Г.И.Просветов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА

РДЛ

2004

ББК 65.23я73

П82

Рецензенты: В. В. ШЕМЕТОВ,
д.э.н., профессор, заведующий кафедрой менеджмента организации и маркетинга Российской академии предпринимательства
В. Л. МИРОНОВ,
к.ф.-м.н., доцент Института бизнеса и делового администрирования Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации

Просветов Г. И.
П82 **Математические методы в экономике:** Учебно-методическое пособие. – М.: Издательство РДЛ, 2004. – 160 с.

ISBN 5-93840-047-3

В настоящем учебно-методическом пособии на простых примерах раскрываются такие разделы математических методов в экономике, как сетевое планирование и управление (сетевой график, метод критического пути, метод PERT, графики Ганта и ресурса, параметры работ), методы дискретной оптимизации (задача о кратчайшем пути, коммуникационная сеть минимальной длины, максимальный поток, балансировка сборочных линий), «дерево решений», транспортная задача, задача о назначениях, правила принятия решений, управление запасами, имитационное моделирование, статистический контроль качества, теория игр (матричные, биматричные и позиционные игры), линейное программирование, двойственные задачи, модель Леонтьева.

Предназначено преподавателям и студентам экономических специальностей высших учебных заведений.

ББК 65.23я73

ISBN 5-93840-047-3

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА

Собрание предметов, родственных по некоторому признаку, часто рассматривается как самостоятельный объект.

Пример 1. А, Б, В, Г, ... — алфавит.
Пример 2. 1, 2, 3, 4, ... — натуральные числа.
Пример 3. Кофейник, сахарница, чашка, блюдца — сервиз.
Пример 4. Персонажи басен И. А. Крылова.

Немецкий математик Кантор ввел понятие «*множество*», которое относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению. Чтобы сделать этот термин яснее, с ним сопоставляют такие его синонимы, как «совокупность», «собрание», «набор». Алфавит, натуральные числа, сервиз, персонажи басен Крылова — это примеры множеств.

Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*. Говорят, что они принадлежат множеству. Символически это записывают так: $a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A). Будем обозначать множества заглавными буквами (A, B, C, ...), а элементы множеств — маленькими буквами (a, b, c, ...). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Если число элементов множества конечно, то множество называют *конечным*, в противном случае — бесконечным. Так, множество персонажей басен Крылова — конечное множество, а множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Примером такого множества является множество людей, чей рост составляет 10 метров. Такие множества называют *пустыми* и обозначают символом $\varnothing$.

Существуют самые разные способы задания множеств. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов.

Пример 5. Планеты Солнечной системы = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон}.

Задать множество можно также с помощью характеристического признака, по которому устанавливают, принадлежит ли элемент рассматриваемому множеству.

Пример 6. Персонажи басен И. А. Крылова.

Запись $Y = \{x \in X \mid S(x)\}$ означает, что множество Y состоит из элементов $x \in X$, обладающих свойством $S(x)$.

Пример 7. $Y = \{x$ — натуральное число $\mid x$ делится на $2\}$ — множество четных чисел.

Множество A называют *подмножеством* множества B ($A \subset B$), если все элементы из A входят в B.

Пример 8. A — множество четных чисел, B — множество натуральных чисел, $A \subset B$.

Два множества называют *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов или являются пустыми множествами.

Существуют следующие операции над множествами:

✧ *объединение* $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат хотя бы в одном из множеств A или B;

✧ *пересечение* $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат в обоих множествах A и B;

✧ *разность* $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — элементы нового множества — это элементы множества A, которые не лежат в B;

✧ *дополнение* множества A в множестве U ($A \subset U$) $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$.

Пример 9. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.
Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 4\}$,
$A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1, 6, 7, 8\}$,
$\overline{A} = \{4, 5, 9, 10\}$.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество линий X, соединяющих попарно какие-то точки из V.

Пример 10. Схема автодорог, соединяющих населенные пункты Московской области.

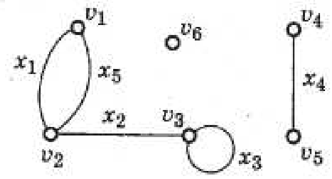
Множество точек (населенных пунктов) назовем *множеством вершин*, а соединяющие линии (автодороги) — *множеством ребер*. Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называют *графом*.

На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется *дугой* и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине. Граф, состоящий из дуг, называют *ориентированным* (или просто *орграфом*), а образованный ребрами — *неориентированным*.

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий. В этом проявляется свойство изоморфизма графов.

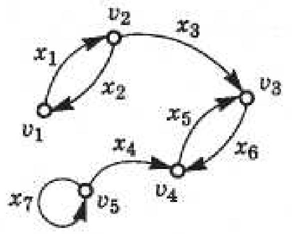
Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *кратными*. Если вершина не соединена с другими вершинами, то эта вершина — *изолированная*.

Пример 11. Задан граф G_1, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.



v_6 — изолированная вершина, x_1 и x_5 — кратные ребра, x_3 — петля, v_1 и v_2 — концевые вершины ребра x_1.

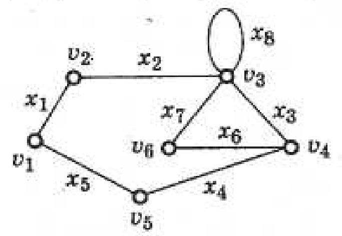
Пример 12. Задан орграф G_2. У ребра x_3 вершина v_2 — начальная, а вершина v_3 — конечная, x_7 — петля.



Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами. *Маршрут* длины m — это последовательность $x_1, \ldots, x_m$ m ребер графа (не обязательно различных) таких, что любые два соседних ребра x_i, x_{i+1} имеют общую концевую вершину.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался. *Цепь* — это маршрут, все ребра которого различны. *Простая цепь* — это цепь без повторяющихся вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. *Простой цикл* — это простая замкнутая цепь.

Пример 13. Дан граф G. $x_1x_2x_3x_6x_7x_2$ — маршрут длины 6, соединяющий вершины v_1 и v_2.



$x_1x_2x_3x_6x_7x_2x_1$ — замкнутый маршрут длины 7. Он начинается и заканчивается в вершине v_1. $x_1x_2x_3x_6x_7$ — цепь длины 5 (все ребра в ней различны). Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину v_3 мы посетили два раза. $x_1x_2x_3$ — пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны). $x_7x_6x_8x_3$ — цикл. $x_7x_6x_3$ — простой цикл.

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «*путь*», а слово «цикл» заменяют на слово «*контур*».

Итак, для задания графа необходимо указать два множества: V (множество вершин) и X (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют матричный способ. Выбор матрицы определяется конкретной задачей.

Дан граф G с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и ребрами $x_1, \ldots, x_m$.

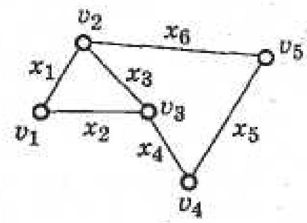
Матрица смежности графа G — это квадратная матрица $A(G)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в графе } G \text{ вершины } v_i, v_j \text{ соединены ребром} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G — это матрица $B(G)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ — концевая дуга ребра } x_j \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 14. Для графа G построим матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$.



Так как у графа 5 вершин и 6 ребер, то размеры матрицы $A(G)$ будут 5×5, а матрицы $B(G)$ — 5×6.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_3. $a_{14} = 0 \Leftrightarrow$ в графе G нет ребра, соединяющего вершины v_1 и v_4. И т. д.

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_1. $b_{12} = 1 \Leftrightarrow v_1$ — концевая вершина для ребра x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow v_1$ не является концевой вершиной для ребра x_3. И т. д.

Дан орграф $Д$ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и дугами $x_1, \ldots, x_m$.

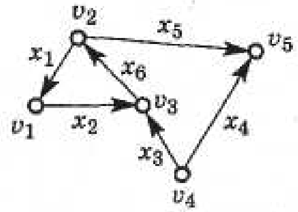
Матрицей смежности орграфа $Д$ называется матрица $A(Д)$ размера $n \times n$ (n — число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в орграфе } Д \text{ есть дуга из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности орграфа $Д$ называется матрица $B(Д)$ размера $n \times m$ (n — число вершин, m — число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине} \\ -1, \text{ если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример 15. Для орграфа $Д$ построим матрицу смежности $A(Д)$ и матрицу инцидентности $B(Д)$.



Орграф $Д$ содержит 5 вершин и 6 ребер, поэтому размеры матрицы $A(Д)$ будут 5×5, а матрицы $B(Д)$ — 5×6.

$$A(Д) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

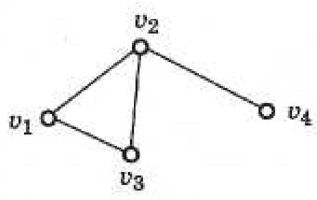
$a_{12} = 0 \Leftrightarrow$ орграф $Д$ не содержит дуги из v_1 в v_2. $a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ орграф $Д$ содержит дугу из v_1 в v_3. И т. д.

$$B(Д) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 заканчивается дуга x_1. $b_{12} = -1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 начинается дуга x_2. $b_{13} = 0 \Leftrightarrow$ вершина v_1 не является концевой вершиной для дуги x_3. И т. д.

Граф G называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут, их соединяющий. Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом* (примеры деревьев: генеалогический граф (родословное дерево), совокупность всех файлов на дискете).

Пример 16. Граф G не является деревом, так как содержит цикл v_1, v_2, v_3.



Очень часто на ребрах графа пишут числа. Такие графы называются *структурными* (или *сетью*). Вершины сети будем называть *узлами*, а ребра — *дугами*.

ГЛАВА 3. «ДЕРЕВО» РЕШЕНИЙ

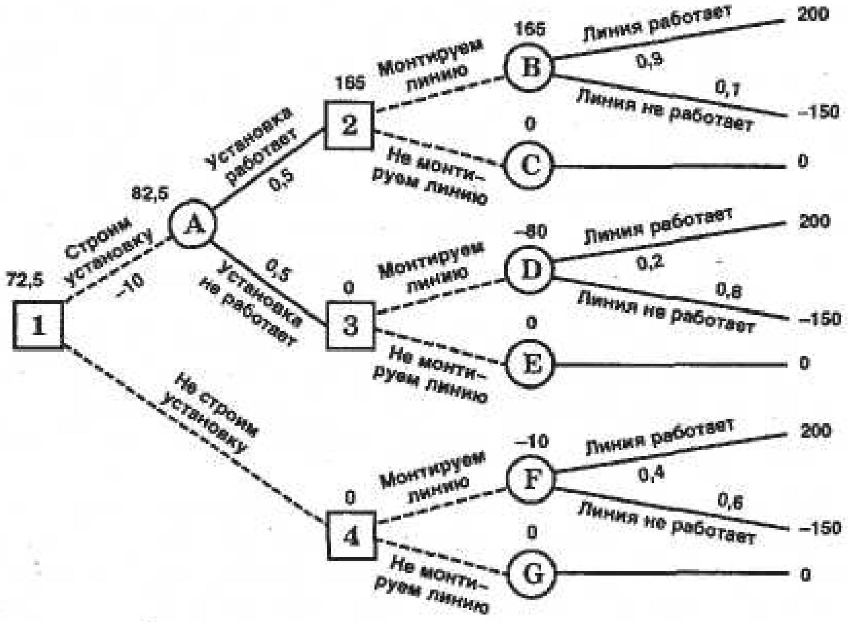
Своевременные разработка и принятие правильного решения — главные задачи работы управленческого персонала любой организации. Непродуманное решение может дорого стоить компании. На практике результат одного решения заставляет нас принимать следующее решение и т. д. Когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего или исходов испытаний, то применяют схему, называемую «деревом» решений.

«Дерево» решений — это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Рисуют «деревья» слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами □, места появления исходов — кругами ○, возможные решения — пунктирными линиями -------- , возможные исходы — сплошными линиями ———. Все расходы, вызванные решением, проставляются на соответствующей ветви.

Для каждой альтернативы мы считаем *ожидаемую стоимостную оценку* (EMV) — максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Пример 17. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей. По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей. Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90% шансов за то, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20% шансов за то, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная ценность наилучшего решения?



В узле F возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0,4 (что приносит прибыль 200) и «линия не работает» с вероятностью 0,6 (что приносит убыток -150) $\Rightarrow$ оценка узла F:

$\text{EMV(F)} = 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot (-150) = 80 - 90 = -10.$

Это число мы пишем над узлом F.

$\text{EMV(G)} = 0.$

В узле 4 мы выбираем между решением «монтируем линию» (оценка этого решения $\text{EMV(F)} = -10$) и решением «не монтируем линию» (оценка этого решения $\text{EMV(G)} = 0$):

$\text{EMV(4)} = \max \{\text{EMV(F)}, \text{EMV(G)}\} = \max \{-10, 0\} = 0 = \text{EMV(G)}.$

Эту оценку мы пишем над узлом 4, а решение «монтируем линию» отбрасываем и зачеркиваем.

Аналогично:

$EMV(B) = 0{,}9 \cdot 200 + 0{,}1 \cdot (-150) = 180 - 15 = 165.$

$EMV(C) = 0.$

$EMV(2) = \max\{EMV(B), EMV(C)\} = \max\{165, 0\} = 165 = EMV(B).$

$EMV(D) = 0{,}2 \cdot 200 + 0{,}8 \cdot (-150) = 40 - 120 = -80.$

$EMV(E) = 0.$

$EMV(3) = \max\{EMV(D), EMV(E)\} = \max\{-80, 0\} = 0 = EMV(E).$

$EMV(A) = 0{,}5 \cdot 165 + 0{,}5 \cdot 0 - 10 = 72{,}5.$

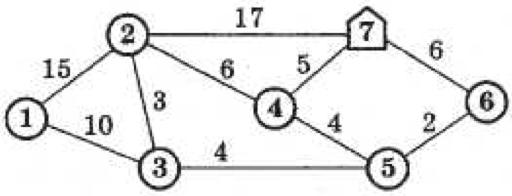
$EMV(1) = \max\{EMV(A), EMV(4)\} = \max\{72{,}5; 0\} = 72{,}5 = EMV(A).$

То есть ожидаемая стоимостная ценность наилучшего решения 72,5 млн. рублей ⇒ строим установку. Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не надо.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

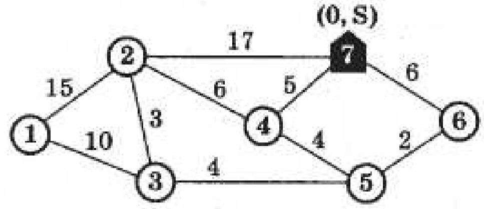
Пример 18. Узел 7 — склад, остальные узлы — строительные площадки компании. Показатели на дугах — расстояния в километрах.



Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 2 через строительную площадку 4?

Решим эту задачу методом присвоения меток. Каждому узлу присваиваем метку из двух чисел. Первое число — это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе — номер предыдущего узла на пути от узла 7 к данному узлу. Узел, для которого мы определили путь от узла 7, назовем *помеченным*. Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем *непомеченным*. Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем *постоянной* и будем обозначать в круглых скобках. Все остальные метки назовем *временными* и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрашивать.

Итак, узлу 7 присваиваем метку (0, S), где 0 — это расстояние от узла 7, S — обозначение стартового узла.



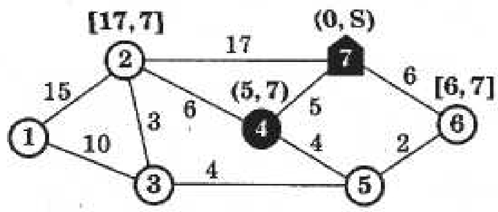
Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер — 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки — [17, 7], [5, 7], [6, 7] соответственно (первая цифра — длина пути от узла 7 до данного узла, а вторая — это предшествующий узел).

После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

✧ найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку (метки) сделать постоянной;

✧ узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

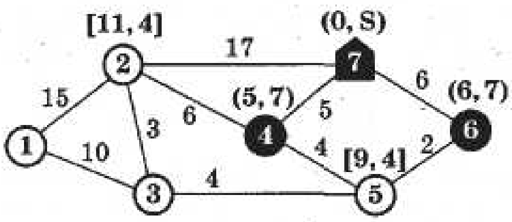
После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка (5, 7) узла 4. Поэтому следующий шаг мы начнем с узла 4.



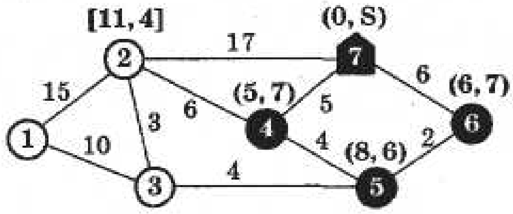
Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4–5 равна 4, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [5+4, 4] = [9, 4]. Длина ребра 4–2 равна 6, метка узла 4 — (5, 7) ⇒ временная метка узла 2 равна [5+6, 4] = [11, 4]. Таким образом мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11.

Узел 2 пока помечен меткой [17, 7] (путь длины 17), но 11 < 17 ⇒ старую метку [17, 7] узла 2 мы меняем на новую временную метку [11, 4], где 11 — это длина пути от узла 7 до узла 2, а 4 — номер предшествующего узла.

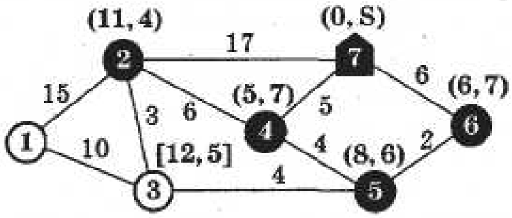
После этого из всех временных меток [11, 4], [9, 4], [6, 7] выбираем метку с наименьшим первым числом. Это [6, 7]. Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла, соответствующего этой метке, — узла 6.



Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6–5 равна 2, метка узла 6 — [6, 7] ⇒ метка узла 5 равна [6+2, 6] = [8, 6]. Но узел 5 уже помечен меткой [9, 4]. Так как 8 < 9, то узлу 5 припишем новую метку — [8, 6]. После этого из всех временных меток [11, 4] и [8, 6] метку с наименьшим первым числом (8, 6) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 5.

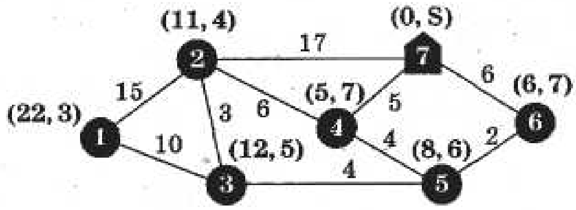


Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки — узлом 3. Длина ребра 5–3 равна 4, метка узла 5 — (8, 6) ⇒ узлу 3 припишем временную метку [8+4, 5] = [12, 5]. Теперь из всех временных меток [11, 4] и [12, 5] метку с наименьшим первым числом [11, 4] объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2–1 равна 15, метка узла 2 — (11, 4) ⇒ узлу

1 припишем временную метку [11+15, 2] = [26, 2]. Длина ребра 2–3 равна 3, метка узла 2 — (11, 4) ⇒ мы могли бы пометить узел 3 меткой [11+3, 2] = [14, 2], но узел 3 уже помечен меткой [12, 5] с меньшим первым числом. Так что метку узла 3 не меняем. Теперь из временных меток [26, 2] и [12, 5] метка с наименьшим первым числом становится постоянной (12, 5), а с соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла 1 меняем на (12+10, 3) = (22, 3). Всем узлам приписаны постоянные метки. Действие алгоритма прекращается.



Первая цифра метки у каждой вершины — это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер — это второе число метки). И т. д. до вершины 7.

Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 — (22, 3) ⇒ длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел 3. Метка узла 3 — (12, 5) ⇒ идем в узел 5. Метка узла 5 — (8, 6) ⇒ идем в узел 6. Метка узла 6 — (6, 7) ⇒ идем в узел 7, то есть кратчайший путь 1–3–5–6–7. Он не проходит через узел 2. Ответы на два других вопроса оставляем читателю в качестве упражнения.

ГЛАВА 5. ПОСТРОЕНИЕ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

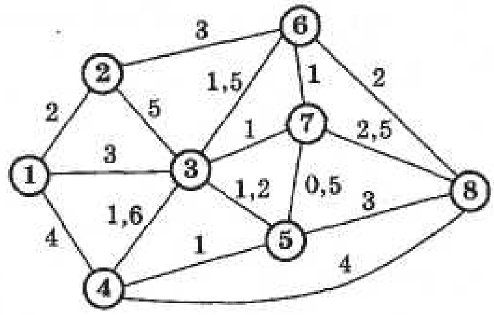
Коммуникационная сеть минимальной длины (или дерево кратчайших расстояний) — это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети, то есть возможность попасть из любого узла в любой другой узел.

Алгоритм построения:

1. Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом. Считаем, что это связанные узлы, а все другие узлы — несвязанные.

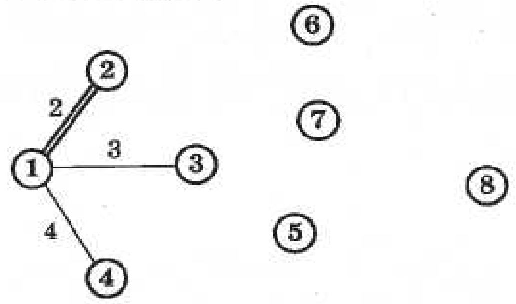
2. Определить несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов. Если таких «ближайших» узлов несколько, то выбрать любой. Добавить этот узел к связанным. И т. д. до тех пор, пока есть несвязанные узлы.

Пример 19. Университет устанавливает компьютерную систему электронной почты, которая позволит передавать сообщение между деканами восьми факультетов. Сеть возможных электронных связей между деканатами показана ниже.

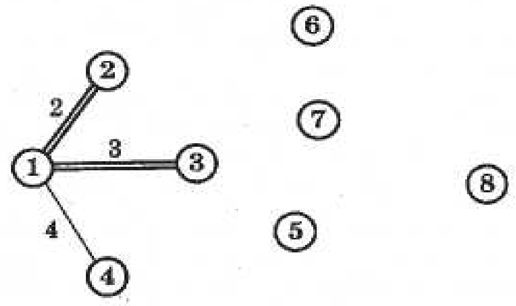


Протяженность коммуникаций в километрах отмечена на дугах. Предложим проект системы связи, которая позволит всем восьми деканам обеспечить доступ к системе электронной почты. Решение должно обеспечить минимальную возможную общую длину коммуникаций.

Начнем с узла 1. Ближайший к нему узел — это узел 2 на расстоянии 2. Считаем, что узлы 1, 2 — связаные и отметим это двойной чертой.

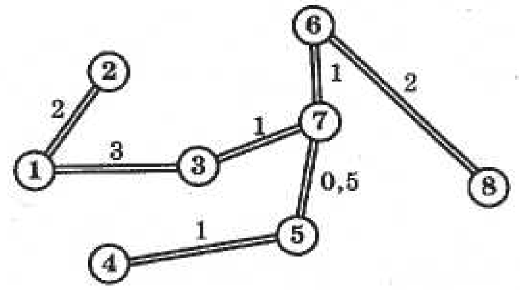


Ближайшие несвязанные узлы к одному из связанных узлов 1 и 2 — это узлы 3 и 6. Выбираем любой из них, например, узел 3. Ребро 1–3 отметим двойной чертой и считаем узлы 1, 2, 3 связанными.



Далее ищем ближайший несвязанный узел к узлам 1, 2, 3. И т. д. В результате получим минимальное дерево.

Его длина равна сумме расстояний на дугах: $2 + 3 + 1 + 1 + 0,5 + 1 + 2 = 10,5$ (км)



ГЛАВА 6. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Рассматривается сеть с одним узлом входа (*источник*) и одним узлом выхода (*сток*). Какова максимальная величина потока (количество машин, сообщений, жидкости и т. д.), который может войти в сетевую систему и выйти из нее в заданный период времени? Мы предполагаем, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел.

Под *пропускной способностью* (или мощностью) дуги будем понимать верхнее ограничение на поток в этой дуге. Понятно, что автомобильные трассы ограничивают число автомобилей в транспортной системе, величина трубопроводов ограничивает количество нефти в системе ее распределения. Мощность потока может зависеть от его направления. Условное изображение в сети

означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность потока от узла 2 к узлу 1 равна 0, то есть это — «улица с односторонним движением».

Условное же изображение

означает, что мощность потока в каждом направлении равна 2.

Алгоритм определения максимального потока:

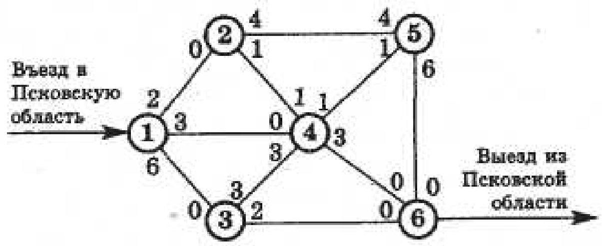
Полагаем искомую величину максимального потока равной нулю.

Шаг 1. Найти какой-нибудь путь от источника до стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока ненулевую мощность. Если такого пути нет, то оптимальное решение найдено.

Шаг 2. Найти наименьшее значение мощности дуги P_f на выбранном пути шага 1. Увеличить поток через сеть на величину P_f.

Шаг 3. На пути из шага 1 сократить на P_f мощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличить на P_f мощности потоков на всех дугах в обратном направлении. Перейти к шагу 1.

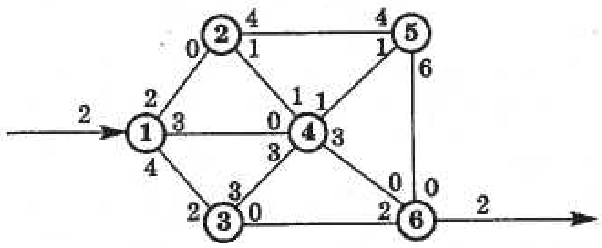
Пример 20. Система автодорог «Север — Юг», проходящих через Псковскую область, может обеспечить пропускные способности, показанные на приводимой ниже схеме (тыс. автомашин в час).



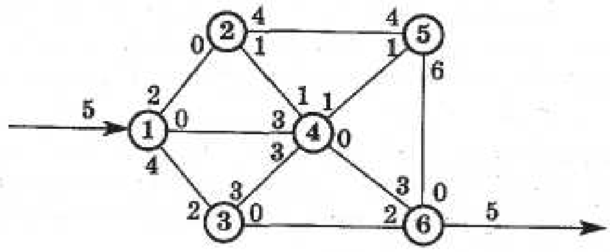
1. Каков максимальный поток через эту систему (тыс. автомашин в час)?
2. Сколько автомашин должно проехать по дороге 5–6, чтобы обеспечить максимальный поток?

Искомую величину максимального потока положим равной нулю.

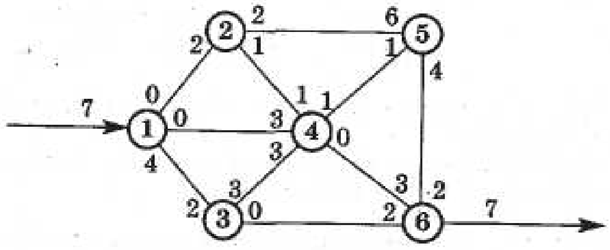
Итерация 1. Выбираем путь 1–3–6. $P_f = \min\{6, 2\} = 2$. Поэтому мощности потоков на пути 1–3–6 в направлении потока (а именно, 6 и 2) уменьшаем на величину $P_f = 2$, а мощности потоков в обратном направлении на пути 1–3–6 (0 и 0) увеличим на $P_f = 2$. Общий поток станет $0+2 = 2$. Получим:



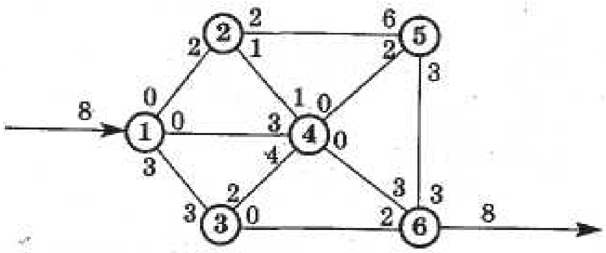
Итерация 2. Выбираем путь 1–4–6. $P_f = \min\{3, 3\} = 3$. Все потоки на пути 1–4–6 в направлении общего потока (3 и 3) уменьшаем на $P_f = 3$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0 и 0) увеличиваем на $P_f = 3$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 3$ ($2+3 = 5$). Получим:



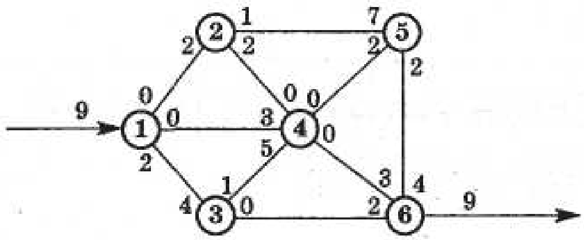
Итерация 3. Выбираем путь 1–2–5–6. $P_f = \min\{2, 4, 6\} = 2$. Все потоки на пути 1–2–5–6 в направлении общего потока (2, 4, 6) уменьшаем на $P_f = 2$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0, 4, 0) увеличиваем на $P_f = 2$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 2$ (5+2 = 7). Получим:



Итерация 4. Выбираем путь 1–3–4–5–6. $P_f = \min\{4, 3, 1, 4\} = 1$. Все потоки на пути 1–3–4–5–6 в направлении общего потока (4, 3, 1, 4) уменьшаем на $P_f = 1$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (2, 3, 1, 2) увеличиваем на $P_f = 1$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 1$ (7+1 = 8). Получим:

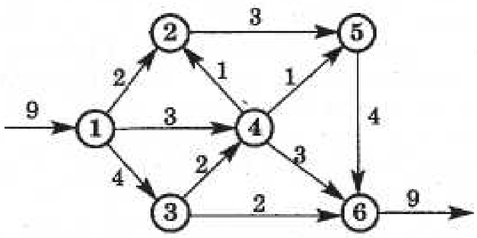


Итерация 5. Выбираем путь 1–3–4–2–5–6. $P_f = \min\{3, 2, 1, 2, 3\} = 1$. Все потоки на пути 1–3–4–2–5–6 в направлении общего потока (3, 2, 1, 2, 3) уменьшаем на $P_f = 1$, а все потоки на этом пути в обратном направлении (3, 4, 1, 6, 3) увеличиваем на $P_f = 1$. Общий поток увеличиваем на $P_f = 1$ (8+1 = 9). Получим:



Больше не существует путей из узла 1 в узел 6 с мощностью, превышающей нуль на всем пути ($P_f = 0$) $\Rightarrow$ 9 тыс. — это максимальный поток через сеть.

Определим теперь величину и направление потока на каждой дуге, чтобы достичь максимального потока в 9 тыс. автомобилей. Поток проходит по дуге с величиной, равной разнице между первоначальной и конечной мощностями потока. Так, первоначальная мощность дуги 1–2 равна 2, а конечная — 0 $\Rightarrow$ в направлении от узла 1 к узлу 2 поток имеет мощность 2 – 0 = 2. Сравнивая конечные и начальные мощности потока для всех дуг сети, мы получаем конечную модель потоков.



ГЛАВА 7. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

§ 7.1. Основные понятия

Сетевое планирование — это метод планирования работ, операции в которых, как правило, не повторяются (например, разработка новых продуктов, строительство зданий, ремонт оборудования, проектирование новых работ).

Для проведения сетевого планирования вначале необходимо расчленить проект на ряд отдельных работ и составить логическую схему (*сетевой граф*).

Работа — это любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. На сетевых графах работы обозначаются стрелками. Для указания того, что одна работа не может выполняться раньше другой, вводят *фиктивные работы*, которые изображаются пунктирными стрелками. Продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

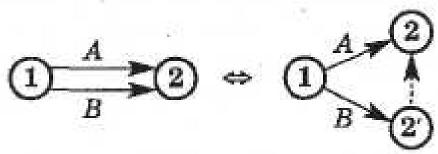
Событие — это факт окончания всех входящих в него работ. Считается, что оно происходит мгновенно. На сетевом графе события изображаются в виде вершин графа. Ни одна выходящая из данного события работа не может начаться до окончания всех работ, входящих в это событие. С *исходного события* (которое не имеет предшествующих работ) начинается выполнение проекта. *Завершающим событием* (которое не имеет последующих работ) заканчивается выполнение проекта.

После построения сетевого графа необходимо оценить продолжительность выполнения каждой работы и выделить работы, которые определяют завершение проекта в целом. Нужно оценить потребность каждой работы в ресурсах и пересмотреть план с учетом обеспечения ресурсами.

Часто сетевой граф называют *сетевым графиком*.

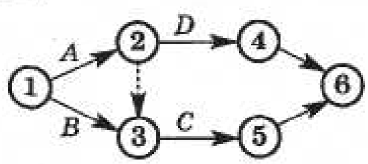
§ 7.2. Правила построения сетевых графиков

1. Завершающее событие лишь одно.
2. Исходное событие лишь одно.
3. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой. Если два события связаны более чем одной работой, рекомендуется ввести дополнительное событие и фиктивную работу:



4. В сети не должно быть замкнутых циклов.
5. Если для выполнения одной из работ необходимо получить результаты всех работ, входящих в предшествующее для нее событие, а для другой работы достаточно получить результат нескольких из этих работ, то нужно ввести дополнительное событие, отражающее результаты только этих последних работ, и фиктивную работу, связывающую новое событие с прежним.

Пример 21. Здесь для начала работы D достаточно окончания работы A. Для начала же работы C нужно окончание работ A и B.



§ 7.3. Метод критического пути

Метод критического пути (Critical Path Method — CPM) используется для управления проектами с фиксированным временем выполнения работ. Он позволяет ответить на следующие вопросы:

1. Сколько времени потребуется на выполнение всего проекта?

2. В какое время должны начинаться и заканчиваться отдельные работы?

3. Какие работы являются критическими и должны быть выполнены в точно определенное графиком время,

чтобы не сорвать установленные сроки выполнения проекта в целом?

4. На какое время можно отложить выполнение некритических работ, чтобы они не повлияли на сроки выполнения проекта?

Самый продолжительный путь сетевого графика от исходного события к завершающему называется *критическим*. Все события и работы критического пути также называются критическими. Продолжительность критического пути и определяет срок выполнения проекта. Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Рассмотрим основные временные параметры сетевых графиков.

Обозначим $t(i, j)$ — продолжительность работы с начальным событием i и конечным событием j.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j — это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию. Правило вычисления:

$$t_p(j) = \max \{t_p(i) + t(i, j)\},$$

где максимум берется по всем событиям i, непосредственно предшествующим событию j (соединены стрелками).

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i — это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием. Правило вычисления:

$$t_n(i) = \min \{t_n(j) - t(i, j)\},$$

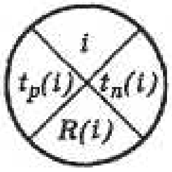
где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i.

Резерв $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Критические события резервов не имеют.

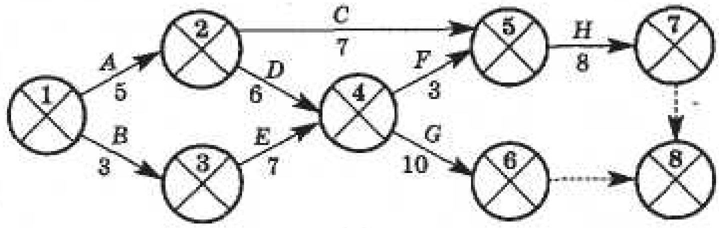
При расчетах сетевого графика каждый круг, изображающий событие, делим диаметрами на четыре сектора:



Пример 22. Рассмотрим сеть проекта, представленную следующими данными. Найти критический путь. Сколько времени потребуется для завершения проекта? Можно ли отложить выполнение работы D без отсрочки завершения проекта в целом? На сколько недель можно отложить выполнение работы C без отсрочки завершения проекта в целом?

Работа	Непосредственный предшественник	Продолжительность работы, нед.
A	–	5
B	—	3
C	A	7
D	A	6
E	B	7
F	D, E	3
G	D, E	10
H	C, F	8

Рисуем сетевой график.



Фиктивные работы (6, 8) и (7, 8) введены для того, чтобы было одно завершающее событие.

I этап. При вычислении $t_p(i)$ перемещаемся по сетевому графику от исходного события 1 к завершающему событию 8.

$t_p(1) = 0.$

В событие 2 входит только одна работа ⇒

$t_p(2) = t_p(1) + t(1, 2) = 0 + 5 = 5.$

Аналогично

$t_p(3) = t_p(1) + t(1, 3) = 0 + 3 = 3.$

В событие 4 входят 2 работы ⇒

$t_p(4) = \max \{t_p(2) + t(2, 4), t_p(3) + t(3, 4)\} = \max \{5+6, 3+7\} = \max \{11, 10\} = 11.$

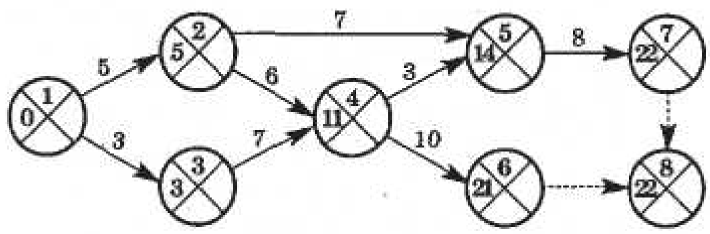
$t_p(5) = \max \{t_p(2) + t(2, 5), t_p(4) + t(4, 5)\} = \max \{5+7, 11+3\} = \max \{12, 14\} = 14.$

$t_p(6) = t_p(4) + t(4, 6) = 11 + 10 = 21.$

$t_p(7) = t_p(5) + t(5,\ 7) = 14 + 8 = 22.$

$t_p(8) = \max\ \{t_p(7) + t(7,\ 8),\ t_p(6) + t(6,\ 8)\} = \max\ \{22+0,\ 21+0\} = \max\ \{22,\ 21\} = 22$

$\Rightarrow t$ критическое = 22.



II этап. При вычислении $t_n(i)$ перемещаемся от завершающего события 8 к исходному 1 по сетевому графику против стрелок.

$t_n(8) = t_p(8) = 22.$

Далее рассматриваем непосредственно предшествующее событие 7, из которого выходит только одна работа (7, 8):

$t_n(7) = t_n(8) - t(7,\ 8) = 22 - 0 = 22.$

Аналогично:

$t_n(6) = t_n(8) - t(6,\ 8) = 22 - 0 = 22.$

$t_n(5) = t_n(7) - t(5,\ 7) = 22 - 8 = 14.$

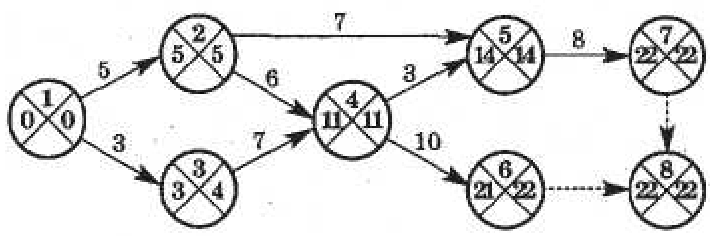
Из события 4 выходят две работы: (4, 5) и (4, 6). Поэтому определяем $t_n(4)$ по каждой из этих работ:

$t_n(4) = \min\ \{t_n(5) - t(4,\ 5),\ t_n(6) - t(4,\ 6)\} = \min\ \{14-3,\ 22-10\} = \min\ \{11,\ 12\} = 11.$

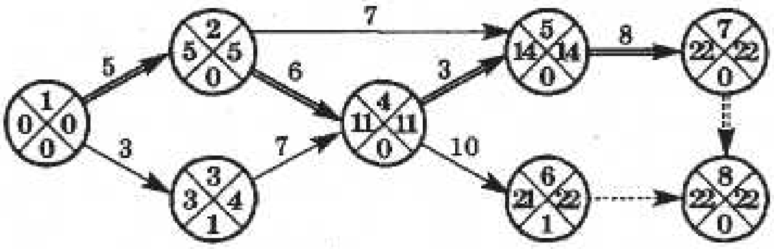
$t_n(3) = t_n(4) - t(3,\ 4) = 11 - 7 = 4.$

$t_n(2) = \min\ \{t_n(5) - t(2,\ 5),\ t_n(4) - t(2,\ 4)\} = \min\ \{14-7,\ 11-6\} = \min\ \{7,\ 5\} = 5.$

$t_n(1) = \min\ \{t_n(2 - t(1,\ 2),\ t_n(3) - t(1,\ 3)\} = \min\ \{5-4,\ 4-3\} = \min\ \{0,\ 1\} = 0.$



III этап. Вычисляем $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$ — резерв времени события i, то есть из чисел, полученных на этапе II, вычитаем числа, полученные на этапе I.



IV этап. У критических событий резерв времени равен нулю, так как ранние и поздние сроки их свершения совпадают. Критические события 1, 2, 4, 5, 7, 8 и определяют критический путь 1–2–4–5–7–8, который на сетевом графике мы покажем двумя чертами. Теперь можно ответить на вопросы задачи. Для завершения проекта потребуется 22 недели. Работа $D = (2, 4)$ расположена на критическом пути. Поэтому ее нельзя отложить без отсрочки завершения проекта в целом. Работа $C = (2, 5)$ не расположена на критическом пути, ее можно задержать на

$$t_п(5) - t_р(2) - t(2, 5) = 14 - 5 - 7 = 2 \text{ (недели)}.$$

§ 7.4. Управление проектами с неопределенным временем выполнения работ

В методе критического пути предполагалось, что время выполнения работ нам известно. На практике же эти сроки обычно не определены. Можно строить некоторые предположения о времени выполнения каждой работы, но нельзя предусмотреть все возможные трудности или задержки выполнения. Для управления проектами с неопределенным временем выполнения работ наиболее широкое применение получил *метод оценки и пересмотра проектов* (Project Evaluation and Review Technique — PERT), рассчитанный на использование вероятностных оценок времени выполнения работ, предусматриваемых проектом.

Для каждой работы вводят три оценки:

✧ *оптимистическое время* a — наименьшее возможное время выполнения работы;

✧ *пессимистическое время* b — наибольшее возможное время выполнения работы;

✧ *наиболее вероятное время* m — ожидаемое время выполнения работы в нормальных условиях.

По a, b и m находят ожидаемое время выполнения работы:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

и дисперсию ожидаемой продолжительности t:

$$\delta^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2.$$

Используя значения t, найдем критический путь сетевого графика.

Распределение времени T завершения проекта является нормальным со средним $E(T)$, равным сумме ожидаемых значений времени работ на критическом пути, и дисперсией $\delta^2(T)$, равной сумме дисперсий работ критического пути, если времена выполнения каждой из работ можно считать независимыми друг от друга. Тогда мы можем рассчитать вероятность завершения проекта в установленный срок T_0:

$$P(t_{кр}<T_0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_0 - E(T)}{\delta(T)}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$ — функция Лапласа.

Значение функции Лапласа находится по таблице. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 23. Проект строительства плавательного бассейна состоит из девяти основных работ.

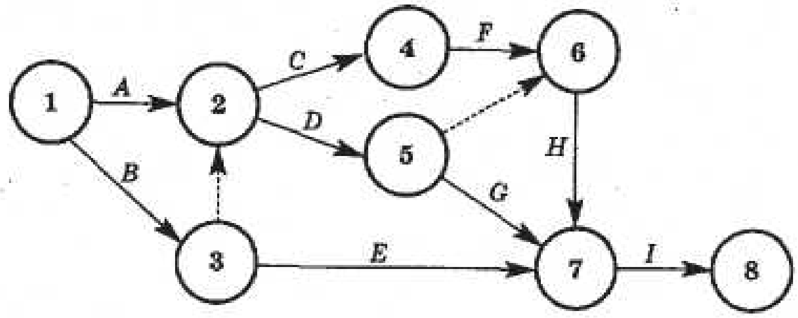
Работа	Непосредственный предшественник	Оптимистическое (a)	Наиболее вероятное (m)	Пессимистическое (b)
A	—	3	5	6
B	—	2	4	6
C	*A*, *B*	5	6	7
D	*A*, *B*	7	9	10
E	*B*	2	3	6
F	*C*	1	2	3
G	*D*	5	8	10
H	*D*, *F*	6	8	10
I	*E*, *G*, *H*	3	4	5

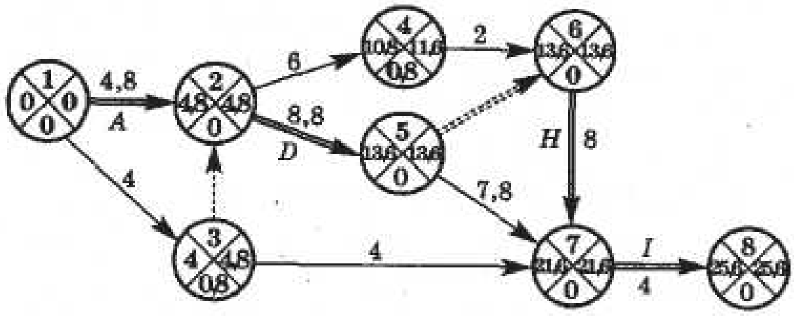
Каков ожидаемый срок завершения проекта? Чему равно стандартное отклонение времени завершения проекта? Какова вероятность того, что выполнение проекта займет не более 25 рабочих дней?

Ожидаемое время выполнения работы $t = \dfrac{a + 4m + b}{6}$, дисперсия ожидаемой продолжительности t: $\delta^2 = \left(\dfrac{b - a}{6}\right)^2$.

Работа	a	m	b	$t = \frac{a + 4m + b}{6}$	$\delta^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)$
A	3	5	6	$\frac{3+4\cdot5+6}{6} = \frac{29}{6} = 4{,}8$	$\left(\frac{6-3}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$
B	2	4	6	$\frac{2+4\cdot4+6}{6} = \frac{24}{6} = 4$	$\left(\frac{6-2}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$
C	5	6	7	$\frac{5+4\cdot6+7}{6} = \frac{36}{6} = 6$	$\left(\frac{7-5}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
D	7	9	10	$\frac{7+4\cdot9+10}{6} = \frac{53}{6} = 8{,}8$	$\left(\frac{10-7}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$
E	2	3	6	$\frac{2+4\cdot3+6}{6} = \frac{24}{6} = 4$	$\left(\frac{6-2}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$
F	1	2	3	$\frac{1+4\cdot2+3}{6} = \frac{12}{6} = 2$	$\left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
G	5	8	10	$\frac{5+4\cdot8+10}{6} = \frac{47}{6} = 7{,}8$	$\left(\frac{10-5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$
H	6	8	10	$\frac{6+4\cdot8+10}{6} = \frac{48}{6} = 8$	$\left(\frac{10-6}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$
I	3	4	5	$\frac{3+4\cdot4+5}{6} = \frac{24}{6} = 4$	$\left(\frac{5-3}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$

Построим сетевой график с указанием ожидаемой продолжительности каждой работы. Найдем критический путь и рассчитаем обычным способом ожидаемый срок выполнения проекта $E(T)$.





Критический путь — $A–D–H–I$. Длина критического пути — 25,6 (дн) = $E(T)$. Дисперсия ожидаемого времени выполнения проекта равна сумме дисперсий критических работ:

$$\delta^2(T) = \delta_A^2 + \delta_D^2 + \delta_H^2 + \delta_I^2 = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{38}{36} \text{ (дней}^2\text{)}.$$

Тогда стандартное отклонение времени выполнения проекта составит:

$$\delta(T) = \sqrt{38/36} \approx 1{,}03 \text{ (дней)}.$$

Найдем вероятность того, что выполнение проекта займет не более $T_0 = 25$дней:

$$P(t_{кр}<T_0) = P(t_{кр}<25) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_0 - E(T)}{\delta(T)}\right) =$$

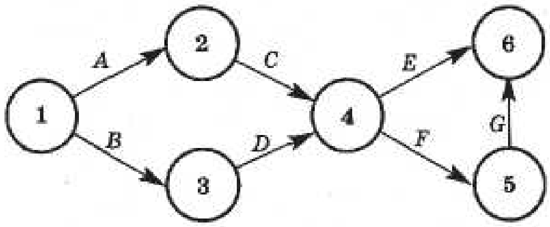
$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{25 - 25{,}6}{1{,}03}\right) \approx \frac{1}{2} + \Phi(-0{,}58) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi(0{,}58) \approx \frac{1}{2} - 0{,}219 = 0{,}281.$$

§ 7.5. Стоимость проекта. Оптимизация сетевого графика

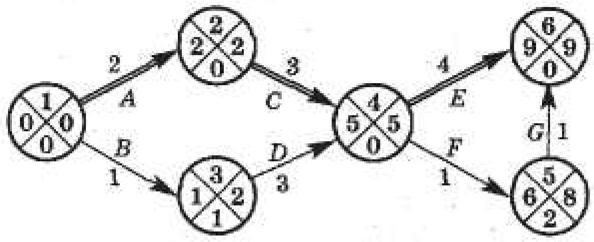
Стоимость выполнения каждой работы плюс дополнительные расходы определяют стоимость проекта. С помощью дополнительных ресурсов можно добиться сокращения времени выполнения критических работ. Тогда стоимость этих работ возрастет, но общее время выполнения проекта уменьшится, что может привести к снижению общей стоимости проекта. Предполагается, что работы можно выполнить либо в стандартные, либо в минимальные сроки, но не в промежутке между ними.

Пример 24.



Работа	Стандартное время, дней	Минимальное время, дней	Затраты на работы	
			при стандартном времени, тыс. руб.	при минимальном времени, тыс. руб.
A	3	2	800	1400
B	2	1	1200	1900
C	5	3	2000	2800
D	5	3	1500	2300
E	6	4	1800	2800
F	2	1	600	1000
G	2	1	500	1000

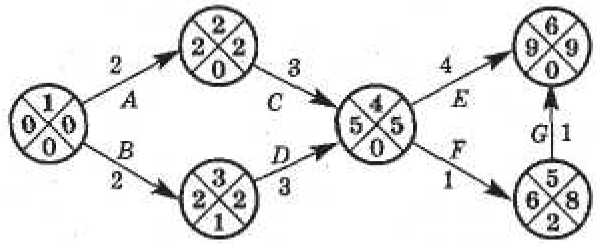
Найдем критический путь при условии, что все работы совершаются в минимальное время. Минимальное время, за которое может быть завершен проект — 9 дней. Критический путь A–C–E. Мы видим, что работы B, D, F, G не лежат на критическом пути.



Посмотрим, нельзя ли их выполнить в стандартные сроки без увеличения общего времени выполнения проекта (9 дней). Выполнение этих работ в стандартное время дает следующую экономию: 700(B), 800(D), 400(F), 500(G). Поэтому порядок рассмотрения будет такой: D, B, G, F.

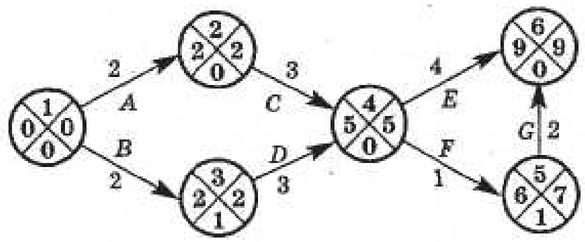
D: мы не можем увеличить продолжительность работы $D = (3, 4)$ с 3 до 5 дней, так как тогда изменится оценка $t_p(4)$ и изменится критический путь, то есть общее время выполнения проекта увеличится.

B: увеличение продолжительности работы $B = (1, 3)$ с 1 до 2 дней возможно.

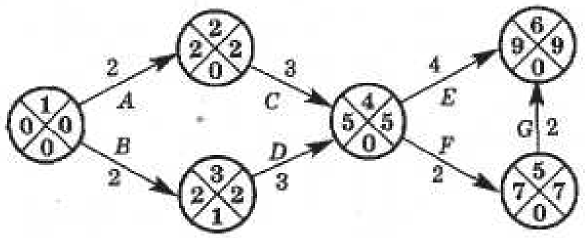


Появятся 2 критических пути: A–C–E и B–D–E. Работы A и C мы должны по-прежнему выполнять в минимальное время, иначе изменится критический путь.

G: увеличение продолжительности с 1 дня до 2 дней возможно.



F: увеличение продолжительности с 1 дня до 2 дней возможно.



Мы видим, что работы A, C, D, E выполняются в минимальное время, а работы B, F, G — в стандартное. Общая стоимость проекта составит:

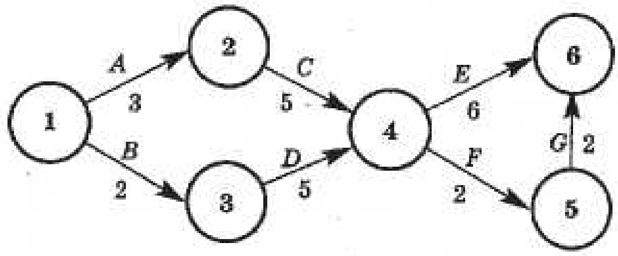
$$1400(A) + 1200(B) + 2800(C) + 2300(D) + 2800(E) + \\ + 600(F) + 500(G) = 11600 \text{ (тыс. руб.)}.$$

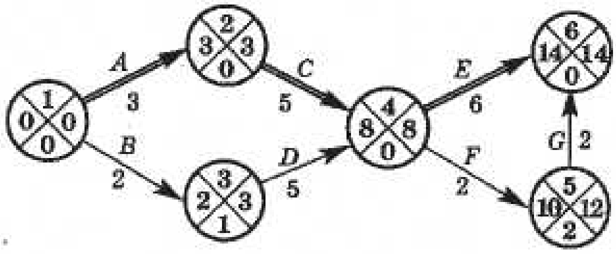
Таким образом, мы минимизировали общее время выполнения проекта с наименьшими дополнительными затратами.

§ 7.6. График Ганта

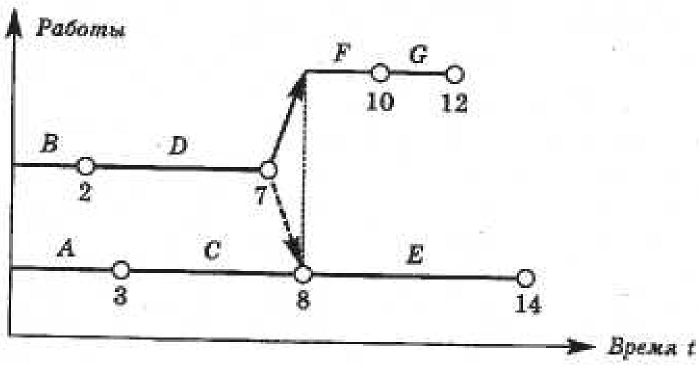
Иногда бывает полезным изобразить наглядно имеющийся в наличии резерв времени. Для этого используется *график Ганта*. На нем каждая работа (i, j) изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события.

Пример 25. Найдем критический путь и ранние сроки свершения событий.





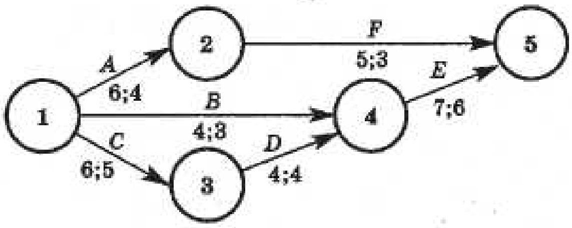
Теперь строим график Ганта. Так как работа E не может начаться до завершения работы D, эту зависимость мы изображаем на графике пунктирной линией. Аналогично для D, F и C, F.



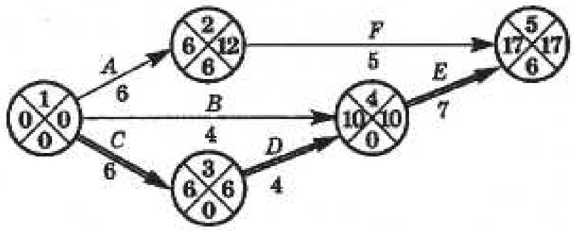
§ 7.7. Распределение ресурсов. Графики ресурсов

До сих пор мы не обращали внимания на ограничения в ресурсах и считали, что все необходимые ресурсы (сырье, оборудование, рабочая сила, денежные средства, производственные площади и т. д.) имеются в достаточном количестве. Рассмотрим один из простейших методов решения проблемы распределения ресурсов — «метод проб и ошибок».

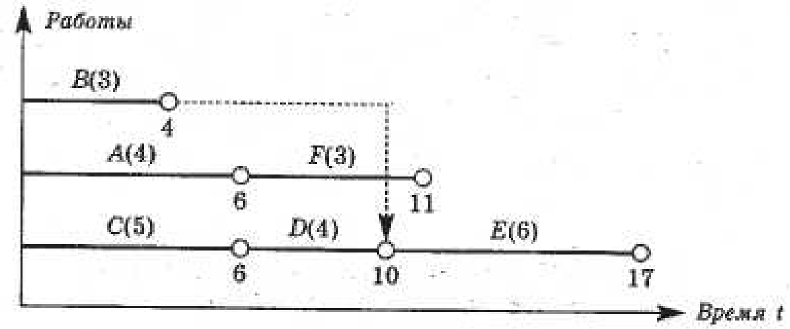
Пример 26. Произведем оптимизацию сетевого графика по ресурсам. Наличный ресурс равен 10 единицам.



Первое число, приписанное дуге графика, означает время выполнения работы, а второе — требуемое количество ресурса для выполнения работы. Работы не допускают перерыва в их выполнении.

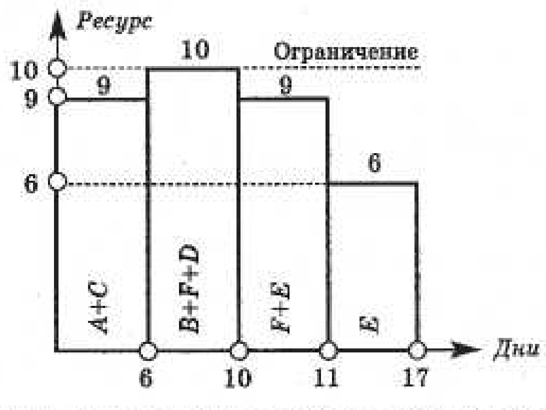


Находим критический путь. Строим график Ганта. В скобках для каждой работы укажем требуемое количество ресурса. По графику Ганта строим график ресурса. На оси абсцисс мы откладываем время, а на оси ординат — потребности в ресурсах.



Считаем, что все работы начинаются в наиболее ранний срок их выполнения. Ресурсы складываются по всем работам, выполняемым одновременно. Также проведем ограничительную линию по ресурсу (в нашем примере это $y = 10$).

Из графика мы видим, что на отрезке от 0 до 4, когда одновременно выполняются работы B, A, C, суммарная потребность в ресурсах составляет $3 + 4 + 5 = 12$, что превышает ограничение 10. Так как работа C критическая, то мы должны сдвинуть сроки выполнения или A, или B.



Запланируем выполнение работы B с 6-го по 10-й день. На сроках выполнения всего проекта это не скажется и даст возможность остаться в рамках ресурсных ограничений.

§ 7.8. Параметры работ

Напомним обозначения: $t(i, j)$ — продолжительность работы (i, j); $t_p(i)$ — ранний срок свершения события i; $t_п(i)$ — поздний срок свершения события i.

Если в сетевом графике лишь один критический путь, то его легко отыскать по критическим событиям (событиям с нулевыми резервами времени). Ситуация усложняется, если критических путей несколько. Ведь через критические события могут проходить как критические, так и некритические пути. В этом случае нужно использовать критические работы.

Ранний срок начала работы (i, j) совпадает с ранним сроком свершения события i:

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i).$$

Ранний срок окончания работы (i, j) равен сумме $t_p(i)$ и $t(i, j)$:

$$t_{ро}(i, j) = t_p(i) + t(i, j).$$

Поздний срок начала работы (i, j) равен разности $t_n(j)$ (позднего срока свершения события j) и $t(i, j)$:

$$t_{пн}(i, j) = t_n(j) - t(i, j).$$

Поздний срок окончания работы (i, j) совпадает с $t_n(j)$:

$$t_{по}(i, j) = t_n(j).$$

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

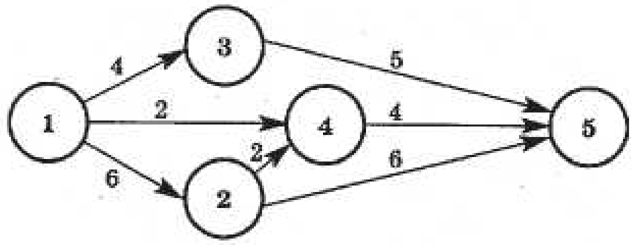
$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_{по}(i, j) - t_{po}(i, j).$$

Свободный резерв времени $R_c(i, j)$ работы (i, j) — это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки всех последующих работ:

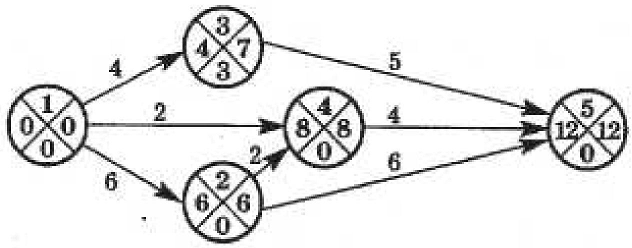
$$R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j) = t_p(j) - t_{po}(i, j).$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Пример 27. Посмотрим, каковы резервы работ для сетевого графика.



Находим $t_p(i)$, $t_n(i)$ и составляем таблицу. Значения первых пяти колонок берем из сетевого графика, а остальные колонки просчитаем по этим данным.



Работа (i, j)	Продолжительность t(i, j)	$t_р(i)$	$t_р(j)$	$t_п(j)$	Срок начала работы $t_{рн}(i, j) = t_р(i)$	$t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t(i, j)$
(1, 2)	6	0	6	6	0	6 − 6 = 0
(1, 3)	4	0	4	7	0	7 − 4 = 3
(1, 4)	2	0	8	8	0	8 − 2 = 6
(2, 4)	2	6	8	8	6	8 − 2 = 6
(2, 5)	6	6	12	12	6	12 − 6 = 6
(3, 5)	5	4	12	12	4	12 − 5 = 7
(4, 5)	4	8	12	12	8	12 − 4 = 8

Работа (i, j)	Срок окончания работы		Резервы времени работы	
	$t_{ро}(i, j) = t_р(i) + t(i, j)$	$t_{по}(i, j) = t_п(j)$	Полный $R_п(i, j) = t_{по}(i, j) - t_{ро}(i, j)$	Свободный $R_c(i,j) = t_р(j) - t_{ро}(i, j)$
(1, 2)	0 + 6 = 6	6	6 − 6 = 0	6 − 6 = 0
(1, 3)	0 + 4 = 4	7	7 − 4 = 3	4 − 4 = 0
(1, 4)	0 + 2 = 2	8	8 − 2 = 6	8 − 2 = 6
(2, 4)	6 + 2 = 8	8	8 − 8 = 0	8 − 8 = 0
(2, 5)	6 + 6 = 12	12	12 − 12 = 0	12 − 12 = 0
(3, 5)	4 + 5 = 9	12	12 − 9 = 3	12 − 9 = 3
(4, 5)	8 + 4 = 12	12	12 − 12 = 0	12 − 12 = 0

Критические работы (работы с нулевыми резервами): (1, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 5). У нас два критических пути: 1–2–5 и 1–2–4–5.

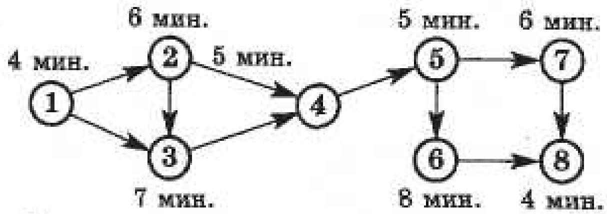
ГЛАВА 8. БАЛАНСИРОВКА ЛИНИЙ СБОРКИ

При настройке линий сборки необходимо стремиться минимизировать дисбаланс между трудом и оборудованием. Для обеспечения работы в определенном темпе надо выбрать подходящее оборудование и соответствующую организацию труда. Следует установить временные условия для каждого участка сборки. Необходимо знать последовательность операций по сборке изделий.

Пример 28. Основным продуктом мебельной компании являются стулья повышенной комфортности. За 480-минутный рабочий день необходимо выпустить 50 стульев. Для изготовления одного стула надо выполнить 8 операций. Используя информацию, приведенную в таблице, решить задачу балансировки линий сборки.

Операция	Время выполнения, мин.	Предшествующие операции
1	4	—
2	6	1
3	7	1, 2
4	5	2, 3
5	5	4
6	8	5
7	6	5
8	4	6, 7

Нарисуем граф связности для операций на сборке, для которого работы будут не дугами, а узлами. Дуги показывают последовательность выполнения операций.



Для обеспечения нужного темпа по сборке определенные операции группируются на рабочих местах.

1. Определим время цикла — среднее время, в течение которого каждое изделие может быть доступно на любом рабочем месте для выполнения соответствующей операции:

$$\text{Время цикла} = \frac{\text{рабочее время в течение суток}}{\text{объем производства в сутки}}.$$

$$\text{Время цикла} = \frac{480\ \text{мин.}}{50\ \text{шт.}} = 9{,}6\ \text{мин./шт.} \approx 10\ \text{мин./шт.}$$

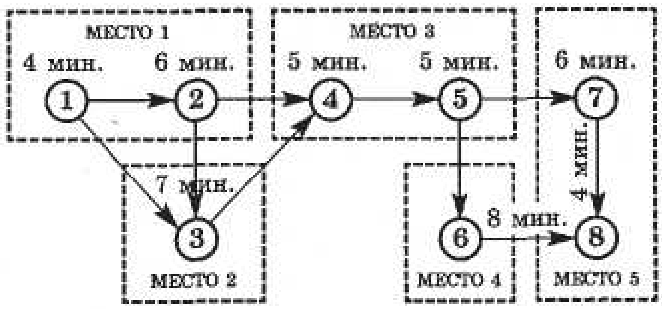
2. Определим теоретически минимальное число рабочих мест:

$$\text{Минимальное число рабочих мест} = \frac{\text{суммарное время выполнения операций}}{\text{время цикла}}.$$

$$\text{Минимальное число рабочих мест} = \frac{4+6+7+5+5+8+6+4}{10} = \frac{45}{10} = 4{,}5 = 5.$$

Заметим, что дробную величину всегда следует округлять до ближайшего большего целого числа.

3. Обеспечим баланс линий сборки, отнеся определенные операции к конкретным рабочим местам.



На рисунке приведен вариант решения задачи, при котором не нарушается последовательность операций. Точнее, на каждом рабочем месте выполняются только смежные операции. Причем все операции распределены между пятью рабочими местами. На выполнение всех операций, относящихся к любому рабочему месту, отводится время, не превышающее 10 минут (время цикла). На втором и третьем рабочих местах возникают простои — 3 мин. и 2 мин. соответственно.

$$\text{Эффективность балансировки линий} = \frac{\text{суммарное время выполнения операций}}{\text{число рабочих мест} \times \text{время цикла}}.$$

$$\text{Эффективность балансировки линий} = \frac{45\ \text{мин.}}{5 \times 10\ \text{мин.}} = \frac{45}{50} = 0{,}9,\ \text{то есть } 90\%.$$

Открытие еще одного (шестого) рабочего места снизит эффективность до 75%, так как

$$\frac{45\ \text{мин.}}{6 \times 10\ \text{мин.}} = 0{,}75.$$

ГЛАВА 9. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 9.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Существуют поставщики и потребители некоторого однородного груза. У каждого поставщика имеется определенное количество единиц этого груза (*мощность поставщика*). Каждому потребителю нужно некоторое количество единиц этого груза (*спрос потребителя*). Известны затраты на перевозку единицы груза от каждого из поставщиков к каждому из потребителей. Нужно составить такой план перевозок от поставщиков к потребителям, при котором:

1) суммарные затраты на перевозку груза будут минимальны;

2) по возможности будут задействованы все мощности поставщиков;

3) по возможности будет удовлетворен весь спрос потребителей.

Закрытая модель транспортной задачи — это модель, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей. В противном случае модель называется *открытой*.

В процессе решения открытая модель всегда сводится к закрытой модели. Поэтому вначале рассмотрим закрытую модель.

Порядок решения для закрытой модели:

1) составляем специальную таблицу;

2) находим первоначальный план поставок (далее будут рассмотрены методы северо-западного угла и минимальной стоимости);

3) оптимизируем его распределительным методом.

§ 9.2. Метод северо-западного угла

С помощью этого метода получается первоначальный план поставок.

Пример 29. У поставщиков A_1, A_2, A_3 сосредоточено соответственно 30, 190 и 250 единиц некоторого однородного груза, который необходимо доставить потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 в количестве 70, 120, 150 и 130 единиц. Стоимость перевозок единицы груза от поставщиков к потребителям задается матрицей:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Элемент в 1-й строке и 3-м столбце равен 2, то есть стоимость перевозки единицы груза от поставщика A_1 к потребителю B_3 равна 2, и т. д.

Построим первоначальный план поставок методом северо-западного угла.

Суммарная мощность поставщиков равна:

$$30 + 190 + 250 = = 470.$$

Суммарный спрос потребителей равен:

$$70 + 120 + 150 + 130 = 470.$$

Это — закрытая модель. Запишем наши данные в виде специальной таблицы.

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В первом столбце указаны мощности поставщиков, в первой строке — спрос потребителей. Числа в левом верхнем углу клетки — это стоимость перевозок единицы груза от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю, то есть значения из данной в условии матрицы. План перевозок будет задан, если мы укажем, сколько единиц груза должен получить каждый потребитель от каждого поставщика, то есть если пустая таблица из трех строк и четырех столбцов будет заполнена.

Северо-западный угол таблицы — это ее левый верхний угол, то есть клетка в 1-й строке и 1-м столбце — клетка

(1,1). Поэтому рассмотрим 1-го поставщика и 1-го потребителя. У поставщика A_1 есть 30 единиц груза, а потребителю B_1 нужно 70 единиц. Находим минимум из этих двух чисел: min (30,70) = 30. Клетка (1,1) перечеркивается по диагонали сплошной чертой (——), в правом нижнем углу пишется найденный минимум 30. Это означает, что A_1 должен поставить потребителю B_1 30 единиц груза. Такие клетки в дальнейшем будем называть *отмеченными*. Так как поставщик A_1 израсходовал все свои 30 единиц груза, то мы исключаем его из рассмотрения. Поэтому все остальные клетки 1-й строки перечеркнем по диагонали пунктиром (-------). Такие клетки в дальнейшем из рассмотрения исключаем и будем называть *пустыми*. После первого шага наша таблица примет следующий вид:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

Первая строка в дальнейшем не рассматривается.

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,1). Поэтому рассмотрим 2-го поставщика и 1-го потребителя. Мощность поставщика A_2 равна 190 единиц. Спрос потребителя B_1 — 70 единиц груза. Но 30 единиц груза он получил от поставщика A_1 (об этом говорит отмеченная клетка (1,1)). Поэтому непокрытый спрос потребителя B_1 равен 70−30 = 40. Находим минимум min (190, 70−30) = 40. Клетка (2,1) становится отмеченной. Мы запишем там этот минимум 40. Поставщики A_1 (30 единиц) и A_2 (40 единиц) полностью покрывают спрос потребителя B_1 (70 единиц). Поэтому остальные клетки 1-го столбца объявим пустыми и в дальнейшем исключим из рассмотрения. После второго шага таблица примет следующий вид:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1	2	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,2). min (190–40, 120) = 120. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (2,3). min (190–40–120, 150) = 30. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3	7

Северо-западный угол этой таблицы — это клетка (3,3). min (250, 150–30) = 120. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7

Осталась одна незаполненная клетка — это клетка (3,4). min (250–120, 130) = 130. Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7 / 130

После выполнения очередного шага мы исключали из рассмотрения либо строку, либо столбец. Только на последнем шаге отпали и строка, и столбец. Поэтому для полностью заполненной таблицы должно соблюдаться следующее соотношение: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1. В нашем случае это так: 6 = 3 + 4 – 1. Если это соотношение не выполняется, то возникает так называемый *особый случай*. Как в этом случае поступать, будет рассказано дальше.

Посчитаем суммарные затраты. Для этого надо в каждой отмеченной клетке перемножить ее числа и результаты сложить:

$$4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 120 + 7 \cdot 130 = 1690.$$

§ 9.3. Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости — еще один метод построения первоначального плана поставок. Он состоит в следующем.

Пример 30.

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

На каждом шаге мы будем делать поставку в клетку с наименьшей стоимостью перевозки единицы среди всех незаполненных клеток.

Шаг 1. Среди всех незаполненных клеток у клетки (2,2) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 1. Поэтому делаем поставку в эту клетку. min (190, 120) = 120. Исключаем 2-й столбец как полностью «удовлетворенный».

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 / 120	2	4
250	5	6	3	7

Шаг 2. Среди всех незаполненных клеток у клеток (1,3) и (2,3) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 2. Для клетки (1,3) min (30, 150) = 30. Для клетки (2,3) min (190–120, 150) = 70. Выбираем ту клетку, куда можно сделать наибольшую поставку. Так как 70 > 30, то это клетка (2,3). Исключаем 2-ю строку как полностью «использованную»:

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1 / 120	2 / 70	4
250	5	6	3	7

Среди всех незаполненных клеток у клетки (1,3) наименьшая стоимость перевозки единицы груза — 2. min (30, 150–70) = 30. Исключаем 1-ю строку как полностью «использованную»:

	70	120	150	130
30	4	7	2 / 30	3
190	3	1 / 120	2 / 70	4
250	5	6	3	7

И т. д. Окончательный вариант:

	70	120	150	130
30	4	7	2 / 30	3
190	3	1 / 120	2 / 70	4
250	5 / 70	6	3 / 50	7 / 130

Число отмеченных клеток = строк + число столбцов – 1: 6 = 3 + 4 – 1. Стоимость перевозки равна:

$$2 \cdot 30 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 70 + 5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 + 7 \cdot 130 = 1730.$$

Мы видим, что этот первоначальный план хуже первоначального плана из примера 29. Хотя бывает и наоборот.

§ 9.4. Особый случай

Пример 31.

	30	20	50
50	1	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Воспользуемся методом северо-западного угла.

Шаг 1. Клетка (1,1). min (50, 30) = 30. Исключаем 1-й столбец:

	30	20	50
50	1 / 30	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Шаг 2. Северо-западной клеткой является клекта (1, 2). min (50–30, 20) = 20. Мы видим, что отпадают и 1-я строка, и 2-й столбец. Это приведет к невыполнению соотношения: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов – 1. Поэтому помимо клетки (1,2) мы объявляем отмеченной еще одну клетку в 1-й строке или 2-м столбце. Делаем туда так называемую *нулевую поставку*, то есть 0. Пусть это будет клетка (2,2).

	30	20	50
50	1 / 30	3 / 20	5
30	3	3 / 0	2
20	4	1	2

Так поступают каждый раз, когда на очередном шаге отпадают и строка, и столбец. Дальнейшее распределение поставок уже не составляет труда.

§ 9.5. Распределительный метод решения транспортной задачи

С помощью вышеприведенных методов мы научились находить первоначальный план поставок. Теперь надо выяснить, является ли найденный план оптимальным и, если нет, то как его оптимизировать. Для этого надо составить *матрицу оценок*.

Оценка клетки (i, j) вычисляется по следующему правилу: оценка i-й строки + оценка j-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (i, j). Оценки строки и столбца выбираются таким образом, чтобы оценки всех отмеченных клеток были равны нулю. После этого оценки всех клеток записываются в виде матрицы — матрицы оценок. Если матрица оценок не содержит отрицательных чисел, то получен оптимальный план поставок. Иначе проводится оптимизация плана поставок.

Двигаясь из клетки с отрицательной оценкой по отмеченным клеткам (причем запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце), строят так называемый *цикл пересчета*. Внутри этого цикла перераспределяют поставки. Для полученной таблицы находят матрицу оценок и т. д. Рассмотрим подробнее эту схему на конкретном примере.

Пример 32. В примере 29 был получен следующий план поставок. Исследуем его на оптимальность.

	70	**120**	**150**	**130**
30	4 / 30	7	2	3
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4
250	5	6	3 / 120	7 / 130

Начинать можно с любой строки или любого столбца. Начнем с 1-го столбца, приписав ему ноль (впрочем, на 1-м шаге можно приписать столбцу любую оценку). В 1-м столбце находятся две отмеченные клетки (1,1) и (2,1). Их оценки должны быть нулевыми. Из этого условия, зная оценку 1-го столбца, найдем оценки 1-й и 2-й строк.

Оценка клетки (1,1) = оценка 1-й строки + оценка 1-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (1,1) = оценка 1-й строки + 0 + 4 = 0 (так должно быть для отмеченной клетки). Отсюда оценка 1-й строки = −4.

Оценка клетки (2,1) = оценка 2-й строки + оценка 1-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (2,1) = оценка 2-й строки + 0 + 3 = 0 (так должно быть для отмеченной клетки). Отсюда оценка 1-й строки = −3. Найденные оценки столбцов запишем под таблицей, найденные оценки строк — справа от таблицы. После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 / 30	7	2	3	−4
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	−3
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0				

Теперь надо найти отмеченную клетку, для которой известны оценка строки или оценка столбца. Например, это клетки (2,2). Для нее известна оценка строки. Оценка клетки (2,2) = оценка 2-й строки + оценка 2-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (2,2) = (−3) + оценка 2-го столбца + 1 = 0. Отсюда оценка 2-го столбца = 2. После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 / 30	7	2	3	−4
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	−3
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0	2			

Для отмеченной клетки (2,3) мы знаем только оценку строки. Оценка клетки (2,3) = оценка 2-й строки + оценка 3-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (2,3) = = (−3) + оценка 3-го столбца + 2 = 0. Отсюда оценка 3-го столбца = 1. После этого шага получаем таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 / 30	7	2	3	−4
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	−3
250	5	6	3 / 120	7 / 130	
	0	2	1		

Оценка клетки (3,3) = оценка 3-й строки + оценка 3-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (3,3) = оценка 3-й строки + 1 + 3 = 0. Отсюда оценка 3-й строки = −4. После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 / 30	7	2	3	−4
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	−3
250	5	6	3 / 120	7 / 130	−4
	0	2	1		

Оценка клетки (3,4) = оценка 3-й строки + оценка 4-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (3,4) = (−4) + оценка 4-го столбца + 7 = 0. Отсюда оценка 4-го столбца = −3. После этого шага получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 / 30	7	2	3	−4
190	3 / 40	1 / 120	2 / 30	4	−3
250	5	6	3 / 120	7 / 130	−4
	0	2	1	−3	

Найдены оценки всех строк и столбцов. Вычислим оценки всех клеток и составим матрицу оценок.

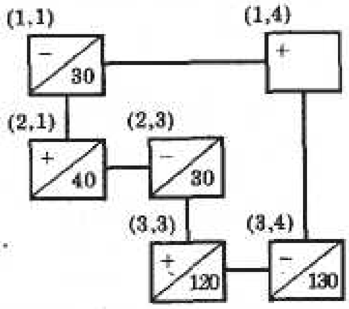
Оценка клетки (1,2) = оценка 1-й строки + оценка 2-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (1,2) = (−4) + 2 + 7 = 5.

Оценка клетки (1,3) = оценка 1-й строки + оценка 3-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (1,3) = (−4) + 1 + 2 = −1. И т. д.

Получаем следующую матрицу оценок:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица оценок содержит отрицательные числа, то наш план поставок является неоптимальным. Проведем его оптимизацию. Выбираем клетку с наименьшей оценкой. Это клетка (1,4). Ее оценка равна −4. Наша задача — построить цикл пересчета. Выходя из клетки (1,4) и двигаясь только по отмеченным клеткам, нужно вернуться в стартовую клетку (1,4). При этом запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце. Например, подходит цикл (1,4)–(1,1)–(2,1)–(2,3)–(3,3)–(3,4)–(1,4). Нарисуем этот цикл. Для каждой клетки указаны ее индексы и объем поставок.



Стартовой клетке (1,4) припишем знак +. Двигаясь по циклу, чередуем знаки. Среди поставок в клетки со знаком «−» (это клетки (1,1), (2,3), (3,4)) найдем минимальную: min (30, 30, 130) = 30. После этого в клетках со знаком «−» уменьшим поставки на этот минимум, а в клетках со знаком «+» увеличим на этот минимум. Клетка (1,4) становится отмеченной. Если получена одна клетка с нулевой поставкой, то она становится пустой. У нас таких клеток две — (1,1), (2,3). Поэтому пустой объявим только одну из них с наибольшим тарифом — клетку (1,1). В клетку (2,3) будет сделана нулевая поставка, и она останется отмеченной. Это делается для выполнения соотношения: число отмеченных клеток = число строк + число столбцов − 1. Получаем новый план поставок.

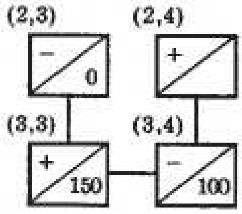
Нужно следить, чтобы суммы поставок по строкам и столбцам были равны мощностям поставщиков и спросу потребителей соответственно.

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3 / 30	0
190	3 / 70	1 / 120	2 / 0	4	−3
250	5	6	3 / 150	7 / 100	−4
	0	2	1	−3	

Для нового плана находим оценки строк и столбцов. Затем получим матрицу оценок клеток:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

План является неоптимальным, так как оценка клетки (2,4) меньше нуля. Строим для нее цикл пересчета: (2,4)–(3,4)–(3,3)–(2,3)–(2,4).



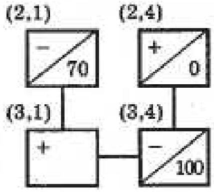
min (0, 100) = 0. Клетка (2,3) становится пустой, а клетка (2,4) — отмеченной (нулевая поставка). Новый план поставок:

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3 / 30	−2
190	3 / 70	1 / 120	2	4 / 0	−3
250	5	6	3 / 150	7 / 100	−6
	0	2	3	−1	

Для нового плана находим оценки строк и столбцов. Затем получим матрицу оценок клеток:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

План является неоптимальным, так как оценка клетки (3,1) меньше нуля. Строим для нее цикл пересчета: (3,1)–(2,1)–(2,4)–(3,4)–(3,1).



min (70, 100) = 70. В клетках с «+» поставки увеличиваются на 70, а в клетках с «–» поставки уменьшаются на 70. Клетка (2,1) становится пустой. Новый план поставок:

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3 / 30	−1
190	3	1 / 120	2	4 / 70	−2
250	5 / 70	6	3 / 150	7 / 30	−5
	0	1	2	−2	

Находим оценки строк и столбцов. Получаем матрицу оценок:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица оценок не содержит отрицательных чисел. Получен оптимальный план поставок. Суммарные затраты на перевозку груза равны:

$$3\cdot 30 + 1\cdot 120 + 4\cdot 70 + 5\cdot 70 + 3\cdot 150 + 7\cdot 30 = 1500.$$

Напомним, что суммарные затраты на перевозку груза для первоначального плана были 1690. Поставщик A_1 должен поставить 30 единиц груза потребителю B_4. Поставщик A_2 должен поставить 120 единиц груза потребителю B_2 и 70 единиц груза потребителю B_4. Поставщик A_3 должен поставить 70 единиц груза потребителю B_1, 150 единиц груза потребителю A_3 и 30 единиц груза потребителю B_4.

§ 9.6. Открытая модель

Открытая модель сводится к закрытой модели. Если суммарная мощность поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то вводится фиктивный потребитель, которому приписывается спрос, равный разнице между суммарной мощностью поставщиков и суммарным спросом потребителей. Стоимость перевозки единицы груза от поставщиков до фиктивного потребителя полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Груз, предназначенный фиктивному потребителю, остается у поставщика.

Пример 33.

	30	40	60
40	7	8	6
60	6	5	10
50	4	3	9

Суммарная мощность поставщиков 40 + 60 + 50 = 150, суммарный спрос потребителей 30 + 40 + 60 = 130. Модель — открытая. Вводим фиктивного потребителя, которому припишем спрос 150 − 130 = 20. Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя равна нулю. Получаем закрытую модель.

	30	40	60	20
40	7	8	6	0
60	6	5	10	0
50	4	3	9	0

Решаем ее распределительным методом. Груз, предназначенный фиктивному потребителю, остается у поставщика. Оставляем читателю эту задачу в качестве упражнения.

Если суммарная мощность поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то вводится фиктивный поставщик, которому приписывается мощность, равная разнице между суммарным спросом потребителей и суммарной мощностью поставщиков. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Потребитель, приписанный к фиктивному поставщику, просто не получает соответствующего груза.

Пример 34.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8

Суммарная мощность поставщиков 10 + 40 + 30 = 80, суммарный спрос потребителей 20 + 30 + 50 = 100. Модель — открытая. Вводим фиктивного поставщика, которому припишем мощность 100 − 80 = 20. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей равна нулю. Получаем закрытую модель.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8
20	0	0	0

Оставляем читателю эту задачу в качестве упражнения.

ГЛАВА 10. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. В этом случае число поставщиков равно числу потребителей, мощность каждого поставщика и спрос каждого потребителя равны единице. Решается задача о назначениях *венгерским методом*. Сначала рассмотрим задачу минимизации целевой функции (экономический смысл величин исходной матрицы может быть любым).

§ 10.1. Минимизация целевой функции

1. В каждой строке матрицы задачи находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов строки.

2. В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбца.

3. Находим строку с одним нулем. Этот нуль заключается в квадрат $\boxed{0}$ и называется *отмеченным*. В столбце, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваются и в дальнейшем не рассматриваются. Это шаг продолжаем, пока возможно.

4. Находим столбец с одним нулем и этот нуль отмечаем. В строке, где находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваются. Этот шаг продолжать, пока возможно.

5. Если после шагов 3 и 4 еще есть неотмеченные нули, то отмечаем любой из них, а в строке и в столбце, где находится этот отмеченный нуль, все остальные нули зачеркиваем.

6. Если каждая строка и каждый столбец матрицы содержат ровно один отмеченный нуль, то получено оптимальное решение. Каждый из отмеченных нулей указывает прикрепление поставщика к потребителю. В противном случае проводим минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все отмеченные нули. Среди не зачеркнутых этими прямыми чисел на-

ходим минимум. Этот минимум вычитаем из всех незачеркнутых чисел и прибавляем ко всем числам на пересечении прямых. К полученной матрице применяем вышеприведенный алгоритм, начиная с шага 3.

Пример 35. Существуют 4 базы A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Нужно так прикрепить базы к торговым точкам, чтобы суммарное расстояние было минимальным.

Находим минимум в 1-й строке (это 5) и вычитаем его из всех элементов 1-й строки. Находим минимум во 2-й строке (это 1) и вычитаем его из всех элементов 2-й строки. И т. д. Получим матрицу:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 15 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

В полученной матрице находим минимумы в каждом столбце (0, 2, 0, 0 соответственно) и вычитаем их из всех элементов соответствующего столбца. Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \cancel{0} \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

В 1-й строке один нуль. Отметим его. Он находится в 4-м столбце. Поэтому в 4-м столбце зачеркнем все остальные нули. Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \cancel{0} \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично поступаем с 4-й строкой. Больше нет строк с одним нулем. Зато есть столбцы с одним нулем. 2-й столбец содержит один нуль, который мы и отметим. Этот нуль находится в 3-й строке. Поэтому в 3-й строке зачеркнем все нули. Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Больше нет нулей. Полученное распределение не является оптимальным, так как во 2-й строке нет отмеченных нулей. Проведем минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все отмеченные нули. Одной или двух прямых здесь недостаточно, а вот три прямые подойдут. Можно применять любой способ проведения прямых.

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Среди не зачеркнутых этими прямыми чисел находим минимум: min (8, 3, 1, 3) = 1. Этот минимум вычитается из всех незачеркнутых чисел и прибавляется ко всем числам на пересечении прямых (5,13). Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведенный алгоритм.

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 7 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 \\ \boxed{0} & 6 & \cancel{0} & 2 \end{bmatrix}.$$

Полученное распределение не является оптимальным, так как в 3-м столбце нет отмеченных нулей. Проводим прямые.

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 7 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & 2 \\ \boxed{0} & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

min (7, 2, 2) = 2. Этот минимум вычитается из всех незачеркнутых чисел и прибавляется ко всем числам на пересечении прямых (6,14). Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 8 & 16 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведенный алгоритм.

$$\begin{bmatrix} 8 & 16 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 5 & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 6 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Полученное распределение не является оптимальным. Проводим прямые. min (5) = 5. Получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 13 & 21 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

К этой матрице применим вышеприведенный алгоритм.

$$\begin{bmatrix} 13 & 21 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ 7 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 6 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

В каждой строке и каждом столбце матрицы ровно один отмеченный нуль. Это оптимальное распределение. Возможно, оно не является единственным. A_1 прикрепляется к B_4, A_2 — к B_3, A_3 — к B_2, A_4 — к B_1. Как найти суммарное расстояние? Надо сложить числа, которые расположены в исходной матрице на месте отмеченных нулей: $5 + 9 + 8 + 7 = 29$.

§ 10.2. Максимизация целевой функции

Случай максимизации целевой функции сводится к задаче минимизации для матрицы, полученной из исходной матрицы умножением каждого элемента на -1.

Пример 36. Существуют 4 продавца A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Эффективность работы продавцов на торговых точках задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

Найти оптимальное распределение продавцов по торговым точкам.

Приведенная задача — это задача максимизации целевой функции. Умножим исходную матрицу на -1.

$$\begin{bmatrix} -9 & -3 & -4 & -8 \\ -4 & -6 & -7 & -11 \\ -5 & -8 & -8 & -4 \\ -6 & -12 & -15 & -9 \end{bmatrix}.$$

К полученной матрице можно применить рассмотренный выше алгоритм. Оставляем читателю этот пример в качестве упражнения.

ГЛАВА 11. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Максимаксное и максиминное решения. *Максимаксное решение* — это максимизация максимума возможных доходов. *Максиминное решение* — это максимизация минимума возможных доходов.

Пример 37. Владелец небольшого магазина в начале каждого дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 50 рублей за единицу. Цена реализации этого продукта — 60 рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицы. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 30 рублей за единицу. Сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день?

Таблица возможных доходов за день

Возможные исходы: спрос в день	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	10	−10	−30	−50
2	10	20	0	−20
3	10	20	30	10
4	10	20	30	40
максимакс	10	20	30	40
максимин	10	−10	−30	−50

Поясним, как заполняется таблица.

В клетке (2,2) для реализации было закуплено 2 единицы, спрос был 2 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: $60 \cdot 2$ (реализация двух единиц) $-\ 50 \cdot 2$ (их предварительная закупка) $= 20$.

В клетке (3,1) была закуплена для реализации 1 единица, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки: $60 \cdot 1$ (реализация только одной единицы, владелец магазина неверно оценил спрос) − 50 · 1 (ее предварительная закупка) = 10.

В клетке (3,4) было закуплено для реализации 4 единицы, спрос был 3 единицы. Поэтому возможный доход для этой клетки 60 · 3 (реализация трех единиц, на которые был спрос) − 50 · 4 (предварительная закупка четырех единиц) + 30 · (4 − 3) (реализация в конце дня непроданной единицы) = 10. И т. д.

Каждая реализованная в течение дня единица приносит доход 60 − 50 = 10, а каждая реализованная в конце дня единица приносит доход 30 − 50 = −20 (то есть убыток).

Рассматриваемые способы принятия решения состоят в следующем. В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 10, 20, 30, 40 соответственно. Запишем их в строке «максимакс» и найдем среди них максимальное. Это 40, что соответствует решению о закупке для реализации 4 единиц. Руководствуясь правилом максимакса, каждый раз надо закупать для реализации 4 единицы. Это — подход очень азартного человека.

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим минимальное число. Это числа 10, −10, −30, −50 соответственно. Запишем их в строке «максимин» и найдем среди них максимальное. Это 10, что соответствует решению о закупке для реализации 1 единицы. Руководствуясь правилом максимина, каждый раз надо закупать для реализации 1 единицу. Это — подход очень осторожного человека.

Минимаксное решение. *Минимаксное решение* — это минимизация максимума возможных потерь, причем упущенная выгода также трактуется как потери.

Пример 38. Вернемся к предыдущему примеру.

Таблица возможных потерь за день

Возможные исходы: спрос в день	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	0	20	40	60
2	10	0	20	40
3	20	10	0	20
4	30	20	10	0
минимакс	30	20	20	60

Поясним, как заполняется таблица.

В клетке (2,2) было закуплено для реализации 2 единицы, спрос был 2 единицы, то есть число закупленных для реализации единиц равно спросу за день. Поэтому возможные потери для этой клетки равны нулю.

В клетке (3,1) закупленная для реализации единица продана, но могли бы продать еще $3 - 1 = 2$ единицы, заработав на их продаже $2 \cdot (60 - 50) = 20$. Это и есть возможные потери.

В клетке (3,4) одна закупленная единица не реализована в течение дня. Она приносит убыток $1 \cdot (50 - 30) = 20$. Это и есть возможные потери.

В каждом столбце (то есть для каждого возможного решения) находим максимальное число. Это числа 30, 20, 20, 60 соответственно. Запишем их в строке «минимакс» и найдем среди них минимальное. Это 20, что соответствует решению о закупке для реализации 2 или 3 единиц.

Критерий Гурвица. *Критерий Гурвица* — это компромиссный способ принятия решений. Составляется таблица возможных доходов (*см. пример 37*). Задаются числа a и b, называемые *весами*. Условия на a и b:

$$a \geq 0,\ b \geq 0,\ a + b = 1.$$

Для каждого решения определяются наименьший и наибольший возможные доходы и вычисляется целевая функция по правилу:

$$a \times (\text{наименьший доход}) + b \times (\text{наибольший доход}).$$

Выбираем решение, при котором целевая функция принимает наибольшее значение.

Веса a и b выбирает сам исследователь. При $a = 0$, $b = 1$ получаем правило максимакса. При $a = 1$, $b = 0$ получаем правило максимина.

Пример 39. Вернемся к примеру 37. Зададим $a = 0{,}4$ и $b = 0{,}6$. $a + b = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$. Из таблицы возможных доходов для каждого решения находим наименьший и наибольший возможные доходы (это числа в строках «максимакс» и «максимин»). Заполним таблицу.

Возможные решения	Наибольший доход	Наименьший доход	a × (наименьший доход)	b × (наибольший доход)	Сумма
1	10	10	4	6	10
2	20	−10	−4	12	8
3	30	−30	−12	18	6
4	40	−50	−20	24	4

Числа во 2-м и 3-м столбцах взяты из таблицы возможных доходов. Числа 3-го столбца умножаем на $a = 0{,}4$ и результат пишем в 4-м столбце. Числа 2-го столбца умножаем на $b = 0{,}6$ и результат пишем в 5-м столбце. В 6-м столбце находится сумма соответствующих элементов 4-го и 5-го столбцов. Находим максимум в 6-м столбце (это 10). Он соответствует возможному решению о закупке для реализации одной единицы. Очевидно, для других весов результат будет, вообще говоря, иным.

Замечание. В методе Гурвица вместо таблицы возможных доходов можно воспользоваться таблицей возможных потерь (*см. пример 38*). В этом случае ищется минимум целевой функции $a \times$ (наименьшие потери) $+$ $b \times$ (наибольшие потери) по всем возможным решениям.

§ 11.2. Принятие решений с использованием численных значений вероятностей исходов

Правило максимальной вероятности. Рассмотрим пример.

Пример 40. Модифицируем пример 37. Пусть известно, что на практике спрос 1 наблюдался 15 раз, спрос 2 наблюдался 30 раз, спрос 3 наблюдался 30 раз, спрос 4 наблюдался 25 раз, то есть известна частота каждого возможного исхода.

Всего наблюдений было 15 + 30 + 30 + 25 = 100. По формуле (частота исхода)/(сумма частот всех исходов) определим относительную частоту (или вероятность) каждого исхода. Это 15/100 = 0,15; 30/100 = 0,30; 30/100 = 0,30; 25/100 = 0,25 соответственно. Составим таблицу. Находим исходы, вероятность которых максимальна. Это 2 и 3.

Возможные исходы	1	2	3	4	Сумма
Частота	15	30	30	25	100
Вероятность p	0,15	0,30	0,30	0,25	1

В таблице возможных доходов наибольший возможный доход из этих двух решений у решения «закупать 3 единицы» (30 против 20). Поэтому, руководствуясь правилом максимальной вероятности, надо закупать для реализации 3 единицы.

Максимизация ожидаемого дохода. Мы знаем вероятность каждого исхода и знаем таблицу возможных доходов. По формуле

$$\sum_i (\text{доход при } i\text{-м исходе}) \times (\text{вероятность } i\text{-го исхода})$$

вычисляем для каждого решения математическое ожидание дохода (грубо говоря, средний ожидаемый доход). И смотрим, для какого решения оно максимально.

Пример 41. Вернемся к примеру 40.

Возможное решение 1		
Возможный доход x	Вероятность p	x×p
10	0,15	10·0,15 = 1,5
10	0,30	10·0,30 = 3
10	0,30	10·0,3 = 3
10	0,25	10·0,25 = 2,5
Сумма	1	10

Столбец «Возможный доход *x*» взят из таблицы возможных доходов (соответствует возможному решению 1). Столбец «Вероятность *p*» — это строка «вероятность» из примера 40. 3-й столбец — это результат поэлементного произведения 1-го и 2-го столбцов. Нас интересует сумма элементов 3-го столбца. Она равна 10.

Возможное решение 2		
Возможный доход x	Вероятность p	x×p
−10	0,15	−10·0,15 = −1,5
20	0,30	20·0,30 = 6
20	0,30	20·0,3 = 6
20	0,25	20·0,25 = 5
Сумма	1	15,5

Возможное решение 3		
Возможный доход x	Вероятность p	x×p
−30	0,15	−30·0,15 = −4,5
0	0,30	0·0,30 = 0
30	0,30	30·0,3 = 9
30	0,25	30·0,25 = 7,5
Сумма	1	12

Возможное решение 4		
Возможный доход x	Вероятность p	x×p
−50	0,15	−50·0,15 = −7,5
−20	0,30	−20·0,30 = −6
10	0,30	10·0,3 = 3
40	0,25	40·0,25 = 10
Сумма	1	−0,5

Выбираем максимум среди итоговых чисел: max (10; 15,5; 12; −0,5) = 15,5. Поэтому надо закупать для реализации 2 единицы.

З а м е ч а н и е. Воспользовавшись формулой

$$\sum_i (\text{возможные потери при } i\text{-м исходе}) \times (\text{вероятность } i\text{-го исхода}),$$

аналогично можно минимизировать ожидаемые потери.

ГЛАВА 12. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

§ 12.1. Основные понятия

Выбирается промежуток времени 1 год. Рассматривается модель одиночного склада. Считается, что на складе хранится запас однотипных изделий (однономенклатурный запас). Спрос на эти изделия может быть постоянным или случайным. Пополняться склад может либо периодически (*циклическая модель*), либо при снижении запасов до некоторого уровня (*уровневая модель*). *Объем заказа* — это количество заказываемых изделий. *Уровень повторного заказа* — количество изделий на складе, при котором подается заказ на новые изделия. *Время поставки* может быть либо мгновенным, либо фиксированным, либо случайным. *Штраф за дефицит* — это убытки, связанные с отсутствием запаса. За хранение каждой единицы запаса берется определенная плата C_h. D — годовой спрос на изделия. Стоимость подачи заказа C_0 — это накладные расходы, связанные с реализацией заказа (затраты на подготовительно-заготовочные операции, не зависят от объема заказа). Вся теория будет строиться с целью минимизации суммарных издержек.

§ 12.2. Основная модель управления запасами

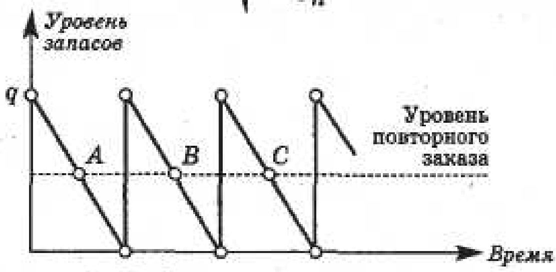
Предпосылки основной модели: 1) спрос равномерный и постоянный; 2) время поставки постоянно; 3) отсутствие запасов недопустимо; 4) каждый раз заказывается постоянное количество — оптимальный размер заказа.

$$\text{Издержки } TC = \text{подача заказов} + \text{хранение} = \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2} \to \min,$$

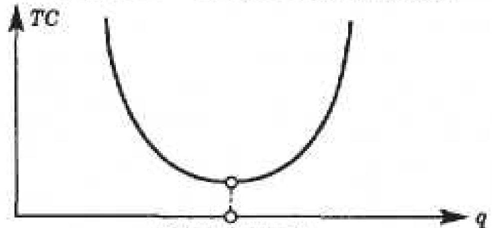
где q — оптимальный размер заказа; $q/2$ — средний объем хранимого запаса.

Решением этой оптимизационной задачи будет значение:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}.$$



A, B, C — точки подачи заказа.



Пример 42. Годовой спрос $D = 1500$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 150$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 45$ рублей/год, время доставки 6 дней, 1 год = 300 рабочих дней. Найдем оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа.

Оптимальный размер заказа:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{45}} = 100 \text{ единиц.}$$

Издержки:

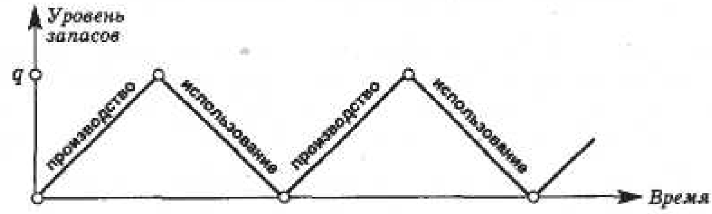
$$TC(q) = \frac{C_0D}{q} + \frac{C_hq}{2} = \frac{150 \cdot 1500}{100} + \frac{45 \cdot 100}{2} = 4500 \text{ руб./год,}$$

За 300 рабочих дней реализуется 1500 единиц, за 6 дней доставки — x единиц. $300/6 = 1500/x$. Отсюда $x = 1500 \cdot 6/300 = 30$ единиц. Каждый раз, когда на складе остается 30 единиц, подается заказ на 100 единиц.

Годовой спрос $D = 1500$ единиц, каждый раз заказывается $q = 100$ единиц. Поэтому всего за год будет подано $D/q = 1500/100 = 15$ заказов. Говорят, что за год пройдет 15 циклов. Расстояние между циклами $1/(D/q) = q/D = 100/1500 = 1/15$ лет $= 300 \cdot (1/15) = 20$ рабочих дней.

§ 12.3. Модель экономичного размера партии

Технологический процесс может быть организован на основе производства партии продукции: чередование процессов производства и реализации произведенного:



Каким должен быть размер q партии продукции?

Обозначим через C_s стоимость организации производственного цикла (фиксированные издержки производства).

Издержки TC = стоимость организации технологического процесса + хранение =

$$= \frac{C_s D}{q} + \frac{C_h q}{2} \to \min,$$

где q — экономичный размер партии.

Решение этой задачи: $q = \sqrt{\dfrac{2C_s D}{C_h}}$.

Пример 43. Годовой спрос $D = 14800$ единиц, стоимость организации производственного цикла $C_s = 100$ рублей, издержки хранения одной единицы $C_h = 8$ рублей/год.

Экономичный размер партии равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 14800}{8}} \approx 608 \text{ единиц}.$$

То есть надо произвести 608 единиц, остановить производство, реализовать всю произведенную продукцию и вновь запустить производство. И т. д.

Издержки TC равны:

$$TC(608) = \frac{C_s D}{q} + \frac{C_h q}{2} = \frac{100 \cdot 14800}{608} + \frac{8 \cdot 608}{2} \approx 4866 \text{ руб./год}.$$

Число циклов за год $D/q = 14800/608 \approx 24{,}3$. Расстояние между циклами $q/D \approx 0{,}04$ лет ≈ 15 дней.

§ 12.4. Скидка на количество

Очень часто, если заказываемое количество товара больше определенного числа, предоставляется скидка. В этом случае снижаются расходы на закупку, но увеличиваются затраты на хранение.

$$\text{Общие издержки} = \text{закупка} + \text{издержки } TC(q) = CD + \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2},$$

где C — закупочная цена. Необходимо выяснить, стоит ли воспользоваться скидкой.

Пример 44. Годовой спрос $D = 1000$ единиц, стоимость подачи заказа $C_0 = 40$ рублей/заказ, закупочная цена $C = 50$ рублей/единицу, годовая стоимость хранения одной единицы составляет 25% ее цены. Можно получить скидку 3% у поставщиков, если размер заказа будет не меньше 200 единиц (уровень, нарушающий цену). Стоит ли воспользоваться скидкой?

Так как годовая стоимость хранения одной единицы составляет 25% ее цены, то

$$C_h = 0{,}25 \cdot C = 0{,}25 \cdot 50 = 12{,}5 \text{ руб./единицу.}$$

Найдем общие издержки в случае основной модели.

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1000}{12{,}5}} = 80 \text{ единиц.}$$

Общие издержки равны:

$$TC = 50 \cdot 1000 + \frac{40 \cdot 1000}{80} + \frac{12{,}5 \cdot 80}{2} \approx 51000 \text{ руб./год.}$$

Если воспользоваться скидкой, то новая закупочная цена равна:

$$C = 0{,}97 \cdot 50 = 48{,}5 \text{ рублей/единицу.}$$

Поэтому

$$C_h = 0{,}25 \cdot C = 0{,}25 \cdot 48{,}5 = 12{,}125 \text{ рублей/единицу.}$$

В этом случае оптимальный размер заказа равен:

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 1000}{12{,}125}} \approx 81 \text{ единица.}$$

Но скидка предоставляется, если объем заказа $q \geq 200$. Поэтому положим $q = 200$. Тогда общие издержки равны:

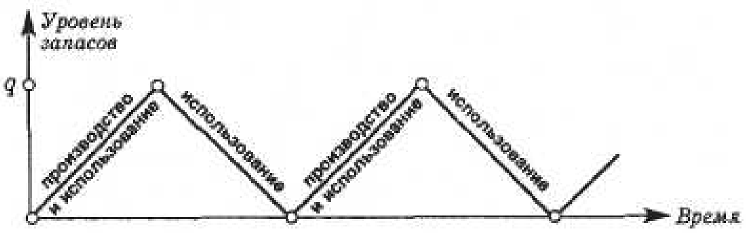
$$TC = 48{,}5 \cdot 1000 + \frac{40 \cdot 1000}{200} + \frac{12{,}125 \cdot 200}{2} \approx 49912{,}5 \text{ руб./год.}$$

Мы видим, что общие издержки уменьшились. Поэтому следует воспользоваться скидкой, заказывая каждый раз 200 единиц.

Число циклов за год равно $D/q = 1000/200 = 5$, а интервал между циклами $q/D = 200/1000 = 1/5$ лет $= 73$ дня.

§ 12.5. Модель производства партии продукции

Ранее была рассмотрена модель экономичного размера партии (сначала товар производят, потом используют и т. д.). Разрешим теперь использование товара по мере его производства.



Пусть P – темп производства, D — темп использования. Произведя q единиц продукции, производство прекращаем. Так как мы начинаем использовать произведенную продукцию сразу же, не дожидаясь остановки производства, то в момент этой остановки на складе будет не q единиц (как в модели экономичного размера партии), а меньше.

Издержки TC = стоимость организации технологического процесса + хранение =

$$= \frac{C_sD}{q} + \frac{C_h(P-D)q}{2P} \to \min,$$

где q — экономичный размер партии.

Решение этой задачи: $q = \sqrt{\dfrac{2C_sD}{C_h}} \times \sqrt{\dfrac{P}{P-D}}$.

Пример 45. Компания выпускает электрические ножи. Она в среднем может производить 150 ножей/день. Спрос — 40 ножей/день. Годовые издержки хранения C_h = 8 руб./нож. Стоимость организации производственного цикла C_s = 100 рублей. Найти экономичный размер партии и издержки.

P = 150 ножей/день = 54750 ножей/год, D = 40 ножей/день = 14600 ножей/год (напомним, что вся теория строится для временного интервала 1 год).

Экономичный размер партии равен:

$$q = \sqrt{\frac{2\cdot 100\cdot 14600}{8}} \times \sqrt{\frac{54750}{54750-14600}} \approx 705 \text{ единиц.}$$

Издержки TC равны:

$$TC = \frac{100\cdot 14600}{705} + \frac{8\cdot(54750-14600)\cdot 705}{2\cdot 54750} \approx 4138{,}92 \text{ руб./год.}$$

Таким образом, производим 705 ножей, останавливаем производство. Ножи реализуются сразу, не дожидаясь остановки производства. Как только ножи закончатся, тут же запускаем производственный процесс. Число циклов за год равно $D/q = 14600/705 \approx 20{,}7$, а интервал между циклами $q/D = 705/14600 = 0{,}048$ лет $\approx$ 18 дней.

§ 12.6. Модель планирования дефицита

В некоторых случаях издержки хранения являются очень высокими. Поэтому имеет смысл допустить регулярные интервалы времени, когда товар на складе отсутствует.

Издержки ТС = подача заказов + хранение + + штраф за дефицит.

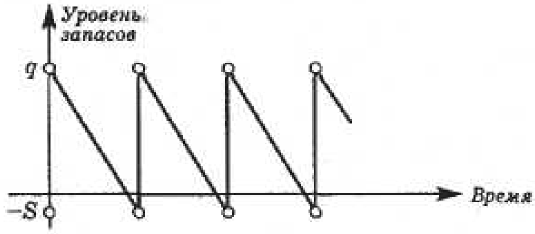
Возможны 2 подхода:

1) полученная новая продукция не идет на выполнение заявок на товар во время его отсутствия;

2) часть полученной новой продукции идет на погашение всех заявок, оставленных во время отсутствия запасов.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

Случай невыполнения заявок.



S — максимальный размер дефицита (максимально возможное число единиц товара, которое могло бы быть реализовано за время его отсутствия в каждом цикле). На графике периоды дефицита условно изображаются ниже оси времени. C_b — годовая стоимость отсутствия единицы продукции в запасе (потеря доверия клиентов, непроданная продукция и т. д.).

Издержки TC = подача заказов + хранение + + штраф за дефицит =

$$= \frac{C_0 D}{q + S} + \frac{C_h q^2}{2(q + S)} + \frac{C_b S^2}{2(q + S)} \to \min,$$

где q — оптимальный размер заказа, S — максимальный размер дефицита. Решениями этой задачи будут величины:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}},$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}}.$$

Пример 46. Годовой спрос $D = 500$ единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 40$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 5$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 100$ рублей/единицу.

Сравним 2 модели: основную и с дефицитом (заявки не выполняются).

Основная модель:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 500}{5}} \approx 89 \text{ единиц.}$$

$$TC = \frac{C_0D}{q} + \frac{C_hq}{2} = \frac{40 \cdot 500}{89} + \frac{5 \cdot 89}{2} \approx 447 \text{ руб./год.}$$

Модель с дефицитом:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}} = 89 \times \sqrt{\frac{100}{5 + 100}} \approx 87 \text{ единиц.}$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 500}{100}} \times \sqrt{\frac{5}{5 + 100}} \approx 4 \text{ единицы.}$$

$$TC = \frac{C_0D}{q + S} + \frac{C_hq^2}{2(q + S)} + \frac{C_bS^2}{2(q + S)} =$$

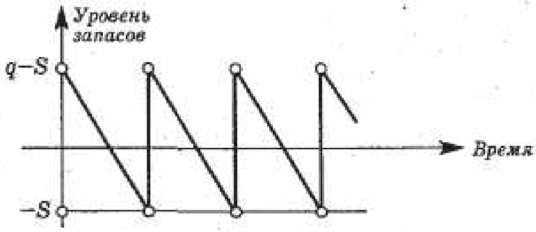
$$= \frac{40 \cdot 500}{87 + 4} + \frac{5 \cdot 87^2}{2 \cdot (87 + 4)} + \frac{100 \cdot 4^2}{2 \cdot (87 + 4)} \approx 437 \text{ руб./год.}$$

Таким образом, в модели с дефицитом годовые издержки меньше.

Случай выполнения заявок. В этом случае максимальный уровень запасов будет равен не q, а $(q - S)$.

Издержки TC = подача заказов + хранение + + штраф за дефицит =

$$= \frac{C_0D}{q} + \frac{C_h(q - S)^2}{2q} + \frac{C_bS^2}{2q} \to \min,$$



где q — оптимальный размер заказа, S — максимальный размер дефицита. Решение задачи:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_h + C_b}{C_b}}.$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}}.$$

Пример 47. Годовой спрос $D = 3000$ единиц, стоимость подачи заказов $C_0 = 25$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 120$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 225$ рублей/единицу. Модель с дефицитом (заявки выполняются).

Найдем издержки.

$$q = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 3000}{120}} \times \sqrt{\frac{120 + 225}{225}} \approx 44 \text{ единицы}.$$

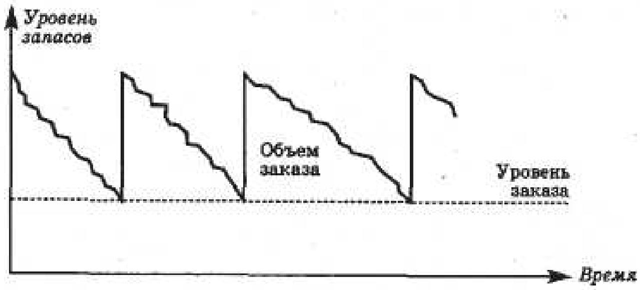
$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 3000}{225}} \times \sqrt{\frac{120}{120 + 225}} \approx 15 \text{ единиц}.$$

$$TC = \frac{25 \cdot 3000}{44} + \frac{120 \cdot (44-15)^2}{2 \cdot 44} + \frac{225 \cdot 15^2}{2 \cdot 44} \approx 3427 \text{ руб./год}.$$

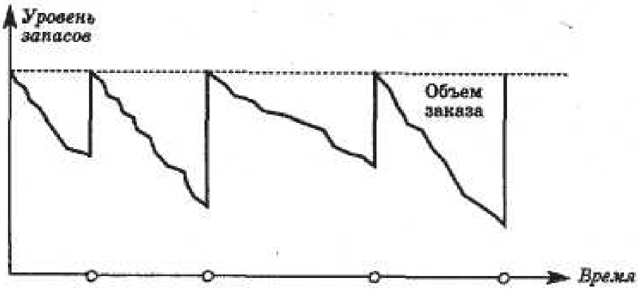
§ 12.7. Неопределенность и основная модель управления запасами

Грубо говоря, основная модель — это заказ постоянного количества единиц в заранее определенные моменты времени, то есть фиксированный заказ в фиксированное время. На практике спрос часто не является постоянным, поэтому основная модель мало приспособлена для практических нужд. Будем ее видоизменять, чтобы учесть непостоянство спроса. Самое простое, что можно сделать, — отказаться от одного из двух заявленных условий.

Случай 1. Фиксированный заказ в случайное время. Как только на складе запасы понизятся до некоторого заданного заранее уровня, подается заказ на фиксированное количество единиц. Это — *уровневая система* повторного заказа.



Случай 2. Случайный заказ в фиксированное время. Заранее определяем, в какие моменты времени будут сделаны заказы. Обычно они выбираются с определенной периодичностью. При наступлении этих моментов подаются заказы, объем которых равен разности между заранее выбранным числом и количеством единиц на складе в тот момент времени. Это — *циклическая система* повторного заказа.



Рассмотрим эти модели подробнее.

§ 12.8. Уровневая система повторного заказа

Достижение минимальной стоимости. Чтобы учесть непостоянство спроса, вводят резервный запас.

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + хранение резервного запаса + штраф за дефицит.

Сначала считаем, что спрос постоянный. При помощи основной модели находим оптимальный размер заказа q. Именно такое количество мы и будем заказывать каждый раз. Когда заказывать? Оптимальный размер заказа q позволяет вычислить первые два слагаемых в выражении для издержек. Как выбрать резервный запас? Чем больше (меньше) резервный запас, тем меньше (больше) штраф за дефицит и тем больше (меньше) стоимость хранения резервного запаса. Методом проб и ошибок мы должны подобрать резервный запас, минимизирующий два последних слагаемых в выражении для издержек.

Пример 48. Средний годовой спрос $D = 150$ единиц за 300 рабочих дней, стоимость подачи заказов $C_0 = 50$ рублей/заказ, издержки хранения одной единицы $C_h = 12$ рублей/год, годовая стоимость отсутствия запасов $C_b = 20$ рублей/единицу. Время поставки 4 дня.

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
Частота	2	8	13	10	7	5	5	50

За время поставки спрос 6 единиц наблюдался 5 раз, спрос 5 единиц наблюдался 5 раз и т. д. Всего было 50 наблюдений. Минимизируем общую стоимость запасов.

Из основной модели оптимальный размер заказа равен:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 150}{12}} \approx 35 \text{ единиц.}$$

Таков объем заказа. Когда заказывать?

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + хранение резервного запаса + штраф за дефицит =

$$= \frac{C_0D}{q} + \frac{C_hq}{2} + C_h \cdot (\text{резервный запас}) +$$

$$+ C_b \cdot \left(\begin{array}{c}\text{математическое ожидание числа единиц,}\\ \text{составляющих годовую нехватку запасов}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{50 \cdot 150}{35} + \frac{12 \cdot 35}{2} + 12 \cdot (\text{резервный запас}) +$$

$$+ 20 \cdot (\text{математическое ожидание}) = 424{,}29 +$$

$$+ 12 \cdot (\text{резервный запас}) + 20 \cdot (\text{математическое ожидание}).$$

Надо подобрать резервный запас, минимизирующий два последних слагаемых.

Число циклов за год $D/q = 150/35 \approx 4{,}3$.

Средний спрос за день $150/300 = 0{,}5$, время поставки 4 дня. Поэтому средний спрос в течение поставки $4 \cdot 0{,}5 = 2$ (если бы получилось дробное число, то его надо округлить до ближайшего меньшего целого числа). Найдем вероятность (относительную частоту) для каждого значения спроса за время поставки. Для этого частоту каждого значения спроса разделим на 50 (общее число наблюдений).

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	Сумма
Частота	2	8	13	10	7	5	5	50
Вероятность	0,04	0,16	0,26	0,20	0,14	0,10	0,10	1

С помощью основной модели мы учитываем спрос 0, 1, 2 изделия за время поставки, так как средний спрос в течение поставки равен 2. Чтобы учесть спрос 3, 4, 5, 6 (а свыше 6 спрос за время поставки не наблюдался), необходим резервный запас (соответственно 1, 2, 3, 4). Мы начнем с наибольшего значения резервного запаса 4. Вычислим сумму двух последних слагаемых в выражении для издержек. После этого каждый раз мы будем понижать резервный запас на 1 и пересчитывать сумму двух последних слагаемых в выражении для издержек. Сначала сумма будет понижаться, а затем возрастать. Смена убывания на возрастание говорит о том, что резервный запас найден. Составим таблицу.

Резервный запас	Покрытый спрос	Математическое ожидание числа нехваток запасов в течение		Стоимость, рублей/год		
		цикла	года	резервного запаса 12×(резервный запас)	нехватки запасов 20×(матожидание)	общая
4	6	0	0	12·4=48	0	48+0=48
3	5	1·0,1=0,1	4,3·0,1= =0,43	12·3=36	20·0,43= =8,6	36+8,6= =44,6
2	4	2·0,1+ 1·0,1=0,3	4,3·0,3= 1,29	12·2=24	20·1,29= =25,8	25,8+24= =49,8

Второй столбец. Покрытый спрос = резервный запас + 2 (средний спрос за время поставки).

Третий столбец. Если покрытый спрос равен 6, то нехватки запасов не возникает. Если покрытый спрос равен 5, то возникает нехватка в 1 единицу при спросе 6. Вероятность спроса 6 равна 0,1 (см. предыдущую таблицу). Поэтому математическое ожидание нехватки $1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$. Если покрытый спрос равен 4, то возникает нехватка 2 при спросе 6 и 1 при спросе 5. Поэтому математическое ожидание нехватки $1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$. Это числа для одного цикла.

Число циклов за год — 4,3. Поэтому числа третьего столбца умножим на 4,3 и результаты запишем в четвертом столбце. Числа четвертого столбца умножим на 20 и результаты запишем в шестом столбце. Итоговая сумма в седьмом столбце сначала понизилась с 48 до 44,6, а затем начала повышаться. Поэтому целесообразно иметь резервный запас равный 3 (покрытый спрос 5) и нет необходимости исследовать резервный запас 1.

$$\text{Издержки } TC = 424{,}29 + 12 \cdot (\text{резервный запас}) +$$
$$+ 20 \cdot (\text{математическое ожидание}) =$$
$$424{,}29 + 44{,}6 = 468{,}89 \text{ руб./год}.$$

Таким образом, каждый раз, когда на складе остаются 5 единиц, надо заказывать 35 единиц.

Достижение минимального уровня обслуживания. Задается вероятность нехватки запасов в течение цикла. Тогда минимальный уровень обслуживания = 1 − вероятность нехватки запасов. По уровню обслуживания находим необходимый резервный запас.

Издержки TC = подача заказов + хранение основного запаса + хранение резервного запаса =

$$= \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2} + C_h \cdot (\text{резервный запас}).$$

Пример 49. Вернемся к примеру 47.

Разрешается 1 нехватка запасов в 5 циклов. Тогда вероятность нехватки запасов в течение цикла равна $1/5 = 0{,}2$. Минимальный уровень обслуживания равен:

$$1 - \text{вероятность нехватки запасов} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

$q = 35$ единиц, средний спрос в течение поставки = 2 (см. пример 47). Заполним таблицу.

Спрос	Вероятность	Кумулятивная вероятность
0	0,04	0,04
1	0,16	0,20
2	0,26	0,46
3	0,20	0,66
4	0,14	0,80
5	0,10	0,90
6	0,10	1,00

Порядок заполнения последнего столбца: двигаемся сверху вниз и вычисляем значения по правилу:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & + \end{tikzcd}$$

Для получения числа данной строки 3-го столбца к числу предыдущей строки 3-го столбца прибавляем число данной строки 2-го столбца: 0,04; $0{,}04 + 0{,}16 = 0{,}20$; $0{,}20 + 0{,}26 = 0{,}46$ и т. д. Это — кумулятивная (накопленная) вероятность. Для проверки: последнее число всегда равно 1. Смотрим, куда в последнем столбце попадает наш уровень обслуживания 0,8. Он соответствует спросу 4, то есть резервный запас $= 4 - 2 = 2$. Каждый раз, когда на складе остаются 4 единиц, надо заказывать 35 единиц. Издержки $TC = 424{,}29 + 12 \cdot (\text{резервный запас}) = 424{,}29 + 12 \cdot 2 = 448{,}29$ рублей/год.

З а м е ч а н и е. Методы, рассмотренные в примерах 47 и 48, можно применять и в случае, когда спрос подчиняется какому-либо распределению (например, нормальному или распределению Пуассона).

§ 12.9. Циклическая система повторного заказа

Пусть T — интервал повторного заказа.

Издержки $TC = \dfrac{C_0}{T} + \dfrac{C_h D T}{2} \to \min$. $T = \sqrt{\dfrac{2C_0}{C_h D}}$.

После этого надо задать уровень запасов, который определяет размер подаваемого заказа. Например, если взять за уровень 120 единиц, а на момент подачи заказа на складе 45 единиц, то надо заказывать $120 - 45 = 75$ единиц.

Пример 50. Для данных примера 47 найдем интервал повторного заказа.

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{12 \cdot 150}} \approx 0{,}24 \text{ года} = 0{,}24 \cdot 300 = 72 \text{ дня},$$

то есть заказы надо подавать через 72 дня.

В циклической системе можно также использовать один из двух критериев: достижение уровня обслуживания и достижение минимальной стоимости.

§ 12.10. Другие вопросы управления запасами

Целью построенной нами теории была минимизация издержек. Можно было строить теорию с целью максимизации прибыли.

Мы считали, что склад был безграничным. Но, скорее всего, надо вводить ограничение на площадь склада.

Запас у нас был однономенклатурным. В реальной жизни запас всегда многономенклатурный. Для упрощения ситуации здесь можно воспользоваться эффектом Парето: 20% товаров контролируют 80% стоимости запасов.

Построенные модели — очень упрощенные. Если мы хотим рассмотреть более сложные ситуации, то следует воспользоваться имитационным моделированием.

ГЛАВА 13. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим одно из направлений имитационного моделирования. Моделируется некоторая случайная величина. Сначала из опытных данных определяются частоты появления возможных значений этой величины. По частотам вычисляются вероятности, по вероятностям — кумулятивные вероятности. Зная кумулятивные вероятности, устанавливаем соответствие между случайными числами и значениями случайной величины. Берем несколько случайных чисел из специальной таблицы, восстанавливаем по ним значения случайной величины и определяем нужные нам характеристики.

Пример 50. Известно количество машин, приезжавших на мойку автомашин в течение последних 200 часов.

Число машин в час	Частота
4	20
5	30
6	50
7	60
8	40

Будем имитировать прибытие машин в течение 10 часов.

Число машин в час	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
4	20	0,10	0,10	00—09
5	30	0,15	0,25	10—24
6	50	0,25	0,50	25—49
7	60	0,30	0,80	50—79
8	40	0,20	1,00	80—99
Сумма	200			

Как заполнять 2-й и 3-й столбцы, было рассказано раньше. Так как у чисел в столбце «Кумулятивная вероятность» после запятой меняются 2 знака, то случайные числа группируем по два. Заполняется столбец сверху вниз. Берем числа после запятой из 1-й строки 4-го столбца. Это 10. Поэтому с 10 начнем 2-ю строку последнего столбца, а числом

10 – 1 = 09 завершим 1-ю строку. Начинаем же 1-ю строку с 00. Берем числа после запятой из 2-й строки 4-го столбца. Это 25. Поэтому с 25 начнем 3-ю строку последнего столбца, а числом 25 – 1 = 24 завершим 2-ю строку. И т. д.

Полученная таблица используется следующим образом. Берем подряд из любой строки или любого столбца случайные числа из таблицы случайных чисел. Определяем, в какой интервал нашей таблицы они попадают, и находим соответствующие значения в 1-м столбце.

Час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайное число	69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
Прибыло машин	7	4	6	6	7	8	6	5	7	5

69 попадает в интервал 50—79, что соответствует 7 машинам, 02 попадает в интервал 00—09, что соответствует 4 машинам, и т.д.

§ 13.1. Применение имитационных моделей в системах массового обслуживания

Пример 52.

Время, назначенное пациентам 20 мая	Предполагаемое время обслуживания, мин.
A 9.30	15
B 9.45	20
C 10.15	15
D 10.30	10
E 10.45	30
F 11.15	15
G 11.30	15
H 11.45	15

Из прошлого опыта известно:

Приход	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
на 20 мин раньше	0,20	0,20	00—19
на 10 мин раньше	0,10	0,30	20—29
вовремя	0,40	0,70	30—69
на 10 мин позже	0,25	0,95	70—94
на 20 мин позже	0,05	1,00	95—99

Обслуживание	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
на 20% времени меньше	0,15	0,15	00—14
по плану	0,50	0,65	15—64
на 20% времени больше	0,25	0,90	65—89
на 40% времени больше	0,10	1,00	90—99

Определим, когда 20 мая закончится прием пациентов.

Пациент	Приход		Обслуживание			
	Случайное число	Время	Случайное число	Время, мин.	Начало	Окончание
A 9.30	52	9.30	06	12	9.30	9.42
B 9.45	50	9.45	88	24	9.45	10.09
C 10.15	53	10.15	30	15	10.15	10.30
D 10.30	10	10.10	47	10	10.30	10.40
E 10.45	99	11.05	87	30	11.05	11.35
F 11.15	66	11.15	91	21	11.35	11.56
G 11.30	35	11.30	32	15	11.56	12.11
H 11.45	00	11.25	84	18	12.11	12.29

Предполагается, что пациенты обслуживаются в порядке записи. По случайным числам из 2-го и 4-го столбцов определяем приход пациентов и время обслуживания соответственно.

Пример 53. Начальный запас — 10 единиц, стоимость подачи заказов C_0 = 10 рублей/заказ, стоимость хранения C_h = 5 рублей/единицу в день, одна упущенная продажа C_b = 80 рублей. При наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на 10 единиц. Считаем, что все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня.

Спрос в день	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
0	15	0,05	0,05	00—04
1	30	0,10	0,15	05—14
2	60	0,20	0,35	15—34
3	120	0,40	0,75	35—74
4	45	0,15	0,90	75—89
5	30	0,10	1,00	90—99
Сумма	300			

Время выполнения заказа, дни	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
1	10	0,2	0,2	0—1
2	25	0,5	0,7	2—6
3	15	0,3	1,0	7—9
Сумма	50			

Во второй таблице сгруппируем случайные числа по одному, так как после запятой в столбце «Кумулятивная вероятность» меняется только 1 знак. Оценим общие издержки за день. Смоделируем работу склада за 10 дней.

День	Запас в начале дня	Случайное число	Спрос	Запас на конец дня	Повторный заказ да/нет	Случайное число	Время выполнения	Дефицит
1	10	06	1	9				
2	9	63	3	6				
3	6	57	3	3				
4	3	94	5	0	да	0	1	2
5	10	52	3	7				
6	7	69	3	4				
7	4	32	2	2	да	2	2	
8	2	30	2	0				
9	10	48	3	7				
10	7	88	4	3				
Сумма				41				2

Начальный запас — 10 единиц. Случайное число для спроса в 1-й день — 06, что соответствует по таблице спросу 1. Поэтому запас на конец 1-го дня равен 10 − 1 = 9. Это число и запишем в запас на начало 2-го дня.

Случайное число для спроса во 2-й день — 63, что соответствует по таблице спросу 3. Поэтому запас на конец 2-го дня равен 9 − 3 = 6. Это число и запишем в запас на начало 3-го дня.

Запас на начало 4-го дня — 3 $\leq$ 5. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число — 0, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 1 день, то есть заказ выполняется весь 4-й день, и в начале 5-го дня мы получим 10 единиц. Спрос в 4-й день был 5 единиц, а начальный запас 3. Поэтому 5 − 3 = 2 упущенные продажи запишем в столбец «Дефицит».

Запас на начало 7-го дня — 4 $\leq$ 5. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число — 2, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 2 дня, то есть заказ выполняется в течение 7-го и 8-го дней, и в начале 9-го дня мы получим 10 единиц.

Средний запас = суммарный конечный запас/общее число дней = 41/10 = 4,1 единицы/день.

Среднее число упущенных продаж = общее число упущенных продаж/общее число дней = 2/10 = 0,2 продажи/день.

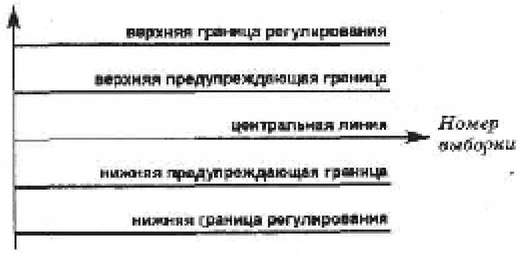
Среднее число заказов = общее число заказов/общее число дней = 2/10 = 0,2 заказа/день.

Общие издержки = подача заказов + хранение + штраф за дефицит = $C_0 \cdot$(среднее число заказов) + $C_h \cdot$(средний запас) + $C_b \cdot$(среднее число упущенных продаж) = $10 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 4{,}1 + 80 \cdot 0{,}2 = 38{,}5$ рублей/день.

ГЛАВА 14. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА

§ 14.1. Контрольные карты

Технологические процессы подвержены изменчивости. Как определить, что технологический процесс находится под контролем? Случайные или неслучайные изменения мы наблюдаем? Ответы на эти вопросы дают контрольные карты.



Алгоритм работы:

1. Через одинаковые промежутки времени производится выборка объемом n, и для нее рассчитывается интересующая нас характеристика. Результат наносится на карту.
2. Если произошел выход за границы регулирования, то следует немедленная остановка процесса.
3. Если мы находимся между предупреждающими границами, то процесс под контролем.
4. Если мы находимся между предупреждающей границей и границей регулирования, то надо немедленно произвести повторную выборку. Если и для повторной выборки мы вышли за предупреждающие границы, то следует немедленная остановка процесса.
5. Если отмеченные на карте точки образуют возрастающий или убывающий тренд (то есть тенденция падения или роста интересующей нас характеристики технологического процесса), то следует остановка процесса после заранее определенного числа проверок.

§ 14.2. Контрольные карты средних арифметических технологического процесса при известных α и σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и стандартным отклонением σ. Производится выборка объемом n.

Центральная линия: a. Предупреждающие границы (верхняя и нижняя): $a \pm 2\sigma / \sqrt{n}$. Границы регулирования (верхняя и нижняя): $a \pm 3\sigma / \sqrt{n}$. После этого можно применить алгоритм из § 14.1.

Пример 54. Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(3,1)$ с математическим ожиданием 3 и стандартным отклонением 1. Производится выборка объемом $n = 6$.

Центральная линия: 3. Предупреждающие границы: $a \pm 2\sigma / \sqrt{n} = 3 \pm 2 \cdot 1/\sqrt{6}$, то есть 2,18 (нижняя) и 3,82 (верхняя). Границы регулирования: $a \pm 3\sigma / \sqrt{n} = 3 \pm 3 \cdot 1/\sqrt{6}$, то есть 1,78 (нижняя) и 4,22 (верхняя).

§ 14.3. Контрольные карты изменчивости технологического процесса при известных α и σ

Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа d_n, r_w, r_A. Центральная линия: $d_n\sigma$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma$. Вычисляем значение размаха выборки R = (максимальное значение выборки − минимальное значение выборки) и наносим на карту. Так как R неотрицательно, то все границы только верхние.

Пример 55. Вернемся к примеру 54.

Для выборки объемом $n = 6$ по специальной таблице определяются числа $d_n = 2{,}534$, $r_w = 4{,}35$, $r_A = 5{,}6$. Найдем границы для размаха.

Центральная линия: $d_n\sigma = 2{,}534 \cdot 1 = 2{,}534$. Верхняя предупреждающая граница: $r_w\sigma = 4{,}35 \cdot 1 = 4{,}35$. Верхняя граница регулирования: $r_A\sigma = 5{,}6 \cdot 1 = 5{,}6$. Теперь можно применить алгоритм из § 14.1 с поправкой, что все границы только верхние.

§ 14.4. Контрольные карты количественных признаков при неизвестных α и σ

Технологический процесс подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma)$, но a и σ неизвестны. В этом случае строятся только границы регулирования. Производятся m выборок объемом n. Для каждой из них вычисляются средняя $\overline{X}_i$ и размах R_i, $i = 1, ..., m$.

По полученным данным находим $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + ... + \overline{X}_m)/m$ и $\overline{R} = (R_1 + ... + R_m)/m$. Для выборки объемом n по специальной таблице определяются числа A, B, C.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}}$. Центральная линия для размаха: $\overline{R}$. Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R}$. Нижняя и верхняя границы регулирования для размаха: $B\overline{R}$ и $C\overline{R}$ соответственно. Теперь можно применить алгоритм из § 14.1.

Пример 56. Каждые 4 часа производится выборка объемом $n = 7$.

Номер выборки	1	2	3	4	5	6	7
Средняя	63,5	63,6	63,7	63,9	63,4	63	63,2
Размах	2	1	1,7	0,9	1,2	1,6	1,8

Номер выборки	8	9	10	11	12	13	Сумма
Средняя	63,3	63,7	63,5	63,3	63,3	63,6	825
Размах	1,3	1,6	1,3	1,8	1	1,8	19

Найдем границы регулирования и центральные линии для средних и размаха.

Всего $m = 13$ выборок.

Центральная линия для средней: $\overline{\overline{X}} = (\overline{X}_1 + ... + \overline{X}_m)/m = 825/13 \approx 63,5$.

Центральная линия для размаха: $\overline{R} = (R_1 + ... + R_m)/m = 19/13 \approx 1,5$.

$n = 7$. По специальной таблице определяются числа $A = 0,42$, $B = 0,08$, $C = 1,92$.

Границы регулирования для средней: $\overline{\overline{X}} \pm A\overline{R} = 63,5 \pm 0,42 \cdot 1,5$, то есть 62,87 (нижняя) и 64,13 (верхняя). Нижняя граница регулирования для размаха: $B\overline{R} = 0,08 \cdot 1,5 = 0,12$. Верхняя граница регулирования для размаха: $C\overline{R} = 1,92 \cdot 1,5 = 2,88$.

§ 14.5. Контрольные карты качественных признаков

Часто нас интересует не конкретный количественный параметр, а наличие или отсутствие дефектов у изделия. В этом случае используют контрольные карты качественных признаков. Они бывают двух типов: p-карты (используется удельный вес бракованных изделий) и c-карты (используется число бракованных изделий в выборке).

p-карты. Аппроксимация нормальным распределением. Производятся выборки объемом n. Оценивается доля бракованных изделий в генеральной совокупности. p = число бракованных изделий во всех выборках/общее число обследованных изделий), $q = 1 - p$. Используется нормальное распределение, если $n \geq 30$, $np > 5$, $nq > 5$. По специальным формулам находим границы. Теперь можно применить алгоритм из § 14.1

Пример 57. Доля бракованных изделий $p = 0,011$. Производились выборки объема $n = 1000$ единиц.

Определим границы. $n = 1000 > 30$, $np = 1000 \cdot 0,011 = 11 > 5$, $q = 1 - p = 1 - 0,011 = 0,989$, $nq = 1000 \cdot 0,989 = 989 > 5$. Все условия выполнены. Используем нормальное распределение.

Центральная линия: $p = 0,011$.

Предупреждающие границы: $p \pm 2\sqrt{pq/n} = 0,011 \pm 2\sqrt{0,011 \cdot 0,989/1000}$, то есть 0,004 (нижняя) и 0,018 (верхняя).

Границы регулирования: $p \pm 3\sqrt{pq/n} = 0{,}011 \pm$ $\pm\, 3\sqrt{0{,}011 \cdot 0{,}989/1000}$, то есть 0,001 (нижняя) и 0,021 (верхняя).

р-карты. Аппроксимация распределением Пуассона. Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то вычисления надо произвести заново с использованием распределения Пуассона.

Также распределение Пуассона используется при выполнении условий $n \geq 30$, $np < 5$, $p < 0{,}1$.

Пример 58. Доля бракованных изделий $p = 0{,}025$. Производились выборки объема $n = 200$ единиц.

Нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась равной $-0{,}008$. Воспользуемся распределением Пуассона.

$\lambda = np = 200 \cdot 0{,}025 = 5$. Вероятность того, что в выборке k дефектов равна $p(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = 5^k e^{-5}/5!$. Это и есть распределение Пуассона. Здесь $k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$ (произведение натуральных чисел от 1 до k).

Значения функции $p(k)$ и $k!$ можно посчитать на калькуляторе или воспользоваться Excel (мастер функций): $p(k)$ = ПУАССОН(k; λ; 0) и $k!$ = ПЕРЕСТ (k; k).

Заполним таблицу.

Верхняя предупреждающая граница соответствует кумулятивной вероятности 0,975, а верхняя граница регулирования соответствует кумулятивной вероятности 0,999. Мы последовательно перебираем число возможных бракованных изделий в выборке, начиная с нуля.

Кумулятивную вероятность можно вычислять обычным способом, но лучше воспользоваться Excel (ведь нас интересуют только 1-й и 4-й столбцы), а именно, ПУАССОН(k; λ; 1). Как только результат в 4-м столбце превысит 0,999, вычисления прекращаем.

Если в выборке больше 10 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю предупреждающую границу. Если в выборке больше 12 бракованных изделий, то мы выходим за верхнюю границу регулирования. Именно при этих значениях были превышены значения 0,975 и 0,999 соответственно.

Число бракованных изделий в выборке, k	Доля бракованных изделий, k/n = k/200	Вероятность p(k) = ПУАССОН(k; λ; 0)	Кумулятивная вероятность ПУАССОН (k; λ; 1)
Нижняя граница регулирования 0,001			
0	0	0,0067	0,0067
Нижняя предупреждающая граница 0,025			
1	0,005	0,0337	0,0404
2	0,01	0,0843	0,1247
3	0,015	0,1405	0,2652
4	0,02	0,1756	0,4408
5	0,025	0,1756	0,6162
6	0,03	0,1463	0,7623
7	0,035	0,1045	0,8673
8	0,04	0,0653	0,9326
9	0,045	0,0336	0,9689
Верхняя предупреждающая граница 0,975			
10	0,05	0,0181	0,9870
11	0,055	0,0082	0,9953
12	0,06	0,0034	0,9986
Верхняя граница регулирования 0,999			
13	0,065	0,0013	0,9999971

с-карты. Бракованное изделие может содержать более одного дефекта. Для контроля числа дефектов на единицу продукции используются c-карты.

Пример 59. Выборка из 100 предметов выявила 2000 дефектов.

Среднее число дефектов на единицу продукции c = общее число дефектов/общее число обследованных изделий = $= 2000/100 = 2$. Граница регулирования: $c \pm 3\sqrt{c} = 2 \pm 3\sqrt{2}$. Нас интересует верхняя граница регулирования 6,2.

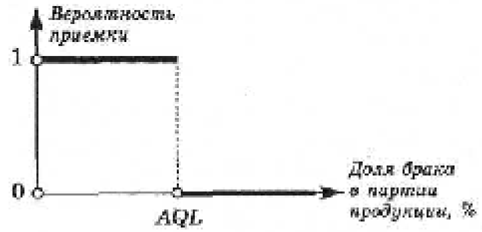
§ 14.6. Статистический приемочный контроль качества качественных признаков

Очень часто приходится проверять качество продукции, закупаемой у внешних поставщиков. Можно применить схему одноэтапной выборки: 1) для проверки производится выборка объемом 15 единиц; 2) продукция принимается, если в выборке не более 1 бракованного изделия.

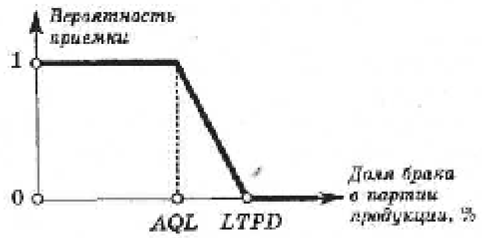
Схема двухэтапной выборки:

1) для проверки производится выборка объемом 20 единиц; 2) продукция принимается, если в выборке не обнаружено бракованных изделий; 3) продукция отклоняется, если в выборке обнаружено более 2 бракованных изделий; 4) если в выборке обнаружено 1 или 2 бракованных изделия, то производится повторная выборка объемом 20 единиц; 5) если в повторной выборке обнаружено не более 1 бракованного изделия, то продукция принимается (иначе отклоняется).

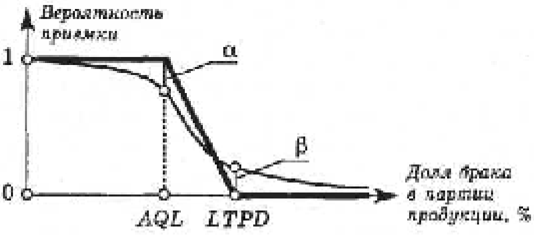
Возможен и другой подход. Потребитель задает допустимый уровень качества *AQL*. Если доля брака в партии продукции не превышает *AQL*, то продукцию принимаем (иначе отклоняем). Получается кривая оперативной характеристики.



На практике таких идеальных схем не существует. Поэтому потребитель задает 2 числа: *AQL* и допустимый процент бракованных изделий в партии *LTPD*. Если процент бракованных изделий в партии не превышает *AQL*, то продукцию принимаем. Если процент бракованных изделий в партии превышает *LTPD*, то продукцию отклоняем. Если процент бракованных изделий в партии попадает в промежуток от AQL до LTPD, то какие-то партии принимаются, какие-то нет.



К сожалению, на практике эта схема искажается. *Риск производителя* α — это вероятность того, что схема забракует приемлемую продукцию. *Риск потребителя* β — это вероятность того, что схема приведет к принятию неприемлемой для потребителя продукции.



Если α и β заданы заранее, построить схему приемки очень сложно.

Пример 60. Из партии в 200 единиц производится выборка $n = 5$ единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия в 200 единиц будет отвергнута.

Построим кривую оперативной характеристики.

Число бракованных изделий подчиняется биномиальному распределению. Вероятность k «успехов» в n испытаниях $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = (n!)/(k! \times (n-k)!)$, p — вероятность «успеха» в одном испытании, $q = 1 - p$.

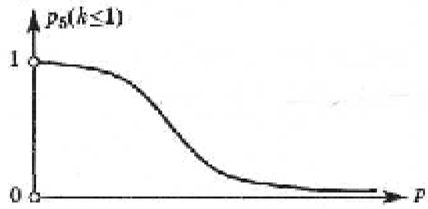
Можно воспользоваться Excel (мастер функций): $p_n(k)$ = БИНОМРАСП(k; n; p; 0). В нашем случае $n = 5$, то есть определяем $p_5(k)$. Мы примем партию продукции, если число бракованных изделий не превысит 1, то есть $k \le 1$. Поэтому $p_5(k \le 1) = p_5(0) + p_5(1)$.

В Excel $p_5(k \le 1)$ = БИНОМРАСП(1; 5; p; 1). Будем задавать различные значения p и вычислять $p_5(k \le 1)$.

p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
$p_5(k \le 1)$	0,999	0,9774	0,9186	0,8352	0,7373	0,6328	0,5283	0,337

Построим график. Это и есть кривая оперативной характеристики.

Если доля брака 0,01, то вероятность приемки 0,999; если доля брака 0,05, то вероятность приемки 0,9774 и т. д.



Пример 61. Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: $AQL = 0{,}01$, $LTPD = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}01$. Если в выборке $n = 1000$ единиц будет больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется.

Выясним, удовлетворяет ли эта схема заявленным параметрам.

$n = 1000$. Вероятность приемки партии продукции равна: p_{1000}(число бракованных изделий $k \le 2$) $= p_{1000}(k \le 2) =$ = БИНОМРАСП(2; 1000; p; 1). Тогда вероятность отказа в приемке равна $1 - p_{1000}(k \le 2) = 1 -$ БИНОМРАСП(2; 1000; p; 1).

Риск производителя α — это вероятность отказа в приемке партии продукции при $p = AQL$, то есть в нашей схеме $\alpha = 1 -$ БИНОМРАСП(2; 1000; AQL; 1) $= 1 -$ БИНОМРАСП(2; 1000; 0,01; 1) $\approx 0{,}0794$, что превышает объявленные 0,05.

Риск потребителя β — это вероятность приемки партии продукции при $p = LTPD$, то есть в нашей схеме $\beta =$ БИНОМРАСП(2; 1000; $LTPD$; 1) = БИНОМРАСП(2; 1000; 0,05; 1) $\approx 0{,}1183$, что превышает объявленные 0,01.

И с точки зрения производителя, и с точки зрения потребителя выбранная схема плоха и требует замены.

ГЛАВА 15. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

§ 15.1. Основные понятия теории игр

В практике часто встречаются конфликтные ситуации. *Игра* — это упрощенная модель конфликта. В отличие от конфликта игра ведется по четким правилам. Для решения конфликтных ситуаций разработан специальный аппарат — *теория игр*. Стороны, участвующие в конфликте, называются *игроками*. Для задания правил игры надо определить:

1) варианты действий игроков;

2) объем информации каждого игрока о поведении противника;

3) выигрыш (исход конфликта), к которому приводит совокупность действий игроков.

Игра, в которой участвуют два игрока A и B, называется *парной*. Если же количество игроков больше двух, то это игра — *множественная*. Мы будем рассматривать только парные игры.

Игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, называется игрой с нулевой суммой (*антагонистической игрой*). С рассмотрения антагонистических игр мы и начнем.

Ходы игроков бывают *личные* (сознательный выбор) и *случайные* (случайный выбор). Совокупность правил, определяющих выбор действий игрока при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации, называется *стратегией* игрока. В конечной игре у каждого игрока конечное число стратегий, в бесконечной — бесконечное.

Решить антагонистическую игру — значит для каждого игрока указать стратегии, удовлетворяющие условию оптимальности, то есть игрок A должен получать максимальный выигрыш, когда игрок B придерживается своей стратегии, а игрок B должен получать минимальный проигрыш, когда игрок A придерживается своей стратегии. Оптимальные стратегии характеризуются устойчивостью, то есть ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

В *игре с полной информацией* перед каждым ходом каждый игрок знает все предшествующие ходы и выигрыши. В *кооперативных играх* допускается возможность предварительных переговоров между игроками. Мы будем рассматривать некооперативные игры.

§ 15.2. Формализация игры. Матрица игры

Пусть у игрока A есть m возможных ходов (стратегий) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а у игрока B есть n возможных ходов (стратегий) $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Если игрок A сделает ход A_i, а игрок B сделает ход B_j, то эти ходы A_i и B_j однозначно определяют исходы игры a_{ij} для игрока A и b_{ij} для игрока B. Для удобства эти числа записывают в виде платежных матриц размера $m \times n$ (как всегда, первый индекс — номер строки, второй — номер столбца, то есть стратегии A указаны по строкам, стратегии B — по столбцам):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = B.$$

Вообще говоря, у каждого из игроков A, B своя матрица. Это так называемая *биматричная игра*. Мы же сначала ограничимся случаем, когда интересы сторон A и B противоположны (выигрыш игрока A является и проигрышем игрока B), то есть на матрицы A и B налагается условие: $A + B = 0$ (или $A = -B$, $a_{ij} = -b_{ij}$). В этом случае можно ограничиться только одной матрицей — матрицей игрока A. Такие игры назовем *матричными*.

Итак, мы будем рассматривать матрицу A игры, в которой ходы игрока A, как уже сказано, расположены по строкам, ходы игрока B расположены по столбцам, а в самой матрице записаны выигрыши игрока A при соответствующих ходах игроков A, B (отрицательный выигрыш — это проигрыш).

Пример 62. A и B играют в следующую игру. Игрок A записывает одно из чисел 1, 2, 3, а игрок B записывает одно из чисел 1, 2. Если сумма написанных чисел четная, то это выигрыш игрока A. Если сумма написанных чисел нечетная, то это проигрыш игрока A.

Найдем матрицу игры. Имеем $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$. Если A и B напишут по 1, то сумма $1 + 1 = 2$ — это выигрыш игрока A. Если A и B напишут 1 и 2 соответственно, то $1 + 2 = 3$ — это проигрыш игрока A, то есть его выигрыш равен -3. И т. д. Получаем матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = A.$$

§ 15.3. Оптимальные стратегии

С матрицей игры $A = (a_{ij})$ связано несколько понятий. *Нижняя цена игры* $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ (сначала находим минимум в каждой строке, а потом из полученных минимумов находим максимум). Это — гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B.

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ (сначала находим максимум в каждом столбце, а потом из полученных максимумов находим минимум). Это гарантированный проигрыш игрока B при любой стратегии игрока A.

Очевидно, $\alpha \le \beta$. В случае $\alpha = \beta$ говорят просто о *цене игры* $v = \alpha = \beta$. Соответствующие цене игры стратегии называют *оптимальными*, а саму игру именуют *игрой с седловой точкой*. Оптимальные стратегии характеризуются устойчивостью.

Пример 63. Матрица игры

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Определим, существует ли седловая точка. Находим минимум в каждой строке. Это 3, 4, 2 соответственно. Из полученных минимумов находим максимум: $\alpha = \max(3, 4, 2) = 4$. Находим максимум в каждом столбце. Это 6, 7, 4 соответственно. Из полученных максимумов находим минимум: $\beta = \min(6, 7, 4) = 4$. $\alpha = \beta = 4$. Поэтому цена игры $v = 4$. Ей соответствуют стратегии A_2 и B_3 (так как $a_{23} = 4$). В игре может быть несколько седловых точек.

§ 15.4. Смешанные стратегии

В случае $\alpha < \beta$ седловой точки не существует. В этом случае для каждого игрока мы должны указать вектор частот, с которыми следует применять ту или иную стратегию. Для игрока A это $P = (p_1, \ldots, p_m)$, где $p_i \ge 0$, $p_1 + \ldots + p_m = 1$, $p_i \ge 0$ — частота (вероятность) применения стратегии A_i. Для игрока B это $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, где $q_j \ge 0$, $q_1 + \ldots + q_n = 1$, $q_j \ge 0$ — частота (вероятность) применения стратегии B_j. Это смешанные стратегии.

Средний выигрыш игрока A равен:

$$H_A(P, Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Если частота применения стратегии отлична от нуля, то такая стратегия называется *активной*.

Стратегии P^0 и Q^0 называются *оптимальными смешанными* стратегиями, если $H_A(P, Q^0) \le H_A(P^0, Q^0) \le H_A(P^0, Q)$. В этом случае $H_A(P^0, Q^0)$ называется *ценой игры* и обозначается через v ($\alpha \le v \le \beta$). Первое из неравенств означает, что отклонение игрока A от своей оптимальной смешанной стратегии при условии, что игрок B придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, приводит к уменьшению среднего выигрыша игрока A. Второе из неравенств означает, что отклонение игрока B от своей оптимальной смешанной стратегии при условии, что игрок A придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, приводит к увеличению среднего выигрыша игрока A.

Теорема фон Неймана: Каждая конечная матричная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

§ 15.5. Дублирование и доминирование стратегий

Если матрица игры содержит несколько одинаковых строк (столбцов), то из них оставляем только одну строку (один столбец), а остальные строки (столбцы) отбрасываем. Отброшенным стратегиям припишем нулевые вероятности. Это — *дублирование стратегий.*

Если i-я строка поэлементно не меньше ($\geq$) j-й строки, то говорят, что i-я строка доминирует над j-й строкой. Поэтому игрок A не использует j-ю стратегию, так как его выигрыш при i-й стратегии не меньше, чем при j-й стратегии, вне зависимости от того, как играет игрок B.

Аналогично если i-й столбец поэлементно не меньше ($\geq$) j-го столбца, то говорят, что j-й столбец доминирует над i-м столбцом. Поэтому игрок B не использует i-ю стратегию, так как его проигрыш (равный выигрышу игрока A) при j-й стратегии не больше ($\leq$), чем при i-й стратегии, вне зависимости от того, как играет игрок A. Это — *доминирование стратегий.*

Стратегии, над которыми доминируют другие стратегии, надо отбросить и приписать им нулевые вероятности. На цене игры это никак не скажется. Зато размер матрицы игры понизится. С этого и нужно начинать решение игры.

Пример 64. Матрица игры

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Упростим игру.

1-я и 4-я строки равны. Поэтому отбросим 4-ю строку. Вероятность $p_4 = 0$. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

2-я строка доминирует над 3-й строкой ($6 > 3$, $5 > 4$, $8 = 8$, $7 > 6$). Поэтому отбросим 3-ю строку. Вероятность $p_3 = 0$. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

2-й столбей доминирует над 3-м столбцом ($9 = 9$, $5 < 8$). Поэтому отбросим 3-й столбец. Вероятность $q_3 = 0$. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Строки между собой не сравнимы ($8 > 6$, $4 < 7$), столбцы тоже ($8 < 9$, $6 > 5$; $8 > 4$, $6 < 7$; $9 > 4$, $5 < 7$). Дальнейшее упрощение невозможно. Мы свели игру 4×4 к игре 2×3.

З а м е ч а н и е. Если игра $m\times n$ имеет седловую точку, то после упрощений мы получим игру 1×1.

§ 15.6. Решение игры 2x2

Пример 65. Найдем решение матричной игры

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Припишем строкам вероятности p и $1-p$ соответственно:

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножив столбец $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$ поэлементно на 1-й столбец и сложив произведения, получим линейную зависимость $w(p) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$. Это средний выигрыш игрока A при применении игроком B 1-й стратегии.

Умножив столбец $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$ поэлементно на 2-й столбец и сложив произведения, получим линейную зависимость $w(p) = (-1) \cdot p + 1 \cdot (1-p) = -2p + 1$. Это средний выигрыш игрока A при применении игроком B 2-й стратегии.

Приравняем полученные зависимости: $2p - 1 = -2p + 1$. Отсюда $p = 1/2$, $1 - p = 1/2$, то есть оптимальная смешанная стратегия игрока A — это $P = (1/2, 1/2)$ (каждую из стратегий надо применять с частотой 1/2). Подставив $p = 1/2$ в любую из зависимостей $w(p)$, найдем цену игры $v = w(1/2) = 0$.

Теперь припишем столбцам вероятности q и $1-q$ соответственно:

$$\begin{array}{cc} q & 1-q \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножив строку $(q, 1-q)$ на 1-ю строку и сложив произведения, получим линейную зависимость $w(q) = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1-q) = 2q - 1$. Это средний выигрыш игрока A (равный проигрышу игрока B) при применении игроком A 1-й стратегии.

Умножив строку $(q, 1-q)$ на 2-ю строку и сложив произведения, получим линейную зависимость $w(q) = (-1) \cdot q + 1 \cdot (1-q) = -2q + 1$. Это средний выигрыш игрока A (равный проигрышу игрока B) при применении игроком A 2-й стратегии.

Приравняем полученные зависимости: $2q - 1 = -2q + 1$. Отсюда $q = 1/2$, $1 - q = 1/2$, то есть оптимальная смешанная стратегия игрока B — это $Q = (1/2, 1/2)$ (каждую из стратегий надо применять с частотой 1/2).

Решение о конкретном выборе одной из своих стратегий каждый из игроков может принимать с помощью подбрасывания монеты.

§ 15.7. Решение игры 2xn

Приписав 1-й строке вероятность p, а 2-й строке — вероятность $1-p$, аналогично § 15.6, получим n линейных зависимостей. Изобразим их графики. Возьмем нижнюю огибающую, то есть такую ломаную из отрезков построенных прямых, что вся картинка лежит выше этой ломаной. Точка с наибольшей координатой w дает нам p (1-я координата) и цену игры v (2-я координата). Пусть это точка пересечения i-й и j-й прямых. Тогда припишем i-му столбцу вероятность q, а j-му столбцу — вероятность $1-q$. Всем остальным столбцам припишем нулевые вероятности. Находим q и $1-q$.

Пример 66. Найдем решение матричной игры

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

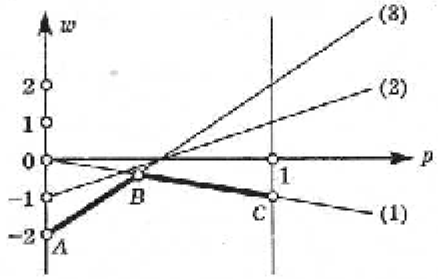
1-й столбец доминирует над 3-м столбцом. Поэтому отбросим 3-й столбец. Вероятность $q_3 = 0$. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Припишем строкам вероятности p и $1 - p$ соответственно:

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Получим линейные зависимости $w(p) = (-1) \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = -p$ (1), $w(p) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1$ (2), $w(p) = 2 \cdot p + (-2) \cdot (1 - p) = 4p - 2$ (3). Изобразим их графики. $0 \le p \le 1$.



Возьмем нижнюю огибающую. Это ломаная ABC. Точка B – это точка с наибольшей второй координатой на этой огибающей. Точка B – это точка пересечения прямых (1) и (3). Поэтому припишем 1-му столбцу вероятность q, а 3-му столбцу — вероятность $1 - q$. Всем остальным столбцам припишем нулевые вероятности. Найдем координаты точки B.

$-p = 4p - 2$, $p = 2/5$ (вероятность применения игроком A своей 1-й стратегии), $1 - p = 3/5$ (вероятность применения игроком A своей 2-й стратегии).

Все цифры игрок A делит на полноценные «пятерки». Первые две цифры относятся к 1-й стратегии, а три последние — ко 2-й стратегии: 1-я стратегия (1, 2, 6, 7) и 2-я стратегия (3, 4, 5, 8, 9, 0). Перед своим очередным ходом игрок A смотрит в таблицу случайных чисел. Если «выпадает» 1, 2, 6, 7, то он играет 1-ю стратегию; если «выпадает» 3, 4, 5, 8, 9, 0, то он играет 2-ю стратегию. Цена игры $v = w(2/5) = -2/5$.

Теперь найдем ненулевые частоты выбора стратегий игроком B, используя матрицу:

$$\begin{array}{ccc} q & 0 & 1-q \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Имеем: $(-1) \cdot q + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (1 - q) = 0 \cdot q + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (1 - q)$, то есть $q = 4/5$, $1 - q = 1/5$. Для игрока A $P = (2/5,\ 3/5)$, для игрока B $Q = (4/5,\ 0,\ 0,\ 1/5)$ (мы исключали 3-й столбец).

§ 15.8. Решение игры mx2

Приписав 1-му столбцу вероятность q, а 2-му столбцу — вероятность $1 - q$, аналогично § 15.6 получим m линейных зависимостей. Изобразим их графики. Возьмем верхнюю огибающую, то есть такую ломаную из отрезков построенных прямых, что вся картинка лежит ниже этой ломаной. Точка с наименьшей координатой w дает нам q (1-я координата) и цену игры v (2-я координата). Пусть это точка пересечения i-й и j-й прямых. Тогда припишем i-й строке вероятность p, а j-й строке — вероятность $1 - p$. Всем остальным строкам припишем нулевые вероятности. Находим p и $1 - p$.

Пример 67. Найдем решение матричной игры

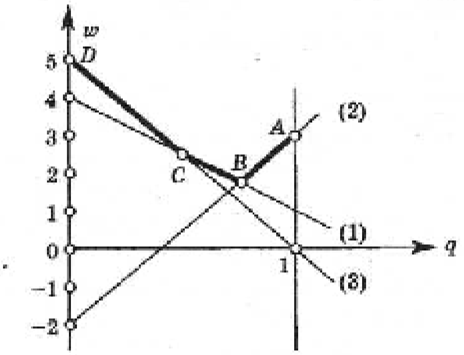
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Припишем столбцам вероятности q и $1 - q$ соответственно:

$$\begin{array}{c} \quad q \quad 1-q \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Получим линейные зависимости $w(q) = 1 \cdot q + 4 \cdot (1 - q) = 4 - 3q$ (1), $w(q) = 3 \cdot q + (-2) \cdot (1 - q) = 5q - 2$ (2), $w(q) = 0 \cdot q + 5 \cdot (1 - q) = 5 - 5q$ (3). Изобразим их графики. $0 \le q \le 1$.

Возьмем верхнюю огибающую. Это ломаная $ABCD$. Точка B — это точка с наименьшей второй координатой на



этой огибающей. Точка B — это точка пересечения прямых (1) и (2). Поэтому припишем 1-й строке вероятность p, а 2-й строке — вероятность $1 - p$. Всем остальным строкам припишем нулевые вероятности. Найдем координаты точки B.

$4 - 3q = 5q - 2$, $q = 3/4$ (вероятность применения игроком B своей 1-й стратегии), $1 - q = 1/4$ (вероятность применения игроком B своей 2-й стратегии). Все цифры игрок B делит на полноценные «четверки». Первые три цифры относятся к 1-й стратегии, а последняя — ко 2-й стратегии: 1-я стратегия (1, 2, 3, 5, 6, 7) и 2-я стратегия (4, 8). Перед своим очередным ходом игрок A смотрит в таблицу случайных чисел. Если «выпадает» 1, 2, 3, 5, 6, 7, то он играет 1-ю стратегию; если «выпадает» 4, 8, то он играет 2-ю стратегию. Цена игры $v = w(3/4) = 7/4$. Цифры 0 и 9 игнорируются.

Найдем решение для игрока A:

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \\ 0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$1 \cdot p + 3 \cdot (1 - p) + 0 \cdot 0 = 4 \cdot p + (-2) \cdot (1 - p) + 5 \cdot 0$, то есть $p = 5/8$, $1 - p = 3/8$. Для игрока A $P = (5/8, 3/8, 0)$, для игрока B $Q = (3/4, 1/4)$.

§ 15.9. Приближенный метод решения матричных игр

Если точное решение матричной игры оказывается громоздким, можно ограничиться приближенным решением. В основе этого метода лежит предположение, что игроки выбирают свои стратегии в очередной партии, руководствуясь накапливающимся опытом уже сыгранных партий. Достоинство метода — его простота.

Пример 68. Найдем приближенное решение матричной игры, смоделировав 10 партий

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Чтобы избавиться от дробей, умножим все элементы матрицы на 10. От этого оптимальные стратегии игроков не изменятся, а цена игры тоже умножится на 10. Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Составляем таблицу.

Номер партии	Игрок А				Игрок В				Приближенные значения цены		
	Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока В			Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока А			α	β	$\nu = (\alpha + \beta)/2$
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	A_1	7	9	7	B_1	7	9	7	7	9	8
2	A_2	16	16	15	B_3	14	17	15	15/2	17/2	8
3	A_2	25	23	23	B_2	23	24	23	23/3	24/3	47/6
4	A_2	34	30	31	B_2	32	31	31	30/4	32/4	62/8
5	A_1	41	39	38	B_3	39	39	39	38/5	39/5	77/10
6	A_1	48	48	45	B_3	46	47	47	45/6	47/6	92/12
7	A_2	57	55	53	B_3	53	55	55	53/7	55/7	108/14
8	A_2	66	62	61	B_3	61	63	63	61/8	63/8	124/16
9	A_2	75	69	69	B_2	70	70	71	69/9	71/9	140/18
10	A_3	82	77	77	B_2	79	77	79	7,7	7,9	7,8

Поясним, как заполняется таблица. Игрок A начинает со своей 1-й стратегии. Соответствующие выигрыши (1-я строка матрицы) запишем в столбцы B_1, B_2, B_3 и определим среди них минимальный: min (7, 9, 7) = 7 (в случае, когда их несколько, берем тот, что расположен левее). Этот минимум обведем. Он соответствует стратегии B_1. Поэтому соответствующие выигрыши (1-й столбец матрицы) запишем в столбцы A_1, A_2, A_3 и определим среди них максимальный: max (7, 9, 7) = 9 (в случае, когда их несколько, берем тот, что расположен левее). Этот максимум обведем. Он соответствует стратегии A_2. Поэтому во 2-й партии игрок A ответит стратегией A_2. Соответствующие выигрыши (2-я строка) надо прибавить к числам в столбцах B_1, B_2, B_3 предыдущей строки игрока A и определить минимальное среди полученных: min (16, 16, 15) = 15, что соответствует стратегии B_3. Поэтому соответствующие выигрыши (3-й столбец) надо прибавить к числам в столбцах A_1, A_2, A_3 предыдущей строки игрока B и определить среди них максимальный: max (14, 17, 15) = 17, что соответствует стратегии A_2. И т. д.

Приближенное значение нижней цены игры в каждой партии α = (обведенное число в столбцах A_1, A_2, A_3)/(номер партии).

Приближенное значение верхней цены игры в каждой партии β = (обведенное число в столбцах B_1, B_2, B_3)/(номер партии).

После 10 партий $v \approx 7{,}8$. Поэтому для исходной матрицы $v \approx 7{,}8/10 = 0{,}78$.

$p_i \approx$ (число использования стратегии A_i)/(число партий).

$q_j \approx$ (число использования стратегии B_j)/(число партий).

Число использования стратегии A_i = число отмеченных элементов в столбце A_i.

Число использования стратегии B_j = число отмеченных элементов в столбце B_j.

После 10 партий $p_1 \approx 3/10$, $p_2 \approx 6/10$, $p_3 \approx 1/10$ (за 10 партий игрок A 3 раза воспользовался стратегией A_1, 6 раз — стратегией A_2, 1 раз — стратегией A_3).

$q_1 \approx 1/10$, $q_2 \approx 4/10$, $q_3 \approx 5/10$.

ГЛАВА 16. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Гораздо чаще встречается ситуация, когда интересы игроков A и B не являются противоположными ($B \neq -A$). В этом случае у каждого игрока будет своя платёжная матрица. Поэтому игра называется биматричной. Мы ограничимся биматричными играми 2×2, то есть у каждого игрока всего 2 стратегии: A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Матрицы игры

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} = A, \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array} = B.$$

Припишем стратегиям A_1, A_2 (B_1, B_2) вероятности p, $1 - p$ (q, $1 - q$) соответственно.

$$\begin{array}{c} \\ p \\ 1-p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ p \\ 1-p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Тогда средний выигрыш игрока A равен:

$$H_A(p, q) = a_{11}pq + a_{12}p \cdot (1 - q) + a_{21}q \cdot (1 - p) + \\ + a_{22} \cdot (1 - p) \cdot (1 - q).$$

Средний выигрыш игрока B равен:

$$H_B(p, q) = b_{11}pq + b_{12}p \cdot (1 - q) + b_{21}q \cdot (1 - p) + \\ + b_{22} \cdot (1 - p) \cdot (1 - q).$$

Пара чисел (p_0, q_0) определяет равновесную ситуацию, если $H_A(p, q_0) \leq H_A(p_0, q_0)$, $H_B(p_0, q) \leq H_B(p_0, q_0)$ для всех $0 \leq p, q \leq 1$, то есть отклонение от оптимальной стратегии одного из игроков при условии, что другой игрок придерживается своей оптимальной стратегии, уменьшает средний выигрыш отклонившегося игрока.

Теорема Нэша: Любая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Покажем, как найти равновесные ситуации. По матрице A находим числа $C = a_{11} + a_{22} - (a_{21} + a_{12})$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$ и решаем систему

$$\begin{cases} (p - 1)(Cq - \alpha) \geq 0 \\ p(Cq - \alpha) \geq 0. \end{cases}$$

По матрице B находим числа $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12})$, $\beta = b_{22} - b_{21}$ и решаем систему

$$\begin{cases} (q - 1)(Dp - \beta) \geq 0 \\ q(Dp - \beta) \geq 0. \end{cases}$$

Изобразим обе полученные кривые в координатах (p, q). Точки пересечения этих кривых, лежащие в квадрате $0 \leq p, q \leq 1$, и определяют равновесные ситуации. Для каждой равновесной ситуации находят средние выигрыши $H_A(p, q)$ и $H_B(p, q)$.

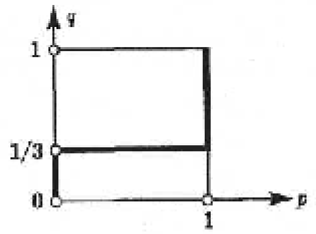
Пример 69. Решим 2×2 биматричную игру

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

$C = 6 + 4 - (2 + 2) = 6$, $\alpha = 4 - 2 = 2$. Решаем систему

$$\begin{cases} (p - 1)(6q - 2) \geq 0 \\ p(6q - 2) \geq 0. \end{cases}$$

Случай 1. $p = 1$. Тогда $q \geq 1/3$.
Случай 2. $p = 0$. Тогда $q \leq 1/3$.
Случай 3. $0 < p < 1$. Тогда $q = 1/3$.
Наглядно это решение представлено на рисунке.

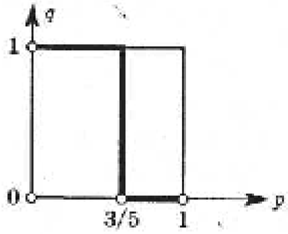


$D = 2 + 2 - (8 + 6) = -10$, $\beta = 2 - 8 = -6$. Решаем систему

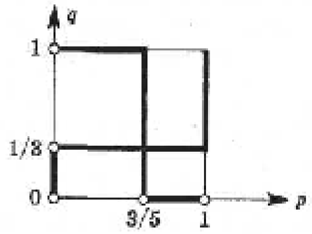
$$\begin{cases} (q - 1)(-10p + 6) \geq 0 \\ q(-10p + 6) \geq 0. \end{cases}$$

Случай 1. $q = 1$. Тогда $p \leq 3/5$.
Случай 2. $q = 0$. Тогда $p \geq 3/5$.
Случай 3. $0 < q < 1$. Тогда $p = 3/5$.

Это решение представлено на рисунке.



Совместим оба графика для того, чтобы получить решение всей задачи (см. рисунок).



Получилась одна точка пересечения: $p = 3/5$, $q = 1/3$, то есть одна равновесная ситуация. $1 - p = 2/5$, $1 - q = 2/3$.

$$\begin{array}{c|cc} & 1/3 & 2/3 \\ 3/5 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$}} \\ 2/5 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} & 1/3 & 2/3 \\ 3/5 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$}} \\ 2/5 & & \end{array},$$

Средний выигрыш игрока A равен:

$$H_A(3/5,\ 1/3) = 6\cdot(3/5)\cdot(1/3) + 2\cdot(3/5)\cdot(2/3) + 2\cdot(2/5)\cdot(1/3) + 4\cdot(2/5)\cdot(2/3) = 10/3.$$

Средний выигрыш игрока B равен:

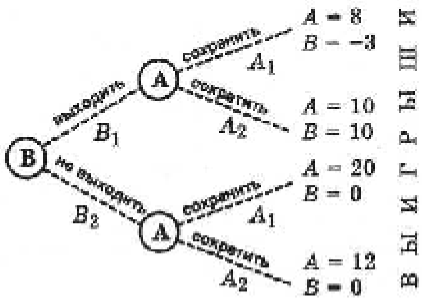
$$H_B(3/5,\ 1/3) = 2\cdot(3/5)\cdot(1/3) + 6\cdot(3/5)\cdot(2/3) + 8\cdot(2/5)\cdot(1/3) + 2\cdot(2/5)\cdot(2/3) = 66/15.$$

ГЛАВА 17. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Очень часто игроки делают свой выбор не раз и навсегда, а используя информацию о фактически складывающейся обстановке в развитии конфликта. Здесь на помощь приходят позиционные игры — бескоалиционные игры, моделирующие процессы последовательного принятия решений игроками в условиях меняющейся во времени и, вообще говоря, неполной информации.

Позиции — это состояния игры, *альтернативы* — это возможный выбор в каждой позиции. Для наглядности используют схему «дерево решений». В позиционных играх с *полной информацией* игрок перед своим ходом знает ту позицию дерева игры, в которой он находится. В позиционных играх с *неполной информацией* игрок перед своим ходом не знает точно ту позицию дерева игры, в которой он фактически находится. *Нормализация позиционной игры* — это процесс сведения позиционной игры к матричной или биматричной играм.

Пример 70. Фирма A контролирует рынок некоторого товара. Фирма B решает, стоит ли выходить на рынок этого товара. Стратегии фирмы B: выходить (B_1), не выходить (B_2). В свою очередь фирма A решает, стоит ли снижать объем производства этого товара. Стратегии фирмы A: сохранить объем производства (A_1), сократить объем производства (A_2).



Матрицы игры

$$\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Предлагаем читателю решать этот пример до конца и убедиться, что здесь три равновесные ситуации.

ГЛАВА 18. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 18.1. Основные определения

Программирование — это процесс распределения ресурсов. Математическое программирование — это использование математических методов и моделей для решения проблем программирования. Если цель исследования и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в виде линейных взаимосвязей между переменными, то соответствующий раздел математического программирования называется *линейным программированием.*

Пример 71 (задача об использовании ресурсов). Предприятие производит 2 вида продукции X и Y. 1 кг X приносит прибыль 5 рублей, требует 2 кг ресурса A и 3 кг ресурса B. 1 кг Y приносит прибыль 10 рублей, требует 7 кг ресурса A и 9 кг ресурса B. Суммарный запас ресурсов 70 кг (A) и 50 кг (B). При каком объеме производства прибыль будет максимальна?

Пусть предприятие производит x кг продукции X и y кг продукции Y. Тогда общая прибыль $F = 5 \cdot x + 10 \cdot y$ (целевая функция). Мы хотим найти максимум целевой функции при ограничениях $2 \cdot x + 7 \cdot y \leq 70$ (ресурс A) и $3 \cdot x + 9 \cdot y \leq 50$ (ресурс B). Конечно, $x,\ y \geq 0$. Получаем задачу: $F = 5x + 10y \to \max$

$$\begin{cases} 2x + 7y \leq 70 \\ 3x + 9y \leq 50 \\ x,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Пример 72 (задача о диете). Используются 2 вида продуктов X и Y. 1 кг X стоит 6 рублей, содержит 9 единиц питательного вещества A и 17 единиц питательного вещества B. 1 кг Y стоит 8 рублей, содержит 12 единиц питательного вещества A и 23 единицы питательного вещества B. Необходимый минимум в диете 20 единиц (вещество A) и 30 единиц (вещество B). Составить диету минимальной стоимости.

Пусть используют x кг продукта X и y кг продукта Y. Тогда общая стоимость $Z = 6 \cdot x + 8 \cdot y$ (целевая функция). Мы хотим найти минимум целевой функции при ограничениях $9 \cdot x + 12 \cdot y \geq 20$ (содержание вещества A) и $17 \cdot x + 23 \cdot y \geq 30$ (содержание вещества B). Конечно, $x, y \geq 0$. Получаем задачу: $Z = 5x + 10y \to \min$

$$\begin{cases} 9x + 12y \geq 20 \\ 17x + 23y \geq 50 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Если система ограничений состоит лишь из нестрогих неравенств, то это — *стандартная задача* линейного программирования. Если система ограничений состоит лишь из равенств, то это — *каноническая задача* линейного программирования. Переход от стандартной задачи к канонической осуществляется добавлением новых неотрицательных переменных (неосновные переменные) со знаком «+» для неравенств со знаком «≤» и со знаком «−» для неравенств со знаком «≥».

Пример 73. $F = 6x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 \geq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 13x_1 - 7x_2 \leq 3 \\ 7x_1 - 8x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Это стандартная задача. Из нее получим каноническую задачу, добавив в 1-е и 4-е неравенства переменные $-x_3$, $-x_6$ и во 2-е и 3-е неравенства переменные x_4, x_5.

$F = 6x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 - x_3 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ 13x_1 - 7x_2 + x_5 = 3 \\ 7x_1 - 8x_2 - x_6 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Система ограничений задает область допустимых решений, которая является выпуклым множеством (вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок).

§ 18.2. Геометрический метод решения задач линейного программирования

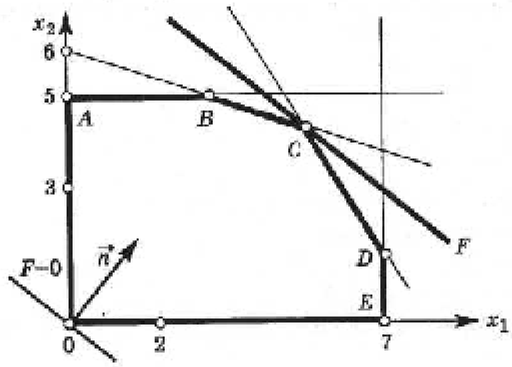
Геометрический метод применяется, если задача линейного программирования содержит только две переменные. Рисуем область допустимых решений и график целевой функции. Сдвигаем график целевой функции параллельным переносом в направлении ее вектора нормали (для задач максимизации) или в противоположном направлении (для задач минимизации). Последняя общая точка сдвинутого графика целевой функции и области допустимых решений и есть решение задачи. Возможно, что график совпадает с одним из отрезков, ограничивающих допустимую область решений. В этом случае решений будет бесконечно много.

Пример 74. Решим геометрически задачу

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Рисуем область допустимых решений. Вместо неравенства $x_1 + 3x_2 \le 18$ рассмотрим прямую $x_1 + 3x_2 = 18$. Изобразим ее график. Как известно, наша прямая делит плоскость на две полуплоскости. Возьмем в любой из полуплоскостей точку (обычно берут начало координат O (0,0)) и подставим ее координаты в неравенство $x_1 + 3x_2 \le 18$. Если координаты точки удовлетворяют этому неравенству, то вся полуплоскость, где лежит эта точка, является решением этого неравенства. Если нет, то решением этого неравенства является



другая полуплоскость. И т. д. для других ограничений. Получим область допустимых решений $OABCDE$.

Рисуем прямую $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$. Изобразим вектор нормали $n = (2, 3)$ к этой прямой. Его координаты — это коэффициенты целевой функции. Так как у нас задача максимизации, то передвигаем параллельно прямую $F = 2x_1 + 3x_2 = 0$ в направлении n. Последняя общая точка сдвинутого графика и области допустимых решений $OABCDE$ — это точка C (точка пересечения прямых $x_1 + 3x_2 = 18$ и $2x_1 + x_2 = 16$). Найдем ее координаты.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Задача 45. Решить геометрически задачу

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 0 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

§ 18.3. Симплекс-метод (метод модифицированных жордановых исключений – МЖИ)

Приводим задачу к каноническому виду. Для задачи максимизации составляем симплекс-таблицу. Если распределение не оптимально, то строим новую симплекс-таблицу по специальным формулам. И т. д. Задача минимизации сводится к задаче максимизации умножением целевой функции на -1.

Пример 75. Решим задачу линейного программирования $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -13 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2. \end{cases}$$

Приведем к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -13 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ \dots,\ 5. \end{cases}$$

Основные переменные x_1, x_2 (входят в целевую функцию), неосновные переменные x_3, x_4, x_5 (введены дополнительно). Выразим неосновные переменные через основные переменные.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2 = x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 13 = x_4 \\ -3x_1 + x_2 + 6 = x_5 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ \dots,\ 5. \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу.

	$-x_1$	$-x_2$	b
x_3	1	$\boxed{-1}$	-2
x_4	-1	2	13
x_5	3	-1	6
F	-1	-1	0

В этой таблице собраны коэффициенты при $(-x_1)$, $(-x_2)$ в выражениях для x_3, x_4, x_5, F. Столбец b — это столбец свободных членов. Если последний столбец и последняя строка (кроме левой нижней клетки) не содержат отрицательных чисел, то получен ответ. Иначе проводится МЖИ-операция. Сначала избавляются от минусов в последнем столбце, затем — в последней строке.

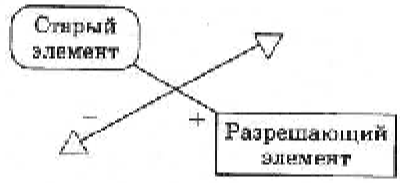
У нас есть минусы в последнем столбце. Выбираем любой отрицательный элемент в последнем столбце. Это -2. Двигаемся по строке, где находится этот выбранный элемент, и берем любой отрицательный элемент в этой строке. Это -1. Смотрим, в каком столбце находится выбранный элемент -1. Во втором. Это столбец называется *разрешающим*.

Далее поэлементно делим последний столбец на разрешающий столбец и среди положительных конечных отношений берем наименьшее: $\min\{(-2)/(-1),\ 13/2\} = 2$. Строку, где достигается это минимум, назовем *разрешающей*. Это — первая строка.

Элемент на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца назовем разрешающим. Это -1. Заключим его в квадрат.

Преобразуем таблицу. В разрешающих строке и столбце переменные меняем местами (это x_2, x_3). На месте разрешающего элемента пишем 1/(разрешающий элемент) = = 1/(−1) = −1. В разрешающей строке каждое число делим на разрешающий элемент: 1/(−1) = −1, (−2)/(−1) = 2. В разрешающем столбце каждое число делим на разрешающий элемент и результат берем со знаком «−»: −2/(−1) = 2, −(−1)/(−1) = −1, −(−1)/(−1) = −1. Остальные элементы считаем по правилу прямоугольников:

$$\text{Новый элемент} = \frac{\text{Старый элемент} \times \text{Разрешающий элемент} - \triangle\times\bigtriangledown}{\text{Разрешающий элемент}}.$$



Элемент △ находится в разрешающей строке в одном столбце со старым элементом. Элемент ▽ находится в разрешающем столбце в одной строке со старым элементом.

Для (−1) (клетка (2,1)) новый элемент равен:

$$\frac{\text{клетка }(2,1)\cdot\text{клетка }(1,2)-\text{клетка }(1,1)\cdot\text{клетка }(2,2)}{\text{клетка }(1,2)}=$$

$$=\frac{(-1)\cdot(-1)-1\cdot 2}{-1}=1.$$

Для 13 (клетка (2,3)) новый элемент равен:

$$\frac{\text{клетка }(2,3)\cdot\text{клетка }(1,2)-\text{клетка }(1,3)\cdot\text{клетка }(2,2)}{\text{клетка }(1,2)}=$$

$$=\frac{13\cdot(-1)-2\cdot(-2)}{-1}=9.$$

И т. д. Получим таблицу:

	$-x_1$	$-x_3$	b
x_2	−1	−1	2
x_4	1	2	9
x_5	$\boxed{2}$	−1	8
F	−2	−1	2

Последний столбец не содержит отрицательных чисел. Зато отрицательные числа есть в последней строке. Выбираем любое из них (лучше всего брать большее по модулю). Берем −2. Поэтому первый столбец — разрешающий. Применим МЖИ-операцию (разрешающий элемент обведен). Получим таблицу:

	$-x_5$	$-x_3$	b
x_2	0,5	−1,5	6
x_4	−0,5	$\boxed{2,5}$	5
x_1	0,5	−0,5	4
F	1	−2	10

Применим МЖИ-операцию (разрешающий элемент обведен). Получим таблицу:

	$-x_5$	$-x_4$	b
x_2		0,6	9
x_3	−0,2	0,4	2
x_1		0,2	5
F	0,6	0,8	14

Ответ получен. Из 1-го и 4-го столбцов $x_2 = 9$, $x_3 = 2$, $x_1 = 5$. Из 1-й и 5-й строк $F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$. $F_{max} = 14$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 9, 2, 0, 0)$.

Ответ: $F_{max} = 14$, $x_1 = 5$, $x_2 = 9$.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума целевой функции: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально. У нас это так ($-0{,}6 < 0$, $-0{,}8 < 0$)

§ 18.4. Excel. Поиск решения

В Excel имеется надстройка *Поиск решения*, которая, в частности, помогает решать задачи линейного программирования. Необходимо воспользоваться меню *Сервис → Поиск решения*. Если в меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения*, необходимо выполнить команду *Сервис → Надстройки*. Найти элемент *Поиск решения* и поставить «галочку» рядом с ним. Если в окне *Надстройки* нет элемента *Поиск решения*, необходимо доустановить Excel.

Пример 76. Вернемся к примеру 74.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2. \end{cases}$$

	A	B
1	переменные	
2	x_1	0
3	x_2	0
4	целевая функция	
5	$2x_1 + 3x_2$	=2·B2+3·B3
6	ограничения	
7	$x_1 + 3x_2$	=B2+3·B3
8	$2x_1 + x_2$	=2·B2+B3
9	x_1	=B2
10	x_2	=B3

Вводим эти формулы. Выделяем ячейку B5, в которой вычисляется целевая функция. Вызываем *Сервис → Поиск решения*. В диалоговом окне в поле ввода *Установить целевую ячейку* уже содержится SBS5. Установим переключатель *Равной максимальному значению*. Щелкнем кнопку *Предложить*, и в поле ввода *Изменяя ячейки* появится \$B\$2:\$B\$3. Щелкнем кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* укажем \$B\$7. Правее в выпадающем списке с условными операторами выберем <= (есть условный оператор ЦЕЛ, что позволяет решать задачи целочисленного программирования). В поле ввода *Ограничение* введем 18. Щелкнем кнопку *Добавить* и введем другие ограничения. ОК. Мы окажемся в диалоговом окне и увидим введенные ограничения. С помощью кнопок *Изменить* и *Удалить* мы можем изменить и удалить ограничение. Щелкнем *Параметры*. Установим два флажка: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. ОК. *Выполнить*.

ГЛАВА 19. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 19.1. Свойства двойственных задач

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Если в исходной задаче ищется максимум, то в двойственной задаче ищется минимум, и наоборот. Коэффициенты целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи. Свободные члены системы ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи. Число ограничений одной задачи равно числу переменных другой задачи. Целесообразно сразу иметь в исходной задаче максимизации все ограничения вида «не больше» («≤»). В двойственной задаче минимизации эти ограничения надо заменить ограничениями «не меньше» («≥»). Если на переменную исходной задачи наложено (не наложено) условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи будет в виде неравенства (равенства).

Пример 77. Найдем двойственную задачу для задачи

$$F = 12x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Приведем все неравенства к виду «≤», умножив, где нужно, обе части на (-1).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \le -4 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Составим матрицу задачи, записав коэффициенты ограничений в виде строк. В последней строке укажем коэффициенты целевой функции F.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 12 & 3 & 4 & F \end{pmatrix} = A.$$

Транспонируем эту матрицу (запишем строки в виде столбцов). Получим матрицу двойственной задачи

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & Z \end{pmatrix} = A^t.$$

В последней строке находятся коэффициенты целевой функции Z. Так как $F \to \max$, $Z \to \min$, $x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. Поэтому 1-е и 3-е ограничения двойственной задачи будут в виде неравенств, а 2-е ограничение двойственной задачи — в виде равенства. 1-е и 2-е ограничения исходной задачи заданы в виде неравенств. Поэтому $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$. Получаем

$$Z = 1 \cdot y_1 + (-4) \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \ge 12 \\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 + 3y_2 - 5y_3 \ge 4 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для этой задачи двойственной будет исходная задача.

§ 19.2. Теоремы двойственности

Основное неравенство теории двойственности. Пусть X, Y — допустимые решения исходной задачи и двойственной задачи соответственно (то есть удовлетворяют соответствующим системам ограничений). Тогда $F(X) \le Z(Y)$.

Достаточный признак оптимальности. X, Y — допустимые решения исходной задачи и двойственной задачи соответственно, $F(X) = Z(Y)$. Тогда X, Y — оптимальные решения взаимно двойственных задач.

1-я теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая задача (при этом $F_{\max} = Z_{\min}$). Если линейная функция одной из взаимно двойственных задач не ограничена (то есть симплекс-метод зацикливается), то условия другой задачи противоречивы.

Теорема. Положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи.

2-я теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

На этой теореме основан двойственный симплекс-метод.

Пример 78. Применим двойственный симплекс-метод к примеру 75.

Окончательная симплекс-таблица имела следующий вид

	$-x_5$	$-x_4$	b
x_2		0,6	9
x_3	−0,2	0,4	2
x_1		0,2	5
F	0,6	0,8	14

$F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$. $F_{\max} = 14$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 9, 2, 0, 0)$. Основные переменные x_1, x_2 (входят в целевую функцию), неосновные переменные x_3, x_4, x_5.

$F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Матрица задачи

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & F \end{bmatrix} = A.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 13 & 6 & Z \end{pmatrix} = A^t.$$

Получаем двойственную задачу

$Z = -2y_1 + 13y_2 + 6y_3 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Основные переменные y_1, y_2, y_3. Установим соответствие между переменными этих задач (основные переменные соответствуют неосновным переменным).

$x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4,\ x_5$

$y_4,\ y_5;\ y_1,\ y_2,\ y_3.$

Так как одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая задача (при этом $F_{\max} = Z_{\min} = 14$). Это 1-я теорема двойственности. Положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач (x_1, x_2, x_3) соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи ($y_4 = y_5 = y_1 = 0$). Функция $Z = 14 + 5y_4 + 9y_5 + 2y_1$ (мы взяли переменные, значения которых равны нулю, с соответствующими коэффициентами). $F = 14 - 0{,}6x_5 - 0{,}8x_4$. Переменным x_4, x_5 соответствуют переменные y_2, y_3. Придадим переменным y_2, y_3 значения 0,8 и 0,6 соответственно (см. 2-ю теорему двойственности). Тогда оптимальное решение двойственной задачи $Y = (0;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0;\ 0)$.

З а м е ч а н и е. Сформулировав двойственную задачу, можно воспользоваться Excel (*Поиск решения*).

§ 19.3. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пример 79. Решим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Если матрица содержит отрицательные числа, то нужно добиться, чтобы все ее элементы были неотрицательны, прибавив ко всем ее элементам число, равное модулю наименьшего числа матрицы. У нас сразу все элементы неотрицательны. Зато возможны некоторые упрощения. Умножим каждый элемент матрицы на 10 и в полученной матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

из каждого числа вычтем наименьший элемент (2). Получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

На оптимальных стратегиях это не скажется, а цену игры восстановим, сделав обратные преобразования (прибавим к полученной цене игры 2 и разделим на 10).

Припишем строкам вероятности p_1, p_2, p_3.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда средний проигрыш игрока B при применении им своей 1-й стратегии равен $1 \cdot p_1 + 7 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3$ (1-й столбец поэлементно умножаем на вероятности p_1, p_2, p_3 и полученные произведения суммируем). Этот проигрыш не может быть больше цены игры v: $p_1 + 7p_2 + 5p_3 \le v$. Аналогично для других стратегий игрока B:

$$\begin{cases} p_1 + 7p_2 + 5p_3 \le v \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 \le v \\ 6p_1 + 0p_2 + 2p_3 \le v \\ p_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на v и введем обозначения $x_i = p_i/v$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ 6x_1 + 2x_3 \le 1 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$F = x_1 + x_2 + x_3 = (p_1 + p_2 + p_3)/v = 1/v.$

Игрок B стремится понизить цену игры ($v \to \min$). Поэтому $F \to \max$. Получили задачу линейного программирования.

Аналогично припишем столбцам вероятности q_1, q_2, q_3.

$$\begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда средний выигрыш игрока A при применении им своей 1-й стратегии равен $1 \cdot q_1 + 4 \cdot q_2 + 6 \cdot q_3$ (1-ю строку поэлементно умножаем на вероятности q_1, q_2, q_3 и полученные произведения суммируем). Этот выигрыш не может быть меньше цены игры v: $q_1 + 4q_2 + 6q_3 \geq v$. Аналогично для других стратегий игрока B:

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 + 6p_3 \geq v \\ 7q_1 + 2q_2 + 0q_3 \geq v \\ 5q_1 + 3q_2 + 2p_3 \geq v \\ q_i \geq 0,\ i - 1, 2, 3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на v и введем обозначения $y_i = q_i/v$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 1 \\ 7y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$Z = y_1 + y_2 + y_3 = (q_1 + q_2 + q_3)/v = 1/v.$

Игрок A стремится повысить цену игры ($v \to \max$). Поэтому $Z \to \min$. Получили задачу линейного программирования.

Полученные задачи являются взаимно двойственными задачами линейного программирования. Решим любую из них симплекс-методом. Окончательная симплекс-таблица имеет следующий вид:

	$-x_6$	$-x_2$	$-x_4$	b
x_3				5/28
x_5				1/28
x_1				3/28
F	1/7	0	1/7	2/7

$F = 2/7 = 1/v$. Отсюда $v = 7/2 = 3{,}5$.

$x_3 = 5/28$, $x_1 = 3/28$, $x_2 = 0$. $x_i = p_i/v$. Поэтому $p_i = x_i \cdot v$: $p_1 = x_1 \cdot v = (5/28) \cdot (7/2) = 5/8$, $p_2 = x_2 \cdot v = 0 \cdot (7/2) = 0$, $p_3 = x_3 \cdot v = (3/28) \cdot (7/2) = 3/8$. $P = (5/8,\ 0,\ 3/8)$.

Установим соответствие между переменными двойственных задач.

x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6

y_4, y_5, y_6; y_1, y_2, y_3.

Поэтому $y_1 = 1/7$, $y_3 = 1/7$, $y_2 = 0$. $y_i = q_i/v$. Поэтому $q_i = y_i \cdot v$: $q_1 = y_1 \cdot v = (1/7) \cdot (7/2) = 1/2$, $q_2 = y_2 \cdot v = 0 \cdot (7/2) = 0$, $q_3 = y_3 \cdot v = (1/7) \cdot (7/2) = 1/2$. $Q = (1/2,\ 0,\ 1/2)$.

Для модифицированной задачи $v = 3{,}5$. Поэтому цена игры для исходной задачи $v = (3{,}5 + 2)/10 = 0{,}55$.

ГЛАВА 20. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Есть n отраслей. Рассматривается процесс производства за 1 год. x_i — общий (валовой) объем продукции i-й отрасли. x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью в процессе производства. y_i - объем конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления. Имеют место соотношения баланса $x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$, $i = 1, \ldots, n$ (продукция i-й отрасли используется другими отраслями в процессе производства и потребителями).

Коэффициенты прямых затрат $a_{ij} = x_{ij}/x_j$. Они показывают затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли. Считаем, что $a_{ij} = \text{const}$. Тогда $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

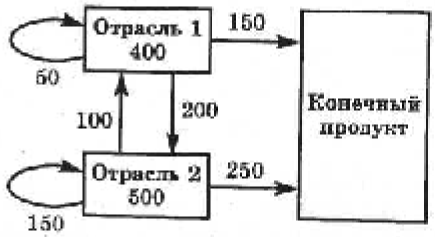
Вектор валового выпуска $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, матрица прямых затрат (структурная матрица) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, вектор конечного продукта $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Получаем матричное уравнение $X = AX + Y$.

Матрица $A \geq 0$ (все элементы неотрицательны) называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ этого уравнения. В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Утверждение. $A \geq 0$ продуктивна, если $\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ и существует j таков, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, то есть наибольшая из сумм элементов в столбцах матрицы A не превосходит 1, причем есть хотя бы один столбец, где сумма меньше 1.

Пример 80.



Имеем $x_1 = 400$, $x_2 = 500$, $y_1 = 150$, $y_2 = 250$, $x_{11} = 50$, $x_{12} = 200$, $x_{21} = 100$, $x_{22} = 150$.

$a_{11} = x_{11}/x_1 = 50/400 = 0{,}125$, $a_{12} = x_{12}/x_2 = 200/500 = 0{,}4$, $a_{21} = x_{21}/x_1 = 100/400 = 0{,}25$, $a_{22} = x_{22}/x_2 = 150/500 = 0{,}3$.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

$\max(0{,}125 + 0{,}25;\ 0{,}4 + 0{,}3) = 0{,}7 < 1$. Матрица A продуктивна.

$X = AX + Y$. Пусть новый вектор валового выпуска $X = \begin{bmatrix} 300 \\ 450 \end{bmatrix}$. Тогда соответствующий вектор конечного продукта $Y = X - AX = (E - A)X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 300 \\ 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82{,}5 \\ 240 \end{bmatrix}$.

Пусть новый вектор конечного продукта $Y = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$. Тогда соответствующий вектор валового выпуска $X = (E - A)^{-1}Y \approx \begin{bmatrix} 507 \\ 610 \end{bmatrix}$.

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

ЛИТЕРАТУРА

Аронович А. Б., Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. Сборник задач по исследованию операций. – М.: Изд-во МГУ, 1997.

Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1997.

Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 1997.

Кузнецов А. В., Новикова Г. И., Холод Н. И. Сборник задач по математическому программированию. – Мн.: Высшая школа, 1985.

Куприков Е. В., Ткаленко Р. А. Высшая математика. Рабочая программа, методические указания и контрольные задания для студентов заочников 1 и 2 курсов, обучающихся по специальностям «Менеджмент» и «Экономика и управление на предприятии» (по отраслям). – М.: МГОУ, 1996.

Шикин Е. В. От игр к играм. – М.: Эдиториал УРСС, 1997.

Содержание