

Бурков В.Н., Багатурова О.С., Иванова С.И.,  
Овчинников С.А., Ануфриев И.К.,  
Маркотенко В.Л.

**ОПТИМИЗАЦИЯ ОБМЕННЫХ  
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СХЕМ В УСЛОВИЯХ  
НЕСТАБИЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ**

ПРЕПРИНТ

МОСКВА 1996

Бурков В.Н., Багатурова О.С., Иванова С.И., Овчинников С.А., Ануфриев И.К., Маркотенко В.Л. Оптимизация обменных производственных схем в условиях нестабильной экономики. М.: ИПУ РАН, 1996 – 45 с.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с организацией производственного процесса в цепочках технологически связанных предприятий с использованием различных "давальческих" и смешанных схем обеспечения ресурсами. Поставлена и решена задача построения оптимальной производственной цепочки с учетом факторов прибыли, продолжительности производственного цикла и риска. Описаны формальные математические модели давальческих схем, проведен сравнительный анализ механизмов обмена в подобных схемах, дана оценка их эффективности. Рассмотрены механизмы деления прибыли в различных вариантах "давальческих" схем.

Рецензент: д.т.н. Цвиркун А.Д.

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	9
1.1. Обобщенная модель взаимодействия технологически связанных предприятий. ....	9
1.2. Динамическая модель с учетом кредитования производственной цепочки .....	14
1.3. Динамическая модель в условиях поэтапного кредитования с постоянным дисконтным коэффициентом. ....	17
2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ .....	20
2.1. Построение оптимальной цепочки с использованием сетевых методов.....	20
2.2 Построение оптимальной цепочки с использованием методов динамического программирования.....	26
3.ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ОБМЕНА.....	31
3.1. Анализ элементарных цепочек.....	32
3.2. Анализ простых цепочек .....	37
3.3 . Общий случай.....	39
4. МЕХАНИЗМЫ ДЕЛЕНИЯ ВЫРУЧКИ В ДАВАЛЬЧЕСКИХ СХЕМАХ .....	39
4.1. Принцип равных рентабельностей. ....	40
4.2. Противозатратный принцип деления выручки .....	42
5. ДЕЛОВАЯ ИГРА "ДАВАЛЬЧЕСКИЕ СХЕМЫ" .....	43
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	44
ЛИТЕРАТУРА.....	45

## **ВВЕДЕНИЕ**

В результате проведения важнейших рыночных реформ: либерализации цен, децентрализации системы распределения ресурсов, реформы банковской системы, массовой приватизации, коренным образом изменились среда и условия функционирования предприятий, как звеньев хозяйственного механизма.

Прежде всего, предприятия получили относительную хозяйственную самостоятельность. Подавляющее их большинство свободно в принятии решений по объему и структуре производства, инвестиций, установлении цены на свою продукцию, зарплаты и т.д. Но структурный распад единого промышленного комплекса, нарушение горизонтальных и вертикальных хозяйственных связей привели к значительным трудностям со снабжением и сбытом, падению объема производства. Несовершенство кредитно-расчетной системы вызвало катастрофический рост взаимных неоплаченных долгов предприятий (так называемый кризис неплатежей). Характерной чертой многих предприятий сегодня является примерное равенство между дебиторской задолженностью по неоплаченным поставкам и кредиторской задолженностью за полученные товары или услуги при полном отсутствии свободных средств на продолжение производственного процесса: выплату заработной платы, оплату счетов за электроэнергию, топливо, транспорт и т.д.

Для предприятий, функционирующих в нормальной рыночной экономике, основной задачей является максимизация прибыли. В кризисных условиях эта задача отходит на второй план, уступая место задаче стабилизации финансового положения, поддержания

платежеспособности или, попросту говоря, задаче выживания. Причем, критериями оценки финансового положения являются отнюдь не уплата долгов и возврат кредитов, а своевременная выплата зарплаты и сохранение численности персонала.

По данным “Российского экономического барометра” [1] цели, предопределяющие поведение российских предприятий в 1995 году, располагались следующим образом: обеспечение выпуска продукции, улучшение финансового положения и только затем получение прибыли. Поэтому одним из основных источников формирования оборотных средств предприятий выступает не прибыль в составе выручки от реализации продукции, не другие собственные или приравненные к ним средства, а банковский или коммерческий кредиты. Полученные со значительным временным сдвигом собственные средства уже не могут в полном объеме быть запущены в кругооборот, так как расходуются на погашение кредитных обязательств.

Учитывая неустойчивую структуру цен, высокую вероятность непредвиденного ухудшения финансового положения заемщика, риски, обусловленные непредсказуемыми изменениями денежно-кредитной политики, кредитные учреждения избегают связывания средств на длительный период, отдавая предпочтение краткосрочному кредитованию. В условиях инфляционной экономики существующий кредитный рынок - это рынок краткосрочных кредитов, обслуживающий не инвестиционный процесс, а текущий хозяйственный оборот. Более половины ссуд выдается на срок от 3 дней до 2 недель [2].

В этих сложных условиях для предотвращения полной остановки производства предприятия применяют различные хозяйственные

стратегии: в рамках договоров о совместной деятельности создаются различные давальческие схемы, широко распространена система многоступенчатого бартера, позволяющая решать проблемы снабжения без затраты денежных средств. В реализации этих стратегий предприятия проявляют немалую изобретательность, перехватывая каналы сбыта готовой продукции поставщиков своих непосредственных поставщиков или потребителей своих потребителей. Перевод поставщиков на так называемое “давальческое” сырье позволяет устанавливать цены на поставки в 2-2,5 раза ниже среднерыночных, что дает возможность существенно снижать себестоимость собственной продукции.

Такие схемы снабжения характерны и особенно эффективны для технологически взаимосвязанных предприятий, составляющих так называемые производственные цепочки. Например, хлопкоочистительный завод - прядильная фабрика- ткацкая фабрика- швейное производство. В таких цепочках, когда производство находится под угрозой остановки из-за отсутствия свободных средств и при наличии взаимных долгов, достаточно бывает одному предприятию взять кредит на оплату услуг смежников, чтобы вся цепочка пришла в движение. Организатором производственного процесса в таких цепочках, как правило, выступает коммерческий посредник, способный оплатить исходное сырье или предоставить кредит. Причем, здесь возможны как чисто давальческие, так и смешанные схемы. В чисто давальческих схемах фирма-организатор предоставляет каждому предприятию производственной цепочки необходимые для производства сырье и материалы в обмен на их готовую продукцию, которая является сырьем для следующего звена цепочки. Продукция

последнего звена производственной цепочки является собственностью фирмы-организатора и реализуется ею на рынке. После этого производится окончательный расчет с предприятиями-производителями. Расчет может производиться различными способами: наличными деньгами, частью готовой продукции, сырьем, акциями и т.д. В смешанных схемах снабжение сырьем осуществляется по-разному: некоторые предприятия приобретают сырье сами, используя полученный кредит, другие работают на давальческом сырье, третьи проводят бартерные операции, обменивая на сырье побочные продукты собственного производства и т.д. То есть организуется уже не цепочка, а сеть взаимосвязанных предприятий.

Рассмотрим, например, технологически взаимосвязанные предприятия в нефтяной отрасли: нефтедобывающие объединения-нефтеперерабатывающие заводы-конечные потребители. Здесь различные обменные схемы применяются особенно часто, так как при общей либерализации цен рост цен на нефть и нефтепродукты искусственно сдерживается, и внутренние цены не отражают реальной стоимости этого энергоносителя. Разница в ценах на нефть и нефтепродукты на внутреннем и внешнем рынках пока весьма существенна. Кроме того, финансовый поток, который является встречным по отношению к нефтяному и протекает по обратной цепочке: конечные потребители-нефтеперерабатывающие заводы-нефтедобытчики, обрывается с самого начала, так как упирается в неплатежеспособность основных потребителей нефтепродуктов на внутреннем рынке, которыми являются военно-промышленный и агропромышленный комплексы, финансируемые из госбюджета. Отсутствие свободных средств на оплату сырья компенсируется

созданием специфических взаиморасчетных и бартерных схем. Например, нефтяники отгрузили нефть нефтеперерабатывающему заводу, в оплату за эту нефть получили нефтепродукты, которыми, в свою очередь, рассчитались с машиностроительным заводом за полученные от него бурильные установки, а машиностроительный завод сумел продать эти нефтепродукты по среднерыночным ценам. Деньги в явном виде появились здесь только на последнем этапе. А вообще говоря, цепочка могла быть еще длиннее, если бы машиностроительный завод не нашел выхода на рынок и рассчитался бы со своими кредиторами полученными нефтепродуктами.

На практике организация и задействование вышеописанных производственных цепочек и сетей дело довольно сложное, так как их построение является многовариантной и многокритериальной задачей. В качестве критериев оптимальности обычно принимаются во внимание прибыль от реализации конечной продукции на рынке, продолжительность цикла производственной цепочки (то есть оборачиваемость вложений) и риск, связанный со срывом обязательств в каком-либо звене цепочки или со сбоем при реализации на рынке.

В предложенной работе ставится и решается задача построения производственной цепочки предприятий, оптимальной по трем вышеназванным критериям, дана постановка задачи построения оптимальной сети взаимосвязанных предприятий.



## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

### 1.1. Обобщенная модель взаимодействия технологически связанных предприятий.

Представим схему взаимодействия (взаимообмена) предприятий, составляющих производственные цепочки в виде сети  $G=(A,V)$ , множество узлов которой ( $A$ ) - предприятия, входящие в цепочки, источники сырья и рынок, а множество направленных дуг ( $V$ ) соответствует допустимым потокам ресурсов между предприятиями-производителями, между источниками сырья и потребителями, а также между предприятиями и рынком. Здесь и далее под ресурсами понимается как сырье, так и готовый продукт.

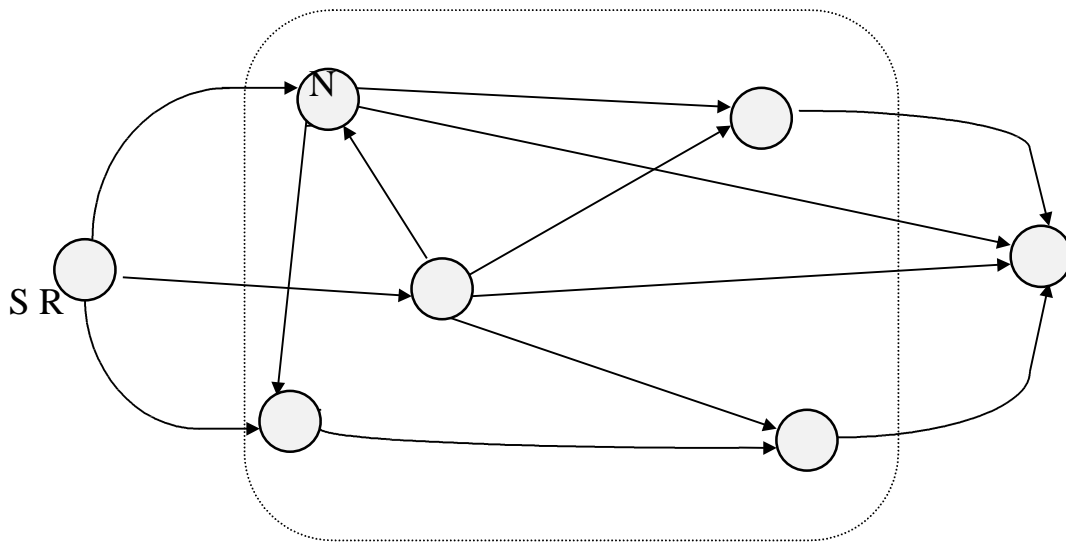
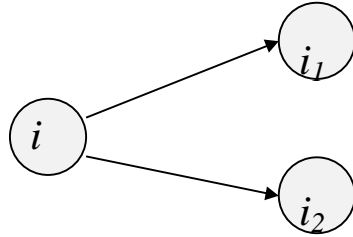


Рис. 1

На множестве узлов выделяем подмножество узлов  $S \subset A$ , соответствующих источникам сырья (например, нефтедобывающие объединения), подмножество узлов  $R \subset A$  - потребители готовых продуктов и сырья на свободном рынке, все остальные узлы подмножества  $N \subset A$  - предприятия -производители.

Каждое предприятие -производитель может использовать часть поступившего к нему сырья для переработки и выпуска продукции, а часть может в необработанном виде реализовать на рынке или расплатиться им (сырьем) со своими кредиторами. Поэтому каждый узел  $i \hat{I} N$  представим в виде узлов  $i_1 \hat{I} N$  и  $i_2 \hat{I} N$ .



Введем коэффициент усиления в узле  $k_i$ , соответствующий коэффициенту выработки предприятием  $i$  конечного продукта из единицы поступившего сырья. Если сырье, поступившее на предприятие, соответствующее узлу  $i$ , будет обрабатываться, то поток проходит через узел  $i_1$  и коэффициент усиления в узле  $i_1$  равен  $k_{i1}$ . В случае же, когда сырье используется в качестве платежного средства, поток направляется в узел  $i_2$ , причем коэффициент усиления потока в узле  $i_2$  равен 1,  $k_{i2}=1$ .

Пусть  $\bar{N}$  - преобразованное множество узлов, соответствующих предприятиям. Обозначим поток из узла  $i$  в узел  $j$  через  $f(i,j)$ . Суммарный поток из узла  $i$  во все узлы, принадлежащие множеству  $\bar{N}$  обозначим  $f(i, \bar{N})$ :

$$(1) f(i, \bar{N}) = \sum_{j \in \bar{N}} f(i, j)$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$(2) f(i, \bar{N}) + f(i, R) = k_i (f(\bar{N}, i) + f(S, i))$$

Здесь  $f(i, \bar{N})$  - потоки по дугам, соединяющим узел  $i$  с узлами подмножества  $\bar{N}$ , то есть это ресурсы, переданные предприятием  $i$  другим предприятиям- производителям.

$f(i, R)$  - количество ресурсов, представленных предприятием  $i$  на рынок. Если узел  $i$  первого типа, то  $k_i \neq 1$ , и ресурсы полученные у производителей  $\bar{N}$  и источников сырья  $S$  в количестве  $f(\bar{N}, i) + f(S, i)$  будут использованы для переработки. Если узел  $i$  второго типа, то сумма  $f(\bar{N}, i) + f(S, i)$  - часть сырья, которая будет использована для обмена без переработки.

Еще одной характеристикой узла является коэффициент пропускной способности узла  $a_i$ . Он соответствует предельно допустимому количеству сырья, которое может переработать предприятие  $i$ , исходя из своих технологических возможностей. Для узлов из подмножества  $R$  пропускная способность соответствует емкости рынка. Для узлов второго типа  $a_{i2} = \infty$ . Ограничение объема выпуска продукции, связанное с технологическими возможностями предприятия эквивалентно ограничению потока по пропускной способности узла:

$$(3) f(S, i) + f(\bar{N}, i) \leq a_i$$

Для переработки единицы сырья в конечный продукт на предприятии  $i$  необходимо затратить некоторое количество денежных средств (расходы на приобретение сырья и материалов, на эксплуатацию оборудования, на выплату заработной платы и т.д.) Обозначим затраты

на производство единицы продукции предприятия  $i$  через  $W_i$ . Ясно, что для вершин второго типа  $i_2 \in \hat{I} \setminus N$   $W_{i_2}=0$ . Как упоминалось во введении, существует значительный разброс цен на одни и те же ресурсы при реализации их на рынке и при обмене ими предприятиями-партнерами между собой. Поэтому введем различные обозначения для стоимости единицы потока по дугам, входящим непосредственно в узел  $R$  (рынок), и по дугам, соединяющим узлы подмножества  $\bar{N}$  между собой. Обозначим их соответственно  $\bar{C}_i$  и  $\underline{C}_i$ . Денежные средства, имеющиеся в распоряжении предприятия  $i$  обозначим  $D_i$ . Тогда ограничение по балансу стоимости запишется так:

$$(\bar{C}_i - W_i)f(i_1, R) + \bar{C}_i f(i_2, R) + (\underline{C}_i - W_i)(f(i_1, \bar{N}) +$$

$$(4) + \underline{C}_i f(i_2, \bar{N})) + D_i \geq \sum_{j \in N \cup S} \underline{C}_j f(j, i) + \bar{C}_R f(R, i)$$

То есть каждое предприятие  $i$  может приобрести ресурсы на сумму, не большую той, которую оно получило от продажи своей продукции на рынке и своим партнерам  $(\bar{C}_i - W_i)f(i_1, R) + (\underline{C}_i - W_i)(f(i_1, \bar{N})$  и от продажи необработанного сырья  $\bar{C}_i f(i_2, R) + \underline{C}_i f(i_2, \bar{N})$ .

Как уже говорилось во введении, наличие у предприятий собственных средств  $D_i$  на организацию производства весьма проблематично. Для того, чтобы “цепочки” пришли в движение, необходим организатор, который обеспечил бы денежные вливания в виде кредитов или организовал бы перераспределение начальных запасов сырья между производителями.

Ясно, что для такого организатора существенную роль будут играть вопросы времени, то есть временные интервалы от момента предоставления кредита или партии сырья до момента реализации конечной продукции на рынке, то есть период оборота вложенных денежных средств. Важной для него является также проблема снижения риска при вложении денег в организацию производственных цепочек. В описываемой ситуации интересы отдельных предприятий, например получаемая ими прибыль, отходят на второй план, а основной целью является максимизация дохода фирмы-организатора цепочек.

Для того, чтобы сформулировать ограничения на риск и отразить в постановке динамический характер задачи введем дополнительные параметры на дугах.

Обозначим  $r(i,j)$  риск на дуге  $(i,j)$ . Под риском на дуге  $(i,j)$  будем понимать надежность производственной связи между предприятиями  $i$  и  $j$ , то есть ожидаемую долю потерь продукции при транспортировке и в ходе производственного процесса. Примем, что риск прохождения потока по связной цепи равен произведению рисков на всех дугах цепи. Пусть  $Z_i$  цепь, проходящая через узел  $i$

$Z_i = \{ (i, i+1), f(i, i+1) \mid 0 \leq i \leq n \}$ , где узел 0 - источник сырья, узел  $n+1$  - рынок. Риск на цепи  $Z_i$  равен

$$(5) \quad \Re_{Z_i} = \prod_{(i,j) \in Z_i} r(i,j)$$

Оценить цепочки можно либо минимизируя риск по наихудшей цепочке, то есть

$$(6) \quad \max_{z_i} \mathfrak{R}_{z_i} \rightarrow \min, i \in N$$

либо принимая некоторую пороговую величину риска

$$\max_{z_i} \mathfrak{R}_{z_i} \leq \overline{\mathfrak{R}}.$$

Другой дуговой характеристикой является время прохождения потока по дуге  $t(i,j)$ . Каждой дуге  $(i,j)$  приписано целое положительное число  $t(i,j)$ , определяющее количество интервалов времени, необходимых для ее прохождения. Более подробно динамические модели будут рассмотрены в пп.1.2 и 1.3.

### **1.2. Динамическая модель с учетом кредитования производственной цепочки**

Рассмотрим технологическую цепочку из  $m$  предприятий  $(i_0, i_1, \dots, i_m, i_{m+1})$ , где  $i_k$  - предприятие, занимающее  $k$ -е место в технологической последовательности,  $i_0$  - поставщик исходного сырья,  $i_{m+1}$  - рынок. Далее обозначим  $k_{ij}$  - количество продукции, производимое предприятием  $j$  из единицы сырья, поставляемого ему предприятием  $i$  (эти технологические коэффициенты учитывают, что часть сырья или готовой продукции отдается предприятию  $j$ ),  $k_{i,i_{m+1}}$  - прибыль от реализации продукции предприятия  $i$  на рынке,  $t_{ij}$  - продолжительность производственного цикла на предприятии  $j$ , включая время доставки исходной продукции (сырья или материалов) с предприятия  $i$ ,  $r_{ij}$  - риск, связанный с установлением

производственной связи между предприятиями  $i$  и  $j$ . Напомним, что под риском, в данном случае, подразумевается ожидаемая доля потерь продукции при транспортировке ее от предприятия  $i$  на предприятие  $j$  и в ходе производственного процесса на предприятии  $j$ . Определим для рассматриваемой цепочки следующие величины:  $D$  - прибыль (доход) от реализации конечной продукции, полученной из единицы исходного сырья:

$$(7) D = \prod_{j=1}^{m+1} k_{i_{j-1}i_j}$$

$T$  - продолжительность производственного цикла цепочки от поставки исходного сырья до реализации на рынке конечной продукции,

$$(8) T = \sum_{j=1}^{m+1} t_{i_{j-1}i_j}$$

$Q$  - надежность технологической цепочки, как ожидаемая доля прибыли после реализации конечной продукции на рынке.

$$(9) Q = \prod_{j=1}^{m+1} (1 - r_{i_{j-1}i_j})$$

Тогда ожидаемая прибыль, приведенная к началу процесса описывается следующей формулой:

$$(10) \Phi = \frac{D \cdot Q}{T \prod_{t=1} (1 + a_t)}$$

где  $a_t$  - коэффициент дисконтирования. В качестве коэффициента дисконтирования выбирается либо банковская процентная ставка, либо коэффициент, учитывающий темп инфляции, либо другой показатель, характеризующий изменение “ценности” денег со временем.

Задача заключается в определении технологической цепочки, обеспечивающей максимум прибыли на вложения средств, произведенные в начале производственного процесса. То есть необходимо найти  $\max \Phi$ , где  $\{Z\}$ - множество всех возможных технологических цепочек. Логарифмируя выражение (10) приведем его к виду

$$(11) F = \lg \Phi = \sum_{j=1}^{m+1} \lg(k_{i_{j-1}i_j} \cdot (1 - r_{i_{j-1}i_j})) - \sum_{t=1}^T \lg(1 + a_t)$$

Обозначив  $l_{ij} = \lg k_{ij} \cdot (1 - r_{ij})$  и  $b_t = \lg(1 + a_t)$ ,

приведем (11) к к виду

$$(12) F = \sum_{j=1}^{m+1} l_{i_{j-1}i_j} - \sum_{t=1}^T b_t$$

Для каждой дуги исходного графа зададим две величины  $l_{ij}$  - длина дуги и  $t_{ij}$  - время прохождения дуги.

Заметим, что любой технологической цепочке можно поставить в соответствие простой путь  $m$  в графе, соединяющий начальную вершину  $i_0$  с конечной  $i_n$ . Величина  $F$  для этого пути будет равна



$$(13) F=L(m)-\sum_{t=1}^{T(m)} b_t$$

$$\text{где } T(m)=\sum_{(i,j)\in m} t_{ij}, L(m)=\sum_{(i,j)\in m} l_{ij}$$

Итак, задача заключается в определении пути  $m$ , для которого  $F$  принимает максимальное значение.

### **1.3. Динамическая модель в условиях поэтапного кредитования с постоянным дисконтным коэффициентом.**

Предположим более выгодную с точки зрения фирмы-организатора ситуацию, когда размер кредита неограничен, и может быть получен в любой момент времени по мере возникновения необходимости. Процент, выплачиваемый по кредиту в единицу времени, как и раньше, равен  $a$ . Этот процент считается стабильным, не зависящим от времени.

Итак, пусть  $S$  - множество всех источников сырья для предприятий из множества  $N$ , а  $R$  - рынок сбыта всех видов товаров, включая сырьё и продукцию всех предприятий из множества  $N$ . Предполагается, что для производства своей продукции каждому предприятию требуется ровно один вид сырья, а все остальные расходные материалы учитываются в производственных затратах.

Пусть  $w_i$  - затраты на производство единицы продукции в вершине  $i$ ,  $k_i$  - коэффициент усиления в  $i$ , равный количеству готовой продукции, которая может быть изготовлена в  $i$  из единицы сырья,  $C_i$  -

рыночная стоимость единицы продукции  $i$ ,  $a_i$  - ограничение на производственную мощность в вершине  $i$ , т.е. максимальное количество продукции, которое может быть произведено в единицу времени,  $t_{ij}$  - время прохождения дуги  $(i,j)$ ,  $f(i,j)$  - величина потока из  $i$  в  $j$ .

Рассмотрим производственную “технологическую цепочку”  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  такую, что  $i_1 \in S \cap N$ ,  $i_n \in R$ ,  $i_2, i_3, \dots, i_{n-1} \in N$  и для каждой пары  $i_k, i_{k+1}$  существует дуга  $(i_k, i_{k+1})$ . Вычислим прибыль от функционирования цепочки в расчете на единицу сырья, поступающего из  $i_1$  в  $i_2$ , при условии, что кредит может быть получен в момент возникновения необходимости.

Если из  $i_1$  в  $i_2$  поступит единица сырья, то в результате функционирования всей “цепочки” на рынке  $R$  будет продано конечного продукта в количестве  $k_2 \times k_3 \times \dots \times k_{n-1}$ , и доход от его продажи составит

$$(14) D = C_{i_{n-1}} \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_{n-1}.$$

Затраты с учетом дисконтного процента будут равны:

$$(15) \quad F = W_{i_1} (1+a)^{\sum_{k=1}^{n-1} t_{i_k, i_{k+1}}} + k_{i_2} W_{i_2} (1+a)^{\sum_{k=2}^{n-1} t_{i_k, i_{k+1}}} + \dots \\ + \left( \prod_{k=1}^{n-1} k_{i_k} \right) W_{i_{n-1}} (1+a)^{t_{i_{n-1}, i_n}}$$

Ясно, что прибыль от этой цепочки будет равна  $D-F$ .

Рассмотрим задачу построения цепочки, оптимальной с точки зрения максимизации удельной прибыли, т.е. прибыли, которая может быть получена в расчете на единицу исходного сырья. Такая постановка, очевидно, упрощает исходную задачу, т.к. сводит ее к построению простейших линейных цепочек без разветвлений. Этот подход, однако, обоснован с практической точки зрения, т.к. делает явными, прозрачными производственные связи и источники доходов и расходов, что необходимо при распределении конечной прибыли и ответственности за возможные срывы в сроках и поставках.

Введем следующие обозначения. Пусть  $P_1$  - множество всех вершин графа, связанных с  $R$ -ориентированной цепочкой длины 1, т.е.  $P_1 = \{i: \$ (i,R)\}$ ,  $P_2$  - множество вершин связанных с  $R$ -ориентированной цепочкой длины 2,  $P_2 = \{i: \$ (i,j) \text{ и } \$ (j,R)\}$  и т.д.,  $P_m$  - множество вершин, из которых существует путь в  $R$  длины  $m$ . Ясно, что эти множества могут пересекаться, возможно, что  $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_m \not\subset \dots$ . Это означает, что продукция предприятий может либо быть либо непосредственно продана на рынке, либо переработана на других предприятиях, причем вариантов технологических цепочек может быть много. Отметим, что множества  $P_1, P_2, \dots, P_m$  нет необходимости строить отдельно, т.к. в ходе выполнения алгоритма формируются только те их элементы, которые требуются для построения оптимальной цепочки.

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

### 2.1. Построение оптимальной цепочки с использованием сетевых методов

Задача, описанная в разделе 1.2 относится к классу задач поиска экстремальных путей на графах. Однако, специфический вид критерия

$$F=L(m)-\sum_{t=1}^{T(m)} b_t \text{ затрудняет применение известных алгоритмов[3].}$$

Заметим, что если  $b_t=b$  для всех  $t$ , то

$$\sum_{k=1}^{T(m)} b = b \cdot T(m) = b \sum_{(ij) \in m} t_{ij},$$

и задача сводится к определению пути максимальной длины при длинах дуг, равных  $(l_{ij}-bt_{ij})$ . Пусть  $b$  принимает значения  $b(k)$  на  $(T_{k-1}, T_k]$ ,  $T_0=0$ ,  $k=1 \div s$ .

Рассмотрим случай, когда  $b(1) > b(2) > \dots > b(s)$ . Пусть далее  $T(m) \in (T_{k-1}, T_k]$ . Тогда целевую функцию (7) можно представить в виде

$$(16) F(m)=L(m)-b(k) \cdot T(m)-\sum_{i=1}^{k-1}(b(i)-b(i+1))T_i$$

Пусть  $m_k$  - путь максимальной длины при длинах дуг, равных  $(l_{ij}-b(k)t_{ij})$  и  $M=\bigcup_k m_k$

Теорема. *Оптимальный путь исходной задачи  $m_0$  существует среди путей множества  $M$ .*

Доказательство.

Предположим противное, то есть, что  $T(m_0)\hat{I}(T_{k-1}, T_k)$  и в то же время,  $L(m_0) - b(k) T(m_0) < L(m_k) - b(k) T(m_k)$ . Если  $T(m_k) \hat{I}(T_{k-1}, T_k]$ , то путь  $m_k$  лучше, чем  $m$ , что противоречит оптимальности  $m_0$ . Пусть  $T(m_k) \hat{I}(T_{q-1}, T_q]$ , где  $q > k$ . В этом случае имеем  $T(m_k) > T_i$ ,  $i = k, \dots, q-1$  и  $F(m_0) = L(m_0) - b(k) \times T(m_0) - \sum_{i=1}^{k-1} (b(i) - b(i+1)) \cdot T_i < L(m_k) -$

$$\begin{aligned}
 & - b(k) \times T(m_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - b_{i+1}) \cdot T_i = L(m_k) - b(q) \times T(m_k) - \\
 & - \sum_{k}^{q-1} (b_i - b_{i+1}) \cdot T(m_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - b_{i+1}) \cdot T_i < L(m_k) - \\
 & - b(q) \times T(m_k) - \sum_{i=1}^{q-1} (b_i - b_{i+1}) \cdot T_i = F(m_k) \quad (17)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли путь  $m_k$  лучший, чем путь  $m_0$ , что противоречит оптимальности  $m_0$ .

Пусть теперь  $T(m_k)\hat{I}(T_{q-1}, T_q]$ , где  $q < k$ . В этом случае имеем  $T(m_k) \notin T_i$  и  $F(m_0) = L(m_0) - b(k) \times T(m_0) -$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} (b(i) - b(i+1)) \cdot T_i < L(m_k) - b(k) \times T(m_k) -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_q^{k-1} (b(i) - b(i+1)) \cdot T_i - \sum_1^{q-1} (b(i) - b(i+1)) \cdot T_i \leq L(m_k) - \\
& - b(q)T(m_k) - \sum_1^{q-1} (b(i) - b(i+1)) \cdot T_i = F(m_k) \quad (18)
\end{aligned}$$

и также получаем противоречие. Теорема доказана.

Теорема утверждает, что оптимальный путь  $m_0$  существует среди путей  $\mu_k$ , причем таких, для которых  $T(m_k) \hat{I}(T_{k-1}, T_k]$ .

Опишем алгоритм решения.

1. Определяем оптимальный путь  $m_1$  при  $b=b(1)$ . Переходим к следующему шагу.

2. Если  $T(m_1) \hat{I}[0, T_1]$ , то определяем путь  $m_2$ . Если  $T(m_1) \hat{I}(T_{k-1}, T_k]$ , где  $k > 1$ , то определяем путь  $m_k$ . Переходим к следующему шагу.

3. Если  $T(m_k) \hat{I}(T_{k-1}, T_k]$ , то определяем путь  $m_{k+1}$ . Если  $T(m_k) \hat{I}(T_{q-1}, T_q]$ , где  $q > k$ , то определяем  $m_q$ . Переходим к следующему шагу.

В силу конечности числа отрезков описанный алгоритм за конечное число шагов позволяет определить все пути  $\mu_k$ , такие что  $T(m_k) \hat{I}(T_{k-1}, T_k]$ . Среди этих путей определяем оптимальный по критерию (16).

Для обоснования алгоритма достаточно показать, что описанная процедура позволяет получить все пути  $\mu_k$ , удовлетворяющие условию  $T_{k-1} < T(m_k) \leq T_k$ . Для этого достаточно доказать, что если  $T_{q-1} < T(m_k)$

$\notin T_q$ , где  $q > k$ , то для всех  $k < j < q$   $T(m_j) > T_{q-1}$ . Это следует из того, что  $T(m_k)$  являются неубывающими функциями  $k$ , то есть  $T(m_1) \leq T(m_2) \leq \dots \leq T(m_s)$ . Поэтому,  $T(m_j) \geq T(m_k) \geq T_{q-1}$ . Следовательно, оптимальное решение не может быть среди путей  $\mu_j$ , таких, что  $k < j < q$ .

Если условие убывания  $b(k)$  с ростом  $k$  не выполняется, то теорема уже не имеет места. В этом случае для решения задачи необходимо развернуть сеть во времени [3]. При этом, одному и тому же предприятию, выпускающему продукцию в различные моменты времени, будут соответствовать различные вершины. Дугу в такой сети будем обозначать  $[i(t_i), j(t_j)]$ , где  $i(t_i)$  означает, что предприятие  $i$  завершает выпуск продукции в момент времени  $t_i$ . Длина дуги  $[i(t_i), j(t_j)]$  определяется выражением

$$(19) \quad l_{i(t_i)j(t_j)} = l_{ij} - \sum_{t=t_i+1}^{t_j} b_t, \text{ где } b_t = b(k) \text{ при } t \in [T_{k-1}, T_k)$$

Пример.

Сеть возможных технологических цепочек приведена на рис. 2. Числа в скобках у дуг соответствуют длинам  $l_{ij}$  (первое число) и времени движения по дуге  $t_{ij}$  (второе число). Значения  $T_k$  и  $b(k)$  приведены в таблице 1.

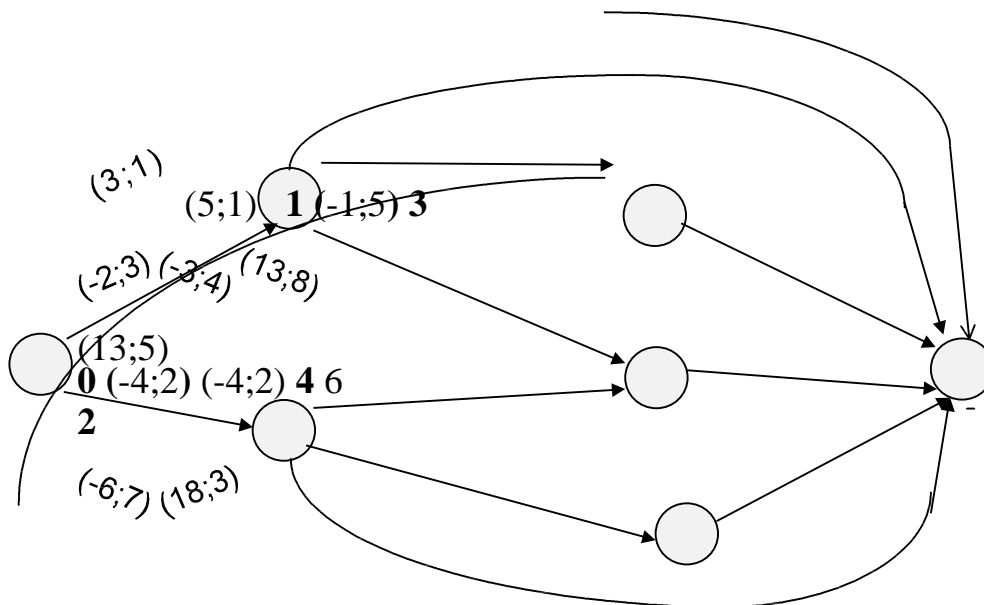
k	1	2	3
$T_k$	6	10	$\infty$
$\beta$	0,5	0,4	0,3

табл. 1

Шаг 1. Берем  $b(1)=0.5$  и полагаем длины дуг равными  $l_{ij}^1 = l_{ij} - 0.5t_{ij}$ . Соответствующая сеть приведена на рисунке 3. Длины дуг указаны в скобках у соответствующих дуг, выделенными дугами обозначен путь максимальной длины

$\mu_1 = [0, 1, 4, 6]$ . При этом,  $F(m_1)=3$ ,  $T(m_1)=12$ . Так как  $T(m_1) \hat{I}(10, \mathbb{Y})$ , то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Берем  $b(3)=0.3$  и полагаем длины дуг равными  $l_{ij}^2 = l_{ij} - 0.3t_{ij}$ . Соответствующая сеть приведена на рис.4. Имеем  $m_3 = [0, 1, 3, 6]$ ,  $T(m_3) = 16$ .  $T(m_3) \hat{I}(10, \mathbb{Y})$ . Поэтому путь  $m_3$  определяет оптимальное решение. При этом по формуле (16)  $F(m_3) = l_{01}^2 + l_{13}^2 + l_{36}^2 - (b(1) - b(2))T_1 - (b(2) - b(3))T_2 = -2.9 - 2.5 + 10.6 - 0.6 - 1 = 3.6$





(7;2) 5 рис.2

$b=0.5$

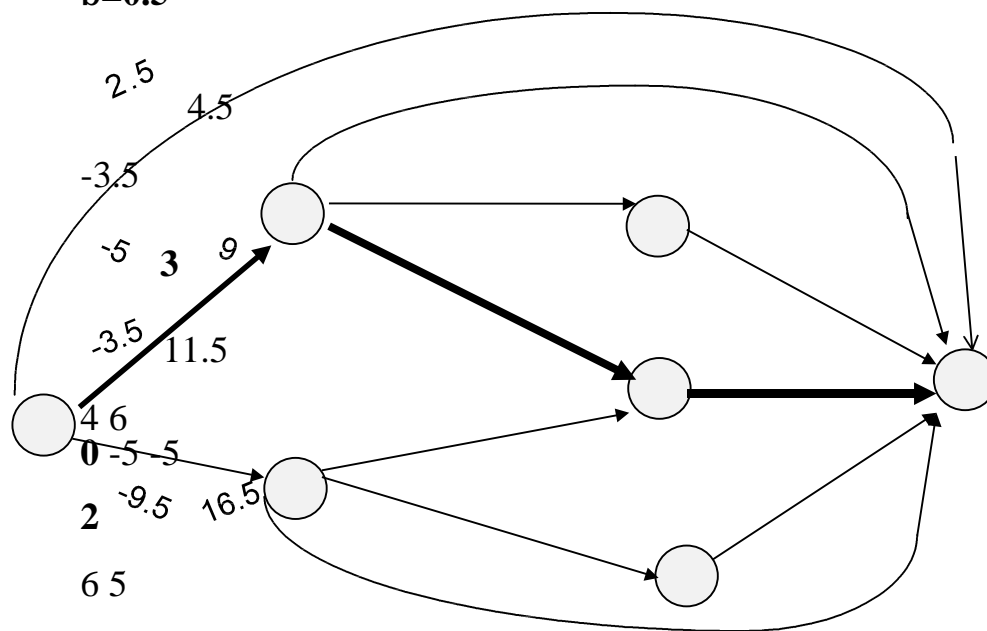
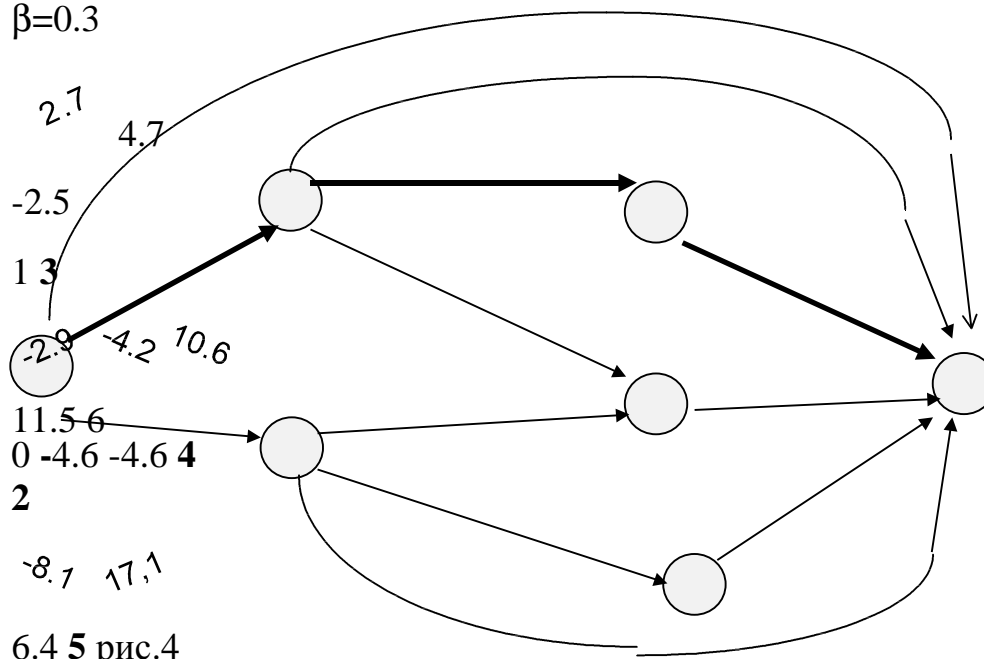


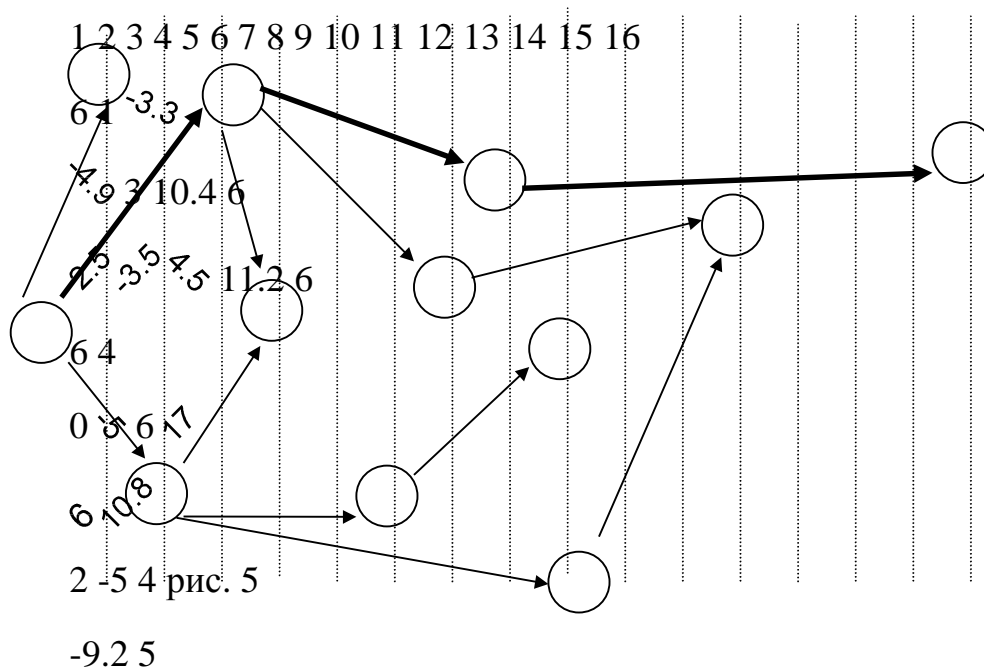
рис.3

$\beta=0.3$



6.4 5 рис.4

На рисунке 5 приведена развернутая во времени сеть для вышеописанного примера. Путь максимальной длины в этой сети определяет оптимальное решение задачи для любых последовательностей  $\{b_t\}$ . Оптимальный путь для  $\{b_t\}$  из таблицы 1 выделен утолщенными дугами. Очевидно, что он определяет то же оптимальное решение, которое было получено выше, то есть путь  $m=[0,1,3,6]$ .



## 2.2 Построение оптимальной цепочки с использованием методов динамического программирования.

Алгоритм построения оптимальной цепочки в условиях поэтапного кредитования при наличии ограничений на производственные мощности предприятий с использованием методологии динамического программирования имеет следующий вид:

Шаг 1. Построим множество  $P_1$ , как множество вершин графа, связанных с  $R$  по исходящим дугам. Каждой вершине  $i \in P_1$  припишем два значения:

$$(20) \quad g(i) = c_i - w_i (1 + a)^{t_{iR}}$$

$$(21) \quad t(i) = t_{iR}$$

Величина  $g(i)$  равна доходу от продажи единицы продукции  $i$ -го предприятия на рынке минус затраты на его производство с учетом процента на кредит. Величина  $t_{iR}$  - промежуток времени от производства единицы продукции на предприятии  $i$  до ее реализации на рынке  $R$ .

Шаг 2. Строим множество  $P_2$  всех вершин графа, связанных с  $P_1$  исходящими дугами:  $P_2 = \{i: \exists (i, j), j \in P_1\}$ .

Если из вершины  $i$  исходит более одной дуги, т.е.  $\exists (i, j_1), \dots, (i, j_k) \in P_1$ , то представляем вершину  $i$  в виде  $k$  вершин  $i_1, \dots, i_k$  так, чтобы из каждой вершины исходила ровно одна дуга  $(i_l, j_l)$ .

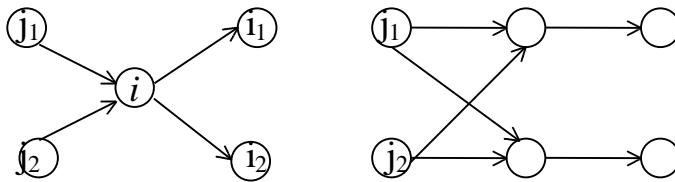


рис.6

Далее, каждой вершине  $i \in P_2$  с исходящей из неё дугой  $(i, j)$  припишем пару значений:

$$(22) g(i) = k_j \times g(j) - w_i \times (1 + a)^{t_{ij} + t_{l(j)}}$$

$$(23) t(i) = t_{ij} + t_{l(j)}.$$

Шаг 2 повторяется для множеств  $P_3, P_4, \dots$ . Алгоритм заканчивается, когда на  $m$ -ом шаге в множестве  $P_m$  не окажется ни одной вершины, у которой не существует входящей дуги, т.е. множество  $P_{m+1}$  построить будет нельзя.

На модифицированном графе, полученном в результате выполнения алгоритма, выделим вершины, не имеющие входящих дуг, и назовем их “исходными”. Такие вершины могут принадлежать любому из множеств  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Обозначим множество исходных вершин через  $I$ . Тогда оптимальная с точки зрения максимального удельного дохода “технологическая цепочка” выбирается из условия:

$$(24) i_l = \arg \{ \max g(i) \}.$$

Вершина  $i_l$  является исходной в оптимальной цепочке. Поскольку каждая вершина на модифицированном графе имеет ровно одну исходящую дугу, и в соответствии с шагом 1 алгоритма все цепочки заканчиваются в вершине  $R$ , то, зная исходную вершину, всю цепочку можно построить однозначно.

Существуют очевидные способы усовершенствования приведенного выше алгоритма. Так, если для некоторой вершины  $i$   $g(i) < 0$ , эту вершину можно отбросить и далее не рассматривать. Среди всех вершин  $i \in P_k$  можно отобрать только Парето-оптимальные, а остальные исключить из дальнейшего рассмотрения. А именно, если для некоторой вершины  $i \in P_k$  найдётся вершина  $j \in P_k$  такая, что  $g(i)$

$< g(j)$  и  $t(i) > t(j)$ , то вершину  $i$  можно исключить из модифицированного графа.

После того, как оптимальная цепочка построена, можно вычислить прибыль от её функционирования. Используя предельные пропускные способности входящих в неё вершин, можно вычислить максимальный поток по этой цепочке. Итак, пусть оптимальная цепочка  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ .

Шаг 0. Примем  $f(i_1, i_2) = a_{i_1}$ ,  $j = 2$ .

Шаг 1.  $f(i_j, i_{j+1}) = k_{ij} \times f(i_{j-1}, i_j)$ .

Шаг 2. Если  $f(i_j, i_{j+1}) \geq a_{ij}$ , то  $j = j+1$ , перейти к шагу 1.

Шаг 3. Если  $f(i_j, i_{j+1}) < a_{ij}$ , то принять  $f(i_j, i_{j+1}) = a_{ij}$ ,  $j = j+1$ , перейти к шагу 1. Выполнять до тех пор, пока  $j \leq m$ .

Если в течение всего алгоритма шаг 3 не исполнялся ни разу, то оптимальный поток  $f(i_1, i_2), \dots, f(i_{m-1}, i_m)$  построен.

Если шаг 3 выполнялся хотя бы один раз и последний раз для  $j = n$ , то следует пройти по цепочке, начиная с  $f(i_n, i_{n+1})$ , в обратном порядке, пропорционально уменьшая потоки:

**(25) Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

-----

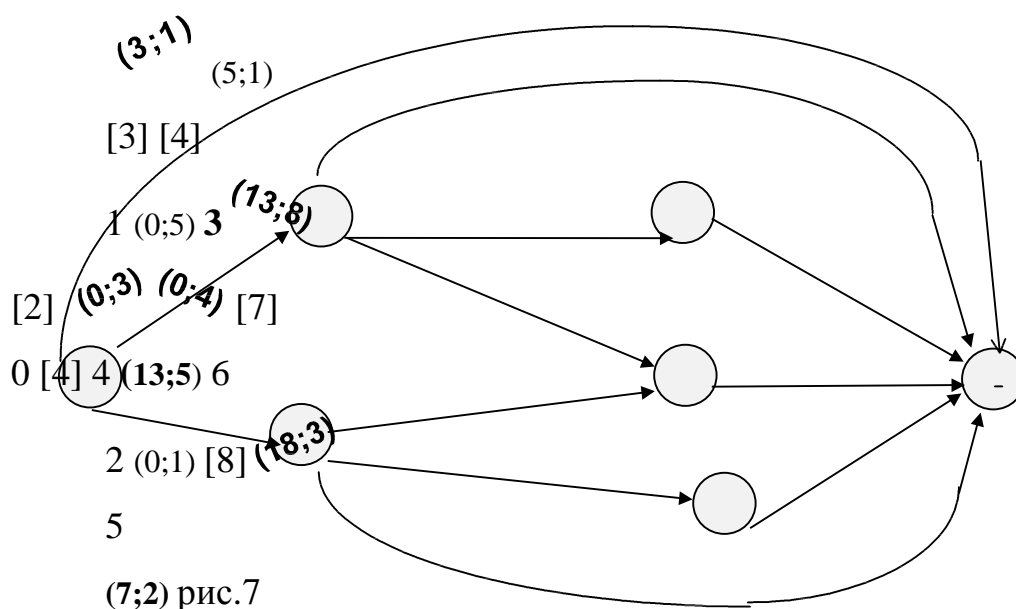
Суммарный доход от такой цепочки составляет  $f(i_1, i_2) \cdot g(i_1)$ .

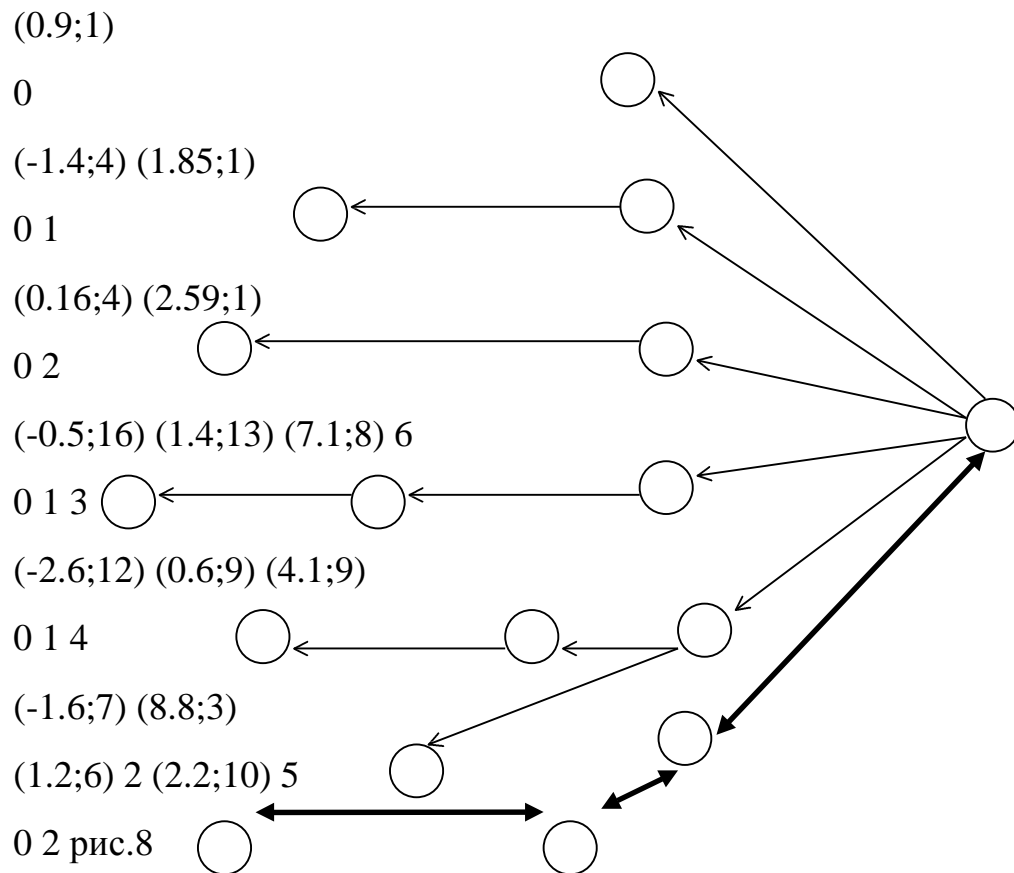
Пример.

Исходный граф приведен на рис. 7. Числа в скобках над вершинами - затраты на производство единицы продукции в вершине  $i$ . Числа в скобках у дуг - стоимость единицы продукции (первое число) и время прохождения дуги (второе число). Заметим, что положительные значения стоимости потока только на дугах, входящих в вершину 6 (рынок). Это следует из условия, что фирма-организатор получает доход только после реализации продукции на рынке. На остальных дугах стоимости единицы потока нулевые.

Построим множества  $P_1, \dots, P_m$ . На рисунке 8 над каждой вершиной указана пара чисел  $(g(i); \tau(i))$ , вычисленных соответственно по формулам (22) и (23).

Заметим, что если на каком-то шаге для  $i$ -й вершины получается  $g(i) \leq 0$ , дальнейший путь из этой вершины не строится. Максимальный удельный доход  $g(i) = 1.2$  получен на цепочке (0,2,5,6). Следовательно, в показанном примере эта цепочка является оптимальной.





### 3.ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ОБМЕНА.

В рассмотренной задаче выбора оптимальной технологической цепочки необходима информация о технологических коэффициентах  $k_{ij}$ , продолжительностях производственного цикла  $t_{ij}$  и рисках  $r_{ij}$ . Эту информацию, как правило, можно получить только от самих предприятий- потенциальных участниках цепочки. Ясно, что исходя из своих интересов предприятия могут представлять недостоверные сведения фирме- организатору цепочки, в частности, занижая величины

технологических коэффициентов, завышая риски. Опасность искажения данных во многом зависит от принятых процедур выбора технологической цепочки и распределения полученной прибыли, то есть механизмов обмена.

### **3.1. Анализ элементарных цепочек.**

Элементарными будем называть цепочки, состоящие из одного предприятия. Этой ситуации соответствует двухуровневая иерархическая структура, состоящая из организатора цепочки (центра) и предприятий - претендентов на получение давальческого сырья.

Примем, что у центра имеется сырье в количестве  $R$ . Обозначим  $k_i$  - максимальный технологический коэффициент, при котором предприятию еще выгодно работать по давальческой схеме (напомним, что  $k_i$  - количество готовой продукции, которое может получить организатор цепочки (владелец сырья) на единицу сырья. Естественно, что каждое предприятие заинтересовано в занижении величин технологических коэффициентов. Обозначим  $s_i$  - количество готовой продукции, отдаваемое предприятием  $i$  центру на единицу сырья. Выигрыш предприятия оценивается величиной

$$(26) j_i = (k_i - s_i) \times x_i$$

которая соответствует количеству готовой продукции, дополнительно получаемой предприятием при занижении оценки. Здесь  $x_i$  - количество давальческого сырья, полученного предприятием  $i$ . Цель центра, очевидно, заключается в том, чтобы получить максимум прибыли от реализации готовой продукции, то есть максимум величины



$$(27) \Phi = \sum_{i=1}^n s_i x_i l_i.$$

где  $l_i$  - цена продукции  $i$ -го предприятия.

Проведем анализ ряда известных принципов распределения ресурса для данной задачи [4]. Примем сначала, что все  $l_i$  равны между собой.

Рассмотрим механизм прямых приоритетов. Согласно этому механизму сырье  $R$  распределяется пропорционально технологическим коэффициентам  $s_i$ . В простейшем случае

$$(28) x_i = \frac{s_i}{\sum_j s_j} R$$

Определим ситуацию равновесия Нэша. Для этого найдем максимум выражений:

$$(29) (k_i - s_i)x_i = \frac{(k_i - s_i)s_i}{\sum_j s_j} R, \text{ где } i=1, n$$

Примем, что число предприятий - претендентов достаточно велико, так что можно принять гипотезу слабого влияния, согласно которой предприятия не учитывают влияния сообщаемой ими оценки на общий для всех множитель  $R/S$ , где

$$(30) S = \sum_{j=1}^n s_j,$$

получаем (31)  $S_i^* = 0.5 k_i, i=1, n$

Замечаем, что это не только равновесная, но и доминантная стратегия. Таким образом, предприятия занижают в два раза технологические коэффициенты. Рассмотрим более сложный механизм

$$(32) \quad x_i = \frac{S_i^a}{\sum_{j=1}^n S_j^a} R, \quad i=1, n, \quad a \geq 1$$

$$\text{В этом случае (33) } S_i^* = \frac{a}{1+a} k_i$$

Легко видеть, что при  $a \rightarrow \infty$   $S_i^* \rightarrow k_i$ , что соответствует сообщению достоверной информации. Оценим эффективность этого механизма

$$(34) \quad \Phi^* = \sum_i \frac{S_i^{a+1}}{\sum_j S_j^a} R = \frac{a}{a+1} \frac{\sum_i K_i^{a+1}}{\sum_i K_i^a} R$$

Обозначим  $k_{\max} = \max k_i$ ,  $q$  - количество предприятий с максимальными  $k_i$ . Определим предел  $\Phi^*$  при  $a \rightarrow \infty$ . Имеем

$$(35) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \Phi^* = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{aR}{1+a} k_{\max} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_i (k_i/k_{\max})^{a+1}}{\sum_i (k_i/k_{\max})^a} = k_{\max} R$$

Таким образом, рассмотренный принцип прямых приоритетов при больших  $a$  дает близкое к оптимальному распределению сырья. Заметим, что при  $a = \infty$  мы по сути дела получаем механизм, близкий к конкурсному. Но не эквивалентный конкурсному! Чтобы показать это, проведем исследование чисто конкурсного механизма.

Конкурсный механизм. В конкурсном механизме предприятия упорядочиваются по убыванию оценок и получают сырье согласно этой

очередности. В случае одинаковых оценок примем, что очередность определяется по некоторому другому критерию (например, по надежности или длительности цикла). Пронумеруем предприятия по убыванию (в случае одинаковых  $k_i$  применяем другой критерий). Очевидно, что победителем конкурса будет предприятие с номером 1. Столь же очевидно, что для победы первому предприятию достаточно сообщить оценку  $S_1^* = k_2$ , то есть на уровне ближайшего соперника. Поэтому эффективность конкурсного механизма равна  $\Phi_k = k_2 R$ , что меньше, чем  $k_{\max} R$ , если  $k_1 > k_2$ .

Интересно отметить, что обобщенный принцип прямых приоритетов можно эффективно применять и в случае всего одного предприятия - претендента (монопольный случай). Достаточно формально ввести еще одного претендента с маленьким коэффициентом  $S_2$  (заведомо меньшим, чем предполагаемая оценка реального претендента). При больших  $a$  имеем  $S_1^* \gg k_1$ ,  $x_i^* \gg R$  что соответствует оптимальному для Центра варианту.

До сих пор мы предполагали, что каждое предприятие может переработать все количество сырья  $R$ , которое имеется у Центра. Учтем теперь ограничения на мощности предприятий. Обозначим  $a_i$  максимальное количество сырья, которое может переработать предприятие  $i$ . В этом случае механизмы распределения сырья следует модифицировать. Так в механизме прямых приоритетов необходимо ограничить количество сырья для предприятия  $i$ . Процедура распределения принимает вид  $x_i = \min[a_i; j S_i^a]$ , где параметр  $j$  определяется из уравнения

$$(36) \sum_i \min[a_i; g \cdot S_i^a] = R$$

Пусть  $q$  минимальный номер предприятия такой,

что  $R - \sum_1^q a_i \leq a_{q+1}$ . Заметим, что первые  $q$  предприятий всегда

могут обеспечить себе полную загрузку. Поэтому равновесная стратегия для них определяется условиями

$$(37) S_i^* = \left(\frac{a_i}{g}\right)^{1/a}$$

Для остальных предприятий задача свелась к предыдущему случаю с неограниченными мощностями и поэтому

$$(38) S_i^* = \frac{a}{1+a} k_i$$

Параметр  $j$  в равновесии равен

$$(40) g^* = \frac{R - \sum_1^q a_i}{\sum_{q+1}^n k_i^a} (1 + 1/a)^a$$

Окончательно, для первых  $q$  предприятий имеем

$$(41) S_i^* = \left(\frac{a_i}{R - \sum_{j=1}^q a_j}\right)^{1/a} \left(\sum_{q+1}^n k_i^a\right)^{1/a} \left(\frac{a}{1+a}\right), i=1, q$$

В пределе при  $\alpha \rightarrow \infty$   $\lim_{a \rightarrow \infty} S_i^* = k_{q+1}$

Таким образом, в этом случае происходит занижение оценок первых  $q$  предприятий. Однако, в данном случае не очевидно, что

следует брать  $\alpha$  как можно большим. Задача выбора оптимального значения параметра  $\alpha$  требует дальнейших исследований.

Если рассмотреть конкурсный механизм при ограничениях на мощности предприятий, то как известно ситуация равновесия имеет

$$\text{вид } S_i^* = \begin{cases} k_{q+1}, i = 1 \div q + 1 \\ k_i, i = q + 2 \div n \end{cases}$$

В данном случае предельное равновесие для механизма прямых приоритетов совпадает с равновесием для конкурсного механизма.

Все выводы, полученные для одинаковых цен  $l_i$  остаются справедливыми и для различных  $l_i$ , если в механизме распределения сырья вместо  $S_i$  брать  $l_i \times S_i$ .

### 3.2. Анализ простых цепочек.

Простыми цепочками будем называть такие технологические цепочки, что каждое предприятие входит только в одну из них. Пусть имеется  $n$  простых технологических цепочек, каждая из которых включает  $m$  предприятий. Обозначим  $k_{ij}$  -максимальную величину технологического коэффициента для  $j$ -го предприятия  $i$ -ой цепочки,  $S_{ij}$  -оценку этого коэффициента, сообщаемую предприятием Центру. Множество предприятий, входящих в  $i$ -ю цепочку обозначим через  $m_i$ .

В этом случае  $K_i = \prod_{j \in m_i} k_{ij}$  определяет технологический

коэффициент  $i$ -ой цепочки,  $l_i S_i$  - прибыль Центра на единицу сырья, данного  $i$ -ой технологической цепочке. Дополнительная прибыль  $j$ -го

предприятия при переработке цепочкой  $x_i$  единиц давальческого сырья составит

$$(42) j_{ij} = (k_{ij} - S_{ij}) \cdot \left( \prod_{q=1}^{j-1} S_{iq} \right) \cdot l_{ij} x_i$$

Фактически задача максимизации дополнительной прибыли эквивалентна задаче максимизации выражения'

$$(43) (k_{ij} - S_{ij}) x_i,$$

что полностью совпадает с задачей, решаемой предприятием в случае элементарной технологической цепочки. Так, при распределении сырья на основе принципов прямых приоритетов

$$(44) x_i = \frac{(S_i l_i)^a}{\sum_{k=1}^n (S_k l_k)^a} \cdot R$$

при гипотезе слабого влияния и отсутствии ограничений на мощности получаем то же выражение (33) для равновесных оценок предприятий. Соответственно, при больших  $\alpha$  механизм прямых приоритетов обеспечивает близость оценок технологических коэффициентов к достоверным ( то есть является механизмом честной игры ) и близость распределения давальческого сырья к оптимальному. При наличии ограничений на мощности предприятий оптимального распределения, вообще говоря, не получается , а при больших  $\alpha$  механизм близок к конкурсному механизму ( в смысле близости ситуаций равновесия).

### 3.3 . Общий случай

Анализ общего случая, то есть произвольной сети технологических связей при отсутствии ограничений на мощности предприятий аналогичен анализу простых цепочек , поскольку поведение каждого предприятия будет по прежнему определяться стремлением к максимизации выражения (43) независимо от того, в какую цепочку оно входит. При ограничениях на мощности задача анализа становится сложнее. . Для этого случая игровой анализ целесообразно проводить на основе имитационного моделирования (игры автоматов ) или на основе деловых игр, (см. п.5 ).

До сих пор мы не учитывали продолжительности производственного цикла. Для случая отсутствия ограничений на мощности предприятий такой учет не предполагает затруднений, поскольку приводит к появлению корректирующего множителя  $\frac{1}{(1+a)^{T_i}}$ , где  $T_i$  - длительность цикла  $i$ -ой технологической цепочки. При наличии ограничений на мощности приходится рассматривать динамические сети, и для анализа целесообразно использовать метод имитационного моделирования или деловых игр .

## 4. МЕХАНИЗМЫ ДЕЛЕНИЯ ВЫРУЧКИ В ДАВАЛЬЧЕСКИХ СХЕМАХ

Рассмотрим давальческие схемы, в которых оплата работы предприятий цепочки (помимо обеспечения предприятия давальческим сырьем) производится организатором цепочки после реализации конечной продукции на рынке. Примем, что на оплату работы всех предприятий, входящих в цепочку, идет определенная доля  $b$  выручки,

полученной организатором. Как делить эту долю между предприятиями? Для решения этой проблемы применим механизмы деления прибыли на основе так называемых внутренних (трансфертных) цен, рассмотренные в работе [5].

Рассмотрим технологическую цепочку из  $m$  предприятий. Пусть  $L$ -выручка от продажи конечной продукции при количестве исходного сырья  $R$ ,  $P = bL$  - часть выручки, идущая на оплату предприятий цепочки,  $C_i$  - затраты на производство продукции  $i$ -го предприятия. Задача заключается в том, чтобы разделить часть выручки  $P$  между предприятиями таким образом, чтобы принцип деления был справедливым и эффективным.

Справедливость означает равное право предприятий на получение выручки в зависимости от затрат, (другими словами одинаковым затратам производства должны соответствовать и одинаковые доли выручки). Заметим, что в давальческих схемах в затратах учитываются только оплата труда и внутренние издержки (амортизация, электричество и т.д.). Эффективность означает, что принцип деления должен стимулировать снижение издержек. Рассмотрим два подхода к решению этой задачи.

#### **4.1. Принцип равных рентабельностей.**

Согласно этому принципу справедливым считается такое деление выручки  $P$ , при котором рентабельности всех предприятий цепочки одинаковы. Если обозначить  $\Pi_i$  - выручку  $i$ -го предприятия, то принцип равных рентабельностей можно записать в виде системы  $(m+1)$  уравнений с  $(m+1)$  неизвестными



$$(45) (\Pi_i - C_i)/C_i = r, i = 1, m$$

$$(46) \sum_{i=1}^m \Pi_i = P$$

где  $r$  - рентабельность производства всех предприятий.

Решая эту систему, получаем

$$(47) \Pi_i = (C_i/C) R, i = 1, m$$

$$(48) r = (P - C)/C, C = \sum_{i=1}^m C_i$$

Проверим принцип равных рентабельностей на эффективность.

Прибыль  $i$ -го предприятия равна

$$(49) \Pi_i = \Pi_i - C_i = (C_i/C) R - C_i$$

В [5] показано, что смещение равновесия в данном случае определяется условиями

$$(50) C_i^* = \frac{m-1}{m^2} P, C = \frac{m-1}{m} P$$

$$r = 1/m, \Pi_i = (1/m)R$$

Эти выражения справедливы, если фактические издержки  $C_i \leq C_i^*$ . В этих случаях предприятиям выгодно зависить затраты до величин (50). Если же фактические издержки  $C_i \geq C_i^*$  для всех  $i$ , то механизм деления выручки, основанный на принципе равных рентабельностей делает выгодным снижение затрат, но только до величины  $C_i^*$ . Таким образом, принцип равных рентабельностей эффективен только для низкорентабельных производств.

#### 4.2. Противозатратный принцип деления выручки

Определим общий для всех предприятий нормативный уровень рентабельности  $r_0$  и соответственно минимальную выручку (51)  $\Pi_i^{min} = (1 + r_0)C_i, i = 1, m$

Теперь определим максимальную или лимитную выручку

$$(52) L_i = P - \sum_{i \neq j} \Pi_i^{min}, i = 1, m$$

Далее определяем максимальный уровень рентабельности для каждого предприятия

$$(53) h_i = (L_i - C_i) / C_i$$

и наконец, фактический уровень рентабельности

$$(54) r_i = q h_i, q > 0$$

где  $q$  - общий для всех предприятий параметр. Выручка  $i$ -го предприятия равна

$$(55) \Pi_i = (1 + r_i)C_i = C + q(L_i - C_i)$$

а его прибыль

$$(56) \Pi_i = r_i C_i = q(L_i - C_i)$$

В данном случае имеет место и справедливость и эффективность.

Ограничение на параметр  $q$  определяется из условия (57)  $\sum_{i=1}^m \Pi_i \leq P$

и имеет вид (58)  $q \leq \frac{1}{m - (m-1)\frac{r_0}{r}}$

## 5. ДЕЛОВАЯ ИГРА "ДАВАЛЬЧЕСКИЕ СХЕМЫ"

Выше уже отмечалось, что анализ давальческих схем в общем случае сложная задача. На помощь здесь приходят имитационные эксперименты и деловые игры. Опишем простую деловую игру, с помощью которой можно проверять эффективность механизмов обмена в давальческих схемах.

В игре участвует ведущий, играющий роль организатора цепочек и  $m$  команд, представляющих предприятия. Ведущему известны количество сырья  $R$ , которое можно использовать по давальческой схеме и технологическая сеть возможных цепочек.

Каждой команде до начала игры даются исходные данные: максимальные технологические коэффициенты  $K_i$ , минимальные себестоимости производства  $C_i^{min}$  и возможно максимальные мощности  $a_i$ . Каждая партия игры включает три этапа.

а) Этап сбора данных. Все команды сообщают ведущему оценки  $S_i$  технологических коэффициентов и, возможно, максимальные мощности производства.

б) Этап планирования. Ведущий формирует одну или несколько цепочек и сообщает командам количество получаемого сырья и объем производства продукции из этого сырья.

в) Этап реализации. Все команды объявляют фактические издержки производства и объем выпуска продукции. Ведущий определяет доли выручки каждого предприятия. Каждая команда определяет полученную прибыль от реализации части готовой продукции на рынке вместе с прибылью, полученной от доли выручки, причитающейся соответствующему предприятию. Игра повторяется с

теми же исходными данными несколько раз для того, чтобы получить устойчивые результаты и оценить эффективность исследуемого механизма.

Для ускорения исследования рекомендуется проводить игры с автоматами (один игрок, остальные - автоматы) или игры автоматов. Детально с организацией и проведением такого типа деловых игр можно познакомиться в литературе [6].

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе описаны формальные математические модели давальческих схем и проведен их анализ. Может показаться, что “давальческие схемы” - временное явление, связанное с кризисом неплатежей. Заметим, однако, что в корпоративных структурах организация работы по схемам давальческого сырья и оговоренным механизмам деления прибыли или выручки имеет целый ряд преимуществ, позволяя строить оптимальные технологические цепочки и облегчая взаимодействие предприятий, входящих в корпорацию.

В этом плане рассмотренные модели представляют несомненный интерес не только сегодня, но и в перспективе. Заметим также, что активную роль в формировании оптимальных технологических цепочек может играть государство, предоставляя исходное сырье для “запуска” таких цепочек и создавая льготные условия их функционирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белянов Е. Мотивация целей и поведение российских предприятий.- Вопросы экономики, 1995, № 6, с. 15-21.
2. Большаков С.В. Финансы предприятий и кредит.- Деньги и кредит, 1994, № 1, с.64-66.
3. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. - М.:Мир, 1966.
4. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994.
5. Ануфриев И.К., Бурков В.Н. и др. Модели и механизмы внутрифирменного управления. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1994.
6. Кузьмицкий А.А., Щепкин А.В. Разработка деловых игр по управлению проектами. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1994.