной регрессии, F-статистику, t-статистику, доверительные интервалы для параметров уравнения регрессии.

Решение.

1. Введем данные на Лист 1.
2. Выбираем опцию *Сервис*.
3. Выбираем опцию *Анализ данных*.
4. Выбираем опцию *Регрессия*.

В результате появится окно, изображенное на рис. 6.7.

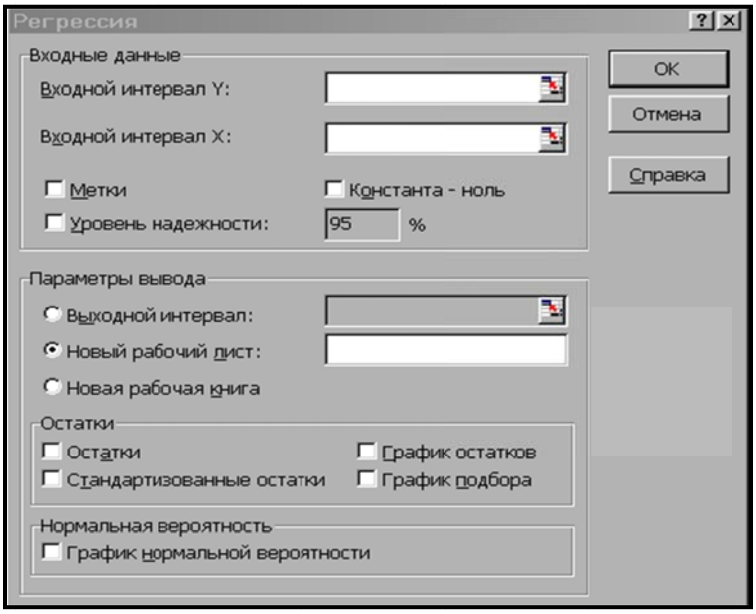


Рис. 6.7. Окно Регрессия

5. Активизируем окно *Входной интервал Y*.
6. Выбираем ячейку А 2 и при нажатой левой клавише мыши передвигаемся к клетке А8.
7. Активизируем окно *Входной интервал X*.
8. Выбираем ячейку В 2 и при нажатой левой клавише мыши передвигаемся к клетке D8 (если участвуют все переменные). Номера ячеек, из которых будут взяты исходные данные, автоматически заносятся в окно *Входной интервал*.
9. Ставим маркер в окне *Новый рабочий лист*.

10. Ставим маркер в окне *Остатки*.

11. Нажимаем кнопку OK. В результате появится таблица, изображенная на рис. 6.8.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,791265301					
5	R-квадрат	0,626100777					
6	Нормированный R-кв	0,252201555					
7	Стандартная ошибка	2,106234852					
8	Наблюдения	7					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	3	22,28561	7,428536651	1,6745175	0,341162173	
13	Остаток	3	13,3086758	4,436225254			
14	Итого	6	35,5942857				
15							
16		*Коэффициенты*	*ндартная ош*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	16,55640537	5,09358136	3,250444866	0,0474735	0,346340993	32,76647
18	Переменная X 1	-15,91230084	10,7014411	-1,486930661	0,2337445	-49,96909436	18,144493
19	Переменная X 2	-7,828289522	7,36974229	-1,062220253	0,3660661	-31,28212065	15,625542
20	Переменная X 3	-0,007413726	0,86875305	-0,008533755	0,9937269	-2,772176255	2,7573488
21							
22							
23							
24	ВЫВОД ОСТАТКА						
25							
26	*Наблюдение*	*Предсказанное Y*	*Остатки*				
27	1	7,336715626	2,56328437				
28	2	7,179961905	-1,6799619				
29	3	4,037597574	0,26240243				
30	4	6,323408982	0,27659102				
31	5	8,793541785	0,60645821				
32	6	7,034407051	-1,8344071				
33	7	10,19436708	-0,1943671				

Рис. 6.8. Вывод итогов

Из таблицы, представленной на рис. 6.8 находим:

- множественный коэффициент корреляции – 0,791;

- индекс детерминации – 0,626;
- уравнения множественной линейной регрессии:

$$Y = 16{,}556 - 15{,}912 X_1 - 7{,}828 X_2 + 0{,}007 X_3$$

- F-статистику – 1,674;
- t-статистики:

для коэффициента при переменной X_1: -1,486;

для коэффициента при переменной X_2: -1,062;

для коэффициента при переменной X_1: -0,008;

- доверительные интервалы для параметров уравнения регрессии.

для коэффициента при переменной X_1: (-49,96;18,14);

для коэффициента при переменной X_2: (-31,28;15,62);

для коэффициента при переменной X_1: (-2,77; 2,75).

6.4.4. Нелинейные модели

В экономике довольно часто встречаются регрессионные зависимости, нелинейные относительно оцениваемых параметров. Этот класс регрессий не допускает непосредственного применения МНК. Для того чтобы сделать это возможным, линеаризируют зависимости по оцениваемым параметрам.

Линейные многофакторные модели наиболее широко применяются на практике. Однако нередки случаи, когда зависимость описывается нелинейными уравнениями. Например:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2; \tag{6.4.17}$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}; \tag{6.4.18}$$

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3}. \tag{6.4.19}$$

В этом случае необходимо предварительно преобразовать уравнение к линейному виду, а затем применять метод наименьших квадратов.

Например, в уравнении (6.4.17) можно обозначить $x_3 = x_1^2$ и получить модель линейного вида:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 .$$

В уравнении (6.4.18) нужно прологарифмировать левую и правую часть:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$$

и внести обозначения $\ln y = y'$, $\ln a_0 = a_0'$, $\ln x_1 = x_1'$, $\ln x_2 = x_2'$.

В результате получим модель линейного вида:

$$y' = a_0' + a_1 x_1' + a_2 x_2' .$$

В (6.4.19) уравнении достаточно обозначить $\frac{1}{x_1} = z_1$, $\frac{1}{x_2} = z_2$, $\frac{1}{x_3} = z_3$ и получить модель линейного вида:

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 .$$

Методика определения параметров уравнений и расчет всех статистических оценивающих характеристик сохраняется прежней.

6.4.5. Эластичность факторов

В эконометрии значительную роль играют коэффициенты эластичности, которые выражаются через параметры уравнений и используемые переменные. Общая формула для расчета коэффициента эластичности имеет вид:

$$Э = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}, \qquad (6.4.20)$$

где $\frac{dy}{dx}$ – первая производная функции.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится результативный признак при изменении факторного признака на один процент (при фиксированном значении остальных факторов).

Если речь идет об однофакторной модели, то можно определить, каким будет коэффициент эластичности, на основе таблицы 6.16.

Таблица 6.16

Коэффициенты эластичности

Модель	Общий вид модели	Коэффициент эластичности
Линейная	$y = a_0 + a_1 x$	$Э = a_1 \cdot \frac{x}{y}$
Гипербола	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$Э = -\frac{a_1}{xy}$
Логарифмическая функция	$y = a_0 + a_1 \ln x$	$Э = \frac{a_1}{y}$
Степенная функция	$y = a_0 \cdot a_1{}^x$	$Э = x \ln a_1$
Показательная функция	$y = a_0 \cdot x^{a_1}$	$Э = a_1$

Как видим, чаще всего коэффициент эластичности является функцией от переменных. На практике вычисления производят, беря средние значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$. (кроме показательной функции).

В случае многофакторной регрессии находят частные коэффициенты эластичности относительно каждой переменной x.

$$Э_i = \frac{dy}{dx_i} \cdot \frac{x_i}{y} \qquad (6.4.21)$$

где $\frac{dy}{dx_i}$ – частные производные по переменным x_i. В качестве значений x_i и y берут средние величины.

Можно также составить таблицу 6.17 нахождения для частных коэффициентов эластичности в случае уравнения множественной регрессии.

Таблица 6.17

Коэффициенты эластичности

Модель	Общий вид модели	Коэффициент эластичности
Линейная	$y = a_0 + \sum a_i x_i$	$Э_i = a_i \cdot \frac{x_i}{y}$
Гипербола	$y = a_0 + \sum \frac{a_i}{x_i}$	$Э_i = -\frac{a_i}{x_i y}$
Логарифмическая функция	$y = a_0 + \sum a_i \ln x_i$	$Э_i = \frac{a_i}{y}$
Степенная функция	$y = a_0 \cdot \prod a_i^{x_i}$	$Э_i = x_i \ln a_i$
Показательная функция	$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x$	$Э_i = a_i$

Пример 6.12. Для модели $\hat{Y} = 0{,}028 + 0{,}63 X_1 + 0{,}42 X_2$, построенной в примере 6.7, рассчитать коэффициенты эластичности.

Решение. В соответствии с моделью (6.4.4) $\hat{Y} = 0{,}028 + 0{,}63 X_1 + 0{,}42 X_2$ коэффициенты эластичности, найденные по формуле (6.4.16) для факторных переменных, таковы:

$$Э_1 = b_1 \cdot \frac{\overline{X_1}}{\overline{Y}} = 0{,}63 \cdot \frac{28{,}24}{18{,}85} = 0{,}944;$$

$$Э_2 = b_2 \cdot \frac{\overline{X_2}}{\overline{Y}} = 0{,}42 \cdot \frac{2{,}42}{18{,}85} = 0{,}053,$$

где $\overline{Y} = 18{,}85$, $\overline{X_1} = 28{,}24$, $\overline{X_2} = 2{,}42$.

Итак, если фактор X_1 изменится на 1%, то показатель Y изменится на 0,944% при условии, что остальные факторы не изменяются. Если фактор X_2 изменится на 1%, то показатель Y изменятся на 0,053% при условии, что остальные факторы не изменяются.

Глава 7
ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

7.1. РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

7.1.1. Экспертное оценивание

Анализ процессов в различных сферах человеческой деятельности сталкивается с необходимостью изучения показателей, которые не имеют количественного измерителя.

Экспертные методы всегда широко использовались при подготовке решений в военной, социально-политической, экономической и технической областях деятельности как наиболее сложных, внутренне противоречивых и многокритериальных, в которых и до настоящего времени не существует еще достаточно полных формализованных моделей, позволяющих увязать в рамках единой логической структуры все многообразие причинно-следственных связей, определяющих эволюцию явлений в этих областях деятельности.

Чем сложнее и противоречивее явление, чем больше ответственность за последствия принимаемых решений, тем настоятельнее необходимость при их подготовке не только использовать качественный анализ, но и привлекать количественные сопоставления, позволяющие выработать оптимальные стратегии поведения. В этих случаях методы, основанные на интуитивных суждениях экспертов, при условии, что экспертам предоставляется вся необходимая информация для выработки таких суждений, открывают возможность для получения количественных оценок полезности (важности) различных альтернатив.

Экспертные методы следует рассматривать не как способ выявления общественного мнения, а как один из возможных подходов к всестороннему изучению сложных явлений, в которых окончательное решение должен принять человек. Чем сложнее анализируемое явление, чем больше ответственность за последствия принимаемых решений, тем более высокие требования предъявляются к качеству суждений экспертов.

Принципы, на которых строится система экспертных оценок, сводятся к следующему:

- ограничение разнообразия суждений экспертов за счет выравнивания информационной неоднородности, присущей экспертной группе на этапе формирования каждым экспертом собственной модели причинно-следственных связей анализируемого явления;
- ограничение разнообразия суждений экспертов за счет итеративного подхода к формированию коллективного мнения группы, периодически уточняемого на основе поступления новой информации со стороны внешней среды;
- обеспечение циркуляции информации внутри экспертной группы без искажений за счет создания «психологического климата», в максимальной степени способствующего проявлению индивидуальных творческих возможностей каждого эксперта;
- количественная измеримость оцениваемых явлений, характеризуемая устойчивым набором признаков, имеющих различные состояния, которым могут быть поставлены в соответствие некоторые числа.

7.1.2. Этапы работ в системе экспертных оценок

А. *Цель работы и формирование альтернативных вариантов оцениваемых событий*

Формирование цели работы производится организаторами экспертного опроса и начинается с формулировки задачи, которая должна быть решена на основе экспертных оценок. Далее дается краткое описание подмножества оцениваемых событий с указанием совокупности признаков, позволяющих выделить оцениваемые события из класса возможных событий. Для подмножества оцениваемых событий указываются совокупности рангов, на основе которых группа экспертов выполняет операцию упорядочения элементов. Краткое описание цели работы представляется каждому эксперту перед началом эксперимента.

Б. *Формирование экспертной группы в соответствии с целью работы*

Формирование экспертной группы начинается с выявления потенциально возможных экспертов. К их числу принадлежат специалисты в области науки и техники, к которой относятся оцениваемые события. Выявленное число экспертов в последующем уточняется в зависимости от их специализации и квалификации. Очевидно, что для выявления коллективного суждения группы необходимо, чтобы она не была слишком малой, так как в этом случае на коллективную оценку будет существенно влиять оценка каждого эксперта. При увеличении числа членов экспертной группы этот недостаток устраняется, однако появляется опасность увеличения разнообразия оценок за счет плохо аргументированных суждений, получаемых в результате привлечения к экспертизе малокомпетентных экспертов, что увеличивает неопределенность коллективного суждения. В каждом конкретном случае окончательное решение о числе членов экспертной группы принимается организаторами работы по экспертным оценкам. Ориентировочно можно рекомендовать количественный состав группы в пределах $10 \le N \le 20$.

В. *Формирование правил и порядка работы экспертной группы.*

Правила работы экспертной группы регламентируют условия работы каждого эксперта и определяют отношения между экспертной группой и организаторами экспертного опроса. Эти правила полностью опираются на принципы, составляющие основу системы экспертных оценок, и являются обязательными при проведении работы по получению экспертных оценок. Они сводятся к соблюдению следующих условий:

- полной информированности каждого эксперта о результатах оценок, сделанных остальными экспертами, и аргументов, обосновывающих эти оценки;
- полной независимости каждого эксперта при обсуждении результатов групповой оценки и аргументации собственного суждения;
- периодической корректировке результатов оценок за счет притока информации со стороны внешней среды.

Экспертные методы не являются формальными в строгом смысле слова. Здесь остается широкое поле для творческой импровизации особенно при составлении анкет, где опыт и интуиция преобладают над алгоритмической ясностью. Результаты работы экспертной группы неизбежно будут содержать отпечаток субъективизма, вносимого как самими экспертами, так и организаторами экспертного опроса. Это является неизбежной платой за возможность получить количественные оценки там, где раньше ограничивались лишь качественным описанием.

7.1.3. Метод ранговой корреляции

Алгоритм исследования имеет три этапа. Вначале определяют систему рангов, порядок их присвоения, формируют группу экспертов, которые распределяют ранги. Находя сумму рангов для факторов, их упорядочивают. На следующем этапе проверяют меру согласованности мнений экспертов с помощью коэффициентов ранговой корреляции. На последнем этапе устанавливается значимость именно коэффициентов ранговой корреляции.

А. Случай двух экспертов

Пример 7.1. Работники двух фирм оценили влияние 10 обобщенных факторов на хозяйственную деятельность фирм. Наибольшее значение ранга присваивалось самому существенному показателю. Необходимо провести статистический анализ результатов опроса.

Факторы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	6	4	10	3	2	8	9	1	7	5
$x_i^/$	5	4	9	1	3	10	8	2	6	7

где x_i – ранги представителей первой фирмы; $x_i^/$ – ранги представителей второй фирмы.

Решение.

1. Определим сумму рангов каждого фактора, а также среднее значение ранга.

Таблица 7.1

Нахождение суммы рангов

Факторы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$x_i + x_i^/$	11	8	19	4	5	18	17	3	13	12
$\frac{x_i + x_i^/}{2}$	5,5	4,0	9,5	2	2,5	9,0	8,5	1,5	6,5	6,0

Расчеты свидетельствуют, что наиболее значимыми, по мнению опрашиваемых, следует назвать 3, 6, 7 и 9 факторы, а наименее существенными – 8, 4, 5 и 2 факторы.

2. Проверим согласованность мнений экспертов по критерию Спирмена.

2а. Найдем коэффициент ранговой корреляции Спирмена по формуле (7.1.1):

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^{/}\right)^2}{n^3 - n}, \qquad (7.1.1)$$

В нашем случае $n = 10$, поэтому формула (7.1.1) имеет вид:

$$\rho = 1 - \frac{6\left(1^2 + 0 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2\right)}{1000 - 10} = 1 - \frac{6 \cdot 18}{990} = 0{,}891$$

Полученное значение свидетельствует о высокой степени согласованности мнений экспертов относительно влияния факторов (ρ близко к 1).

2б. Установим, будет ли значимым коэффициент Спирмена.

Критическую точку T_{kp} находим по формуле (7.1.2):

$$T_{kp} = t_{kp}(n-2,\alpha)\sqrt{\left(1-\rho^2\right)/(n-2)}, \qquad (7.1.2)$$

где $t_{kp}(n-2,\alpha)$ находим по таблице Стьюдента (приложение Д).

В нашем случае T_{kp}, найденное по формуле (7.1.2), равно $T_{kp} = 2{,}306\sqrt{\left(1-0{,}891^2\right)/8} = 0{,}371$ при $t_{kp}(8;0{,}05) = 2{,}306$.

Поскольку $|\rho(=0{,}891)| > T_{kp}(=0{,}371)$, то ранговую связь факторов следует признать значимой, коэффициенту ранговой корреляции и выводам о существенности факторов надо доверять.

3. Проверим согласованность экспертов по критерию Кендалла.

3а. Найдем коэффициент ранговой корреляции Кендалла.

Для этого ранги первого эксперта разместим в возрастающей последовательности, ранги второго перенесем соответственно.

Для каждого элемента второго ряда подсчитываем число рангов, которые его превосходят и расположены за ним. Подытоживая эти числа, получаем величину R. В нашем случае она равняется:

$$R = 8+7+7+6+3+4+3+0+1 = 39.$$

Таблица 7.2

Вспомогательные расчеты

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i^/$	2	3	1	4	7	5	6	10	8	9

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла находим по формуле (7.1.3):

$$\tau = \frac{4R}{n^2 - n} - 1. \qquad (7.1.3)$$

В нашем случае формула (4.1.3) имеет вид $\tau = \frac{4 \cdot 39}{100 - 10} - 1 = 0{,}733$.

Рассчитанный коэффициент подтверждает вывод, сделанный раньше: между экспертами существует высокая согласованность мнений о влиянии факторов.

3б. Значимость коэффициента Кендалла проверяем, используя критическую точку, которую находят по формуле (7.1.4):

$$T_{kp} = z_{kp}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}, \qquad (7.1.4)$$

где z_{kp} – критическое значение, которое найдем по таблице функции Лапласа из равенства: $\Phi(z_{kp}) = (1-\alpha)/2$.

В нашем случае $\alpha = 0{,}05$, тогда $z_{kp} = 1{,}96$, поэтому T_{kp}, найденное по формуле (7.1.4), равняется $T_{kp} = 0{,}487$.

Поскольку $|\tau| > T_{kp}$, то ранговая связь между факторами является существенной, коэффициент Кендалла заслуживает доверия, а выводы о влиянии факторов справедливы.

Б. Случай многих экспертов

Пример 7.2. Представители 10 предприятий провели ранжирование 10 показателей, которые влияют на коммерческую работу. Наибольшее значение присваивалось наиболее значительному показателю. Необходимо провести эконометрический анализ результатов ранжирования.

Факторы / Эксперты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	4	10	3	2	8	9	1	7	5
2	5	4	9	1	3	10	8	2	6	7
3	6	3	9	5	2	8	10	1	4	7
4	7	1	10	6	3	9	8	2	4	5
5	7	6	10	5	2	8	9	3	1	4
6	8	7	9	4	1	6	10	5	2	3
7	6	2	10	3	5	9	7	4	1	8
8	5	1	8	4	2	10	9	3	7	6
9	2	5	10	1	3	8	9	4	6	7
10	7	5	9	4	2	6	10	1	8	3
Σ	59	38	94	37	25	82	89	26	46	55

Решение. Вычисление суммы рангов для всех показателей позволяют сделать следующий вывод: по мнению всех экспертов, самое значительное влияние на коммерческую деятельность осуществляют 3, 7, 6 и 1 факторы, наименьшее влияние – 5, 8, 2 и 4 факторы.

Меру согласованности мнений экспертов проверим с помощью коэффициента конкордации, который находят по формуле (7.1.5):

$$W = \frac{12\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - m(n+1)/2\right]^2}{m^2\left(n^3 - n\right)}, \tag{7.1.5}$$

где m – количество экспертов, n – количество факторов, $\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$ – сумма рангов по каждому фактору.

В нашем примере $m=10,\ n=10,\ m(n+1)/2=55$.

$$W = \frac{12}{100(1000-10)}[(59-55)^2+(38-55)^2+(94-55)^2+(37-55)^2+(25-55)^2+$$
$$+(82-55)^2+(89-55)^2+(26-55)^2+(46-55)^2+(55-55)^2]=0{,}710$$

Надо подчеркнуть, что согласованность мнений десяти экспертов достаточно высокая.

Оценка значимости коэффициента конкордации проводится следующим образом:

- рассчитывают $\chi^2 = m(n-1)W$;

- по таблице (приложение 3) находят критическое значение $\chi^2_{kp}(n-1,\alpha)$;

- сравнивают фактическое и критическое значения.

Для рассмотренного примера имеем: $\chi^2 = 10 \cdot 9 \cdot 0{,}71 = 63{,}9$. По $\alpha = 0{,}05$ и $n-1=9$ находим в таблице (приложение 3) $\chi^2_{kp}(9;0{,}05)$ =16,92.

Мы видим, что χ^2 значительно превышает критическую величину, из чего следует, что коэффициенту конкордации нужно доверять и что имеет место достаточно высокая корреляционная зависимость рассматриваемых факторов.

Замечание. Необходимо помнить, что $|\rho| \le 1$, $|\tau| \le 1$, $0 \le W \le 1$. Чем ближе эти коэффициенты к 1, тем сильнее согласованность мнений экспертов. Чем ближе они к нулю, тем она более слабая.

Замечание. Если одни и те же факторы анализируют два эксперта, а потом большее количество экспертов, то целесообразно составить сравнительную таблицу. В частности, для рассмотренного примера имеем:

Таблица **7**.3

Сравнительные значения

Число экспертов	**Существенные признаки**	**Несущественные признаки**
2	3, 6, 7, 9	8, 4, 5, 2
10	3, 7, 6, 1	5, 8, 2, 4

Перечень несущественных факторов не изменился, их порядок стал другим. Относительно существенных факторов, то в них, кроме порядка, изменился и перечень. Ясно, что предпочтение надо отдать случаю с десятью экспертами.

Замечание. Из таблицы рангов можно отобрать наиболее компетентных экспертов – это те, чьи ранги более всего совпадают со средними значениями.

В рассмотренном примере такими являются первый, третий и восьмой эксперты.

7.2. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Системы сетевого планирования и управления (СПУ) представляют собой особую разновидность систем организационного управления, предназначенных для управления производственной деятельностью коллективов людей. «Объектом управления» в системах СПУ является коллектив исполнителей, располагающих определенными ресурсами: людскими, материальными, финансовыми и др. Однако от систем организационного управления других видов системы СПУ отличаются рядом особенностей. Их методологическую основу составляют методы исследования операций, теория ориентированных графов и некоторые разделы теории вероятности.

Можно следующим образом кратко сформулировать три основные особенности систем СПУ:

- системный подход к решению вопросов организации управления процессом создания новых объектов;
- использование информационно-динамической модели особенного вида (так называемой сетевой модели комплекса операций) для логико-математического описания процесса создания нового объекта и алгоритмизации расчетов параметров этого процесса (продолжительности, трудоемкости, стоимости и т.д.);
- применение машинных информационно-вычислительных систем обработки исходных и оперативных данных для расчета плановых показателей и получения необходимых аналитических и отчетных сводок.

Преимущества систем СПУ заключаются в том, что их применение позволяет:

- четко отобразить объем и структуру решаемой задачи, выявить с достаточной степенью детализации работы, образующие единый комплекс операций процесса создания нового объекта; определить события, свершение которых необходимо для достижения заданной цели;
- выявить и всесторонне проанализировать взаимосвязь между работами, так как в самом принципе построения сетевой модели за-

ложено точное отражение всех зависимостей между работами и их технологической последовательностью;

- разработать обоснованный план выполнения комплекса работ по созданию нового объекта, поскольку при составлении сети используются опыт и знания большого коллектива квалифицированных специалистов, в том числе ответственных исполнителей, принимающих непосредственное участие в данной разработке;

- более эффективно использовать ресурсы, так как анализ сетевой модели и выявление «критических» работ и резервов времени на «некритических» работах помогает руководству определить возможности перераспределения ресурсов с целью ускорения выполнения критических работ и, следовательно, сократить сроки завершения разработки в целом;

- заранее анализировать результаты осуществления вариантов плана на электронно-вычислительных машинах, благодаря чему появляется возможность определять влияние тех или иных факторов на сроки разработки нового проекта, проверять эффективность различных предложений в части изменения последовательности работ, перераспределения ресурсов и т.д., анализировать альтернативные решения с целью отбора наилучшего варианта;

- быстро обработать с помощью средств вычислительной техники большие массивы отчетных данных и обеспечить руководство своевременной и исчерпывающей информацией о фактическом состоянии работ, облегчающей принятие обоснованных решений;

- осуществить обоснованное прогнозирование критических работ и сконцентрировать внимание руководства на их выполнении, что поможет руководству заблаговременно выявить возможные «узкие места» и своевременно принимать меры по их устранению;

- систематически корректировать оперативные планы работ в соответствии с фактическим состоянием разработки и происшедшими в отчетном периоде изменениями, подчиняя деятельность всех исполнителей задаче завершения разработки в кратчайшие сроки, и практически реализовать принцип непрерывности планирования;

- сочетать усиление централизации руководства с развитием инициативы и повышением ответственности руководителей организации – соисполнителей и ответственных исполнителей работ;

- упростить и унифицировать учетную документацию;

- накапливать в удобной для анализа на ПК форме систематизированную статистику по продолжительности, трудоемкости и стоимости выполнения типовых работ с целью разработки в последующем справочно-нормативных материалах для планирования и контроля.

Одновременно с созданием систем типа ПЕРТ американскими учеными был предложен принципиально иной метод оценок продолжительности работ. Учитывая неопределенный характер новых разработок, они предложили определять для каждой работы не одну детерминированную оценку продолжительности, а три вероятностные оценки:

- *минимальную продолжительность* – $t_{\min}(i,\ j)$, или, как ее назвали американцы, «оптимистическую» оценку;

- *максимальную продолжительность* – $t_{\max}(i,\ j)$, названную пессимистической оценкой;

- *наиболее вероятную продолжительность* – $t_{нв}(i,\ j)$.

При этом под $t_{\min}(i,\ j)$ понимается такая предполагаемая продолжительность работы, которая имела бы место при наиболее благоприятном стечении обстоятельств, т.е. если бы в процессе выполнения работы не пришлось менять первоначального замысла и не встретились бы различные непредвиденные трудности и задержки, которые обычно неизбежно встречаются. Считается, что вероятность выполнения данной работы за срок меньший, чем $t_{\min}(i,\ j)$, крайне мала или практически отсутствует.

В случаях, когда показатели продолжительности работ являются случайными величинами, заданными в виде трех или двух оценок, расчет параметров сетевой модели может осуществляться по средним значениям оценок продолжительности, определенным на основании принятого закона распределения:

а) в случае трех оценок:

$$t(i,\ j)=\frac{t_{\min}(i,\ j)+4t_{нв}(i,\ j)+t_{\max}(i,\ j)}{6};$$

б) в случае двух оценок:

$$t(i,\ j)=\frac{3t_{\min}(i,\ j)+2t_{\max}(i,\ j)}{5}.$$

Основой решения задач, которые связаны с проектированием и выполнением комплекса работ, является системное рассмотрение работ и событий в их взаимосвязи и разработка рекомендаций по усовершенствованию их выполнения. Идея метода сетевого управления и планирования основана на безмасштабном графическом изображении комплекса работ, которое показывает технологическую последовательность и логическую взаимосвязь между всеми работами комплекса.

7.2.1. Основные элементы сетевого графика

Работа – любое действие, трудовой процесс, который сопровождается затратами ресурсов и времени и приводит к определенным результатам. При графическом представлении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключенных в скобки чисел (i,j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность t(i,j).

Работа в сетевом графике бывает трех видов

- действительная работа – это протекающий во времени процесс, требующий затрат труда, материалов и других ресурсов, изображается сплошной стрелкой;
- работа-ожидания, которая требует только затрат времени и на графике изображается пунктирными стрелками с точками;
- фиктивная работа – представляет собой логическую взаимосвязь работ и показывает, что начало одной из них непосредственно зависит от другой и на графике изображается пунктирными стрелками.

Событие – результат выполнения одной или нескольких работ. Оно не имеет протяженности во времени. Событие свершается в тот момент, когда заканчивается последняя из работ, входящая в него. Событие имеет двойственное значение: для предшествующих работ оно является законченным свершением, а для последующих работ – начальным пунктом их выполнения. События обозначаются одним числом и при графическом представлении изображаются кружком (или иной геометрической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер ($i == 1, 2, ..., N$). В сетевой модели имеется начальное событие (с номером 1), из которого работы только выходят, и завершающее событие (с номером N), в которое работы только входят. Начальное событие – это момент начала выполнения комплекса работ, означающий наличие условий для начала работ всего комплекса. В одной сетевой модели должно быть только одно исходное событие. Завершающее событие – это момент окончания выполнения комплекса работ. События бывают комплексными (результат выполнения нескольких работ) и частными (результат выполнения нескольких работ). Если события связаны между собой одной работой, то они называются *смежными*.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную вершины. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ.

7.2.2. Основные требования к сетевой модели

1. События правильно пронумерованы, т.е. для каждой работы (i,j), где $i<j$. При невыполнении этого требования необходимо использовать алгоритм перенумерации событий.

2. Отсутствуют тупиковые события (за исключением завершающего), т.е. такие, за которыми не следует хотя бы одна работа.

3. Отсутствуют события (за исключением исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.

4. Отсутствуют циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

5. Если какие-либо работы могут начаться раньше свершения непосредственно предшествующего им события, то работу целесообразно разбить на части с присвоением соответствующих имен промежуточным событиям.

При невыполнении указанных требований бессмысленно приступать к вычислениям характеристик событий, работ и критического пути.

Значение основных параметров сетевого графика и их расчеты рассмотрим на примере.

Пример 7.3. Построить в соответствии с правилами сетевой график и рассчитать его основные параметры:

(i,k)	1,2	1,3	1,4	2,5	2,6	3,8	3,11	4,7	4,9	5,6	6,12	7,8	7,1	8,11	9,1	10,12	11,12
$t(i,k)$	18	30	15	22	12	25	30	9	25	30	22	20	5	35	15	42	32

Решение. Правила построения сетевого графика:

1) стрелки-работы не должны пересекаться;

2) график должен иметь линейную структуру, то есть события с меньшим номером располагают левее событий, которые имеют больший номер;

3) начальное событие не имеет входных стрелок;

4) конечное событие не имеет исходных стрелок;

5) два события связывает только одна работа;

6) в сети не должно быть событий, в которые не входит ни одна работа, и событий, из которых не выходит ни одна работа;

7) в сети не должно быть циклов и петель.

Строим в соответствии с правилами сетевой график, который изображен на рис. 7.1.

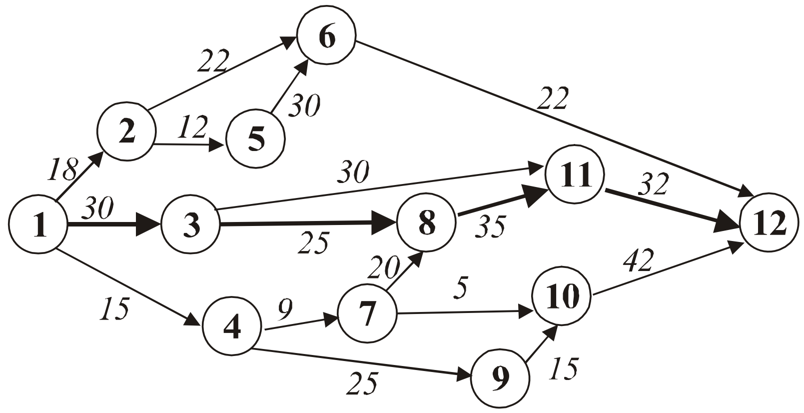


Рис. 7.1. Сетевой график

Вначале нужно выписать все *полные пути*, соединяющие начальное и завершающее события, найти их *продолжительность*. В результате сопоставления продолжительностей полных путей выявляется путь, имеющий наибольшую продолжительность – *критический путь*. Его обозначают $L_{кр}$, а его продолжительность – $t_{кр}$. В нашем случае это четвертый путь. Его отмечают на графике. Это делается для того, чтобы основное внимание было сосредоточено на работах критического пути, потому что от выполнения этих работ будут зависеть все остальные работы комплекса.

Критический путь является единственным фактором, определяющим продолжительность всего комплекса работ. Изменение продолжительности критического пути влияет на сроки выполнения всех работ графика. Все остальные пути, в отличие от критического, называются *ненапряженными*. Из всех напряженных путей выделяются близкие к критическому пути и пути, наименее напряженные.

Продолжительность критического пути определяет срок наступления завершающего события. Увеличение ее приводит к удлинению сроки выполнения всего комплекса работ, и наоборот, уменьшение ведет к сокращению срока выполнения работ. Эти свойства характерны только для критического пути, все остальные пути сетевого графика этих свойств не имеют. Некоторое увеличение или уменьшение продолжительности этих путей не отражается на удлинении или сокращение срока завершения комплекса работ. Иначе говоря, все ненапряженные пути имеют резервы времени. Эти резервы $R_n(L)$ *(полные резервы времени ненапряженных путей)* определяются как разность между продолжительностями критического пути и ненапряженных путей:

$$R_n(L) = t_{kp} - t(L), \qquad (7.2.1)$$

где $t(L)$ – продолжительность пути L, t_{kp} – продолжительность критического пути.

Резервы времени являются важнейшим параметром сетевого графика, которые показывают, на сколько может быть увеличена продолжительность данного пути без ущерба наступления завершающего события.

Резервы времени существуют во всех случаях, когда в сетевом графике имеется более одного пути, ведущего от начального до завершающего события.

Если в сети имеется только один путь, то он и будет критическим, и работы, лежащие на этом пути, не будут иметь резервов времени.

Для исследуемой сетевой модели полные пути, их продолжительность, полные резервы времени представлены в таблице **7**.4.

Таблица **7**.4

Характеристики полных путей сетевой модели

Полные пути	**Продолжительность полных путей**	**Полные резервы времени путей**
L_1: 1, 2, 5, 6, 12	$t(L_1)$ = 18 + 22 + 30 +22 = 92	$R_n(L_1)$ = 122 – 92 = 30
L_2: 1, 2, 6, 12	$t(L_2)$ = 18 + 22 + 22 = 52	$R_n(L_2)$ = 122 – 52 = 70
L_3: 1, 3, 11, 12	$t(L_3)$ = 30 +30 + 32 = 92	$R_n(L_3)$ = 122 – 92 = 30
L_4: 1, 3, 8, 11, 12	$t(L_4)$ = 30 + 25 + 35 + 32 = 122	$R_n(L_4)$ = 122 – 122 = 0
L_5: 1, 4, 7, 8, 11, 12	$t(L_5)$ = 15 + 9 +20 +35+32 = 111	$R_n(L_5)$ = 122 –111 = 11

Окончание Таблицы **7**.4

L_6: 1, 4, 7, 10, 12	$t(L_6)$ = 15 + 9 + 5 + 42 = 71	$R_n(L_6)$ = 122 – 71 = 51
L_7: 1, 4, 9, 10, 12	$t(L_7)$ = 15 + 25 + 15 + 42 = 97	$R_n(L_7)$ = 122 – 97 = 25

Для событий рассчитывают три характеристики: *ранний и поздний срок совершения события*, а также его *резерв*.

Ранний срок свершения события – продолжительность максимального пути от начального до рассматриваемого события, причем $t_p(1) = 0$, а $t_p(N) = t_{кр}(L)$:

$$t_p(i) = \max t(1,i) \tag{7.2.2}$$

Ранний срок указывает наиболее ранний момент наступления рассматриваемого события.

Например, для события 2 имеем $t_P(2)=18$, поскольку от начального до события 2 ведет единственный путь, продолжительность которого 18. Для нахождения раннего срока свершения события 6, определим продолжительности путей от начального до события 6 – это 70 и 30. Выбираем наибольшую величину – 70. Поэтому $t_P(6)= 70$. Результаты вычислений представлены в таблице 4.5.

Поздний срок свершения события – это разность между продолжительностью критического пути и продолжительность максимального пути, следующего за данным событием до завершающего:

$$t_n(i) = t_{kp} - \max t(i,N), \tag{7.2.3}$$

где $\max t(i,N)$ – продолжительность максимального пути, следующего за данным событием до завершающего.

Поздний срок указывает наиболее поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, которые следуют за этим событием. Для конечного события поздний срок свершения равняется критическому сроку $t_П(7) = t_{КР} = 122$. Например, от события 7 до завершающего следуют два пути 47 и 87. Выбираем 87, затем вычитаем это число от 122. Имеем $t_n(7) = 122 - 87 = 35$. Результаты вычислений представлены в таблице **7**.5.

Все события, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют *резерв* $R(i)$*:*

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \tag{7.2.4}$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Зная резерв времени каждого события, можно видеть, какой полный резерв имеет максимальный путь, который проходит через данное событие. Это свойство используется при оптимизации сетевых графиков.

События, через которые проходит критический путь, резерва времени не имеют. Это объясняется тем, что у этих событий сроки раннего и позднего свершения совпадают.

Таблица **7**.5

Характеристики событий

i	$t_P(i)$	$t_П(i)$	$R(i)$
1	0	0	0
2	18	48	30
3	30	30	0
4	15	26	11
5	40	70	30
6	70	100	30
7	24	35	11
8	55	55	0
9	40	65	25
10	55	80	25
11	90	90	0
12	122	122	0

Для работ рассчитывают следующие характеристики:

- *раннее начало работы* совпадает со сроком раннего свершения начального для этой работы события:

$$t_{PH}(i,k) = t_P(i) \tag{7.2.5}$$

- *раннее окончание работы* равно сумме раннего начала и продолжительности работы:

$$t_{PO}(i,k) = t_{PH}(i,k) + t(i,k) \tag{7.2.6}$$

- *позднее начало работы* разности между сроком позднего свершения конечного события для данной работы и продолжительности работы:

$$t_{ПН}(i,k) = t_{П}(k) - t(i,k) \tag{7.2.7}$$

- *позднее окончание работы* со сроком позднего свершения конечного для этой работы события:

$$t_{ПО}(i,k) = t_{П}(k) \tag{7.2.8}$$

Резервы времени работ характеризуют собой максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность выполнения работ без увеличения общего срока выполнения комплекса работ.

Полный резерв времени представляет собой разность между поздним и ранним сроками начала работы или между поздним и ранним сроками окончания работы:

$$R_n(i,j) = t_{пн} - t_{рн} = t_{по} - t_{ро} \tag{7.2.9}$$

Полный резерв времени, которым располагают работы и события, состоит из *частных резервов времени*.

- *частный резерв времени первого вида* представляет собой такую часть полного резерва времени работы, которую можно использовать на увеличение продолжительности данной работы и в определенных размерах следующих за ней работ, не вызывая сокращения резервов времени ни у одной из предшествующих работ:

$$R' = t_n(j) - t_n(i) - t(i,j) \tag{7.2.10}$$

- *частный резерв времени второго вида* представляет собой такую часть полного резерва времени работы, которую можно использовать на увеличение продолжительности данной работы и в определенных размерах предшествующих ей работ, не вызывая сокращения резервов времени ни у одной из последующих работ:

$$R'' = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j) \tag{7.2.11}$$

Независимый (свободный) резерв времени соответствует случаю, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ. Он образуется у тех работ, для которых разность между сроком раннего свершения конечного события и сроком позднего свершения начального события будет больше продолжительности этой работы:

$$R_H(i,j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i,j) \tag{7.2.12}$$

Важная особенность свободного резерва времени состоит в том, что полное использование его для работы, которая его имеет, не отражается на резервах времени предшествующих и последующих работ.

Отрицательная величина свободного резерва времени показывает на то, сколько времени не будет хватать для выполнения работы к сроку раннего свершения ее конечного события, если работа будет начата с момента позднего свершения ее начального события.

Свободный резерв времени может быть выражен и относительной величиной, которая называется *коэффициентом свободы*. Коэффициент свободы – это отношение времени между ранним сроком свершения конечного события и поздним сроком начального события к продолжительности работы:

$$K_c(i,j) = \frac{t_p(j) - t_n(i)}{t(i,j)}. \tag{7.2.13}$$

Замечание. Если свободного резерва нет, то K_c=1.

Для оптимизации сетевой модели, выражающейся в перераспределении ресурсов с ненапряженных работ на критические для ускорения их выполнения, необходимо как можно более точно оценить степень трудности своевременного выполнения всех работ, а также «цепочек» пути. Более точным инструментом решения этой задачи по сравнению с полным резервом является *коэффициент напряженности*, который может быть по формуле (4.2.14):

$$K_H(i,k) = \frac{t\left(L_{\max}(i,k)\right) - t'_{KP}\left(L_{\max}(i,k)\right)}{t_{KP} - t'_{KP}\left(L_{\max}(i,k)\right)}, \tag{7.2.14}$$

где $L_{\max}(i,k)$ – путь максимальной продолжительности, который проходит через работу (i,k); $t'_{KP}\left(L_{\max}(i,k)\right)$ – продолжительность отрезка критического пути, который совпадает с путем $L_{\max}(i,k)$.

Он определяет степень срочности работы, позволяет установить очередь их выполнения, если она не определена технологическими связями робот. $0 < K_H \le 1$. Работы критического пути имеют коэффициент напряженности 1. Если $0{,}8 \le K_H \le 1$, то работу считают подкритической, сроки ее выполнения жесткие, ее следует выполнять в первую очередь после критических работ. Если $0{,}5 \le K_H < 0{,}8$, то работа является промежуточной по степени напряженности срока ее выполнения. Если $0 < K_H < 0{,}5$, то работа является ненапряженной, ее выполнение можно отложить на некоторый срок, который определяют резервом времени.

В нашем случае для определения коэффициента напряженности (**7**.2.14) работы (7, 8) находим путь наибольшей продолжительности, который проходит через эту работу – это путь L_5: 1, 4, 7, 8, 11, 12, его продолжительность $t(L_5)$= 111. Проследим на графике, как пройдет этот путь и где он имеет с критическим путем общие участки. Общие участки (8,11) и (11,12) имеют продолжительность 35 + 32 = 67, тогда коэффициент напряженности равняется $K_H(7{,}8) = \dfrac{111-67}{122-67} = 0{,}8$. То есть работа (7,8) является подкритической по степени напряженности срока ее выполнения. Аналогично рассчитываем другие коэффициенты напряженности, помня, что коэффициент напряженности работ критического пути равен 1. Перемещая ресурсы с ненапряженных работ на критические, добиваются уменьшения срока выполнения всего комплекса работ.

Все рассчитанные характеристики работ запишем в таблице **7**.6.

Выводы:

1. Критический срок выполнения комплекса работ составляет 122 временные единицы, то есть все работы данного комплекса можно выполнить за наименьший срок в 94 временные единицы (дни, недели, месяцы и т.п.).

Таблица **7**.6

Характеристики работ сетевой модели

(i,j)	$t(i,j)$	**Сроки наступления работ**				**Резервы времени**			
		$t_{PH}(i,j)$	$t_{PO}(i,j)$	$t_{ПН}(i,j)$	$t_{ПО}(i,j)$	$R_{П}(i,j)$	$R'(i,j)$	$R''(i,j)$	$K_{H}(i,j)$
1,2	18	0	18	30	48	30	30	0	0,75
1,3	30	0	30	0	30	0	0	0	1
1,4	15	0	15	11	26	11	11	0	0,8
2,5	22	18	40	48	70	30	0	0	0,75
2,6	12	18	30	88	100	70	40	40	0,43
3,8	25	30	55	30	55	0	0	0	1
3,11	30	30	60	60	90	30	30	30	0,5
4,7	9	15	24	26	35	11	0	0	0,8
4,9	25	15	40	40	65	25	14	0	0,79
5,6	30	40	70	70	100	30	0	0	0,75
6,12	22	70	92	100	122	30	0	30	0,75
7,8	20	24	44	35	55	11	0	11	0,8
7,10	5	24	29	75	80	51	40	26	0,5
8,11	35	55	90	55	90	0	0	0	1
9,10	15	40	55	65	80	25	0	0	0,79
10,12	42	55	97	80	122	25	0	25	0,79
11,12	32	90	122	90	122	0	0	0	1

2. События 1, 3, 8, 11, 12 являются критическими, они принадлежат критическому пути сетевой модели графика. Эти события не имеют резерва времени, то есть их нельзя отложить.

3. События 2, 5,6 имеют резерв времени 30 временных единиц, события 9,10 – 25, события 4,7 – 11.

4. Работы (1,3), (3,8), (8,11), (11,12) являются критическими и имеют коэффициент напряженности 1. Их выполнение нельзя отложить и невозможно увеличить срок выполнения этих работ.

5. Работы (1,4), (4,7), (7,8) являются подкритическими. Их должны выполнять в первую очередь после работ критического пути.

6. Работы (1,2), (1,4), (2,5), (3,11), (4,9), (5,6), (6,12), (7,10) являются промежуточными.

7. Работа (2,6) является ненапряженной, она имеет определенный резерв для увеличения ее продолжительности или задержки начала выполнения.

Глава 8
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

8.1. ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ПОСТРОЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ»

Задание 1.

- Проверить, можно ли описать данный ряд с помощью закона распределения Пуассона?

- Проверить согласованность теоретических и фактических частот.

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	134	235	345	1222	999	782	544	344	108	64	45	22	7	1

2.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	46	154	278	499	503	365	299	154	103	44	23	15	2	1	1

3.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	128	235	345	1003	995	781	534	335	108	64	39	19	6	1

4.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	36	154	255	507	503	365	299	154	107	53	27	15	3	2	1

5.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	89	300	598	800	805	644	477	277	62	44	34	19	6	1

6.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	65	233	432	600	605	500	456	344	165	97	33	14	3	1	1

7.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	168	335	341	1043	999	681	500	311	157	74	38	18	4	1

8.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	45	174	255	527	523	365	269	144	107	51	23	12	3	3	1

9.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	65	270	598	850	855	642	477	273	62	44	32	16	2	1

10.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	54	222	444	701	705	598	446	322	145	87	29	15	2	1	1

11.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	132	235	345	990	999	762	444	333	104	61	43	19	6	1

12.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	43	161	272	520	504	361	282	151	108	42	23	13	2	1	1

13.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	168	231	345	1044	1009	741	531	335	109	65	39	12	6	1

14.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	31	151	255	537	533	361	259	114	89	53	27	15	3	2	1

15.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	59	303	591	860	865	644	477	277	62	41	33	19	6	1

16.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	137	274	352	1033	999	792	494	324	101	54	43	21	5	1

18.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	16	104	248	499	488	360	299	154	106	44	23	15	4	1	1

19.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	128	235	345	878	888	681	434	235	108	34	12	4	1	1

20.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	41	174	251	528	533	362	269	144	107	51	23	12	3	3	1

21.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	61	265	598	833	800	642	437	271	58	41	32	16	2	1

22.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	53	221	412	741	745	598	446	322	145	81	39	17	2	1	1

23.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	98	225	341	990	1006	762	441	303	104	61	43	3	3	1

24.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	49	116	223	500	493	351	281	151	108	47	23	11	2	1	1

25.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	161	231	340	1024	1039	741	528	335	109	65	37	13	1	1

26.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	131	271	352	1021	999	762	491	323	102	64	43	19	5	1

27.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	19	104	238	519	498	360	199	104	106	49	33	17	3	1	1

28.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	120	231	345	878	898	581	430	231	138	34	15	4	1	1

29.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	41	170	251	628	633	362	269	244	107	51	23	12	4	3	1

30.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	61	261	598	833	801	641	437	271	58	41	32	3	2	1

Задание 2.

- Проверить, можно ли описать данный ряд с помощью показательного закона распределения?
- Проверить согласованность теоретических и фактических частот.

1.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
n_i	62	37	23	14	9	5	2

2.

x_i	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5	21,5	24,5
n_i	50	36	23	16	9	5	2	1

3.

(α_i, β_i)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
n_i	32	17	9	4	2	1	1

4.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
n_i	30	16	13	9	5	2	2	1

5.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24
n_i	67	32	25	19	10	6	3	1

6.

x_i	7,5	11,5	15,5	19,5	23,5	27,5	31,5	35,5	39,5
n_i	59	41	31	21	14	9	5	2	1

7.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
n_i	82	47	24	16	8	5	2

8.

x_i	3	6	9	12	15	18	21	24
n_i	58	36	22	16	10	5	2	1

9.

(α_i, β_i)	0–7	7–14	14–21	21–28	28–35	35–42	42–49
n_i	82	57	34	23	12	4	1

10.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	72	37	29	19	10	5	3	1

11.

x_i	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5	21,5	24,5	27,5
n_i	61	50	36	23	17	9	5	2	1

12.

x_i	12,5	16,5	20,5	24,5	28,5	32,5	36,5	40,5	44,5	48,5
n_i	92	67	50	36	23	16	9	5	2	1

13.

(α_i, β_i)	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	51	32	17	9	4	2	1	1

14.

x_i	2	7	12	17	22	27	32	37
n_i	80	56	33	19	9	5	2	1

15.

(α_i, β_i)	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
n_i	87	42	27	19	10	6	3	1

16.

x_i	7	11	15	19	23	27	31	35	39
n_i	79	51	31	20	14	8	4	2	1

17.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	90	71	44	36	18	10	4	1

18.

(α_i, β_i)	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	68	32	24	14	9	5	2

19.

x_i	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5
n_i	51	33	23	16	9	5	2	1

20.

(α_i, β_i)	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21	21–24	24–29
n_i	42	23	14	8	2	1	1

21.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
n_i	71	48	30	16	13	9	5	2	2	1

22.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
n_i	72	42	25	19	10	6	3	1	1

23.

x_i	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
n_i	82	63	50	35	23	16	9	5	2	1

24.

(α_i, β_i)	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	81	42	27	19	8	4	1	1

25.

x_i	2	7	12	17	22	27	32	37
n_i	86	56	33	23	13	5	2	1

26.

(α_i, β_i)	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19
n_i	107	87	43	27	20	10	6	3	1

27.

(α_i, β_i)	1–6	6–11	11–16	16–21	21–26	26–31	31–36
n_i	52	28	14	11	8	5	1

28.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
n_i	73	48	30	24	17	12	9	4	2	1

29.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
n_i	62	42	21	16	10	6	3	1	1

30.

x_i	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49
n_i	81	63	50	31	21	16	11	5	2	1

Задание 3.

- Проверить, можно ли описать данный ряд с помощью нормального закона распределения?
- Проверить согласованность теоретических и фактических частот.

1.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
n_i	2	22	32	56	30	16	13	5	1

2.

x_i	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49
n_i	8	14	23	31	54	16	11	5	2	1

3.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
n_i	2	24	50	24	17	12	9	4	2	1

4.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21 – 24	24–27
n_i	2	12	25	39	50	26	13	6	3

5.

x_i	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
n_i	21	63	90	135	223	96	49	25	12	7

6.

(α_i, β_i)	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
n_i	7	12	27	79	20	12	10	7

7.

x_i	7	11	15	19	23	27	31	35	39
n_i	19	51	131	220	114	83	41	23	11

8.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	9	71	144	196	118	60	23	13

9.

(α_i, β_i)	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	8	32	124	74	29	15	2

10.

x_i	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5
n_i	12	33	123	76	39	15	7	1

11.

(α_i, β_i)	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21	21–24	24–29
n_i	11	23	114	78	42	21	9

12.

(α_i, β_i)	0–7	7–14	14–21	21–28	28–35	35–42	42–49	49–56
n_i	2	57	94	53	22	14	5	1

13.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	12	37	129	79	50	25	13	5

14.

x_i	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5	21,5	24,5	27,5
n_i	11	50	136	223	117	59	25	12	6

12.

x_i	12,5	16,5	20,5	24,5	28,5	32,5	36,5	40,5	44,5	48,5
n_i	21	67	150	236	123	86	59	45	22	13

15.

(α_i, β_i)	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	12	32	77	49	24	12	7	1

16.

x_i	2	7	12	17	22	27	32	37
n_i	8	56	133	189	119	57	24	16

17.

x_i	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
n_i	8	14	23	131	154	116	81	25	12	1

18.

x_i	25	75	125	175	225	275	325	375	425	475
n_i	2	24	70	24	17	12	9	4	2	1

19.

(α_i, β_i)	0–3	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
n_i	12	62	125	139	150	76	13	6	3

20.

x_i	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
n_i	21	93	190	235	323	196	149	95	42	17

21.

(α_i, β_i)	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
n_i	17	42	127	179	120	72	30	7

22.

x_i	7	11	15	19	23	27	31	35	39
n_i	11	46	130	224	114	83	41	23	11

23.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	7	71	144	227	118	60	23	12

24.

x_i	7	11	15	19	23	27	31	35	39
n_i	14	51	131	223	114	83	41	21	11

25.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	39	171	244	296	218	160	23	13

26.

(α_i, β_i)	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
n_i	8	32	124	174	129	55	22

27.

x_i	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5
n_i	12	33	123	176	139	75	27	11

28.

(α_i, β_i)	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21	21–24	24–29
n_i	11	123	214	178	72	51	9

29.

(α_i, β_i)	0–7	7–14	14–21	21–28	28–35	35–42	42–49	49–56
n_i	23	57	94	153	82	44	15	5

30.

(α_i, β_i)	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
n_i	12	37	129	179	150	85	39	15

8.2. ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ»

Задание 1. Построить математическую модель задачи.

1. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества *A*, не менее 12 ед. вещества *B* и не менее 4 ед. вещества *C*. Для кормления животных используется два вида корма. В таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг корма каждого вида.

Питательные вещества	**Виды корма**	
	I	**II**
A	2	1
B	2	4
C	0	4

Цена 1 кг корма вида I равна 50 ден.ед., корма вида II – 60 ден.ед. Сколько корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными?

2. На трех группах оборудования необходимо изготовить изделия четырех видов. Установлен план производства: изделий типа *А* – 2000 шт., *Б* – 1000 шт., *В* – 200 шт., *Г* – 250 шт. Данные о себестоимости каждого изделия, трудоемкости и фон рабочего времени заданы в таблице.

Оборудование	**Себестоимость одного изделия, крб.**				**Время на изготовление одного изделия, мин.**				**Фонд времени, мин.**
	а	**б**	**в**	**г**	**а**	**б**	**в**	**г**	
1	1,5	2,4	0,9	1,4	4	8,0	2,5	4,0	35000
2	1,8	1,2	1,0	1,7	2,5	1,2	1,0	1,7	16000
3	2,7	5,4	6,0	5,6	3,5	1,5	1,0	1,2	22000

Составить план загрузки оборудования, при котором минимизируются себестоимость изготовленных изделий.

3. При производстве продукции P_1 и P_2 используют 4 группы оборудования *A, B, C* и *D*. На выпуск единицы продукции P_1 расходуется в

единицу времени 1; 0,5; 2 и 0 ед. оборудования *A, B, C* и *D* соответственно, а единицы продукции P_2 – 1; 1; 0 и 2 ед. оборудования *A, B, C* и *D*. Фонд рабочего времени группы *A* составляет 18, *B* –12, *C* – 24 и *D*–18 ед. времени. Предприятие реализует единицу продукции P_1 по цене 40 ден.единиц, P_2 – 60 ден.единиц. Найти план выпуска продукции, при котором выручка предприятия будет максимальной.

4. Мебельная фабрика изготовляет столы, стулья, бюро и книжные шкафы, используя два различных вида досок, причем фабрика имеет 500 м досок первого вида и 1000 м досок второго. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел./час. В таблице приведены нормативы затрат каждого вида ресурсов на изготовление одного изделия и доход на одно изделие.

Ресурсы	**Затраты на одно изделие**			
	столы	**стулья**	**бюро**	**книжные шкафы**
Доски I вида, м	5	1	9	12
Доски II вида, м	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел./час	3	2	5	10
Доход на одно изделие (грн.)	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий доход.

5. Для перевозки груза используют машины типов *А* и *Б*. Грузоподъемность машин каждого типа 3 т. За один раз машина расходует 1,5 кг смазочных материалов и 50 л бензина. Затраты на эксплуатацию машины *А* составляют 80 грн., *Б* – 50 грн. Необходимо перевести 60 т груза. Сколько нужно использовать машин типов *А* и *Б*, чтобы эксплуатационные затраты были минимальными?

6. На звероферме могут выращивать черно-бурых лисиц и песцов, для которых заготавливают три вида кормов. Количество корма каждого вида, который должны ежедневно получать звери, общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано фермой, и доход от реализации одной шкурки лисицы и песца представлены в таблице:

Вид корма	Количество единиц корма		Общее количество корма
	лисица	песца	
1	2	3	360
2	4	1	480
3	6	7	852
Доход от реализации одной шкурки (грн.)	320	250	

Определить, сколько лисиц и песцов необходимо вырастить на ферме, чтобы доход от реализации их шкурок был максимальный.

7. Предприятие выпускает три вида изделий. Месячная программа выпуска составляет 200 изделий первого вида, 1800 – второго, 1500 – третьего. Для выпуска изделий используют материалы, ежемесячные затраты которых не могут превышать 61000 кг. На одно изделие 1-го вида расходуется 8 кг материала, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Оптовая цена одного изделия первого вида 7 грн., второго и третьего – соответственно 10 грн. и 9 грн. Определить оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

8. Для перевозки груза на 3-х направлениях могут быть использовании корабли трех типов. Грузоподъемность кораблей (Cij) при использовании их на различных направлениях характеризуется числами, приведенными в таблице. В ней указывается также общее время эксплуатации и минимально необходимые объемы перевозки на каждом из направлений. Определить какой корабль, на каком направлении и на протяжении какого времени необходимо использовать, чтобы обеспечивать максимальную загрузку кораблей с учетом возможного времени их эксплуатации.

Вид кораблей	Грузоподъемность кораблей (млн т./км за пору) на направлении			Общее время эксплуатации
	1	2	3	
1	9	15	12	300
2	7	16	14	300
3	13	13	5	300
Объем перевозок, млн т.	4000	5400	4300	

9. Распределить четыре сорта топлива, которое имеется в количествах 70, 40, 50, 40 т соответственно каждого сорта, между пятью агрегатами, потребности которых составляют 20, 40, 50, 60 и 40 т соответственно. Задана матрица теплообразовательной способности: $C_{ij}=\begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, где C_{ij} -теплообразовательная способность i-го сорта топлива при использовании его в j-му агрегате. Найти оптимальное распределение топлива между агрегатами, при котором будет получено максимальное количество теплоты от всего запаса топлива.

10. В заводской лаборатории создается антифрикционный сплав (оловянистый баббит), который должен содержать: олова – не меньше 15%, сурьмы – не меньше 15%, свинца – около 70%. Есть четыре сплава, их процентный состав и цены на них приведенные в таблице:

Элементы	**Сплав**			
	1	**2**	**3**	**4**
Олово	12	20	12	20
Сурьма	12	18	18	14
Свинец	76	62	70	66
Цена за 1	3,5	5,2	4,0	4,6

Рассчитать количество элементов для сплава каждого вида, необходимое для 1 кг смеси, которая бы обеспечила минимальные затраты.

11. С вокзала можно отправлять ежедневно скорые и курьерские поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов указаны в таблице:

Характеристика парка вагонов	**Тип вагона**				
	багаж-гаж-ный	**почто-вый**	**плац-картный**	**купей-ный**	**мягкий**
Число вагонов в поезде:					
курьерском	1	–	5	6	3
скором	1	1	8	4	1

Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	27

Составить математическую модель и выбрать такое соотношение между числом скорых и курьерских поездов, чтобы число пассажиров, которых можно отправить ежедневно, достигло максимума.

12. В овощной магазин привозят одним видом транспорта картофель из трех колхозов соответственно 40, 30 и 10 ден. ед. за 1 кг. На разгрузку и складирование 1 т картофеля с помощью ленточного транспортера требуется времени: из первого колхоза – 1 мин., из второго – 4 мин., из третьего – 3 мин. (разное время разгрузки объясняется различием затоваривания картофелем). Чтобы без задержки удовлетворять потребность покупателей, нужно на разгрузку 12 тонн картофеля, заказываемых ежедневно магазином, затрачивать не более 40 мин. Известно, что первый колхоз может ежедневно поставлять не более 10 т, второй – не более 8 т, третий – не более 6 т картофеля. Сколько картофеля надо привозить в магазин из каждого колхоза, чтобы общая стоимость картофеля была минимальной?

13. Бригада приняла заказ на изготовление 50 ед. продукции P_1, 30 ед. продукции P_2 и 45 ед. продукции P_3. Продукция производится на станках A и B. Для изготовления на станке A единицы продукции P_1 требуется 4 ед. времени, единицы продукции P_2 – 40 ед., единицы продукции P_3 –10 ед., на станке B – соответственно 6, 8 и 20 ед. времени. Необходимо найти план использования оборудования, т.е. указать, сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках A и B, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

14. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 ден.ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 ден.ед. Содержание их в продуктах P_1 и P_2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость 1 ед. продукта P_1 – 2 ден.ед., P_2 – 3 ден. ед. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

15. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников. Каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии – 60 изделий, второй – 75. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, второй модели – 8. Наибольший суточный запас используемых элементов равен 800 ед. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей соответственно 3000 и 2000 ден.ед. Определить оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

16. На трех складах оптовой базы находится однородный груз в количествах 200, 80 и 100 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина, каждый из которых получает соответственно 130, 50, 70, 90 ед. груза. Тарифы перевозки единицы груза из каждого склада во все магазины задаются матрицей: $C_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

17. Собранный урожай зерна трех сельскохозяйственных артелей должен быть перевезен на три элеватора, элеватора A_1 мощностью 100 тыс.т, элеватор A_2 мощностью 80 тыс.т и элеватор A_3 мощностью 90 тыс.т. Известные транспортные затраты C_{ij} перевозки 1 т зерна от каждой артели к каждому элеватору, а также запасе зерна артелей, которые приведены в таблице:

С/х артель	**Затраты на перевозку 1 т зерна на элеваторы, тыс. грн.**			**Запасы зерна, тыс. т**
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12,5	24,0	18,4	80
A_2	28,3	14,5	25,7	90
A_3	15,7	20,6	16,3	100

Определить план перевозки зерна на элеваторы, минимизирующий транспортные затраты.

18. Имеются корма двух видов: сено и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве соответственно не более 50 и

85 кг. Составить кормовой рацион минимальной стоимости, в котором содержится не менее 30 кормовых единиц, не менее 1 кг протеина, не менее 100 г кальция, не менее 80 г фосфора. Данные о питательности кормов и их стоимости в расчете на 1 кг приведены в таблице.

Питательные вещества	**Корма**		**Нижняя норма содержания питательных веществ**
	сено	**силос**	
Кормовые единицы, кг	0,5	0,3	30
Протеин, г	40	10	1000
Кальций, г	1,25	2,5	100
Фосфор, г	2	1	80
Себестоимость 1 кг., ден. ед.	12	8	

19. Предприятие может выпускать продукцию двух видов: P_1 и P_2. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	**Нормы расхода на единицу продукции**		**Объем ресурса**
	P_1	P_2	
Оборудование	2	3	31
Сырье	1	1	12
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль за ед. продукции, ден. ед.	40	25	

Найти оптимальный план выпуска продукции.

20. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. ден. ед. Его предполагается разместить на площади 45 м^2. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов: 1) машинами стоимостью 6 тыс. ден. ед. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 м^2, производительностью 8 тыс. ед. продукции за смену; 2) машинами стоимостью 3 тыс. ден. ед., занимающими площадь 4 м^2, производительностью 4 тыс. единиц продукции за смену; 3) машина-

ми стоимостью 2 тыс. ден. ед., занимающими площадь 3 м^2, производительностью 3 тыс. ден. ед. продукции. Построить модель задачи определения плана приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка.

21. Механический цех может изготовить за смену 600 деталей N_1 или 1200 деталей N_2. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на термообработку в тот же день, позволяет обработать за смену 1200 деталей N_1 или 800 деталей N_2. Цены на детали одинаковые. Определить производственную программу выпуска деталей, максимизирующую товарную продукцию предприятия при условии, что оба цеха работают одну смену.

22. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 ед. времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы. Затраты соответствующих факторов при работе по разным технологиям в течение 1 ед. времени указаны в таблице. Найти программу максимального выпуска продукции.

Производственные факторы	**Затраты на различных технологиях**					**Наличие фактора**
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
Сырье	15	20	12	14	18	2000
Электроэнергия	0,20	0,30	0,15	0,25	0,30	300
Накладные расходы	4	5	6	3	2	1000
Зарплата	6	3	4	6	3	1600

23. На пяти станках различных типов можно выполнять пять операций по обработке деталей. При этом, в силу технологии производства, за каждым из станков может быть закреплена только одна операция и одна операция может выполняться только одним станком. Зная время выполнения каждой из операций на каждом из станков, которое задается матрицей:

$$t_{ih} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Нужно распределить выполнения операций между станками так, чтобы суммарное время на обработку деталей было минимальным.

24. Для изготовления сплава из свинца, цинка, олова определенного состава используется сырье в виде пяти сплавов из тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью 1 кг:

Тип сплава	**Содержание металла, %**			**Удельная стоимость, ден. ед./кг**
	Свинец	**Цинк**	**Олово**	
I	15	40	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

Какое количество сплава каждого вида нужно взять, чтобы изготовить при минимальной себестоимости сплав, содержащий 20% свинца, 30% цинка и 50 % олова?

25. Для кондитерской фабрики требуется рассчитать оптимальный по прибыли план выпуска карамели. Весь ассортимент карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_3. Для производства карамели требуется сахарный песок, патока, фруктовое пюре. В таблице указаны запасы этих видов сырья в тоннах; прибыль на единицу каждого вида выпускаемой карамели в ден. ед. за 1 тонну; нормы расхода сырья на производство единицы каждого вида.

Вид сырья	**Нормы расхода**			**Запас сырья**
	K_1	K_2	K_3	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	700

Патока	0,4	0,4	0,3	300
Фруктовое пюре	-	0,1	0,1	150
Прибыль от реализации	1000	1100	1200	

Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

26. Процесс изготовления промышленных изделий двух видов X_1 и X_2 состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки одного изделия (в мин.) и прибыль от продажи одного изделия каждого вида указана в таблице:

Станки	**Выпускаемая продукция**		**Лимит времени**
	X_1	X_2	
1	10	5	10
2	6	20	10
3	8	15	10
Прибыль	200	300	

Найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, максимизирующие прибыль.

27. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены 100000 ден. ед. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 500 ден. ед., а каждая минута телерекламы – в 10000 ден. ед. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаше, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на радио- и телерекламу.

28. В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых

комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Согласно условиям поставок в течение планируемого периода необходимо произвести, по крайней мере, 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^3 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 1600 ден. ед., а со 100 м^2 фанеры – 6000 ден. ед. Определить оптимальный план производства пиломатериалов и фанеры.

29. Предприятие производит продукцию двух видов P_1 и P_2. Для изготовления продукции P_1 и P_2 используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен 100 кг. Расход сырья на единицу продукции P_1 равен 2 кг, а на единицу продукции P_2 – 4 кг. Цены продукции P_1 и P_2 – 20 и 40 ден. ед. соответственно. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции P_1 и P_2, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

30. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы первого фасона вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы второго фасона. Если бы фирма выпускала только шляпы первого фасона, то суточный объем производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов ограничен – 200 штук. Прибыль от продажи шляпы первого фасона равна 80 ден. ед., второго – 50 ден. ед. Определить оптимальный план выпуска шляп, максимизирующий прибыль.

Задание 2. Решить графически задачу линейного программирования.

1.	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 6x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 1, x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 4x_1 + x_2$	2.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 4x_1 + 5x_2$	3.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 2, x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = -x_1 + 3x_2$

4.	$\begin{cases} 5x_1+2x_2\ge 10, \\ x_1+x_2\le 4, \\ -4x_1+x_2\ge -8, \\ x_1-2x_2\ge 0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1+x_2$	5.	$\begin{cases} x_1-x_2\le 3, \\ x_1+x_2\le 6, \\ -x_1+3x_2\le 10, \\ x_1+4x_2\ge 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=x_1+2x_2$	6.	$\begin{cases} 10x_1+3x_2\ge 30, \\ x_1-x_2\ge 4, \\ -x_1+x_2\ge 3, \\ x_1+x_2\le 10, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=x_1-3x_2$
7.	$\begin{cases} -5x_1+2x_2\le 10, \\ 5x_1+6x_2\ge 30, \\ 3x_1-2x_2\le 6, \\ x_1\ge 2, x_2\le 9, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-3x_1+4x_2$	8.	$\begin{cases} -3x_1+x_2\le 3, \\ x_1+x_2\ge 3, \\ 2x_1+x_2\ge 4, \\ x_1\ge 1, x_2\le 5, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-2x_1+x_2$	9.	$\begin{cases} 4x_1-5x_2\le 20, \\ 2x_1+3x_2\ge 6, \\ 5x_1+x_2\ge 5, \\ x_1\le 7, x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1+5x_2$
10.	$\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 6, \\ 6x_1+5x_2\le 30, \\ 2x_1+3x_2\ge 6, \\ x_1\le 4, x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=3x_1+2x_2$	11.	$\begin{cases} -6x_1+4x_2\le 24, \\ -x_1+2x_2\ge 2, \\ 5x_1+6x_2\ge 30, \\ x_1\le 4, x_2\le 7, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1-x_2$	12.	$\begin{cases} 3x_1-4x_2\le 12, \\ x_1+x_2\le 6, \\ x_1-2x_2\le 0, \\ x_1\ge 1, x_2\le 5, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=x_1+4x_2$
13.	$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6, \\ 2x_1-3x_2\le 6, \\ x_1+x_2\ge 5, \\ x_1\ge 3, x_2\le 6, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-3x_1+2x_2$	14.	$\begin{cases} 2x_1+3x_2\ge 6, \\ -3x_1+4x_2\le 12, \\ x_1+5x_2\ge 5, \\ x_1\ge 1, x_2\le 7, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1-x_2$	15.	$\begin{cases} -4x_1+3x_2\le 12, \\ 2x_1-3x_2\le 12, \\ x_1+x_2\ge 2, \\ x_1\ge 1, x_2\ge 2, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-3x_1-2x_2$
16.	$\begin{cases} -x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1+x_2\ge 3, \\ 4x_1+5x_2\le 20, \\ x_1\ge 1, x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1-3x_2$	17.	$\begin{cases} 7x_1+3x_2\ge 21, \\ x_1-3x_2\le 0, \\ 5x_1+4x_2\ge 20, \\ x_1\ge 1, x_2\ge 3, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-2x_1-4x_2$	18.	$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 6, \\ x_1+x_2\ge 2, \\ x_1+x_2\le 7, \\ x_1\ge 1, x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$ $z=-x_1+2x_2$

19.	$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = -3x_1 + 2x_2$	20.	$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 2x_1 - 3x_2$	21.	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 5x_1 - 2x_2$
22.	$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 1, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = -x_1 - 2x_2$	23.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = -x_1 - 2x_2$	24.	$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 8x_1 + 6x_2 \le 48, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_2 \ge 1, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = -x_1 + 3x_2$
25.	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 1, x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 3x_1 + 2x_2$	26.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \ge 0, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_2 \ge 1, x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 2x_1 + 3x_2$	27.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 - x_2 \le 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 1, x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 5x_1 + x_2$
28.	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 8x_2 \ge 8, \\ x_1 \le 4, x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 4x_1 + x_2$	29.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 1, x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = 5x_1 + x_2$	30.	$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 56, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 6, x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $z = x_1 + 2x_2$

Задание 3. Решить задачи симплексным методом, дать решению геометрическую интерпретацию, записать двойственную задачу и ее решение.

1.	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = -3x_1 + x_2 - 5$	2.	$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ min $z = 2x_1 + 3x_2 + 10$	3.	$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ min $z = 3x_1 + x_2 - 5$

4.	$\begin{cases}2x_1 - x_2 \ge 2,\\ 5x_1 + 4x_2 \le 20,\\ x_1 - x_2 \ge 6,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ :\ z = x_1 + 2x_2 - 7$	5.	$\begin{cases}3x_1 - 3x_2 \ge 3,\\ x_1 - 3x_2 \le 3,\\ x_1 + x_2 \ge 2,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\min\ z = 3x_1 + x_2 + 5$	6.	$\begin{cases}2x_1 + 7x_2 \ge 14,\\ 2x_1 - 3x_2 \le 6,\\ x_1 + 3x_2 \le 9,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 5x_1 - x_2 - 4$
7.	$\begin{cases}3x_1 - x_2 \ge 0,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ 2x_1 - 3x_2 \le 6,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = -3x_1 + x_2 - 20$	8.	$\begin{cases}x_1 - 4x_2 \le 4,\\ x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ 2x_1 - x_2 \ge 0,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = -2x_1 - x_2 + 7$	9.	$\begin{cases}x_1 + 5x_2 \ge 5,\\ x_1 - x_2 \le 2,\\ x_1 - 3x_2 \le 3,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = x_1 - 4x_2 - 4$
10.	$\begin{cases}-x_1 + 3x_2 \ge 3,\\ -4x_1 + 3x_2 \le 12,\\ 2x_1 + x_2 \ge 2,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\min\ z = 3x_1 + x_2 - 3$	11.	$\begin{cases}-x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ -5x_1 + 2x_2 \le 10,\\ x_1 + 2x_2 \ge 4\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\min\ z = -2x_1 + 3x_2 + 5$	12.	$\begin{cases}7x_1 - x_2 \ge 0,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ 3x_1 + 5x_2 \le 15,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 3x_1 + x_2 + 6$
13.	$\begin{cases}x_1 - 5x_2 \le 0,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ x_1 - 4x_2 \le 4,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = -x_1 + 2x_2 + 6$	14.	$\begin{cases}x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ x_1 - 2x_2 \le 4,\\ x_1 + 2x_2 \le 6,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 6x_1 + x_2 - 15$	15.	$\begin{cases}x_1 - 4x_2 \le 4,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ x_1 - x_2 \ge 0,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\min\ z = 2x_1 + x_2 - 5$
16.	$\begin{cases}x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ x_1 + x_2 \ge 2,\\ 4x_1 + 5x_2 \le 20,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ :\ z = -2x_1 + 3x_2 - 3$	17.	$\begin{cases}x_1 + 3x_2 \ge 3,\\ 5x_1 + 4x_2 \le 20,\\ -x_1 + x_2 \le 3,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ :\ z = 5x_1 + 6x_2 + 5$	18.	$\begin{cases}x_1 + 3x_2 \ge 3,\\ 3x_1 - 5x_2 \le 15,\\ x_1 + 3x_2 \le 6,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ :\ z = 7x_1 + x_2 + 7$
19.	$\begin{cases}x_1 + 2x_2 \ge 6,\\ 2x_1 - 7x_2 \le 14,\\ x_1 + 3x_2 \le 9,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 10x_1 + x_2 - 7$	20.	$\begin{cases}2x_1 - x_2 \le 4,\\ x_1 + x_2 \ge 1,\\ -2x_1 + 5x_2 \ge 1,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 5x_1 + 6x_2 - 10$	21.	$\begin{cases}x_1 - x_2 \ge 1,\\ x_1 - 4x_2 \le 4,\\ x_1 + x_2 \le 5,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 6x_1 + x_2 + 15$
22.	$\begin{cases}7x_1 + 8x_2 \le 56,\\ 3x_1 + x_2 \ge 3,\\ x_1 - x_2 \le 3,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = 6x_1 + 2x_2 + 2$	23.	$\begin{cases}2x_1 - 5x_2 \le 10,\\ x_1 + 3x_2 \ge 3,\\ 4x_1 + x_2 \ge 4,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = -x_1 - x_2 + 10$	24.	$\begin{cases}x_1 + 2x_2 \ge 2,\\ x_1 - 3x_2 \le 3,\\ -3x_1 + x_2 \le 3,\\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\end{cases}$ $\max\ z = -x - 3x_2 - 3$

25.	$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = 8x_1 + x_2 - 4$	26.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = -3x_1 + x_2 + 8$	27.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = 3x_1 + x_2 + 9$
28.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = -x_1 - x_2 - 4$	29.	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = 7x_1 + x_2 - 5$	30.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ max $z = -4x_1 + x_2 + 5$

Задание 4.

- Проанализировать игру, используя принцип минимакса.
- Найти решение в смешанных стратегиях методами линейного программирования.

1.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	5.	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	9.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

19.	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 5. Решить транспортную задачу.

1.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		35	20	15	20	20
A_1	40	6	7	2	4	5
A_2	20	4	8	7	10	1
A_3	30	2	9	4	1	7
A_4	35	6	2	6	1	10

2.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		15	20	75	20	20
A_1	65	2	4	6	2	1
A_2	35	7	1	7	3	8
A_3	85	1	7	8	7	5
A_4	35	1	3	9	7	6

3.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		15	20	45	25	20
A_1	60	6	4	6	2	1
A_2	30	7	1	7	3	8
A_3	85	5	7	8	2	5
A_4	30	1	3	9	7	6

4.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		20	20	75	20	10
A_1	75	2	1	5	3	6
A_2	80	3	2	6	4	5
A_3	35	5	4	7	7	7
A_4	40	1	2	3	3	8

5.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		30	10	65	25	30
A_1	65	7	4	6	2	1
A_2	35	7	1	1	3	8
A_3	85	3	7	8	7	5
A_4	30	1	3	9	7	2

6.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		30	10	60	25	35
A_1	65	9	1	5	3	8
A_2	30	3	1	4	1	5
A_3	85	5	4	7	7	2
A_4	30	1	2	3	3	8

7.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		25	30	30	10	60
A_1	60	5	4	6	2	1
A_2	25	7	3	7	3	8
A_3	30	1	7	8	7	5
A_4	35	6	3	9	7	1

8.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		15	65	25	45	10
A_1	45	5	7	2	4	4
A_2	40	3	8	7	8	1
A_3	15	1	9	4	1	7
A_4	30	8	2	6	1	2

9.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		20	20	20	15	50
A_1	75	8	10	4	4	2
A_2	40	5	2	5	6	5
A_3	45	2	9	1	7	10
A_4	30	1	8	1	3	4

10.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		45	10	20	15	15
A_1	45	7	5	2	4	5
A_2	20	4	8	7	8	1
A_3	30	1	9	4	2	5
A_4	85	6	2	6	1	7

11.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		20	15	65	25	30
A_1	40	7	1	4	4	2
A_2	50	5	2	5	6	5
A_3	30	2	5	1	7	10
A_4	30	1	8	1	3	4

12.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		45	10	65	25	15
A_1	75	8	7	2	4	5
A_2	35	4	5	7	8	1
A_3	75	1	9	4	3	7
A_4	30	6	2	6	1	3

13.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		50	10	65	25	10
A_1	40	8	4	1	2	1
A_2	60	7	1	7	3	8
A_3	70	3	7	8	7	5
A_4	35	1	3	6	7	2

14.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		30	15	65	25	30
A_1	65	5	1	6	3	6
A_2	30	3	3	6	4	5
A_3	85	5	4	7	7	2
A_4	30	1	2	3	3	8

15.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		20	30	60	25	30
A_1	40	9	10	4	4	2
A_2	20	5	2	5	6	5
A_3	30	2	5	10	7	10
A_4	50	1	8	1	3	4

16.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		10	30	40	25	30
A_1	45	9	4	5	3	4
A_2	65	3	2	6	4	5
A_3	35	5	4	7	7	2
A_4	25	1	2	3	3	4

17.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		30	30	60	25	30
A_1	75	9	1	5	3	1
A_2	30	3	4	1	4	5
A_3	15	5	4	7	5	2
A_4	30	1	2	3	3	7

18.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		65	25	15	65	25
A_1	65	8	4	6	2	1
A_2	35	3	1	7	3	8
A_3	40	1	6	8	7	5
A_4	20	1	3	9	7	1

19.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		25	65	25	25	15
A_1	35	2	4	6	2	1
A_2	25	7	1	3	3	8
A_3	30	7	7	8	7	5
A_4	50	9	3	9	7	5

20.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		65	25	60	25	30
A_1	30	6	7	2	4	5
A_2	50	4	8	7	8	1
A_3	55	1	9	4	1	7
A_4	75	6	2	6	1	8

21.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		40	15	60	25	40
A_1	45	2	4	6	2	1
A_2	20	7	5	7	3	8
A_3	30	1	7	8	7	5
A_4	55	1	3	9	7	4

22.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		35	30	65	25	30
A_1	20	6	7	2	4	5
A_2	20	4	8	7	8	1
A_3	30	1	9	4	1	7
A_4	70	6	2	6	1	8

23.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		15	15	80	25	20
A_1	25	6	7	2	4	5
A_2	15	4	8	7	8	1
A_3	30	1	9	4	5	7
A_4	40	6	2	6	5	8

24.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		45	25	60	25	20
A_1	15	9	1	5	3	4
A_2	30	3	2	6	4	5
A_3	45	5	4	7	7	2
A_4	20	1	2	3	3	8

25.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		45	30	40	25	30
A_1	20	5	4	6	2	1
A_2	25	7	1	5	3	8
A_3	40	2	7	8	7	5
A_4	10	8	3	9	7	3

26.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		55	30	60	25	20
A_1	75	2	4	6	2	1
A_2	30	7	11	7	3	2
A_3	15	1	6	8	7	5
A_4	30	11	3	9	7	3

27.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		30	25	50	25	25
A_1	25	6	7	2	4	5
A_2	25	4	8	7	11	3
A_3	40	1	9	4	5	7
A_4	50	6	2	6	1	6

28.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		35	30	45	25	30
A_1	30	9	10	4	4	10
A_2	25	5	2	5	6	5
A_3	40	11	5	10	7	10
A_4	80	7	8	1	3	4

29.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		10	30	80	25	30
A_1	20	9	1	5	3	6
A_2	90	3	1	6	4	5
A_3	40	5	4	7	7	2
A_4	10	1	2	3	3	8

30.

	B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A		70	10	10	25	30
A_1	20	5	4	11	2	1
A_2	25	7	1	7	3	8
A_3	45	1	7	8	5	5
A_4	80	10	3	9	7	6

Задание 7. Решить задачу дробно-линейного программирования симплекс-методом.

1.	$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{8x_1 + x_2}{3x_1 + 2x_2}$	2.	$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 56, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{6x_1 + 2x_2}{4x_1 + 3x_2}$	3.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 7x_2 \le 14, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{10x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2}$
4.	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\min \quad z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2}$	5.	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{4x_1 - 3x_2}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 6x_2 \le 18, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\min \quad z = \dfrac{5x_1 - 3x_2}{x_1 + 3x_2}$
7.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2}$	8.	$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{3x_1 + 2x_2}$	9.	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{2x_1 + 5x_2}$
10.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\min x: \quad z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{x_1 + 4x_2}$	11.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{2x_1 - x_2}{3x_1 + 5x_2}$	12.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\min x: \quad z = \dfrac{5x_1 + 6x_2}{x_1 + 4x_2}$
13.	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2}$	14.	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2}$	15.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 3x_1 - x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2}$
16.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ x_1 - x_2 \le 8, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: \quad z = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$	17.	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{5x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2}$	18.	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max \quad z = \dfrac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 2x_2}$

19.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{3x_1 + 5x_2}$	20.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{7x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2}$	21.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{x_1 + 2x_2}{2x_1 + 3x_2}$
22.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ -x_1 + 4x_2 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2}$	23.	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{2x_1 + x_2}$	24.	$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{2x_1 + 3x_2}$
25.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 7x_2 \ge 7, \\ 7x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{x_1 - 3x_2}{2x_1 + 3x_2}$	26.	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2}$	27.	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{3x_1 + 5x_2}{2x_1 + x_2}$
28.	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{2x_1 + x_2}$	29.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ x_1 - x_2 \le 8, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max: z = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2}$	30.	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\max\ z = \dfrac{2x_1 + 4x_2}{4x_1 + 5x_2}$

Задание 8. Решить задачу параметрического программирования.

1.	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (6 - t)x_1 +$ $+ (1 + t)x_2,$ $1 \le t \le 5$	2.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (7 - t)x_1 +$ $+ (t + 1)x_2,$ $1 \le t \le 6$	3.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t - 5)x_1 -$ $- (1 + t)x_2,$ $0 \le t \le 4$

4.	$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (1+t)x_1 - (t+3)x_2,$ $-2 \le t \le 5$	5.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (t-3)x_1 + (t+1)x_2,$ $0 \le t \le 4$	6.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = tx_1 - (t+1)x_2,$ $-1 \le t \le 4$
7.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (t+3)x_1 + (1-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	8.	$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 - 6x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t-2)x_1 + (t+5)x_2,$ $1 \le t \le 5$	9.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = tx_1 - (t-2)x_2,$ $1 \le t \le 3$
10.	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t+1)x_1 - (t-2)x_2,$ $1 \le t \le 5$	11.	$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (t+1)x_1 + (3-t)x_2,$ $2 \le t \le 4$	12.	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (t-3)x_1 + (t+3)x_2,$ $1 \le t \le 5$
13.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (t+2)x_1 - (t-1)x_2,$ $0 \le t \le 5$	14.	$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t+1)x_1 - (1-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	15.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x \ge 2_2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = (5-t)x_1 - (t+2)x_2,$ $0 \le t \le 4$
16.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t-4)x_1 + (t+2)x_2,$ $0 \le t \le 5$	17.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = tx_1 + (5-t)$ $1 \le t \le 4$	18.	$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t-2)x_1 + (5-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$

19.	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (t-1)x_1 - -(t+1)x_2,$ $0 \le t \le 3$	20.	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (5-t)x_1 - -(3-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	21.	$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \ge 21, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (4-t)x_1 - -(5-t)x_2,$ $0 \le t \le 6$
22.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (3-t)x_1 - -(1-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	23.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (1-t)x_1 - -(t-3)x_2,$ $0 \le t \le 3$	24.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (2-t)x_1 + +(t-3)x_2,$ $1 \le t \le 4$
25.	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (5-t)x_1 - -(1-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	26.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (3-t)x_1 - -(2-t)x_2,$ $0 \le t \le 4$	27.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\min\ z = tx_1 + (2-t)x$ $1 \le t \le 4$
28.	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (3-t)x_1 + +(t-1)x_2$ $-2 \le t \le 5$	29.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 7x_1 + 5x_2 \ge 35, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (2-t)x_1 + +(t+3)x_2$ $1 \le t \le 5$	30.	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$ $\max\ z = (5-t)x_1 + +(t-1)x_2$ $-2 \le t \le 4$

8.3. ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ»

Задание 1.

- Представить динамический ряд графически.
- Построить модель динамики исследуемого показателя.
- Выполнить проверку построенных моделей на адекватность, надежность, а также выбрать лучшую.
- Изобразить графически наилучшую модель.
- Составить прогноз показателя на два года.

№	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
1.	87	107	120	123	132	149	187	190	201	212	247	290
2.	85	90	98	100	117	121	125	149	154	159	164	172
3.	21,4	20,8	17,5	14,3	13,1	11,4	10,7	9,7	8,5	8,1	8,9	9,1
4.	14,6	15,2	16,4	17,1	17,8	19,5	19,6	18,3	17,8	19,4	25,7	28,7
5.	2,1	2,4	2,9	3,1	2,9	3,1	2,8	3,3	3,8	4,1	3,9	4,5
6.	61	67	70	74	81	89	145	187	195	198	200	201
7.	39	41	44	48	51	54	53	58	64	68	71	77
8.	23	26	22	28	30	39	48	57	89	91	97	95
9.	65	62	69	76	78	80	84	90	98	97	94	91
10.	29	31	37	35	39	41	54	61	78	84	89	92
11.	2,21	2,31	2,33	2,45	2,01	1,97	1,78	1,82	1,76	1,79	1,85	1,88
12.	16,1	17,8	19,4	23,1	25,7	28,4	28,9	31,5	54,7	67,7	69,8	72,9
13.	5,1	5,7	5,9	6,7	6,5	7,9	5,2	6,7	8,4	9,1	9,7	10,7
14.	7,6	8,3	7,9	8,7	8,2	9,5	9,6	10,3	11,8	11,4	12,5	12,7
15.	25,6	24,3	28,4	31,8	34,4	40,7	45,9	46,8	50,1	54,9	58,7	61,8
16.	3,3	4,1	4,3	5,5	5,9	6,2	6,4	7,1	6,8	7,4	8,1	8,3
17.	14,1	15,4	14,7	15,1	15,4	16,2	16,9	17,5	20,3	21,7	22,9	24,5
18.	8,5	8,1	7,9	7,3	7,8	6,2	5,1	4,4	3,9	3,7	2,7	2,4
19.	25,1	24,7	23,1	23,8	22,1	22,6	21,7	20,4	18,8	16,4	14,8	12,2
20.	4,1	4,5	4,9	5,1	6,2	5,4	7,6	10,7	12,4	13,9	15,8	19,6
21.	6,1	6,5	7,1	7,4	8,7	8,1	9,3	10,9	11,1	13,4	17,3	18,7
22.	116	119	127	124	132	140	167	170	200	216	241	279
23.	16	18	19	21	26	21	25	49	54	59	64	72
24.	25,4	24,8	19,5	18,3	17,1	14,4	12,7	12,9	12,3	11,7	11,9	11,2
25.	20,5	21,6	22,3	23,8	24,4	25,7	27,7	28,1	28,9	28,6	29,1	29,4
26.	11,5	11,9	12,1	12,9	12,3	13,6	13,8	13,9	14,3	14,7	15,2	15,9

27.	12,1	12,4	12,9	13,1	12,9	13,1	12,8	13,2	13,9	14,7	14,8	15,9
28.	2,67	2,56	2,45	2,38	2,36	2,25	2,27	2,15	2,12	2,12	2,11	2,1
29.	312	310	317	321	328	325	326	327	328	339	340	341
30.	165	168	172	179	175	180	185	187	196	199	200	204

Задание 2.

- Данные задания 1 проверить на наличие автокорреляции.

- Наилучшую модель, построенную в задании 1, проверить на наличие автокорреляции остатков.

Задание 3.

- Построить зависимость показателя Y фактора X_2, провести ее анализ.

№ 1	Y	100,7	101,0	101,6	104,2	105,1	108,5	115,5	140,7
	X_1	27,3	28,1	28,6	30,9	33,1	35,3	42,2	51,3
	X_2	23,4	23,0	22,5	19,6	20,7	19,6	20,7	26,1
	X_3	55,9	57,4	58,2	66,2	62,8	76,5	90,2	108,5

№ 2	Y	24,2	24,4	25,1	25,3	26,1	27,7	33,8
	X_1	6,6	6,8	7,4	7,9	8,5	10,2	12,4
	X_2	6,8	6,6	5,7	6,1	5,7	6,1	7,7
	X_3	13,4	14,1	15,9	15,1	18,4	21,7	26,1

№ 3	Y	14	14	14	14	15	15	15	16	19
	X_1	3,8	3,9	4,3	4,4	4,5	4,6	4,9	5,9	7,1
	X_2	3,9	3,8	3,3	3,35	3,4	3,5	3,3	3,5	4,41
	X_3	7,8	8,1	9,2	9,1	8,5	8,7	10,7	12,5	15,1

№ 4	Y	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12,2	12,9	15,8
	X_1	7,37	7,08	6,19	6,24	6,29	6,39	6,49	6,19	6,49	8,26
	X_2	9,6	9,9	11,3	11,0	11,2	11,7	10,7	13,1	15,4	18,6
	X_3	2,16	2,25	2,43	2,51	2,49	2,55	2,61	2,79	3,33	4,05

№ 5	Y	75,5	76,2	78,2	78,8	81,4	86,6	105,5
	X_1	20,5	21,5	23,2	24,8	26,5	31,7	38,5
	X_2	17,6	16,9	14,7	15,5	14,7	15,5	19,6
	X_3	41,9	43,7	49,7	47,1	57,4	67,7	81,4

№ 6	Y	11,8	12,1	12,2	12,4	12,8	13,2	13,6	16,5
	X_1	7,7	7,4	6,5	6,8	6,5	6,7	6,8	8,7
	X_2	10,08	10,49	11,93	11,32	13,79	14,55	16,25	19,55
	X_3	2,2	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,5	4,2

№ 7	Y	11,3	11,5	11,7	11,8	11,9	12,1	12,2	13,1	15,8
	X_1	3,1	3,2	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,7	5,8
	X_2	3,2	3,1	2,7	2,8	2,6	2,7	2,7	2,8	3,6
	X_3	6,3	6,5	7,4	7,1	7,8	8,1	8,6	10,1	12,2

№ 8	Y	25,4	26,5	28,5	30,7	32,8	39,2	47,7
	X_1	9,5	9,9	11,3	10,7	13,1	15,4	18,5
	X_2	6,4	6,2	5,4	5,7	5,4	5,7	7,2
	X_3	8,8	8,9	9,1	9,2	9,5	10,1	12,3

№ 9	Y	59,8	60,4	61,3	61,9	62,4	64,4	68,6	83,6
	X_1	16,2	17,3	17,9	18,4	19,7	21,1	25,1	30,5
	X_2	13,9	13,4	12,8	11,6	12,3	11,6	12,3	15,5
	X_3	33,2	34,6	36,9	39,3	37,3	45,4	53,6	64,4

№ 10	Y	65,3	68,1	73,4	78,9	84,3	100,7	122,4
	X_1	24,5	25,5	29,1	27,5	33,5	39,5	47,6
	X_2	16,5	15,8	13,8	14,5	13,8	14,5	18,5
	X_3	22,7	22,9	23,4	23,7	24,5	26,1	31,7

№ 11	Y	20,8	21,7	23,4	25,2	26,9	32,1	33,9	39,1
	X_1	7,8	8,2	9,3	8,8	10,7	12,6	13,8	15,2
	X_2	5,3	5,1	4,4	4,6	4,4	4,6	5,1	5,9
	X_3	7,2	7,3	7,5	7,6	7,8	8,3	9,1	10,1

№ 12	Y	57,3	58,1	59,7	64,5	69,3	74,1	88,4	107,5
	X_1	21,5	22,0	22,4	25,5	24,2	29,5	34,7	41,8
	X_2	14,5	14,0	13,9	12,2	12,7	12,2	12,7	16,2
	X_3	19,9	20,0	20,1	20,6	20,8	21,5	22,8	27,8

№ 13	Y	33,2	34,6	37,4	40,1	42,9	51,2	62,3
	X_1	12,5	13,1	14,8	14,2	17,1	20,1	24,2
	X_2	8,4	8,1	7,1	7,4	7,1	7,4	9,4
	X_3	11,5	11,7	11,9	12,1	12,5	13,2	16,1

№ 14	Y	78,4	79,1	81,1	81,3	81,5	81,8	84,4	89,9	109,5
	X_1	21,2	22,3	24,0	24,6	25,3	25,8	27,5	32,8	39,9
	X_2	18,2	17,5	15,3	15,7	15,9	16,1	15,3	16,1	20,3
	X_3	43,5	48,9	51,5	54,6	56,3	58,7	59,5	70,2	84,4

№ 15	Y	77,7	80,9	87,4	93,8	100,3	119,7	145,6
	X_1	45,1	43,3	37,9	39,7	37,9	39,7	50,5
	X_2	41,1	41,6	42,5	43,0	44,4	47,2	57,5
	X_3	20,4	21,3	24,2	23,0	28,2	33,3	39,6

№ 16	Y	28,1	28,4	29,0	29,3	31,6	34,4	36,3	43,4	52,7
	X_1	16,3	16,1	15,9	15,7	13,7	14,4	13,7	14,4	18,3
	X_2	14,7	14,9	15,0	15,1	15,4	15,6	16,1	17,1	20,8
	X_3	7,4	7,5	7,6	7,7	8,8	8,3	10,1	11,9	14,4

№ 17	Y	27,5	27,3	28,3	28,2	29,1	31,1	37,8
	X_1	7,3	7,7	8,3	8,9	9,5	11,3	13,8
	X_2	6,3	5,9	5,3	5,6	5,3	5,6	7,3
	X_3	15,1	15,6	17,8	16,9	20,5	24,2	29,1

№ 18	Y	76,9	80,0	82,8	83,0	86,4	98,2	93,1	113,5	133,8	160,9
	X_1	15,6	14,5	13,9	14,1	14,3	14,6	14,8	15,2	16,2	19,7
	X_2	14,8	14,1	13,8	13,5	13,3	11,4	11,9	11,4	11,9	15,2
	X_3	17,9	18,8	19,9	20,9	21,8	23,5	25,3	27,4	32,2	39,2

№ 19	Y	93,2	97,2	110,3	104,6	127,4	150,2	180,7
	X_1	15,8	16,1	16,4	16,6	17,1	18,2	22,2
	X_2	15,2	14,6	12,8	13,4	12,8	13,4	17,5
	X_3	23,5	24,5	26,4	28,4	30,3	36,2	44,4

№ 20	Y	213,2	221,9	252,4	239,4	291,6	343,8	413,4
	X_1	36,3	36,7	37,5	37,9	39,2	41,6	50,7
	X_2	34,8	33,4	29,2	30,6	29,2	30,6	39,3
	X_3	53,7	56,5	60,4	64,9	69,4	82,8	100,7

№ 21	Y	68,4	70,8	80,5	76,4	93,0	109,7	131,9
	X_1	11,6	11,7	12,2	12,1	12,5	13,3	16,2
	X_2	11,1	10,7	9,3	9,8	9,3	9,8	12,4
	X_3	17,1	17,9	19,3	20,7	22,1	26,4	32,1

№ 22	Y	187,5	194,7	221,4	210,1	255,8	301,7	362,7
	X_1	31,9	32,2	33,1	33,3	34,4	36,6	44,6
	X_2	30,5	29,4	25,6	27,2	25,6	27,3	34,1
	X_3	47,7	49,2	53,1	56,9	60,8	72,6	88,3

№ 23	Y	39,0	39,1	39,3	39,5	40,5	40,9	42,2	44,9	54,7
	X_1	10,6	10,9	11,0	11,1	12,2	12,9	13,7	16,4	20,4
	X_2	9,1	9,0	8,4	8,8	7,6	8,1	7,6	8,1	10,2
	X_3	21,8	22,0	22,6	23,6	25,8	24,4	29,8	35,1	42,2

№ 24	Y	87,4	91,0	103,4	98,2	119,5	141,9	169,5
	X_1	32,7	31,6	27,4	28,9	27,4	28,9	36,6
	X_2	33,5	35,1	37,8	40,6	43,3	51,7	62,9
	X_3	10,4	10,5	10,8	10,9	11,3	12,4	14,6

№ 25	Y	253,4	263,8	300,0	284,7	346,6	408,8	491,5
	X_1	95,0	91,5	79,6	83,8	79,6	83,8	106,1
	X_2	97,2	101,7	109,7	117,7	125,6	150,1	182,5
	X_3	30,3	30,5	31,3	31,6	32,6	34,7	42,3

№ 26	Y	91,7	95,5	100,6	108,6	103,1	125,5	148,2	178,5
	X_1	34,4	33,1	30,5	28,8	30,4	28,8	30,4	38,4
	X_2	35,2	36,8	38,1	39,7	42,6	45,5	54,3	66,1
	X_3	10,8	11,1	11,2	11,3	11,4	11,8	12,6	15,3

№ 27	Y	87,7	88,4	89,5	91,1	91,3	103,8	98,6	120,2	141,5	170,2
	X_1	11,1	12,9	13,8	14,9	15,1	15,5	15,6	16,1	17,2	20,9
	X_2	13,3	13,5	14,0	14,2	13,8	12,0	12,6	12,2	12,6	16,4
	X_3	19,1	20,8	21,9	22,5	23,1	24,9	26,7	28,5	34,1	41,4

№ 28	Y	29,2	29,5	30,2	30,5	31,5	33,5	40,8
	X_1	7,9	8,3	9,1	9,6	10,2	12,2	14,9
	X_2	6,8	6,5	5,7	6,1	5,7	6,2	7,6
	X_3	16,2	16,9	19,2	18,2	22,2	26,2	31,5

№ 29	Y	138,3	139,1	142,7	143,1	143,9	148,7	158,2	192,7
	X_1	37,4	39,2	42,3	43,6	45,3	48,4	57,8	70,3
	X_2	32,1	30,9	26,8	27,5	28,3	26,8	28,3	35,8
	X_3	76,6	79,7	90,7	88,9	86,1	104,8	123,6	148,6

№ 30	Y	315,7	318,4	326,6	329,3	340,2	362,3	440,9
	X_1	85,7	89,7	96,7	103,7	110,8	132,3	160,9
	X_2	73,3	70,7	61,4	64,7	61,4	64,7	81,9
	X_3	175,3	182,5	207,5	196,9	239,7	282,8	340,5

Задание 4.

- Исследовать данные задания 3 на наличие мультиколлинеарности с помощью метода Фаррара-Глаубера.
- В случае обнаружения мультиколлинеарности объясняющих переменных исключить из рассмотрения тот фактор, который коррелирует с остальными.
- По оставшимся данным построить линейную регрессионную функцию и провести ее анализ.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

А. Парная регрессия и корреляция

Пример. По территориям региона приводятся данные за 199Х г.

Таблица D.1

Номер региона	**Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб.,** x	**Среднедневная заработная плата, руб.,** y
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x.

2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.

3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента.

4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x, составляющем 107% от среднего уровня.

5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.

6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Решение.

1. Для расчета параметров уравнения линейной регрессии строим расчетную таблицу D.2.

Таблица D.2

	x	y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
7	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
8	88	158	13904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	-10	5,8
Итого	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,9
Среднее значение	85,6	155,8	13484,0	7492,3	24531,4	–	–	5,7
σ	12,84	16,05	–	–	–	–	–	–
σ^2	164,94	257,76	–	–	–	–	–	–

$$b = \frac{\overline{y \cdot x} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{13484 - 155{,}8 \cdot 85{,}6}{7492{,}3 - 85{,}6^2} = \frac{147{,}52}{164{,}94} = 0{,}89;$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 155{,}8 - 0{,}89 \cdot 85{,}6 = 79{,}62.$$

Получено уравнение регрессии: $y = 79{,}62 + 0{,}89 \cdot x$.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на 1 руб. среднедневная заработная плата возрастает в среднем на 0,89 руб.

2. Тесноту линейной связи оценит коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}89 \cdot \frac{12{,}84}{16{,}05} = 0{,}712; \qquad r_{xy}^2 = 0{,}51.$$

Это означает, что 51% вариации заработной платы (y) объясняется вариацией фактора x – среднедушевого прожиточного минимума.

Качество модели определяет средняя ошибка аппроксимации:

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{68{,}9}{12} = 5{,}74\%.$$

Качество построенной модели оценивается как хорошее, так как $\overline{A}$ не превышает 8-10%.

3. Оценку значимости уравнения регрессии в целом проведем с помощью F-критерия Фишера. Фактическое значение F-критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n-2) = \frac{0{,}51}{1 - 0{,}51} \cdot 10 = 10{,}41.$$

Табличное значение критерия при пятипроцентном уровне значимости и степенях свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = 12 - 2 = 10$ составляет $F_{\text{табл}} = 4{,}96$. Так как $F_{\text{факт}} = 10{,}41 > F_{\text{табл}} = 4{,}96$, то уравнение регрессии признается статистически значимым.

Оценку статистической значимости параметров регрессии проведем с помощью t-статистики Стьюдента и путем расчета доверительного интервала каждого из показателей.

Табличное значение t-критерия для числа степеней свободы $df = n-2 = 12-2 = 10$ и $\alpha = 0{,}05$ составит $t_{\text{табл}} = 2{,}23$.

Определим случайные ошибки m_a, m_b, $m_{r_{xy}}$:

$$m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n \cdot \sigma_x} = 12{,}6 \cdot \frac{\sqrt{89907}}{12 \cdot 12{,}84} = 24{,}5;$$

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{12{,}6}{12{,}95 \cdot \sqrt{12}} = 0{,}281;$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}51}{12-2}} = 0{,}219.$$

Тогда:

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{79{,}616}{24{,}6} = 3{,}2;$$

$$t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0{,}89}{0{,}281} = 3{,}2;$$

$$t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0{,}712}{0{,}219} = 3{,}3.$$

Фактические значения t-статистики превосходят табличное значение:

$$t_a = 3{,}2 > t_{\text{табл}} = 2{,}3; \quad t_b = 3{,}3 > t_{\text{табл}} = 2{,}3; \quad t_{r_{xy}} = 3{,}3 > t_{\text{табл}} = 2{,}3,$$

поэтому параметры a, b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля, а статистически значимы.

Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b. Для этого определим предельную ошибку для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,5 = 54,64;$$

$$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,281 = 0,62.$$

Доверительные интервалы

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79,62 \pm 54,64;$$

$$\gamma_{a_{\min}} = 79,62 - 54,64 = 24,98;$$

$$\gamma_{a_{\max}} = 79,62 + 54,64 = 134,26;$$

$$\gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,89 \pm 0,62;$$

$$\gamma_{b_{\min}} = 0,89 - 0,62 = 0,27;$$

$$\gamma_{b_{\max}} = 0,89 + 0,62 = 1,51.$$

Анализ верхней и нижней границ доверительных интервалов приводит к выводу о том, что с вероятностью $p = 1 - \alpha = 0,95$ параметры a и b, находясь в указанных границах, не принимают нулевых значений, т.е. не являются статистически незначимыми и существенно отличны от нуля.

4. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Если прогнозное значение прожиточного минимума составит: $x_p = \overline{x} \cdot 1,07 = 85,6 \cdot 1,07 = 91,6$ руб., тогда прогнозное значение заработной платы составит:

$$\overline{y}_p = 79,62 + 0,89 \cdot 91,6 = 161,14 \text{ руб.}$$

5. Ошибка прогноза составит:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_p - \overline{x}\right)^2}{\sum\left(x - \overline{x}\right)^2}} = 12,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91,6 - 85,6)^2}{12 \cdot 12,84^2}} = 13,22.$$

Предельная ошибка прогноза, которая в 95% случаев не будет превышена, составит:

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_p} = 2,23 \cdot 13,22 = 29,48.$$

Доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 161,14 \pm 29,48;$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p_{\min}}} = 161,14 - 29,48 = 131,66 \text{ руб.};$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p_{\max}}} = 161,14 + 29,48 = 190,62 \text{ руб.}$$

Выполненный прогноз среднемесячной заработной платы является надежным ($p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$) и находится в пределах от 131,66 руб. до 190,62 руб.

6. В заключение решения задачи построим на одном графике исходные данные и теоретическую прямую (рис. D.1):

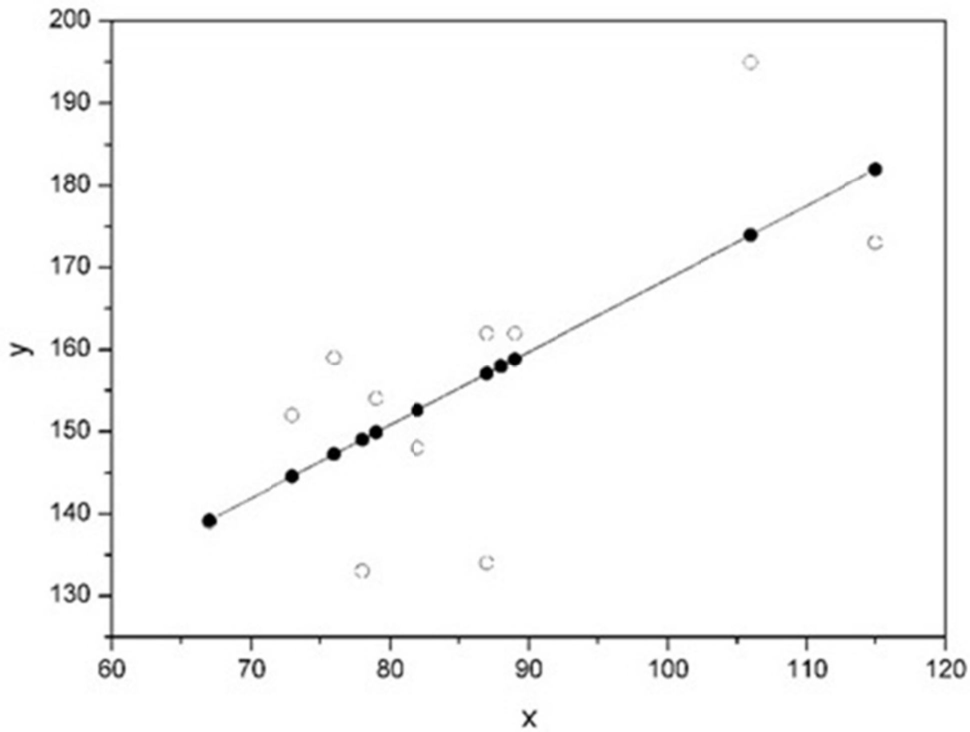


Рис. D.1.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. По территориям региона приводятся данные за 199X г. (см. таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x.
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x, составляющем 107% от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Вариант 1

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	81	124
2	77	131
3	85	146
4	79	139
5	93	143
6	100	159
7	72	135
8	90	152
9	71	127
10	89	154
11	82	127
12	111	162

Вариант 2

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	74	122
2	81	134
3	90	136
4	79	125
5	89	120
6	87	127
7	77	125
8	93	148
9	70	122
10	93	157
11	87	144
12	121	165

Вариант 3

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	77	123
2	85	152
3	79	140
4	93	142
5	89	157
6	81	181
7	79	133
8	97	163
9	73	134
10	95	155
11	84	132
12	108	165

Вариант 4

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	83	137
2	88	142
3	75	128
4	89	140
5	85	133
6	79	153
7	81	142
8	97	154
9	79	132
10	90	150
11	84	132
12	112	166

Вариант 5

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	79	134
2	91	154
3	77	128
4	87	138
5	84	133
6	76	144
7	84	160
8	94	149
9	79	125
10	98	163
11	81	120
12	115	162

Вариант 6

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	92	147
2	78	133
3	79	128
4	88	152
5	87	138
6	75	122
7	81	145
8	96	141
9	80	127
10	102	151
11	83	129
12	94	147

Вариант 7

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	75	133
2	78	125
3	81	129
4	93	153
5	86	140
6	77	135
7	83	141
8	94	152
9	88	133
10	99	156
11	80	124
12	112	156

Вариант 8

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	69	124
2	83	133
3	92	146
4	97	153
5	88	138
6	93	159
7	74	145
8	79	152
9	105	168
10	99	154
11	85	127
12	94	155

Вариант 9

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	78	133
2	94	139
3	85	141
4	73	127
5	91	154
6	88	142
7	73	122
8	82	135
9	99	142
10	113	168
11	69	124
12	83	130

Вариант 10

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	97	161
2	73	131
3	79	135
4	99	147
5	86	139
6	91	151
7	85	135
8	77	132
9	89	161
10	95	159
11	72	120
12	115	160

Б. Множественная регрессия и корреляция

Пример. По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%).

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	3,9	10,0	11	9,0	6,0	21,0
2	7,0	3,9	14,0	12	11,0	6,4	22,0
3	7,0	3,7	15,0	13	9,0	6,8	22,0
4	7,0	4,0	16,0	14	11,0	7,2	25,0
5	7,0	3,8	17,0	15	12,0	8,0	28,0
6	7,0	4,8	19,0	16	12,0	8,2	29,0
7	8,0	5,4	19,0	17	12,0	8,1	30,0
8	8,0	4,4	20,0	18	12,0	8,5	31,0
9	8,0	5,3	20,0	19	14,0	9,6	32,0
10	10,0	6,8	20,0	20	14,0	9,0	36,0

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандартизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F-критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F-критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1.

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Решение.

Для удобства проведения расчетов поместим результаты промежуточных расчетов в таблицу:

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7,0	3,9	10,0	27,3	70,0	39,0	15,21	100,0	49,0
2	7,0	3,9	14,0	27,3	98,0	54,6	15,21	196,0	49,0
3	7,0	3,7	15,0	25,9	105,0	55,5	13,69	225,0	49,0
4	7,0	4,0	16,0	28,0	112,0	64,0	16,0	256,0	49,0
5	7,0	3,8	17,0	26,6	119,0	64,6	14,44	289,0	49,0
6	7,0	4,8	19,0	33,6	133,0	91,2	23,04	361,0	49,0
7	8,0	5,4	19,0	43,2	152,0	102,6	29,16	361,0	64,0
8	8,0	4,4	20,0	35,2	160,0	88,0	19,36	400,0	64,0
9	8,0	5,3	20,0	42,4	160,0	106,0	28,09	400,0	64,0
10	10,0	6,8	20,0	68,0	200,0	136,0	46,24	400,0	100,0
11	9,0	6,0	21,0	54,0	189,0	126,0	36,0	441,0	81,0
12	11,0	6,4	22,0	70,4	242,0	140,8	40,96	484,0	121,0
13	9,0	6,8	22,0	61,2	198,0	149,6	46,24	484,0	81,0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	11,0	7,2	25,0	79,2	275,0	180,0	51,84	625,0	121,0
15	12,0	8,0	28,0	96,0	336,0	224,0	64,0	784,0	144,0
16	12,0	8,2	29,0	98,4	348,0	237,8	67,24	841,0	144,0
17	12,0	8,1	30,0	97,2	360,0	243,0	65,61	900,0	144,0
18	12,0	8,5	31,0	102,0	372,0	263,5	72,25	961,0	144,0
19	14,0	9,6	32,0	134,4	448,0	307,2	92,16	1024,0	196,0
20	14,0	9,0	36,0	126,0	504,0	324,0	81,0	1296,0	196,0
Сумма	192	123,8	446	1276,3	4581	2997,4	837,74	10828,0	1958,0
Ср. знач.	9,6	6,19	22,3	63,815	229,05	149,87	41,887	541,4	97,9

Найдем средние квадратические отклонения признаков:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{97{,}9 - 9{,}6^2} = 2{,}396;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\overline{x_1^2} - \overline{x}_1^2} = \sqrt{41{,}887 - 6{,}19^2} = 1{,}890;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - \overline{x}_2^2} = \sqrt{541{,}4 - 22{,}3^2} = 6{,}642.$$

1. Вычисление параметров линейного уравнения множественной регрессии.

Для нахождения параметров линейного уравнения множественной регрессии:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

необходимо решить следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров a, b_1, b_2:

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 = \sum y; \\ a\sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 = \sum y x_1; \\ a\sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 = \sum y x_2 \end{cases}$$

либо воспользоваться готовыми формулами:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}; \qquad b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2};$$

$$a = \overline{y} - b_1\overline{x}_1 - b_2\overline{x}_2.$$

Рассчитаем сначала парные коэффициенты корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{63,815 - 6,19 \cdot 9,6}{1,890 \cdot 2,396} = 0,970;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{229,05 - 22,3 \cdot 9,6}{6,642 \cdot 2,396} = 0,941;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{149,87 - 6,19 \cdot 22,3}{1,890 \cdot 6,642} = 0,943.$$

Находим:

$$b_1 = \frac{2,396}{1,890} \cdot \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,946;$$

$$b_2 = \frac{2,396}{6,642} \cdot \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,0856;$$

$$a = 9,6 - 0,946 \cdot 6,19 - 0,0856 \cdot 22,3 = 1,835.$$

Таким образом, получили следующее уравнение множественной регрессии:

$$\hat{y} = 1,835 + 0,946 \cdot x_1 + 0,0856 \cdot x_2.$$

Коэффициенты β_1 и β_2 стандартизованного уравнения регрессии $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon$, находятся по формулам:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0{,}946 \cdot \frac{1{,}890}{2{,}396} = 0{,}746;$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0{,}0856 \cdot \frac{6{,}642}{2{,}396} = 0{,}237.$$

Т.е. уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{t}_y = 0{,}746 \cdot t_{x_1} + 0{,}237 \cdot t_{x_2}.$$

Так как стандартизованные коэффициенты регрессии можно сравнивать между собой, то можно сказать, что ввод в действие новых основных фондов оказывает большее влияние на выработку продукции, чем удельный вес рабочих высокой квалификации.

Сравнивать влияние факторов на результат можно также при помощи средних коэффициентов эластичности:

$$\bar{Э}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}.$$

Вычисляем:

$$\bar{Э}_1 = 0{,}946 \cdot \frac{6{,}19}{9{,}6} = 0{,}61; \qquad \bar{Э}_2 = 0{,}0856 \cdot \frac{22{,}3}{9{,}6} = 0{,}20.$$

Т.е. увеличение только основных фондов (от своего среднего значения) или только удельного веса рабочих высокой квалификации на 1% увеличивает в среднем выработку продукции на 0,61% или 0,20% соответственно. Таким образом, подтверждается большее влияние на результат y фактора x_1, чем фактора x_2.

2. Коэффициенты парной корреляции мы уже нашли:

$$r_{yx_1} = 0,970; \qquad r_{yx_2} = 0,941; \qquad r_{x_1x_2} = 0,943.$$

Они указывают на весьма сильную связь каждого фактора с результатом, а также высокую межфакторную зависимость (факторы x_1 и x_2 явно коллинеарны, т.к. $r_{x_1x_2} = 0,943 > 0,7$). При такой сильной межфакторной зависимости рекомендуется один из факторов исключить из рассмотрения.

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при элиминировании (устранении влияния) других факторов, включенных в уравнение регрессии.

При двух факторах частные коэффициенты корреляции рассчитываются следующим образом:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1 - 0,941^2\right) \cdot \left(1 - 0,943^2\right)}} = 0,734;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1 - 0,970^2\right) \cdot \left(1 - 0,943^2\right)}} = 0,325.$$

Если сравнить коэффициенты парной и частной корреляции, то можно увидеть, что из-за высокой межфакторной зависимости коэффициенты парной корреляции дают завышенные оценки тесноты связи. Именно по этой причине рекомендуется при наличии сильной коллинеарности (взаимосвязи) факторов исключать из исследования тот фактор, у которого теснота парной зависимости меньше, чем теснота межфакторной связи.

Коэффициент множественной корреляции определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{r_{11}}}},$$

где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы межфакторной корреляции.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 0,970 & 0,941 \\ 0,970 & 1 & 0,943 \\ 0,941 & 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,8607 + 0,8607 - ;$$

$$-0,8855 - 0,8892 - 0,9409 = 0,0058$$

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 0,943 \\ 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,8892 = 0,1108.$$

Коэффициент множественной корреляции

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,0058}{0,1108}} = 0,973.$$

Аналогичный результат получим при использовании других формул:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{ост}}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{0,305}{5,74}} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} = \sqrt{0,746 \cdot 0,970 + 0,237 \cdot 0,941} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2\ldots x_m} = \sqrt{1-\left(1-r_{yx_1}^2\right)\cdot\left(1-r_{yx_2\cdot x_1}^2\right)} = \\ = \sqrt{1-\left(1-0{,}970^2\right)\cdot\left(1-0{,}325^2\right)} = 0{,}973 .$$

Коэффициент множественной корреляции показывает на весьма сильную связь всего набора факторов с результатом.

3. Нескорректированный коэффициент множественной детерминации $R_{yx_1x_2}^2 = 0{,}947$ оценивает долю вариации результата за счет представленных в уравнении факторов в общей вариации результата. Здесь эта доля составляет $94{,}7\%$ и указывает на весьма высокую степень обусловленности вариации результата вариацией факторов, иными словами – на весьма тесную связь факторов с результатом.

Скорректированный коэффициент множественной детерминации:

$$\hat{R}^2 = 1-\left(1-R^2\right)\frac{(n-1)}{(n-m-1)} = 1-\left(1-0{,}947\right)\frac{20-1}{20-2-1} = 0{,}941$$

определяет тесноту связи с учетом степеней свободы общей и остаточной дисперсий. Он дает такую оценку тесноты связи, которая не зависит от числа факторов и поэтому может сравниваться по разным моделям с разным числом факторов. Оба коэффициента указывают на весьма высокую (более 94%) детерминированность результата y в модели факторами x_1 и x_2.

4. Оценку надежности уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи $R_{yx_1x_2}$ дает F-критерий Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m-1}{m}.$$

В нашем случае фактическое значение F-критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0{,}973^2}{1-0{,}973^2}\cdot\frac{20-2-1}{2} = 151{,}88.$$

Получили, что $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}} = 3,49$ (при $n = 20$), т.е. вероятность случайно получить такое значение F-критерия не превышает допустимый уровень значимости 5%. Следовательно, полученное значение не случайно, оно сформировалось под влиянием существенных факторов, т.е. подтверждается статистическая значимость всего уравнения и показателя тесноты связи $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F-критериев Фишера оценим целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 при помощи формул:

$$F_{\text{част},\, x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1}} \cdot \frac{n - m - 1}{m};$$

$$F_{\text{част},\, x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

Найдем $R^2_{yx_1}$ и $R^2_{yx_2}$.

$$R^2_{yx_1} = r^2_{yx_1} = 0,970^2 = 0,941;$$

$$R^2_{yx_2} = r^2_{yx_2} = 0,941^2 = 0,885.$$

Имеем:

$$F_{\text{част},\, x_1} = \frac{0,947 - 0,885}{1 - 0,941} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 8,9322;$$

$$F_{\text{част},\, x_2} = \frac{0,947 - 0,941}{1 - 0,885} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 0,4435.$$

Получили, что $F_{\text{част},\, x_2} < F_{\text{табл}} = 3,49$. Следовательно, включение в модель фактора x_2 после того, как в модель включен фактор x_1 статистически нецелесообразно: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного признака x_2 оказывается незначительным, несущественным; фактор x_2 включать в уравнение после фактора x_1 не следует.

Если поменять первоначальный порядок включения факторов в модель и рассмотреть вариант включения x_1 после x_2, то результат расчета частного F-критерия для x_1 будет иным. $F_{\text{част}, x_1} > F_{\text{табл}} = 3,49$, т.е. вероятность его случайного формирования меньше принятого стандарта $\alpha = 0,05\ (5\%)$. Следовательно, значение частного F-критерия для дополнительно включенного фактора x_1 не случайно, является статистически значимым, надежным, достоверным: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного фактора x_1 является существенным. Фактор x_1 должен присутствовать в уравнении, в том числе в варианте, когда он дополнительно включается после фактора x_2.

6. Общий вывод состоит в том, что множественная модель с факторами x_1 и x_2 с $R^2_{yx_1x_2} = 0,947$ содержит неинформативный фактор x_2. Если исключить фактор x_2, то можно ограничиться уравнением парной регрессии:

$$\hat{y}_x = \alpha_0 + \alpha_1 x = 1,99 + 1,23 \cdot x, \qquad r^2_{yx} = 0,941.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%) (смотри таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандартизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F-критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F-критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1.

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Вариант 1

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	6	3,6	9	11	9	6,3	21
2	6	3,6	12	12	11	6,4	22
3	6	3,9	14	13	11	7	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	25
5	7	3,9	18	15	12	7,9	28
6	7	4,5	19	16	13	8,2	30
7	8	5,3	19	17	13	8	30
8	8	5,3	19	18	13	8,6	31
9	9	5,6	20	19	14	9,5	33
10	10	6,8	21	20	14	9	36

Вариант 2

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	6	3,5	10	11	10	6,3	21
2	6	3,6	12	12	11	6,4	22
3	7	3,9	15	13	11	7	23
4	7	4,1	17	14	12	7,5	25
5	7	4,2	18	15	12	7,9	28

6	8	4,5	19	16	13	8,2	30
7	8	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,3	20	18	14	8,6	31
9	9	5,6	20	19	14	9,5	35
10	10	6	21	20	15	10	36

Вариант 3

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,7	9	11	11	6,3	22
2	7	3,7	11	12	11	6,4	22
3	7	3,9	11	13	11	7,2	23
4	7	4,1	15	14	12	7,5	25
5	8	4,2	17	15	12	7,9	27
6	8	4,9	19	16	13	8,1	30
7	8	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,1	20	18	13	8,6	32
9	10	5,6	20	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	15	9,5	36

Вариант 4

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,5	9	11	10	6,3	22
2	7	3,6	10	12	10	6,5	22
3	7	3,9	12	13	11	7,2	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	25
5	8	4,2	18	15	12	7,9	27
6	8	4,5	19	16	13	8,2	30
7	9	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	14	8,6	33
9	10	5,6	21	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	15	9,6	36

Вариант 5

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,6	9	11	10	6,3	21
2	7	3,6	11	12	11	6,9	23
3	7	3,7	12	13	11	7,2	24
4	8	4,1	16	14	12	7,8	25
5	8	4,3	19	15	13	8,1	27
6	8	4,5	19	16	13	8,2	29
7	9	5,4	20	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	14	8,8	33
9	10	5,8	21	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	14	9,7	34

Вариант 6

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,5	9	11	10	6,3	21
2	7	3,6	10	12	10	6,8	22
3	7	3,8	14	13	11	7,2	24
4	7	4,2	15	14	12	7,9	25
5	8	4,3	18	15	12	8,1	26
6	8	4,7	19	16	13	8,3	29
7	9	5,4	19	17	13	8,4	31
8	9	5,6	20	18	13	8,8	32
9	10	5,9	20	19	14	9,6	35
10	10	6,1	21	20	14	9,7	36

Вариант 7

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,8	11	11	10	6,8	21
2	7	3,8	12	12	11	7,4	23
3	7	3,9	16	13	11	7,8	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	26

5	7	4,6	18	15	12	7,9	28
6	8	4,5	18	16	12	8,1	30
7	8	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	13	8,7	32
9	9	6,1	20	19	13	9,5	33
10	10	6,8	21	20	14	9,7	35

Вариант 8

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,8	9	11	11	7,1	22
2	7	4,1	14	12	11	7,5	23
3	7	4,3	16	13	12	7,8	25
4	7	4,1	17	14	12	7,6	27
5	8	4,6	17	15	12	7,9	29
6	8	4,7	18	16	13	8,1	30
7	9	5,3	20	17	13	8,5	32
8	9	5,5	20	18	14	8,7	32
9	11	6,9	21	19	14	9,6	33
10	10	6,8	21	20	15	9,8	36

Вариант 9

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,9	12	11	11	7,1	22
2	7	4,2	13	12	12	7,5	25
3	7	4,3	15	13	13	7,8	26
4	7	4,4	17	14	12	7,9	27
5	8	4,6	18	15	13	8,1	30
6	8	4,8	19	16	13	8,4	31
7	9	5,3	19	17	13	8,6	32
8	9	5,7	20	18	14	8,8	32
9	10	6,9	21	19	14	9,6	34
10	10	6,8	21	20	14	9,9	36

Вариант 10

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,6	12	11	10	7,2	23
2	7	4,1	14	12	11	7,6	25
3	7	4,3	16	13	12	7,8	26
4	7	4,4	17	14	11	7,9	28
5	7	4,5	18	15	12	8,2	30
6	8	4,8	19	16	12	8,4	31
7	8	5,3	20	17	12	8,6	32
8	8	5,6	20	18	13	8,8	32
9	9	6,7	21	19	13	9,2	33
10	10	6,9	22	20	14	9,6	34

В. Системы эконометрических уравнений

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Даны системы эконометрических уравнений.

Требуется.

1. Применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицируемо ли каждое из уравнений модели.
2. Определите метод оценки параметров модели.
3. Запишите в общем виде приведенную форму модели.

Вариант 1

Модель протекционизма Сальватора (упрощенная версия):

$$\begin{cases} M_t = a_1 + b_{12}N_t + b_{13}S_t + b_{14}E_{t-1} + b_{15}M_{t-1} + \varepsilon_1, \\ N_t = a_2 + b_{21}M_t + b_{23}S_t + b_{26}Y_t + \varepsilon_2, \\ S_t = a_3 + b_{31}M_t + b_{32}N_t + b_{36}X_t + \varepsilon_3. \end{cases}$$

где M – доля импорта в ВВП; N – общее число прошений об освобождении от таможенных пошлин; S – число удовлетворенных прошений об освобождении от таможенных пошлин; E – фиктивная переменная, равная 1 для тех лет, в которые курс доллара на международных валютных рынках был искусственно завышен, и 0 – для всех остальных лет; Y – реальный ВВП; X – реальный объем чистого экспорта; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 2

Макроэкономическая модель (упрощенная версия модели Клейна):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 3

Макроэкономическая модель экономики США (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{23}r_t + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{34}M_t + b_{35}r_{t-1} + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 4

Модель Кейнса (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 5

Модель денежного и товарного рынков:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – реальный ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции; G – реальные государственные расходы.

Вариант 6

Модифицированная модель Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – доход; I – инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 7

Макроэкономическая модель:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} D_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{22} Y_t + b_{23} Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = D_t + T_t, \\ D_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – чистый национальный продукт; D – чистый национальный доход; I – инвестиции; T – косвенные налоги; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 8

Гипотетическая модель экономики:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} Y_t + b_{12} J_t + \varepsilon_1, \\ J_t = a_2 + b_{21} Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ T_t = a_3 + b_{31} Y_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + J_t + G_t, \end{cases}$$

где C – совокупное потребление в период t; Y – совокупный доход в период t; J – инвестиции в период t; T – налоги в период t; G – государственные доходы в период t.

Вариант 9

Модель денежного рынка:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11} M_t + b_{12} Y_t + +\varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21} R_t + b_{22} I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33} R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции.

Вариант 10

Конъюнктурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Г. Временные ряды

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии (y_t) жителями региона за 16 кварталов.

Требуется:

1. Построить автокорреляционную функцию и сделать вывод о наличии сезонных колебаний.
2. Построить аддитивную модель временного ряда (для нечетных вариантов) или мультипликативную модель временного ряда (для четных вариантов).
3. Сделать прогноз на 2 квартала вперед.

Варианты 1, 2

t	y_t	t	y_t
1	5,8	9	7,9

2	4,5	10	5,5
3	5,1	11	6,3
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,0
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,0
8	10,1	16	11,1

Варианты 3, 4

t	y_t	t	y_t
1	5,5	9	8,0
2	4,6	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,2	12	10,9
5	7,1	13	9,1
6	5,1	14	6,4
7	5,9	15	7,2
8	10,0	16	11,0

Варианты 5, 6

t	y_t	t	y_t
1	5,3	9	8,2
2	4,7	10	5,5
3	5,2	11	6,5
4	9,1	12	11,0
5	7,0	13	8,9
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,3
8	10,1	16	11,2

Варианты 7, 8

t	y_t	t	y_t
1	5,5	9	8,3
2	4,8	10	5,4

3	5,1	11	6,4
4	9,0	12	10,9
5	7,1	13	9,0
6	4,9	14	6,6
7	6,1	15	7,5
8	10,0	16	11,2

Варианты 9, 10

t	y_t	t	y_t
1	5,6	9	8,2
2	4,7	10	5,6
3	5,2	11	6,4
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,1
6	5,1	14	6,7
7	6,0	15	7,5
8	10,2	16	11,3

8.4. ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ»

Задание 1.

- Учитывая мнения первого и третьего экспертов, провести анализ методом ранговой корреляции.

- На втором этапе учесть мнения всех экспертов и провести соответствующий анализ.

1.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
2	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4
3	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10
4	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
5	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5

2.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	3	10	4	2	7	5	9	8	6
2	1	2	7	5	4	9	3	6	8	10
3	1	5	8	2	3	7	4	6	9	10
4	2	6	10	3	4	7	1	9	5	8
5	1	7	8	6	2	10	5	9	3	4

3.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	5	1	7	9	4	8	2	3	6
2	8	7	1	9	10	5	6	4	3	2
3	2	5	3	6	9	7	4	1	8	10
4	10	7	5	8	6	3	9	1	2	4
5	7	8	1	9	10	5	6	2	4	3

4.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	8	3	4	10	2	7	5	6
2	1	4	10	5	2	6	3	8	7	9
3	2	5	9	1	4	10	3	8	7	6
4	1	5	10	3	4	6	2	9	7	8
5	1	9	7	8	2	6	3	10	5	4

5.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
2	10	9	8	5	4	3	1	2	7	6
3	10	9	7	5	4	6	2	1	3	8
4	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
5	9	8	2	7	5	4	3	6	10	1

6.

Ф / Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
2	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4
3	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10
4	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
5	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5

7.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	9	7	6	5	4	8	3	2	1
2	8	10	6	5	7	9	1	4	2	3
3	10	2	4	8	3	6	9	5	1	7
4	9	6	4	1	2	5	7	3	8	10
5	1	7	8	2	9	10	3	6	4	5

8.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	9	6	8	7	3	1	2	5	4
2	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10
3	10	9	4	6	7	1	2	3	8	5
4	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4
5	10	9	5	8	7	4	1	2	6	3

9.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	7	8	2	6	3	10	5	4
2	3	7	9	4	2	10	1	8	6	5
3	1	9	10	3	2	8	4	7	6	5
4	1	5	9	3	2	10	4	8	7	6
5	1	5	9	4	3	10	2	8	6	7

10.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	5	6	9	1	8	3	2	4	7
2	1	5	6	4	7	3	9	2	10	8
3	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
4	3	7	9	4	2	10	1	8	6	5
5	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4

11.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	10	3	2	8	4	7	6	5
2	1	5	9	3	2	10	4	8	7	6
3	1	5	9	4	3	10	2	8	6	7
4	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
5	10	9	8	5	4	3	1	2	7	6

12.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
2	3	7	9	4	2	10	1	8	6	5
3	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4
4	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
5	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4

13.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	3	4	9	5	2	7	6	1	8
2	7	6	4	8	3	2	10	1	5	9
3	1	2	3	5	10	4	6	9	8	7
4	5	6	4	3	10	8	7	2	9	1
5	10	6	5	7	1	4	9	8	3	2

14.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
2	10	9	5	7	8	4	2	1	3	6
3	6	7	10	4	3	9	2	5	1	8
4	3	8	2	10	5	1	4	6	9	7
5	2	5	1	4	6	7	3	9	8	10

15.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
2	2	5	3	6	9	7	4	1	8	10
3	10	7	5	8	6	3	9	1	2	4
4	7	8	1	9	10	5	6	2	4	3
5	10	9	7	5	4	6	2	1	3	8

16.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	3	10	4	2	7	5	9	8	6
2	2	5	9	1	4	10	3	8	7	6
3	1	5	10	3	4	6	2	9	7	8
4	1	9	7	8	2	6	3	10	5	4
5	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10

17.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	5	9	3	2	10	4	8	7	6
2	1	5	9	4	3	10	2	8	6	7
3	10	9	7	5	4	6	2	1	3	8
4	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
5	9	8	2	7	5	4	3	6	10	1

18.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	3	7	9	4	2	10	1	8	6	5
2	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4
3	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10
4	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
5	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5

19.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	9	7	6	5	4	8	3	2	1
2	8	10	6	5	7	9	1	4	2	3
3	10	2	4	8	3	6	9	5	1	7
4	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
5	10	9	8	5	4	3	1	2	7	6

20.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	9	6	8	7	3	1	2	5	4
2	7	8	2	5	9	4	1	3	6	10
3	10	9	4	6	7	1	2	3	8	5
4	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
5	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4

21.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	7	8	2	6	3	10	5	4
2	3	7	9	4	2	10	1	8	6	5
3	1	9	10	3	2	8	4	7	6	5
4	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
5	10	9	8	5	4	3	1	2	7	6

22.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	5	6	9	1	8	3	2	4	7
2	1	5	6	4	7	3	9	2	10	8
3	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
4	9	10	1	8	7	3	2	4	5	6
5	10	7	5	9	8	2	1	3	6	4

23.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	10	3	2	8	4	7	6	5
2	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
3	9	8	2	7	5	4	3	6	10	1
4	2	1	3	5	10	7	9	4	6	8
5	2	1	6	4	10	5	7	9	3	8

24.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
2	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
3	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
4	8	7	10	5	4	9	3	2	1	6
5	4	7	9	3	5	10	2	8	1	6

25.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	9	10	3	2	8	4	7	6	5
2	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
3	9	8	2	7	5	4	3	6	10	1
4	1	2	3	5	10	4	6	9	8	7
5	5	6	4	3	10	8	7	2	9	1

26.

Е \ Ф	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	10
1	10	6	7	5	4	2	1	9	8	3
2	10	9	4	7	8	3	1	2	5	6
3	10	9	2	8	7	4	1	3	6	5
4	6	7	10	4	3	9	2	5	1	8
5	3	8	2	10	5	1	4	6	9	7

27.

Ф \ Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	2	1	1	1	2	3	1	1	2	1
2	5	5	4	5	5	4	5	5	4	5
3	3	4	5	4	3	5	4	4	5	4
4	4	3	3	2	1	2	3	2	1	2
5	1	2	2	3	4	1	2	3	3	3

28.

Ф \ Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	4	3	2	3	1	2	3	2	4	2
2	5	5	5	5	4	5	5	5	5	4
3	1	2	1	1	2	1	2	1	1	3
4	2	4	3	4	5	4	4	3	2	5
5	3	1	4	2	3	3	1	4	3	1

29.

Ф \ Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	3	3	4	2	4	3	5	4	2	2
2	5	5	5	3	5	5	4	5	5	5
3	2	1	2	5	1	2	1	2	3	1
4	1	2	1	1	3	1	2	1	1	3
5	4	4	3	4	2	4	3	3	4	4

30.

Ф \ Е	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	1	2	1	1	1	3	1	2
2	4	4	3	4	3	4	5	5	4	4
3	3	1	4	3	4	2	3	1	2	3
4	5	5	5	5	5	5	4	4	5	5
5	2	3	2	1	2	3	2	2	3	1

Задание 2.

- Построить сетевой график и определить критический путь.

- Найти характеристики событий, робот, резервы времени и коэффициенты напряженности.

1.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-5	3-6	4-6	4-7	5-8	6-8	7-8
	$t(i,k)$	2	7	4	8	4	6	5	3	7	5

2.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-6	3-5	4-5	4-6	4-7	5-7	6-7
	$t(i,k)$	14	12	18	10	9	15	18	12	14	17

3.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-4	4-7	5-6	6-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	20	21	24	26	25	28	27	20	22	24

4.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	1-5	2-6	3-8	4-6	5-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	7	8	12	15	10	14	16	8	15	10

5.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-6	3-5	4-7	5-8	6-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	11	12	15	14	17	10	16	18	14	12

6.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	3-5	3-6	4-6	4-8	5-7	6-7	7-8
	$t(i,k)$	24	21	15	28	24	26	25	27	31	24

7.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-5	3-6	4-8	5-7	6-9	7-9	8-9
	$t(i,k)$	17	18	17	12	18	19	12	17	13	11

8.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	1-5	2-7	3-6	4-6	5-8	6-8	7-8
	$t(i,k)$	24	28	27	29	25	23	27	26	25	24

9.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-6	4-7	5-8	6-9	7-9	8-9
	$t(i,k)$	27	28	27	22	28	29	40	37	33	31

10.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-5	3-5	3-6	4-7	5-8	6-7	7-8
	$t(i,k)$	10	6	12	7	12	15	14	12	10	17

11.	(i,k)	1-2	1-3	2-5	2-6	3-4	4-8	5-6	5-7	6-7	7-8
	$t(i,k)$	14	11	20	15	15	14	18	12	23	12

12.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-5	3-6	4-8	5-7	6-9	7-9	8-9
	$t(i,k)$	11	12	18	17	16	15	10	18	14	15

13.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-5	4-5	4-6	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	41	48	35	31	32	38	40	39	27	40

14.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-3	3-5	3-6	4-7	5-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	24	14	18	27	35	38	21	34	28	14

15.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	3-5	4-5	4-7	5-6	5-8	6-8	7-8
	$t(i,k)$	22	24	25	28	27	20	24	26	28	21

16.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-4	3-6	4-5	4-6	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	15	18	17	14	12	19	15	18	17	16

17.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-5	3-7	4-6	5-8	6-8	7-8
	$t(i,k)$	14	15	18	21	20	18	24	19	27	20

18.	(i,k)	1-2	1-3	2-3	2-4	2-5	3-4	3-6	4-5	4-6	5-6
	$t(i,k)$	20	21	27	28	19	31	25	30	28	25

19.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-5	3-5	3-7	4-5	4-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	25	28	27	32	31	24	35	20	34	27

20.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-7	3-4	3-5	4-5	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	14	18	17	22	24	18	10	15	19	18

21.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-5	3-6	4-7	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	12	17	14	15	18	16	15	17	14	15

22.	(i,k)	1-2	1-3	2-3	2-4	3-5	3-7	4-5	4-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	12	14	15	17	12	16	18	15	14	12

23.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-4	2-7	3-5	4-6	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	5	4	8	7	6	9	4	2	3	4

24.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-3	3-5	3-6	4-7	5-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	25	28	27	32	31	24	35	20	34	27

25.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-7	3-4	3-5	4-5	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	25	28	27	32	31	24	35	20	34	27

26.	(i,k)	1-2	1-3	2-4	2-5	3-5	3-6	4-7	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	44	47	55	32	50	55	52	38	47	38

27.	(i,k)	1-2	1-3	2-3	2-4	3-5	3-7	4-5	4-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	16	17	25	24	22	21	15	25	20	21

28.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-4	2-7	3-5	4-6	5-6	5-7	6-7
	$t(i,k)$	29	30	35	23	32	35	33	26	30	26

29.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	1-5	2-6	3-8	4-6	5-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	11	13	24	22	20	18	10	24	17	18

30.	(i,k)	1-2	1-3	1-4	2-6	3-5	4-7	5-8	6-7	6-8	7-8
	$t(i,k)$	18	19	26	25	24	23	17	26	22	23

ЧАСТЬ III

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Глава 9
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

ВВЕДЕНИЕ

Увеличение роли информации в жизни человеческого общества, возникновение и развитие общемирового информационного пространства, появление и разработка новых подходов к использованию современных информационных технологий привели к тому, что информационное общество заняло главенствующие позиции в постиндустриальном обществе. В настоящее время применение передовых информационно-коммуникационных технологий, включая различные приемы и способы моделирования, в сфере менеджмента, экономике, маркетинга, а не только в областях естественных, точных и технических наук, является одним из ведущих факторов повышения эффективности деятельности. При этом моделирование с использованием компьютерных программ является актуальным при принятии решений во всех сферах жизнедеятельности общества.

Моделирование – это одно из используемых человечеством средств познания, состоящее из двух основных этапов: разработки модели и анализа разработанной модели, благодаря чему возникает возможность исследования сложных явлений и процессов с помощью экспериментов не с реальной системой, а с ее образом (моделью). В связи с этим очень важным является изучение теоретических положений современных методов моделирования, в том числе методов имитационного и комплексного моделирования, знание основных принципов построения моделей, используемых программных средств и сред.

Любое исследование, проводимое человеком, представляет собой познание определенного объекта, определенной предметной области, определенного явления с заданной (заранее намеченной) целью. Процесс исследования выполняется соответствующим субъектом и заключается в наблюдении за свойствами объекта и выполнении необходимых действий для выявления и оценки наиболее ценных закономерных отношений между показателями данных свойств.

Огромное количество задач связано с изучением сложных систем, которые содержат в себе множество элементов, каждый из которых, в свою очередь, также представляет собой сложную систему, при этом такие системы тесно взаимосвязаны с окружающей их внешней средой. В естественных условиях исследование подобных систем, как правило, ограничено из-за их сложности, в некоторых случаях изучение систем может быть невозможно в силу того, что не представляется возможным провести реальный эксперимент либо повторить проводимый эксперимент. В подобных ситуациях единственным методом для исследования систем выступает моделирование.

Моделирование – это метод исследования, заключающийся в построении и анализе моделей – аналогов исследуемых объектов. Моделирование является одним из наиболее эффективных методов исследования, используемых в современном обществе. Моделирование – это процесс замещения изучаемого объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели, то есть моделирование может быть еще определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью.

В основу моделирования положена теория подобия. Согласно указанной теории, абсолютное подобие возможно только лишь при замене одного объекта точно таким же другим. Создав адекватную модель, субъект исследования с ее помощью имеет возможность проанализировать все возможные реакции системы, а впоследствии выбрать и практически использовать необходимое управляющее воздействие, которое способно привести к необходимой реакции.

Понятие «модель» в обобщенном виде стало общеупотребительным и вышло за рамки технических и естественных наук. Например, модель пальто, модель транспортного средства, модель декорации. В науке существуют большое количество определений термина «модель». Рассмотрим некоторые из них.

Модель – это материальный или идеальный объект, замещающий исследуемую систему и адекватным образом отображающий ее существенные стороны. Модель – это искусственно созданный образ конкретного устройства, процесса, предмета или явления.

Модель – образ некоторой системы; аналог (схема, структура, знаковая система) определенного фрагмента природной или социальной реальности, «заместитель» оригинала в познании и практике. Примером модели может стать любая модель системы, подлежащей исследованию, не зависимо от ее физического происхождения: модель избирательной компании, модель двигателя внутреннего сгорания, модель колебательной системы.

Модель представляет собой объект, который заменяет изучаемую систему, а также имитирует структуру и поведение системы. Модель может быть представлена, например, определенным материальным объектом, системой математических уравнений либо компьютерной программой. Модель изучаемого объекта должна отражать его самые важные качества, исключая второстепенные качества. Моделям, как и системам, присущи определенные свойства, к числу которых можно отнести следующие:

- целенаправленность означает наличие цели у модели, отображающей некую систему;
- адекватность – модель должна точно описывать исследуемую систему;
- полнота – модель должна учитывать все основополагающие связи, необходимые для обеспечения и достижения цели моделирования;
- устойчивость – модель должна обеспечивать устойчивое функционирование и поведение системы;
- целостность – модель воспроизводит некоторую систему, являющуюся неким целым;
- информативность – модель должна содержать необходимую информацию об изучаемой системе и должна позволять получать новую информацию.

В процессе моделирования могут ставиться разные цели. Например, изучение сущности исследуемого объекта, причин его поведения, внутреннего устройства и механизма взаимодействия отдельных элементов, анализ уже известных данных, полученных в результате эмпирических исследований, выбор оптимальных вариантов функционирования изучаемых систем, выбор правильных решений и путей управления объектом исходя из выбранных критериев оптимальности.

Все многообразие моделей можно распределить на группы, в основу деления которых положены различные классификационные и систематизирующие признаки. Укажем некоторые из них. Например, по степени полноты модели выделяют приближенные, неполные и полные модели. По степени случайности моделируемого процесса выделяют такие виды моделирования, как: детерминированное, стохастическое и статическое. Моделирование в зависимости от формы реализации носителя подразделяют на мысленное и реальное. В свою очередь, реальное моделирование включает в себя натурное моделирование (комплексные испытания, научный эксперимент, производственный эксперимент), физическое моделирование, математическое моделирование. По способу представления состояния системы модели подразделяют на дискретные и непрерывные.

Теоретической основой моделирования является общая теория систем (в литературе также встречается термин системный подход). Это одно из направлений научного знания, в соответствии с которым любой объект исследования рассматривается как некая сложная система, которая взаимодействует с окружающей внешней средой. Каждый элемент такой системы по своей сути является подсистемой. Изучаемый объект будет являться системой, только если он состоит из множества взаимосвязанных между собой элементов, при этом общая сумма свойств таких элементов не равна свойствам объекта.

Процесс моделирования включает в себя следующие этапы:

1) построение модели (сбор информации, создание структуры, проектирование состава и спецификации);

2) исследование модели (изучение модели с использованием специальных методов исследования, а также на соответствие свойствам и принципам модели);

3) использование модели.

Модель создается по иерархическим принципам: исследователь последовательно анализирует отдельные стороны функционирования анализируемой системы, постепенно изменяя центры внимания, в результате чего рассмотренные подсистемы перемещаются во внешнюю среду. Благодаря иерархической структуре изучаемой модели возможно проанализировать также последовательность изучения реального объекта, то есть последовательность движения (перехода) от топологического или структурного уровня к алгоритмическому (функциональному) и далее от алгоритмического к параметрическому. Результаты моделирования в большей степени зависят от уровня адекватности исходной описательной модели, от полученного уровня подобия описания реального исследуемого объекта, от числа реализации моделей и иных факторов. В некоторых случаях существующая сложность объекта не дает возможности создать математическую модель объекта, создать кибернетическое описание, таким образом, основным направлением изучения такого объекта будет выделение части объекта, которая трудно поддается математическому описанию, и последующее включение такой реальной части объекта в создаваемую или созданную имитационную модель. С одной стороны, модель реализуется с использованием электронной вычислительной техники (ЭВМ), с другой – в структуре модели есть реальная часть объекта. Благодаря этому увеличиваются возможности и достоверность результатов проводимого моделирования.

Благодаря ЭВМ реализуется имитационная система, что, в свою очередь, позволяет изучить имитационную модель, создаваемую в виде некоторой совокупности отдельных блочных моделей, а также связи меду блоками, их взаимодействие во времени и пространстве в ходе реализации какого-либо исследуемого процесса. Обычно выделяют следующие группы блоков:

1) характеризующие моделируемый исследователем процесс функционирования анализируемой системы;

2) отражающие внешнюю среду и ее влияние на реализуемый процесс;

3) играющие вспомогательную роль, обеспечивая взаимодействие вышеуказанных двух блоков, кроме того, осуществляющие дополнительные функции по сбору, получению и последующей обработке результатов моделирования.

Имитационная система включает в себя набор переменных, которые позволяют управлять изучаемыми процессами, и набор начальных условий, позволяющих изменять условия проводимого машинного эксперимента.

Процесс создания адекватных моделей, их последующего изучения, дальнейшего применения требует от исследователя не только знаний в области системного анализа, но и знаний соответствующих изобразительных средств, языков, используемых для документирования и фиксирования полученных результатов моделирования.

При этом следует четко определять методику оценки адекватности результатов, получение которых возможно в процессе исследования, а также автоматизировать процессы получения и обработки результатов в процессе проводимого эксперимента.

9.1. ПОНЯТИЕ И МЕТОДОЛОГИЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И КОМПЛЕКСНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Компьютерное моделирование обеспечивает изучение процессов, происходящих в любой системе, на различных уровнях детализации. С помощью создаваемых моделей возможно реализовать практически любой алгоритм деятельности, в том числе и управленческой, а также поведения системы. Кроме того, модели, которые допускают исследование аналитическими методами, также могут анализироваться имитационными методами. Подобные модели могут быть использованы как для одного испытания, так и для многократных испытаний. Результаты испытаний могут определяться случайным характером исследуемых процессов. По таким данным можно получить устойчивую статистическую информацию (данные).

Имитационное моделирование – метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности. Имитационное моделирование представляет собой метод исследования, в котором исследуемая система заменяется моделью, очень точно описывающей реальную систему, и с которой проводятся различные эксперименты для получения об этой системе определенной информации. Экспериментирование с моделями иначе еще называют имитацией.

Еще некоторое время назад имитационное моделирование являлось узким направлением в сфере научного познания и представляло собой сплав науки и искусства. В настоящее же время правильно построенная модель позволяет не только подсказать тенденцию развития в некой ситуации, но и является своеобразным помощником по выработке практических рекомендаций. Имитационные модели могут применяться как в технической, в том числе и военной, так и в научной сферах жизнедеятельности общества, а также при управлении корпорациями, государственными организациями и даже государствами. Имитационное моделирование используют в тех случаях, когда нельзя создать аналитическую модель (например, в системе существуют нелинейности, причинные связи, случайные (стохастические) переменные и т.д.), когда невозможно проводить эксперименты на реальном объекте либо проведение таких экспериментов будет слишком затратным, когда требуется сымитировать поведение во времени исследуемой системы. При осуществлении имитирования поведения системы во времени возникает возможность управления временем в модели, а именно: ускорять при моделировании систем с медленной изменчивостью или замедлять при моделировании систем с быстропротекающими процессами.

Имитационное моделирование представляет собой создание компьютерной программы (или нескольких компьютерных программ), которая имитирует поведение сложной экономической, социальной, технической или любой иной системы с требуемой точностью на ЭВМ. Такое моделирование предполагает формальное описание логики функционирования изучаемой системы в течение определенного периода времени, которое включает существенные взаимодействия всех ее компонентов, и позволяет проводить статистические эксперименты. Имитационные компьютерные модели используют для различного рода исследований, для создания компьютерных игр, обучающих или анимационных программ.

В современности в качестве основных (базовых) концепций структуризации и формализации имитационного моделирования, успешно применяемых в практической и научной деятельности, возможно применение следующих подходов:

- *процессно-транзактно-ориентированный подход*, использующий системы моделирования, базирующиеся на описании процессов. В области информационных технологий такие системы моделирования представляют дискретно-событийный подход (парадигму) имитационного моделирования и являются наиболее представительным классом систем такого рода: это системы GPSS, Arena, Extend, Automod, Promodel, Taylor и др.

- *агентное моделирование* – одно из современных направлений моделирования, при котором модели применяются для исследования децентрализованных систем, функционирование и динамика которых определяются не глобальными законами и правилами, а такие законы и правила выступают следствием или результатом индивидуальной активности членов группы. Целью агентного моделирования является получение информации и представлений о таких глобальных законах, об общем поведении изучаемой системы, исходя из возможных предположений о частном (индивидуальном) поведении ее отдельных объектов и взаимодействии таких объектов в системе. Агент – это некоторая сущность, которая обладает автономным поведением, активностью, которая в соответствии с определенным набором правил имеет возможность принимать решения, осуществлять взаимодействие с окружающей средой и изменяться самостоятельно. В маркетинге областями использования агентного моделирования могут быть, например: имитация поведения клиентов, управление рисками, моделирование потребительских рынков, стратегическое планирование и т.д. Примером может служить пакет AnyLogic.

- *системная динамика* – база имитационного моделирования. Для изучаемой системы строятся специальные графические диаграммы глобальных влияний и причинных связей во времени одних параметров на другие. Впоследствии модель, созданная на основе таких диаграмм, имитируется с помощью компьютерных средств. Благодаря такому моделированию можно возможно понимание сути происходящего, а также выявления причинно-следственных связей между явлениями и объектами. Метод имитационного моделирования, относящийся к традиционным методам, иначе называемый «системное мышление». Названный метод опирается на концептуальные аспекты в процессе анализа сложных систем и использует такие понятия, как глобальные причинные зависимости, агрегаты, накопители, влияние обратных связей, динамика потоков. С использованием системной динамики создают модели бизнес-процессов, логистики, производства, цепочек поставок, управления проектами и т.д. Наиболее используемые системы: VenSim, PowerSim, iThink.

Системно-динамические модели могут применяться и для пространственно-временного анализа различных систем, в том числе и глобальных систем. При построении моделей могут учитываться различные компоненты: социальные, технологические, экономические, территориальные и др.

В имитационном моделировании применяют метод статических испытаний или его еще называют метод Монте-Карло. Метод Монте-Карло – это метод, применяемый для моделирования случайных функций и случайных величин, вероятностные характеристики у которых совпадают с решениями аналитических задач. Названный метод заключается во многократном повторении (воспроизведении) процессов, которые представляют собой реализацию случайных функций и величин, и последующей обработке полученной информации с помощью методов математической статистики. В том случае, если названный метод используется для машинной имитации с целью изучения характеристик процессов функционирования различных систем, которые подвержены случайным воздействиям, то данный метод называют метод статистического моделирования.

В число наиболее часто используемых и популярных систем имитационного моделирования входят такие системы: MathWorks.MATLAB and Technical Computing, eM-Plant, AnyLogic, GPSS, Powersim, Aimsun, NS-2, Tecnomatix Plant Simulation, Transyt, NS-2, PTV Vision VISSIM, Arena, simuLab.

Метод имитационного моделирования используют для оценки эффективности возможных алгоритмов управления системами, для оценки разных вариантов структуры системы, а также для оценки влияния изменений разных параметров систем. Имитационное моделирование может быть основой алгоритмического, структурного и параметрического синтеза систем в тех случаях, когда необходимо создать систему с определенными характеристиками и заданными ограничениями.

Эффективность имитационного моделирования возможно оценивать с помощью ряда критериев, включая достоверность и точность полученных результатов моделирования, время создания и работы с исследуемой моделью, затраты машинных (компьютерных) ресурсов, денежная оценка разработки и последующей эксплуатации модели. Наиболее правильной и точной оценкой эффективности имитационной модели является сравнение полученных результатов с реальным исследованием, то есть с результатами моделирования на реальном объекте.

Очень часто в процессе исследования той или иной сложной системы возникает ситуация, когда изучаемый объект представлен не одной моделью, а в виде полимодельного комплекса, который включает в себя различные комбинированные модели (например, логико-лингвистические, аналитико-имитационные, логико-алгебраические и т.д.). Группа комплексных методов включает в себя такие методы, как комбинаторика, ситуационное моделирование, топология, графосемиотика и др. Они сформировались путем интеграции экспертных и формализованных методов.

Дополнительной проблемой при создании комплексных моделей отдельных сложных систем выступает фактор времени, особенно это заметно при исследовании объектов-оригиналов, у которых наблюдается характерная структурная динамика под воздействием разного рода причин, таких как внутренние или внешние, объективные или субъективные. В подобных условиях следует осуществлять адаптацию структур и параметров изучаемой модели с целью обеспечения ее полезности и точности. Для этого на этапе проектирования полимодельного комплекса необходимо включать в состав такой модели дополнительные параметры, которые позволят на стадии непосредственного использования модели управлять ее качеством, уменьшат ее чувствительность и чувствительность показателей качества в связи с изменением структуры, состава либо содержания первоначальных данных.

При моделировании сложных систем (объектов) возникает вопрос обеспечения необходимой адекватности моделирования. Для решения указанного вопроса в практической деятельности следует проводить оценку моделируемой модели по отношению к реальному объекту по признаку адекватности. Неадекватность может быть следствием таких факторов, как неточные первоначальные предпосылки при определении типа модели и структуры модели, вычислительные погрешности в процессе обработки результатов исследования, погрешности измерений, возникающие при проведении экспериментов. Последствием использования неадекватной модели могут быть, прежде всего, недостижение поставленных целей, невыполнение запрограммированных задач, потери различных видов ресурсов и возникновение аварийных ситуаций на реальных объектах.

Технология комплексного моделирования включает в себя следующие этапы: проведение теоретических исследований; определение методологии структурного и поведенческого анализа моделей; аналитическое изучение моделей; создание математической модели; создание моделирующего алгоритма; разработка машинной (компьютерной) модели; изучение имитационной модели; получение и анализ результатов. Результаты различного рода исследований показывают, что применение разнородных моделей в структуре соответствующих полимодельных комплексов обеспечивает повышение адаптивности, гибкости исследуемой имитационной системы, а также позволяет скомпенсировать недостатки одного типа моделей достоинствами другого типа моделей.

В последнее время для моделирования сложных систем и процессов, под которыми следует понимать любую систематическую деятельность, начали применять программные системы, позволяющие осуществлять графический ввод структурных схем моделируемых сложных систем и бизнес-процессов.

Для разных предметных областей и сфер деятельности разрабатываются свои полимодельные комплексы.

В современном мире имитационное моделирование и комплексное моделирование сложных объектов следует рассматривать как обязательный этап в процессе принятия определенных управленческих решений в условиях активного использования современных информационных систем и технологий в деятельности. Вместе с тем развитие имитационного моделирования и комплексного моделирования сложных объектов не должно являться самоцелью. Необходимо, чтобы имитационные модели и полимодельные комплексы обеспечивали поиск наиболее оптимальных режимов и решений для поставленных задач.

ТЕОРИЯ КВАЛИМЕТРИИ МОДЕЛЕЙ И ПОЛИМОДЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

На сегодняшний день одним из важнейших направлений научно-технической революции выступает автоматизация и информатизация деятельности человека, проектирование и развитие информационных и автоматизированных систем, в связи с чем и в области информационных технологий возрастает значение понятия «качество». В последние годы интенсивно развивается такая отрасль научного знания, как качествоведение, основным разделом названного знания выступает квалиметрия. Квалиметрия включает в себя методологические и методические положения количественной оценки качества продукции, средств обеспечения единства форм оценивания указанного качества и достижения требуемой точности.

Основным понятием квалиметрии выступает термин «качество», под которым понимается совокупность характеристик объекта, определяющих его способность удовлетворять установленным или предполагаемым потребностям. В сфере информационных технологий также проводятся исследования, связанные с оценкой качества продукции, в результате которых разработаны модели, соответствующие критерии, показатели и метрики программных средств и продуктов. Причем необходимо создание подобных средств оценки качества моделей (алгоритмов, методов, моделей, методик) на более ранних стадиях моделирования.

В целях управления качеством и оценивания моделей необходимо осуществить комплекс определенных действий, который должен включать в себя:

- осуществление описания, классификации и отбора системы показателей, позволяющих оценить качество модели или полимодельного комплекса;

- создание обобщенного описания различных типов моделей, прежде всего макромоделей, которое позволит определить соответствия и взаимосвязи между моделями, а также сравнить и упорядочить эти модели, применяя различные метрики;

- разработку с использованием числовых и нечисловых шкал комбинированных методов оценивания показателей качества как отдельных моделей, так и полимодельных комплексов в целом;

- создание специальных методов и алгоритмов решения задач мультикритериального анализа, выбора предпочтительных моделей и управления качеством моделей и полимодельных комплексов.

Основой квалиметрии моделей выступает определение качества моделей, под которым понимается свойство или совокупность свойств модели, обуславливающих ее пригодность для использования по назначению.

В теоретическую базу квалиметрии входят прямые и обратные задачи, которые представляют собой задачи анализа качества и синтеза продукции требуемым (заданным) свойствам (требованиям). Базовая основа решения прямой задачи есть измерение качества продукции, базовая основа решения обратной задачи – управление качеством продукции в целях достижению ею необходимых свойств. Применительно к квалиметрии моделей следует учитывать, что модели – это предмет некой разработки и они создаются для анализа и синтеза уже существующих (реальных) объектов-оригиналов, вследствие чего для квалиметрии моделей весьма важную роль играют построение и решение именно обратных задач.

Важным направлением квалиметрии моделей выступает анализ базовый свойств моделей, которые впоследствии должны быть оценены в процессе сравнения и выбора. К числу таких свойств относят:

1) *адекватность (сравнимость)* – модель должна обладать названным свойством по отношению к тем или иным свойствам оригинального объекта. У сложных систем одна модель может отображать один какой-либо аспект, вследствие чего термин «адекватность» будет применим только по отношению к данному свойству. Оценка адекватности в рамках полимодельного комплекса должна осуществляться с учетом того, каким образом могут достигаться цели модели-

рования на данной модели, а также какова адекватность взаимодействия отдельных моделей в составе полимодельного комплекса;

2) *оптимальность и простота* модели. Указанное свойство тесно связано с предыдущим. В процессе исследования возникают ситуации, когда для достижения адекватности модели или полимодельного комплекса требуется усложнение модели. Но при этом, если существует возможность выбора из нескольких вариантов моделей, обладающих приблизительно одинаковой адекватностью, следует использовать более простую модель;

3) *гибкость* модели представляет собой введение в состав изучаемых моделей структур и параметров, которые возможно изменять в указанных диапазонах, чтобы достичь поставленной цели моделирования;

4) *проблемная ориентация* создаваемых моделей. Проведенные исследования в области моделирования показали, что проектирование и создание универсальных моделей, включающих в себя разнообразные предметные области, является трудной задачей, вследствие чего наиболее правильным будет создание моделей, универсальных по поддерживаемым функциям и специализированных по классу объектов моделирования.

К числу других свойств моделей, которые в рамках квалиметрии должны быть исследованы, могут быть отнесены надежность, унификация, простота, открытость и доступность модели, их интеллектуальность, эффективность машинной реализации, сложность, идентифицируемость, устойчивость, чувствительность, управляемость, наблюдаемость моделей, развиваемость (самоорганизация и самообучение).

Анализ и оценивание моделей и их свойств происходит в процессе моделирования, которое выступает в качестве одного из целенаправленных процессов. В связи с этим возможно выделить такие исследования, в рамках которых производится рассмотрение проблем анализа и оценивания качества технологий моделирования и проблемы определения оптимальных технологий создания (моделирования) как отдельных моделей, так и полимодельных комплексов. Важное значение имеет также и эффективность технологии системного моделирования, которая может быть подразделена на такие составляющие, как оперативность, результативность и ресурсоемкость. Оперативность представляет собой затраты временного характера для выполнения моделирования в целях получения установленного целевого эффекта. Результативность определяется объемом и качеством информации, получаемой в процессе моделирования, а также способностью моделирования достигать конкретной цели (конечного эффекта). Ресурсоемкость характеризует затраты всех видов возможных ресурсов при применении указанной технологии моделирования.

Развитие квалиметрии осуществляется по двум базовым направлением: изучение общих вопросов квалиметрии моделей и управление качеством модели (полимодельного комплекса).

9.2. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Методология имитационного моделирования заключается в гармоничном сочетании эксперимента и реальной, физически существующей системы, а именно использования в работе её имитационной модели. Метод сочетает в себе экспериментальный подход, а также использует работу вычислительной техники (различных видов ЭВМ) и учитывает её особенности.

Важно понимать, что имитационное моделирование является видом компьютерного моделирования, существование которого обусловлено развитием IT-технологий и появлением ЭВМ на их базе, приведшим в итоге к становлению имитационного моделирования как вида компьютерного моделирования. Фокус на природу моделирования и его историю обуславливает применение имитации, или, другими словами, эксперимента, в процессе исследования.

В процесс имитационного моделирования входят четыре основных элемента, среди которых реальная система, логико-математическая модель объекта исследования, имитационная модель, электронно-вычислительная машина, на которой осуществляется исследование (имитация) – вычислительный эксперимент.

Метод имитационного моделирования изучает реальную систему объекта и разрабатывает её логико-математическую модель, необходимую для исследования и проведения эксперимента. Экспериментальный аспект исследования определяет существование логико- или логико-математических моделей, которые описывают процесс изучения. Имитационная модель даёт возможность воспроизводить объекты с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени событий, или динамики взаимодействий, что является её особенностью.

В имитационном моделировании не что иное, как модель отражает структуру системы, подлежащей имитации, а ее функционирование имитируется (отображается) на сформированной модели. В связи с этим построение имитационной модели есть отражение структуры и процессов функционирования моделируемой системы. Имитационная модель включает две составляющие:

1) статическое описание системы, являющееся описанием ее структуры. В процессе разработки модели нужно провести структурный анализ моделируемых процессов;

2) динамическое описание системы, или отражение характера связей ее элементов, в процессе деятельности. При динамическом описании необходимо построение функциональной модели динамических процессов объектов, подлежащих моделированию.

В имитационных моделях динамика осуществляется при помощи механизма проигрывания модельного времени. Статистическое и динамическое описание дают возможность наглядно проследить порядок взаимодействия элементов системы, что является отличительной особенностью метода имитационного моделирования. Таким образом, для составления имитационной модели системы, нужно:

- интерпретировать реальную систему, в множество взаимодействующих частей;
- отразить функционирование отдельных элементов при помощи алгоритмов;
- использовать статистическое описание: отразить процесс взаимодействия элементов системы внутри неё и со внешней средой.

Выделение и отражение состояний системы – это самый значимый момент в имитационном моделировании. Набор переменных состояний характеризует систему, всякая совокупность переменных описывает определённое состояние, что означает, что через изменение значений этих переменных возможна имитация перехода системы из одного состояния в другое. Из всего вышесказанного можно вывести еще одно определение понятия «имитационное моделирование». Это представление динамического изменения системы с помощью её перехода от одного состояния к другому, в соответствии с определенными операционными правилами, это динамическое отражение перемен в состоянии системы с течением времени.

Итак, логическая структура реальной системы находит отражение в модели, а также имитируется динамика взаимодействий подсистем в моделируемой системе. Это важный, но не единственный признак имитационной модели, исторически предопределивший не совсем удачное название методу, который серьезные исследователи чаще называют системным моделированием.

Методология комплексного моделирования включает в себя инструменты для описания, анализа и проектирования, направленные на снижение рисков в случае роста сложности бизнеса, а также IT-проектов, с ним связанных. Моделирование необходимо применять на начальных этапах обозначения бизнес-требований. Это важно для скорейшего обеспечения проверки архитектурных концепций и сокращения дополнительных рисков и затрат.

Комплексное моделирование используется для:

- воспроизведения концептуальных, логических и физических моделей исследуемого объекта (как правило предприятия), которые впоследствии можно использовать для повышения продуктивности;
- привязки бизнес-требований к управлению инфраструктурой.

Комплексное моделирование наглядно предоставляет модели концептуальных, логических и физических частей объекта. Рассматривая комплексное моделирование с точки зрения ИТ, можно увидеть, что оно содержит как информацию о предприятии, так и о порядке и способе её использования для поддержания бизнеса.

К преимуществам работы комплексного моделирования можно отнести то, что пакет логических моделей данных и моделей процессов обеспечивают зрительное представление (визуализацию) и описание исследуемого объекта. Более подробный анализ возможен после получения вышесказанных условий (визуализация и описание) и может содержать такую информацию об объекте, как анализ затрат, анализ пробелов и последствий, необходимость оптимизации процессов, анализ временных периодов и другое.

Комплексное моделирование предоставляет описание и анализ уровня развития предприятия и способно отразить важную информацию о системах, которые в нём существуют, и в том числе дать руководству возможность здраво оценить состояние бизнеса до принятия ключевых для предприятия решений, например о крупных вложениях. Эффективные методы и технологии моделирования организуют оптимизацию процессов, что в свою очередь даёт предприятию, специалистам сферы IT и инженерам значительные преимущества.

Эффективные методы и технологии моделирования позволяют значительно снизить затраты, это связано с тем, что они позволяют выявлять пробелы или пропущенные этапы, определять нужные ресурсы, вычислять затраты, измерять время цикла и время получения отдачи, определять функциональность, выявлять потенциально зоны риска.

Помимо всего вышесказанного, комплексное моделирование позволяет предприятиям выявлять пробелы в схеме динамики процессов и данных, находить наиболее эффективные решения при помощи параллельной интеграции процессов и данных, чётко видеть и определять необходимые для бизнеса изменения в рамках предприятия и делиться полученной информацией, добиваться скорейшего представления своего товара на рынке, грамотно управлять затратами.

Имитационное моделирование является наиболее всеобъемлющим инструментом в области финансового планирования, стратегического планирования, бизнес планирования, управления организацией, проектирования и реинжиниринга, различных других ветвей науки управления, исследования процессов.

С каждым годом имитационное моделирование становится всё более незаменимым инструментом, необходимым для анализа и принятия решений в Ситуационных и Стратегических центрах различного назначения, в Системах поддержки принятия решений (СППР).

Методологические и технологические подходы к построению Систем поддержки принятия решений основываются на использовании многоэтапного процесса выбора решения, процесс включает следующие ступени:

- определение структурных особенностей территориальных данных, поступающих в процессе мониторинга с применением концепции Хранилища Данных;

- анализ закономерностей и визуализации определенных в данных зависимостей при помощи средств Интеллектуального Анализа Данных и OLAP (online analytical processing) технологий.

Обобщенная имитационная модель предмета изучения является центральным компонентом – системообразующей и интегрирующей (объединяющей) основой всего процесса принятия решений в подобных системах. Обобщенную имитационную модель реализуют в СППР на основе ряда взаимосвязанных имитационных и оптимизационных моделей с развитыми динамическими и информационными связями между моделями всех уровней. Нельзя не отметить непосредственное участие экспертов в целенаправленном модельном изучении и применение ими вычислительных инструментов на основе компенсационного сочетания экспериментального подхода имитационного моделирования с различными аналитическими методами: статистическими, балансовыми, логистическими, итерационными имитационно-оптимизационными вычислительными процедурами и интеллектуальными технологиями.

Посредством определения основных направлений деятельности предприятия, ЛПР (лицо, принимающее решение), оперируя инструментами СПР (системы принятия решений), которая находится на верхушке информационного устройства организации, анализирует текущее положение бизнеса и формирует цели и задачи для последующей деятельности.

Высокая степень личной неопределённости и необходимость создания общих согласованных решений отражает процесс принятия решения на этом уровне. Неопределенность прежде всего объясняется:

- колебаниями в выборе инструментов для достижения цели;
- неуверенностью при выборе и оценке показателей развития;
- сомнениями при отборе аналитических методов и прочее,

и преодолевается за счет широкого использования в СПР вычислительных операций и методов, которые основаны на учёте субъективных оценок и предпочтений руководства. Такие инструменты, как субъективная вероятность, нечеткие множества, нейронные сети, кусочно-линейная аппроксимация и другие методы могут быть тут эффективны.

Поиск и формирование согласованных, общих решений, принятых коллективно производится как за счет специальных технологий в СПР для помощи в поиске групповых решений и коллективной работы (GDSS, GSCW-системы), так и использованием определенных имитационных методов и экспертных оценок, которые ориентированы на разработку совместных и согласованных решений.

После определения задач и желаемых целей к работе приступают менеджеры и системные аналитики, которые работают на следующем уровне Информационной системы предприятия – СППР – системы поддержки принятия решений, используя широкий ассортимент компьютерных инструментов и методов и свой личный опыт. Их целью является проигровка основных ступеней процесса принятия решений, которые связаны с поиском и воспроизведением возможных решений (альтернатив), осуществлением динамического компьютерного анализа возможных последствий решений, которые были приняты, оценкой и выбором наилучшего пути развития.

Методы системной динамики прежде всего, а также динамические системы структурного моделирования являются основными системообразующими факторами в процессе определения решения, это связано с тем, что задачи, которые решаются на уровне стратегического планирования сложны и многофакторны.

Технологии Data Mining – это статистические методы, включающие регрессионный и кластерный анализ, они имеют широкую область применения, и используются в момент формирования базовой имитационной модели стратегического развития организации, при определении основного внутреннего состава и функций системы, которую моделируют, а также при анализе внешней среды.

Полученная информация (входная информация), основанная исключительно на реальных данных и знаниях, даёт возможность провести корректную параметризацию динамической имитационной модели, и используется для формирования модели. Данные и знания могут храниться в базе СППР, что значительно упрощает последующие процедуры по идентификации имитационной модели.

Полученная в результате вышеперечисленных операций обобщенная имитационная модель организации представляет собой инструмент экспериментального оценивания ряда сценариев и стратегических альтернатив, которые формируются экспертами. При помощи использования IT-технологий, имитационно-оптимизационных процессов, генетических алгоритмов, экспертных и нечетких систем, в том числе традиционных методов оптимизации, может быть сформирован ряд решений, с учётом результатов экспериментального имитационного исследования, на основе проведённой оценки возможных решений в соответствии с предпочтениями ЛПР и согласования групповых решений в СППР.

Решения по другим элементам бизнеса, таким как логистика, производство, маркетинг, финансовое планирование и пр., принимаются в зависимости от выработанной базовой стратегии на основе ряда детализированных имитационных моделей.

К методам имитационного моделирования нельзя не отнести компьютерные системы. Наиболее популярными методами создания моделей являются программы, представленные на рис. 9.1 и табл. 9.1:

Рис. 9.1

Таблица 9.1

Программа	Возможности программ	Области использования	ОС
AnyLogic 5.0	Анализ: рисков; системной динамики, оптимизация, поддержка выбора решений, планирование	Производство, логистика, менеджмент, поставки, транспорт, IT, управление, наука, медицина и др.	Windows – NT; – 2000; – XP
Arena	Производство, логистика, организация поставок, медицина, бизнес сфера	Производство, медицина, логистика, управление бизнес-процессами и др.	Windows – 95; – 98; – ME; – NT; – 2000; – XP

Система Arena является одним из самых эффективных инструментов имитационного моделирования и самым популярным, исходя из данных графика. Arena помогает производить базовые операции, необходимые при имитационном моделировании: строить и проигрывать модели, а затем анализировать полученные данные.

AnyLogic представляет собой инструмент поддержки принятия решений для любой отрасли. Программа поддерживает все существующие виды имитационного моделирования и пользуется популярностью среди инженеров, аналитиков отделов и HR-менеджеров.

AnyLogic имеет расширенные возможности, и позволяет не только создавать разные модели, но и интегрировать их в одну.

9.3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИМИТАЦИОННОГО И КОМПЛЕКСНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим пример использования программы AnyLogic и смоделируем перемещение пассажиров, использующих наземный павильон метро. Прежде чем попасть внутрь метро, к поездам, посетители проходят через турникеты, которые проверяют наличие билетов. Пассажирам, не купившим заранее проходные талоны, необходимо их купить в терминале или в кассе, а затем получить доступ для прохода в метро. Данная модель покажет, как смоделировать поток пассажиров, и предоставит возможности Пешеходной библиотеки AnyLogic.

В первую очередь необходимо создать простую модель потока пешеходов, которые двигаются внутри здания метро.

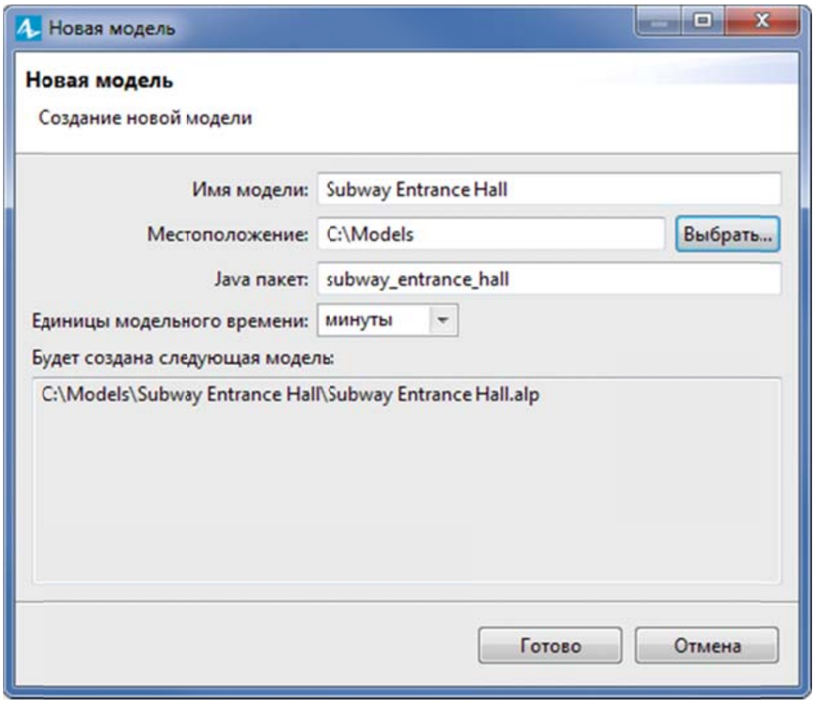


Рис. 9.2

В центре рабочей области находится графический редактор диаграммы типа агента *Main*.

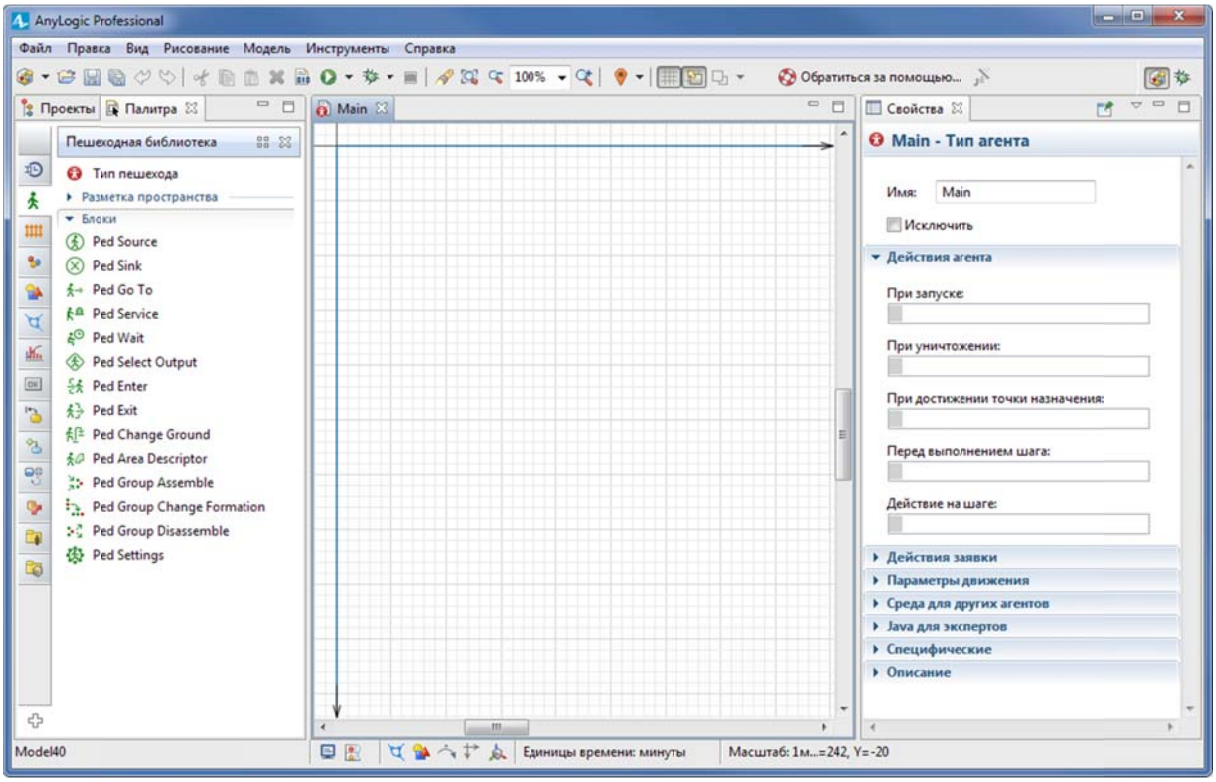


Рис. 9.3

Во время создания пешеходной модели, как правило, сначала добавляют схему моделируемого пространства (здания). После чего рисуют стены (при помощи определённых элементов разметки AnyLogic) и создают диаграмму процесса – процесса перемещения пассажиров внутри здания.

В данной модели будем использовать план-схему павильона метро:

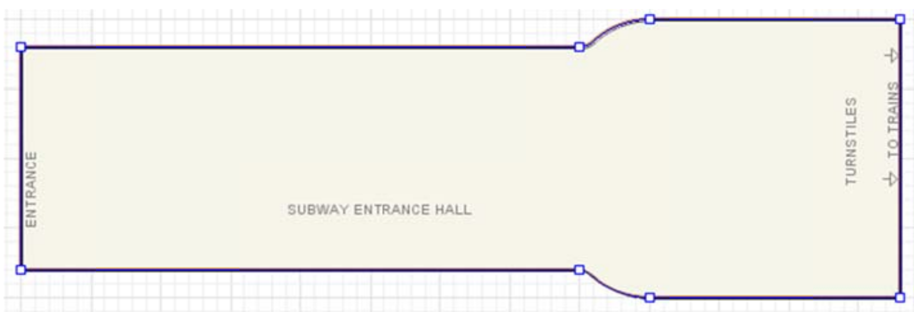


Рис. 9.4

Затем необходимо задать зоны входа и выхода пассажиров. Сначала очертим область входа – линию, где пассажиры будут появляться, при помощи специального элемента разметки *Целевая линия*.

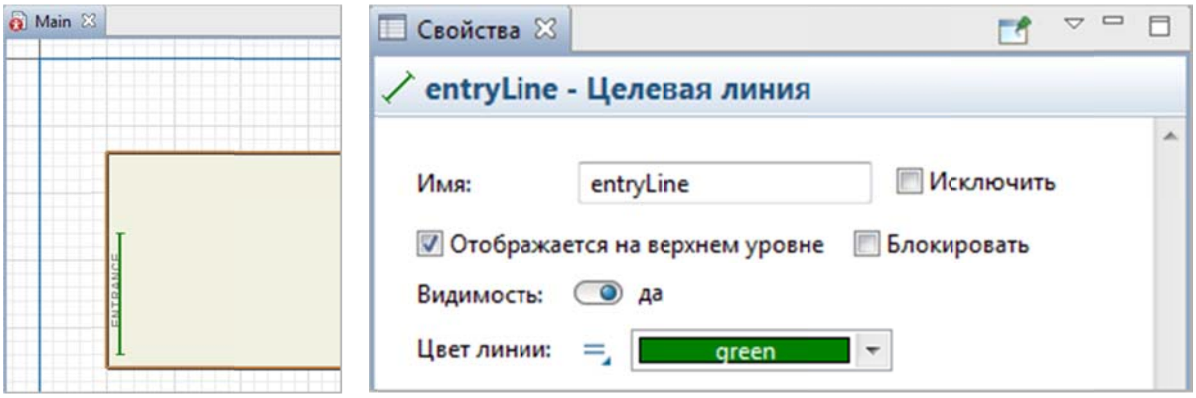


Рис. 9.5

Затем нарисуем еще одну целевую линию, определяющую место движения пешеходов после попадания в павильон метро, они, как правило движутся к поездам – TO TRAINS.

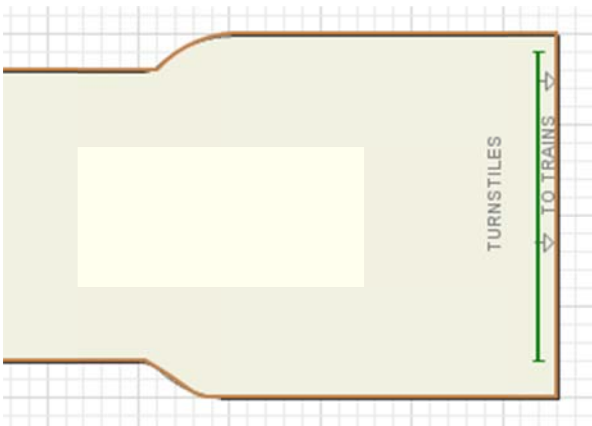


Рис. 9.6

Завершает создание модели, отображающей простейший пассажиропоток, создание диаграммы процесса подлежащего моделированию из блоков пешеходной библиотеки.

Начнём с простейшего процесса: пассажиры заходят на станцию, после чего и передвигаются в направлении поездов.

Диаграмма процесса в AnyLogic создается путем добавления предметов библиотеки из палитры на диаграмму типа агентов. Добавляем объекты Пешеходной библиотеки на диаграмму, после чего соединяем их (по примеру на рисунке). Для добавления на диаграмму объектов Пешеходной библиотеки необходимо открыть панель Палитра, щелкнув мышью по панели с её названием, после чего перетащить нужный объект на диаграмму типа агента.

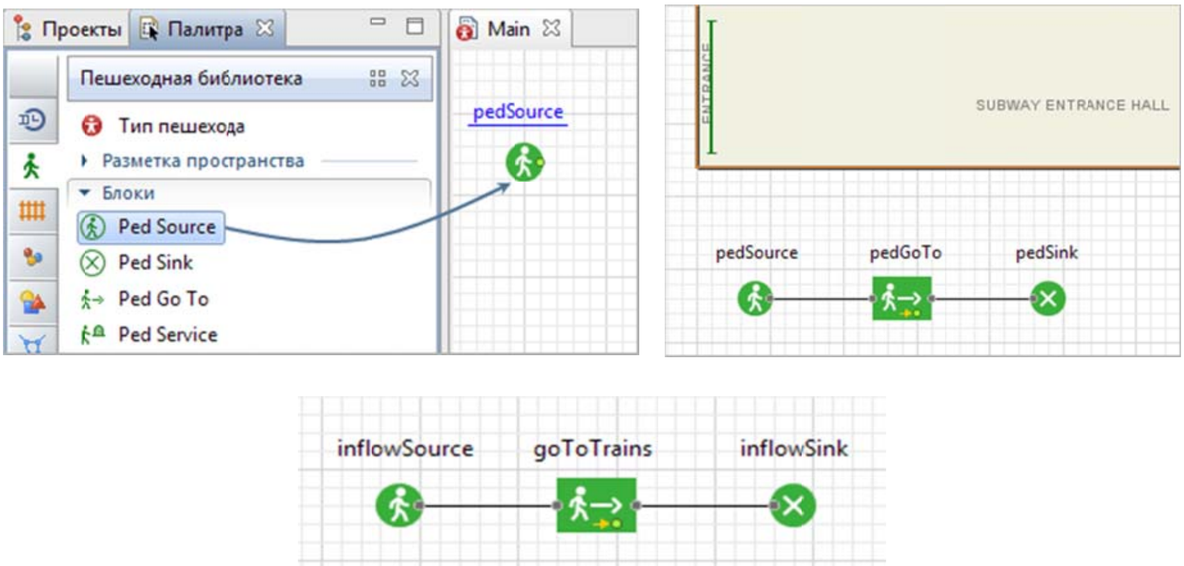


Рис. 9.7

После создания диаграммы выделяем блок inflowSource. В панели Свойства задаём место появления пассажиров. Выбираем entryLine из выпадающего списка Целевая линия и задаём 4000 в час в параметре Интенсивность.

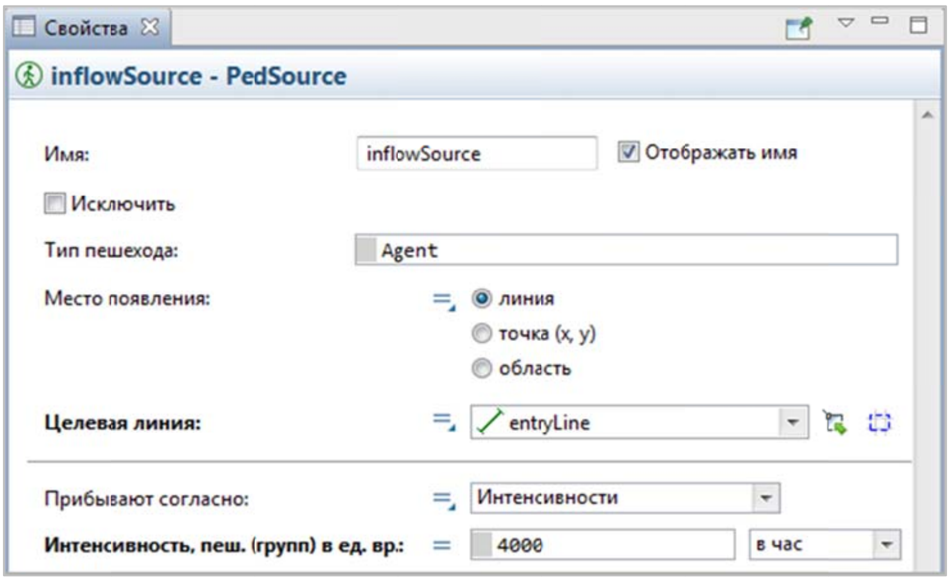


Рис. 9.8

Затем изменяем свойства объекта goToTrains – выбираем пункт назначения для людей. После того как они зайдут в здание, они будут двигаться к поездам метро. Укажите targetLine (название целевой линии, которую мы нарисовали второй) в списке «Целевая линия».

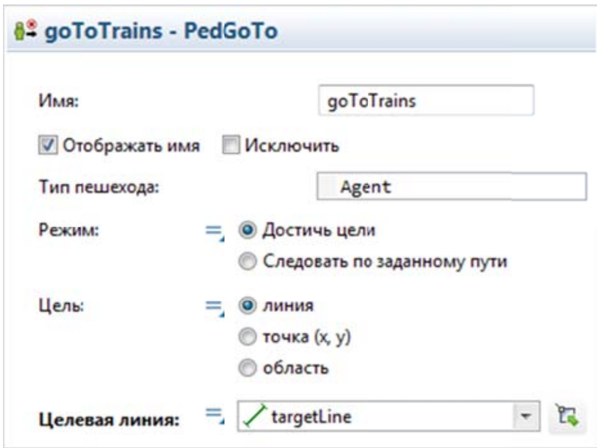


Рис. 9.9

Запускаем модель посредством нажатия кнопки Запустить в панели инструментов и выбираем из открывшегося списка необходимый эксперимент.

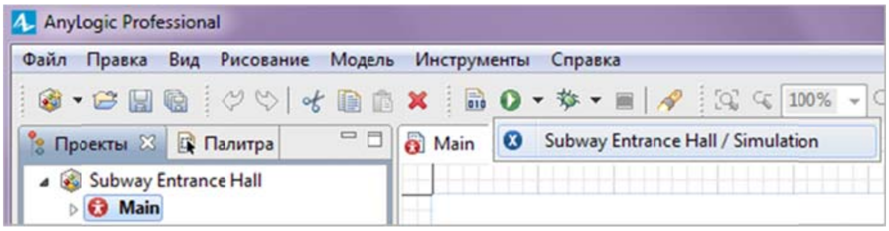


Рис. 9.10

После запуска модели откроется окно презентации этой модели, в котором будет проигрываться презентация запущенного эксперимента.

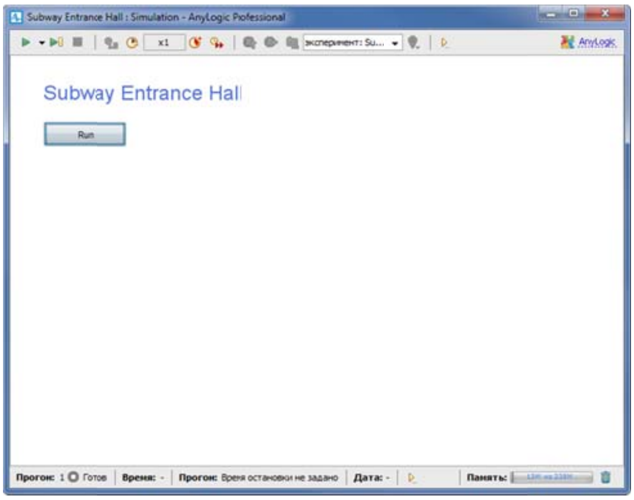


Рис. 9.11

Нажимаем кнопку запуска. Модель будет запущена и даст проследить динамику моделируемого процесса при помощи нарисованной презентации на диаграмме типа агента *Main*. Можно увидеть, что пассажиры входят в павильон и движутся по направлению к поездам метро.

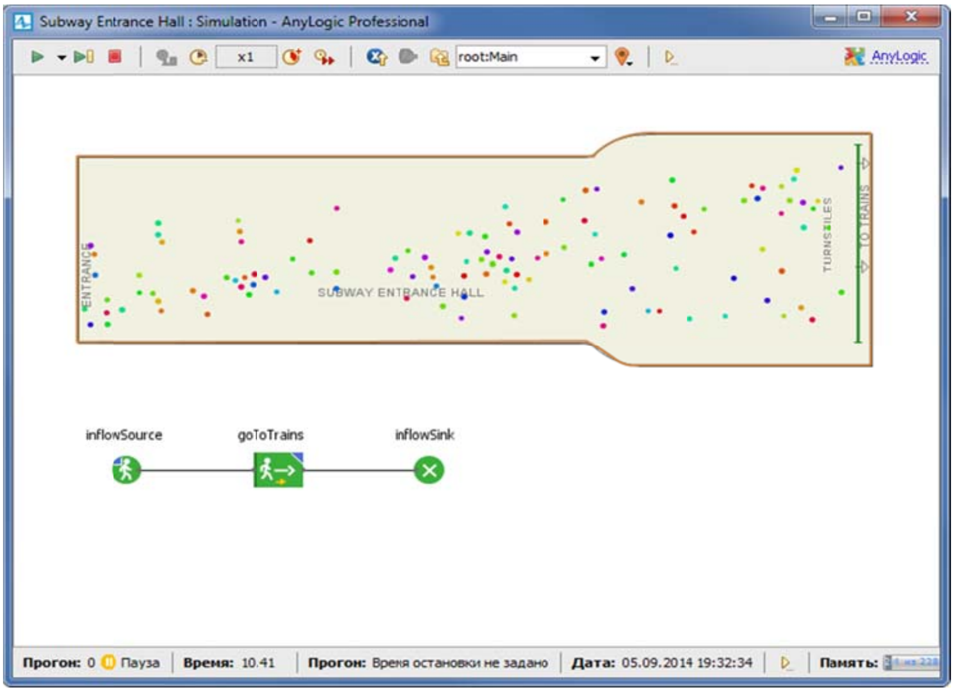


Рис. 9.12

2. Запуск движения пассажиров по Малому кольцу Московской железной дороги был направлен на значительное снижение нагрузки на дорожную сеть Москвы и разгрузку метро. Большинство станций этой дороги связано с метро и радиальными ветками железной дороги при помощи многофункциональных транспортно-пересадочных узлов (ТПУ). Потоки движения пассажиров на одном из узлов смоделировали посредством использования программы AnyLogic. Задача имитационного моделирования в данном случае – наглядное отображение процесса работы транспортно-пересадочного узла.

Цель моделирования – оценка работоспособности транспортно-пересадочного узла при пиковых нагрузках по пассажиропотоку для выявления причин ограничения пропускной способности (таких как коридоры, лестницы, эскалаторы, турникеты, кассы, терминалы продажи билетов). Работа ТПУ будет считаться нормальной, если за период времени с 8:00 до 9:00 часов утра (час пик) не возникнет трудностей при передвижении людей в ТПУ.

Решение

Модель ТПУ применяет пешеходную и железнодорожную библиотеки AnyLogic. Модель состоит из следующих элементов:

- северного и южного терминалов МКЖД;
- северного и южного павильонов метрополитена;
- северного и южного перехода из метрополитена к МКЖД;
- платформы метрополитена и МКЖД.

Пассажиры добираются до терминала пешком, приезжают на личном или общественном транспорте или добираются посредством пересадки между МКЖД и метро. Алгоритмы перемещения посетителей на вход и выход показаны на схемах ниже:

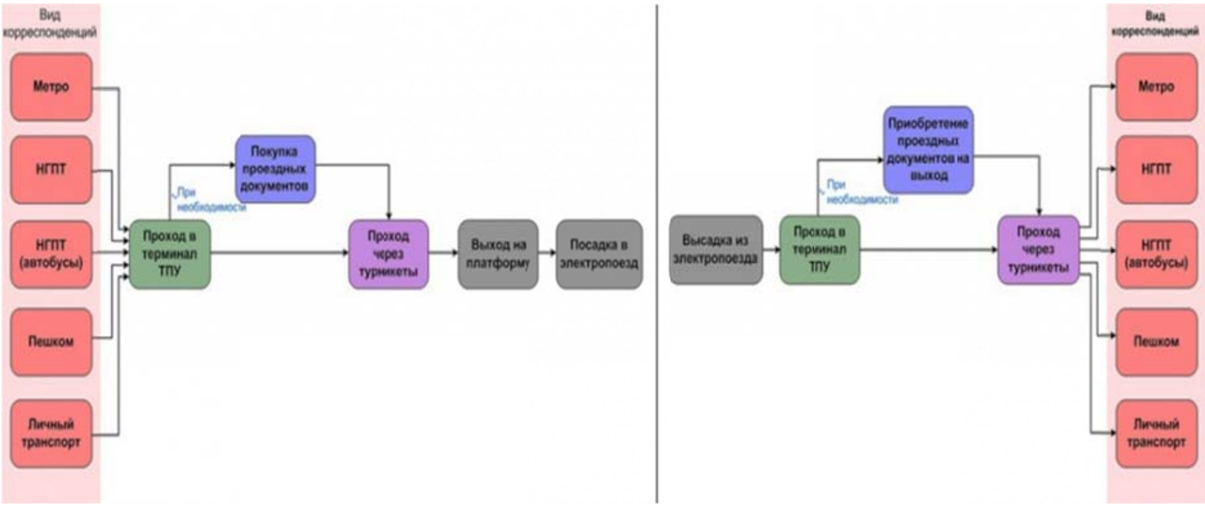


Рис. 9.13

Для создания корректной модели необходим учёт таких особенностей системы, подлежащей моделированию, как:

- неравномерность распределения нагрузки на терминалы;
- расписание прибытия поездов;
- неравномерное распределение пассажиров по вагонам (вагоны, которые ближе к выходу более наполненные);
- статистика количества пассажиров, у которых есть проездные документы и у кого они отсутствуют;
- процентное соотношение пассажиров, которые приобретают билеты в кассах или в терминалах;
- учёт льготных категорий граждан, покупающих билеты только в кассах при предоставлении необходимых документов (увеличивает время обслуживания в кассах).

Моделирование проводилось по исходным данным, среди которых были:

- технические характеристики поездов, эскалаторов, а также платформ и турникетов;
- распределение потока пассажиров по количеству входов и выходов, по кассам продажи билетов и автоматам по их покупке, а также распределение людей по составу поезда и платформе;
- время, необходимое для обслуживания одного человека в кассе или автомате по приобретению билетов, время прохождения через турникеты, время стоянки поезда на платформе.

Результаты: моделирование отразило эффективность рассмотренного планировочного решения и показало, что ТПУ полностью справляется с заданной нагрузкой. Несмотря на это, ожидается затруднение движения в условиях увеличения потока пассажиров, а также из-за очередей на кассах, из-за того, что они располагаются на пути основного пассажиропотока, а именно по направлению движения к турникетам.

Для обеспечения оптимизации нагрузки на кассы по продаже билетов и автоматы и для снижения в том числе продолжительности обслуживания необходимо осуществить ряд маркетинговых процедур, направленных на уменьшение количества проданных через билетные кассы талонов, а также на стимулирование покупки билетов в автоматах продажи и использования других современных технологий оплаты проезда. Необходимо также сократить количество терминалов продажи талонов из-за того, что часть из них так или иначе не будет использоваться даже в случае перераспределения пассажиров между кассами и автоматами.

Модель можно использовать в дальнейшем для определения оптимальных параметров других ТПУ. Более того, на основе модели можно проводить исследования поведения пассажиров при возникновении чрезвычайных ситуаций.

Имитация – это повторение, копирование и воспроизведение чего-либо. Модель – это предназначенный для изучения образец, описывающий предмет или явление, но отличный его от реальной формы. Модель в информатике – это система, изучение которой дает знания о другой системе. Моделирование – это один из методов познания, целью которого является отражение действительности и свойств объектов и процессов посредством абстрактных планов, изображений и алгоритмов. Объединив эти понятия, можно сформулировать определение имитационного моделирования: это метод изучения реальной системы путем представления ее в виде компьютерной модели и дальнейшее экспериментирование над ней. Полученная модель иллюстрирует систему логических и функциональных связей отдельных элементов внутри системы.

Имитационное моделирование представляет собой аналоговое моделирование, осуществляемое при помощи компьютерных программ. Имитационная модель – это комплекс специализированных программ, позволяющий с помощью математики и логики воспроизводить с возможной точностью некий сложный объект.

Основной целью имитационного моделирования является точное воспроизведение деятельности системы с возможностью ее анализа и получения необходимых результатов.

Множество задач можно решить при помощи имитационного моделирования, таких, например, как:

- оптимизация логистических затрат – эффективное расположение складов и оценка политики закупок;
- оценка инвестиционного процесса с выявлением рисков и прибылей;
- оценка эффективности предприятия и его отдельных структурных подразделений;
- анализ и создание проектов систем производства;
- формирование требований к техническим средствам и оборудованию;
- оценка вооружения и материально-технического обеспечения армии;
- создание проектов транспортных систем;
- создание проектов торговых площадок, больниц, заведений питания и других организаций обслуживания;
- проектирование постройки зданий и сооружений;
- поддержка принятия управленческих решений в бизнесе;
- анализ и синтез экономической или финансовой системы;
- имитация технической техники (тренажёров) для обучения.

Виды моделей. Структура и инструменты имитационного моделирования

Имитационные модели можно разделить на три вида (рис. 9.14).

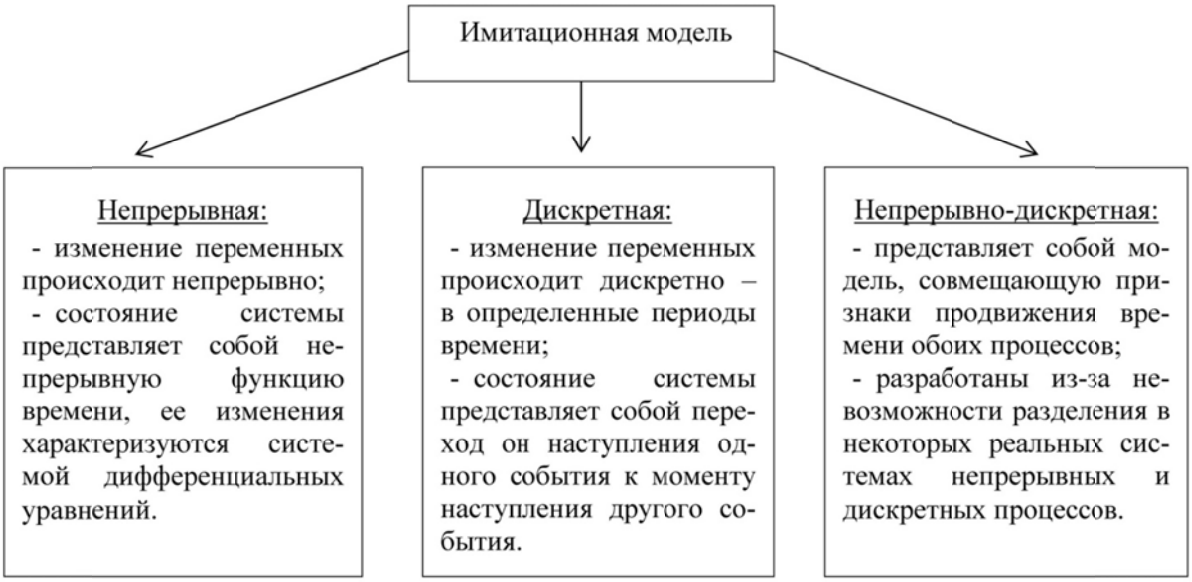


Рис. 9.14

Кроме того, среди имитационных моделей следует выделить:

- статические (в системе со временем не происходят какие-либо изменения);
- динамические (постоянно изменяющиеся);
- детерминированные (система не содержит случайных величин);
- стохастические (система полностью состоит из случайных величин).

Любой процесс имитационного моделирования можно представить в виде последовательных шагов, выполняемых исследователем системы:

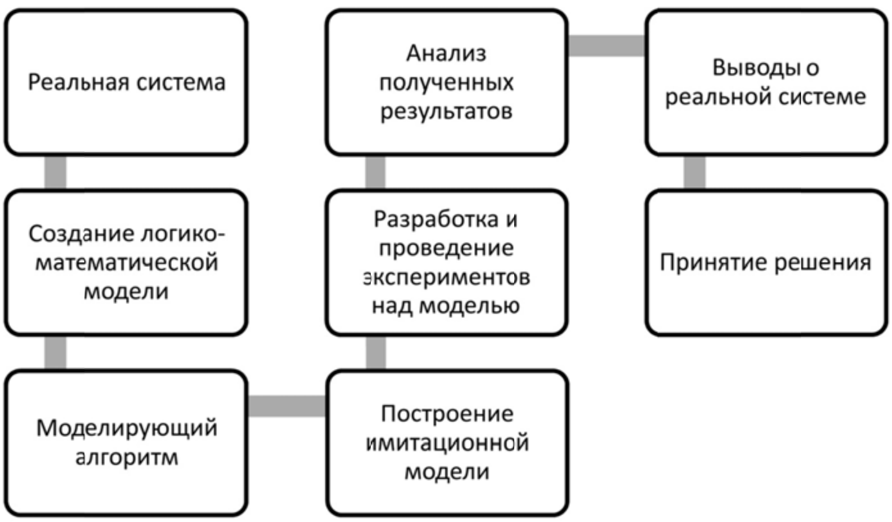


Рис. 9.15

В настоящее время существует огромное множество систем, позволяющих создавать имитационные модели и проводить на них эксперименты. В табл. 9.2 представлены и охарактеризованы основные из них.

Таблица 9.2

Пакет	Описание
Arena (производитель – Rockwell Software)	- Сферы применения: поставки, логистика, производство, военная промышленность, управление процессами в бизнесе; - Язык моделирования – SIMAN - 2D и 3D графика; - Проведения непрерывного и дискретного моделирования; - Возможность ABC-анализа (функционально-стоимостного), с учетом постоянных и дополнительных затрат; - Результат сохраняется в базе и выводится на экран в виде отчета.
ARIS (производитель – IDS Sheer AG)	- Сферы применения: подготовка к эксплуатации сложных информационных систем, анализ и управление бизнес-процессами; - Виды исследуемых систем: иерархические структуры организации, система целей управления и пр.; - Основные программные продукты предназначены для проектов по модернизации бизнеса, стратегического планирования управления, ABC-анализа, оценки рисков, принятия решений.
Witness (производитель – Lanner)	- Сферы применения: производственные системы, моделирование производственного процесса и хозяйственных решений - Позволяет анализировать исходные и полученные данные, определить структуру данных, улучшить точность модели, выявить связи внутри системы, повысить качество управленческих решений.
AllFusion Process Modeler (производитель – Computer Associates)	- Сферы применения: производство, процесс сборки, сфера обслуживания, транспорт и др. - Визуализация, анализ и усовершенствование процессов в бизнесе; - Помогает оценивать стоимость, повышать продуктивность, определять последовательность работ, составлять различные расписания, выбирать метод управления, управлять качеством; - Возможность создания иерархической модели для улучшения организации.
GPSS/World (производитель – Wolverine Software)	- Сферы применения: системы массового обслуживания - Дискретное и непрерывное моделирование - Анимация – от абстрактной визуализации до реалистичной; - Возможность одновременно управлять моделью и исследовать её - Отображение внутренних взаимосвязей в системе.

Окончание Таблицы 9.2

AnyLogic (производитель XJ Technologies)	- Сферы применения: процессы производства, транспорт, очереди, парковки и перекрестки, конструкции зданий, логистика и др.; - Включает в себя дискретно-событийное и агентное моделирование, и также системную динамику; - Возможность моделирования как очень мелких, так и крупных систем; - Можно использовать язык Java.
ITHINK (производитель – High Performance S**ystems)	- Сферы применения: финансы, политика, бизнес, производство; - Возможность моделирования всех этапов процесса производства; - Модель представляет собой взаимосвязь объектов, отображается на экране в виде блоков; - Возможность представления сложной системы как совокупность простых.

На рынке информационных технологий существуют различные моделирующие программы, например MATLAB, Simulink, Extend, AutoMod, MedModel, PowerSimStudio и др. Такое многообразие вызвано спросом на метод моделирования, позволяющий анализировать систему в самых мелких подробностях и принимать решения, способствующие повышению эффективности всей системы.

9.4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Система поддержки принятия решений – это автоматизированная компьютерная система, которая помогает человеку принять решение при невозможности самостоятельного полноценного анализа ситуации. Такая система позволяет принимать многокритериальные решения в сложных информационных средах. Многокритериальными являются такие решения, которые оцениваются одновременно по множеству параметров. Сложность принятия подобных решений заключается в обработке огромного количества информации, что возможно только при использовании современных вычислительных машин. Такие условия усложняют принятие аналитического решения, и поэтому применяют многосторонний анализ при помощи имитационного моделирования.

СППР позволяет выполнить следующие требования:

- упорядочить решения по степени их эффективности;

- выбрать из всех возможных вариантов наилучшее решение.

Одним из основных этапов принятия решения является выбор параметров, по которым будут оцениваться возможные решения. Составить набор таких параметров также помогает СППР.

Процесс принятия решения человеком можно разделить на четыре последовательных шага:

Рис. 9.16

Далее рассмотрим более сложные системы поддержки принятия решений, для реализации которых применяется имитационное моделирование. В повседневном управлении любым предприятием необходимо принимать решения. Для этого создаются и применяются на практике имитационные системы поддержки принятия решений. Один из вариантов их использования – стратегическое планирование и планирование инвестиций.

Для создания таких систем используют дерево целей (возможных вариантов), в котором цели и средства достижения разделены на линии, которые в итоге приводят к альтернативным управленческим решениям.

Выбор наилучшего решения происходит после прохождения следующих этапов:

1) определение критериев и целей развития предприятия;

2) разработка модулей имитационного моделирования экономической системы, с помощью которых отображается деятельность реальной системы;

3) внесение в модель параметров, характеризующих состояние системы на начало эксперимента;

4) определение и сортировка целей, задач и средств достижения необходимых результатов (улучшений);

5) построение дерева целей и определение всех точек разветвления алгоритмов достижения целей;

6) проведение эксперимента над имитационной моделью до момента начала первого разветвления, текущее состояние модели сохраняется в базе данных;

7) проведение эксперимента с каждым разветвлением алгоритма с сохранением текущего состояния;

8) итог – принятие решения о развитии системы, позволяющий получить лучшие значения выбранных изначально критериев оценки деятельности предприятия.

Дерево целей с альтернативными вариантами выглядит следующим образом:

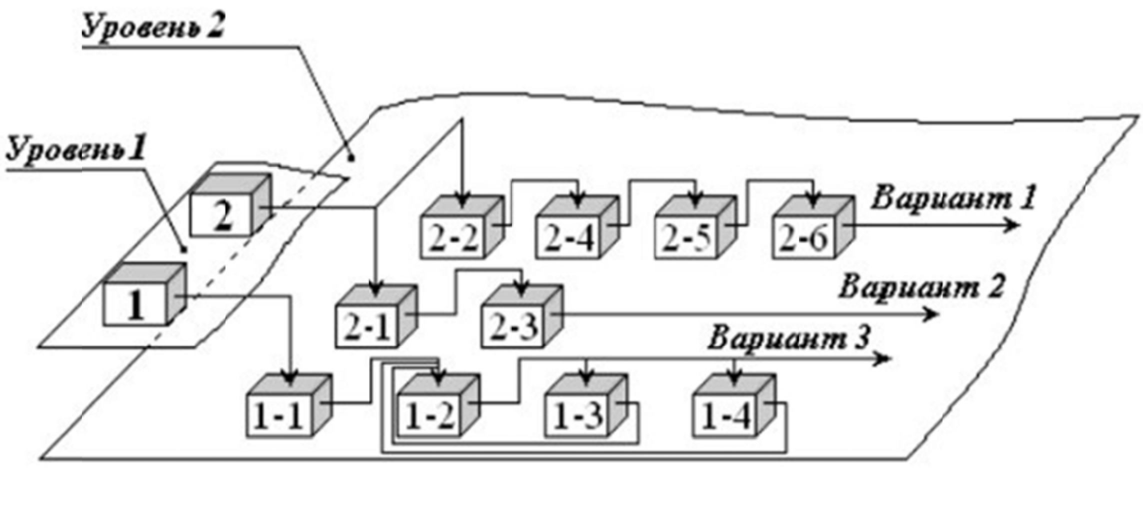


Рис. 9.17

Как видим, в результате экспериментов получается несколько возможных вариантов. Имитационные СППР позволяют не отбрасывать альтернативные решения, а применить их на имитационной модели, в то время как наилучший выбранный вариант применяется в реальной системе. Это позволит в короткий срок изучить поведения предприятия в изменяющихся условиях окружающей среды, что в свою очередь подтвердит или опровергнет эффективность выбранного решения.

Применение информационных технологий в стратегическом управлении позволяет сокращать время сбора и обработки данных и увеличить количество изучаемых показателей. СППР базируется на человеко-машинных операциях – при участии лица, принимающего решение (ЛПР) и компьютерных технологий (таких анализ данных DataMining, хранилища данных, OLAP-технологии).

При создании базовой имитационной модели стратегического развития, на этапе анализа структуры предприятия, внутренних процессов и внешних факторов используют DataMining, а именно: статистические методы, регрессионный анализ, кластерный анализ, оценка рисков, методы нечеткой логики, интеллектуальные технологии, представленные нейронными сетями и экспертными системами.

Анализируют внешние факторы и внутреннее строение системы, применяют стратегический анализ. В основном используются такие методы, как GAP-анализ, SWOT, SNW, PEST, PIMS. Внутреннее строение системы представляет собой основные процессы и субъекты деятельности предприятия: управление кадрами, финансы, производство, сбыт продукции, логистика и закупки, реклама и связь с общественностью. Изучив данные элементы организации, можно сделать выводы о преимуществах и недостатках предприятия и, исходя из этого, строить дальнейшие стратегии развития.

Сложность заключается в анализе внешних факторов, так как нужно рассматривать все, что может повлиять на развитие предприятия: государственная и мировая политика, экология, состояние экономики и социальной сферы, НТП, конкурентные фирмы, потребители, банки и др. Сложность также проявляется в субъективной оценке лица, принимающего решение и неопределенности оценки внешней среды.

Этапы стратегического планирование с применением имитационного моделирования СППР можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 9.18.

Динамический компьютерный сценарный анализ, который проводится на имитационной модели, является главным этапов всего эксперимента: проводится экспериментальная оценка множества возможных сценариев и стратегических альтернатив. Следующий шаг – принятие управленческого решения. С помощью имитационного моделирования можно разработать систему поддержки принятия решений в сфере управления, направленных на повышение эффективности производственного процесса. Повышение эффективности представляет собой получение наилучшего результата деятельности при запланированном уровне затрат, путем проведения мероприятий, разработанных с помощью информационных технологий. Имитационная модель СППР о повышении эффективности будет представлять собой цикл, отображающий модель реальной системы и динамическое экспериментирование над ней, с применением интеллектуальной обратной связи. Изобразить ее можно схемой, представленной на рис. 9.19.

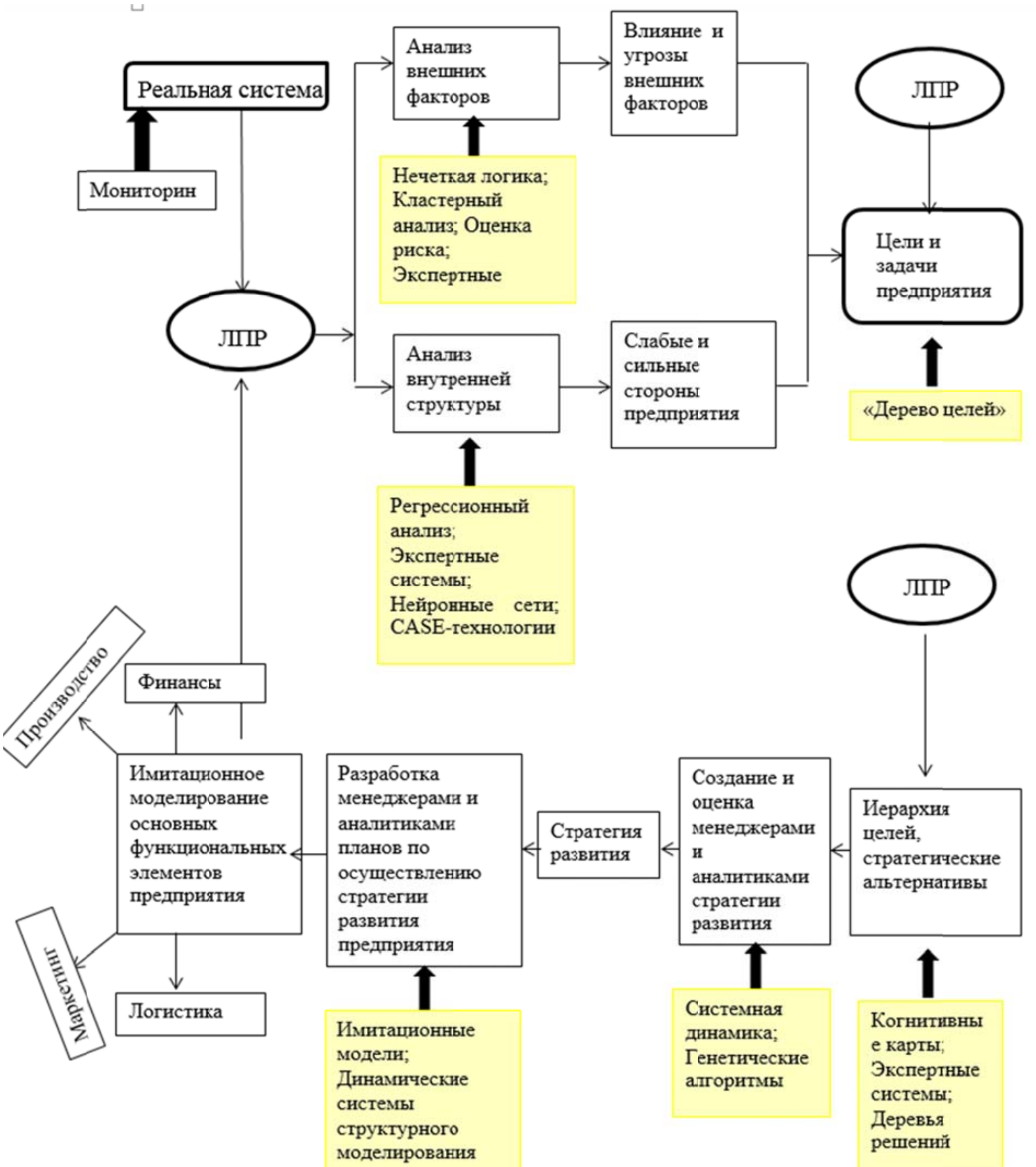


Рис. 9.18

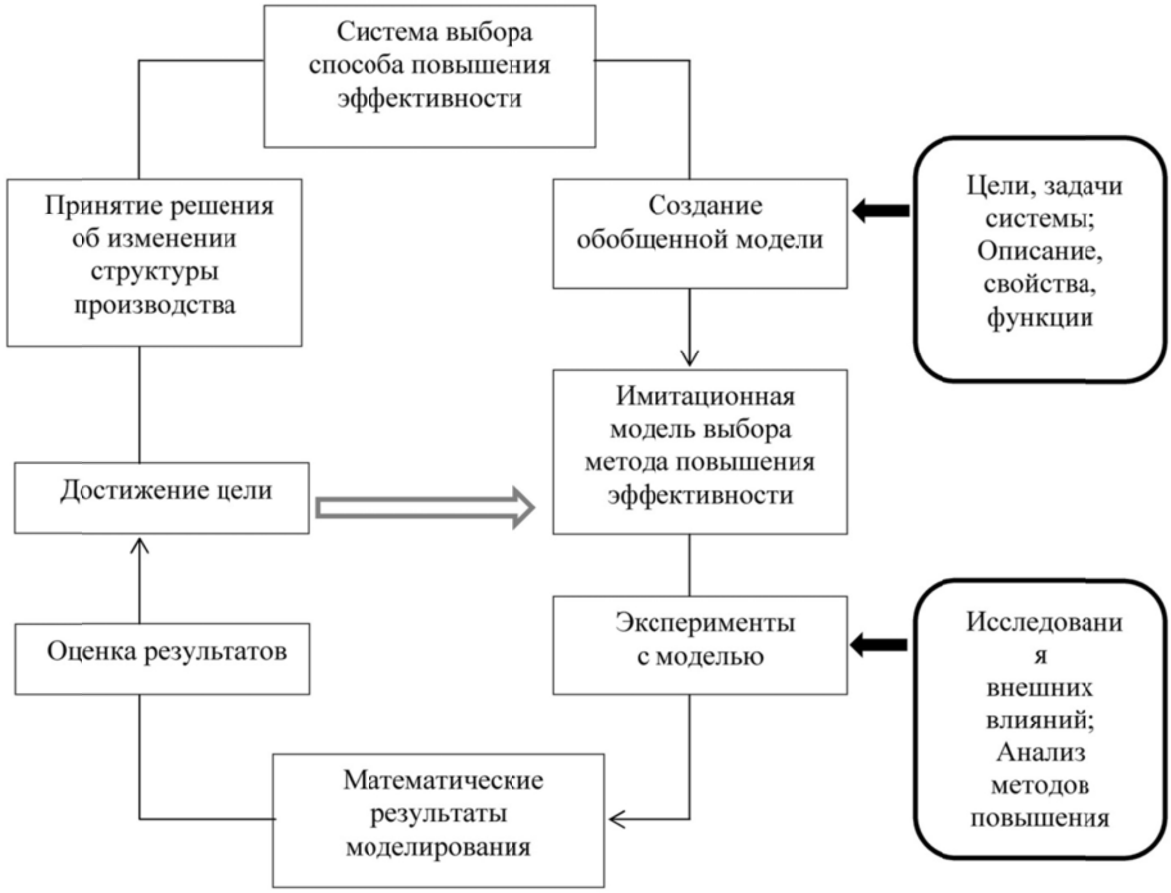


Рис. 9.19

Данная система позволяет перейти от теоретических проектов повышения эффективности к динамическому исследованию конкретных решений с последующим применением их на практике, в реальном производстве. Таким образом, мы определяем рациональные способ повышения эффективности производства из всех возможных, основываясь на специфике конкретного предприятия.

Для моделирования необходимо создать информационную базу, которая будет описывать все составляющие пути повышения эффективности и возможные препятствия.

Такую базу можно представить в виде блоков, состоящих из определенных данных (табл. 9.3).

С помощью данных информационной базы, можно провести экспериментирование над имитационной моделью. Цель этих экспериментов – обработка входных данных с логической точки зрения и, на основе полученных результатов, последующее моделирование решения о повышении эффективности производства.

Таблица 9.3

Блок	Элементы блока
1. «Формирование»	Структура производства и предприятия; Логистика, инфраструктура и экономические показатели производства; Характеристика производственного процесса (предмет и средства труда).
2. «Повышение эффективности»	Эффективность основных ресурсов производства: материалов, финансов, трудовых ресурсов, энергетических и информационных.
3. «Взаимодействие»	Исследование взаимодействия управления и подчинения; Анализ информационных потоков предприятия; Исследования взаимодействия между основными структурными подразделениями предприятия.
4. «Помехи»	Вероятность сбоя, опоздания или опережения процесса; Узкие места; Изменения в системе управления предприятием.
5. «Сравнение и выбор»	Сопоставление результатов применения пути повышения эффективности с первоначальным состоянием производства; Сравнение затрат с эффективностью результатов производства.

Далее представлен последовательный алгоритм имитационного моделирования системы выбора способа повышения эффективности производства (рис. 9.20).

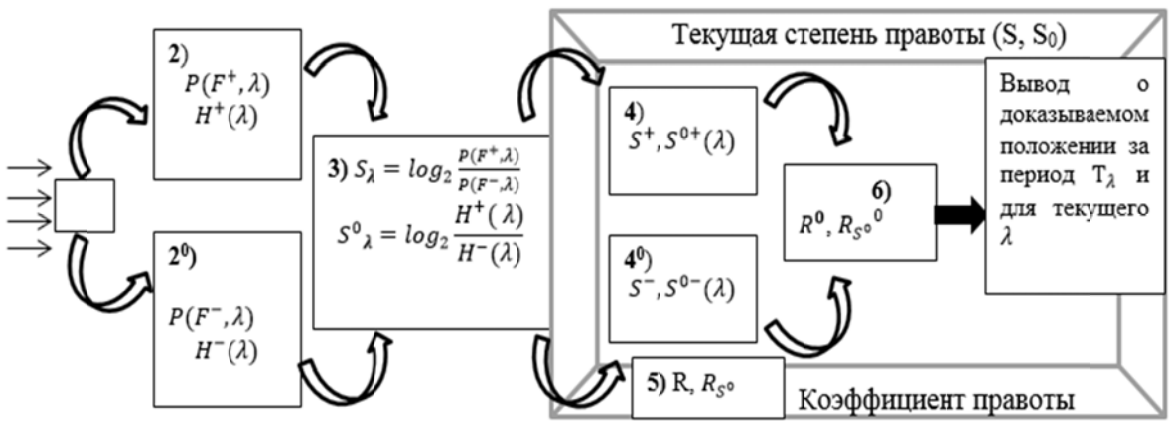


Рис. 9.20

Шаг 1. В модель включаем положение, требующее доказательства, вводим F и разбиваем на элементарные характеристики f, которые представляют собой изменения текущего состояния реальной системы.

Шаг 2. Далее все факты f, характеризующие состояние производства, также разбиваем на отдельные элементы.

Шаг 3. В матрице сравнения факты сливаются с доказываемым положением по критерию функционирования K, после чего выводятся совпадения и несовпадения характеристик (если таковые имеются). Если совпадений больше, тогда факт получает знак +, если совпадений меньше, то знак –.

Шаг 4. Далее определяем предварительную вероятность факта ($P_п$) – чем выше число совпадений, тем больше будет вероятность:

$$P_п = \frac{\beta}{Z(A)}$$

где β – удельный вес совпадений в общем числе сравнений, Z(A) – функция выбора пути определения предварительной вероятности (зависит от типа задачи).

Шаг 5. Для повышения качества имитационной модели следует сформировать и учесть при экспериментировании «блок опыта». Он представляет собой опыт работы исследуемого предприятия, других компаний и всей отрасти производства. Однако большое количество входной информации сильно скажется на результатах имитационного моделирования – возможных решений будет больше. Поэтому данный шаг при построении модели достаточно сложный и трудоемкий.

Шаг 6. Текущую степень правоты, доказывающую рациональность проектного решения, находим по следующим формулам:

$$S_{\boldsymbol{\lambda}} = log_2 \frac{P(F^+,\lambda)}{P(F^-,\lambda)}$$

$$S^0{}_{\boldsymbol{\lambda}} = log_2 \frac{H^+(\lambda)}{H^-(\lambda)}$$

Шаг 7. Далее определим коэффициенты правоты, которые показывают эффективность управленческого решения во времени, по формулам:

$$R = log_2 \frac{S(\lambda_{n+1})}{S(\lambda_n)}$$

$$R_{S^0} = log_2 \frac{S^0(\lambda_{n+1})}{S^0(\lambda_n)}$$

Шаг 8. В заключение имитационная модель выдает вывод о результативности исследуемого метода повышения эффективности во времени с помощью формул:

$$R = \frac{R^0(\Delta \mathrm{T}^{m+1})}{R^0(\Delta \mathrm{T}^{m})}$$

$$R_{S^0} = \frac{{R_{S^0}}^0(\Delta \mathrm{T}^{m+1})}{{R_{S^0}}^0(\Delta \mathrm{T}^{m})}$$

По окончании всех экспериментов необходимо интерпретировать полученные результаты (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Результаты расчетов			**Вывод**
Степень правоты S, S^0	**Коэффициент правоты R, R_{S^0}**	**Вероятности P(F), H**	
<0	<0	F^-, H^-	Проектное решение не рационально. Его следует отклонить.
<0	>0	F^-, H^-	Доказываемое положение не оптимально, однако наблюдается тенденция увеличения рациональности, следовательно, в дальнейшем можно получить выгоду.
>0	<0	F^+, H^+	Положение доказано, однако присутствует тенденция уменьшения рациональности, следовательно, применяя его, нужны дополнительные ограничения.
>0	>0	F^+, H^+	Положение доказано и возможно его применение на практике. Способ повышения эффективности производства максимально рационален.

Используя описанную имитационную модель, принимаются конкретные управленческие решения. Оценку качества результатов таких решений проводят с помощью одного или нескольких экономических параметров производственной деятельности, например, прибыли и темпа роста производительности труда.

Такие задачи решаются с применением компьютерных систем оценки управленческих решений, которые включают в себя не только СППР, но и системы поддержки исполнения решений, которые реализуют этап анализа эффективности принимаемого управленческого решения.

Имитационное моделирование СППР позволяет значительно сократить время для принятия решения, при этом обрабатывая большое количество информации в реальном времени. Это необходимое качество при моделировании экстремальных ситуаций. К примеру, процесс ликвидации последствий ядерного взрыва. Эффективность решения достигается в первые дни, дальнейшие действия и понимание всей ситуации можно определить, анализируя имитационную модель. Тогда будут сформулированы последующие возможные решения.

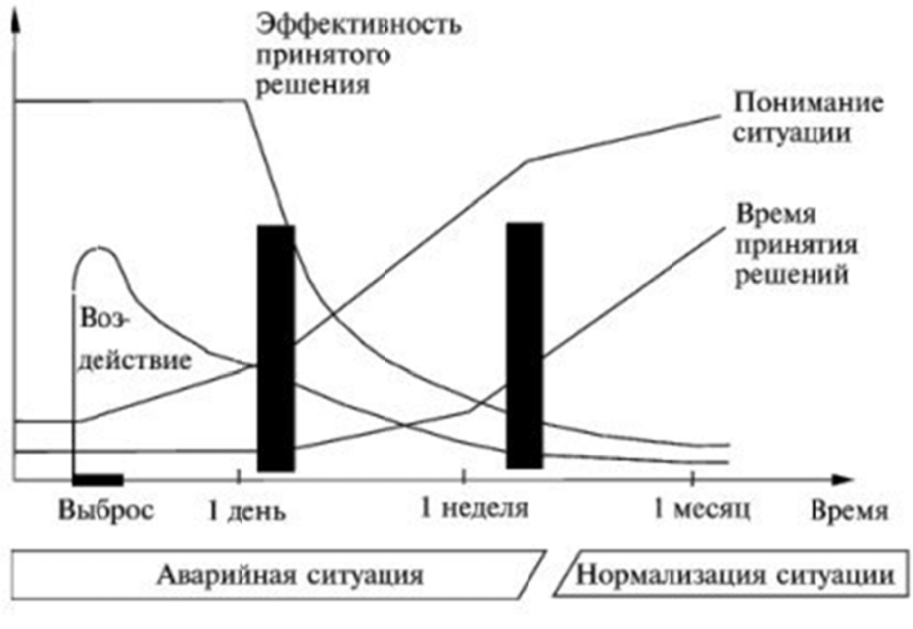


Рис. 9.21

Имитационное моделирование также применимо при создании систем поддержки принятия решений в сфере пожарной безопасности. Данный метод позволяет учесть множество элементов: структуру помещений, поведение людей, людские потоки во время эвакуации, число противопожарных средств (огнетушителей, гидрантов), пожарные выходы и пр. Объединив все элементы в модель, можно имитировать различные экстренные ситуации и генерировать альтернативные варианты решений в данных ситуациях.

Результаты экспериментов помогают в принятии управленческих решений. Реализация принятых решений на практике – увеличение количества и изменение расположения пожарных лестниц и выходов, оптимизация средств тушения пожара. По модели можно судить о поведении людей в экстремальной ситуации. Однако в реальной жизни оно может быть непредсказуемым, поэтому модель дает лишь примерную оценку данного показателя.

Имитационные модели СППР создаются и для органов государственной власти различных уровней: федеральных, региональных, муниципальных.

Цель создания таких систем – принятие рациональных решений для эффективного социально-экономического развития региона. Модель СППР для региональных органов власти можно представить схемой, представленной на рис. 9.22.

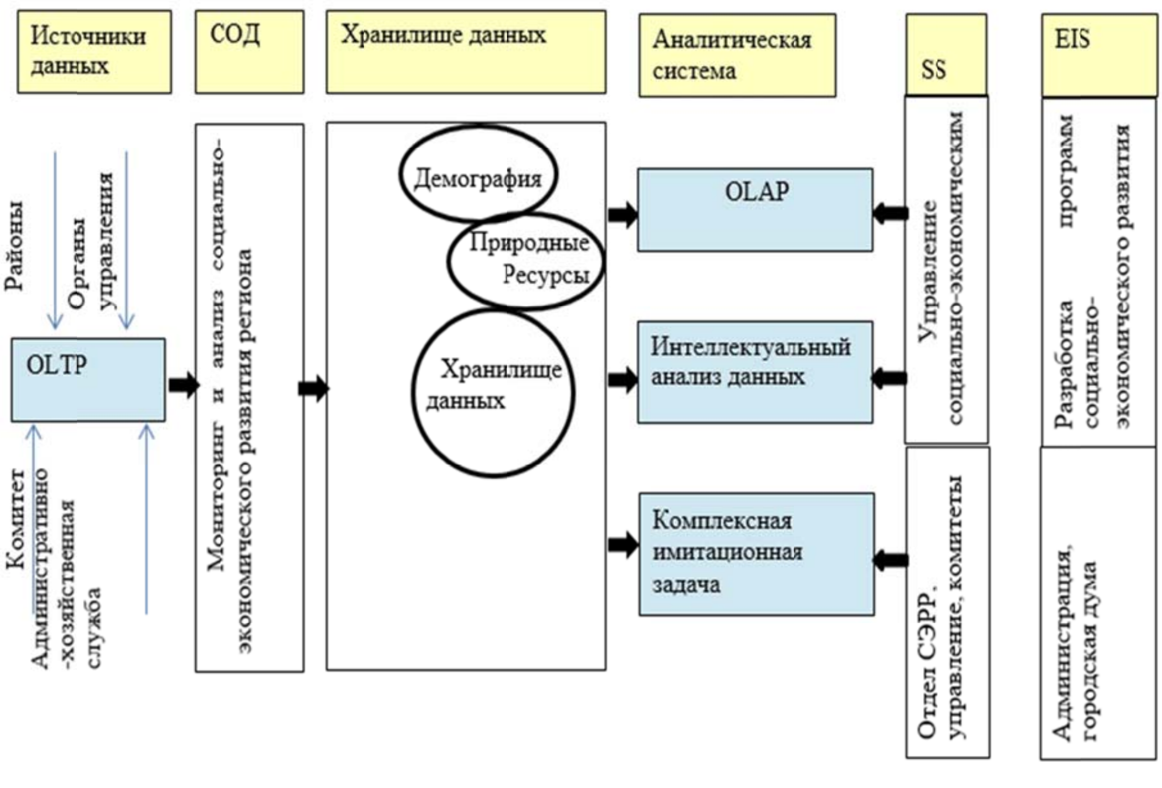


Рис. 9.22

Аналитическая база данной СППР представляет собой обобщённую имитационную модель региона. Кроме того, она включает в себя экспертные и интеллектуальные системы. В процессе выработки регионального решения выполняются задачи управления с участием группы экспертов, которые взаимодействуют через диалоговый интерфейс с комплексом моделей.

Имитационные модели СППР позволяют исследовать текущее состояние региона, выявлять тенденции в развитии, анализировать влияние внешних факторов на социально-экономическое положение региона, и как следствие, принять решение по улучшению данного положения.

Имитационное моделирование СППР также применяется в здравоохранении, позволяя проектировать тенденцию заболеваний и эпидемий, после чего возможна разработка решения об эффективном лечении.

В современных условиях принятие управленческих решений зачастую осложняется множеством факторов, таких как риск, неопределенность, избыток или недостаток информации. Имитационное моделирование в данном случае является оптимальным выходом, так как имеет ряд преимуществ:

- позволяет с наивысшей адекватностью описать реальную систему;
- дает возможность обработки большого количества входных данных, их систематизации и анализа;
- обеспечивает гибкость структуры и алгоритмов;
- использование вычислительной техники значительно сокращает время разработки и принятия решения, нежели при натуральном эксперименте;
- позволяет предсказать последствия принятого решения, что в свою очередь сокращает убытки, связанные с принятием неверных решений.

Однако, как и любой метод, имитационное моделирование имеет некоторые недостатки:

- работа с программами, создающими имитационные модели, невозможна без конкретных знаний эти программ;
- сложность поиска обобщенного решения при большом количестве лиц, участвующих в его принятии.

Несмотря на недостатки, применение имитационного моделирования значительно упрощает процесс принятия решения, позволяет повысить эффективность предприятия за счет прогнозирования последствий принятых решений, что в свою очередь позволяет уменьшить затраты и увеличить прибыль. Можно сделать вывод, что в условиях современных рыночных отношений имитационное моделирование является неотъемлемой частью управления компанией, так как способствует развитию бизнеса и повышению конкурентоспособности предприятия.

9.4.1. Системная динамика

Как метод имитационного моделирования системная динамика представляется действенным инструментом прогнозирования и исследования возможных типов формирования сложных процессов и систем, которые в основном характеризуются большим количеством обратных связей и их существенной нелинейностью.

1. *Системно-динамический метод* моделирует сложные системы на высоком уровне абстракции. Данное моделирование позволяет получать целое представление о системе и идеально подходит для стратегического планирования.

В основе системно-динамического метода лежит утверждение о том, что структура системы предопределяет её. Данный метод моделирования помогает учитывать основные взаимосвязи между элементами системы и временные задержки в динамике её развития. При построении модели обязательно учитываются причинно-следственные связи между элементами модели, особое место в рассмотрении занимает обратная связь между ними. Один из главных моментов моделирования системы системно-динамическим методом заключается в том, что модель должна воспроизводить поведение системы в реальных условиях, а также делать это на основе аналогичных причин, существующих в реальности.

2. *Дискретно-событийный метод.*

Дискретно-событийный метод – метод имитационного моделирования, который представляет собой моделирование системы как хронологическую последовательность событий. Событие происходит в определенный момент времени и провоцирует изменение состояния системы.

Данный метод подразумевает под собой, что отмечается состояние системы и анализируются действия, переводящие ее из одного состояния в другое. При дискретно-событийном методе имитационного моделирования значения зависимых переменных изменяются дискретно в моменты свершения событий и остаются неизменными в периодах между свершениями событий.

Для построения модели дискретно-событийный методом моделирования, чаще всего используют следующие программы:

- Arena,
- AnyLogic,
- SIMSCRIPT,
- SLAM,
- SIMAN,
- AweSim,
- GPSS.

В основном все бизнес-процессы легко описываются как последовательность отдельных дискретных событий. Например, заказчик сделал заявку на какой-либо товар или продукцию, поставщик обработал заказ и доставил поставщику. Для моделирования аналогичных процессов используется дискретно-событийный метод имитационного моделирования.

Данный метод широко применяется в производстве, медицине и логистике. В этом методе модель строится на среднем уровне абстракции, детальная информация или конкретные физические детали обычно не учитываются при построении.

3. *Агентный метод.*

Агентное моделирование – метод имитационного моделирования, который изучает поведение децентрализованных агентов и то, как данное поведение влияет на формирование всей системы. Поведение агентов осуществляется на индивидуальном уровне, а глобальное поведение появляется как результат деятельности множества агентов.

Выделяют следующие стадии построения данной модели:

- определение границ модели: какое явление или событие подлежит моделированию и каковы его рамки;
- выявление поведения или взаимодействия агентов: формирование модели поведения или принятия решений агентом и его взаимодействие с другими агентами;
- разработка и проверка модели, проведение анализа чувствительности.

Агентное моделирование основывается на правилах поведения агента, а в свою очередь системно-динамическое моделирование основывается на структуре системы. Рассматриваемый метод моделирования исследуется на микроуровне, так как базовой единицей модели выступает агент или агенты, который функционирует в определенной окружающей среде.

Агентное моделирование взаимодействует с теорией игр, элементами усложненных систем, мультиагентными системами и эволюционным программированием, а также с методом Монте-Карло.

На рис. 9.23 представлена модель состояний жизни человека от рождения до смерти. Данная модель включает в себя 6 положений агента-человека:

1. Начальное состояние – рождение.
2. Взрослый.
3. Несемейный.
4. Семейный.
5. Пожилой.
6. Конечное состояние – смерть.

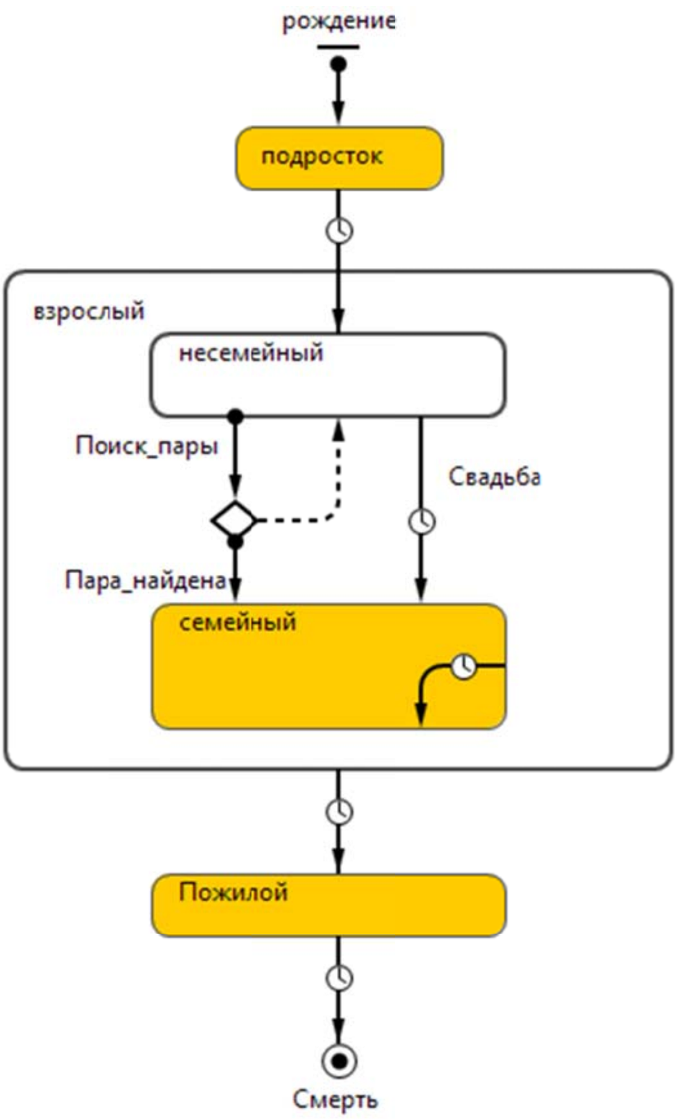


Рис. 9.23. Пример модели состояний агента

Системно-динамический и дискретно-событийный методы можно назвать «традиционными» методами имитационного моделирования, которые возникли в 50–60-х годах. Агентный метод моделирования считается новым методом, который получил популярность в использовании только после 2000 года. Первые два метода моделирования исследуют систему сверху вниз. Они исследуют модели на системном уровне. В агентном методе наоборот – снизу вверх.

9.4.2. Законы распределения как вероятностные методы обработки информации

Имитационное моделирование является эффективным аппаратом изучения стохастических систем, когда анализируемая система подвергается влиянию многочисленных случайных факторов сложной природы. С помощью данного моделирования у нас появляется возможность исследования в условиях неопределенности, при неполных или неточных данных.

В теории вероятностей существуют следующие законы распределения случайных величин, которые в имитационном моделировании можно представить, как вероятностные методы обработки информации:

А) Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерно распределение на отрезке [a, b], если ее функция распределения задается следующей формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a < x \le b, \\ 1, \text{если } x > b. \end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{если } a < x < b, \\ 0, \text{если } x < a \text{ и } x > b. \end{cases}$$

Подставляем в равенство $F(x) = r$ данную функцию распределения:

$$\frac{x-a}{b-a} = r,$$

Из этого следует:

$$x = a + r(b-a).$$

Последовательности значений $r_1, r_2, \dots$ случайной величины R соответствует данная последовательность значений:

$$x_1 = a + r_1(b-a), x_2 = a + r_2(b-a), \dots$$

Случайной величины ξ, равномерно распределенной на интервале [a,b].

Б) Нормальное распределение

Распределение по нормальному, или гауссовскому, закону случайной величины ξ, которая определяется на всей числовой оси $(-\infty;\ +\infty)$, задается формулой плотности распределения вероятности:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\right) exp^{-\frac{(x-M\{\xi\})^2}{2D}}$$

Допустим, что случайная величина ξ распределена равномерно в промежутке (0,1), то $M(\xi)=\frac{1}{2}$, а $D(\xi)=\frac{1}{12}$.

Для использования на практике можно принимать, что случайная величина

$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ распределена по гауссовскому закону при $n \geq 8$ с математическим ожиданием $M(\xi)=\frac{n}{2}$, дисперсией $D(\xi)=\frac{n}{12}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{n}{12}}$.

Так как моделирование любого нормального распределения с математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением может быть воспроизведено по формуле

$$\xi = M(\xi) + \sigma R,$$

где R=$(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – сгенерированная в промежутке [0;1) случайная величина, то случайные величины, которые распределены по закону Гаусса с параметрами (0;1) следует находить по следующей формуле:

$$R = \left(\frac{12}{n}\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} r_i - \frac{1}{2} n\right).$$

В) Распределение Пуассона

Распределение вероятностей Пуассона задается следующей формулой:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, (k = 0,1,2, \dots),$$

где k – число событий простейшего потока, которые наступают за некоторый промежуток времени. Распределение Пуассона используется тогда, когда число n независимых испытаний достаточно велико, а вероятность p мала. Кроме того, требуется, чтобы выполнялось следующее условие: $np<10$.

Алгоритм для моделирования случайной величины ξ включает в себя ряд этапов:

- необходимо выбрать n, чтобы вероятность $p = \frac{a}{n}$ была достаточно малой. (примерно меньше 0,01). Получаем последовательность значений $r_1, r_2, \dots, r_n$ случайной величины R, которая равномерно распределена на интервале [0,1],

- для каждого числа r_i, $i=1,2,\dots,n$ необходимо проверить выполнение неравенства $r_i < p$; в случае выполнения полагают $\xi_i = 1$, а если нет, то – $\xi_i = 0$,

- также, вычисляется сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, которая должна совпадать со значением случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона.

Г) Экспоненциальное распределение

Данному закону распределения подчиняется много явлений, такие, например, как:

- срок службы деталей и узлов в компьютере, которые установлены в бухгалтерии,
- разговоры по телефону,
- время поступления заявки от заказчика к поставщику и т.п.

Если вероятность наступления события на малом интервале времени Δt очень мала и является независимой по отношению к другим событиям, то интервалы времени между последовательностями событий распределяются по экспоненциальному закону и имеют следующую плотность вероятностей:

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Для этого закона характерны следующие показатели параметров:

$$M[t] = \frac{1}{\lambda}, D[t] = \sigma^2 = (\frac{1}{\lambda})^2.$$

Одним из основных свойств экспоненциального закона распределения является равенство математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Данный закон распределения является важным, так как ему подчиняются интервалы времени между соседними заявками пуассоновского потока.

Пусть x_j – равномерно распределенные на интервале (0;1) случайные величины. Из этого следует, что для случайных промежутков времен поступления пуассоновских заявок t_j мы получаем следующую формулу:

$$t_j = -\frac{1}{\lambda} \ln x_j,$$

где $\frac{1}{\lambda}$ – средний интервал времени поступления заявок.

Кроме того, стоит рассмотреть метод обратных функций, который широко используется в имитационном моделировании.

Пусть случайная величина ξ имеет монотонно возрастающую функцию распределения F(x). Известно, что $0 \leq F(x) \leq 1$. Из этого следует, что случайная величина ξ с монотонно возрастающей функцией *F(*x*)* связана со случайной величиной R соотношением:

$$F(\xi) = R$$

Можно сделать вывод о том, что значение x случайной величины ξ есть решение уравнения:

$$F(x) = r,$$

где r – значение случайной величины *R*, т.е.:

$$x = F^{-1}(r)$$

Последовательности значений $r_1, r_2, \dots$ случайной величины R соответствует последовательность $F^{-1}(r_1), F^{-1}(r_2), \dots$ значений случайной величины ξ с функцией распределения *F(x)*.

В имитационной модели необходимо каждый источник случайности представлять распределением вероятности, а не средним значением. Если есть возможность собрать данные по требующимся случайным переменным, то их можно применить в одном из следующих методов, для того чтобы определить распределение:

1. Значения данных используются при моделировании непосредственно. Например, если данные представляют собой время обслуживания, то, когда потребуется значение этого времени при моделировании, оно просто будет выбрано из собранного массива данных. Такое моделирование иногда называют моделированием, управляемым блоком слежения.

2. Показатели информации необходимы для изучения функции эмпирического распределения. К примеру, если эта информация представлена временем обслуживания, то строится выборка из эмпирического распределения при необходимости в моделировании времени обслуживания.

3. Стандартные методы статистического вывода применяются для подбора формы теоретического распределения к данным и для выполнения проверки гипотез. Если отдельное теоретическое распределение с конкретными значениями для его параметров является хорошей моделью данных о времени обслуживания, то мы сделаем выбор-

ку из этого распределения, когда при моделировании потребуется значение времени обслуживания.

Метод 1 имеет два недостатка:

– при его применении в моделировании может воспроизводиться только то, что уже происходило ранее;

– редко бывает достаточно данных для выполнения всех необходимых прогонов имитационной модели.

Метод 2 лишен этих недостатков, поскольку в случае непрерывных данных может быть сгенерировано любое значение между точками минимума и максимума данных, полученных в результате наблюдений.

Таким образом, метод 2 предпочтительнее. Однако иногда можно применять и метод 1. Например, для распределительного центра необходимо сравнить предложенную систему транспортировки товаров с существующей системой. Для каждого заказа имеются следующие данные: время поступления, список требующихся товаров, количество единиц товара. Трудно, а то и невозможно смоделировать поток заказов для определенного периода времени, например 1 месяц, с помощью методов 2 и 3. Таким образом, в этом случае существующая и предложенная системы часто будут моделироваться с использованием ранее зарегистрированного потока заказов. Метод 1 рекомендуется применять для проверки адекватности модели, когда модельные выходные данные для существующей системы сравниваются с выходными данными, полученными из самой системы.

Если для данных, полученных в ходе наблюдений, можно правильно подобрать теоретическое распределение (метод 3), тогда зачастую удобнее использовать его, а не эмпирическое распределение (метод 2). Причины для этого следующие:

1. У функции эмпирического распределения могут быть определенные «искажения», особенно если доступно лишь небольшое количество данных, тогда как теоретическое распределение «сглаживает» данные и предоставляет информацию об общем распределении, лежащем в их основе.

2. Если эмпирические распределения применяются обычным способом, то при моделировании невозможно сгенерировать значения, лежащие вне области данных, полученных в ходе наблюдения. Это не совсем удобно, поскольку многие рабочие показатели моделируемых систем в большой степени зависят от вероятности возникновения

«предельных» событий, т.е. от генерирования, например, очень большого времени обслуживания. Используя теоретическое распределение, можно сгенерировать значение, лежащее вне области данных, полученных в результате наблюдений.

3. В некоторых ситуациях может существовать веская «физическая» причина для применения определенной формы теоретического распределения в качестве модели отдельной входной случайной переменной.

4. Теоретическое распределение – это оптимальный способ представления наборов значений данных. В случае, если из непрерывного распределения может быть получено n значений данных, то $2n$ значений (например: данные и соответствующие им интегральные вероятности) должны быть введены в компьютер и сохранены, чтобы представить эмпирическое распределение в пакетах имитационного моделирования. Поэтому при больших объемах данных использовать эмпирическое распределение неудобно.

5. Теоретическое распределение проще изменять. Предположим, что для моделирования набора интервалов времени между прибытиями хорошо подходит экспоненциальное распределение со средним значением, равным 1 минуте. Если мы хотим определить, как повлияет на моделируемую систему увеличение интенсивности прибытий на 10%, нам нужно всего лишь изменить среднее значение экспоненциального распределения с 1 на 0,909.

Существуют ситуации, когда ни одно теоретическое распределение не будет адекватно данным наблюдений. В таких случаях рекомендуется использовать эмпирическое распределение. Еще один недостаток теоретических распределений в том, что из них могут генерироваться сколь угодно большие значения, хотя и с очень малой вероятностью. Предположим, что случайная величина никогда не сможет принять значение, большее b, тогда желательно усечь подобранное теоретическое распределение в точке b. Например: может быть известно, что время обслуживания в банке вряд ли будет превышать 15минут.

Задача 1.

Для рассмотрения того, как моделируются законы распределения на практике, стоит обратиться к их свойствам. Далее будет рассматриваться общее представление имитации законов распределения на примере свойств нормального закона распределения.

Если изменяется математическое ожидание нормального распределения, то кривая по оси *x* сдвигается. Данные изменения показаны на рис. 9.24.

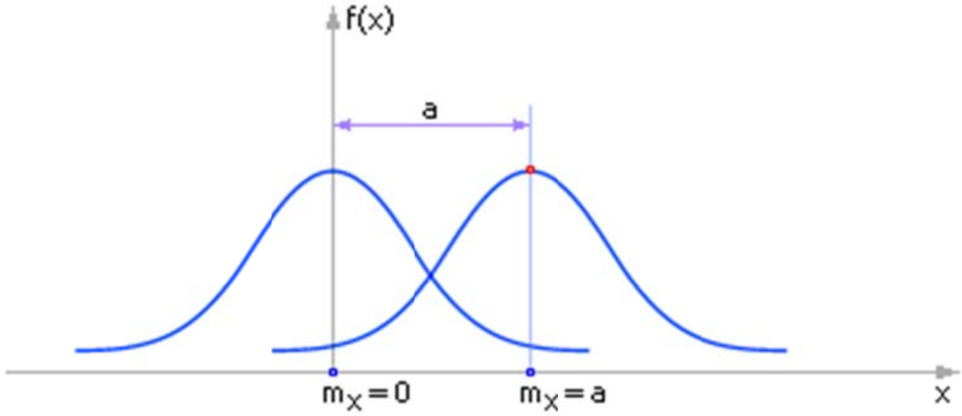


Рис. 9.24. Изменение математического ожидания

Если же изменяется среднеквадратическое отклонение, то – изменяется форма по оси *x*. Чем вероятность события больше, тем среднеквадратического отклонение меньше. В результате этого функция вытягивается по оси *x*. На нижеприведенном графике (рис. 9.25) данные изменения хорошо просматриваются.

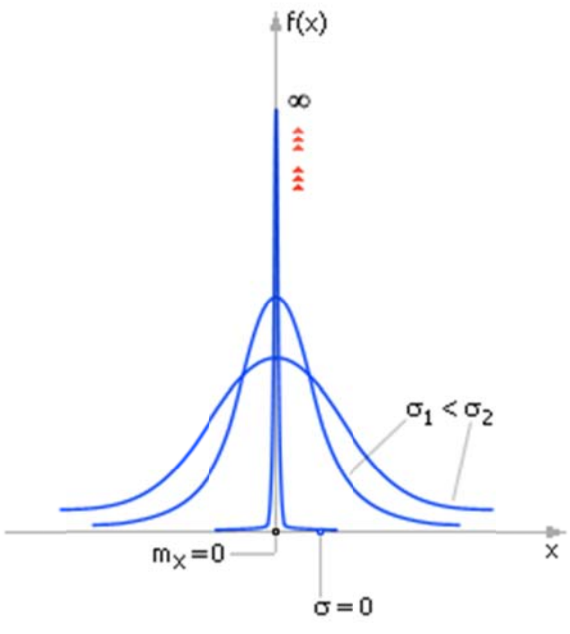


Рис. 9.25 – Изменение среднеквадратического отклонения

Чем вероятность события больше, тем среднеквадратическое отклонение меньше. На практике можно заметить, что разброс математического ожидания сводится к минимуму. На графике 9.26 показан детерминированный процесс в пределе.

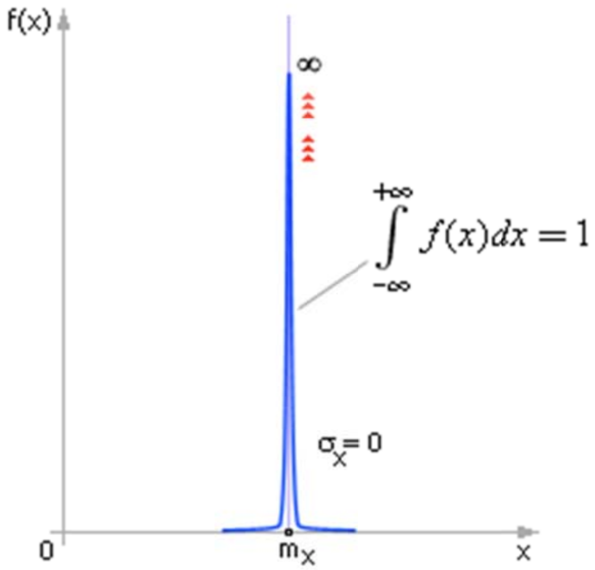


Рис. 9.26. Нормальное распределение при детерминированном процессе в пределе

Проводить исследования при использовании детерминированных процессов не составляет особого труда. При увеличении среднеквадратического отклонения поведение исследуемого процесса менее закономерно, т.к. значения параметров, которые его характеризуют, могут быть любыми. Сложным становится прогнозировать и управлять поведением объекта.

Одним из основных свойств выступает следствие из центральной предельной теоремы, которое звучит следующим образом: «Для большого числа N случайных величин ξ с любым законом распределения их сумма есть случайное число с нормальным законом распределения».

$$\lim_{N\to\infty} P(\alpha < (\sum_{i=1}^{n} \xi_i - N \times \mathrm{a}) \times \frac{1}{\sqrt{N} \times \sigma} < \beta)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}dt} = F(\beta) - F(\alpha)$$

где a – математическое ожидание,

σ – среднеквадратическое отклонение

N – общее количество наблюдений.

Задача 2.

Необходимо получить последовательность случайных чисел с экспоненциальным законом распределения. Пусть, например, моделируется интервал времени между поступлением заявок на обслуживание. Функция плотности распределения интервала, заданная экспоненциальным законом, имеет вид:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Выполняем преобразования по методу обратной функции:

$$x_i = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$x_i = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\ln(1 - x_i) = \ln e^{-\lambda t}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_i)$$

Т.к. x_i – случайная величина, которая имеет равномерное распределение на [0;1], то случайная величина $(1 - x_i)$ имеет такое же распределение и аналогичный промежуток распределения. В результате этого для моделирования последовательности случайной величины по экспоненциальному закону следует использовать следующее выражение:

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln x_i$$

В имитационной модели необходимо каждый источник случайности представлять распределением вероятности, а не средним значением. Если есть возможность собрать данные по требующимся случайным переменным, то их можно применить в одном из следующих методов, для того чтобы определить распределение:

1) значения данных используются при моделировании непосредственно. Такое моделирование иногда называют моделированием, управляемым блоком слежения;

2) показатели информации необходимы для изучения функции эмпирического распределения;

3) стандартные методы статистического вывода применяются для подбора формы теоретического распределения к данным и для выполнения проверки гипотез.

9.4.3. Вербальная и формализованная постановка задачи

Вербальная постановка задачи является следующей. Фирма хочет арендовать новый комплекс оборудования. Стоимость годовой аренды оборудования составляет 400 000 руб., и договор нужно подписать на 4 года. Поэтому, даже не достигнув точки безубыточности, фирма не сможете сразу вернуть оборудование. Современное оборудование позволит сэкономить на трудозатратах и стоимости сырья и материалов, а материально-техническое обслуживание нового комплекса обойдется дешевле.

Эксперты-аналитики оценили возможные характеристики проекта, результаты представлены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

Характеристики проекта

Название показателя	Возможные значения	Закон распределения
экономия на материально-техническом обслуживании (maintenance savings, MS), руб. на ед. продукции	от 10 до 20	равномерный
экономия на трудозатратах (labour savings, LS) руб. на ед. продукции	от –2 до 8	равномерный
экономия на сырье и материалах (raw materials savings, RMS) руб. на ед. продукции	от 3 до 9	равномерный
объем производства (production level, PL), ед. в год	от 15 000 до 35 000	нормальный

Математическую модель для определения ежегодной экономии, возникающей вследствие аренды нового оборудования, можно представить следующим образом:

$$W = PL * (MS + LS + RMS) * L - CL * L,$$

где MS – экономия на материально-техническом обслуживании (maintenance savings), руб. на ед. продукции; LS – экономия на трудозатратах (labour savings) руб. на ед. продукции; RMS – экономия на сырье и материалах (raw materials savings) руб. на ед. продукции; PL – объем производства (production level), ед. в год; W – величина годовой экономии проекта аренды нового оборудования, руб; L – длительность аренды, лет (L = 4); CL – стоимость годовой аренды оборудования, руб. в год (CL = 400000 руб/год).

Предварительный анализ диапазонов варьирования этих переменных (табл. 1) показывает, что для их математических ожиданий величина годовой экономии проекта аренды оборудования M_W будет положительной величиной:

$$M_W = M_{PL} * (M_{MS} + M_{LS} + M_{RMS}) - CL =$$
$$= [(35000 - 15000)/2] * [(20 - 10)/2 + (8 - (-2))/2 + (9 - 3)/2] - 400000 =$$
$$= 140000 \text{ руб/год}.$$

Однако можно предположить, что в отдельных реализациях композиция случайных величин может оказаться такой, что все они окажутся близки к нижней границе своих диапазонов варьирования, и в этом случае величина годовой экономии проекта будет отрицательной величиной:

$$W\text{н} = PL\text{н} * (MS\text{н} + LS\text{н} + RMS\text{н}) - CL =$$
$$= 15000 * (10 + (-2) + 3) - 400000 = -235000 \text{ руб}.$$

Следовательно, необходимо более детально исследовать процесс формирования ежегодной экономии, возникающей вследствие аренды нового оборудования с учетом вероятностной природы основных факторов производства. Для этого необходимо провести имитационный эксперимент на основе метода Монте-Карло.

Ниже приведены основные важные особенности метода Монте-Карло:

- необходимость генерировать случайные выборки;
- исходные распределения независимых факторов должны быть известны;
- результат должен быть известен при проведении эксперимента.

Преимущества моделированием Монте-Карло:

- легко реализуется;
- обеспечивает статистическую выборку для численных экспериментов с использованием компьютера;
- обеспечивает приблизительное решение математических задач;
- может использоваться как для стохастических, так и для детерминированных задач.

Недостатки моделирования методом Монте-Карло:

- большая трудоемкость, поскольку необходимо создать большое количество выборок для получения желаемого выхода;
- результаты этого метода являются только приближением истинных значений, а не точными.

9.4.4. Пример: результаты имитации процесса формирования ежегодной экономии при аренде нового комплекса оборудования в MS EXCEL

В соответствии с поставленной задачей на первом этапе реализации имитационного эксперимента необходимо получить временные ряды для каждой из вероятностных факторов поставленной задачи. Три из них (MS, LS и RMS) имеют равномерный закон распределения.

На листе MS Excel для удобства дальнейшей работы занесем в ячейки значения верхних и нижних диапазонов каждой из случайных переменных.

Пакет MS Excel имеет в составе своей библиотеки функцию датчика генерации равномерно распределенной случайной величины на отрезке [0, 1]. Для этого служит функция СЛЧИС.

Занесем в ячейку А 7 первое значение случайной величины экономии на материально-техническом обслуживании (maintenance savings, MS), руб. на ед. продукции с учетом значений нижней границы диапазона В$5 и верхней А$5. Для этого наберем в ней формулу: =А$5+(В$5-А$5)*СЛЧИС() и нажмем клавишу Enter. В ячейке появляется значение реализации случайной величины MS. Следующие 99 ее значений в ячейках А 8-А 105 можно получить, потянув правый нижний уголок ячейки мышью.

Аналогично получим реализации двух других равномерно распределенных функций: экономии на трудозатратах (labour savings, LS) руб. на ед. продукции и экономии на сырье и материалах (raw materials savings, RMS) руб. на ед. продукции.

Четвертая случайная величина, участвующая в задаче – объем производства (production level, PL), ед. в год – имеет по условию нормальный закон распределения. Для ее моделирования необходимо помимо математического ожидания, которое можно вычислить, зная верхний и нижний диапазоны варьирования, необходимо задать второй параметр – среднеквадратическое отклонение.

Для генерирования нормально распределенной случайной величины с заданным средним значением и стандартным отклонением предназначена функция *НОРМОБР*. Среднее значение нормально распределенной случайной величины вычисляется как среднее верхнего (в ячейке K$5) и нижнего (ячейка J$5) значений диапазона ее изменений. Численное значение объема производства сформируем в ячейке L7.

В пакете MS Excel для генерирования значения случайной величины можно использовать *«Мастер функций»*. Для этого необходимо открыть окно *«Мастера функций»*, щелкнув мышью на значок меню. В левом окне *«Мастера функций»* в списке функций курсором выбрать группу *«Статистические»*, щелкнув мышью.

После этого найти курсором функцию *НОРМОБР* и щелкнуть мышью кнопку ОК. На экране появляется окно *«НОРМОБР»*, показанное на рис. 9.27.

Первый параметр (Вероятность) сформируем уже разобранной нами функцией СЛЧИС(). Во второй параметр (Среднее) занесем среднее значение заданного диапазона изменения объема производства, т.е. ячейку L5. В последнюю строку (*Стандартное_откл*) заносится значение стандартного отклонения распределения, т.е. ячейку М 5.

Можно также вручную занести в ячейку формулу: *=НОРМ.ОБР(СЛЧИС();L$5;M$5)* и ввести ее нажатием клавиши *Enter*.

В результате выполнения этой программы получаем временные ряды распределения каждой из четырех случайных функций, определяющих ежегодную экономию, возникающую вследствие аренды нового оборудования.

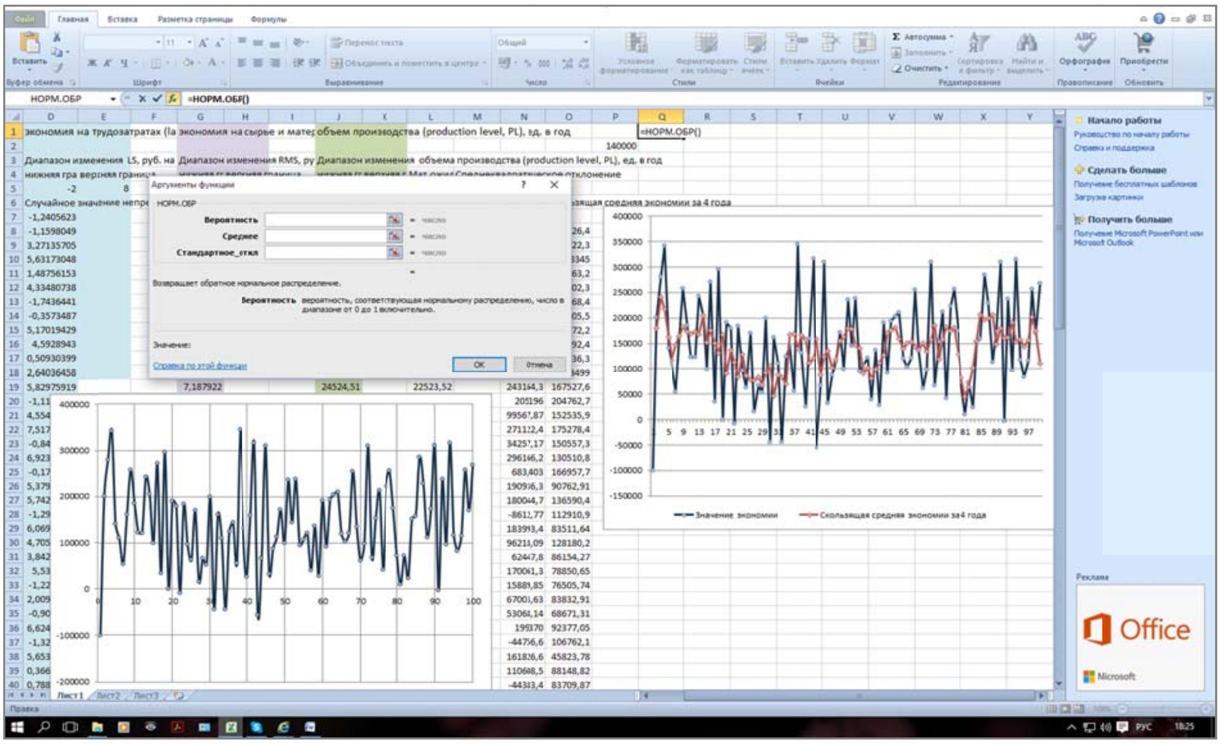


Рис. 9.27. Окно генерации нормально распределенной случайной функции

На основе этих рядов находим собственно величину годовой экономии. На рис. 9.28 показана одна из реализаций.

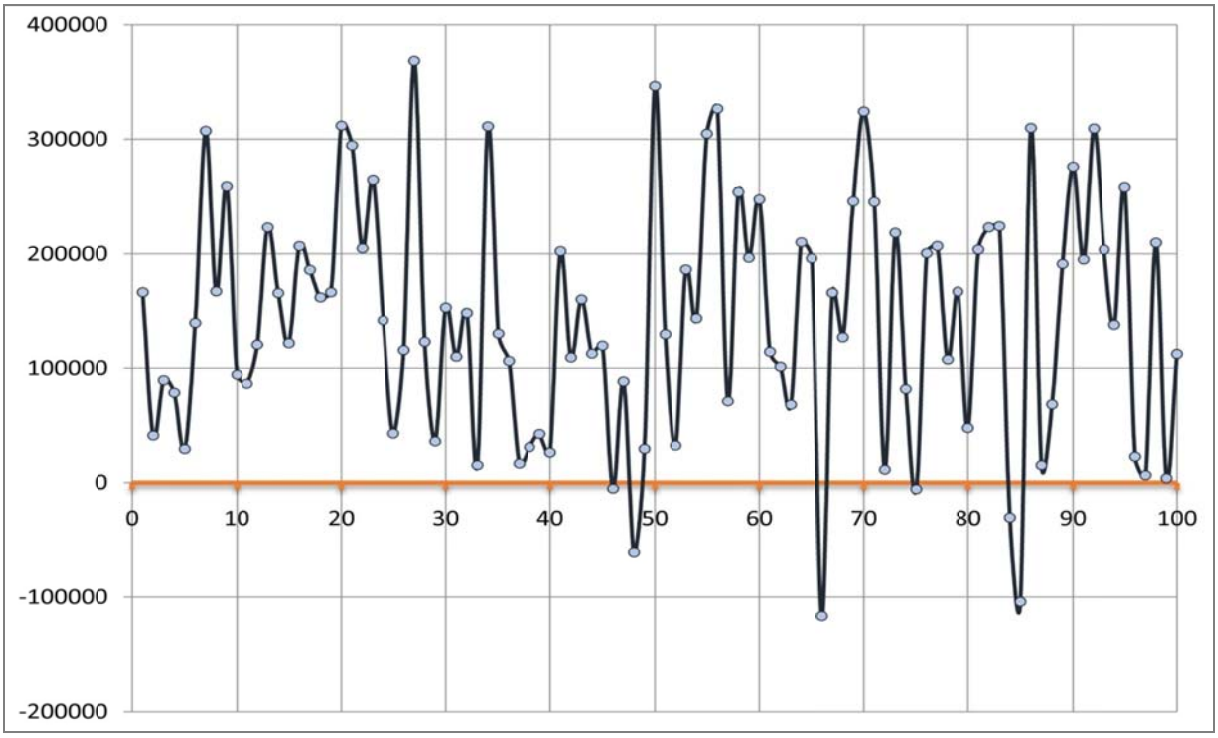


Рис. 9.28. Ежегодная экономия от аренды нового оборудования

Анализируя этот график, видим, что величина годовой экономии является также случайной величиной, как и составляющие композицию ее распределения факторы. Большая часть значений реализации является положительной величиной, однако некоторые из значений ряда попадают в отрицательную область.

Следовательно, этих результатов еще недостаточно, чтобы ответить на вопрос о целесообразности аренды нового оборудования в течение четырех лет.

Для того чтобы ответить на это вопрос, построим скользящую среднюю за четыре года для полученного нами ряда. Результаты показаны на рис. 9.29.

Рис. 9.29. Скользящая средняя за 4 года ежегодной экономии от аренды нового оборудования

Эти результаты уже позволяют однозначно ответить положительно на вопрос о целесообразности аренды нового оборудования. Даже в те периоды, на которые попадают отдельные отрицательные значения экономии, скользящая средняя экономии остается положительной величиной.

Следует также отметить, что менее длительная эксплуатация оборудования нецелесообразна, т.к. за меньший срок не успеет выровняться его отрицательная эффективность в отдельные годы.

Анализ исходных данных показывает, что все 4 вариационных ряда подвержены значительным вариациям, объясняющимся существенными отклонениями во времени параметров внешних условий проекта.

Для прогноза эффективности проекта необходимо перейти к специальным методам, разработанным теорией имитационного моделирования.

Анализ показывает, что выбранный четырехлетний период сглаживания позволяет выровнять случайные нерегулярные компоненты и ответить положительно на вопрос о целесообразности аренды оборудования сроком на 4 года.

Методы имитационного моделирования рядов динамики экономических систем являются рабочим инструментом, позволяющим проводить их анализ и выявлять тенденции и тренды в условиях многомерности.

Имитационное моделирование основывается на следующих основных парадигмах:

- модели динамических систем;
- системно-динамические модели;
- дискретно-событийные модели;
- агентное моделирование.

В табл. 9.6 представлен сравнительный анализ указанного инструментария.

На основе динамических моделей чаще всего проводится исследование сложных объектов, посредством описания их поведения системами алгебраических, дифференциальных уравнений.

Дискретно-событийные модели используются для описания процессов на основе последовательности операций, отражающих действия экономических агентов. Особенности экономических и социальных систем учитываются при системно-динамическом моделировании. В этом случае система рассматривается на высоком уровне абстракции от единичных событий. При этом в качестве основного средства отражения структуры и особенностей процессов используются причинно-следственные связи.

Таблица 9.6

Сравнительный анализ инструментария имитационного моделирования

Параметр	Динамические модели	Дискретно-событийные модели	Системно-динамические модели	Агентное моделирование
Описание системы	Блок-схема, алгебраические и дифференциальные уравнения	Графы	Диаграммы с отражением обратных связей	Агенты с активным поведением
Элементы	Блок	Заявка и ресурс	Накопитель, поток, причинно-следственные связи	Карта состояний, индивидуальный объем
Структура	Блочная диаграмма с отражением обратных связей	Блочная диаграмм	Схема взаимодействия обратных связей	Правила поведения
Направление	Граф	Граф	Граф	Снизу вверх
Использование	Системы управления, физические и механические процессы	СМО	Системы управления, производные процессы	Децентрализованные, интеллектуальные системы
Программные средства	AnyLogic, Simulink	AnyLogic, GPSS, Arena, Comnet	AnyLogic, Powersim, IThink	AnyLogic, RePast, Ascape

Особенностью агентного подхода в имитационном моделировании является исследование единичных объектов системы с учетом их поведения и параметров. Таким образом, агентное моделирование применяется в случае, когда особую значимость для исследования представляет индивидуальное поведение объектов. При этом интегральные характеристики формируются на основе индивидуальных поведений.

Задача 3.

Построить теоретическую вероятностную модель случайной величины, отражающей цену на непродовольственные товары в регионах России.

Для исследования изменения величины цен на непродовольственные товары выберем нормальное распределение, относительно которого можно сформулировать следующие свойства:

- значения находятся на всей числовой оси;

- нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: μ-математическим ожиданием и σ-среднеквадратическим отклонением.

Параметры распределения оказывают следующее влияние на функцию плотности:

- математическое ожидание (μ) – влияет на сдвиг функции плотности.

- среднеквадратическое отклонение (σ) – влияет на масштаб функции плотности.

Для моделирования поведения случайной величины:

1) необходимо исследовать влияние параметров на распределение;

2) поставить в соответствие различным сочетаниям параметров реальные ситуации.

На рис. 9.28 представлено изменение графика плотности распределения, подчиняющегося нормальному закону в зависимости от изменения его параметров.

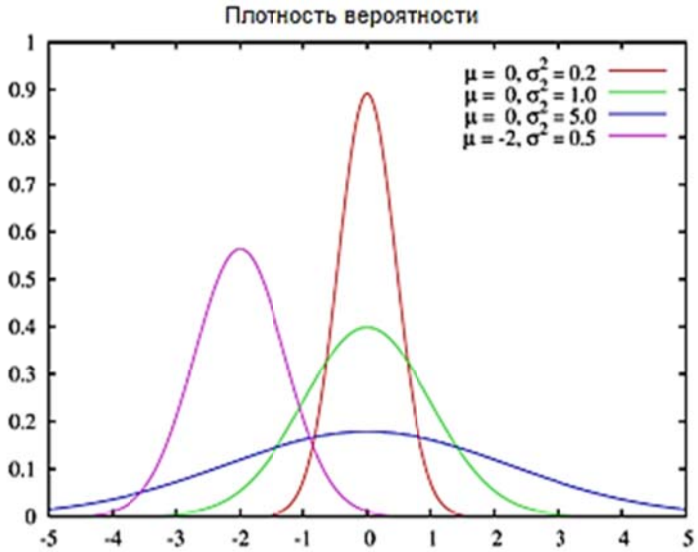


Рис. 9.30. Изменение графика плотности вероятности нормального распределения

При этом изменение функции распределения имеет следующий вид (рис. 9.31).

Сформулируем гипотезы об уровне индекса потребительских цен на региональном уровне и изменении его распределения и характеристик на фоне изменения его состава:

H_1: Индекс потребительских цен на непродовольственные товары в большинстве регионов России находится на среднем уровне и подчиняется нормальному закону распределения. Параметры: $\mu_1=0$, $\sigma_1=1$.

H_2: Индекс потребительских цен на непродовольственные товары в половине регионов России незначительно отклоняется от среднего значения (механическая выборка). Параметры: μ_2=0, σ_2=0,2.

H_3: Индекс потребительских цен на непродовольственные товары в Центральном федеральном округе России имеют значительное отклонение от среднего значения. Параметры: μ_3=0 σ_3=5.

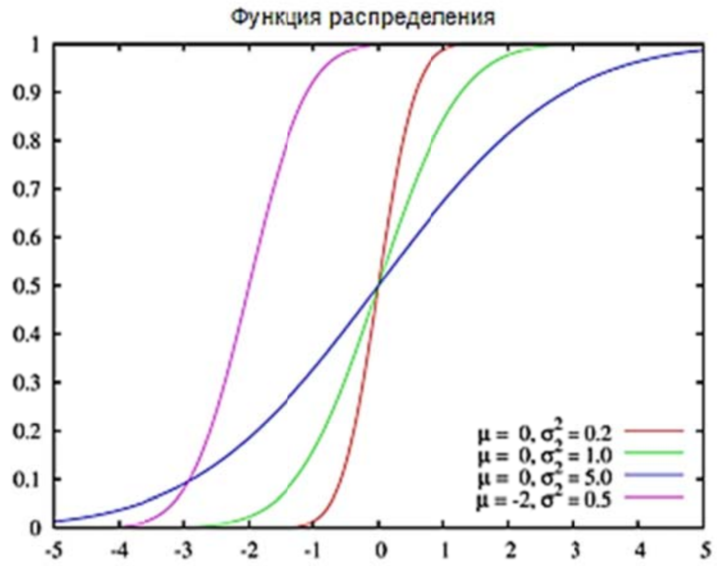


Рис. 9.31. Изменение функции распределения при изменении параметров

Выполним проверку гипотез. Результаты моделирования представлены на рис. 9.32–9.34.

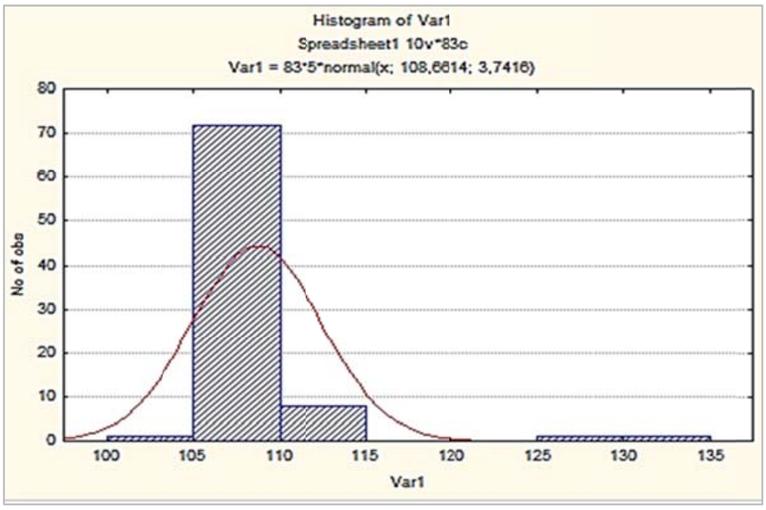


Рис. 9.32. Распределение 83 регионов России по величине ИПЦ
на непродовольственные товары

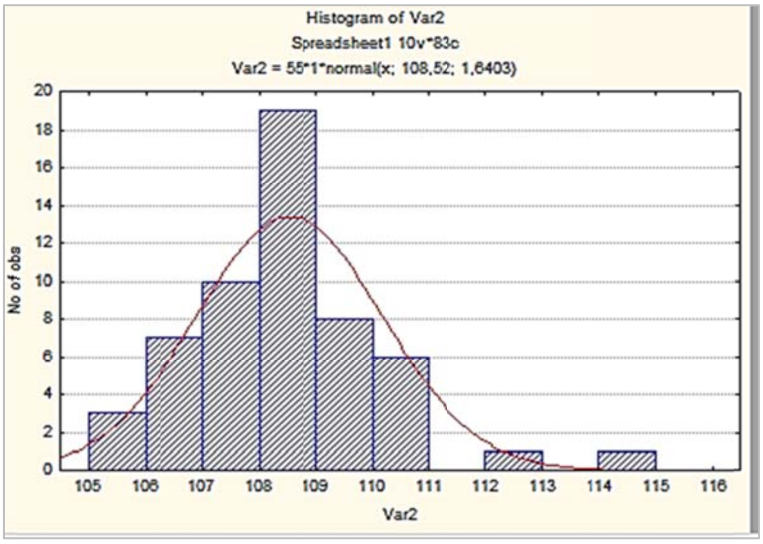


Рис. 9.33. Распределение 42 регионов России по величине ИПЦ на непродовольственные товары

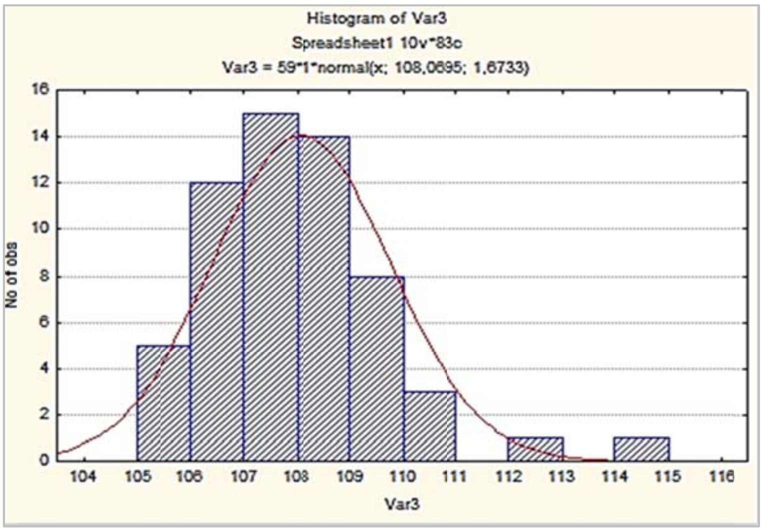


Рис. 9.34. Распределение регионов ЦФО по величине ИПЦ на непродовольственные товары

Осуществим проверку гипотезы H_1:

ξ_1 – уровень ИПЦ, при котором регион входит в группу регионов со средним показателем индекса.

Вычислим математическое ожидание для ξ_1:

$$18 + (dnorm\left(-\frac{18}{6}\right) - \frac{dnorm\left(\frac{83}{6}\right)}{pnorm\left(\frac{83}{6}\right)} - pnorm(-\frac{18}{6})) \cdot 6$$

$E(\xi_1)$=1,10342 (Ожидаемый уровень ИПЦ =110,342 %)

Вычислим среднеквадратическое отклонение для ξ_1:

$$36 \cdot (1 + \left(-\frac{18}{6}\right) \cdot dnorm\left(-\frac{18}{6}\right) - \left(\frac{83}{6}\right) * \frac{dnorm\left(\frac{83}{6}\right)}{pnorm\left(\frac{83}{6}\right)} - pnorm(-\frac{18}{6})) - (dnorm\left(-\frac{18}{6}\right) - \frac{dnorm\left(\frac{83}{6}\right)}{pnorm\left(\frac{83}{6}\right)} - pnorm(-\frac{18}{6}))^2$$

$D(\xi_1)$= 0,000034

$\sqrt{D}$=0,005 (Вариация уровня ИПЦ=0.5%)

Аналогичная проверка гипотез H_2 и H_3 позволяет получить следующие результаты:

ξ_2 – уровень ИПЦ, при котором регион входит в группу регионов с незначительным отклонением от среднего показателя индекса:

$E(\xi_2)$= 1,1628 (Ожидаемый уровень ИПЦ=116,28%)

$D(\xi_2)$= 79,6217

$\sqrt{D}$=8,9231 (Вариация уровня ИПЦ=8,9%)

ξ_3- уровень ИПЦ на непродовольственные товары в Центральном федеральном округе имеет значительное отклонение от среднего значения по России.

$E(\xi_3)$= 1,1384 (Ожидаемый уровень ИПЦ=113,84%)

$D(\xi_3)$ = 7,013

$\sqrt{D}$=2,6482 (Вариация уровня ИПЦ=2,6%)

Распределение вероятностей случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 представляют собой условные вероятности события А= {уровень ИПЦ} при условии выполнения гипотез H_1, H_2, H_3.

Зададим априорные вероятности гипотез:

$P(H_1)$ =0.2 – вероятность, что регион попадет в группу с уровнем ИПЦ на уровне среднего значения по России.

$P(H_2)$ =0.6 – вероятность, что регион попадет в группу с незначительным отклонением уровня ИПЦ от среднего значения по России.

$P(H_3)$ =0.2 – вероятность, что регион ЦФО попадет в группу со значительным отклонением уровня ИПЦ от среднего по России.

Вычислим математическое ожидание:

$$P = 0{,}2 \cdot 1{,}10342 + 0{,}6 \cdot 1{,}1628 + 0{,}2 \cdot 1{,}1384 = 1{,}146$$

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 3{,}4$$

Вычислим дисперсию:

$$P = 0{,}2^2 \cdot 0{,}000034 + 0{,}6^2 \cdot 79{,}6217 + 0{,}2^2 \cdot 7{,}013 = 28{,}9$$

$$D\,(\xi_1 + \xi 2 + \xi 3) = 86{,}6$$

Вычислим среднеквадратичное отклонение:

$$\sqrt{D} = 9{,}3$$

Математическое ожидание наиболее приближено к $E(\xi_3) = 1{,}1384$.

Таким образом, на основании проведенных вычислений и анализа следует принять гипотезу H_3: Индекс потребительских цен на непродовольственные товары в Центральном федеральном округе России имеют значительное отклонение от среднего значения

Задача 4.

Исследовать динамику эмиграции из России и ее влияние на демографические показатели страны методами имитационного моделирования.

Определим переменные:

V1 – уровень эмиграции из России;

V2 – кризисное состояние экономики;

V3 – правовая и социальная незащищенность;

V4 – развитый рынок труда;

V5 – экологические проблемы.

Наибольшее значение имеет переменная *V1* как ключевой индикатор, находящийся под воздействием исследуемых факторов.

Формулировка социальных гипотез, в соответствии с которыми построен орграф:

1. Кризисное состояние экономики обостряет экологические проблемы в стране *(-, V2-V5)*.

Кризисное состояние экономики снижает интенсивность развития рынка труда *(-, V2-V4)*.

Кризисное состояние экономики увеличивает политическую нестабильность *(+, V2-V3)*.

Кризисное состояние экономики увеличивает уровень эмиграции из России *(+, V2-V1)*.

Правовая и социальная незащищенность приводит к увеличению уровня эмиграции из страны *(+, V2-V1)*.

Развитый рынок труда снижает кризисные тенденции в экономике *(-, V4-V2)*.

Развитый рынок труда снижает уровень эмиграции из страны *(-, V4-V1)*.

Развитый рынок труда обеспечивает правовую и социальную защищенность граждан *(+, V4-V3)*.

Правовая и социальная незащищенность увеличивает уровень эмиграции *(-,V3-V1)*.

Правовая и социальная незащищенность снижает интенсивность развития рынка труда *(-,V3-V4)*.

Экологические проблемы увеличивают уровень эмиграции из страны *(+, V5-V1)*.

Экологические проблемы усугубляют кризисные явления в экономике *(-, V5-V2)*.

Уровень эмиграции нейтрализуют некоторые экологические проблемы за счет снижения численности населения страны *(+, V1-V5)*.

Уровень эмиграции отрицательно воздействует на экономику страны, что обусловлено «утечкой умов» *(-, V1-V2)*.

Результаты построения графа представлены на рис. 9.35.

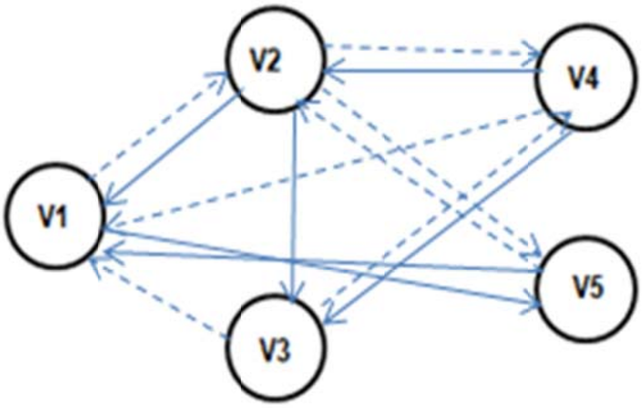


Рис. 9.35 – Орграф процессов

Штриховая дуга орграфа отражает отрицательное влияние переменной, соотнесённой с вершиной орграфа, из которой выходит дуга, на переменную, обозначенную вершиной орграфа, в которую входит дуга. Дуга орграфа, представленная сплошной линией, отражает положительное влияние переменной, соотнесённой с вершиной орграфа, из которой выходит дуга, на переменную, обозначенную вершиной орграфа, в которую входит дуга. Матрица смежности орграфа представлена в табл. 9.7.

Таблица 9.7

Матрица смежности

	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**
v1	0	-1	0	0	1
v2	1	0	1	-1	-1
v3	-1	0	0	-1	0
v4	-1	1	1	0	0
v5	1	-1	0	0	0

Выполним переход от матрицы смежности орграфа к матрице оператора системы уравнений (рекуррентных последовательностей, КРУ или ОДУ), который основан на идее перехода от кода записи влияний каждой переменной на все остальные к коду записи влияний всего набора переменных на каждую конкретную переменную. Этот переход обеспечивается простым транспонированием матрицы смежности построенного выше орграфа.

Таблица 9.8

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	-1	0	0	1
v2	1	0	1	-1	-1
v3	-1	0	0	-1	0
v4	-1	1	1	0	0
v5	1	-1	0	0	0

После транспонирования:

Таблица 9.9

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	-1	-1	1
v2	-1	0	0	1	-1
V3	0	1	0	1	0
v4	0	-1	-1	0	0
V5	1	-1	0	0	0

По транспонированной матрице построим, с учётом замены 1 на весовые коэффициенты K_{ij}, следующую система рекуррентных последовательностей (СРП):

$$\begin{cases} V1_{n+1} = K_{11}V1_n + K_{21}V2_n + K_{31}V3_n + K_{41}V4_n + K_{51}V5_n \\ V2_{n+1} = K_{12}V1_n + K_{22}V2_n + K_{32}V3_n + K_{42}V4_n + K_{52}V5_n \\ V3_{n+1} = K_{13}V1_n + K_{23}V2_n + K_{33}V3_n + K_{43}V4_n + K_{53}V5_n \\ V4_{n+1} = K_{14}V1_n + K_{24}V2_n + K_{34}V3_n + K_{44}V4_n + K_{54}V5_n \\ V5_{n+1} = K_{15}V1_n + K_{25}V2_n + K_{35}V3_n + K_{45}V4_n + K_{55}V5_n \end{cases}$$

В нашем случае СРП примет вид:

$$\begin{cases} V1_{n+1} = K_{21}V2_n - K_{31}V3_n - K_{41}V4_n + K_{51}V5_n \\ V2_{n+1} = -K_{12}V1_n + K_{42}V4_n - K_{52}V5_n \\ V3_{n+1} = K_{23}V2_n + K_{43}V4_n \\ V4_{n+1} = -K_{24}V2_n - K_{34}V3_n \\ V5_{n+1} = K_{15}V1_n - K_{25}V2_n \end{cases}$$

Для матрицы системы уравнений выполним расчет числа обусловленности – conde, которое характеризует скорость роста ошибки прогноза, т.е. в данной мере оценивает качество модели. Его значение должно быть менее 400–500.

$$\mathrm{conde}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 12.124$$

Вычислим для матрицы орграфа оператора системы уравнений собственные значения и сделаем заключение об устойчивости по Лагранжу. Воспользуемся для этого штатной операцией MathCad – eigenvals.

$$\mathrm{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.973-0.787i \\ 0.973+0.787i \\ -0.473-1.026i \\ -0.473+1.026i \\ -1 \end{bmatrix}$$

Анализ показывает, что буквальный процесс, отвечающий исследуемой матрице, является неустойчивым. Имеются положительные компоненты вектора.

Осуществим выбор одной из стратегий развития модели: «как в жизни» или проектной.

Лучший результат этой фазы моделирования, когда модуль всех собственных значений не более 1 (устойчивость по Лагранжу) – этого можно добиться, изменяя соотношение отрицательных и положительных контуров обратной связи с учётом их весов.

В результате эмпирического подбора значений коэффициентов получена матрица:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.85 & -0.05 & -0.35 & 0.25 \\ -0.85 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & -0.55 & -0.05 & 0 & 0 \\ 1 & -0.85 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вектор значений для данной матрицы имеет вид:

$$\mathbf{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0.85 & -0.05 & -0.35 & 0.25 \\ -0.85 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & -0.55 & -0.05 & 0 & 0 \\ 1 & -0.85 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -0.011 \\ -0.002-0.61i \\ -0.002+0.61i \\ -0.003-0.256i \\ -0.003+0.256i \end{bmatrix}$$

Таким образом, все компоненты вектора не более 1, что и означает устойчивость рассматриваемого процесса по Лагранжу, т.е. ограниченность изменений всех переменных vi некоторой константой.

Выполним расчет числа обусловленности:

$$\mathbf{conde}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0.85 & -0.05 & -0.35 & 0.25 \\ -0.85 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & -0.55 & -0.05 & 0 & 0 \\ 1 & -0.85 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=58.774$$

В качестве показателя, характеризующего уровень эмиграции, используется число граждан, выбывших из страны.

Кризисное состояние экономики измеряется темпом роста ВВП страны.

Правовая и социальная незащищенность, измеряется объемом мер правовой и социальной поддержки населения.

Развитый рынок труда оценивается уровнем экономической активности населения.

Экологические проблемы измеряются уровнем выбросов загрязняющих веществ.

Выполним проверку построенной и оснащённой начальными данными модели на «физическую корректность».

Для этого, задав небольшой горизонт прогноза, например до 5 временных интервалов, откалибровать варьированием коэффициентов её так, чтобы:

- ход динамики переменных отвечал какому-либо реальному сценарию, при этом то, что не бывает в жизни с отрицательным знаком, не будет его иметь и в значениях соответствующего показателя, например производительность труда или инфляция имеют только + знак;

- масштаб изменений модельных показателей отвечал масштабу изменений реальных показателей (рис. 9.36).

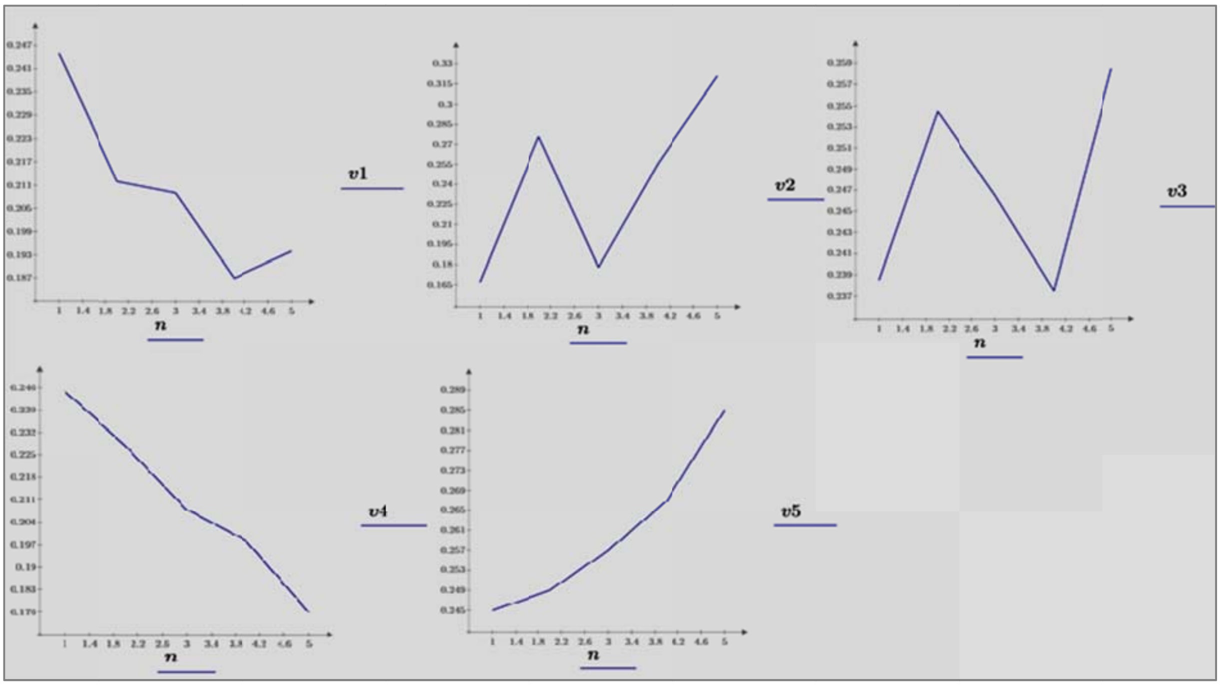


Рис. 9.36. Результаты прогноза

На рис. 9.36 показаны результаты моделирования динамики социально-экономических факторов, оказывающих влияние на уровень миграции и численности граждан, выбывших за пределы России.

Социальная ситуация выглядит следующим образом: убывающая динамика численности населения страны находилась в том числе под влиянием эмиграционных процессов. При этом увеличение числа эмигрантов как один из элементов, оказывающих влияние на численность населения, приводит к снижению показателя, что наглядно отражено на графиках. Периоды роста числа эмигрантов и периоды снижения численности населения совпадают. При сохранении данных тенденций службой государственной статистики составлен пессимистический и оптимистический прогнозы.

Горизонт прогноза составляет 5 лет, что вполне достаточно в современных условиях экономического кризиса. Прогнозы на более длительные периоды могут быть некорректными.

Исследование на устойчивость процесса по критерию Рауса-Гурвица позволяет сделать заключение о полной (определители всех главных миноров, т.е. расположенных вдоль главной диагонали матрицы Рауса-Гурвица, больше 0) или частичной устойчивости – число этих, последовательно идущих по порядку роста миноров, у которых определители больше 0, т.е. до первого неисправимого с минуса на плюс).

Для этого строится на основе характеристического уравнения $|M - \lambda I|$ *=0* для матрицы М полином степени этой квадратной матрицы, в данном случае полином 5-ой степени:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & K21 & -K31 & -K41 & K51 \\ -K12 & -\lambda & 0 & 0 & K52 \\ 0 & -K23 & -\lambda & K43 & 0 \\ 0 & -K24 & -K34 & -\lambda & 0 \\ K15 & -K25 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Далее определяются коэффициенты у разных степеней λ, так b0 при λ^5, $b1$ при λ^4 и т.д. Если при λ^5 оказалась -1, то её можно «исправить» на +1, умножив весь полином на «-1». Эта операция необходима, если применяется критерий устойчивости Рауса-Гурвица, для выполнения которого требуется, чтобы 1) все коэффициенты *bi* были больше 0; 2) все главные миноры матрицы Рауса-Гурвица также были больше 0.

Здесь нужно помнить, что *Kii* >0 означает предположение о расширенном воспроизводстве явления или процесса, показателем меры, проявлением которого является переменная *Vi.* И наоборот, *Kii* < 0 означает предположение о суженном воспроизводстве явления или процесса.

В результате исследования процесса по критерию Рауса-Гурвица получили следующие коэффициенты:

$$a_0 = -0.026345$$
$$a_1 = 0.18313$$
$$a_2 = 0.02635$$
$$a_3 = -0.37266$$
$$a_4 = -0.165$$
$$a_5 = 1$$

Главные миноры:

$$\Delta 1 = 1$$
$$\Delta 2 = 0{,}165$$
$$\Delta 3 = 0{,}034$$

$$\Delta 4 = 0{,}0005527$$
$$\Delta 5 = 0{,}0006117$$

В нашем случае в силу высокой трудоёмкости вопрос о подборе коэффициентов *Kii*, таких чтобы все *ai*>0 не решён, т.е. устойчивость по Ляпунову в рассматриваемой модели строго не доказана. В некоторых случаях этого можно добиться методом *D*-разбиений. Таким образом, можно говорить о частичной устойчивости.

Задача 5.

Получите выборку из 10 равномерно распределенных псевдослучайных чисел методом серединных квадратов. Начальное значение Z_0 выберите самостоятельно.

Получите выборку из 20 равномерно распределенных псевдослучайных чисел при помощи линейного конгруэнтного генератора

Решение:

1. Случайным образом выбирается начальное четырехзначное число Z_0 $Z_0 = 6656$.

2. Возведем Z_0 в квадрат: $Z_0^2 = 6656^2 = 44302336$.

3. Извлекаем из получившегося числа 4 средние цифры и получаем новое четырехзначное число $Z_1 = 3023$.

4. Разделим Z_1 на 10000, в результате получим число $U_1 \in [0;1]$: $U_1 = 3023/10000 = 0{,}3023$.

Далее шаги 2, 3 и 4 повторяются 10 раз. Последовательность получившихся чисел U_i, $i = \overline{1,n}$ является выборкой равномерно распределенных псевдослучайных чисел.

Данный метод удобно применять в Excel. Получение последовательности псеводослучайных чисел методом серединных квадратов приведено в таблице 9.10.

Таблица 9.10

Получение случайных чисел методом серединных квадратов

i	z_i	z_i^2	Z_i^2	U_i
0	6656	44302336	44302336	-
1	3023	9138529	09138529	0,3023
2	1385	1918225	01918225	0,1385

Окончание Таблицы 9.10

3	9182	84309124	84309124	0,9182
4	3091	9554281	09554281	0,3091
5	5542	30713764	30713764	0,5542
6	7137	50936769	50936769	0,7137
7	9367	87740689	87740689	0,9367
8	7406	54848836	54848836	0,7406
9	8488	72046144	72046144	0,8488
10	461	212521	00212521	0,0461

Получите выборку из 20 равномерно распределенных псевдослучайных чисел при помощи линейного конгруэнтного генератора:

$$Z_i = (A \cdot Z_{i-1} + C) \bmod m\,;\; U_i = \frac{Z_i}{m}\,.$$

Значения A, $\tilde{N}$ и m подберите самостоятельно таким образом, чтобы длина цикла генератора была не менее 20.

Решение:

1. Случайным образом выбирается некоторое начальное число Z_0. $Z_0 = 191$.

2. Вычисляется следующее число Z_i по рекурсивной формуле:

$$Z_i = (A \cdot Z_{i-1} + C) \bmod m\,,$$

где A – множитель; C – смещение; m – модуль. Пусть $Z_0 = 191$, $A = 5$, $C = 7$, $m = 205$. Тогда $Z_1 = (5 \cdot 191 + 7) \bmod 205 = 142$.

3. Чтобы получить случайное число $U_i \in [0;1]$ разделим Z_i на m:

$$U_i = \frac{Z_i}{m} = \frac{142}{205} = 0{,}6927\,.$$

Далее шаги 2 и 3 повторяются 20 раз.

Данный метод получения псевдослучайных чисел также можно реализовать в Excel. Для нахождения остатка от деления (опреатор mod) можно использовать встроенную функцию ОСТАТ(). Получение случайных чисел показано в табл. 9.11.

Таблица 9.11

Получение случайных чисел при помощи ЛКГ

i	Z_i	U_i
0	191	-
1	142	0,6927
2	102	0,4976
3	107	0,5220
4	132	0,6439
5	52	0,2537
6	62	0,3024
7	112	0,5463
8	157	0,7659
9	177	0,8634
10	72	0,3512
11	162	0,7902
12	202	0,9854
13	197	0,9610
14	172	0,8390
15	47	0,2293
16	37	0,1805
17	192	0,9366
18	147	0,7171
19	127	0,6195
20	27	0,1317

A	5
C	7
m	205

Задача 6.

Рассмотрим работу *n*-канальной СМО с отказами. Входящий поток заявок имеет показательный закон распределения с интенсивностью λ, а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону, с параметром μ. Найти вероятность отказа в обслуживании в данной системе, относительную и абсолютную пропускную способность и среднее число занятых каналов. Указанные характеристики определить аналитически. Как изменится вероятность отказа в обслуживании, если количество каналов n увеличится на единицу.

Таблица 9.12

Номер варианта	Интенсивность λ, чел/час	Среднее время обслуживания $\bar{t}_{об}$, мин	Число каналов, n
7	26	8	3

Решение: Время обслуживания и интенсивность поступления заявок следует привести к одному временному интервалу. За единицу времени примем 1 час. Тогда $\lambda = 26$ чел/час, $\bar{t}_{об} = 8/60 = 0{,}13$ часа, $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 1/0{,}13 = 7{,}69$. Нагрузка на систему: $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = 26/7{,}69 = 3{,}38$.

Рассчитаем риск отказа в обслуживании для $n = 3$. Результаты вычислений округлим до сотых.

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1 + 3{,}38 + \frac{3{,}38^2}{2!} + \frac{3{,}38^3}{3!}\right)^{-1} = 0{,}06$$

$$p_{отк} = p_3 = p_0 \frac{\alpha^3}{3!} = 0{,}06 \frac{3{,}38^3}{3!} = 0{,}39$$

Относительная пропускная способность СМО, то есть вероятность того, что поступающая заявка будет обслужена, составляет:

$$B = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}39 = 0{,}61$$

Абсолютная пропускная способность (количество обслуженных заявок в течение часа):

$$A = \lambda B = 26 * 0{,}61 = 15{,}86$$

Среднее число занятых каналов:

$$M = \frac{A}{\mu} = \frac{15{,}86}{7{,}69} = 2{,}06.$$

Исходя из полученных результатов, можно сказать, что данная СМО работает неэффективно, потому как обслуживается лишь около 61% поступивших требований, а 39% получают отказ, что способствует снижению выручки владельца терминалов. Разумеется, что повысить эффективность работы можно двумя способами: уменьшить среднее время обслуживания или увеличить число каналов обслуживания. Повлиять на среднее время обслуживания в данном случае невозможно, поэтому остается только увеличивать количество терминалов.

Рассмотрим, как изменится вероятность отказа в обслуживании, если количество каналов n увеличиться на единицу.

Получим, что $\lambda = 26$ чел/час, $\bar{t}_{об} = 8/60 = 0{,}13$ часа, $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 1/0{,}13 = 7{,}69$.

Нагрузка на систему $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = 26/7{,}69 = 3{,}38$.

Найдем вероятность отказа в обслуживании для $n = 4$. Результаты вычислений округлим до сотых.

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}\right)^{-1} = \left(1 + 3{,}38 + \frac{3{,}38^2}{2!} + \frac{3{,}38^3}{3!} + \frac{3{,}38^4}{4!}\right)^{-1} = 0{,}05$$

$$p_{отк} = p_4 = p_0 \frac{\alpha^4}{4!} = 0{,}05 \frac{3{,}38^4}{4!} = 0{,}27$$

Относительная пропускная способность СМО, т.е. вероятность того, что очередная заявка будет обслужена, составляет:

$$B = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}27 = 0{,}73.$$

Абсолютная пропускная способность (количество обслуженных заявок в течение часа):

$$A = \lambda B = 26 * 0{,}73 = 18{,}98$$

Среднее число занятых каналов:

$$M = \frac{A}{\mu} = \frac{18{,}98}{7{,}69} = 2{,}47.$$

По результатам решения видно, что вероятность отказа снизится до 0,27 или на 0,12 (0,39-0,27) при увеличении числа каналов обслуживания на единицу ($n = 4$), а абсолютная пропускная способность составит $A = 18{,}98 \approx 19$, она увеличилась на 3 (19-16) то есть из 26 заявок, поступающих в течение одного часа, лишь 7 получат отказ. Количество отказов можно уменьшить, увеличив число каналов, однако это связано с дополнительными затратами на покупку новых терминалов.

9.4.5. Использование факторного планирования экспериментов

При планировании и построении активных экспериментов, включая и модельные, мы имеем дело с двумя типами переменных, которые называются соответственно факторами x и откликами y. Факторы называют независимыми переменными, или управляемыми переменными, а отклики – выходными, или зависимыми переменными.

Планирование эксперимента при имитационном моделировании, как и другие проблемы планирования, требует, во-первых, выбора плана эксперимента, для чего необходимо:

- выбрать выходной параметр (отклик), количество варьируемых факторов, количество уровней варьирования, требуемое количество измерений выходной переменной или количество повторностей при проведении опытов;
- составить экспериментальную регрессионную модель;
- сравнить полученную модель с известными моделями, со стандартными планами и выбрать наилучший план.

Процедуру получения плана эксперимента можно разбить на три этапа:

- построение структурной модели;
- построение функциональной модели;
- построение экспериментальной модели.

Структурная модель отличается:

- количеством факторов;
- числом уровней варьирования факторов.

В зависимости от целей эксперимента выбирается структурная модель, причем выбор параметров структурной модели определяется точностью измерений факторов, необходимостью учитывать нелинейные эффекты и т.п. Структурная модель эксперимента имеет следующий вид:

$$N_s = f(k, q_i)$$

где N_s – число элементов эксперимента, другими словами, количество строк в матрице планирования;

k – количество факторов в эксперименте;

q_i – количество уровней факторов, где $i=1, 2,..., k$.

В функциональной модели определяется число компонентов структурной модели, которые будут работать при построении отклика. Функциональные модели бывают совершенными, или несовершенными. Функциональная модель называется совершенной, если в генерировании выходного параметра участвуют все ее элементы, т.е. $Nf = Ns$. В идеальном случае структурная модель совпадает с функциональной, однако в имитационном машинном эксперименте часто бывает ограничение на ресурсы, что может привести к выбору несовершенной функциональной модели. Следовательно, требуется реализовать компромисс между существующими ресурсами и пожеланиями исследователя:

$$N = pq^k,$$

где: p – число повторностей в эксперименте;

q – количество уровней факторов;

k – число факторов.

С учетом ограничений на ресурсы нужно определить q, k, p.

Первая задача – выбор переменной отклика, или, другими словами, целевой функции, или выходного параметра. Этот выбор зависит от цели исследования.

К параметру оптимизации предъявляются следующие требования:

- он должен быть эффективным при достижении цели эксперимента;
- должен быть достаточно универсальным;
- должен быть количественным;
- должен быть эффективным по статистическим меркам, т.е. точным;
- должен иметь физический смысл и быть легко вычисляемым;
- должен существовать при различных условиях проведения эксперимента.

Вторая задача – выделение существенных факторов.

После выбора выходных параметров, следует определить факторы, которые оказывают заметное влияние на эти переменные. Количество таких факторов может быть большим, поэтому надо найти самые существенные. К сожалению, чем меньше информации об исследуемой системе, тем больше можно найти факторов, которые, вроде бы, способны влиять на выходной параметр. Облегчает эту задачу при имитационном моделировании такая предварительная процедура, как анализ чувствительности имитационной модели к факторам.

После задания переменных отклика и определения существенных факторов необходимо эти факторы классифицировать по их отношению к машинному эксперименту. Факторы могут участвовать в эксперименте в трех видах: быть постоянным; быть переменным, но неуправляемым; быть измеряемыми и управляемыми. Для вхождения в план эксперимента нужны именно факторы измеряемые и управляемые.

Основные требования к факторам: управляемость, что нужно для проведения активного эксперимента, и однозначность.

Существуют важные требования к ансамблю факторов:

- задаваемая группа факторов должна быть достаточно полным множеством;
- должна быть высокой точность фиксации факторов;
- необходимы совместимость факторов друг с другом и требуется отсутствие линейной корреляции между факторами;
- факторы должны устанавливаться независимо от уровней остальных факторов.

Следующий шаг при разработке плана эксперимента – определение уровней варьирования. Более просто для математической обработки – использовать для всех факторов одинаковое число уровней. От выбора уровней зависит точность результатов. Кроме того, надо иметь в виду, следует ли учесть нелинейные эффекты. Минимальное количество уровней факторов – два. При двухуровневом варьировании можно получить линейную регрессионную модель или неполную квадратическую модель, включающую эффекты взаимодействия типа $b_{ij}x_ix_j$. Для получения полной квадратической модели число уровней должно быть 3–5. Число строк в матрице планирования вычисляется так: $N = q^k$.

Уровни могут быть:

- качественные или количественные;
- фиксированные или случайные.

Чаще используются количественные уровни факторов, значения которых могут быть измерены с использование некоторой шкалы. Кроме того, обычно применяют фиксированные значения уровней, т.е. их выбирают заранее.

Обработка данных упрощается, если сделать уровни равноотстоящими от середины интервала, границами которых они являются. Такое расположение обеспечивает ортогональность плана и этим упрощает определение коэффициентов полинома. Т. е. две наиболее удаленные точки на оси в области изменения количественной переменной, интересующей исследователя, устанавливают как два крайних уровня, и остальные уровни помещают внутри этого диапазона. Расстояние от центра варьируемого фактора на числовой оси до крайнего уровня называется интервалом варьирования. Минимальное значение интервала варьирования можно найти в предварительном эксперименте, определив значения выходного параметра y при крайних уровнях фактора x_i, с последующей проверкой значимости различий между этими значениями $|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|$ с помощью критерия Стьюдента:

$$t_R = \frac{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|}{S\{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|\}}$$

где $S\{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|\}$ – среднее квадратическое отклонение разности $|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|$;

t_R – расчетное значение критерия Стьюдента, которое надо сравнить с табличным значением, взятым при доверительной вероятности $P_Д = 0{,}95$ и числом степеней свободы f, равным числу степеней свободы дисперсии $S^2|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|$.

Пример статистической обработки ПФЭ

Для реализации многофакторной регрессионной модели $y = f(h_з, s_0, n)$ процесса технологической обработки детали, отражающей количественные связи между режимами трех последовательных операций: $h_з$, s_0, n и выходным параметром технико-экономического характера – коэффициент полезного времени К, был спланирован и поставлен эксперимент. Были приняты интервалы варьирования, найденные при проведении предварительных экспериментов. Факторы, уровни и интервалы варьирования факторов приведены в таблице 9.13. Матрица плана эксперимента и результаты измерений выходного параметра представлены в таблице 9.14. Данные для расчета $s^2\{y\}$ представлены в таблице 9.15.

Таблица 9.13

Уровни и интервалы

Уровень фактора	Факторы		
	***h₃*, мкм**	***S₀*, мм/об**	***n*, мин⁻¹**
Кодированное обозначение	x_1	x_2	x_3
Верхний (1)	40	0,1	650
Нижний (-1)	10	0,05	150

Таблица 9.14

План эксперимента

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	y
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0,450
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0,921
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	0,276
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	0,538
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0,481
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	0,870
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	0,268
8	1	1	1	1	1	1	1	0,523

Таблица 9.15

Данные для расчета $s^2\{y\}$

Номер опыта	*y*
1	0,553
2	0,545
3	0,545
4	0,561
5	0,561
6	0,545

Начинаем вероятностную обработку с определения коэффициентов регрессии.

Коэффициенты уравнения регрессии определяем по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{N}, \tag{9.4.1}$$

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot y_j}{N}, \tag{9.4.2}$$

$$b_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot x_{uj} \cdot y_j}{N}, \tag{9.4.3}$$

где $i = 1..k$ – номер фактора;

j – номер опыта, т.е. строки в матрице планирования;

N – количество опытов.

Результаты расчета коэффициентов по (9.4.1), (9.4.2), (9.4.3) следующие:

$$b_0 = \frac{1}{8}\sum_i y_i = 0{,}541; \qquad b_1 = \frac{1}{8}1{,}376 = 0{,}172;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(-1{,}120) = -0{,}140; \quad b_3 = \frac{1}{8}(-0{,}0432) = -0{,}0054;$$

Парные коэффициенты рассчитываем по (9.4.3):

$$b_{12} = \frac{1}{8}(-0{,}344) = -0{,}043; \qquad b_{13} = \frac{1}{8}(-0{,}088) = -0{,}011; \quad b_{23} = \frac{1}{8}(0{,}0304) = 0{,}0038;$$

Дисперсию $s^2\{y\}$ определили по параллельным опытам в центре плана, выполненных при основных уровнях факторов по формуле:

$$\mathbf{s^2\{y\}} = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1}, \tag{9.4.4}$$

где $n_0 = 6$ – число параллельных опытов в центре плана; y_u – значение функции отклика в u-ом опыте; $\bar{y}$ – среднее арифметическое значение функции отклика в n_0 опытах.

В данном варианте получены следующие значения среднего $\bar{\mathbf{y}}$ и дисперсии воспроизводимости $s^2\{y\}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_0}{n_0} = \frac{3{,}310}{6} = 0{,}552 \qquad s^2\{y\} = \frac{3{,}093 \cdot 10^{-4}}{5} = 6{,}187 \cdot 10^{-5}$$

Определяем значимость коэффициентов регрессии, применяя критерий Стьюдента ***t*,** который используется при расчете доверительного интервала $\Delta \boldsymbol{b}_{\mathrm{i}}$ для коэффициентов регрессии:

$$\Delta b_{\mathrm{i}} = \pm\, t \cdot S\{b_{\mathrm{i}}\},$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента, которое ищется при 5% уровне значимости и при количестве опытов в центре $n_0 = 6$: t=2,57;

$S\{b_i\}$ – среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии, определяемое по формуле:

$$S\{b_i\} = \sqrt{\frac{s^2\{y\}}{N}} = \sqrt{\frac{6{,}187 \cdot 10^{-5}}{8}} = 0{,}00219 \qquad (9.4.5)$$

Следовательно, доверительный интервал для коэффициентов равен:

$$\Delta b_{\mathrm{i}} = \pm 2{,}57 \cdot 0{,}00219 = \pm 0{,}00715.$$

Этот доверительный интервал получен с вероятностью $P_Д = 0{,}95$.

Значимыми являются те коэффициенты регрессии, которые по абсолютной величине не меньше Δb_{i}. Сравнивая все значения b_{i}с Δb, видим, что значимые коэффициенты регрессии: $b_0 = 0{,}541$; $b_1 = 0{,}172$; $b_2 = -\,0{,}140$; $b_3 = -\,0{,}0054$; $b_{12} = -\,0{,}043$;$b_{13} = -\,0{,}011$; $b_{23} = 0{,}0038$.

А коэффициенты: $b_3 = -\,0{,}0054$; $b_{23} = 0{,}0038$ – незначимые, т.к. их абсолютные значения меньше $\Delta b_{\mathrm{i}} = 0{,}00715 = 7{,}150 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, регрессионная модель для кодированных значений факторов, включающая только значимые коэффициенты, имеет вид:

$$Y = 0{,}541 + 0{,}172x_1 - 0{,}14x_2 - 0{,}043 \cdot x_1 \cdot x_2 - 0{,}011 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad (9.4.6)$$

Проверим разность $|b_0|$- $|\bar{y}|$, меньше ли она ошибки опыта $\sqrt{s^2\{y\}}$:

$$|0{,}547 - 0{,}552| = 0{,}005 < \sqrt{s^2\{y\}} = 0{,}008,$$

Следовательно, коэффициенты при квадратичных членах мало отличаются от нуля, и исследуемая зависимость с достаточной точностью может быть аппроксимирована полиномом первой степени. Переходить к квадратичной модели не требуется.

Определяем адекватность полученной модели. Для этого рассчитываем дисперсию адекватности S_a по формуле:

$$S^2_{a\ddot{a}} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left(y_{pi} - y_i\right)^2}{N - k_3} = \frac{7{,}031\cdot 10^{-4}}{8-5} = 2{,}344\cdot 10^{-4}$$

где z – количество значимых коэффициентов.

Теперь рассчитываем критерий Фишера:

$$F_p = \frac{S^2_{\grave{a}\ddot{a}}}{s^2_{\acute{o}}} = \frac{2{,}344\cdot 10^{-4}}{6{,}187\cdot 10^{-5}} = 3{,}788\,.$$

Расчетное значение критерия Фишера надо сравнить с табличным значением, взятым при большей дисперсии $S^2_{ад}$ с числом степеней свободы $f=N-(k+1)$ при доверительной вероятности P = 0,95 (выбирается из таблицы): $\boldsymbol{F_T}$ = 9,013; т.к. F_p = 3,788 $<F_T$ = 9,013, то найденная модель (9.4.6) адекватна с вероятностью P = 0,95.

Анализ полученной модели.

Из модели (9.4.6) и можно заключить, что выходной параметр y (коэффициент полезного времени) увеличивается:

1) при увеличении x_1;

2) при уменьшении x_2;

Член уравнения (9.4.6), включающий парное воздействие на y факторов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ ($-$ 0,043$\cdot x_1\cdot x_2$) и имеющий знак «минус», имеет более сложное влияние на выходной параметр. Влияние на выходной параметр со стороны этого члена модели следующее:

1) если знаки кодированных x_1 и x_2 одинаковые (оба положительные или оба отрицательные), то перед этим членом (9.4.6) будет знак «минус» и это приведет к уменьшению коэффициента полезного времени;

2) если знаки x_1 и x_2 разные (x_1 – положительный, а x_2 – отрицательный или наоборот), то перед этим членом (9.4.6) будет знак «плюс» и это приведет к увеличению коэффициента полезного времени.

Таким же образом влияет на выходной параметр член уравнения, содержащий взаимное влияние второго и третьего факторов ($-0{,}011 \cdot x_2 \cdot x_3$). Только данный эффект слабее предыдущего почти в 4 раза.

Регрессионную многофакторную модель (9.4.6) можно трактовать еще и следующим образом. По величине линейных коэффициентов регрессии модели для кодированных значений факторов (9.4.6) можно судить о степени влияния отдельных факторов на выходной параметр. Сравнивая значения коэффициентов по абсолютной величине, видим, что факторы x_1 и x_2 примерно одинаково влияют на выходной параметр, но x_1 влияет немного сильнее. Фактор x_3 в чистом виде не оказывает на выходной параметр воздействия, так как коэффициент b_3 оказался незначимым. Парное (одновременное) воздействие на y фактора x_1 совместно с x_2 и x_1 совместно с x_3 слабее, чем индивидуальное влияние этих факторов.

По результатам эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Для построения эмпирической модели исследуемого технологического процесса, отражающей количественные связи между режимами трех последовательных операций: $h_з$, s_0, n и технико-экономическим параметром – K, был спланирован и поставлен эксперимент ПФЭ.

2. Полученная модель включает все три фактора, причем наиболее влияющими на K являются факторы x_1 и x_2. Эта регрессионная модель позволяет оптимизировать технологический процесс, а также предсказать величину выходного параметра при произвольных значениях факторов.

9.5. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

Использование метода Монте-Карло – простейший вариант имитационного моделирования. Главный принцип этого метода – генерация выборок значений некоторых выходных величин, получаемых из моделей систем, содержащих вероятностные элементы и случайные события.

Метод Монте-Карло, как метод имитационного моделирования, позволяет изучать даже самые сложные системы, состоящие из громадного количества элементов, или содержащие очень большие отрезки модельного времени, хотя время имитации может составлять секунды. Когда моделируют сложные системы, то часто значения переменных задают в виде случайных чисел.

Моделирование методом Монте-Карло основано на статистических испытаниях.

В сущности, вычисления по методу Монте-Карло заключаются в выборе случайных чисел, имеющих заданное распределение. Если воспроизвести модель сложной системы со случайными элементами и провести N розыгрышей случайного явления, то на выходе модели будут определяться значения вектора выходного параметра Y, имеющего случайный характер, т.е. проводят N испытаний на модели системы при постоянных значениях параметров этой модели, причем благодаря случайному характеру алгоритма сложной системы получают выборку значений выходных параметров $\{Y_l\}$, $l = \overline{1, N}$. Затем из выборки значений $\{Y_l\}$ находят вектор математических ожиданий отдельных элементов этого вектора $\bar{Y} = \left(\bar{Y}_{1,} \bar{Y}_{2,} \dots \bar{Y}_{l,} \dots \bar{Y}_{N,}\right)$ при постоянных значениях параметров модели, а также находят дисперсию S^2_y.

Большое значение при использовании метода Монте-Карло имеет количество испытаний модели системы. Количество опытов N определяется из требуемой точности оценки $\bar{Y}$. При оценивании среднего значения элементов вектора $\bar{Y}$ встречаются такие случаи:

1. Y имеют нормальное распределение, но объем выборки малый (N<30).

Тогда используется статистический параметр t:

$$t = \sqrt{N-1}\,\frac{(\bar{Y}-\mu)}{S_y}; \quad S_y = \sqrt{S_{ij}^2},$$

где S_{ij}^2 и μ – соответственно, оценка дисперсии и генеральное значение математического ожидания элементов вектора откликов Y;

$\bar{Y}$ – среднее значение элементов вектора откликов. Величина t подчиняется распределению Стьюдента, поэтому, находя по таблицам табличное значение критерия Стьюдента $t_{кр}$ при числе степеней свободы $f = (N\text{-}1)$ и заданном уровне значимости α можно оценить доверительные интервалы для математических ожиданий выходного параметра:

$$\bar{Y} \pm d = \bar{Y} \pm \frac{t_{\text{кр}} S_y}{\sqrt{N-1}}$$

Требуемый объем выборки при заданной абсолютной доверительной ошибке *d* определяется по формуле:

$$N \geq \left(\frac{t_{\text{кр}} - S_y}{d}\right)^2 + 1$$

2. Случай, когда значения Y_i имеют нормальное распределение; генеральное значение математического ожидания μ известно, большой объем выборки (что считается при N>30). При этих условиях используется двусторонний параметр нормального распределения Z при заданном уровне значимости α/2. В этом случае доверительный интервал определяется так:

$$\bar{Y} \pm d = \bar{Y} \pm Z\alpha_{/2} \frac{S_y}{\sqrt{N}}$$

где $Z_{\alpha/2}$ – квантиль нормального распределения при доверительном уровне (1– α/2); *d* – величина абсолютной доверительной ошибки для $\bar{Y}$.

Требуемый объем выборки определяется по формуле:

$$N \geq \left(\frac{S_y - Z\alpha_{/2}}{d}\right)^2$$

3. Случай, если нормальность распределения компонент вектора Y заранее не известна, но известны генеральное значение математического ожидания μ и дисперсии S^2и объем выборки – большой (N>30). Тогда можно применить неравенство Чебышева:

$$P\left\{|\bar{Y} - \mu| \geq K \frac{\sigma}{N}\right\} \leq \frac{1}{K^2}$$

Отсюда получается доверительный интервал для оценки среднего в следующем виде:

$$\bar{Y} \pm d = \bar{Y} \pm \frac{K_\sigma}{\sqrt{N}} = \bar{Y} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}(1-\alpha)}$$

Объем выборки при заданном d определяется так:

$$N \geq \frac{\sigma}{d^2(1-\alpha)}$$

Обычно задается $d \approx \sigma/4$, при α=0,05. В этом случае получается: N>320. При определении дисперсии σ^2 задача отыскания ее оценки S_y^2 с достоверностью (1-α) записывается в виде:

$$P\{(1-d)\sigma^2 \leq S_y^2 \leq (1+d)\sigma^2\} = 1-\alpha$$

Эта задача решается только при больших размерах выборки N. В этих случаях удобно использовать значение χ^2 (хи-квадрат), которое можно сравнить с табличным значением этого критерия (распределение Пирсона) при (N-1) степенях свободы:

$$\chi^2 = \frac{(N-1)S^2}{\sigma^2}$$

Но т.к. объем выборки N большой, то это распределение можно приближенно заменить нормальным распределением. Тогда расчет требуемого объема выборки получает вид:

$$N \geq 1 + 2\left(\frac{Z\alpha/_2}{d}\right)^2,$$

где $Z_{\alpha/2}$ – параметр (квантиль) стандартного нормального распределения при уровне значимости $\alpha/2$; d – доверительный интервал оценки дисперсии (можно считать, что $d = \sigma_Э/4$, где $\sigma_Э^2$ – экспериментальная величина дисперсии выходного параметра).

Основной операцией, из множества которых реализуется процесс моделирования сложных систем при использовании метода Монте-Карло, служит некая l-тая реализация случайного процесса F(X,γ). Представим, что каждая реализация представляет один случай реализации алгоритмов развития ситуации в сложной системе. Обычно этот случай реализации состоит из составляющих двух типов. Первый тип составляющих представляет собой вычислительные операции F, второй же – розыгрыш значений γ_i с помощью алгоритма, аналогичного «бросанию жребия». Следовательно, возникновение случайности при моделировании явления определяется не расчетами, а случайным выпадением жребия.

Простейший пример использования метода Монте-Карло – это задача вычисления площади фигуры сложной формы. При решении такой задачи процедура строится так. Область А, площадь которой требуется найти, помещается в область G, площадь которой известна: G <∞ (рис. 9.37). После этого генерируется случайная величина ξ, имеющая математическое ожидание, равное С. Случайная величина ξ рассчитывается следующим равенством:

$$\xi = \mathrm{g}\mathrm{F}_{\mathrm{A}}(\eta) = \begin{cases} g \text{ для } \eta \in A \\ 0 \text{ для } \eta \notin A \end{cases} \tag{9.5.1}$$

где $F_A(\eta)$ – индикаторная функция области A; η – равномерно распределенный в области G случайный вектор.

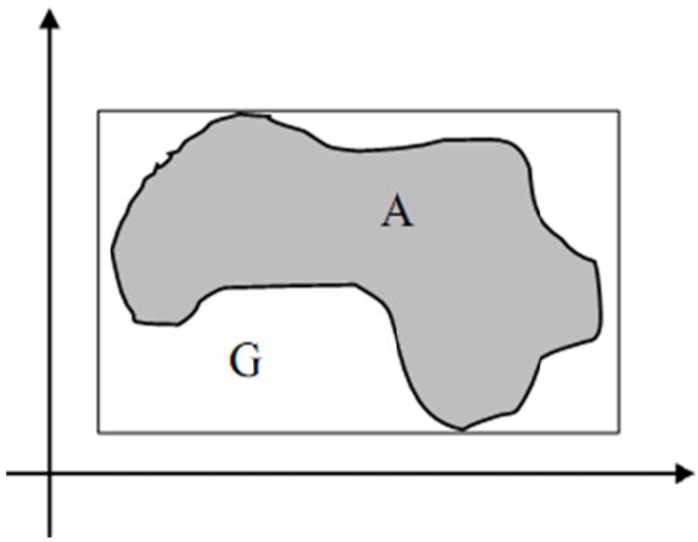


Рис. 9.37

Реализуется N независимых реализаций и формируется случайная выборка $\xi_1, \xi_2,..., \xi_N$ с помощью функции распределения (9.5.1) и вычисляется математическое ожидание C (оценка):

$$C = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \xi_l = g\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{N} F_A(\eta_l) = g\frac{h'}{N}$$

где h' – количество реализаций из совокупности $\{\xi_l\}$, попавших в область A, соотношение h'/N – это относительная частота пропадания случайных точек внутрь изучаемой области.

Применение метода Монте-Карло особенно эффективно тогда, когда невозможны реальное изучение объекта или эксперимент на объекте исследования, а другие методы математического моделирования применить затруднительно из-за отсутствия достаточно полного описания, или из-за большого количества допущений, которые могут привести к заметным неточностям и, как следствие, к ошибочным выводам.

9.5.1. Пример использования метода Монте-Карло

Фирмой изучается инвестиционный проект по производству некоторого продукта «*X*». При предварительном анализе с участием экспертов были выявлены 3 ключевых параметра проекта и найдены возможные пределы их изменения (табл. 9.16). Предполагается, что все ключевые переменные имеют нормальное распределение. Другие параметры проекта в течение срока реализации проекта допускаются постоянными величинами (табл. 9.17). В качестве выходного параметра принят показатель чистого приведенного дохода (NPV).

Таблица 9.16

Ключевые параметры проекта

Показатели	**Сценарий**		
	Наихудший	**Наилучший**	**Вероятный**
Объем выпуска – Q	150	300	200
Цена за штуку – P	40	55	50
Переменные затраты – V	35	25	30

Лист программы изображен на рис. 9.36, т.к. приняли, что закон распределения случайных величин нормальный, то для имитации значений переменных используем статистическую функцию НОРМРАСП(), которая генерирует значения «Переменные затраты», «Количество» и «Цена» в соответствующих ячейках. Задана выборка размером N = 500. Формулы для расчета входных и выходных случайных значений приведены в таблице 9.17, формулы для расчета параметров распределений выходных величин – в таблице 9.18.

Таблица 9.17

Неизменяемые параметры проекта

Показатели	Наиболее вероятное значение
Постоянные затраты – F	500
Амортизация – A	100
Налог на прибыль – T	60%
Норма дисконта – r	10%
Срок проекта – n	5
Начальные инвестиции – I_0	2000

Таблица 9.18

Формулы для расчета вероятностей листа «Модель проекта»

Показатели	Переменные затраты (V)	Объем выпуска (Q)	Цена за штуку (P)	Поступления (NCF)	Чистый приведенный доход (NPV)
P(E<=0)	=НОРМРАСП(0;I11;I12;1)	=НОРМРАСП(0;J11;J12;1)	=НОРМРАСП(0;K11;K12;1)	=НОРМРАСП(0;L11;L12;1)	=НОРМРАСП(0;M11;M12;1)
P(E<=min(E))	=НОРМРАСП(I14;I11;I12;1)	=НОРМРАСП(J14;J11;J12;1)	=НОРМРАСП(K14;K11;K12;1)	=НОРМРАСП(L14;L11;L12;1)	=НОРМРАСП(M14;M11;M12;1)
P(M(E)+s<=E<=max	=НОРМРАСП(I15;I11;I12;1)-НОРМРАСП(I11+I12;I11;I12;1)	=НОРМРАСП(J15;J11;J12;1)-НОРМРАСП(J11+J12;J11;J12;1)	НОРМРАСП(K15;K11;K12;1)-НОРМРАСП(K11+K12;K11;K12; ;1)	НОРМРАСП(L15;L11;L12;1)-НОРМРАСП(L11+L12;L11;L12;1)	НОРМРАСП(M15;M11;M11;M12;1)-НОРМРАСП(M11+M12;M11;M12;1)
P(M(E)-s<=E<=M(E))	=НОРМРАСП(I11;I11;I12;1)-НОРМРАСП(I11-I12;I11;I12;1)	=НОРМРАСП(J11;J11;J12;1)-НОРМРАСП(J11-J12;J11;J12;1)	=НОРМРАСП(K11;K11;K12;1)-НОРМРАСП(K11-K12;K11;K12;1)	=НОРМРАСП(L11;L11;L12;1)-НОРМРАСП(L11-L12;L11;L12;1)	=НОРМРАСП(M11;M11;M12;1)-НОРМРАСП(M11-M12;M11;M12;1)

Настройка генератора случайных чисел (рис. 9.38) ведется отдельно для каждой случайной переменной. Так, для величины «Переменные затраты» задаем следующие значения вероятностей: 0,5 для наиболее вероятного сценария и по 0,25 для каждого из наихудшего и наилучшего сценариев. Аналогично заполняем ячейки «количество» и «цены». В результате переменные затраты система заполняет соответствующими случайными значениями.

	A	B	C	D	E	F
1		Сценарий				
2	Показатели	Наихудший	Наилучший	Вероятный	Среднее	Отклонение
3	Объем выпуска – Q	150	300	200	212,5	54,48623679
4	Цена за штуку – P	40	55	50	48,75	5,448623679
5	Переменные затраты – V	35	25	30	30	3,535533906
6	Вероятность	0,25	0,25	0,5		
7						
8	Экспериментов	500				
9						
10	Переменные затраты	Количество	Цена	Поступления	Чистый приведенный доход (NPV)	
11	26,2251024	206,19791	44,741665	1387,230629	3 258,70р.	
12	30,13773899	315,23003	51,506626	2554,446009	7 683,36р.	
13	38,63036112	223,29338	46,830537	592,4180124	245,73р.	
14	30,7426798	153,42098	40,986472	488,6450141	-147,65р.	
15	33,4299404	172,33109	50,106562	1009,560142	1 827,03р.	
16	27,64898353	191,32216	39,752564	786,2732708	980,59р.	
17	27,79686027	162,57069	42,315425	804,1172176	1 048,24р.	
18	30,43887728	218,14786	52,30737	1768,225927	4 702,97р.	
19	33,13480668	157,9573	49,703542	906,8610622	1 437,72р.	
20	35,98865399	284,38714	55,844591	2118,709193	6 031,57р.	
21	29,56385134	175,74838	44,768388	928,8691162	1 521,14р.	
22	30,36392473	257,93598	47,910563	1670,363681	4 331,99р.	
23	37,3277708	280,87568	43,737082	580,0878009	198,99р.	
24	31,77179231	206,00067	49,64517	1332,771078	3 052,25р.	
25	29,90344788	214,76197	39,022435	643,3646724	438,86р.	

H	I
Показатели	Наиболее вероятное значение
Постоянные затраты – F	500
Амортизация – A	100
Налог на прибыль – T	60%
Норма дисконта – r	10%
Срок проекта – n	5
Начальные инвестиции – I_0	2000

Показатели	Переменные затраты – V	Объем выпуска – Q	Цена за штуку – P	Поступления (NCF)	Чистый приведенный доход (NPV)
Среднее значение	29,78508105	210,980032	48,75697	1465,486944	3555,34852
Стандартное отклонение	3,694421442	51,6154615	5,420063	706,8423621	2679,488674
Коэффициент вариации	0,124035971	0,24464619	0,111165	0,482325936	0,753650074
Минимум	19,6369729	60,3994268	29,06894	-506,554839	-3920,241381
Максимум	40,90031583	358,324502	65,26667	4656,679863	15652,48042
Число случаев NPV<0					34
Сумма убытков					-33934,0343
Сумма доходов					1811608,294
P(E<=0)	3,74737E-16	2,1799E-05	1,17E-19	0,019072798	0,092274895
P(E<=min(E))	0,003008317	0,00176507	0,00014	0,00263596	0,00263596
P(M(E)+σ<=E<=max)	0,157343214	0,15650109	0,157496	0,158652084	0,158652084
P(M(E)-σ<=E<=M(E))	0,341344746	0,34134475	0,341345	0,341344746	0,341344746

Рис. 9.38. Лист «Модель проекта»

Результаты моделирования видны в ячейках М 11:М 23. Ожидаемая величина дохода (NPV) равна 3555 при стандартном отклонении 2679,5.

Подсчитанный коэффициент вариации равен 0,75, и, так как он меньше 1, значит, риск данного проекта меньше среднего риска инвестиций фирмы. Анализ по результатам моделирования показывает, что возможность получить величину NPV<0 примерно 9% (ячейка М 20), т.к. получено: в выборке из 500 количество отрицательных значений NPV составляет 34 (ячейка М 16). Значит, с вероятностью примерно 91% можно утверждать, что доход ожидается положительным. Кроме того, видно, что вероятность события NPV> M(NPV)+σ, равна 15,9% (ячейка М22). Вероятность получения значения NPV в пределах от [M(NPV) – σ] до M(NPV) равна 34,1% (это видно в ячейке М23).

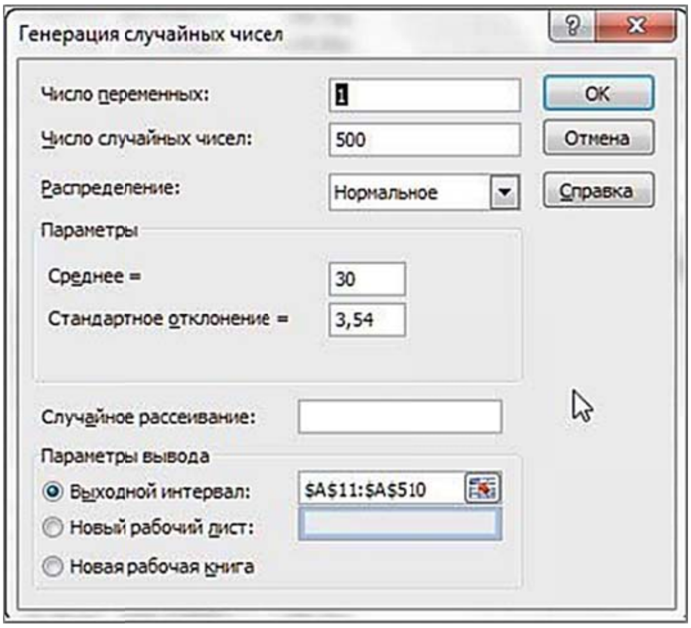


Рис. 9.39. Пример заполнения формы «Генерация случайных чисел»

Таблица 9.19

Формулы для расчета параметров распределения

Показатели	Среднее	Отклонение
Объем выпуска – Q	=СУММПРОИЗВ(B3:D3; $B$6:$D$6)	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((B3:D3-E3)^2;$B$6:$D$6))}
Цена за штуку – P	=СУММПРОИЗВ(B4:D4; $B$6:$D$6)	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((B4:D4-E4)^2;$B$6:$D$6))}
Переменные затраты –V	=СУММПРОИЗВ(B5:D5; $B$6:$D$6)	{=КОРЕНЬ(СУММПРОИЗВ((B5:D5-E5)^2;$B$6:$D$6))}

Постановка задачи

Структурным подразделением библиотеки является подразделение на два зала для чтения. В библиотеке существует два зала один зал дисплейный, другой обычный, время прибывших читателей составляет 10+/–1 мин, из них 20% идут в дисплейный зал, при этом стоимость посещения разового, дисплейного зала =200р. а стоимость обычного разового зала =50р. Вероятность того, что в дисплейном зале прочитают «статью» за 20 мин – 0,2, 30 мин – 0.2, 40 мин –0.6, а вероятность того, что в обычном зале прочитают 15 мин – 0.2, 20 мин – 0.1, 30 мин – 0.7. Узнать общую выручку библиотеки за 8 часов.

Рассчитать общее кол-во ожидающих в библиотеку, посчитать прибыль от работы библиотеки за 1 рабочий день, за два зала.

У библиотеки существует возможность расширить залы. Требуется оценить существенность сокращения очереди и посмотреть, будет ли это эффективно для нашего бюджета.

Создание концептуальной модели

Концептуальная модель в словесной форме определяет состав и структуру системы, свойства компонентов и причинно-следственные связи между ними. Здесь приводятся сведения и природе и параметрах элементарных явлений исследуемой системы, о виде и степени взаимодействия между ними, о месте и значении каждого явления в общем процессе функционирования системы.

Важным компонентом концептуальной модели является анализ объектов и действий – список всех видимых пользователю объектов приложения и действий, которые пользователь может совершать над каждым объектом. В реализации системы могут присутствовать и другие объекты, но предполагается, что они будут невидимыми для пользователя. В частности, в состав концептуальной модели не могут входить чисто имплементационные объекты.

Объекты концептуальной модели приложения могут образовывать структурную иерархию, в которой дочерние блоки будут перенимать действия родительских. В зависимости от приложения объекты могут также образовывать иерархию включения, в которой некоторые объекты включают в себя другие. Использование двух этих типов иерархии в концептуальной модели значительно облегчает проектирование и разработку связного и понятного пользовательского интерфейса.

Подобный анализ объектов и действий помогает управлять реализацией системы, поскольку он указывает наиболее удобный вид иерархии объектов, а также методы работы, которые предусматривает каждый вид. Он также облегчает структуру команд приложения, т.к. позволяет разработчику увидеть, какие действия применимы к разным объектам и могут быть спроектированы как обобщенные. В свою очередь это делает структуру команд более легкой для изучения пользователем: вместо того, чтобы осваивать большое количество объектно-ориентированных команд достаточно изучить несколько обобщенных, применяемых к разным объектам.

Процедура библиотеки является одной из составляющих единичного процесса на информационном предприятии. Поэтому оптимизация процесс библиотеки позволяет. В данной работе рассмотрены пути повышения эффективности работы библиотечной автоматизированной системы. Вначале потребовалось собрать и обработать статистическую информацию о характере обслуживания в библиотеке. Следующим шагом было построение имитационной модели данной организационно-экономической системы. В имитационной модели были учтены структура и основные параметры системы. Результаты работы имитационной модели использованы для подсчета критерия эффективности функционирования библиотечной системы.

Особенности функционирования библиотеки состоит в том, что ее деятельность полностью зависит от читающих-посетителей. Таким образом, чем больше будут приходить читающие в библиотеку, тем больше будет очередь в той или иной зал. Поэтому очень многое зависит от закона поступления читающих в библиотеку.

Важным моментом является время пребывания читателя в библиотеке или конкретно в том или ином зале. Это время зависит от длины очереди и времени посещения и прочтения книг, статей, журналов. В каждом зале посетители читают по-разному, время чтения не ограничено, поэтому поставлен вопрос о расширении залов.

Целью работы библиотеки является создание адекватной модели динамического процесса и проведение экспериментов с ней для оптимизации процесса посещения читателей, что увеличит бюджет библиотеки. Представим процесс работы библиотеки на рис. 9.40.

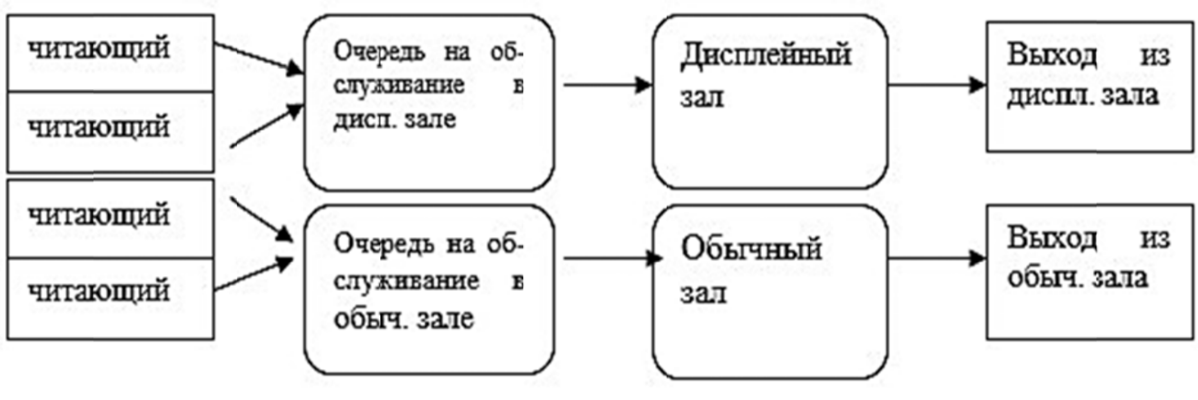


Рис. 9.40. Общая схема работы библиотеки

Сократить время ожидание читающих посетителей в библиотеку возможно за счет сокращения очереди в следствие расширения дисплейного и обычного зала. На это нужно будет выделить денежные средства и в то же время сократить время ожидания читающих, чтобы попасть в тот или иной зал. Поэтому необходимо оценить эффективность нашего введения. Это делается с помощью эксперимента ANOVA.

Если расширить библиотечные залы, это приведет к сокращению ожидания в очереди с 30 мин до 25 мин. Нужно посмотреть, является ли это существенным? Стоит ли расширять залы?

Формализация имитационной модели

Для создания логической структуры данной имитационной модели приведем схему алгоритма. Она отражает логику функционирования моделируемого объекта и содержит последовательность блоков.

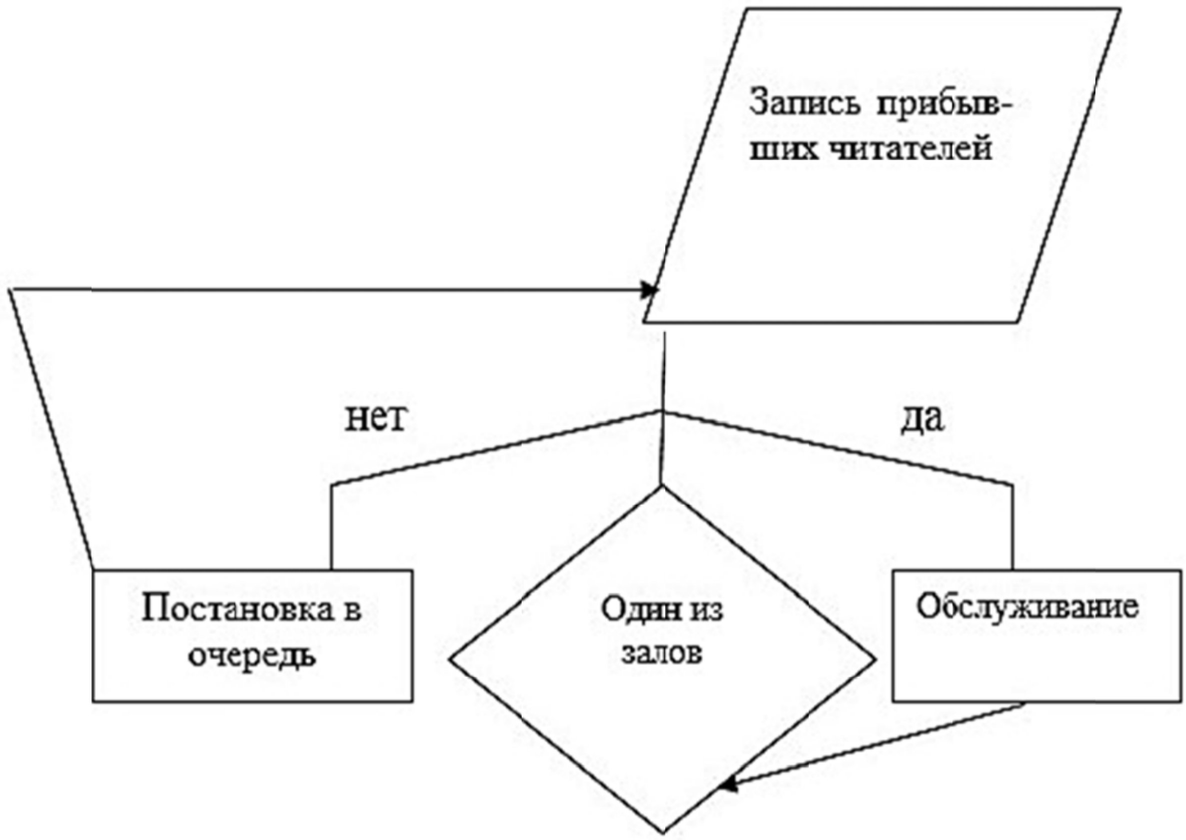


Рис. 9.41. Блок-схема обслуживания в библиотеки в соответствии с ГОСТ

Подготовка исходной информации.

Представление систем относится к системе массового обслуживания с 2-мя обслуживающими устройствами. Это – разомкнутая СМО.

Динамическими элементами являются читатели (посетители).

Обслуживание устройства – залы библиотеки (табл.9.20)

Таблица 9.20

Определение основных входных данных

Элементы системы	Роль в системе	Обозначения
Читающий	Транзакт	-
Зал дисплейный, обычный	Обслуживающие устройства	Zal_dicp Zal_obchn
Очередь	-	Ocher_dicplein Ocher_obchni

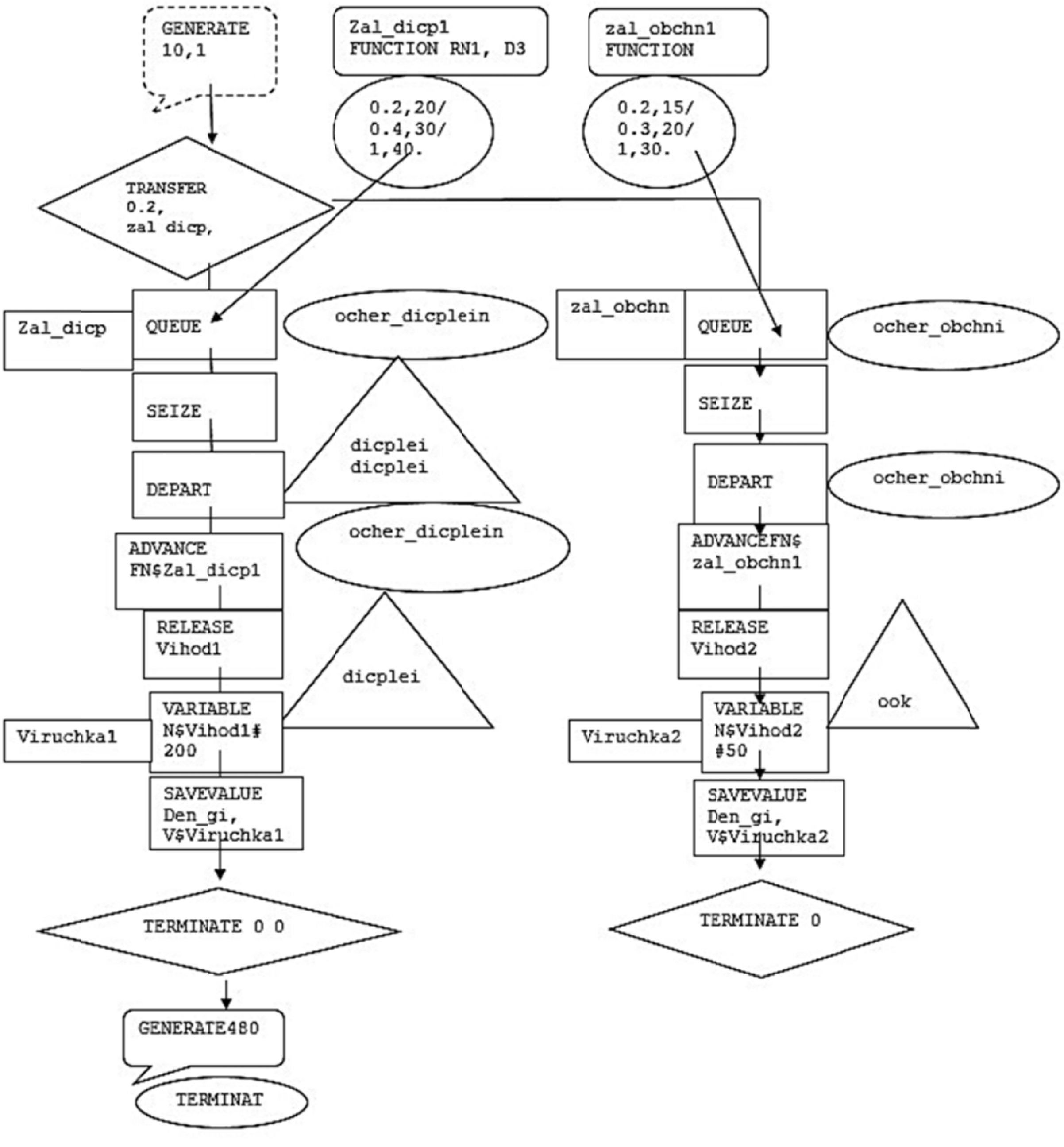


Рис.9.42. Блок-схема обслуживания в библиотеки в соответствии с принятыми обозначениями в GPSS

Программирование модели

Программа на языке GPSS, описывающая процессы работы залов в библиотеки (табл. 9.21).

Таблица 9.21

```
Zal_dicp1 FUNCTION RN1,D3
0.2,20 / 0.4,30 / 1,40
zal_obchn1 FUNCTION RN1,D3
0.2,15 / 0.3,20/ 1,30
      GENERATE              10,1
      TRANSFER              0.2,zal_dicp,zal_obchn
Zal_dicp QUEUE              ocher_dicplein
SEIZE       dicplei
      DEPART ocher_dicplein
      ADVANCE               FN$Zal_dicp1
Vihod1      RELEASE         dicplei
Viruchka1 VARIABLE N$Vihod1#200
SAVEVALUE   Den_gi,V$Viruchka1
TERMINATE   0

zal_obchn   QUEUE           ocher_obchni
SEIZE       book
      DEPART ocher_obchni
      ADVANCE               FN$zal_obchn1
Vihod2      RELEASE         book
Viruchka2 VARIABLE N$Vihod2#50
      SAVEVALUE             Den_gi,V$Viruchka2
      TERMINATE 0

GENERATE    480
TERMINATE 1
START 1
```

Анализ и интерпретация результатов пробного прогона модели

По результатам моделирования получен стандартный отчет (табл. 9.22), который выдает основные характеристики системы.

Таблица 9.22

Tuesday, December 12, 2017 12:22:03

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	18	2	0

NAME	VALUE
BOOK	10008.000
DEN_GI1	10006.000
DEN_GI2	10009.000
DICPLEI	10005.000
OCHER_DICPLEIN	10004.000
OCHER_OBCHNI	10007.000
VIHOD1	7.000
VIHOD2	14.000
VIRUCHKA1	10002.000
VIRUCHKA2	10003.000
ZAL_DICP	3.000
ZAL_DICP1	10000.000
ZAL_OBCHN	10.000
ZAL_OBCHN1	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	48	0	0
	2	TRANSFER	48	0	0
ZAL_DICP	3	QUEUE	36	22	0
	4	SEIZE	14	0	0
	5	DEPART	14	0	0
	6	ADVANCE	14	1	0
VIHOD1	7	RELEASE	13	0	0
	8	SAVEVALUE	13	0	0
	9	TERMINATE	13	0	0
ZAL_OBCHN	10	QUEUE	12	0	0
	11	SEIZE	12	0	0
	12	DEPART	12	0	0
	13	ADVANCE	12	0	0
VIHOD2	14	RELEASE	12	0	0
	15	SAVEVALUE	12	0	0
	16	TERMINATE	12	0	0
	17	GENERATE	1	0	0
	18	TERMINATE	1	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
DICPLEI	14	0.978	33.523	1	20	0	0	0	22
BOOK	12	0.656	26.250	1	0	0	0	0	0

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
OCHER_ DICPLEIN	22	22	36	1	9.866	131.546	135.304	0

OCHER_ OBCHNI	2	0	12	5	0.459	18.354	31.464	0

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
DEN_GI1	0	2600.000
DEN_GI2	0	600.000

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
20	0	480.685		20	6		7
50	0	486.877		50	0		51
0		960.000		51	0		17

Проанализируем стандартный отчет и определим основные, характеристики функционирования системы. В отчете указывается, что модель времени (ENDTIME) составляет 480 ед., в данном случае – минут. Число каналов обслуживания (FACILITIES) = двум залам.

Первый дисплейный зал за день обслуживает 36 посетителей (ENTRY)=36, второй обычный зал – 12 посетителей.

Важной характеристикой является коэффициент загрузки устройства обслуживания (коэффициент использования узла (UTIL)), который рассчитывается как соотношение общего времени обслуживания данным устройством к общему времени наблюдения. Значение коэффициента, близкое к единице, свидетельствует о высокой загрузке устройства в течение времени моделирования (в данной модели этот коэффициент для первого зала «дисплейного» составляет 0.978, для второго «обычного» зала 0.656).

Среднее время нахождения посетителя за устройством, дисплей 33.523 книга 26.250. К моменту окончания моделирования оба устройства были доступны (AVAIL=1). Так как посетители проходили в залы в порядке общей очереди и условие приоритетности не было установлено, то количество посетителей, ожидающих выполнения операции с прерыванием обслуживания других посетителей, PEND равно 0. Соответственно, количество посетителей, обслуживание которых было прервано, INTER равно 0.

Количество посетителей, ожидающих выполнения специфического условия, зависит от состояния залов (RETRY) и также равно 0.

Данные стандартного отчета о состоянии очереди в библиотечные залы можно проанализировать следующим образом:

Максимальное содержание очереди (MAX) равно 22 в дисплейный зал, 2 – в обычный зал; текущее содержание очереди к моменту завершения процесса моделирования (CONT.) равно 22 в дисплейный зал, 0 – в обычный; общее число посетителей, входящие в очередь (ENTRY), равно 36 в дисплейный зал, 12 – в обычный; общее число посетителей, входящих в очередь с нулевым временем пребывания в ней (ENTRY(0)), равно 1 для дисплейного зала, 5 – для обычного; взвешенная по времени средняя длина очереди в течение периода моделирования (AVE.CONT.) равно 9.866 мин. в дисплейный зал, 0.459 мин. – в обычный зал; среднее время нахождения посетителей в очереди (AVE.TIME) составляет 131.546 мин. в дисплейный зал, 18.354 мин. – в обычный зал.

Среднее время пребывания в очереди одного из посетителей в течение периода моделирования без учета «нулевых» входов (AVE.(-0)) составило 135.304 мин. В дисплейный зал, 31.464 мин. – в обычный зал. Количество посетителей, ожидающих выполнения специфического условия, зависящего от состояния очереди (RETRY), составило 0 по двум залам. Можно сделать выводы, что в саму библиотеку нет очереди, она существует только в библиотечные залы.

Значение сохраняемой величины DEN_GI1 (выручка за день дисплейного зала) равно 2600.000 т.р., DEN_GI2 (выручка за день обычного зала) – 600.000 р.

Как показал анализ результатов моделирования, значительную выручку библиотеки приносит дисплейный зал, это связано с большим приходом посетителей. Управленческое решение, которое может быть принято в данном случае, – это снижение времени стоящих в очереди посетителей путем расширения залов.

Как показал анализ результатов моделирования, дисплейный зал приносит больше выручки, чем обычный, это связано с тем, что дисплейный зал стоит больше, чем обычный зал. У дисплейного зала высокая загрузка устройства, так как читающие хотят попасть в этот зал больше, чем в обычный. Поэтому образуются большие очереди. Управленческое решение, которое может быть принято в данном случае, – это расширить дисплейный зал. Таким образом, читающие будут меньше ожидать свою очередь, прибыль вырастет. Выясним, как это повлияет на выходные характеристики модели, заменив в операторе GENERATE 10,1 время поступления клиентов GENERATE 10,3. После осуществления прогона модели получим следующий отчет (табл. 9.23).

Таблица 9.23

Стандартный отчет о результатах моделирования

GPSS World Simulation Report – kursach_omg1.68.1
Wednesday, January 12, 2017 14:43:47

START TIME END TIME BLOCKS FACILITIES STORAGES
0.000 480.000 18 2 0
FACILITY ENTRIES UTIL. AVE. TIME AVAIL. OWNER PEND
INTER RETRY DELAY
DICPLEI 14 0.975 33.425 1 18 0
0 0 25
BOOK 9 0.508 27.070 1 48 0
0 0 0

QUEUE MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME
AVE.(-0) RETRY
OCHER_
DICPLEIN 25 25 39 1 13.501 166.160
170.533 0
OCHER_
OBCHNI 2 0 9 5 0.159 8.458
19.031 0

SAVEVALUE RETRY VALUE
DEN_GI1 0 2600.000
DEN_GI2 0 400.000

Таблица 9.24

Результаты моделирования работы библиотечных залов в течение смены

Параметр	Поступление клиентов в салон	
	1	3
Количество обслуженных клиентов: Дисплейный зал Обычный зал	 22 2	 25 2
Среднее время обслуживания: Дисплейный зал (дисплей) Обычный зал (книга)	 33.523 26.250	 33.425 27.070

Коэффициент загрузки: Дисплейный зал Обычный зал	 0.978 0.656	 0.975 0.508
Максимальное число клиентов в очереди: Дисплейный зал Обычный зал	 22 2	 25 2
Среднее число клиентов в очереди: Дисплейный зал Обычный зал	 9.866 0.459	 13.501 0.159
Среднее время нахождения клиента в очереди: Дисплейный зал Обычный зал	131.546 18.354	166.160 8.458

Дополнительно можно проанализировать работу системы с использованием графика и гистограммы (на примере дисплейного зала).

Для получения графика изменения какого-либо показателя работы системы (например, количество посетителей в дисплейный зал) заполняются поля окна EditPlotWindow (рис. 9.43).

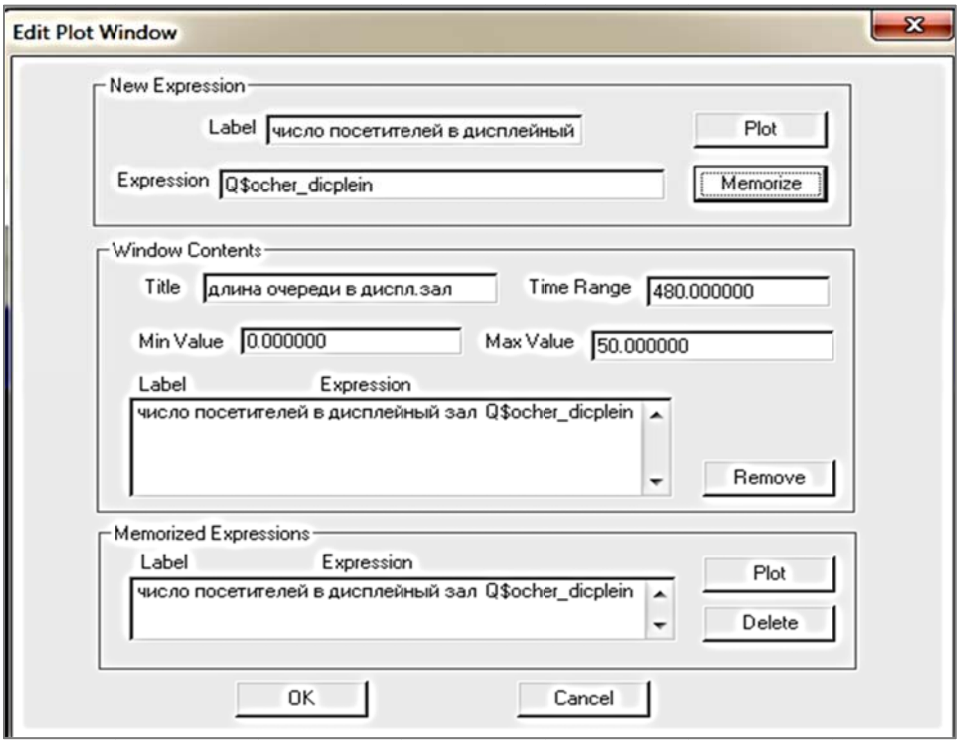


Рис. 9.43

Вводим исходные данные для построения графика. График имеет следующий вид (рис.9.44).

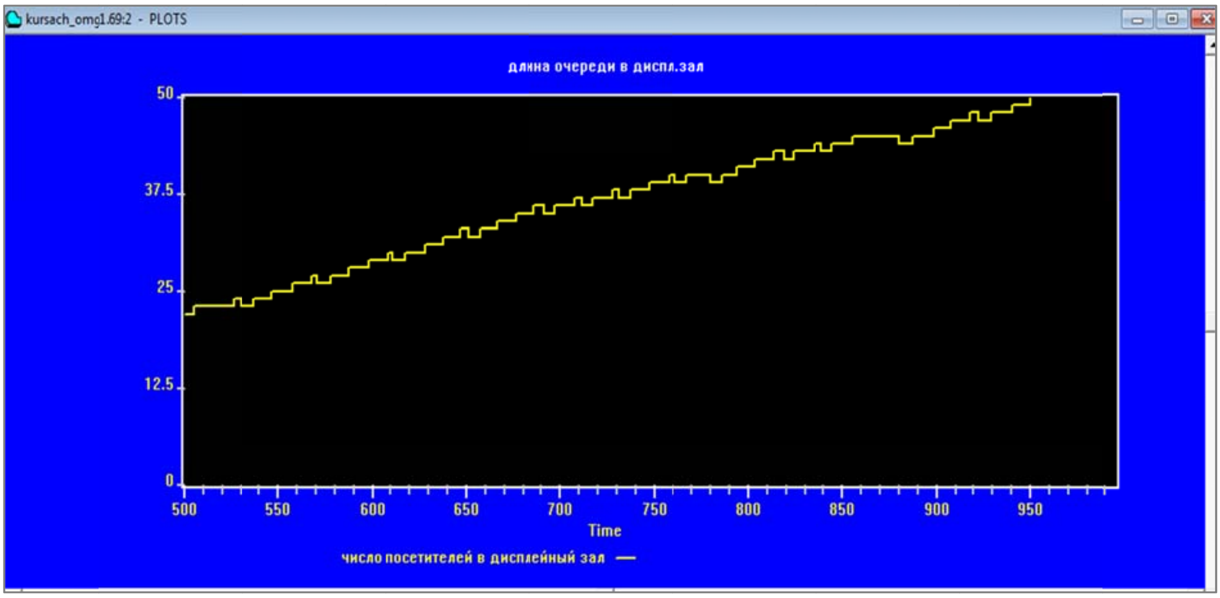


Рис. 9.44. Графическое изображение результатов моделирования

График позволяет установить, что очередь всегда меняется. График является неустойчивым.

Дополнительно может быть построена гистограмма результатов моделирования (рис. 9.45). Это делается путем добавления к тексту основной программы команды QTABLE:

INFORM QTABLE ocher_dicplein,0,5,25

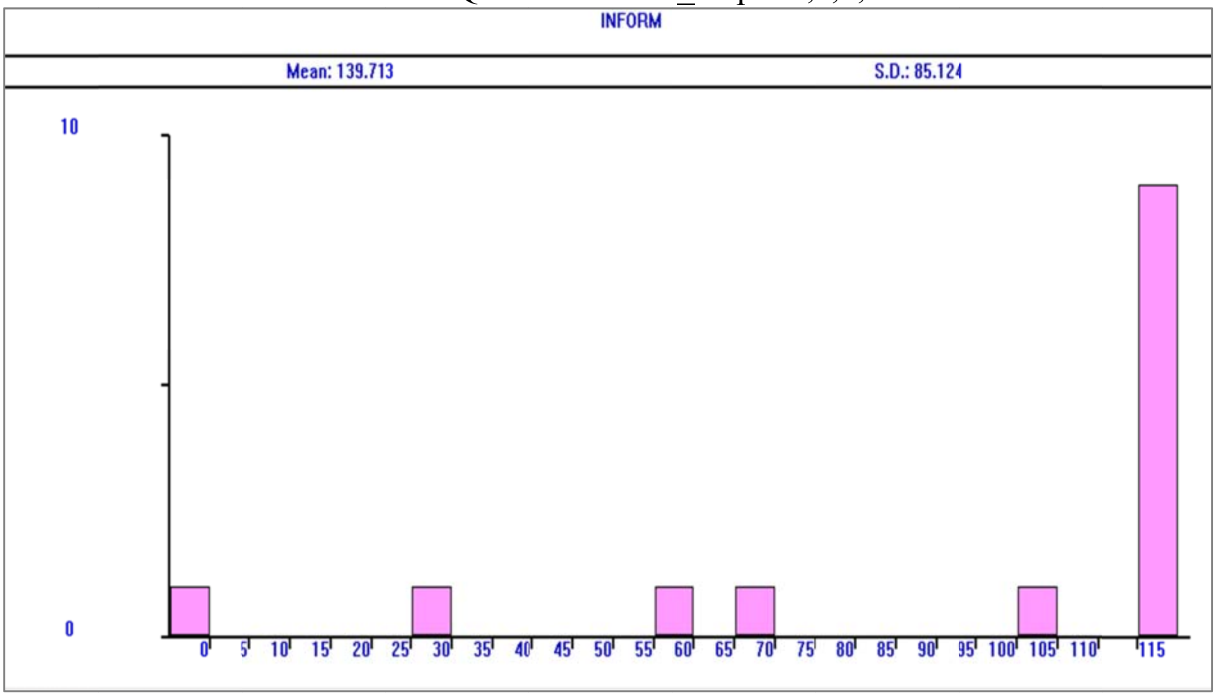


Рис. 9.45. Гистограмма результатов моделирования

Определение объема выборки

Проведем десять прогонов (N=10) модели, изменяя границы интервалов поступление посетителей, равного 10 мин (рис. 9.46).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ЗНАЧЕНИЕ ОПЕРАНДА В БЛОКА GENERATE	10,1.2	10,1.4	10,1.6	10,1.8	10,2.	10,2.2	10,2.5	10,2.7	10,2.9	10,3.
2	ОТКЛИК (РЕЗУЛЬТАТА ПРОГОНА СРЕДНЯЯ ДЛИНА ОЧЕРЕДИ В ДИСПЛЕЙНЫЙ ЗАЛ)	9,893	9,934	9,975	10,016	10,057	10,231	10,76	12,221	14,332	13,501
3											
4	СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ	11,092									
5											
6	ДИСПЕРСИЯ	2,74248									
7											
8	КОРЕНЬ	0,552015									
9											
10	НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ИНТЕРВАЛА	9,844447									
11	ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ИНТЕРВАЛА	12,33955									

Рис. 9.46. Определение объема выборки

9.5.2. Эксперимент ANOVA (дисперсионный анализ)

В данном случае выдвигаем гипотезу, которая формулируется следующим образом: если библиотека приняла решение расширить залы для чтения, тогда очередь сократится с 30 минут до 25. Существенно ли данный факт повлияет на величину выручки, сокращение очереди и увеличение вместимости читающих в залах? Стоит ли принимать такое управленческое решение?

Поскольку время поступления транзактов в систему является величиной случайной, то различные прогоны модели с временем ожидания в очереди 30 мин. дадут различные показатели среднего времени нахождения посетителей в очереди, следовательно, изменится объем выручки. Так же, как и в случае, если время обслуживания равно 25 мин.

Для проведения эксперимента ANOVA в файле исходной программы нужно заменить конкретное время обслуживания в устройстве на какую-либо переменную, например Cut_Time.

При использовании стандартной процедуры ANOVA для формирования групп к исходному файлу программы присоединяем новый текстовый файл text_BIBL.txt.

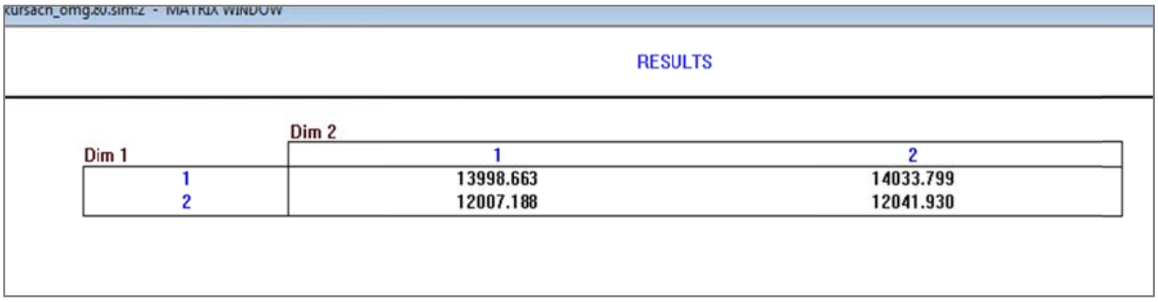
Таблица 9.25

```
;GPSS World Sample File – BIBLIOTEKA.GPS
RESULTS MATRIX,2,3 ;
OBSLU EQU 30
Treatment EQU 1
RMULT 411
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,1,1,qt$ocher_dicplein
Clear off
RMULT 421
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,1,2,qt$ocher_dicplein
Clear off
RMULT 431
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,1,3,qt$ocher_dicplein
Clear off
OBSLU EQU 25
Treatment EQU 2
RMULT 411
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,2,1,qt$ocher_dicplein
Clear off
RMULT 421
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,2,2,qt$ocher_dicplein
Clear Off
RMULT 431
Start 100,NP
MSAVEVALUE RESULTS,2,3,qt$ocher_dicplein
```

Этот файл определяет глобальную матрицу (2*3) результатов, в которой будут храниться числовые значения-результаты прогонов для проведения дисперсионного анализа. В данном файле команда EQU используются для установления среднего времени обслуживания. Оператор RMULT задает разные значения генератора случайных, чисел. Блок CLEAROFF «сбрасывает» статистику между прогонами для предотвращения влияния, предыдущих результатов на последующие. Операнд NP в блоке START отключает создание стандартного отчета о результатах моделирования.

Для просмотра матрецы результатов используются Window/Simulation

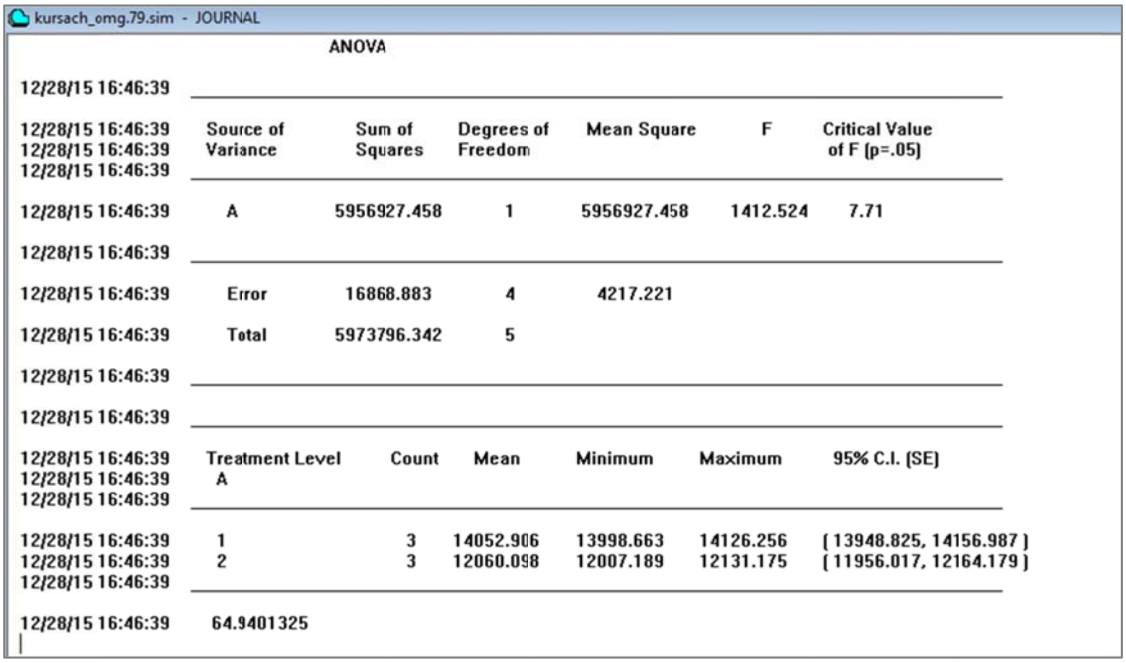
Window/matrixwindow (рис. 9.47)


kursach_omg.80.sim:2 - MATRIX WINDOW

RESULTS

Dim 1 \ Dim 2	1	2
1	13998.663	14033.799
2	12007.188	12041.930

Рис. 9.47. Матрица результатов серии прогонов


kursach_omg.79.sim - JOURNAL

ANOVA

Source of Variance	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F	Critical Value of F (p=.05)
A	5956927.458	1	5956927.458	1412.524	7.71
Error	16868.883	4	4217.221		
Total	5973796.342	5			

Treatment Level A	Count	Mean	Minimum	Maximum	95% C.I. [SE]
1	3	14052.906	13998.663	14126.256	[13948.825, 14156.987]
2	3	12060.098	12007.189	12131.175	[11956.017, 12164.179]

64.9401325

(each journal line is prefixed with 12/28/15 16:46:39)

Рис. 9.48. Таблица результатов дисперсионного анализа

В данном конкретном случае в окне дисперсионного анализа Fтабл= 7,71, а Fфакт= 64.9401325. Следовательно, гипотеза о несущественности изменения длины очереди вследствие увеличения скорости обслуживания до 25 минут подтверждается. Мы можем расширять зал, т.к. это будет существенно для библиотеки.

Fтабл 7,71 <Fфакт 64.9401325. H 0 отвергается

Проведем имитационное моделирование технологии банковской деятельности на примере прикладной задачи.

Формулировка задачи

Кредитный отдел банка занимается предоставлением кредитов сроком на 1 год. Число клиентов является случайной величиной и в начале года заранее неизвестно.

Клиентами данного отдела могут быть государственные органы, физические лица, другие банки.

Сумма кредита каждого клиента является случайной величиной с заданным распределением. В частности, можно принять допущение о том, что сумма кредита имеет нормальное распределение с заданными параметрами (средним значением суммы кредита и средним квадратическим отклонением от этой суммы).

Для количества заемщиков можно также использовать нормальное распределение. Дополнительным условием является то, что полученное возможное значение непрерывной случайной величины необходимо округлить до целого числа.

Кредитный отдел получает прибыль от клиентов, которая составляет некоторую долю от суммы кредита. Но также возможны убытки в случае невозврата кредита. Вероятность невозврата кредита зависит от типа заемщика.

В качестве показателя эффективности логично будет выбрать наименьшую гарантированную прибыль от предоставления кредитов, причем случайная величина прибыли имеет нормальное распределение. Критерием эффективности будет условие максимизации минимальной гарантированной прибыли.

Пусть деятельность кредитного отдела протекает при следующих условиях:

1. Число клиентов кредитного отдела является случайной величиной, которая распределена по нормальному закону с заданными параметрами – его математическим ожиданием $K_{ср}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{кл}$.

2. Процентная доля от общего числа клиентов составляет:

A_1 – государственные учреждения;

A_2 – другие банки;

A_3 – физические лица.

3. Вероятность невозврата кредита определяется типом заемщика и равна:

P_1 – для государственных органов;

P_2 – для банков;

P_3 – для физических лиц.

4. Сумма кредита является случайной величиной, которая распределена по нормальному закону с параметрами – средним значением суммы $S_{срj}$ и средним квадратическим отклонением суммы σ_j, которые зависят от типа заемщика.

При этом тип заемщика характеризуется величиной j:

$j = 1$ – для государственных учреждений;

$j = 2$ – для банков;

$j = 3$ – для физических лиц. В процессе моделирования вычисляются следующие параметры:

1. Случайная прибыль (убыток) за одну реализацию. Если кредит возвращен, то:

$$SPrib = i * S_j + SPrib,$$

где i – процентная ставка банка; S_j – случайная величина с параметрами $S_{срj}$ и σ_j; j = 1,2, 3.

В случае если кредит не возвращен, то убыток определяется суммой невозвращенного кредита следующим образом:

$$SPrib = -S_j + SPrib.$$

2. Сумма случайных величин прибыли для N_p случайных реализаций:

$$S = S + SPrib;$$

$$S = \sum SPrib.$$

3. Сумма квадратов случайных величин прибыли для N_p случайных реализаций:

$$S2=S2+ SPrib^2;$$

$$S2 = \sum SPrib^2.$$

Показателем эффективности работы кредитного отдела банка является минимальная гарантированная прибыль, которую можно определить по следующим зависимостям:

$$M_{prib} = \frac{S}{Np},$$

$$\sigma_{prib} = \sqrt{\frac{1}{Np-1} * (S2 - Np * Mprib * \ Mprib)},$$

$$G_{prib} = M_{prib} - K_{a*}\ \sigma_{prib},$$

где M_{prib} –это математическое ожидание (среднее значение) прибыли;

σ_{prib} – среднее квадратическое отклонение прибыли;

K_{α} – квантиль нормального распределения, соответствующий заданному значению надежности α (пусть $\alpha = 0{,}9$, тогда $K_{\alpha} = 1{,}28$);

G_{prib} – минимальная гарантированная прибыль.

Критерием эффективности будет максимум минимальной гарантированной прибыли (табл. 9.26).

Таблица 9.26

$K_{ср}$	80
$\sigma_{кл}$	7
$S_{ср\ 1}$	10000
σ_1	24
$S_{ср\ 2}$	8000
σ_2	35
$S_{ср\ 3}$	8000
σ_3	30
P_1	0.03
P_2	0.02
P_3	0.02
i, %	17

Примем следующие исходные данные:

- Среднее число клиентов банка $K_{ср} = 80$;
- Среднее квадратическое отклонение числа клиентов банка $\sigma_{кл} = 7$;

- Средняя сумма кредита для госучреждений $S_{ср\ 1}$ = 10000 руб.;
- Среднее квадратическое отклонение суммы кредита для госучреждений σ_1 = 24 руб.;
- Средняя сумма кредита для банков $S_{ср\ 2}$= 8000 руб.;
- Среднее квадратическое отклонение суммы кредита для банков σ_2 = 35 руб.;
- Средняя сумма кредита для физических лиц $S_{ср\ 3}$ = 8000 руб.;
- Среднее квадратическое отклонение суммы кредита для физических лиц σ_3 = 30 руб.;
- Вероятность невозврата кредита госучреждением P_1 = 0,03;
- Вероятность невозврата кредита банком P_2= 0,02;
- Вероятность невозврата кредита физическим лицом P_3 = 0,02;
- Процентная ставка i = 0,17;
- Число случайных реализаций N_p= 1000.

Варьируемые переменные:
- Доля госучреждений от общего числа клиентов A_1= 0,3; 0,2; 0,3;
- Доля банков от общего числа клиентов A_2= 0,2; 0,3; 0,3;
- Доля физических лиц от общего числа клиентов A_3 = 0,5; 0,5; 0,4.

Программный код

Решение проведем с использованием языка программирования VBA.

Программный код:

```
Sub Макрос 1()'
k = 0
For i = 1 To 1000
Cells(2 + i, 5) = i
Cells(2 + i, 6) = "=int(NORM.INV(RAND(),80,7))"
Cells(2 + i, 7) = 0.3 * Cells(2 + i, 6)
Cells(2 + i, 8) = 0.2 * Cells(2 + i, 6)
Cells(2 + i, 9) = 0.5 * Cells(2 + i, 6)
Cells(2 + i, 10) = "=int(NORM.INV(RAND(),10000,24))"
Cells(2 + i, 11) = Cells(2 + i, 7) * Cells(2 + i, 10)
Cells(2 + i, 12) = "=int(NORM.INV(RAND(),8000,35))"
Cells(2 + i, 13) = Cells(2 + i, 8) * Cells(2 + i, 12)
Cells(2 + i, 14) = "=int(NORM.INV(RAND(),8000,30))"
Cells(2 + i, 15) = Cells(2 + i, 9) * Cells(2 + i, 14)
Cells(2 + i, 16) = 0.02 * Cells(2 + i, 11)
```

```
Cells(2 + i, 17) = 0.02 * Cells(2 + i, 13)
Cells(2 + i, 18) = 0.02 * Cells(2 + i, 15)
Cells(2 + i, 19) = (Cells(2 + i, 11) + Cells(2 + i, 13) + Cells(2 + i, 15))
* 0.17 – Cells(2 + i, 16) – Cells(2 + i, 17) – Cells(2 + i, 18)
k = k + Cells(2 + i, 19)
Next i
Cells(2, 1) = 0.001 * k
End Sub
```

Результаты моделирования.

Таблица 9.27

A_1	A_2	A_3	**Минимальная гарантированная прибыль, G_{prib}, руб.**
0,3	0,2	0,5	187073
0,2	0,3	0,5	197026
0,3	0,3	0,4	166215

Как показали результаты расчетов, оптимальный вариант достигается при втором способе распределения кредитного портфеля (рост числа кредитов для банков и снижение для госструктур).

Таблица 9.28

Фрагмент расчета

Номер испытания	**Клиентов**	**Клиентов ГОС**	**Клиентов Банк**	**Клиентов ФЛ**	**Ср. сумма ГОС**	**Итого ГОС**	**Ср. сумма Банк**	**Итого Банк**
1	75	22	22	31	10016	310496	8050	177100
2	75	22	22	31	10030	310930	7939	174658
3	75	22	22	31	10004	310124	8030	176660
4	85	25	25	35	9995	349825	7956	198900
5	87	26	26	35	9988	349580	8024	208624
6	72	21	21	30	9965	298950	8008	168168
7	81	24	24	33	9927	327591	7984	191616
8	72	21	21	30	10007	300210	7970	167370
9	71	21	21	29	9984	289536	7970	167370
10	74	22	22	30	10025	300750	7975	175450
11	90	27	27	36	9993	359748	8063	217701
12	82	24	24	34	9978	339252	7960	191040

Ср. сумма ФЛ	Итого ФЛ	Невозврат ГОС	Невозврат Банк	Невозврат ФЛ	Доход
7981	247411	300.48	2415	159.62	122076.09
7995	247845	300.9	2381.7	159.9	121841.11
8011	248341	300.12	2409	160.22	122101.91
7971	278985	299.85	2386.8	159.42	137864.63
7984	279440	299.64	2407.2	159.68	139532.96
7981	239430	298.95	2402.4	159.62	117252.19
7971	263043	297.81	2395.2	159.42	130130.07
8019	240570	300.21	2391	160.38	117533.91
8013	232377	299.52	2391	160.26	114327.33
8001	240030	300.75	2392.5	160.02	118905.83
7976	287136	299.79	2418.9	159.52	144101.24
7939	269926	299.34	2388	158.78	133190.94

9.5.3. Практическое применение имитационного моделирования в экономике

Большой класс систем, которые трудно изучать аналитическими способами, но которые хорошо изучаются методами статистического моделирования, сводятся к системам массового обслуживания (далее – СМО).

В СМО имеется в виду, что есть каналы обслуживания (типовые пути), через которые проходят заявки в процессе обработки. Принято считать, что каналы обслуживаются заявками. Каналы могут быть различными по характеристикам, назначению, они сочетаются в разных комбинациях; заявки могут быть в очередях и ждать обслуживания. Часть заявок может обслуживаться каналами, а некоторым частям может быть отказано в этом. Главное, что, с точки зрения системы, заявки абстрактны: это то, что хочет обслуживаться, то есть в системе пройти определенный путь. Кроме того, абстракцией являются и каналы: это то, что обслуживает заявки.

Заявки приходить могут неравномерно, каналы обслуживать могут различные заявки за разное время и так далее, число заявок всегда довольно велико. Это делает такие системы сложными для изучения и управления, и все причинно-следственные связи проследить в них возможным не представляется. Поэтому допускается представление о том, что в сложных системах обслуживание носит случайный характер.

Примерами СМО могут быть перевозка пассажиров и автобусный маршрут; производственный конвейер по обработке деталей; эскадрилья самолетов, влетающая на чужую территорию, «обслуживающуюся» зенитками ПВО; рожок и ствол автомата, «обслуживающие» патроны; электрические заряды, которые перемещаются в некотором устройстве и т.д.

Все эти системы объединяются в один класс СМО, так как подход к их изучению является единым. Он заключается в том, что, во-первых, при помощи генератора случайных чисел разыгрываются случайные числа, имитирующие случайные моменты появления заявок и время их обслуживания в каналах. Однако эти случайные числа в совокупности, естественно, подчиняются статистическим закономерностям.

Таким образом, система испытывается случайными входными сигналами, которые подчинены статистическому заданному закону, а в качестве результата принимаются статистические показатели, усредненные по количеству опытов или по времени рассмотрения.

Все модели СМО собираются типовым образом из небольшого числа компонентов (источник заявок, канал, заявка, очередь, дисциплина обслуживания, кольцо, стек и так далее), что дает возможность эти задачи имитировать типовым образом. Модель системы для этого собирается из конструктора таких компонентов. Неважно, какая конкретно система изучается, важно, что схему системы собирают из одних и тех же элементов. Конечно, структура схемы всегда будет различной.

Дадим определение некоторым основным понятиям СМО.

Каналы – это то, что обслуживает; они бывают горячими (заявку начинают обслуживать в момент ее поступления в канал) и холодными (для начала обслуживания каналу требуется время на подготовку).

Источники заявок – они порождают заявки в случайные моменты времени в соответствии с заданным пользователем статистическому закону. Клиенты, они же заявки, входят в систему (порождаются источниками заявок), обслуживаются (проходят через ее элементы), покидают ее обслуженными или неудовлетворенными. Случаются нетерпеливые заявки: им надоело находиться в системе или ожидать, и они покидают СМО по собственной воле. Заявки образуют потоки: поток заявок на входе системы, поток заявок отказанных, поток заявок обслуженных. Поток характеризуется числом заявок определенного сорта, которые наблюдаются за единицу времени (час, сутки, месяц) в некотором месте СМО, то есть поток является величиной статистической.

Очереди характеризуются дисциплиной обслуживания (правилами стояния в очереди), числом мест в очереди (максимум сколько клиентов может быть в очереди), структурой очереди (связь в очереди между местами). Бывают очереди ограниченные и неограниченные.

Важнейшими дисциплинами обслуживания являются:

- FIFO (FirstIn, FirstOut – первым пришел, первым ушел): если заявка в очередь пришла первой, то она уйдет на обслуживание первой;
- LIFO (LastIn, FirstOut – последним пришел, первым ушел): если заявка пришла в очередь последней, то она уйдет на обслуживание первой (примером являются патроны в рожке автомата);
- SF (ShortForward – короткие вперед): обслуживаются в первую очередь заявки из очереди, которые имеют меньшее время обслуживания.

Рассмотрим одноканальную СМО с отказами, которая является постом ежедневного обслуживания для мойки автомашин. Заявкой выступает автомобиль, который прибыл в момент, когда пост занят, он в обслуживании получает отказ. Интенсивность потока автомашин составляет $\lambda = 1{,}0$ (1 машина в час). Среднее время обслуживания составляет 1,8 часа. Поток обслуживании и поток автомобилей являются простейшими.

Требуется определить предельные значения в установившемся режиме:

- относительную пропускную способность q;
- абсолютную пропускную способность A;
- вероятность отказа Pотк.

Нужно сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждая автомашина обслуживалась точно 1,8 часа и автомашины следовали одна за другой без задержки.

Решение:

1. Рассчитаем интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t\text{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555$$

А. Определим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0.555}{1 + 0.555} = 0.356$$

Значение q показывает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35,6% прибывающих на пост мойки автомашин.

Б. Абсолютная пропускная способность вычисляется по формуле:

$$А = \lambda * q = 1 * 0{,}356 = 0{,}356$$

Значение свидетельствует о том, что система (автомойка) осуществить способна в среднем 0,356 обслуживаний автомашин в час.

Вероятность отказа составит:

$$Ротк = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644$$

Это свидетельствует, что около 64,4% прибывших автомашин на пост мойки получат отказ в обслуживании.

В. Номинальная пропускная способность системы составляет:

$$Аном = \frac{1}{t обсл} = \frac{1}{1{,}08} = 0{,}555 \text{ (автомобилей в час).}$$

Получается, что $А_{ном}$ выше в 1,5 раза, чем фактическая пропускная способность, которая вычислена с учетом времени обслуживания и случайного характера потока заявок.

2. Далее рассмотрим пример одноканальной СМО с ожиданием.

Специализированный диагностический пост является одноканальной СМО. Количество стоянок для автомашин, которые ожидают проведения диагностических работ, ограниченно и равно 3 [(N – 1) = 3]. В случае, если заняты все стоянки, т.е. находится в очереди уже три автомашины, то очередная автомашина, прибывшая на диагностику, не становится в очередь на обслуживание. Поток автомашин, которые прибывают на диагностические работы, распределен по закону Пуассона и обладает интенсивностью λ = 0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомашины распределено по показательному закону и равняется в среднем 1,05 час.

Нужно определить вероятностные характеристики диагностического поста, который функционирует в стационарном режиме.

Решение:

Параметр потока обслуживаний автомашин:

$$\mu = \frac{1}{t\text{об}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952$$

Приведенная интенсивность потока автомашин определяется отношением интенсивностей λ, и μ, т.е.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893$$

3. Определим финальные вероятности системы по формуле:

$$\text{Po} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0.893}{1-0.893^5} = 0.248$$

$$P_1 = \rho * P\,0 = 0{,}893 * 0{,}248 = 0{,}221$$

$$P_2 = \rho^2 * P\,0 = 0{,}893^2 * 0{,}248 = 0{,}198$$

$$P_3 = \rho^3 * P\,0 = 0{,}893^3 * 0{,}248 = 0{,}177$$

$$P_4 = \rho^4 * P\,0 = 0{,}893^4 * 0{,}248 = 0{,}158$$

4. Вероятность отказа в обслуживании автомашины

$$P_{\text{отк}} = P\,4 = \rho^4 * P\,0 = 0{,}893^4 * 0{,}248 = 0{,}158$$

5. Относительная пропускная способность поста диагностики составляет:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842$$

6. Абсолютная пропускная способность диагностического поста составляет:

$$A = \lambda * q = 0{,}85 * 0{,}842 = 0{,}716 \text{ (автомобиля в час).}$$

7. Среднее количество автомашин, которые находятся в очереди и на обслуживании (т.е. в системе массового обслуживания):

$$Ls = (\rho * \frac{1-(N+1)(\rho)^N + N*\rho^{N+1}}{(1-\rho)*(1-\rho^{N+1})}$$

$$Ls = (0.893 * \frac{1-(4+1)*0.893^4 + 4*0.893^5}{(1-0.893)*(1-0.893^5)} = 1.77$$

8. Среднее время пребывания автомашины в системе:

$$Ws = Ls/(\lambda * (1 - P_N) = 1.77/(0.85 * (1 - 0.158) = 2.473 \text{ часа}$$

9. Среднее время пребывания заявки в очереди на обслуживание:

W4 = Ws – 1 / μ = 2.473 – 1 / 0.952 = 1.423 часа

10. Среднее количество заявок в очереди (длина очереди):

$L_q = \lambda * (1 – P_N) * W_q = 0.85 * (1 – 0.158) * 1.423 = 1.02$

Деятельность рассмотренного диагностического поста можно считать удовлетворительной, поскольку диагностический пост не обслуживает автомашины в среднем в 15,8% случаев (Ротк = 0,158).

Теперь перейдем к рассмотрению одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания (т.е. N →∞). Другие условия работы СМО остаются без изменений.

Возьмем ситуацию, рассмотренную в примере 2, где говорится о деятельности диагностического поста. Пусть рассматриваемый диагностический пост располагает неограниченным числом площадок для стоянки автомобилей, прибывающих на обслуживание, т.е. не ограничена длина очереди. Нужно вычислить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (диагностического поста);
- среднее количество автомашин, которые находятся в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее время пребывания автомашины в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее количество автомашин на обслуживании и в очереди;
- среднее время пребывания автомашины в очереди.

Решение:

Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомашин ρ определены нами в примере 2:

$$\mu = 0{,}952;\ \rho = 0{,}893.$$

1. Определим по формулам предельные вероятности системы:

$$P_0 = 1 – \rho = 1 – 0{,}893 = 0{,}107;$$

$$P_1 = (1 – \rho), \rho = (1 – 0{,}893) * 0{,}893 = 0{,}096;$$

$$P_2 = (1 – \rho, \rho\ 2 = (1 – 0{,}893) * 0{,}8932 = 0{,}085;$$

$$Pз = (1 – \rho), \rho 3 = (1 – 0{,}893) * 0{,}8933 = 0{,}076;$$

$$P_4 = (1 – \rho), \rho\ 4 = (1 – 0{,}893) * 0{,}8934 = 0{,}068;$$

$$P_5 = (1 – \rho), \rho 5 = (1 – 0{,}893) * 0{,}8935 = 0{,}061 \text{ и т.д.}$$

Необходимо сказать, что Р 0 определяет долю времени, в течение которого диагностический пост простаивает (вынужденно бездействует). В нашем случае она составляет 10,7%, поскольку Р 0 = 0,107.

2. Среднее количество автомашин, которые находятся в системе (в очереди и на обслуживании):

$$Ls = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.893}{1-0.893} = 8.346 \text{ ед.}$$

3. Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda} = \frac{1}{\big(\mu * (1-\rho)\big)} = \frac{1}{0.952 * (1-0.893)} = 9.817 \text{ час}$$

4. Среднее количество автомашин в очереди на обслуживание

$$Lq = Ls - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.893^2}{1-0.893} = 7.453$$

5. Средняя продолжительность пребывания автомашины в очереди:

$$Wq = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0.893}{0.952 * (1-0.893)} = 8.766$$

6. Относительная пропускная способность системы составляет q = 1, т.е. каждая заявка, которая пришла в систему, будет обслужена.

7. Абсолютная пропускная способность составляет:

$$A = \lambda * q = 0,85 * 1 = 0,85.$$

Нужно сказать, что фирму, которая осуществляет диагностику автомашин, прежде всего интересует число клиентов, которое посетит диагностический пост при снятии ограничения на длину очереди.

Предположим, что в первоначальном варианте число мест для стоянки прибывающих автомашин было равно 3-м. Частота m возникновения ситуаций, когда автомобиль, прибывающий на диагностический пост, присоединиться к очереди не имеет возможности: $m = \lambda * P_N$

В нашем случае при $N = 3 + 1 = 4$ и $\rho = 0,893$

$$m = \lambda * P_0 * \rho_4 = 0.85 * 0.248 * 0.8934 = 0.134 \text{ автомобиля в час.}$$

При 12-часовом режиме работы диагностического поста это эквивалентно тому, что в среднем за смену (день) пост диагностики будет терять:

$$12 * 0,134 = 1,6 \text{ автомобиля.}$$

Снятие ограничения на длину очереди даст возможность увеличить число обслуженных клиентов в нашем случае в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12 ч. работы) диагностического поста.

Конечно, решение касательно увеличения площади для стоянки автомашин, которые прибывают на диагностический пост, должно базироваться на оценке экономического ущерба, обусловленного потерей клиентов при наличии всего 3-х мест для стоянки этих автомашин.

Конечно, решение касательно увеличения площади для стоянки автомашин, которые прибывают на диагностический пост, должно базироваться на оценке экономического ущерба, обусловленного потерей клиентов при наличии всего 3-х мест для стоянки этих автомашин.

9.6. АППРОКСИМАЦИОННО-КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ И КОМПОЗИЦИИ СИСТЕМ

9.6.1. Постановка аппроксимационно-комбинаторного метода декомпозиции и композиции систем

Метод декомпозиции и композиции систем был предложен В.Р. Хачатуровым в 1974 году [112]. В этом методе раскрывается задача нахождения экстремума функционала, который задается на подмножествах конечного множества элементов.

Как правило, для решения задач дискретной оптимизации используются методы, которые исключают полный перебор – в первую очередь, это методы линейного и динамического программирования, методы последовательных расчетов, методы ветвей и границ и другие.

Рассматриваемый метод аппроксимации предлагает модификацию перечисленных методов, которая может привести к уменьшению их «чувствительности» к изменениям условий задачи, что, безусловно, дает возможность расширить класс задач, которые могут быть решены при помощи перечисленных методов.

В рассматриваемом методе используется аппроксимирующая снизу функция, для которой имеются эффективные методы и алгоритмы определения всего множества решений в заданном диапазоне, а не одного только оптимального решения.

Если мы построим множество всех решений, которые «близки» по значению к оптимальному функционалу, и пересчитаем на этом множестве исходный функционал, то решением исходной задачи будет наилучшее из тех, которые уже были просчитаны на множестве «близких» решений.

Для решения задач с использованием аппроксимационно-комбинаторного подхода декомпозиции и композиции систем, как правило, используют поименованные ниже основные методологические подходы. Рассмотрим их на примере проектирования сложных систем.

1. Декомпозиция и композиция задач. Проблема заключается в том, что решение задачи в общем виде зачастую невозможно из-за того, что задача имеет большую размерность, а также из-за того, что на нее наложены специфические условия и ряд ограничений. Если же мы рассматриваем задачу проектирования, то в этом случае исходная за-

дача разбивается на группу задач, каждая из которых посвящена проектированию одной из множества наличествующих технологических систем (происходит декомпозиция задачи проектирования). В соответствии с рассматриваемым методом при этом определяется множество «близких» к оптимальному по значению функционала проектов.

2. Аппроксимирующие задачи. Может возникнуть ситуация, когда задача проектирования каждой из рассматриваемого множества технологических систем оказывается неразрешимой. Если мы рассматриваем строительный проект, то причина неразрешимости может быть заключена как в сложном виде стоимостных функций строительства объектов и ведущих к ним коммуникаций, так и в наличии специфических ограничений. Соответственно необходимо решить задачу построения набора аппроксимирующих функций, для которых уже существуют разработанные методы формирования как оптимального, так и «близких» решений, рассматриваемых в некотором фиксированном диапазоне. Следующий за этим пересчет исходного функционала задачи на «близких» решениях дает возможность выбора подмножества наиболее приемлемых вариантов.

3. Многокритериальные задачи. Распространенные методы оптимизации дают возможность получить оптимальные или приближенные решения лишь по одному критерию. Однако в случае рассмотрения реального проекта зачастую оказывается необходимо провести анализ по ряду других критериев, которые часто не поддаются формализации (например, металлоемкость проекта, соответствие его нормам экологической и промышленной безопасности). Решить эту задачу позволяет наличие множества «близких» решений, при анализе которых по совокупности оценочных критериев можно достаточно уверенно выбрать оптимальный проект.

4. Многоэкстремальные задачи. Для задач дискретной оптимизации, (задача размещения предприятий, задача определения структуры сетей) характерна многоэкстремальность.

5. Для получения окончательного решения по проекту, как правило, бывает необходимо еще решить задачи динамического и имитационного проектирования.

В заключение данного раздела нельзя не упомянуть об одном ограничении аппроксимационно-комбинационного метода декомпозиции и композиции систем. Дело в том, что он рассматривает лишь системы, элементы которых описываются одним набором возможно разнородных характеристик. Таким образом из рассмотрения были исключены гетерогенные и неоднородные системы. Впрочем, это нисколько не умаляет достоинств метода, доказавшего за последние сорок лет свою эффективность.

9.6.2. Обоснование аппроксимационно-комбинаторного метода декомпозиции и композиции систем

Рассмотрим ниже математическую формулировку задачи оптимизации системы, состоящей из множества однородных элементов. При этом однородность подразумевает, что каждый из множества элементов описывается одним и тем же набором переменных. Однако условие того, чтобы все переменные в наборе имели одну размерность, отсутствует.

В качестве объекта рассмотрения возьмем некоторую систему D. Необходимо решить задачу определения такого многомерного элемента X° ∈. D, который явился бы в некотором (не обязательно формализованном) смысле наилучшим [112].

Запишем это свойство X° так:

$$E(X^0) = \underset{X \in D}{extr} E(X),$$

где *extrE(X)* – оператор/правило сравнения различных элементов $X \in D$, с помощью которого мы можем определить наилучший элемент $X^{\circ} \in D$. Другими словами, нам нужно установить, что X° является наилучшим элементом именно «в смысле оператора *E(X)*».

Если aextr≡min (или max), а *E(X)* – некоторое формализованное правило оценки, то мы получаем задачу математического программирования. Для того чтобы облегчить поиск элемента $X^{\circ} \in D$ при решении конкретных задач необходимо делать некоторые предположения относительно свойств оператора *E(X)*, которые облегчают поиск искомого элемента. Как правило, эти предположения основываются на специфике рассматриваемой задачи.

Мы будем говорить, что система *D*

- *изучена*, если найден X° ;

- *частично изучена*, если найдено множество D_0 такое, что $X^{\circ} \in \in D_0$, $D_0 \subset D$, $D_0 \neq D$;

- *не изучена,* если D_0=*D.*

Для того чтобы провести изучение системы *D,* и был предложен аппроксимационно-комбинаторный метод декомпозиции и композиции систем.

Коротко опишем некоторые его этапы. Начнем с декомпозиции.

Введем в рассмотрение *n* систем D_j (ω_j), где $j \in J = \{1,2,...,n\}$, $\omega_j \subset I$, С/, $\omega_j \neq \emptyset$, $D_j(\omega_j) \subset A(\omega_j) = \Pi A_i . i \in \omega_j$.

Элементами систем $D_j(\omega_j)$ соответственно будут $X_j = X_j(\omega_j)$,где

$$X_j(\omega_j) = \left(x_{i_1}, \dots, x_{i_{|\omega_j|}}\right), i_k \epsilon\, \omega_j, k = 1,2, \dots, |\omega_j| \left(i_1 < \cdots . < i_{|\omega_j|}\right).$$

Для каждой системы $D_j(\omega_j)$ зададим формализованное правило выбора наилучшего элемента $X_j^0(\omega_{j;})$ $\in D_j$ (ω_j), т.е. зададим критерий оптимизации $E_j(X_j(\omega_j))$.

В качестве такого критерия $E_j(X_j(\omega_j))$ может быть принято значение одного из показателей $x_{ik(j)}$, где $i_{k(j)} \in^* \omega_j$, т.е. $E_j(X_j(\omega_j)) = x_{ik(j)}$, $i_{k(j)} \in \omega_j$.

Положим для определенности extr = min. Тогда:

$$E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right) = minE_j\left(X_j(\omega_j)\right), X_j(\omega_j) \in D_j(\omega_j).$$

Если мы решим *n* задач оптимизации, то определим $X_j^0(\omega_j)$и соответствующие им значения $E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right)$. Полученные значения мы можем затем использовать для определения некоторого $\tilde{X}(I) = \tilde{X} \in D$, которое мы примем за приближенное решение задачи [111].

При этом способы получения $\tilde{X}$ могут быть самыми разнообразными в зависимости от специфики задачи и свойств вспомогательных систем $D_j(\omega_j)$.

Перейдем к композиции, которая будет заключаться в определении $D_0 \subset D$ и анализе его для определения X^0.

Для каждого $j \in J$ зададим величины $R_j \geq 0$ и определим множества:

$$\Omega_j(R_j, \omega_j) = \left\{X_j(\omega_j) \in D_j(\omega_j) | E_j\left(X_j(\omega_j)\right) \leq E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right) + R_j\right\}$$

Множество $\Omega_j(R_j, \omega_j)$ назовем множеством оптимальных решений и всех тех решений, которые близки к оптимальному, то есть отличаются от оптимального по значению функционала не более чем на величину$R_j \geq 0$. Иначе говоря, множество$\Omega_j(R_j, \omega_j)$ назовем областью R_j – устойчивости оптимального значения ранее введенного нами фунционала $E_j\left(X_j(\omega_j)\right)$.

Для каждого подмножества $v \subset J$ поставим в соответствие некоторое множество $q(v) \subset D$ в соответствии с правилом:

$$q(v) = \left\{X \in D | X \in \Omega_j \; \forall j \in v \text{ и } X \notin \Omega_j \; \forall j \in J \backslash v\right\}.$$

Для определенности положим $q(\phi) = \left\{X \in D | X \notin \Omega_j \; \forall j = 1,2, \dots, n\right\}$.

В результате исходное множество *D*оказывается разбито на 2^n непересекающихся подмножеств $q(v)$.

Эти множества $q(v)$ назовем *композиционными элементами.* Если $X \in q(v)$, то будем говорить, *что X обладает свойством v.*

Обозначим через *V* множества всех подмножеств множества J, включая и пустое множество. При этом каждому элементу$v \in V$ соответствует только один композиционный элемент, а общее число композиционных элементов оказывается равно $|V| = 2^n$.

Из рассмотренного построения $q(v)$

а) $q(v_1) \cap q(v_2) = \phi$, если $v_1 \neq v_2$

б) $D =_{v \in V}^{\cup q(v)}$, поскольку пустое подмножество также является элементом *V*.

Делаем вывод, чтоX^0принадлежит одному и только одному композиционному элементу $q(v)$.

Если заранее известно свойство v_0, которым обладает X^0, то тогда $X^0 \in q(v_0)$ и $D_0 = q(v_0)$.

Если же точное свойство X^0 заранее не известно, а известно некоторое подмножество свойств $\delta_0 \subset V$, одному из которых наверняка удовлетворяетX^0, то:

$$X^0 \in_{v \in \delta_0}^{\cup} q(v) \text{ и } D_0 = {}_{v \in \delta_0}^{\cup} q(v).$$

Соответственно для всех $\delta \subset V$ могут быть построены подмножества:

$$Q(\delta) = \underset{v \in \delta}{\cup} q(v)$$

при этом заметим, что *Q(V) = D* в соответствии с ранее рассмотренным свойством б).

Множество $Q(\delta)$ назовем *композиционной подсистемой* $Q(\delta)$, или композицией, составленной из множества δ композиционных элементов $q(v), v \in \delta$.

Положим $Q(\phi) = \phi$ и назовем $Q(\phi)$ пустой композицией.

Задача операции композиции состоит в том, чтобы на основании ожидаемых свойств *X* определить множество δ_0 и соответствующую ему композиционную подсистему$Q(\delta_0)_f$, которая содержит D_0 и, соответственно, X° [113].

Рассмотрим подробно один способ композиции, а именно будем предполагать, что искомый элемент X° должен обладать свойством $\delta = J\ (\delta = v = J)$. В этом случае композиция *Q(J)* будет совпадать со своим композиционным элементом *q(J):*

$$Q(J) = q(J) = \underset{j \in J}{\cap} \Omega_j$$

Такая композиция содержит все элементы $X \in D$, для которых все их проекции на множества $A(\omega_j)(j \in J)$ находятся в соответствующих областях R_j −устойчивости $\Omega_j(R_j, \omega_j)$, т. е. если $X \in Q(J)$, то:

$$E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right) \le E_j\left(X(\omega_j)\right) \le E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right) + R_j$$

а если $X \notin Q(J)$, то:

$$E_j\left(X(\omega_j)\right) > E_j\left(X_j^0(\omega_j)\right) + R_j$$

Получается, что *Q(J)* состоит из элементов $X \in D$, для каждого из которых значение критерия *Ej* (*X*) для всех $j \in I$ отличается от a_j не более чем на заранее заданную величину $R_j \ge 0$.

Задача композиции решена.

9.6.3. Примеры применения аппроксимационно-комбинаторного метода декомпозиции и композиции систем

В нашей стране в конце прошлого века в условиях плановой советской экономики и возможности централизованного регулирования территориального распределения промышленных объектов получил развитие подход к оптимизации иерархического территориально промышленного комплекса с применением методов математического моделирования.

Разработка территориальных моделей промышленных систем, которые могли варьироваться по масштабам – от комплекса нескольких близких по профилю промышленных объектов до всей плановой национальной промышленной структуры (народнохозяйственного комплекса страны) – поставило ряд проблем и побудило исследователей к поискам путей решения этих проблем. Широко распространенные модели и методы, такие как балансовый метод и метод линейного программирования, уже не могли эффективно решать вставшие перед плановой экономикой задачи.

Трудность решения нового типа задач вытекала из комплексного, территориального и межотраслевого характера региональных проблем. Таким образом, в единой территориальной плановой программе должны были быть учтены и увязаны интересы и деятельность сразу нескольких отраслей народного хозяйства. В этих масштабных проектах в комплексе должны были быть решены вопросы, связанные с оптимальным развитием инфраструктуры, транспортной системы, задачи рационального использования материальных, природных и трудовых ресурсов, а охраны окружающей среды. Упомянутые выше методы (метод линейного программирования, балансовый метод) уже не могли эффективно учесть все факторы, характеризующие задачу комплексного освоения территорий. Задача осложнялась тем, что эти факторы носили нелинейный и дискретный характер, а объем данных, которые было необходимо обработать, заметно превышал возможности существовавших на тот момент электронно-вычислительных машин.

Для эффективного решения сложных многокритериальных задач в условиях наличия большого массива исходных данных и ограниченности вычислительных мощностей для их обработки был разработан целый ряд оригинальных аппроксимационных решений, обеспечивающих необходимую точность территориального планирования.

Эти решения позволили решить целый комплекс народнохозяйственных проблем, таких как задача оптимального размещения предприятий, учет агломерационного эффекта при размещении территориально-производственного комплекса, оптимизация задачи размещения предприятий с учетом существующих между ними коммуникаций, учет многоэтапности в задачах оптимального размещения, построение оптимальной структуры транспортной сети и оптимизация существующей сети транспорта и коммуникаций.

Со временем внимание разработчиков метода сосредоточилось на решении задач нефтегазового комплекса. Например, при проектировании обустройства нефтяных месторождений рассматриваемый метод позволяет последовательно решить несколько задач.

Для определения оптимального размещения различных нефтепромысловых объектов (например, кустов нагнетательных и эксплуатационных скважин, замерных установок, комплексных сборных пунктов, компрессорных станций) может быть решена задача оптимального размещения объектов. Для решения задачи из множества всех возможных вариантов размещения строительства данного типа выбирается такое подмножество, на котором достигается минимум функции, которая определяет суммарную полную стоимость строительства и объектов, и сетей коммуникаций, которые соединяют эти объекты с источниками сырья. При этом для решения задачи может быть применен модифицированный алгоритм последовательных расчетов, который позволяет определить наряду с оптимальным решением также множество решений, близких к оптимальному [90].

Метод также позволяет решить задачу определения оптимальной структуры отдельных сетей самого различного назначения. Это могут быть сети сбора и транспорта нефти и газа, водоводы низкого и высокого давления, сети электроснабжения и сети дорог. Далее может быть решена задача трассирования коммуникаций, задача определения параметров трубопроводных сетей и другие.

Можно выделить несколько характерных признаков задачи построения оптимальной сети, которые не зависят от типа рассматриваемой технологической системы – древовидный, фрактальный тип сети, которая соединяет множество источников сырья с системой сбора, рост стоимости отдельного звена сети в случае увеличения потока сырья по данному соединению, проблема учета уже имеющихся участков сети при выборе оптимальной конфигурации сети планируемой.

Можно уверенно сказать, что в случае многомерных данных приближенные и эвристические методы позволили решить задачи, которые были не под силу методам точным. Тем более что сделать это удалось в условиях ограниченных машинных ресурсов (быстродействие, память).

Однако аппроксимационно-комбинационный метод декомпозиции и композиции систем находит свое применение и в областях, далеких от экономики.

Существенным параметром для характеристики многослойных наноструктур является качество границ раздела, значительно зависящее от динамики и механизмов роста структур. Для определения статистических характеристик неоднородностей внутренних границ раздела используют анализ углового спектра интенсивности отраженного рентгеновского излучения.

В работе [9] были рассмотрены математические модели и методы, которые позволяют определить величину межслойной шероховатости по угловому спектру интенсивности отраженного рентгеновского излучения.

Для решения обратной задачи был предложен аппроксимационно-комбинаторный метод, в результате применения которого задача оценки величины шероховатости была успешно решена. Это говорит о возможном расширении круга задач, которые могут быть решены с помощью аппроксимационно-комбинационного метода декомпозиции и композиции систем.

Развитие прикладной математики, широкое применение в экономике математических методов в сочетании с возможностями современной компьютерной техники заложили основу для успешного решения широкого класса задач оптимизации народного хозяйства. Особенностью этих задач является наличие большого массива данных, который необходимо подвергнуть математической обработке. Эта задача зачастую оказывается трудно решаемой и на современном этапе развития компьютерной техники. Еще сложнее было ее решить сорок-пятьдесят лет назад в условиях ограниченных ресурсов и быстродействия электронно-вычислительных машин.

Именно в то время было разработано много блестящих аппроксимационных методов, позволивших успешно и эффективно решать задачи оптимизации. Одним из таких методов является аппроксимационно-комбинационный метод декомпозиции и композиции систем, разработанный В.Р. Хачатуровым для решения задач оптимизации региональной экономики. За прошедшее время метод подтвердил свою эффективность, найдя свое применение в решении задач оптимизации нефтегазовой промышленности.

Так, этот метод позволил построить математические модели и решить задачу планирования для целого ряда практических задач нефтедобычи, таких как проблема кустования скважин, проблема планирования и оптимизации систем сбора и транспорта нефти и газа, проблема оптимизации системы поддержания пластового давления, задача оптимизации дорожной сети и сетей электроснабжения. Кроме того, в условиях планового народного хозяйства Советского Союза метод успешно применялся при компьютерном проектировании планов освоения агропромышленных регионов.

Между тем о том, что потенциал аппроксимационно-комбинационного метода декомпозиции и композиции систем далеко не исчерпан говорит тот факт, что в последнее время он находит свое применение в ряде физических задач по определению параметров наноструктур оптическими методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель настоящего пособия – дать студентам целостное представление о систему системных методах и предоставить материалы для характеристики важнейших системообразующих показателей, их исчисления, моделирования и анализа, выработать у студентов навыки самостоятельного решения экономико-социальных задач по системному анализу. Это объясняется необходимостью масштабного применения системного управления, так как именно этот вид управления, являясь первоосновой процессов развития, маркетинга, производства, обеспечения безопасности и экологичности, видится авторам настоящего пособия наиболее перспективным.

Таким образом, применение системного анализа является фундаментальным и объективным свойством решений в экономике, предпринимательстве и менеджменте в любой области человеческой деятельности при выполнении любой из присущих этой области функций.

Существует несколько причин, которыми определяется актуальность появления и развития системных исследований:

- во-первых, все более возрастают масштабы, количество элементов и взаимосвязей подсистем в организационных и социально-технических системах, что ведет к возрастанию сложности объектов управления;

- во-вторых, рост числа элементов и иерархических уровней обостряет проблему межуровневых и внутриуровневых конфликтов, влияющих на эффективность функционирования;

- в-третьих, с ростом числа элементов и связей между ними увеличивается неопределенность в знании реальной структуры системы, связанная с влиянием, в частности, человеческого фактора, умышленного или случайного искажений информации;

- в-четвертых, внешняя среда в современной стадии переходной экономики и реформирования в России имеет ярко выраженный динамичный характер вследствие высокой скорости изменений политической, экономической и юридическо-нормативной среды;

- в-пятых, многоукладность экономики, изменение форм собственности повысили меру ответственности собственника за результаты деятельности;

- в-шестых, в связи с научно-технической и информационной революциями возрастают темпы морального старения не только основных фондов, но и применяемых методов управления как производством, так и капиталом, в том числе и человеческим.

В курсе «Системный анализ и моделирование» рассматриваются наиболее важные разделы системного подхода. Значительное внимание при создании настоящего учебного пособия было уделено поиску путей снижения затрат времени и средств на практическую реализацию процессов применения системного анализа. Для этого использованы структуризация задач и разработка логических процедур выбора методов моделирования и оптимизации, планирования и представления результатов.

В современном обществе системные представления уже достигли такого уровня, что мысль о полезности и важности системного подхода к решению возникающих в практике проблем вышла за рамки специальных научных истин и стала привычной, общепринятой. Широко распространилось понимание того, что наши успехи связаны с тем, что насколько системно мы подходим к решению проблем, а наши неудачи вызваны отступлениями от системности. Человеческое мышление системно всегда и другим быть не может. Однако системность имеет разные уровни. Сигналом о недостаточной системности существующей деятельности является появление проблемы; разрешение возникшей проблемы осуществляется путем перехода на новый, более высокий уровень системности в нашей деятельности. Поэтому системность не столько состояние, сколько процесс.

Человек – активная часть природы. Добиваясь своих целей, он активно использует природу, воздействует на нее, преобразует ее и себя. Если рассматривать практическую деятельность человека, то очевидно, что она системна, так как обладает следующими признаками: структурированность системы, взаимосвязанность составляющих ее частей, подчиненность организации всей системы определенной цели. Другое название для такого построения деятельности – алгоритмичность. Здесь важными являются следующие моменты:

- во-первых, всякая деятельность алгоритмична;
- во-вторых, не всегда алгоритм реальной деятельности осознается;
- в-третьих, в случае неудовлетворенности результатом возможную причину неудачи следует искать в несовершенстве алгоритма.

Таким образом, природная системность человеческой практики является одним из объективных факторов возникновения и развития системных представлений, понятий и теории.

Рассматривая объективные причины возникновения и факторы развития системных представлений, необходимо отметить объективные особенности человеческого мышления. С этой позиции сам процесс познания представляется системным, и знания, добываемые человечеством, тоже системны. Окружающий нас мир бесконечен в пространстве и во времени, в большом и в малом, вовне и вовнутрь. И все же человеку, с его ограниченными ресурсами, удается познавать мир, и как показывает практика, познавать верно. А. Энштейн отмечал, что самое удивительное в природе то, что она познаваема. Противоречия между неограниченностью желаний человека познать мир и ограниченностью существующих возможностей сделать это имеют много важных последствий.

Одна из особенностей сознания, которые позволяют постепенно, поэтапно разрешать эти противоречия, – наличие аналитического и синтетического образов мышления. Суть анализа состоит в разделении целого на части, в представлении сложного в виде совокупности более простых компонент. Но чтобы познать целое, сложное, необходим и обратный процесс – синтез.

Аналитичность человеческого знания находит свое отражение в дифференциации наук, во все более глубоком изучении более узких вопросов, каждый из которых важен и необходим. В процессе синтеза знаний возникают «пограничные науки» типа биохимии, бионики и т.д. Однако другая, более высокая форма синтеза реализуется в виде наук о самых общих свойствах природы (философия, математика, кибернетика и др.), в которых необходимым образом соединяются технические, естественные и гуманитарные знания.

Необходимо отметить, что системность – не только человеческой практики (включающей и внешнюю активную деятельность, и мышление, и даже пассивное созерцание), но и свойство всей материи. Ведь системность нашего мышления вытекает из системности мира. Современные научные данные позволяют говорить об окружающем мире, о природе, о Вселенной как о бесконечной иерархической системе систем, находящихся в развитии и на разных стадиях развития. Таким образом – системность можно назвать формой существования материи, а известные формы существования (время, пространство, движение, структурированность) представляют собой частные проявления, аспекты системности мира.

Таким образом, наращивание системности знаний – естественный процесс, происходящий во всех областях человеческой деятельности стихийно (как результат обратной связи через практику, как форма развития). Осознание же системности нашего познания и окружающего мира – это более высокий уровень системности знаний, и оно происходит значительно труднее, медленнее, с отставанием, петлянием, т.е. со свойственными процессам поиска качествами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айвазян С.А., Бродский Б.Е.* Макроэконометрическое моделирование: подходы, проблемы, пример эконометрической модели российской экономики / Препринт # WP/2005/192. М.: ЦЭМИ РАН, 2005.

2. *Антонов А.В.* Системный анализ. – М.: Высш. школа, 2004. – 454 с.

3. *Анохин П.К.* Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. – М.: АН СССР. Отд-ние физиологии, 1971. – 61 с.

4. *Анохин П.К.* Очерки по физиологии функциональных систем. – М., 1975.

5. *Анохин П.К.* Теория функциональной системы // Успехи физиол. наук. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 19-54.

6. *Аполов О.Г.* Теория систем и системный анализ. С. 15-16 URL: http://apolov-oleg.narod.ru/ olderfiles/1/ lekcciya Teoriya system i sistemny-7190. pdf (дата обращения: 01.05.2017 г.).

7. *Аршинов В.И. и др.* Естествознание и развитие: диалог с прошлым, настоящим и будущим (послесловие) / Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 431 с.

8. *Афанасьев В.Г.* Проблема целостности в философии и биологии. – М.: Мысль, 1984. – 416 с.

9. *Багриновский К.А., Левицкий Е. М., Меньшиков, С.М.* Межотраслевые динамические модели экономики США // Проблемы построения и использования народно-хозяйственных моделей / под ред. С.М. Меньшикова. – Новосибирск, 1971.

10. *Берталанфи Л.* История и статус общей теории систем // Системные исследования: Ежегодник, 1972. – М.: Наука, 1973. – С. 20–37.

11. *Берталанфи Л.* Общая теория систем – обзор проблем и результатов // Системные исследования: Ежегодник. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.

12. *Бобров С.П.* Работа Уоррена Персона (Гарвардское Экономическое Бюро) // Вопросы конъюнктуры. – 1926. – Вып. 1. – Т. 2.

13. *Богданов А.А.* Всеобщая организационная наука: (Тектология). – 3 изд. заново перераб. и доп. – Л.-М.: Книга, 1929. Ч. 3. – 221 с.

14. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. l. – 304 с.

15. *Богданов А.А.* Тектология: (Всеобщая организационная наука). В 2-х кн. – М.: Экономика, 1989. Кн. 2. – 351 с.

16. *Вайнштейн А.Л.* Эконометрия и статистика (рус.) // Тинтер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1965.

17. *Вальтух К.К.* Динамическая модель народного хозяйства с элементами оптимизации // Проблемы построения и использования моделей экономики / под ред. К.К. Вальтуха. – Новосибирск, 1970.

18. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Сов. радио, 1968.

19. *Винер Н.* Кибернетика и общество. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.

20. *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ / пер. с англ. С.А. Николаенко; под ред. и с предисл. Р.М. Энтова. – М.: Финансы и статистика, 1981.

21. *Глазьев С.Ю.* Современная теория длинных волн в развитии экономики // Экономическая наука современной России. – 2012. – № 2 (57). – С. 27–42.

22. *Глазьев С.Ю.* Теория долгосрочного технико-экономического развития. – М.: ВлаДар, 1993. – 310 с.

23. *Гуд Г.Х., Макол Р.* Системотехника: Введение в проектирование больших систем. – М.: Советское радио, 1962. – 383 с.

24. *Гудвин Б.* Временная организация клетки. – М.: «Мир», 1966. – 251 с.

25. *Дегтярев Ю.И.* Системный анализ и исследование операций. – М.: Высш. школа, 1996. – 336 с.

26. *Денисов А.А.* Информационные основы управления. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 72 с.

27. *Денисов А.А.* Макроэкономическое моделирование и управление. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2006. – 72 с.

28. *Денисов А.А* Теоретические основы кибернетики: Информационное поле. – Л.: ЛПИ, 1975. – 40 с.

29. *Денисов А.А.* Современные проблемы системного анализа: информационные основы. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2004. – 296 с.

30. *Денисов А.А., Колесников Д.Н.* Теория больших систем управления. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 288 с.

31. Длинные волны: Научно-технический прогресс и социально-экономическое развитие / С.Ю. Глазьев, Г.И. Микерин, П.Н. Тесля и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. – 224 с.

32. *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 423 с.

33. *Друкер П.Ф.* Задачи менеджмента в XXI веке. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 272 с.

34. *Евин И.А.* Искусство и синергетика. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 164 с.

35. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

36. *Захарченко Н.Н., Минеева Н.В.* Основы системного анализа: Часть I. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. – 1992. – 78 с.

37. *Звягин Л.С., Катаргин Н.В.* Системный анализ и моделирование. – М.: Финансовый университет, 2016. – 412 с.

38. *Игнатьева А.В., Максимцов М.М.* Исследование систем управления. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

39. История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики / отв. ред. С.Ю. Малков, А.В. Коротаев. – М.: КомКнига, 2005. – 192 с.

40. *Капица С.П. и др.* Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

41. *Калужский М.Л.* Общая теория систем. – Омск: Омский гос. технический ун-т, 2007. – 143 с.

42. *Качанова Т.П., Фомин, Б.Ф.* Основания системологии феноменального. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999. – 180 с.

43. *Квейд Э.* Анализ сложных систем. – М.: Советское радио, 1969. – 520 с.

44. *Квейд Э.* Методы системного анализа // Новое в теории и практике управления производством США. – М., 1971.

45. *Кельзен Г.* Чистое учение о праве Ганса Кельзена. Вып. I. – М.: Изд-во ИНИОН АН СССР, 1987.

46. *Клейнер Г.Б.* Доклад на научной конференции «Системный анализ в экономике» (13.11.2014 г.). – М.: Финансовый ун-т, 2014.

47. *Клейнер Г.Б.* Кризис: что, кому и когда делать (попытка мета-анализа) // Государственная антикризисная политика в условиях ми-

рового финансово-экономического кризиса. Межкафедральный сборник научных трудов. – М.: Финакадемия. – С. 35–40.

48. *Клейнер Г.Б.* Системный кризис, системный анализ, системный менеджмент [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.kleiner.ru/arpab/sis-kriz.html (дата обращения: 10.01.2014).

49. *Клейнер Г.Б.* Системная парадигма и экономическая политика // Общественные науки и современность. – 2007. – № 2. – С. 141–149.

50. *Клейнер Г.Б.* Системная парадигма и экономическая политика // Общественные науки и современность. – 2007. – № 3. – 99–114.

51. *Клейнер Г.Б.* Стратегия системной гармонизации экономики России // Экономические стратегии. – 2008. – № 5-6. – С. 72–79.

52. *Клейнер Г.Б.* Устойчивость российской экономики в зеркале системной экономической теории. Часть 1 // Вопросы экономики. – 2015. – № 12. – С. 107–123.

53. *Клейнер Г.Б.* Экономика, Моделирование. Математика. Избранные труды / Г.Б. Клейнер: Российская академия наук. Центральный экономико-математич. ин-т. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 856 с.

54. *Клиланд Д., Кинг В.* Системный анализ и целевое управление. – М.: Советское радио, 1979. – 279 с.

55. *Колмогоров А.Н.* Предисловие к русскому изданию // Эшби У.Р. Введение в кибернетику / Под ред. В.А. Успенского. – М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2015. – 432 с.

56. *Конюс А.А.* Экономическая конъюнктура // Энциклопедический словарь Гранат. – М.: Рус. библиогр. ин-т Гранат, 1930. – Т 51.

57. *Коренченко Р.А.* Общая теория организации. – М.: Юнити, 2003. – 286 с.

58. *Корнаи Я.* Инновации и динамизм: взаимосвязь систем и технического прогресса // Вопросы экономики. – 2012. – № 4. – С. 4–31.

59. *Корнаи Я.* Системная парадигма // Вопросы экономики. – 2002. – № 5. – С. 4–22.

60. *Кричевский А.И.* Основы системного анализа. – Новосибирск, 2010. – 136 с.

61. *Кулик В.Т.* Современная теория организационных систем. Системология. – Киев: Знание, 1971. – 24 с.

62. *Левицкий Е. М., Меньшиков С.М., Чижов Ю.А.* Моделирование американской экономики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975. – 245 с.

63. *Леонтьев В.В. и др.* Исследования структуры американской экономики. – М.: Госстатиздат, 1958.

64. *Лопухин М.М.* ПАТТЕРН – метод планирования и прогнозирования научных работ. – М.: Советское радио, 1971. – 160 с.

65. *Луценко Е.В.* Автоматизированный системно-когнитивный анализ в управлении активными объектами (системная теория информации и ее применение в исследовании экономических, социально-психологических, технологических и организационно-технических систем). – Краснодар: КубГАУ, 2002. – 605 с.

66. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. – М.: Дело, 2000.

67. *Медовников Д., Механик А.* Правдоподобность синтеза // Эксперт. – 2012. – № 22 (805). – С. 53–57.

68. *Милованов В.П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 264 с.

69. *Милованов В.П.* Синергетика и самоорганизация: Экономика, биофизика. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 168 с.

70. *Митчелл У.* Экономические циклы. Проблема и ее постановка / перевод с английского Е.Д. Кондратьевой, О.Е. Пряхиной и В.Э. Шпринка. – М.; Л.: Государственное издательство, 1930.

71. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

72. *Моисеев Н.Н.* Социализм и информатика. – М.: Политиздат, 1988.

73. *Нечаев В.В.* Введение в теорию метамоделирования систем. – М.: Информациология, 1997. – 64 с.

74. *Новосельцев В.И.* Системный анализ: современные концепции (издание второе, исправленное и дополненное). – Воронеж: Изд-во «Кварта», 2003. – 360 с.

75. Общая теория систем / под общ. ред. А.В. Горохова. – Йошкар-Ола: ПГТУ, 2016 – 86 с.

76. *Оптнер С.* Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Советское радио, 1969. – 216 с.

77. *Орлова И.В.* О Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000.

78. Основы системного подхода и их приложение к разработке территориальных АСУ / под ред. Ф.И. Перегудова. – Томск: изд-во ТГУ, 1976. – 440 с.

79. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. – М.: Высш. школа, 1989. – 361 с.

80. *Петрушенко Л.А.* Единство системности, организованности и самодвижения. – М.: Мысль, 1975.

81. *Плотницкий Ю.М.* Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998.

82. *Поваров Г.Н.* Норберт Винер и его «Кибернетика» / Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.: Советское радио, 1968.

83. *Полетаев А.В.* Присутствие и отсутствие России в мировой экономической науке: Препринт WP6/2008/05. – М.: ГУ ВШЭ, 2008.

84. *Полтерович В.М.* Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. – 1998. – № 1. – С. 46–66.

85. *Поспелов Д.А.* Ситуационное управление: теория и практика. – М.: Наука, 1986.– 284 с.

86. *Пригожин И.* Время, структура и флуктуации (Нобелевская лекция) // Успехи физических наук. – 1980. – Т. 131.

87. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 431 с.

88. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. – 200 с.

89. *Садовский В.Н.* Основания общей теории систем: Логико-методологический анализ. – М.: Наука, 1974. – 279 с.

90. *Салина Т.К.* Анализ исследований в области функционирования и моделирования систем энергетики // Проблемы экономики и менеджмента. – 2011. – № 1. – С. 73–81.

91. *Сетров М.И.* Об общих элементах тектологии А. Богданова, кибернетики и теории систем: Уч. зап. кафедр общественных наук вузов Ленинграда. Сер. «Философия». – Вып. 8. – Л., 1967.

92. *Слуцкий Е.Е.* Теория корреляции. – Киев, 1912.

93. *Смирнов А.Д.* К проблеме оптимального моделирования социалистического воспроизводства. Новосибирск, 1967. [Ин-т математики СО АН СССР. Ин-т экономики и ОПП СО АН СССР. Науч. комис. по пробл. «Матем. экономика и исслед. операций». Тез. докл. на Все-

союз. симпозиуме по моделированию обществ. пр-ва. – Новосибирск, 18–25 июня 1967 г.].

94. *Смирнов А.Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию. – М.: ГУ ВШЭ, 2002.

95. *Смирнов А.Д.* Макрофинансы I: методология моделирования пузырей и кризисов // Экономический журнал ВШЭ. – 2010. – № 3. – С. 275–310.

96. *Смирнов А.Д.* Макрофинансы II: модель пузырей и кризисов // Экономический журнал ВШЭ. – 2010. – № 4. – С. 401–439.

97. *Сурмин Ю.П.* Теория систем и системный анализ. – К.: МАУП, 2003. – 368 с.

98. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.

99. *Тинберген Я., Бос Х.* Математические модели экономического роста. – М., «Прогресс», 1967.

100. *То Кен Сик.* Системный подход и системный анализ для исследования социально-экономических объектов и принятия управленческих решений. – Южно-Сахалинск: Изд-во Сах ГУ, 2014. – 168 с.

101. *Тюхтин В.С.* Отражение, система, кибернетика: Теории отражения в свете кибернетики и системного подхода. – М.: Наука, 1972. – 256 с.

102. *Уёмов А.И.* Системный подход и общая теории систем. – М.: Мысль, 1978. – 272 с.

103. Философские проблемы кибернетики. – М.: Соцэкгиз, 1961.

104. *Флейшман Б.С.* Основы системологии. – М.: Радио и связь, 1982. – 272 с.

105. *Черняк Ю.И.* Анализ и синтез систем в экономике. – М.: Экономика, 1970. – 151 с.

106. *Черняк Ю.И.* Системный анализ в управлении экономикой. – М.: Экономика, 1975. – 191 с.

107. *Черняк Ю.И.* Простота сложного. – М.: Знание, 1975. – 206 с.

108. *Чижов Ю.А.* Анализ капиталистического воспроизводства при помощи малоразмерных регрессионных // Проблемы построения и использования народно-хозяйственных моделей / под ред. С.М. Меньшикова. – Новосибирск, 1971.

109. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.

110. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: наука о взаимодействии. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 320 с.

111. *Хачатуров В.Р.* Аппроксимационно-комбинаторный метод декомпозиции и композиции систем и конечные топологические пространства, решётки, оптимизация // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1985. – № 12, том 25. – С. 1777–1794.

112. *Хачатуров В.Р.* Аппроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1974. – № 6. – Том 14. – С. 1464–1487.

113. *Хачатуров В.Р.* Математические методы регионального программирования. – М.: Наука, 1989. – 304 с.

114. *Шульц Д.Н.* Основы системного анализа (общая теория систем). – Пермь: Permuniversitypress, 2015. – 230 с.

115. *Энтов Р.М., Ивантер А.Е.* Его величество случай // Эксперт. – 2006. – № 1-2 (496). – С. 78–87.

116. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

117. *Яковец Ю.В.* Циклы и кризисы XXI века: цивилизационный аспект. Доклад на юбилейной сессии РАЕН. – М.: МФК, 2000. – 43 с.

118. *Янг С.* Системное управление организацией. – М.: Советское радио, 1972. – 455 с.

119. *Babson R.* Business barometers for anticipating conditions. 1923.

120. *Bertalanffy L.* An Outline of General System Theory. – British J. for Phil, of Sci. – 1950. – Vol. 1, № 2. – P. 134-165.

121. *Bertalanfy L. von.* General System Theory – a Critical Review // General System. 1962. – Vol. YII. – P. 1–20.

122. *Bogdanov A.* Essays in Tektology. English Translation by Gorelik. Seeside. – California: Institution Publications, 1986. – Vol. XVII.

123. *Gorelik G.* Bogdanov's «Tektology», General Systems Theory and Cybernetics // Cybernetics and Systems: An International Journal. – 1987. – Vol. 18. №2. – P. 157- 175.

124. *Gorelik G.* Principal Ideas of Bogdanov's «Tektology» // General Systems. – 1975. – Vol. XX.– P. 3–13.

125. *Lucas R.E.* Econometric Policy Evaluation: A Critique. Carnegie Rochester Conferences on Public Policy, 1976. 1, 19–46.

126. *Mattessich R.* Instrumental Reasoning and Systems Metodology. – Boston: D. Reidel, 1978. – P. 283–286.

127. MESANGE. Presentation du modele MESANGE. Modele Econometrique de Simulation et d'Analyse Generale de l'Economie / Celine Al-

laerd-Prigent... – Document de travail. Ministre de 1'Economie des Finances et de l'lndustrie. 2002.

128. *Nelson C.R. and Plosser C.I.* Trends and Random Walks in Macro-economic Time Series: Some Evidence and Implications // Journal of Monetary Economics. – 1982. – № 10. – P. 139–162.

129. *Pearsons W.* Construction of a Business Barometer Based upon Annual Data // American Economic Review. – 1916. – № 12.

130. *Richardson J.H.* Business forecasting in the United States: recent developments by individual companies // International Labour Review. – 1929. – No. 19/2. P. 184–189.

131. *Vance R.* Business and investment forecasting: forecasting methods and their practical application. New York-London: Harper and brothers publishers, 1925.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Значение критерия Пирсона $\chi^2(n,\alpha)$

α / n	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	IS.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64

Приложение Б

Критерий Колмогорова

Таблица значений функции $P(\lambda)=1-K(\lambda)=P(D\geq 1)=1-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k\lambda}$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
≤0,29	1,00000	0,65	0,7920	1,01	0,2594	1,37	0,0469	1,73	0,0050
0,30	0,99999	0,66	0,7764	1,02	0,2492	1,38	0,0444	1,74	0,0047
0,31	0,99998	0,67	0,7604	1,03	0,2392	1,39	0,0420	1,75	0,0044
0,32	0,99995	0,68	0,7442	1,04	0,2296	1,40	0,0397	1,76	0,0041
0,33	0,99991	0,69	0,7278	1,05	0,2202	1,41	0,0375	1,77	0,0038
0,34	0,99983	0,70	0,7112	1,06	0,2111	1,42	0,0354	1,78	0,0035
0,35	0,9997	0,71	0,6945	1,07	0,2024	1,43	0,0335	1,79	0,0033
0,36	0,9995	0,72	0,6777	1,08	0,1939	1,44	0,0316	1,80	0,0031
0,37	0,9992	0,73	0,6609	1,09	0,1857	1,45	0,0298	1,81	0,0029
0,38	0,9987	0,74	0,6440	1,10	0,1777	1,46	0,0282	1,82	0,0027
0,39	0,9981	0,75	0,6272	1,11	0,1700	1,47	0,0266	1,83	0,0025
0,40	0,9972	0,76	0,6104	1,12	0,1626	1,48	0,0250	1,84	0,0023
0,41	0,9960	0,77	0,5936	1,13	0,1555	1,49	0,0236	1,85	0,0021
0,42	0,9945	0,78	0,5770	1,14	0,1486	1,50	0,0222	1,86	0,0020
0,43	0,9926	0,79	0,5605	1,15	0,1420	1,51	0,0209	1,87	0,0019
0,44	0,9903	0,80	0,5441	1,16	0,1356	1,52	0,0197	1,88	0,0017
0,45	0,9874	0,81	0,5280	1,17	0,1294	1,53	0,0185	1,89	0,0016
0,46	0,9840	0,82	0,5120	1,18	0,1235	1,54	0,0174	1,90	0,0015
0,47	0,9800	0,83	0,4962	1,19	0,1177	1,55	0,0164	1,91	0,0014
0,48	0,9753	0,84	0,4806	1,20	0,1122	1,56	0,0154	1,92	0,0013
0,49	0,9700	0,85	0,4653	1,21	0,1070	1,57	0,0145	1,93	0,0012
0,50	0,9639	0,86	0,4503	1,22	0,1019	1,58	0,0136	1,94	0,0011
0,51	0,9572	0,87	0,4355	1,23	0,0970	1,59	0,0127	1,95	0,0010
0,52	0,9497	0,88	0,4209	1,24	0,0924	1,60	0,0120	1,96	0,0009
0,53	0,9415	0,89	0,4067	1,25	0,0879	1,61	0,0112	1,97	0,0009
0,54	0,9325	0,90	0,3927	1,26	0,0836	1,62	0,0105	1,98	0,0008
0,55	0,9228	0,91	0,3791	1,27	0,0794	1,63	0,0098	1,99	0,0007
0,56	0,9124	0,92	0,3657	1,28	0,0755	1,64	0,0092	2,00	0,0007
0,57	0,9013	0,93	0,3527	1,29	0,0717	1,65	0,0086	2,01	0,0006
0,58	0,8896	0,94	0,3399	1,30	0,0681	1,66	0,0081	2,02	0,0006
0,59	0,8772	0,95	0,3275	1,31	0,0646	1,67	0,0076	2,03	0,0005
0,60	0,8643	0,96	0,3154	1,32	0,0613	1,68	0,0071	2,04	0,0005
0,61	0,8508	0,97	0,3036	1,33	0,0582	1,69	0,0066	2,05	0,0004
0,62	0,8368	0,98	0,2921	1,34	0,0551	1,70	0,0062	2,06	0,0004
0,63	0,8222	0,99	0,2809	1,35	0,0522	1,71	0,0058	2,07	0,0004
0,64	0,8073	1,00	0,2700	1,36	0,0495	1,72	0,0054	2,08	0,0004

Продолжение Приложения Б

Критерий Колмогорова

Таблица значений функции $P(\lambda)=1-K(\lambda)=P(D\geq 1)=1-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k\lambda}$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
2,09	0,0003	2,23	0,0001	2,37	0,000027	2,55	0,0000044
2,10	0,0003	2,24	0,0001	2,38	0,000024	2,60	0,0000026
2,11	0,0003	2,25	0,0001	2,39	0,000022	2,65	0,0000016
2,12	0,0002	2,26	0,0001	2,40	0,000020	2,70	0,0000010
2,13	0,0002	2,27	0,0001	2,41	0,000018	2,75	0,0000006
2,14	0,0002	2,28	0,0001	2,42	0,000016	2,80	0,0000003
2,15	0,0002	2,29	0,0001	2,43	0,000014	2,85	0,00000018
2,16	0,0002	2,30	0,0001	2,44	0,000013	2,90	0,00000010
2,17	0,0002	2,31	0,000046	2,45	0,000012	2,95	0,00000006
2,18	0,0001	2,32	0,000042	2,46	0,000011	3,00	0,00000003
2,19	0,0001	2,33	0,000038	2,47	0,000010		
2,20	0,0001	2,34	0,000035	2,48	0,000009		
2,21	0,0001	2,35	0,000032	2,49	0,000008		
2,22	0,0001	2,36	0,000030	2,50	0,0000075		

Приложение В

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)
0,00	0,39894	0,40	0,36827	0,80	0,28969	1,20	0,19419	1,60	0,11092	2,00	0,05399
0,01	39892	41	36678	81	28737	21	19186	61	10915	01	05292
0,02	39886	42	36526	82	28504	22	18954	62	10741	02	05186
0,03	39876	43	36371	83	28269	23	18724	63	10567	03	05082
0,04	39862	44	36213	84	28034	24	18494	64	10396	04	04980
0,05	39844	45	36053	85	27798	25	18265	65	10226	05	04879
06	39822	46	35889	86	27562	26	18637	66	10059	06	04780
07	39797	47	35723	87	27324	27	17810	67	09893	07	04682
08	39767	48	35553	88	27086	28	17585	68	09728	08	04586
09	39733	49	35381	89	26848	29	17360	69	09566	09	04491
0,10	39695	0,50	35207	0,90	26609	1,30	17137	1,70	09405	2,10	04398
11	39654	51	35029	91	26369	31	16915	71	09246	11	04307
12	39608	52	34849	92	26129	32	16694	72	09089	12	04217
13	39559	53	34667	93	25888	33	16474	73	08933	13	04128
14	39505	54	34482	94	25647	34	16256	74	08780	14	04041
15	39448	55	34494	95	25647	35	16038	75	08628	2,15	03955
16	39387	56	34105	96	25164	36	15822	76	08478	16	03871
17	39322	57	33912	97	24923	37	15608	77	08329	17	03788
18	39253	58	33718	98	24681	38	15395	78	08183	18	03706
19	39181	59	33521	99	24439	39	15183	79	08038	19	03626
0,20	39104	0,60	33322	1,00	0,24197	1,40	14973	1,80	07895	2,20	03547
21	39024	61	33121	01	23955	41	14764	81	07754	21	03470
22	38940	62	32918	02	23713	42	14556	82	07614	22	03394
23	38853	63	32713	03	23471	43	14350	83	07477	23	03319
24	38762	64	32506	04	23230	44	14146	84	07341	24	03246
25	38667	65	32297	05	22988	45	13943	85	07206	25	03174
26	38568	66	32086	06	22747	46	13742	86	07074	26	03103
27	38466	67	31874	07	22506	47	13542	87	06943	27	03034
28	38361	68	31659	08	22265	48	13944	88	06814	28	02965
29	38251	69	31443	09	22025	49	13147	89	06687	29	02898
0,30	38139	0,70	31225	1,10	21785	1,50	0,12952	1,90	06562	2,30	02833
31	38023	71	31006	11	21546	51	12758	91	06438	31	02768
32	37903	72	30785	12	21307	52	12566	92	06316	32	02705
33	37780	73	30563	13	21069	53	12376	93	06195	33	02643
34	37654	74	30339	14	20831	54	12188	94	06077	34	02582
35	37524	75	30114	15	20594	55	12001	95	05959	35	02522
36	37391	76	29887	16	20357	56	11816	96	05844	36	02463
37	37255	77	29659	17	20121	57	11632	97	05730	37	02406
38	37115	78	29430	18	19886	58	11450	98	05618	38	02349
39	36973	79	29200	19	19652	59	11270	99	05508	39	02294

Продолжение Приложения В

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	φ(*x*)	*x*	φ(*x*)	*x*	φ(*x*)	*x*	φ(*x*)	*x*	φ(*x*)	*x*	φ(*x*)
2,40	0,02239	2,70	0,01042	3,00	0,00443	3,30	0,00172	3,60	0,00061	3,90	0,00020
41	02186	71	01014	01	00430	31	00167	61	00059	91	00019
42	02134	72	00987	02	00417	32	00161	62	00057	92	00018
43	02083	73	00961	03	00405	33	00156	63	00055	93	00018
44	02033	74	00935	04	00393	34	00151	64	00053	94	00017
45	01984	75	00909	05	00381	35	00146	65	00051	95	00016
46	01936	76	00885	06	00370	36	00141	66	00049	96	00016
47	01888	77	00861	07	00358	37	00136	67	00047	97	00015
48	01842	78	00837	08	00348	38	00132	68	00046	98	00014
49	01797	79	00814	09	00337	39	00127	69	00044	99	00014
2,50	01750	2,80	00792	3,10	00327	3,40	00123	8,70	00042		
51	01709	81	00770	11	00317	41	00119	71	00041		
52	01667	82	00748	12	00307	42	00115	72	00039		
53	01625	83	00727	13	00298	43	00111	73	00038		
54	01585	84	00707	14	00288	44	00107	74	00037		
55	01545	85	00687	15	00279	45	00104	75	00035		
56	01506	86	00668	16	00271	46	00100	76	00034		
57	01468	87	00649	17	00262	47	06097	77	00033		
58	01431	88	00631	18	00254	48	00094	78	00031		
59	01394	89	00613	19	00246	49	00090	79	00030		
2,60	01358	2,90	00595	3,20	00238	3,50	00087	3,80	00029		
61	01323	91	00578	21	00231	51	00084	81	00028		
62	01289	92	00562	22	00224	52	00081	82	00027		
63	01256	93	00545	23	00216	53	00079	83	00026		
64	01223	94	00530	24	00210	54	00076	84	00025		
65	01191	95	00514	25	00203	55	00073	85	00024		
66	01160	96	00499	26	00196	56	00071	86	00023		
67	01130	97	00485	27	00190	57	00068	87	00022		
68	01100	98	00470	28	00184	58	00066	88	00021		
69	01071	99	00457	29	00178	59	00063	89	00021		

Приложение Г

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,40	0,15542	0,80	0,28814	1,20	0,38493	1,60	0,44520	2,00	47725
01	00399	41	15910	81	29103	21	38686	61	44630	01	47778
02	00798	42	16276	82	29389	22	38877	62	44738	02	47831
03	01197	43	16640	83	29673	23	39065	63	44845	03	47882
04	01595	44	17003	84	29955	24	39251	64	44950	04	47932
05	01994	45	17364	85	30234	25	39435	65	45053	05	47932
06	02392	46	17724	86	30511	26	39617	66	45154	06	48030
07	02790	47	18082	87	30785	27	39796	67	45254	07	48077
08	03188	48	18439	88	31057	28	39973	68	45352	08	48124
09	03586	49	18793	89	31327	29	40147	69	45449	09	48169
0,10	03983	0,50	19146	0,90	31594	1,30	40320	1,70	45543	2,10	48214
11	04380	51	19497	91	31859	31	40490	71	45637	11	48257
12	04776	52	19847	92	32121	32	40658	72	45728	12	48300
13	05172	53	20194	93	32381	33	40824	73	45818	13	48311
14	05567	54	20540	94	32639	34	40988	74	45907	14	48382
15	05962	55	20884	95	32894	35	41149	75	45994	15	48422
16	06356	56	21226	96	33147	36	41309	76	46080	16	48461
17	06749	57	21566	97	33398	37	41466	77	46164	17	48500
18	07142	58	21904	98	33646	38	41621	78	46246	18	48537
19	07535	59	22240	99	33891	39	41774	79	46327	19	48574
0,20	07926	0,60	22575	1,00	34134	1,40	41924	1,80	46407	2,20	48610
21	08317	61	22907	01	34375	41	42073	81	46485	21	48645
22	08706	62	23237	02	34614	42	42220	82	46562	22	48679
23	09095	63	23565	03	34850	43	42364	83	46638	23	48713
24	09483	64	23891	04	35083	44	42507	84	46712	24	48745
25	09871	65	24215	05	35314	45	42647	85	46784	25	48778
26	10257	66	24537	06	35543	46	42786	86	46856	26	48809
27	10642	67	24857	07	35769	47	42922	87	46926	27	48840
28	11026	68	25175	08	35993	48	43056	88	46995	28	48870
29	11409	69	25490	09	36214	49	43189	89	47062	29	48899
0,30	11791	0,70	25804	1,10	36433	1,50	43319	1,90	47128	2,30	48928
31	12172	71	26115	11	36650	51	43448	91	47193	31	48956
32	12552	72	26424	12	36864	52	43574	92	47257	32	48983
33	12930	73	26730	13	37076	53	43699	93	47320	33	49010
34	13307	74	27035	14	37286	54	43822	94	47381	34	49036
35	13683	75	27337	15	37493	55	43943	95	47441	35	49061
36	14058	76	27637	16	37698	56	44062	96	47500	36	49086
37	14431	77	27935	17	37900	57	44179	97	47558	37	49111
38	14803	78	28230	18	38100	58	44295	98	47615	38	49134
39	15173	79	28524	19	38298	59	44408	99	47670	39	49158

Продолжение Приложения Г

Продолжение таблицы значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,40	0,49180	2,60	0,49534	2,80	0,49744	3,0	0,40865
41	49202	61	49547	81	49752	1	49903
42	49224	62	49560	82	49760	2	49931
43	49245	63	49573	83	49767	3	49952
44	49266	64	49585	84	49774	4	49966
45	49286	65	49598	85	49781	5	49977
46	49305	66	49609	86	49788	6	49984
47	49124	67	49621	87	49795	7	49989
48	49343	68	49632	88	49801	8	49993
49	49361	69	49643	89	49807	9	49995
2,50	0,49379	2,70	0,49653	2,90	0,49813	4,0	499968
51	49396	71	49664	91	49819	4,5	499997
52	49413	72	49674	92	49825	5,0	499999
53	49430	73	49683	93	49831		
54	49446	74	49693	94	49836		
55	49461	75	49702	95	49841		
56	49477	76	49711	96	49846		
57	49492	77	49720	97	49851		
58	49506	78	49728	98	49856		
59	49520	79	49736	99	49861		

Приложение Д

Квантили распределения Стьюдента $t_\alpha(n)$

α / n	0.80	0.60	0.50	0.40	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.325	0.727	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.306
12	0.259	0.539	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.679	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	0.254	0.526	0.677	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	0.254	0.525	0.676	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601
∞	0.253	0.524	0.675	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Приложение Е

95% – квантили распределения Фишера $F(k_1, k_2)$

k_2 / k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83

Продолжение Приложения Е

95% – квантили распределения Фишера $F(k_1, k_2)$

k_2 / k_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.07	3.01	2.94	2.90	2.76	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Приложение Ж

Таблица 5%-ного і 1% – ного уровней вероятности коэффициентов автокорреляции (r_a)

к	Положительные значения (r_a)		Отрицательные значения (r_a)	
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
5	0,253	0,297	- 0,753	- 0,798
6	0,354	0,447	- 0,708	- 0,863
7	0,370	0,510	- 0,674	- 0,799
8	0,371	0,531	- 0,625	- 0,764
9	0,366	0,533	- 0,593	- 0,737
10	0,360	0,525	- 0,564	- 0,705
11	0,353	0,515	- 0,539	- 0,679
12	0,348	0,505	-0,516	- 0,655
13	0,341	0,495	- 0,497	- 0,634
14	0,335	0,485	- 0,479	-0,615
15	0,328	0,475	- 0,462	- 0,597
20	0,299	0,432	- 0,399	- 0,524
25	0,276	0,398	- 0,356	- 0,473
30	0,257	0,370	- 0,324	- 0,433
35	0,242	0,347	- 0,300	- 0,401
40	0,229	0,329	- 0,279	- 0,376
45	0,218	0,313	- 0,262	- 0,256
50	0,208	0,301	- 0,248	- 0,339

Приложение 3

Критические значения d_H и d_B для коэффициента автокорреляции критерия Дарбина-Уотсона для $P = 0,95$

Число наблю-дений	Число факторов									
	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,30	2,59		
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,38	2,41	0,24	2,82
11	0,93	1,32	0,76	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,45	2,39
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,30
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,69	1,98	0,56	2,22
16	1,11	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,73	1,94	0,62	2,16
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,66	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,54	0,93	1,70	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,07	1,54	0,97	1,69	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,89	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,65	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,23	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,87
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,75	1,00	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,37	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,53	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77

Продолжение Приложения 3

75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,52	1,79	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,58	1,72	1,55	1,75	1,53	1,77
90	1,64	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,65	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,76	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78
150	1,72	1,75	1,71	1,76	1,69	1,77	1,68	1,79	1,67	1,80
200	1,76	1,78	1,75	1,79	1,74	1,80	1,73	1,81	1,72	1,82

Продолжение таблицы критические значения d_H и d_B для коэффициента автокорреляции критерия Дарбина-Уотсона для $P = 0,95$

Число наблю-дений	*Число факторов*									
	$m = 6$		$m = 7$		$m = 8$		$m = 9$		$m = 10$	
	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B	d_H	d_B
11	0,12	2,89								
12	0,16	2,67	0,11	3,06						
13	0,21	2,49	0,14	2,64	0,09	3,18				
14	0,26	2,35	0,18	2,67	0,12	2,96	0,08	3,29		
15	0,30	2,24	0,23	2,53	0,16	2,82	0,11	3,10	0,07	3,37
16	0,35	2,15	0,27	2,42	0,20	2,68	0,14	2,94	0,09	3,20
17	0,39	2,08	0,31	2,31	0,24	2,57	0,18	2,81	0,13	3,05
18	0,44	2,02	0,37	2,24	0,28	2,47	0,22	2,70	0,16	2,93
19	0,48	1,96	0,40	2,17	0,32	2,36	0,26	2,60	0,20	2,81
20	0,52	1,92	0,44	2,11	0,36	2,31	0,29	2,51	0,23	2,71
21	1,55	1,88	0,47	2,06	0,40	2,24	0,33	2,43	0,27	2,63
22	1,57	1,85	0,51	2,02	0,44	2,19	0,37	2,37	0,30	2,55
23	1,62	1,82	0,55	1,98	0,47	2,14	0,40	2,31	0,34	2,48
24	1,65	1,79	0,58	1,94	0,51	2,10	0,44	2,26	0,38	2,42
25	1,68	1,78	0,61	1,89	0,54	2,06	0,47	2,21	0,41	2,37
26	0,71	1,76	0,64	1,89	0,57	2,03	0,51	2,17	0,44	2,31
27	0,74	1,74	0,67	1,87	0,60	2,00	0,54	2,13	0,47	2,27
28	0,76	1,73	0,70	1,85	0,66	1,97	0,57	2,10	0,50	2,23
29	0,79	1,72	0,72	1,83	0,69	1,95	0,60	2,07	0,53	2,19
30	0,81	1,71	0,76	1,82	0,69	1,93	0,62	2,04	0,56	2,16
31	0,83	1,70	0,77	1,80	0,71	1,91	0,65	2,02	0,59	2,13
32	0,86	1,69	0,79	1,78	0,73	1,89	0,67	2,00	0,62	2,10
33	0,88	1,68	0,82	1,78	0,76	1,87	0,70	1,98	0,64	2,00
34	0,90	1,68	0,84	1,77	0,78	1,86	0,72	1,96	0,67	2,06

Окончание Приложения 3

35	0,91	1,67	0,86	1,76	0,80	1,85	0,74	1,94	0,69	2,04
36	0,93	1,67	0,88	1,75	0,82	1,84	0,77	1,93	0,71	2,01
40	1,00	1,65	0,95	1,72	0,90	1,80	0,84	1,88	0,79	1,96
45	1,07	1,64	1,02	1,71	0,97	1,77	0,93	1,83	0,86	1,90
50	1,12	1,64	1,06	1,69	1,04	1,75	1,00	1,81	0,96	1,96
55	1,17	1,64	1,13	1,69	1,10	1,73	1,06	1,79	1,02	1,84
60	1,21	1,64	1,18	1,68	1,14	1,73	1,11	1,77	1,07	1,82
65	1,25	1,64	1,22	1,68	1,19	1,72	1,15	1,76	1,12	1,80
70	1,28	1,65	1,25	1,68	1,22	1,72	1,19	1,75	1,16	1,79
75	1,31	1,65	1,28	1,68	1,26	1,72	1,23	1,75	1,20	1,79
80	1,34	1,65	1,31	1,68	1,29	1,71	1,26	1,75	1,23	1,77
85	1,36	1,66	1,34	1,69	1,31	1,71	1,29	1,74	1,26	1,77
90	1,38	1,66	1,36	1,69	1,34	1,71	1,31	1,74	1,29	1,77
95	1,40	1,67	1,38	1,69	1,36	1,72	1,34	1,74	1,31	1,77
100	1,42	1,67	1,40	1,69	1,38	1,72	1,36	1,74	1,34	1,77
150	1,54	1,71	1,53	1,72	1,52	1,74	1,50	1,75	1,49	1,77
200	1,61	1,74	1,60	1,75	1,59	1,76	1,58	1,77	1,57	1,78

Г.Б. Клейнер, Л.С. Звягин, Г.А. Щербаков

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ: СБОРНИК СИТУАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Редактор *Е.А. Никитин*
Компьютерная верстка *С.Ю. Кирьянов*
Корректор *Н.А. Гежа*

Подписано в печать 18.06.2018. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 31,62 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ_____

Издательский дом «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА»
Телефон: 8 (495) 59229-98
Адрес сайта: www.sciencelib.ru
E-mail: idnb11@yandex.ru, info@sciencelib.ru