Лекции по теории игр и экономического равновесия
Часть 1: Введение в теорию игр

С. Г. Коковин

14 марта 2007 г.

Содержание

Предисловие

Данное пособие (которое дорабатывается) составляет курс лекций "Введение в теорию игр и экономического равновесия" – обязательный курс 2-го года обучения экономического факультета Новосибирского государственного университета.

Курс опирается на курсы Матанализ, Микроэкономика-1, Оптимизация. Поэтому здесь используются уже изученные студентами понятия целевых функций, предпочтений, оптимизации. Курс служит базисом для всех последующих курсов, использующих гипотезу рационального поведения и игровые понятия, включая "Микроэкономику-2", теории отраслевых рынков и общественного сектора. Он обучает скорее методам и средствам анализа, чем эмпирическим фактам.

Какие "практики" или типы поведения логически объяснимы гипотезой индивидуальной рациональности, а какие нет?

Какие ситуации некооперативного поведения (где каждый за себя) приводят к неулучшаемым в некотором смысле исходам, а какие нет?

– вот главные вопросы во всех рассматриваемых ситуациях. Умение точно рассуждать об этом является главным вырабатываемым навыком. Студенты должны освоить формализацию и решение наиболее типичных игр, прежде всего экономических. В соответствии с задачами, курс организован в виде 3 частей: 1)"Предпочтения, многоцелевой оптимум и кооперативные игры", 2)(большая часть) "Некооперативнын игры", 3)"Теория экономического равновесия" - на классической модели рынка и ее общем равновесии.

Как основа подхода, здесь использованы известные международные учебники по играм и микроэкономике. По предпочтениям и экономическому равновесию – Алипрантис и др. "Существование и оптимальность конкурентного равновесия", по играм, прежде всего: Gintis "Game theory: a lexicon for strategic interaction", R.Gibbons "Game theory for applied economist" (вводный уровень), R.B.Myerson - *Game Theory (Analysis of Conflict)* (продвинутый уровень), P.C. Ordeshook- *Political Theory Primer,* (вводный уровень). Использованы нужные разделы из учебников микроэкономики (где необходимый экономистам игровой материал дан более сжато) H.Varian - *Microeconomic Analysis.*, D. Krebs - *A Course in Microeconomic Theory,* J. Tirole - *Industrial Organization,*. Дополнительно использована литература из приведенного списка литературы, и пособия изданные в НГУ: В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков (1999) - *Микроэкономический анализ несовершенных рынков* (вводный уровень игр, основные концепции), продвинутое пособие В.И.Данилова *Лекции по теории игр*, изданное в РЭШ. К этим материалам рекомендуется обращаться.

Характер изложения практически приспособлен к типу и возможностям восприятия студентов НГУ, к ограничениям учебного плана. Во многих случаях предпочтение отдано не общности формального изложения понятий, а их освоению на примерах, по возможности – содержательных. Важной частью пособия (курса) является задачник, поскольку упор сделан на практическое освоение ключевых идей теории игр и политической теории.

Курс занимает 15 лекций (30 академических часов), 15 семинаров, с несколькими контрольными и заключительным экзаменом. Задачи собраны в задачнике - см. econom.nsu.ru/"Система Эконом"/Коковин.

Автор приносит благодарность акад. В.М.Полтеровичу за советы по выбору материала, А.Савватееву и А.Тонису за сотрудничество в методической разработке пре-

подавания теории игр и ценные замечания по тексту.

Введение: классификация игр

Математическая "теория игр" есть теория принятия решений группой участников. В ней под понятие игры подходит *любая* ситуация с рациональными, то есть целеполагающими, оптимизирующими субъектами ("участниками"), а также некоторые ситуации с неполной рациональностью.[1] В частности, любая оптимизационная задача - это, по сути дела, просто игра с одним участником. Напротив, задачу поиска многоцелевого оптимума (Парето-оптимума) игрой назвать еще нельзя. Недостает описания *индивидуальных* прав или возможностей участников, и описания информационно-поведенческих особенностей ситуации.

Структура любой игры описывается тремя блоками: 1)физические возможности, то есть допустимые множества ходов или стратегий участников; 2)цели участников; 3)тип поведения и информированности участников, включая характер взаимодействия друг с другом, рациональность мышления, способ рассуждений и др. Для структур (1) и (2) выработаны достаточно удобные описывающие модели – допустимые множества или графы, целевые функции. Но трудно указать единый для всех игр формальный способ описать тип поведения; часто это описание формализуют "концепцией решения" игры.

Задача анализа игры — по заданным возможностям, целям и информации игроков уметь прогнозировать "*решение*" игры, то есть множество возможных ходов и их результатов (исходов):

1. **Возможности** ходов участников
   (допустимые множества)
2. **Цели** участников
   (предпочтения, целевые функции)
3. **Информация** и тип поведения
   (информационные множества, "ожидания", рациональность, контекст игры, ...)

⇒ **Ход игры** (решение)

По этим и другим признакам огромное разнообразие игр можно классифицировать. Например, по характеру доступных стратегий игры разделяют: — на конечные или бесконечные (в частности, бесконечные во времени), — на дискретные или непрерывные, — на "статические" (с одновременными ходами), или динамические. По соотношению целей участников игры разделяют на антагонистические или неантагонистические (с непротивоположными интересами). По типу поведения — на кооперативные (где участники ищут компромисс в переговорах), и некооперативные (где договоры неосуществимы или невыполнимы). По информационной структуре игры можно делить на игры с совершенной или несовершенной рациональностью, с общим или не-общим знанием данных, и др.. А также, учитывая внешний контекст игры, на 1)*уникальные*, 2)*популяционные* (где игроки пользуются знанием о происходивших ранее аналогичных играх), 3)*повторяющиеся* в том же коллективе (где игроки пользуются угрозами).

Для анализа условия игры обычно формализуют в одной из трех форм: в *характеристической* (описываются значения выигрышей каждой коалиции, только для кооперативных игр), в *развернутой* (описываются последовательности возможных ходов),

[1]Напротив, в психологии и в быту под игрой понимают лишь деятельность, непосредственные цели которой условны, не связанны с жизненными интересами участников.

или в *стратегической* (описываются цельные стратегии). Последняя подразделяется на *нормальную* стратегическую форму и *мультиперсонную.* В каком-то смысле, разные формы одной игры – это разные модели одного явления. Сначала мы рассмотрим более простую – нормальную форму, потом развернутую, затем сопоставим их.

1 Глава. Игры в нормальной форме (“статические” или “одновременные”)

“Нормальную” форму игры часто соотносят со случаем “статической” или одновременной игры (однократные одновременные ходы участников), а развернутую форму — с “динамическими” играми (последовательные ходы), хотя мы увидим, что возможны и другие трактовки. Нормальная форма задает исходную физическую и целевую структура игры как объект

$$G := \langle I, X, u(.)\rangle = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_i(.)\}_{i\in I}\rangle \ , \text{ где}$$

$I := \{1, ..., m\}$ — множество участников i,

$X := (X_i)_{i\in I} := \prod_i X_i = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_m)$ — набор (профиль) допустимых множеств стратегий $(x_i)_{i\in I}$ участников,

$u := (u_i)_I = (u_i)_{i\in I}$ — набор (профиль) целевых функций участников (заметим: каждая целевая функция $u_i : \ X_i \mapsto I\!R$ зависит, вообще говоря, *от всех* $(x_j)_{j\in I}$).

[2]

Состоянием игры в нормальной форме будем называть или профиль $x = (x_i)_{i\in I}$ выбранных стратегий, или, более полно, пару (x, β) выбранных стратегий и ожиданий всех участников. Ожидание $\beta_i \in X$ каждого участника о ходах всех партнеров может совпадать с настоящими, намеченными к исполнению, стратегиями, или не совпадать.

Проиллюстрируем используемые далее **принципы обозначений** и простейшее понятие решения на примере.

Пример 1.1 *“Игра координации”,* (известная в одном из вариантов как “семейный спор” = “Battle of Sexes”: Luce and Raiffa, 1953).

Далее, как и здесь, мы будем большими буквами обозначать участников (или множества), малыми латинскими буквами – переменные стратегий. Греческие буквы используются для ожиданий или вероятностей, в данном случае β_V – это ожидание Виктора о ходе Анны.

Играют Анна (персонаж, который далее во всех обсуждаемых динамических играх ходит первым и обозначается A) и Виктор (персонаж, который в других играх, не как здесь, ходит *позже* Анны и, соответственно, обозначается буквой V стоящей *позже* в латинском алфавите). Здесь Анна и Виктор ходят одновременно, после хода "Природы", сформировавшей у них какие-то "ожидания"(beliefs) о поведении партнера. Они не имеют возможности переговариваться (возможно, это период симпатии em до знакомства, или это супруги, уставшие спорить :-)). Каждый выбирает,

[2]Возможно также более общее представление игр (оно соответствует, в частности, Вальрасовскому равновесию игр обмена): не только выигрыши, но и текущее допустимое множество стратегий каждого участника может зависеть от текущих действий других участников.

пойти ли вечером на футбол или в кино. Оба предпочли бы оказаться где-нибудь вместе, что отражено в *таблице выигрышей* на Рис. 1.1. А именно, совместное попадание в кино ($x = (x_A, x_V) := (c_A, c_V)$) дало бы вектор полезностей (выигрышей) $(u_A(c_A, c_V),\ u_V(c_A, c_V)) := (3, 2)$, а совместное попадание на футбол дает выигрыши $(u_A(f_A, f_V),\ u_V(f_A, f_V)) := (1, 4)$.

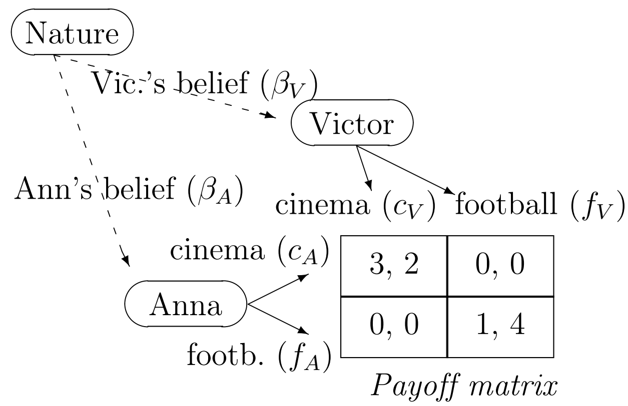


Рис. 1: "Игра слепой координации" (или "Семейный спор", "Battle of Sexes"). (Приношу извинения, английские надписи на рисунках вынуждены программным обеспечением.)

В каждой клетке, соответствующей одному из 4-х возможных исходов, помещен сначала субъективный выигрыш строчного игрока – Анны (измеренный в некоторых единицах полезности), затем - выигрыш Виктора. Стрелки отражают последовательность ходов, в данном случае - то, что игроки вынуждены принять решения одновременно, не зная выбора другого, а только имея какие-то *"ожидания"* (beliefs) об этом выборе, предопределенные природой (случаем).

Что может произойти? Очевидно, если оба ожидают от партнера выбор "футбол", то есть $\beta_A = footb_V$, $\beta_V = footb_A$, тогда рациональный выбор каждого — присоединиться к выбору партнера, и исходом будет счастливая (более счастливая для Виктора) встреча на футболе: $x_A = footb_A,\ x_V = footb_V$. Аналогично, совпадающие ожидания о кино привели бы к счастливой, особенно для Анны, встрече в кино, а несовпадающие гипотезы – к развлечениям порознь.[3] Итак, мы описали простейший вариант множества решений игры – "решения с заданными извне (несогласованными с реальностью) ожиданиями". Далее будем рассматривать другие типы решений, в том числе, этой же игры.

О понятиях решения. Вообще говоря, найти *решение* игры означает, предсказать множество ее возможных состояний, соответствующих нашим (наблюдателя) гипотезам о принципах поведения и информации участников. Совокупность наших гипотез задает некоторое "согласование" стратегий и ожиданий. Обычно оно формализуется в "концепции решения" или "равновесия", то есть состояния, от которых участники не станут переходить к другим состояниям, если игра повторится.

В приведенном примере для предсказания исхода мы использовали простейшую концепцию – *решение с заданными заранее необоснованными ожиданиями ходов*, из-

[3]Заметим, что здесь независимое не-кооперативное принятие решений может приводить к не-Парето-эффективному исходу, что вообще типично.

вестными откуда-то предсказывающему наблюдателю. Ожидания не предполагались "согласованными", или "обоснованными" истинными намерениями партнера. Перечислим более сложные решения игр, изучаемые в этом разделе. (Табл.1):

Информация, на которую ориентируется участник $j \in I$:	*Тип возникающих решений (равновесий), т.е., поведения:*
- только на знание множеств $(X_i)_I$	$\Rightarrow MM$ — "осторожное" (максимин), $I\!DE$, $SI\!DE$ — "доминирующее",
- еще и на чужие цели $(u_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow IND_S, IND_W, SoE$ — "сложное",
- на текущий чужой ход $(x_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow NE$ — "Нэшевское"
- на текущую вероятность ходов	$\Rightarrow NEm$ — "Нэшевское в смешанных стратегиях"
- лидер знает цели, ведомые - текущий ход	$\Rightarrow StE$ — "Штакельберговское"
- на соглашение с партнерами	$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ — ядро — "кооперативное"

Таблица 1: Разные типы решений игр в нормальной форме, в зависимости от информации о партнерах (это не значит, что решение Нэша нельзя применять в ситуации знания чужих целей или в ситуации переговоров, таблица говорит только о типичности применения понятий). Всюду в таблице подразумевается знание собственных целей, и "общее знание" множества возможных стратегий всех участников.

Обсудим последовательно каждую из концепций решения, начав с простых.

1.1 Максимин и доминирование

Будем обозначать через $x_{-i} := (x_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ профиль (набор) стратегий всех игроков кроме i, и аналогично индексировать множества и функции.

Сначала рассмотрим случай, когда игроки не обладают информацией ни о целях, ни о намеченных стратегиях партнеров. Если они к тому же ведут себя "очень осторожно", то подходит следующая концепция решения.

Определение 1.1.1 *Множество X_{MMi} осторожных или максиминных стратегий игрока i задается как аргументы, максимизирующие гарантированный выигрыш:*[4]

$$X_{MMi} \;\; := \;\; \{x_i \in X_i | \; \forall x_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq \sup_{y_i \in X_i} (\inf_{z_{-i}\in X_{-i}} u_i(y_i, z_{-i}) \;) \; \}, \tag{1}$$

при этом $MM := \prod_{i\in I} X_{MMi}$ *– множество максиминных решений игры.*

Поясним: в осторожном решении игроки ожидают от партнеров самого худшего для себя, то есть ожидания игрока есть $\beta_i = (\inf_{z_{-i}\in X_{-i}} u_i(y_i, z_{-i}) \;)$ (равновесием это решение называть не совсем точно, поскольку ожидание всего худшего может не оправдываться). Каждый максимизирует выигрыш при этих мрачных ожиданиях, то есть в целом – максимизирует гарантированный выигрыш. Такое поведение кажется правдоподобным при неизвестности целей партнеров, при крайней осторожности, и однократном розыгрыше (см. пример "Перекресток" - Табл. 2); либо в ситуации антагонистической игры, то есть игры с противоположными интересами (определяемой ниже).

[4]Как обычно, $\sup = \max$, $\inf = \min$, если $\max, \min$ существуют.

		Victor	
		Go_V	$Stop_V$
Anna	Go_A	-1000, -1000	1, -1 (NE)
	$Stop_A$	-1, 1 (NE)	0, 0 (MM)

		Victor	
		Go_V	$Stop_V$
A	Go_A	0, 0	1, -1
	$Stop_A$	-1, 1	0, 0

Таблица 2: Игра координации "Нерегулируемый перекресток". Нет правил, и каждый может продолжать быстро ехать или затормозить. Худший исход – столкновение – игроки оценивают для себя в -1000\$, а возможность опередить соперника – в 1\$. Осторожное решение – MM: $(Stop_A, Stop_V)$. Рядом, для сравнения - "антагонистический" вариант этой игры при невозможности разбить машины: нулевая сумма выигрышей всюду.

В антагонистической игре (т.е. игре "с нулевой суммой" или, шире, с постоянной суммой выигрышей) концепция максимина очень естественна. Но, как видно из приведенного примера, не все максиминные решения вызывают доверие как возможный результат *повторяющейся* игры. Это обсуждается далее и в понятии "седла".

Во многих случаях применимость концепции максимина вызывает и другие сомнения: если игроки осторожны, то почему не внести степень их неприятия риска в явном виде в значения выигрышей, приписывая одновременно некоторые вероятности ожидаемым ходам партнеров? К тому же, такая же игра типа "Перекресток", но разыгрываемая многократно, вряд ли будет приводить к такому как мы рассмотрели взаимно-осторожному решению, означающему *несогласованные* ожидания. Скорее всего, ожидания тем или иным путем скорректируются и согласуются (см. "повторяющиеся игры").

Впрочем, бывают случаи, когда ожидания не играют роли; это ситуации, где имеет место

"доминирование".

Для описания их введем понятия сравнимости стратегий.

Естественно считать, что одна моя стратегия "слабо доминирует" вторую (то есть первая моя стратегия "заведомо не хуже" для меня чем вторая) – когда первая стратегия при любых действиях партнеров не хуже второй стратегии и по крайней мере для одного варианта действий партнеров строго лучше (приносит мне больший выигрыш). Формально:

Определение 1.1.2 *Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i (слабо) доминирует стратегию $y_i \in X_i$, если*

$$\forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

$$\exists x_{-i} \in X_{-i}: \quad u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}),$$

где $-i := I \setminus \{i\}$, $X_{-i} := (X_j)_{j \neq i}$. Если же оба приведенные неравенства строгие, то x_i сильно доминирует над y_i (то есть x_i лучше при любых действиях партнеров).

Если две стратегии x_i, y_i доставляют одинаковые выигрыши при любых действиях партнеров (то есть $u_i(x_i, x_{-i}) = u_i(y_i, x_{-i})\ \forall x_{-i}$), то они эквивалентны для игрока i. Если же из пары стратегий ни одна не слабо-доминирует другую и они не эквивалентны, то они несравнимы.

Понятие доминирования позволяет разбить множество стратегий X_i на классы:

Определение 1.1.3 *Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i называется (слабо) доминирующей стратегией (среди его стратегий) или (слабо) заведомо-оптимальной — если она доминирует любую другую его стратегию либо эквивалентна ей:*

$$\forall y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

и сильно доминирующей если все такие неравенства строгие. Множество всех (слабо) доминирующих стратегий игрока i далее обозначается $\mathbb{D}_{Wi}$, а сильно доминирующих стратегий – $\mathbb{D}_{Si}$ (оно, по определению, состоит не более чем из одной стратегии). Множество всех недоминируемых слабо (ни одной другой стратегией) стратегий игрока i обозначается далее $\mathcal{ND}_{Wi}$, множество всех недоминируемых сильно – $\mathcal{ND}_{Si}$. Очевидно, сильное и слабое доминирование отличаются широтой образуемых ими классов стратегий:

$$\mathbb{D}_{Si} = \mathbb{D}_{Wi}, \text{ если оба непусты, но } \mathcal{ND}_{Wi} \subseteq \mathcal{ND}_{Si}.$$

По сути, доминирующей или независимо-оптимальной называют стратегию, приносящую выигрыш не менее любой другой *независимо от действий партнеров*. Понятно, что это не часто встречается. Но уж если встретилось - это позволяет сделать довольно надежное предсказание о ходе рассматриваемого игрока независимо от информационной структуры!

Сопоставьте доминирование с максиминной стратегией игрока на примере.

Пример доминирования. Пусть множество стратегий Анны есть $X_A = (a, b, c, d, e)$, и выигрыши ее заданы таблицей (выигрыши Виктора не приведены):

$Ann \backslash Victor$	x	y	z
a	$2, *$	$3, *$	$5, *$
b	$3, *$	$3, *$	$4, *$
c	$2, *$	$4, *$	$5, *$
d	$3, *$	$3, *$	$3, *$
e	$1, *$	$3, *$	$4, *$

В этом примере $\{b, d\} = X_{MM,A} \subset \mathcal{ND}_{S,A} = \{a, b, c\} \supset \mathcal{ND}_{W,A} = \{b, c\}$.

Сопоставляя далее доминирование с максимином, проверьте

Утверждение. *Осторожная стратегия игрока не может быть сильно- доминируемой, и среди осторожных есть слабо- недоминируемые:*

$X_{MMi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$ $\quad [X_{MMi} \neq \emptyset, \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset] \Rightarrow X_{MMi} \cap \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset$.

1.2 Доминирующее равновесие

Понятия доминирования, примененные *ко всем игрокам* сразу, позволяют сформулировать четыре типа решений, по два для сильной и для слабой концепции.

Определение 1.2.1 *Множество равновесий в (слабо) доминирующих стратегиях есть множество профилей (наборов) слабо-доминирующих стратегий игроков:*

$WDE := \prod_{i \in I} \mathbb{D}_{Wi} = (\mathbb{D}_{W1} \times \mathbb{D}_{W2} \times ... \times \mathbb{D}_{Wm})$.

Аналогично, множество равновесий в сильно-доминирующих стратегиях есть:

$S\mathbb{D}E := \prod_{i \in I} \mathbb{D}_{Si} = (\mathbb{D}_{S1} \times \mathbb{D}_{S2} \times ... \times \mathbb{D}_{Sm}).$

Множество профилей (наборов) слабо-недоминируемых стратегий игроков обозначим:

$W\mathcal{ND} := \prod_{i \in I} \mathcal{ND}_{Wi} = (\mathcal{ND}_{W1} \times \mathcal{ND}_{W2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Wm}).$

Аналогично, множество профилей сильно-недоминируемых стратегий обозначим:

$S\mathcal{ND} := \prod_{i \in I} \mathcal{ND}_{Si} = (\mathcal{ND}_{S1} \times \mathcal{ND}_{S2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Sm}).$

Пример 1.2 ("Симбиоз, или однозначная координация") Крупный грызун "медоед" типа россомахи, живущий в Африке, питается преимущественно медом диких пчел, а птичка "медовед" питается преимущественно воском от разоренных им диких "ульев". При этом птичка разведывает дупла - ульи, и ведет туда медоеда, криком призывая его за собой. Каждый из них может выбрать, объединиться ли с партнером. Решение этой игры (и всех подобных "симбиозов" в быту или экономике) очевидно и легко объяснимо по доминированию:

$$\begin{array}{r} \\ \text{alone} \\ \text{together} \end{array} \begin{bmatrix} alone & together \\ (0,\ 0) & (0,\ 0) \\ (0,\ 0) & (1,\ 1) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow WDE \end{array} \tag{2}$$

Таблица 3: Пример игры координации "симбиоз".

Сопоставим четыре концепции связанные с доминированием.

Очевидно, всегда $\mathcal{ND}_{Wi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$, поэтому $W\mathcal{ND} \subset S\mathcal{ND}$. Кроме того, очевидно, когда $S\mathbb{D}E \neq \emptyset$, то $W\mathbb{D}E = S\mathbb{D}E$. При этом $W\mathbb{D}E$ имеет больше шансов существовать: если есть слабо-доминирующие стратегии, это еще не значит, что есть сильно-доминирующие. Недоминируемые же решения существуют всегда (при компактности множеств стратегий и достижимых выигрышей), но часто оставляют слишком большую неопределенность решения. Сопоставляя слабо-доминирующие и слабо-недоминируемые стратегии некоторого игрока i, легко доказать (см. Мулен, 1985):

Утверждение 1.2.1 *Попарно эквивалентны три утверждения: 1)* $\mathbb{D}_{Wi} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ *2)* $\mathcal{ND}_{Wi} = \mathbb{D}_{Wi} \Leftrightarrow$ *3) все стратегии в* $\mathcal{ND}_{Wi}$ *эквивалентны.*

Отсюда, $W\mathcal{ND} = W\mathbb{D}$ *когда* $W\mathbb{D} \neq \emptyset$.

Выбор между введенными концепциями доминирования — сильной и слабой — неочевиден, с точки зрения правдоподобия их применимости. Иногда гипотеза поведения со слабым доминированием оправдана смыслом игры. А иногда – нет, как видно из игры на Таб. 4:

		Victor	
		x	y
Anna	a	$ 101, $ 100	$ 1, $ 100
	b	$ 101, $ 0	$ 3, $ 2 (WDE)

Таблица 4: Применимость слабого доминирования - неочевидна.

Здесь по слабому доминированию игра приходит к мало выгодному решению b, y. Оно вполне возможно в однократной игре без всякой информации, а другое, более выгодное, решение a, x кажется менее разумным прогнозом их поведения. Однако, если a, x – состояние не в однократной игре, а в некоторой *популяции*, то игроки могут не захотеть переходить от "равновесия" на (a, x) на индивидуально- нестрого-более выгодные позиции b и y, основательно опасаясь сползания популяции к выигрышам $(3, 2)$ при (b, y) (в сущности, здесь мы неявно подразумеваем не совсем корректное использование этой статической модели для описания динамической ситуации). Тем более подобные динамические соображения могут удержать от слабого доминирования, если это модель повторяющейся игры двух лиц. Даже и при однократном розыгрыше втемную, исход (a, x) не кажется слишком глупым: достаточно ли велика разница между 0 и 2, чтобы мотивировать отбрасывание слабо доминируемой стратегии x? Не повлияет ли на выбор Виктора его "порог чувствительности" или (не учтенное пока в таблице выигрышей) нежелание причинить вред своему партнеру? Впрочем, это бы означало, что игра неточно формализована в данной таблице: в ней учтены лишь денежные выигрыши, а должны быть учтены "полезности". Так или иначе, прежде чем применять ту или иную концепцию решения, желательно сопоставить ее с нашими представлениями о поведении и психологии партнеров.

Та же проблема и в популярном примере координации "Дилемма заключенных", где оба доминирующих решения существуют ($SDE = WDE \neq \emptyset$), и ярко показывают возможный вред некооперативного поведения.

Пример 1.3 "Дилемма заключенных" (R.Luce, H.Raiffa,1957).

Двух человек арестовали по подозрению в совершении двух разных преступлений, причем у каждого есть улики на партнера. Известно, что если один "стучит" на другого, а другой нет, то информатор получает 1 год наказания, а "молчун" – 10 лет. Если информируют оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным известно, что если никто из них не информирует, то оба получат по 3 года.

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (Табл.5), в клетках которой слева внизу стоит выигрыш первого заключенного, а справа вверху – второго. Таким образом, две матрицы выигрышей совмещены в одной диаграмме, каждая клетка отражает один из исходов. Это типичный способ представления игр с конечным множеством стратегий — "матричных" ("биматричных", по другой терминологии, не поддерживаемой нами).

		Victor	
		стучать стучать	молчать молчать
Anna	стучать	-7 -7 SDE	-10 -1
	молчать	-1 -10	-3 -3

Таблица 5: "Дилемма заключенных".

Здесь у каждого игрока имеется стратегия сильно доминирующая среди возможных стратегий – стучать. Ведь соответствующий вектор возможных выигрышей (-7,-1) строго доминирует над вектором (-10,-3), то есть $(-7, -1) \gg (-10, -3)$ поэтому
$SDE =${(стучать, стучать) }.

Забегая вперед, заметим, что все рассмотренные ниже виды некооперативных решений (равновесий) в этой игре совпадают (ниже формулируются их определения и соответствующее общее утверждение о совпадении разных решений в случае $SDE = WDE \neq \emptyset$). Действительно, худшее, что может получить заключенный, если стучит это 7 лет, если же не стучит, то 10 лет. Поэтому "осторожным" поведением для них будет сознаться. С другой стороны, каждому из них не выгодно изменять этот выбор при текущем выборе партнера, поскольку при этом он ухудшил бы свое положение. Поэтому это будет и равновесием по Нэшу. Далее, если первому из заключенных предложили сделать свой выбор первым (он находится в положении лидера), то он, зная, что реакцией второго на любой его выбор будет информировать, выберет наилучшее для себя – стучит. То есть равновесие Штакельберга будет там же. Сложное равновесие тоже совпадает с равновесием в доминирующих стратегиях. Любой некооперативный исход выглядит парадоксально- неудачным: ведь если бы оба не выбирали лучшее для себя по отдельности, и не стучали, то оба получили бы меньшее наказание, достигнув Парето-оптимума ($u_1 = -3, u_2 = -3$).

Такая неоптимальность довольно типична для некооперативных решений в разных играх. Если же участники способны скооперироваться и верят в выполнение соглашения партнером, то достигают ядра $(-3, -3)$, и одновременно Парето-оптимума.

Структуру игры аналогичную дилемме заключенных мы видим во многих играх, в частности, при рассмотрении *гонки вооружений* двух сверхдержав (СССР и США): при невысокой вооруженности обоих их безопасность выше, чем при высокой вооруженности обоих. Но при любой фиксированной вооруженности партнера безопаснее поднимать свою. Поэтому, при отсутствии сдерживающих договоров (кооперативного поведения) страны скатываются к не-Парето оптимальному, то есть невыгодному обоим состоянию: чрезмерной вооруженности.

Такая же структура игры у дуополии. Например, в дуополии Бертрана каждому конкуренту выгодно отклониться от монопольно- высокой цены, но после таких шагов обоих, оба продавца прогадают (и выгадают покупатели).

Пример игры с непрерывными стратегиями, где есть доминирующее равновесие – аукцион Викри (аукцион второй цены – см. задачник).

Во многих ситуациях, в отличие от оговоренных выше случаев (повторяющиеся ситуации и др.), концепция доминирующих равновесий WDE, весьма убедительна, а SDE - тем более. Но к сожалению, оба редко существуют, из-за частого отсутствия доминирующих стратегий.

Итак, когда доминирующее равновесие существует, то оно кажется вполне естественным (особенно – строго доминирующее) исходом некооперативной игры, причем не требующим от игрока никаких знаний о партнерах. Однако, игры чаще всего не имеют равновесия в доминирующих стратегиях. В этом случае возникает проблема выбора концепции равновесия (решения), которая бы наилучшим образом подходила к моделируемой ситуации. Как и во всяком моделировании, этот выбор подчинен интуиции исследователя, в нем трудно дать точные общие рекомендации. Мы рассмотрим здесь некоторый арсенал концепций, различающихся, в сущности, *ожиданиями* игроков: IND, SoE, NE, MM, StE, а позже коснемся попыток универсализации концепции решения.

1.3 Итерационно-недоминируемые решения IND_W, IND_S

Рассмотрим концепции решений, в которых подразумевается, что игроки информированы о целях друг друга, причем, это является “общим знанием”: все знают, что все всё знают о целях (рекурсия “я знаю, что ты знаешь” любой глубины). Также подразумевается, что игроки неограниченно дальновидны и расчетливы, и это тоже является общим знанием. По сути, в “итерационно недоминируемом” равновесии считается, что игроки, зная цели друг друга, последовательно отбрасывают свои доминируемые стратегии и ожидают того же от других, взаимно просчитывая ходы (я отбросил свои доминируемые стратегии, знаю, как партнер отбросил свои, и он знает о моих отброшенных, следовательно...). Итерации этих расчетов взаимного предсказывания могут привести к решению, называемому “итерационно-недоминирующим решением”. Оно возможно и в сильном и в слабом варианте.

Определение 1.3.1 *Определим вложенную последовательность игр* $G^1 \subseteq G^2 \subseteq ..., G^t, ...,$ *задавая каждый раз множество всех стратегий новой игры как прошлое множество (слабо) недоминируемых стратегий:* $X^{t+1} := \mathcal{ND}^t_W$ $(t = 1, 2, ...)$ *(предполагается что все игроки отбрасывают доминируемые стратегии одновременно).*[5] *Множество* IND_W *итерационно недоминируемых (слабо) исходов игры* G^1 *есть стационарное множество этой последовательности:* $IND_W := \mathcal{ND}^{\hat{t}}_W = \mathcal{ND}^{\hat{t}-1}_W$ $(\exists \hat{t} \geq 1)$.

Аналогично определена концепция итерационно сильно-недоминируемых исходов $IND_S := \mathcal{ND}^{\hat{t}}_S = \mathcal{ND}^{\hat{t}-1}_S$ $(\exists \hat{t} \geq 1)$*, отличаясь только сильным типом доминирования.*[6]

[Неформально, решение в итерационно- (слабо-)недоминируемых стратегиях (INDW) - это исход игры в случае одновременного итерационного отбрасывания (слабо-) доминируемых стратегий каждым игроком и соответствующего редуцирования игры: исключения отброшенных стратегий из рассмотрения ВСЕМИ игроками. Требует знания или целей партнеров или факта отбрасывания стратегий. Аналогично INDS, только доминирование - сильное. Сложное равновесие SoE - это INDW, при эквивалентности, по доминированию, финальных стратегий. В терминах ожиданий, эту концепцию решения можно сформулировать так: я, зная цели партнеров, и зная, что они знают мои цели, ожидаю от партнеров неограниченно-глубокой (по глубине индукции) рациональности, то есть расчета наших взаимных шагов по отбрасыванию “плохих” стратегий. Это хорошая концепция решения для гроссмейстеров, играющих в шахматы, но не для новичков.]

Заметим, что остаться в итоге могут только взаимно несравнимые или эквивалентные стратегии. Эквивалентность моих стратегий в финальной игре не означает, что выигрыши не зависят от деятельности партнера, и сложные равновесия (как и доминирующие) могут включать исходы с различными выигрышами всех игроков:

В игре на Табл. 6 у обоих участников все стратегии эквивалентны, поэтому вся игра есть $SDE = SoE = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y)\}$. Но выигрыши различны!

---

[5] Рассматривают также равновесия с неодновременным отбрасыванием худших стратегий, а с заданной последовательностью отбрасываний (Мулен, 1985, стр.40). Они подобны вводимым ниже равновесиям игр в развернутой форме и равновесиям Штакельберга.

[6] Множество *сложных равновесий* SoE_W или SoE (sophisticated equilibrium) есть такое $INDW$, где каждый игрок имеет только эквивалентные стратегии в финальной игре $G_{\hat{t}}$, иначе считают, что $SoE_W = \emptyset$ (Это не значит, что все исходы приносят одинаковые выигрыши, см. Табл. 6). Если $SoE_W \neq \emptyset$, тогда говорят, что игра “разрешима по (слабому) доминированию”. Аналогично определяется разрешимость по сильному доминированию’, влекущая слабую.

	$--x--$	$-----y--$
a	$2,\ 2\ (SDE)$	$0,\ 2\ (SDE)$
b	$2,\ 0\ (SDE)$	$0,\ 0\ (SDE)$

Таблица 6: Множество неэквивалентных доминирующих решений, SDE=SoE.

Применение концепций сильного и слабого итерационного доминирования – рассмотрите на примере “Экзамен” (Табл. 9).

Заметим, что решение $INDW$ может зависеть от порядка слабого доминирования (см. пример (Табл. 16)), в отличие от сильного, где порядок ходов **безразличен** (докажите). Какую из концепций – сильную или слабую – предпочесть, и какой порядок отбрасывания является реалистичным – тонкий вопрос. Ответ определяется дополнительной информацией об игре (далее мы касаемся этого в динамических играх).

1.4 Игры в популяциях и равновесие Нэша

Заметим, что разрешение игры по итеративному доминированию не обязательно отражает знание целей и соображений партнеров, а может быть применимо и к другим ситуациям. Эти *“популяционные”, “эволюционные”* ситуации играют в дальнейшем изложении большую роль. (ср. книгу Васин “Эволюционные игры”.)

Подразумевается, что конкретная однократная игра между партнером типа А и партнером типа В – есть одна из *типичных* игр в достаточно большой популяции подобных игр. Тогда свои ожидания о поведении партнера (и, возможно, косвенно о его целях) каждый игрок строит по прошлому опыту подобных игр. Скажем, конкретный пассажир, раздумывая, торговаться ли с таксистом или это бесполезно, учитывает свой опыт в этом деле с другими таксистами. В таких ситуациях устойчивое в каком-то смысле решение игры естественно называть “равновесием” этой популяции.

Интерпретация итеративного доминирования в такой трактовке иная, чем ранее: однажды некоторые игроки отбросили (перестали использовать) доминируемые стратегии – и игра уменьшилась (принимаемое во внимание множество возможных стратегий стало у′же). Их партнеры это наблюдали, и в следующих розыгрышах кто-то отбросил еще какие-то стратегии, это все наблюдали, игра опять уменьшилась и т.д. Очевидно, когда итеративно строго-недоминируемое решение единственно, то оно выглядит совершенно естественным “равновесием” такой популяционной игры, и не требует знания целей партнеров. Не-единственность же равновесия и/или только слабое доминирование могут вызывать вопросы к понятию решения. Какое из нескольких равновесий более правдоподобно? Какая концепция – сильная или слабая – лучше прогнозирует исход? Прежде чем сопоставить на примерах сильное и слабое доминирование, введем еще одну, конкурирующую с ними (особенно в популяционных ситуациях), концепцию равновесий.

Наиболее часто к ситуациям без знаний целей партнеров применяют концепцию равновесия Нэша — это *“рациональное решение при таких ожиданиях ходов партнеров, где все ожидания оправдались”*.

Выражая это формально, обозначим $\beta_i^j \in X_j$ ожидание (belief) игрока i о выбранной стратегии игрока j.

Профиль (набор) стратегий и ожиданий $(\bar{x}, \bar{\beta}) = (\bar{x}_i, (\bar{\beta}_i^1, ..., \bar{\beta}_i^n))_{i \in N} \in X \times (X \times ... \times X)$ можно назвать Нэшевским равновесием в терминах ожиданий, если:

1) решение $\bar{x}_i \in X_i$ каждого игрока является наилучшим для него ответом на ожидаемые ходы $\bar{\beta}_i^{-i} \in X_{-i}$ прочих игроков, в смысле: $u_i(\bar{x}_i, \bar{\beta}_i^{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \bar{\beta}_i^{-i})$;
2) все ожидания совпадают с истинными выбранными стратегиями: $\bar{x}_i = \bar{\beta}_j^i$ $(\forall i, j)$.

Скажем, в примере “Семейный спор” (Футбол или кино) на Рис. 1.1 два таких равновесия ((футбол,футбол),(кино,кино)), причем одно из них выгоднее для Анны, другое – для Виктора. Аналогично и в игре “Перекресток” два неравноценных равновесия Нэша.

В некоторых играх равновесие Нэша может выражать идею *наблюдаемости текущих ходов* партнеров. Скажем, в игре “Перекресток”, если Анна видит, что Виктор не тормозит, а Виктор видит, что Анна тормозит, то этот исход и реализуется; никто не отступит от текущей стратегии. Впрочем, подобные динамические рассуждения (в том числе об игре “Перекресток”) не совсем корректны, возникают мотивы угроз. Точнее было бы обсуждать подробно последовательность моментов сохранения стратегии, то есть повторяющуюся динамическую игру (см. далее). Более адекватно концепция Нэша применима к повторяющейся игре среди *популяции* игроков, а не пары игроков. Тогда мои ожидания некоторого поведения от моего сегодняшнего партнера могут быть основаны на прошлом опыте взаимодействия с *другими* подобными партнерами, но мотивы угроз не возникают, и не искажают решения.

По сути, Нэшевское равновесие родственно равновесиям в доминирующих стратегиях в том смысле, что $\mathbb{D}E, INDS, INDW$ “глобально стационарны” среди всех стратегий, а Нэшевское равновесие — по крайней мере “локально стационарно”. Совпадение ожиданий с истинным выбором позволяет упростить его определение, не формулируя ожиданий явно, ограничиваясь стратегиями:

Определение 1.4.1 *Равновесие по Нэшу есть профиль стратегий, от которого никому нет выгоды отклоняться, если партнеры не отклоняются. Соответственно, множество нэшевских равновесий есть:*

$$NE := \{\bar{x} \in X |\ y_i \in X_i \Rightarrow u_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \geq u_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \qquad \forall i \in I\}, \tag{3}$$

если же все неравенства строгие, то говорят о строгих равновесиях по Нэшу (SNE).[7]

Иными словами, Нэшевское равновесие – точка из которой ни одному игроку нет пользы уходить (он либо ничего от этого не приобретает, либо теряет) при текущих ходах партнеров, а строгое Нэшевское равновесие – точка, из которой *вредно* уходить.[8] Иначе эту идею можно выразить через понятие “рационального отклика” или лучшего ответа на действия партнеров (“best response”).

Отображение (то есть многозначная функция) $\mathcal{X}^*{}_i(.)\ :\ X_{-i} \mapsto X_i$ *рационального отклика* i-го участника на ожидаемые действия x_{-i} его партнеров состоит из аргументов, максимизирующих его целевую функцию:

$$\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i}) = \{x_i \in X_i |\ u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})\ \forall y_i \in X_i\}. \tag{4}$$

[7]Не путать с понятием сильного равновесия Нэша, подразумевающим коалиционную устойчивость.

[8]Иногда еще вводят понятие *сильных* или коалиционных равновесий Нэша - когда ни одна коалиция не может улучшить своего положения. Такие равновесия редки.

В этих терминах, Нэшевское равновесие – это профиль рациональных откликов всех игроков на рациональные отклики партнеров:

$$\bar{x} \in NE \Leftrightarrow \bar{x} \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\bar{x}_{-i}).$$

Понятие NE может оказаться применимо в разных случаях. Наряду с популяционной ситуацией, и в однократной игре может случиться, что ожидания партнеров почему-либо "сфокусированы" на каком-либо профиле стратегий, считающемся вероятным. Например, в игре координации "семейный спор", если оба почему-то ожидают от партнера выбор "кино", или хотя бы я ожидаю, что партнер ожидает такой выбор от меня (например, известна уступчивость Виктора, или было сделано какое-то намекающее сообщение), то это и случится. Этот довольно распространенный эффект "самоподдерживающихся ожиданий" называют еще **"эффектом фокальной точки"** (focal point, подробнее обсуждается ниже). В некоторых ситуациях эта фокальная точка возникает в результате предварительных переговоров. Тогда Нэшевское равновесие рассматривают как полу-кооперативную концепцию: если оно принадлежит ядру (определяемому ниже), то это "такое соглашение, от которого никто не склонен отступать", по крайней мере, если ожидает не отступления партнеров.

Напротив, в "Дилемме заключенных" хороший для обоих участников исход (молчать,молчать) таким естественно-устойчивым соглашением быть не может, а требует каких-то мер принуждения к выполнению такого соглашения. В этом смысле принадлежность некоторого соглашения к NE – важное преимущество.[9]

Оказывается, Нэшевское решение, может быть естественным исходом и в противоположной – "совсем некооперабельной" ситуации, то есть в *антагонистических* играх.

Определение 1.4.2 *Антагонистической называют игру с одинаковой (например, нулевой) суммой выигрышей при любом исходе, т.е. такую, что*
$\sum_{i \in I} u_i(x) = s \quad \exists s \in I\!R, \forall x \in X.$[10]

В таких играх тоже применяют NE, точнее, его сужение, называемое "седлом" или седловой точкой.

Определение 1.4.3 *Множество седловых точек есть*

$$Sad := MM \cap NE$$

Это те Нэшевские равновесия, где худшие предположения о партнерах сбываются.

Например, в играх "Семейный спор" и "Перекресток" седла нет: максимин и Нэшевское решение не пересекаются. Впрочем, существование и самого NE не всегда гарантировано, см. игру "Монетки" (Табл. 7).

В повторяющихся играх типа игры "Монетки" под NE может подразумеваться, что каждый игрок наблюдает определенный текущий выбор партнеров на предыдущем шаге и ведет себя *близоруко* – не учитывает, что партнеры могут изменить свой

[9]В качестве упражнения на эту тему, рассмотрите всевозможные варианты подобных игр 2x2 с точки зрения совместимости кооперативного и не-кооперативного поведения.

[10]Синонимы – игра "с противоположными интересами", "с нулевой суммой". Как ни покажется странным, но в этой терминологии войну, в отличие от шахмат, нельзя назвать антагонистической игрой, поскольку обе стороны могут очень пострадать в одних вариантах действий и не очень – при других.

		Victor: guessing	
		guess Left	guess Right
Anna	hold Left	-1, 1	1, -1
	hold Right	1, -1	-1, 1

Таблица 7: Игра “Монетки”: Нужно угадать, в какой руке у партнера монетка, тогда ее забираешь, иначе – отдаешь свою (Анна держит, Виктор угадывает). $NE = \emptyset$.

выбор когда он изменит свой (неполная рациональность). Пустоту $NE = \emptyset$ тогда надо рассматривать как несуществование стационарных точек такой игры: игра "болтается". Заметим, что применение концепций доминирования (INDW, INDS) в этой игре тоже никак не увеличивает определенность наших предсказаний о ее исходах: вся исходная игра недоминируема.

1.4.1 Смешанные стратегии и смешанное равновесие NE_m

Мы отмечали, что в повторяющихся играх типа игры “Орлянки или Чет-нечет (Монетки)” несуществование решений $NE = \emptyset$ можно рассматривать как “раскачивание” игры. При отсутствии стационарного решения типа NE (а иногда и в других случаях, в популяциях игр) естественно пользоваться вероятностной концепцией решения (исхода) игры: как игроки будут ходить *в среднем*? Для этого используется понятие ожидаемой полезности.

> **Лотереи, ожидаемая полезность.** Пусть имеется множество $Q = \{1, 2, ..., q\}$ возможных в мире событий, причем оно задано полным (все возможные события учтены), события взаимоисключающие, и субъективные вероятности событий (мнение рассматриваемого игрока i) есть $\sigma_i := (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq}) \in I\!R^q_+, \sum_{k \le q} \sigma_{ik} = 1$. Пусть полезность набора $x \in X$ для рассматриваемого игрока выражена “элементарной” целевой функцией $u_i(x)$. Вектор $(x_1, ..., x_q) \in (X \times ... \times X)$ вместе с ассоциированными вероятностями событий $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq})$ можно назвать *лотереей*: заданы уровни выигрыша в каждом событии и вероятности. Мы называем участника максимизирующим ожидаемую полезность (участником типа Неймана-Моргенштерна), если его выбор среди всех возможных лотерей описывается функцией вида $U_i(\bar{x}) = \sum_{j \in Q} \sigma_j u_i(x_{ij})$, то есть функцией линейной по вероятности, или, иначе, матожиданием полезности. Именно такими мы и будем считать участников игр далее.

Итак, пользуясь идеей "средней полезности”, в повторяющейся игре “Орлянка или Чет-нечет (Монетки)” мы можем искать вероятностное решение: насколько часто каждый игрок в среднем будет делать тот или иной ход. Для этой игры естественная гипотеза - с равной вероятностью оба ходят левой и правой рукой: ((0.5,0.5),(0.5,0.5)).

Но как проверить эту догадку и обосновать ответ, если он верен? Идею равновесия, о котором мы догадываемся, можно сформулировать так.

Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях исходной игры - есть Нэшевское равновесие в ее смешанном расширении (то есть профиль вероятностей применения чистых стратегий, при котором ни один игрок не может меняя свою вероятностную стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных стратегиях партнеров).

		Victor: guessing	
		guess Left =0.5	guess Right =0.5
An-	hold Left =0.5	-1, 1	1, -1
na	hold Right =0.5	1, -1	-1, 1

Таблица 8: Смешанное расширение игры "Монетки": вероятности ходов есть $NE_m = ((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$.

То же самое в более формальных терминах:

Определение 1.4.4 *Для игры G, где у каждого игрока $i \in I$ есть конечное число $(n_i \geq 1)$ стратегий $X_i = \{x_{i1}, ..., x_{in_i}\}$, определим смешанную стратегию каждого игрока i как набор вероятностей*[11]
$\sigma_i = (\sigma_i^k)_{k=1}^{n_i} = (\sigma_i^k(x_i^k))_{k=1}^{n_i} \in \Omega_i := \{\sigma_i \in I\!R_+^{n_i} | \quad \sum_{k=1}^{n_i} \sigma_i^k = 1\}$ с которыми данный игрок применяет соответствующие исходные "чистые" стратегии $x_i^k \in X_i$. Определим смешанное расширение игры $G_m := \langle I, (\Omega_i)_I, (U_i)_I \rangle$, как игру, где допустимые множества есть наборы вероятностей $\Omega_1, ..., \Omega_m$, а целевая функция любого игрока есть матожидание выигрыша:

$$U_i(\sigma) := \sum_{(x_1, x_2, ..., x_m) \in X} \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \cdot ... \cdot \sigma_m(x_m) \cdot u_i(x_1, x_2, ..., x_m) \tag{5}$$

Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях $\bar{\sigma} \in NE_m$ исходной игры G есть Нэшевское равновесие в ее смешанном расширении G_m, то есть набор $(\bar{\sigma}_i)_I$, таких, что ни один игрок не может меняя смешанную стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных (смешанных) стратегиях партнеров.

(Аналогично можно определить понятие NE_m для игры с бесконечным множеством стратегий, только смешанные стратегии σ_i оказываются не векторами, а вероятностными мерами, матожидания – из сумм превратятся в интегралы. Переход к смешанному расширению (то есть к вероятностному варианту) игры овыпукляет ее множество стратегий и множество достижимых уровней полезности. Это благоприятно сказывается и на существовании Нэшевских равновесий (см. теорему Нэша ниже), и на возможности их охарактеризовать.)

Итак, пользуясь введенным определением решения, легко для примера "Монетки" составить неравенства, которым должны бы удовлетворять вероятности (α_L, α_R), применяемые Анной к левому и правому ходу, и аналогичные неравенства для смешанных стратегий Виктора (ν_L, ν_R). А именно, тот факт, что Анна не хочет ни увеличивать ни уменьшать частоту применения Левой стртегии за счет правой, означает, что обе приносят одинаковую ожидаемую полезность при заданных вероятностях (смешанных стратегиях (ν_L, ν_R)) Виктора:

$$U_A((\alpha_L = 1, \alpha_R = 0), (\nu_L, \nu_R)) = -1 * \nu_L + 1 * \nu_R =$$

$$= U_A((\alpha_L = 0, \alpha_R = 1), (\nu_L, \nu_R)) = -1 * \nu_R + 1 * \nu_L.$$

Это уравнение укажет, что равенство полезностей возможно лишь при равных вероятностях ходов партнера $\nu_L = \nu_R = 0.5$. Аналогичное уравнение относительно равных полезностей Виктора даст искомые равновесные стратегии Анны $\alpha_L = \alpha_R = 0.5$.

[11]Обычно имеют в виду популяционную или повторяющуюся игру. Обозначение m – от англ. "mixed".

(Упражнение: Найдите аналогично NE_m в аналогичной игре герцога де Монмора (см. Мулен 1985): Отец, герцог, желая развить сообразительность сына, каждое утро предлагал ему сыграть в "Монетки", но не брал с него ничего при не-угадывании (в какой руке у отца монетка), давал золотой за угадывание в левой руке, и два золотых - за угадывание в правой.)

Возвращаясь к теории, легко заметить, что к расширенной в вероятностное пространство игре можно применять все те же приемы, что и к исходной, а обычные равновесия Нэша остаются равновесиями и в вероятностном расширении игры (ведь чистые стратегии – это просто орты в пространстве вероятностных стратегий).

Теперь, применяя уже для смешанного расширения игры ранее использованное понятие сильного доминирования, можно сузить множество недоминируемых стратегий еще одним методом, альтернативным к слабому доминированию и расширяющим множество сильно доминируемых:

Определение 1.4.5 *Стратегию x_i назовем смешанно-доминируемой, если существует смешанная стратегия $\sigma_i \in \Omega_i$ сильно доминирующая над x_i.*

Пример: три стратегии дают игроку выигрыши (4,1), (1,4), и (2,2) соответственно. Ясно, что ни одна из трех не доминирует другую ни сильно ни слабо, но комбинация первых двух с весами 0.5 смешанно-доминирует третью. Полезно -

Утверждение. *Некоторая чистая стратегия может быть смешанно- недоминируемой тогда и только тогда, когда является рациональным откликом на некоторую смешанную (возможно, чистую) стратегию партнеров.*

Этот факт следует из овыпукления игры при ее смешанном расширении (док. см. Myerson 1999, Данилов 2002). Из него можно вывести вложение $NE \subseteq INDS$ (покажите).

Наиболее интересно он отражается на антагонистических играх.

Для антагонистической игры двух лиц *ценой игры u_{sad}* называют полезность первого игрока в седловой точке Sad, то есть

$$u_{sad} := \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2) \ = \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) \ .$$

Если седловой точки, то есть пары стратегий удовлетворяющей этому равенству нет, то игру считают неразрешимой по принципу седла, то есть "не имеющей цены".

Легко заметить, что
антагонистическая игра двух лиц (где $u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_1, x_2)$) имеет цену тогда и только тогда, когда функция $u_1(.,.)$ имеет седловую точку на $X_1 \times X_2$.

Смешанное же расширение игры всегда имеет цену (теорема фон Неймана, см. ниже).

1.4.2 Множественность равновесий Нэша, "фокальные точки" и борьба за лидерство: равновесие Штакельберга (последовательные ходы)

Рассмотрим проблему, возникающую, когда равновесие Нэша не одно. Какое из них считать более вероятным исходом? Это популярная тема "сужения" или "очищения", рафинирования (refinement) множества равновесий от малоправдоподобных. Мы уже касались одного способа рафинирования. Это пересечение NE с другими решениями: с DE или с максимином, или с итерационно-недоминируемым множеством. Вообще говоря, исход, удовлетворяющий не одной концепции решения, а двум и более - вызывает больше доверия, кажется правдоподобнее.

Впрочем, в некоторых играх нет никаких оснований предпочитать, в качестве предсказания, одно равновесие другому. Наиболее хорошо это видно в игре координации с односторонними преимуществами типа "Перекресток"(Chicken game). В таких случаях часто можно считать, что выбор из многих возможных равновесий произойдет по принципу "фокальной точки", то есть не зависит от включенных в рассмотрение данных.

Поясним это важное в играх с множеством равновесий понятие. Положив шарик в строго вогнутую чашу, мы единственным образом предскажем равновесие - это "обусловленное" равновесие, а не "фокальное". Напротив, положив шарик на горизонтальную поверхность, мы можем предсказать, что куда его положишь, там он и останется в равновесии. Это и называют

эффект "фокальной точки": зависимость положения равновесия от начальной точки, или даже превращение любой начальной позиции в равновесие.

Как уже говорилось, в примере игры координации "семейный спор", если оба почему-то ожидают от партнера выбор "кино", (например, известна уступчивость Виктора, или было сделано какое-то намекающее сообщение), то это и случится. Этот довольно распространенный эффект "самоподдерживающихся ожиданий" как раз и является **"эффектом фокальной точки"**.

Так, культурные нормы и традиции часто порождают фокальные равновесные точки в определенных играх с многими потенциальными равновесиями (или порождаются как фокальные точки?). Скажем, левостороннее движение транспорта в Англии и правостороннее на континенте - типичные фокальные точки.

Более интересен пример фокальной точки нелегитимного политика. Тут тоже действет правило самоподдерживающихся ожиданий: "если люди верят, что у тебя есть власть, то у тебя она есть (люди слушаются)". От дополнительных факторов игра может перескочить в другое равновесие, тоже устойчивое.

Аналогично, в игре координации "Перекресток", если Анна верит, что Боб никогда не тормозит, то сама будет тормозить. В результате сложится равновесие более выгодное для Боба. Аналогично можно рассуждать при противоположных ожиданиях партнеров - Анна в выигрыше. И оба равновесия устойчивы (в смысле строгой невыгодности индивидуальных отклонений).

Из этих рассуждений следует, что в игре координации с многими разно-выгодными равновесиями выгодно бы сходить первым, и захватить лучшую позицию (в "Перекрестке" – позицию "не торможу"). В некоторых ситуациях такая возможность нарушить одновременность и симметрию есть, и приводит к следующей концепции решения (строго говоря, относящейся уже не к этому разделу, а к последовательным играм).

В *равновесии Штакельберга* (Stackelberg), в отличие от рассмотренных концепций решения "симметричных" относительно игроков, ожидания разных игроков формируются по разным принципам. Первый игрок (лидер) ориентируется на индивидуально - оптимальные ответы партнеров зная их предпочтения, а остальные (ведомые) играют, как в NE, близоруко реагируя на его ход и на ходы друг друга. Скажем, на рынке алмазов фирма Де Бирс, контролирующая более 70% продаж, при выборе цен просчитывает отклики на это мелких продавцов, а они играют примитивно подстраиваясь под лидера. Ведь каждый из “мелких” не рассчитывает существенно повлиять на рынок в целом! Эта несимметричная концепция решений годится также для случая, когда лидер просто ходит первым, независимо от силы его влияния (последовательная игра).

Равновесие Штакельберга с лидером No 1 есть такой профиль (набор) стратегий всех, что первый игрок (лидер) с учетом цедей партнеров адекватно прогнозирует равновесия Нэша, складывающиеся после его хода, и оптимизирует свою стратегию соответственно, а остальные поступают согласно его прогнозу. Более формально:

Определение 1.4.6 *Считая 1-го игрока лидером, обозначим решение Нэша среди последователей при фиксированной стратегии $\bar{x}_1$ лидера – через $NE_{-1}(\bar{x}_1)$.*

Равновесие Штакельберга с лидером No 1 ($StEP_1$) есть такой набор $\bar{x}$ что

$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in NE_{-1}(\bar{x}_1), \tag{6}$$

$$\nexists \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \in X_1 : \ \mathbf{u_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_{-1}) > \mathbf{u_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1}) \ \ \forall (\tilde{x}_{-1} \in NE_{-1}(\tilde{x}), \bar{x}_{-1} \in NE_{-1}(\bar{x})). \tag{7}$$

В частности, осторожное (пессимистическое) равновесие Штакельберга[12] *с лидером N 1 есть такой набор $\bar{x} \in StEP_1$, что*

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(x_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_{-1}}),$$
$$\bar{\mathbf{x}}_{-\mathbf{1}} \in \arg \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(\bar{x}_1)} \mathbf{u_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \mathbf{x_{-1}}).$$

Оптимистическое равновесие Штакельберга с лидером N 1 $\bar{x} \in StEO_1$ определяется так же, но с заменой min *на* max.

Повторим, равновесие Штакельберга может возникать, например, когда один из игроков (лидер) делает свой выбор раньше других (“ведомых”) и знает их цели. Или когда он один, а однотипных “ведомых” достаточно много, чтобы каждый не пытался просчитывать общие последствия своего хода. Концепция $StEO_1$ предполагает доброжелательность партнеров к лидеру при выборе из эквивалентных для себя вариантов (из $\mathcal{X}^*$), а $StEP_1$ — недоброжелательность; если же выбор “ведомых” однозначен, то разницы между $StEO$ и $StEP$ нет. Если не различать оптимистические и пессимистические решения, то можно определить $StE = \{StEO, StEP\}$

Повторим рассуждения о “борьбе за лидерство”. Смысл борьбы за лидерство, скажем, в игре “Семейный спор” (“Battle of Sexes” - Рис. 1.1) таков. Рассмотрите возможность одному из игроков, например, Виктору, сообщить другому (Анне) свое решение: футбол. Эта возможность ставит его в положение Штакельберговского лидера, и позволяет форсировать более выгодное для себя из двух Нэшевских равновесий. Аналогично и для второго игрока. (А есть игры, где выгодно, наоборот, уступить первый ход - “борьбе за не-лидерство”.) То есть, понятие “борьбы” предполагает, что рассматриваемая игра вложена в более широкую, где можно выбрать, совершать ли первый ход, попадая в игру с решением Штакельберга.

[12] Наши определения $StEO_i, StEP_i$ не традиционны. Обычное же StE есть, забегая вперед, просто SPE в двух-стадийной игре.

1.5 Кооперативные решения - Парето-оптимум и ядро

В заключение обзора наиболее типичных решений статических игр, напомним также основные понятия *кооперативных* решений, то есть возможных исходов *переговоров* участников. В данном случае мы планируем применять их для той же некооперативной игры, в которой рассматривались Нэш и другие решения. Смысл этого таков: а что если бы участники этой игры вступили в переговоры, к какому соглашению это могло бы вести?

Определение 1.5.1 *Назовем (сильным) множеством Парето (Парето-оптимумом, или "сильной Парето-границей") множество неулучшаемых по Парето точек (исходов), то есть множество исходов неблокируемых-слабо большой коалицией I:*
$$\mathcal{P} := \{\hat{x} |\ \ \nexists x \in X\ \ : u(x) > u(\hat{x})\},$$
Слабая Парето-граница есть множество исходов неблокируемых-сильно большой коалицией I: $\mathcal{P}_W := \{\hat{x} |\ \ \nexists x \in X\ \ : u(x) \gg u(\hat{x})\}$.

Итак, Парето-оптимум — это такое состояние, в котором никто из участников не может увеличить своего выигрыша не уменьшив выигрыша кого-то другого, а слабый Парето-оптимум — это состояние, неулучшаемое для всех сразу (т.е., по сильному доминированию большой коалиции).

Учитывая также и возможности других коалиций, получим один из вариантов определения ядра:

Определение 1.5.2 *Ядром* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_W$ *(обычным, слабым ядром) называется множество состояний неблокируемых никакой коалицией $T \subset I$, при обычном (сильном) определении блокирования: T блокирует вариант $x \in X$ если существует альтернатива $\tilde{x}_i \in X_i$ $(i \in T)$ такая, что все участники из T выигрывают по сравнению с x, т.е.*[13] $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x_T, x_{-T})$ *— при любых действиях x_{-T} не входящих в коалицию T игроков.*

Сильным ядром $\mathcal{C}_S$ можно назвать множество состояний, неблокируемых никакой коалицией при слабом блокировании (что означает $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) > u_T(x)$ вместо $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x)$ в определении блокирования). Но такое понятие в теории не употребительно. Употребительное (слабое) ядро – это множество вариантов, вне которого соглашений *заведомо* быть не может, а сильное - менее очевидная концепция. Еще нужно добавить, что ядро в терминах исходных стратегий, а не выигрышей тоже мало употребительно, поскольку во многих играх неочевидно, как описать возможности коалиций, особенно малых. Различные варианты определений ядра, связанного с игрой в нормальной форме: α-ядро, β-ядро, γ-ядро – см. в книгах Мулен, 1985, 1991.

Чтобы применить понятие ядра к игре заданной в нормальной форме, нужно договориться, что считать "точкой несогласия", или иначе, "точкой угрозы" в переговорах. Есть несколько естественных вариантов. Иногда, участники считают, что в случае неуспеха их переговоров игра попадет в равновесие Нэша. Если оно единственно, то так можно искать соответствующее ядро, иначе нужны дополнительные соображения.

Альтернативно, и довольно естественно для случая "угроз", точкой несогласия для каждого игрока считать уровень его полезности, *гарантированной* при осторожном

[13] Для пар векторов знак $>$ здесь и далее означает $\geq \neq$, а знак $\gg$ — покомпонентно больше. В сущности, здесь вектор выигрышей коалиции T от альтернативы $\tilde{x}_i$ сильно доминирует ($\gg$) над вектором выигрышей от альтернативы x_i.

поведении. Тогда ядро называют α-ядром, и для игры двух лиц это понятие имеет очевидный смысл.

Аналогично, можно расширить это понятие и для произвольного числа игроков, найдя гарантированные выигрыши любой коалиции. Но здесь могут быть тонкости, в которые мы вникать не будем, ограничившись простым случаем 2-х лиц, и не обсуждая других ядер, кроме α-ядра.

Упражнение. В рамках обсуждения кооперативных решений, можно сравнить для игры 2-х лиц дележ Нэша и дележ Калаи-Смородинского (известные из других курсов) с α-ядром.

1.6 Нахождение и сопоставление разных решений

Сопоставим все введенные понятия решений на примере единой (би-)матричной игры.

Пример 1.4 Студент и экзаменатор (Поиск решений матричной игры)

Рассмотрим гипотетическую популяцию ленивых студентов и более-менее старательных преподавателей. За точку отсчета возьмем случай, когда студент учит, а преподаватель внимательно смотрит на экзамене за наличием шпаргалок: студент имеет 5, и удовлетворение преподователя оценим в 5 (см. Табл. 5). Если при внимательном экзамене студент не учит, то имеет оценку 2, но +1 от приятно проведенного в семестре времени, в целом 3, а удовлетворение преподователя 2. Если при невнимательном экзамене, но с дополнительными вопросами, студент учит, то имеет оценку 5, но -1 от утомления на экзамене, в целом 4, а удовлетворение преподователя тоже 5, но -1 от утомления, в целом 4. Если же в этом случае студент не учит, то имеет 3 (все же он что-то рассказал) +1 от отдыха в семестре, всего 4. Осталось предположить малое моральное удовлетворение =3 преподавателя от плохого экзамена, еще немного гипотез, и получим игру Табл. 9.

		Студент			
	Стратегии и выигрыши	Учить (У)	Шпорить (Ш)	Гарантир. выигрыш	Расчетный выигрыш
Препо-	Смотреть	SoE 5	3		
	строго (С)	5 SNE	2	2	5 *
дава-	мягко, но	4	4		
	с Вопросами (В)	4	3 NE	3 *	4 или 3
тель	Мягко, без	5	6		
	вопросов (М)	3	3 NE	3 *	3

Таблица 9: Игра "Экзамен".

В подобных ("матричных") играх с конечными множествами стратегий двух игроков легко проверить наличие доминирующих стратегий: достаточно сравнить вектор выигрышей (5,4,5) при стратегии "Учить" с вектором (3,4,6)- "Шпорить", чтобы заметить, что они несравнимы, следовательно доминирующих стратегий у студента нет, тогда и доминирующего равновесия нет: $\mathbb{D}E = \emptyset$.

Осторожное равновесие практически ищется так: игрок выбирающий строки в каждой строке находит свой гарантированный выигрыш (то есть минимум в строке), а затем в качестве решения принимает строку или строки с максимальным гарантированным выигрышем. Аналогично поступает со столбцами игрок выбирающий столбцы. В данном случае две нижние клетки - среди осторожных решений $MM = \{$(В,У),(М,У)$\}$. Возможно, при однократной встрече некоторой группы с некоторым (впервые приглашенным в университет) преподавателем такое осторожное решение реалистично. Чаще же можно ожидать, что популяция студентов знает по прошлому опыту типичную стратегию преподавателя(-лей), тогда уместнее искать NE.

Множество Нэшевских равновесий ищем перебором всех клеток; равновесия – это клетки из которых первому участнику не выгодно "уйти вверх или вниз", а второму - "уйти в сторону" - то есть сменить стратегию при фиксированной чужой; здесь таких три: $NE = \{$(С,У),(В,Ш),(М,Ш)$\}$. Последнее наиболее благоприятно для студентов, но его реалистичность сомнительна, если преподаватели склонны отбрасывать слабо доминируемые стратегии.

Итерационно недоминируемое (слабо) множество $INDW$ ищем последовательным исключением из игры доминируемых строк и столбцов. На первом шаге рассуждений стратегия В=(4,3)>М=(3,3) слабо доминирует нд М, а у студента нет доминирования (иначе бы мы одновременно отбросили и его доминируемые стратегии). Таким образом, если об типа игроков действительно отбрасывают слабо доминируемые стратегии и знают партнера, то стратегия М невозможна, и по сути рассматривается игра 2х2: $\{$(С,У),(С,Ш),(В,У),(В,Ш)$\}$. Тогда для студента стратегия У=(5,4)>Ш=(3,4), и последняя на втором шаге рассуждений отбрасывается, что понятно преподавателю, остается игра 2х1: $\{$(С,У),(В,У)$\}$. Аналогично, на третьем шаге, по рациональности преподавателя, останется игра 1х1: INDW=SoE= $\{$(С,У)$\}$, то есть итерационно-недоминируемое множество свелось к однозначному по выигрышам исходу и является поэтому SoE. Напротив, по сильному доминированию здесь нельзя отбросить ни одной стратегии, поэтому INDS - это вся исходная игра.

Решение Штакельберга, если лидер - первый игрок, ищем, приписывая каждой стратегии (строке) расчетные оценки его выигрыша, с учетом ответного ход партнера (Нэшевского отклика). Среди них наилучшей для него является С=5, поэтому решение StE=(С,У)=(5,5). Если бы вместо (5,5) в клетке (С,У) были выигрыши (3.5,5), то преподаватель, просчитывая варианты, оказался бы в неясном положении. Студенту при (В) безразлично, сыграть (У) или (Ш). При оптимистической позиции преподавателя, он выбрал бы StEO=(В,У)=(4,4), а при пессимистической StEP= (С,У)= (3.5,5).

С другой стороны, если бы в правой нижней клетке стояло (М,Ш)=(4,6), то студенты, в случае их организованности и неорганизованности преподавателей, могли бы выступить лидером и форсировать вариант StE_2=(М,Ш)=(4,6).

Равновесие Штакельберга типа StE_1 реалистично, если преподаватель надеется заработать у студентов некоторую личную репутацию (например, "строгого"), и тем самым лидировать в игре. Если же предмет принимает большая группа преподавателей, то его личные усилия мало изменят репутацию "популяции преподавателей", и, соответственно, поведение студентов - тогда лидерство и соответствующее решение StE неправдоподобны. Теперь попробуем представить, что преподаватели за столом переговоров нашли с коллективом студентов общее решение, то есть элемент ядра.

Для нахождения ядра, из множества слабо-Паретовских исходов
$\mathcal{P}_W = \{$(С,У),(М,У),(М,Ш)$\}$= $\{$(5,5),(3,5),(3,6)$\}$ (то есть из множества неблокируемого большой коалицией) нужно отбросить исходы, в которых меньшие коалиции получают менее своего гарантированного выигрыша. В качестве индивидульно- гарантированного выигрыша при нахождении ядра довольно реалистичным будет взять ожидаемые (но не фактические) значения полезностей рассматривающиеся в максимине; ведь именно их каждый игрок может себе гарантировать *независимо от действий парт-*

неров. Здесь преподаватель может гарантировать себе 3, а студент 4, поэтому никакие варианты не отброшены: (3,4)≤(5,5), (3,4)≤(3,5), (3,4)≤(3,6), и $C = \mathcal{P}_W$.

Аналогично из сильной Парето-границы $\mathcal{P} = C$ ={(С,У), (М,Ш)}={(5,5), (3,6)} получим сильное ядро, совпадающее здесь с ней.

На первый взгляд, если переговоры начинались из ситуации решения Штакельберга, то реалистичным будет предполагать, что преподаватели в них в качестве альтернативы договоренностям (точки угрозы) станут выдвигать не свой гарантированный выигрыш 3, а выигрыш 5 в точке (С,У). Тогда ядро могло бы сузится до (С,У). Но этот вариант правдоподобен только при "слабой" организации коалиции студентов, ведь студенты могут ответить контругрозой (Ш). А вводя "силу и слабость" коалиций мы уже отступили бы от стандартной концепции ядра.

Для поиска **решения Нэша в смешанных стратегиях**, обозначим три стратегии преподавателя $0 \leq (s, v, m) : \; s+v+m = 1$, и две стратегии студента $u, (1-u)$. Нам нужно найти пару $[(s, v, m), u]$, при которой популяция студентов и преподавателей не изменяет вероятности своих "чистых" ходов. Поскольку решения в чистых статегиях всегда присутствуют среди решений в смешанных, то $NE_m \subset \{[(s, v, m) = (1, 0, 0), u = 1], [(s, v, m) = (0, 1, 0), u = 0], [(s, v, m) = (0, 0, 1), u = 0]\}$. Но будут ли среди NE_m еще какие-либо (дробные) решения? В данной здаче - да, только в смеси $0 < v < 1$. При любом нетривиальном $0 < u < 1$ чистая стратегия преподавателя (С) оказывается строго выгоднее прочих, а откликом на нее будет (У). Напротив, все смеси $(s, v, m) = (0, v, 1-v) : \; 0 < v < 1$ дают студенту ожидаемый выигрыш от (Ш) больше, чем от (У), откликом же на (Ш) может быть любое $(s, v, m) = (0, v, 1-v) : \; 0 < v < 1$.

Вообще говоря, в подобных задачах поиск NE_m ведется перебором гипотез о целых (0,1) значениях некоторых переменных и решением уравнений относительно системы прочих (предполагаемых дробными) переменных (здесь - только v). Уравнения составляются соответственно гипотезе рациональности выбора: все стратегии с дробным значением должны давать одинаковый выигрыш.

Способ нахождения NEm методом перебора базисов таков. Прямое и двойственное решения найденные (однозначно) по базису приравненному к вектору (1,1,...,1) должны давать равновыгодность каждой базисной стратегии и не большую выгодность любой не-базисной. Это необходимое и достаточное условие NEm.

Сопоставление концепций решений

В каких ситуациях логично применять какие из концепций решений? Из примеров мы уже видели, что трудно дать однозначный ответ, выбор решается интуицией, знанием особенностей конкретных участников и ситуации. Вот, скажем, две простые игры (см. Данилов 2001).

Ann \ Bob	x	y
a	7 ,99	1 ,-1000
b	8 ,99	1 ,100 (NE)

Ann \ Bob	x	y
a	3 ,3 (NE)	0 ,1
b	1 ,0	2 ,2 (NE)

В первой у Анны слабо-доминирующая стратегия b, и исход (b, y) является разумным решением и по слабому доминированию, и единственным равновесием Нэша. Поэтому, зная цели друг друга, или играя однократную игру в популяции, игроки должны бы остановиться на этом решении. Но если Боб допускает хоть малую вероятность того, что Анна из безразличных для нее (при ожидаемой стратегии Боба

y) может выбрать a, тогда осторожность требует от него сходить x, а теряет он от этого немного. Поэтому, осторожная стратегия и максиминное решение (b, x) вполне реалистичны.

Во второй игре верхнее из Нэшевских равновесий с выигрышами (3,3) выгоднее нижнего, и в случае переговоров оно может быть точкой соглашения, причем устойчивого. Но при однократной игре втемную каждый может осторожничать, и среди двух Нэшевских решений выбирать то, где выше гарантированный выигрыш, то есть худшее: MM=$\{(b, y)\}$. Что реалистичнее - трудно сказать. Итак, выбор концепции решения бывает нетривиален, и должен учитывать информационные особенности ситуации, дополнительные сведения об игроках. (Мы еще остановимся на идее универсальной концепции с явными ожиданиями.)

Теперь – о соотношении кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями. Не всегда, но

часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето,

как показывают следующие примеры.

Пример 1.5 *Покажем разнообразие возможных ситуаций* совпадения или несовпадения некооперативных решений с кооперативными *на примерах.*

В частности, можно разобрать все симметричные игры 2×2 с неодинаковыми выигрышами каждого участника. Для этого достаточно посмотреть все различные (с точностью до перестановок) расположения чисел 0,1,2,3 по матрице, и дополнить их симметрично полезностями второго игрока. Несколько подобных игр и одна игра с частично-совпадающими выигрышами приведены в таблице:

Игры, где добровольная **эффективная кооперация:**

-гарантирована, симметрична: "Симбиоз"

0 / 0	1 / 2
2 / 1	SDE 3 / 3 C

0 / 0	3 / 1 C
1 / 3 C	SDE 2 / 2 C

-возможна, симметр.: "Только позови"

NE 2 / 2	0 / 1
1 / 0	NE 3 / 3 C

NE 1 / 1	0 / 2
2 / 0	NE 3 / 3 C

-вероятна, несимметрична: "Цыплята"

0 / 0	NE 3 / 2 C
NE 2 / 3 C	1 / 1

0 / 0	NE 3 / 1 C
NE 1 / 3 C	2 / 2 C

-неправдоподобна: "Дилемма закл."

DE 1 / 1	0 / 3 P
3 / 0 P	NE 3 / 3 C

SDE 1 / 1	0 / 3
3 / 0	2 / 2 C

Таблица 10: Наиболее типичные игры 2х2 и проблема совпадения некооперативных решений с кооперативными.

В таблице 10 представлены некоторые случаи (не-)совпадения кооперативных и некооперативных решений игр 2x2 (полный их обзор предлагается как упражнение). В первой игре типа "Симбиоз"участникам незачем вступать в переговоры: наилучшее решение из ядра (C) и так сильно доминирующее (SDE). Во второй - аналогично, с той разницей, что есть еще два несимметричных потенциальных соглашения (C), одно выгодное для одного, а другое для другого. Но несимметричные здесь неустойчивы относительно некооперативного поведения. В игре "Цыплята"(кто быстрее *клюнет добычу) два Нэшевских равновесия (N), оба из ядра, но одно выгоднее для одного, а другое для другого. Это создает борьбу за лидерство: кто первый займет выгодную позицию. Это осложняет переговоры. Игра "Только позови"демонстрирует два устойчивых состояния, если она находится не в лучшем, то одному из партнеров достаточно предложить переключиться в лучшее – и партнер согласится. Четвертая пара игр типа "Дилеммы заключенных"представляет ситуацию, где взаимовыгодный вариант есть, но устойчивый компромисс маловероятен или даже невозможен, если не принуждать к выполнению соглашения.*

1.7 Дополнительные примеры решений в непрерывных играх и NE_m

Связь матричных игр с линейным программированием и нахождение NE_m.

Доказательство Следствия 2.1 для антагонистических конечных (т.е. “матричных”) игр двух лиц можно проводить и независимо от теоремы Нэша, через линейное программирование, которое дает также *способ поиска* решений NE_m для этих игр.

Для этого задачу 1-го игрока записывают в форме максимизации (неизвестной игрока заранее) цены игры u_s по переменным u_s, μ, (где $\mu := \sigma_1$) при ограничениях

$$\mu \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n_1} \mu^k = 1, \quad \mu a^k \geq u_s\ (k = 1, ..., n_2),$$

где $a^k \in I\!\!R^{n_i}$ — столбцы матрицы платежей $(a_j^k) := (u_1(x_1^j, x_2^k))$. Здесь ограничения типа $\geq$ выражают гипотезу 1-го о неблагоприятном поведении противника (максимин, который совпадает здесь с седлом из-за антагонизма игры). Легко проверить, что задача противника есть двойственная к описанной задаче. В обеих двойственных друг другу задачах есть допустимые решения, следовательно симплекс- методом можно найти седловую пару в игре G_m. Она является и Нэшевской парой и максимином, по смыслу неравенств – ограничений.

Для случая биматричной (то есть не обязательно антагонистической) игры задачи игроков не окажутся двойственными друг к другу, и поиск NE_m методом линейного программирования не очевиден. Все же его общая идея - перебор возможных базисов (наборов активных ограничений) сохраняет ценность для поиска решений. В сущности, нужно перебрать все гипотезы о возможных комбинациях стратегий применяемых с ненулевой интенсивностью (это не всегда все стратегии!), для обоих игроков. Например, рассмотрим повторяющуюся игру матери с сыном из известного детского стишка.[14] Сыну могут давать чаще или реже карманные деньги, в зависимости от того, часто ли от него пахнет табаком, а если пахнет сигарами - то пороть. Посчитайте вероятности (смешанные стратегии) при такой, например, матрице выигрышей (субъективных полезностей) исходов:

Сын Мать	Давать	Не давать	Пороть
Не курить	$+0, +0$	$+1, -2$	$-5, -5$
Курить	$+2, -2$	$+0, -1$	$-4, -4$
Сигары	$+1, -5$	$-1, -4$	$-3, -3$

[14]“...сын курил сигары по рублю за штуку. Мать, узнав об этом, дала сыну порку: не кури сигары, а кури махорку.”

Решение NE_m окажется включающим только первые две стратегии и у матери и у сына.

Для простого случая биматричной игры 2×2 также можно найти NE_m графически, строя функции (или отображения) $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ — отклики игроков на действия партнеров; их пересечение окажется равновесием. Эту же идею нахождения решения для неантагонистической игры, даже с большим числом стратегий, можно реализовать и в терминах системы равенств и неравенств: все активные (имеющие ненулевой вес) стратегии игрока должны быть равновыгодны, а неактивные менее выгодны. Перебирая все потенциальные базисы (наборы активных стратегий) найдем те, в которых система совместна, то есть NE_m.

Решение NE_m можно найти также на компьютере многократными итерациями, опираясь на следующую теорему [см.??].

Теорема 1 (Брауна-Джексон) *Пусть в повторяющейся матричной (антагонистической) игре двух лиц каждый игрок при выборе своего отклика на каждой итерации считает прошлую среднюю частоту, с которой выбиралась конкретная стратегия партнера за вероятность ее будущего появления. Тогда эти итерации асимптотически сходятся к элементу из* NE_m.

Данная теорема служит также идейной опорой понятия NE_m. Ее сложное доказательство не приводим.

.

При нахождении равновесия по Нэшу, особенно в играх с непрерывными стратегиями, можно воспользоваться понятием *функции (отображения) отклика* $\mathcal{F}_i(x_{-i}) = \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ определенном в (4). Тогда можно переформулировать определение NE так:

Точка $\bar{x}$ *является равновесием по Нэшу т. и т. т., когда*

$$\bar{x}_i \in \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \quad \text{или} \quad \bar{x}_i = \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \qquad \forall i \in I. \tag{8}$$

Здесь равенство – если функции $\mathcal{F}_i(.)$ являются однозначными, тогда нэшевское равновесие задается просто системой уравнений и соответственно вычисляется.

Найдем этим путем NE, StE в примере игры с непрерывными стратегиями.

Пример 1.6 *Рэкетиры (или орган налогообложения) выбирают, какую долю* $\tau \in [0, 1]$ *валовой выручки* y *забирать у фирмы. Они при этом максимизируют функцию вида* $T(\tau, y) = \tau y$, *то есть желают побольше получить. Фирма имеет функцию* $\pi(\tau, y) = (1 - \tau)y - y^2$, *то есть максимизирует прибыль при квадратичной функции затрат выбирая объем продаж* $y \geq 0$. *Найдем решения этой игры при различных гипотезах о поведении: 1)осторожном, 2)"близоруком" (ситуативном), 3)когда рэкетиры - лидер игры, знающий цели и просчитывающий ответы фирмы.*

1) Осторожное равновесие (MM). Оно не очень правдоподобно в рассматриваемой ситуации: ведь участники должны бы знать ходы друг друга; но найдем MM для примера. Самое худшее, что может сделать фирма с точки зрения рэкетира – не выпустить ничего: $y = 0$. *При этом рэкетиру все равно, какую долю* $\tau \in [0, 1]$ *установить. С другой стороны, самое худшее, что может сделать рэкетир с точки зрения фирмы – установить максимальную* $\tau = 1$. *При этом фирма максимизирует прибыль*

$$\pi(y) = (1 - \tau)y - y^2.$$

Находим функцию отклика, приравняв производную этой функции по l *к нулю:*

$$y^*(\tau) = (1-\tau)/2,$$
равное нулю при $\tau = 1$. *Таким образом, осторожное равновесие* $MM = [0,1] \times 0 \ni (\tau, y)$.

2) Равновесие по Нэшу (NE). *При любом ненулевом выпуске* y *близорукому рэкету выгодно установить максимальную долю* ($\tau = 1$). *Поэтому его (многозначной) функцией отклика будет:*
$$\tau^*(y) = 1 \text{ при } y > 0; \quad \tau^*(y) = [0,1] \text{ при } y > 0.$$
Функция отклика фирмы $y^*(\tau)$ *получена выше. Решив систему* $\{\tau^*(\bar{y}) \ni \bar{\tau}, \quad y^*(\bar{\tau}) = \bar{y}\}$, *найдем единственное Нэшевское равновесие* $(\bar{\tau}, \bar{y}) = (1, 0)$, *которое совпадает с одним из осторожных, поэтому является и седлом.*

3) Равновесие по Штакельбергу (StE) *(лидер – рэкет). Рэкет знает функцию отклика фирмы, и подставляя ее в свою целевую функцию, максимизирует*
$$\tau(1-\tau)/2.$$
Очевидно, максимум достигается при уровне $\tau = 1/2$, *чему соответствует уровень выпуска* $y = 1/4$.

4) Парето-оптимум ($\mathcal{P}$). *Если предполагать, что фирма способна передавать рэкету не только налог, но и фиксированную сумму* r, *то Парето-оптимум можно найти как максимум суммы целевых функций. Получим* $\mathcal{P} = \{\tau = 0,\ y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$ *(здесь же и слабый Парето-оптимум). Этот исход достижим, если фирма обещает рэкету некоторую сумму* r *за нулевой налог (кооперативное поведение). Очевидно, что ни одно из перечисленных некооперативных равновесий не является Парето-оптимальным.*

5) Ядро ($\mathcal{C}_W$). *Какова упомянутая сумма* r *достижимая в переговорах? Точки ядра не должны блокироваться ни одной коалицией: ни коалицией из обоих участников (т.е. должны принадлежать слабой Парето-границе), ни коалицией из одного участника. Если в качестве индивидуально достижимых выигрышей берем гарантированные минимаксные выигрыши* $T(\tau, y) = 0, \pi(\tau, y) = 0$, *то ядро состоит из всех точек* $\mathcal{P}$. *Если же считать, что лидирующее положение рэкета известно обоим участникам, то он считает гарантированным доходом свой доход 1/8 достижимый в равновесии Штакельберга, тогда ядро меньше Парето-границы:* $C = \{\tau = 0,\ y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$.

Пример 1.7 Пусть есть отрасль с функцией цены P от суммарного выпуска $Y = \sum y_i$ (обратной функцией спроса) вида $P(Y) = 40 - 2Y$. Пусть есть $n > 1$ одинаковых конкурентов $i = 1, ..., n$ с линейными издержками, то есть с постоянными предельными издержками, причем $\dot{C}_i = 1$. Найдите решение y_i каждого об объеме выпуска при разных гипотезах о поведении: 1)MaxMin, 2)StE (один из конкурентов лидирует, например, имея возможность первым объявить выпуск), 3)NE, 4)C-ядро.

Приближается ли при росте числа конкурентов n решение по Нэшу (каждый понимает, что при росте его выпуска цена уменьшится) к решению совершенной конкуренции (каждый считает себя несущественно влияющим на общую цену)?

Нарисуйте для числа конкурентов $n = 2$ график кривых безразличия в пространстве y_1, y_2 и отметьте на нем все 4 типа решений.

1.8 “Равновесие дрожащей руки” (THNE) для нормальной формы

Ключевая идея эволюционных игр - это идея *предыстории* нынешнего, рассматриваемого, равновесия. Мы увидим, что она разрешает многие недоумения в динамических играх, но и здесь, в статических она приносит важные плоды для сужения, очищения множества равновесий от неестественных.

Определение 1.8.1 *Равновесие дрожащей руки THNE - это такое равновесие Нэша, что существует сходящаяся к нему вполне смешанная последовательность стратегий всех игроков (где нет неиспользуемых стратегий), ответом на все члены которой и является это равновесие Нэша.*

Пожалуй, наиболее убедительная трактовка THNE, как и обычного Нэша - именно эволюционная. Подразумевается, что перед данным розыгрышем была *предыстория* таких же игр, разыгранных подобными же участниками. И *ожидания* (веры) теперешних игроков о намечаемых стратегиях их партнеров взяты именно из предыстории. Особенно смешанные стратегии наиболее адекватны эволюционной трактовке: ‘в среднем’ мои партнеры ходят вот так. Требование, чтобы в предыстории они были вполне смешанными, означает, что у всякого игрока могла “рука дрогнуть”, и он вместо выгодной стратегии иногда ходил случайной. Поэтому, все возможные ситуации игры наблюдались, и поэтому мы знаем, как вели себя в них прочие партнеры! Со временем, предполагает концепция, иррациональность поведения уменьшалась, и сейчас сошла на нет, оставив только память о себе в виде ожиданий — память, важную для теперешних ходов.

Главное то, что конецепция THNE снимает концептуальные проблемы в отношении неприменяемых обычно стратегий (вне пути игры): в предыстории у каждого игрока были моменты (не-рационального) применения любой стратегии, поэтому все пути игры когда-то наблюдались, и теперешние ожидания или веры появились не на пустом месте. [15]

Для освоение THNE, вернемся к игре на Таб. 4:

		Victor x	y
Anna	a	101, 100 (NE)	1, 100
	b	101, 0	3, 2 (WDE)

Таблица 11: Оправдание слабого доминирования - через THNE.

Здесь, как говорилось, по слабому доминированию образуется невыгодное решение b, y. Оно критиковалось с точки зрения некоторой *популяции*, где игроки могут

[15] Но еще один концептуальный вопрос остается. В предыстории, сформировавшей мои теперешние представления о моих партнерах, вели ли игроки себя хотя бы отчасти рационально? Произвольность этой предыстории (вполне-смешанной последовательности, сходящейся к нынешнему равновесию) вызывает смутную неудовлетворенность, но не сразу ясно, в каких терминах ее выразить. Мы сделаем это так. Можно предполагать, что ‘дрожание руки’, то есть иррациональность игроков в ходе предыстории проявлялась специфическим образом. А именно, в силу каких-то причин, возможно недостаточного обдумывания, каждый игрок (тип игрока) время от времени ‘не замечал’ часть своих возможностей, и пользовался только оставшимися стратегиями. Но пользовался ими рационально! Это задает самое узкое сужение равновесий Нэша - ‘абсолютное равновесие’, не рассматриваемое в этом курсе.

не захотеть переходить от хорошего равновесия Нэша на $(a,\ x)$ на индивидуально-нестрого-более выгодные позиции b и y, основательно опасаясь сползания популяции к малым выигрышам $(3,2)$ при $(b,\ y)$. Теперь же, если мы верим в предысторию с дрожанием руки, то из двух равновесий Нэша остается только плохое, *устойчивое к некоторым мутациям* (вот что важно) IND_W.[16] Так новая идея сужает множество решений Нэша и оправдывает применение IND_W в определенных случаях. (Покажите, что всегда $THNE \supseteq IND_W \supseteq IND_S$.)

А вот в игре из Табл. 6 принцип вполне-смешанной предыстории (дрожащей руки) исключит три плохих равновесия из четырех SDE *сильно*- доминирующих (очень бы хотелось, но это может сделать только коалиционное доминирование).

Также, во второй игре из Табл. 1.6 новый принцип ни одного из двух NE не исключит, а в первой исключит единственное целое равновесие НЭША (сохраняя только смешанное)!

1.9 О (не-)совпадении различных решений

Приведем утверждения о соотношениях разных некооперативных концепций.

Лемма 1.9.1 (см. Мулен, 1985) *Попарно эквивалентны три случая:*
1) $\mathbb{D}E \neq \emptyset$; 2) Все стратегии в $\mathcal{ND}$ эквивалентны; 3) $\mathbb{D}E = \mathcal{ND}$.

Теперь соберем вместе несколько фактов.

Утверждение 1.9.2 *1) $NE \subset NE_m$; $\mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$,*
2) если $\mathbb{D}E \neq \emptyset$, то $MM \supset \mathbb{D}E = \mathcal{ND} = SoE \subset NE$, $\mathbb{D}E \subset Sad$, причем если доминирующее равновесие сильное, то $MM = S\mathbb{D}E = SNE = NE = SoE \supset StE_O$.[17]
3) $SoE \subset NE \subset INDS$.
4) $SNE \subset INDW$, причем если $SoE \neq \emptyset$, то $SNE \subset SoE$.
5) Обозначая через $NE(_IND)$ решение Нэша в редуцированной по доминированию игре, можно утверждать
$NE(_INDS) = NE$, $NE(_INDW) = NE \cap INDW$. То есть, **редукция игры по доминированию не образует новых равновесий Нэша**, *а сильное доминирование вообще не изменяет их.*

Доказательство. 1) Вложения $NE \subset NE_m, \mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$ очевидны из определений: среди смешанных стратегий могут быть и чистые, аргмаксимум по векторам пересекает аргмаксимум по их минимумам. Доказательсто (2) элементарно, при использовании приведенной леммы: поскольку доминирующие стратегии покомпонентно "не хуже" остальных стратегий, то принадлежат и другим некооперативным решениям. Пункт (3): предположим противное: существует равновесие $\bar{x} :\ \bar{x} \in SoE,\ \bar{x} \notin NE$, то есть для некоторого (например 1-го) участника $(\exists \tilde{x}_1 :\ u_1(\tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1}))$. Эта альтернативная стратегия $\tilde{x}_1$ не может входить в финальное множество $INDW = SoE$, поскольку в нем все эквивалентны. Тогда, на каком-то этапе итеративного доминирования, она была продоминирована какой-либо стратегией $\hat{x}_1 :\ \ u_1(u_1(\hat{x}_1, \bar{x}_{-1}) \geq \tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1})$. Продолжая аналогичные рассуждения, по индукции получим,

[16] Устойчивость ко ВСЕМ мутациям обсуждается ниже в "эволюционном равновесии".

[17] Последнее вложение сравните на игре Табл. 6 и Табл. 12.

что в финальном множестве есть стратегия не хуже, чем $\tilde{x}_1$, - противоречие. (ср. доказательство $SoE \subset NE$ в [Мулен, 1985, Теорема 1, стр 74]).

Вложение $NE \subset INDS$ доказывается аналогично: $\bar{x} \in NE$ означает $[u_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \geq u_i(x_i, \bar{x}_{-i}) \forall i \forall x_i]$. Но такая стратегия не может строго доминироваться какой-либо другой. (4) доказывается аналогично.

(5)- доказывается по определениям (см. Данилов, Лекция 12.) Действительно, строго доминируемая стратегия игрока i не может входить в NE. Поэтому, отбросив ее мы не сузим NE. Но и не расширим, так как ни возможности игрока i, ни возможности его партнеров в доминировании стратегий не сузились. Поэтому $NE(INDS) = NE$.

Аналогично, множество NE не расширяется при слабом доминировании. Оно может сузиться только за счет отбрасывания слабо-доминируемых равновесных стратегий, ведь новых стратегий, которые могли бы опровергнуть какое-либо решение Нэша – не возникает. Поэтому $NE(INDW) = NE \cap INDW$. ▥

Относительно соотношения разных решений и равновесия Штакельберга: хотя StE совпадает со строго доминирующим равновесием (если то непусто), но может лежать вне отдельной строго доминирующей стратегии(!), как в Табл. 12, и не совпадать ни с итерационно-недоминируемым, ни с Нэшевским решением.

		Victor	
		x	z
Anna	a	101, 0	1, 1 (SoE)
	b	100, 100 (StE)	0, 0

Таблица 12: Несовпадение SoE и StE.

Утверждение 1.9.3 *В конечной антагонистической игре двух лиц $SoE \subset Sad$.*
Следствие: *если $SoE \neq \emptyset$ (игра разрешима по доминированию), то у игры есть цена (игра разрешима и по принципу седла).*

Доказательство см. в [Мулен, 1985, Лемма 4, с. 49].
Кооперативные концепции легко сравнить по определениям:

Утверждение 1.9.4 *Ядро принадлежит слабой Парето-границе, а сильное ядро — сильной (обычной) Парето-границе:*

$$\mathcal{C}_W \subset \mathcal{P}_W \ , \ \mathcal{C}_s \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_W \ .$$

Совпадение или несовпадение кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями мы уже обсуждали, и видели что часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето (см. примеры).

1.10 О существовании и компактности множеств решений

Утверждение 1.10.1 *Если все допустимые множества X_i компактны, функции u_i непрерывны, то*
1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$;   2) множества $\mathbb{D}E, MM, NE, \mathcal{P}_W$ компактны.
3) также непусты множества: осторожных решений ($MM \neq \emptyset$), решений Штакельберга, ($StE \neq \emptyset$), множества итерационно- недоминируемых стратегий ($INDS \supseteq INDW \neq \emptyset$).

Доказательство (см. в [Мулен, 1985, с. 79] более подробное доказательство этой теоремы.). Пункт (1) и компактность MM – см. [Мулен, 1985,, стр. 26]. Пункт (2): компактность NE проверена в теореме Нэша (ниже), а компактность $I\!D E$ доказывается опираясь на приведенную лемму (докажите самостоятельно) [Мулен, 1985]. Компактность слабой Парето-границы доказывается рассмотрением пределов.

3) Непустота множеств MM, StE, $INDW$ при конечности X_i очевидна из определений. Для случая компактных множеств доказательство существования MM, StE - по теореме Вейерштрасса, учитывая для StE теорему Нэша.

Рассмотрим вложенную последовательность допустимых множеств $X = \mathcal{ND}^1 \supset \mathcal{ND}^2 \supset ... \supset \mathcal{ND}^k ...$ заданную определением $INDW$. На каждом шаге последующее множество $\mathcal{ND}^k$ задается как вычитание из предыдущего множества $\mathcal{ND}^{k-1}$ другого множества D доминируемых стратегий. Замкнутость каждого недоминируемого множества $\mathcal{ND}^k$ можно доказать от противного по непрерывности $u(x_i, x_{-i})$: если бы предел последовательности доминировался, то и близкие к нему точки доминировались бы. Как известно, пересечение последовательности вложенных компактов непусто.

▥

Теорема 2 (Нэш, 1951) *Пусть все X_i $(i \in I)$ компактны и выпуклы, все функции $u_i(.)$ $(i \in I)$ непрерывны по совокупности переменных и вогнуты по x_i, тогда непусто множество нэшевских равновесий ($NE \neq \emptyset$), и оно компактно.*

Следствие 2.1 *Если все X_i конечны, то непусто множество равновесий в смешанных стратегиях ($NE_m \neq \emptyset$), и оно компактно.*

Следствие 2.2 *[ср. Мулен, 1985,, с. 79] В антагонистической игре удовлетворяющей условиям теоремы есть седло (Sad) и, следовательно, цена.*

Доказательство (для случая, когда множества $X_i \in I\!R^l$ - в действительном пространстве). Определим отображение $\mathcal{F} : \ I\!R^l \mapsto I\!R^l$ как декартово произведение Нэшевских откликов (см. выше) каждого игрока: $\mathcal{F}(x_1, ..., x_n) := \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$. Каждое отображение $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ выпуклозначно и замкнуто, как аргмаксимум по x_i непрерывной вогнутой функции (зависящей непрерывно также от x_{-i}) на выпуклом компакте X_i (док. см. напр. в [В.Гильденбранд "Ядро и равновесие в большой экономике", стр.26], там же см. теорему Какутани). Тогда к $\mathcal{F}(.)$ применима теорема Какутани о неподвижной точке,[18] следовательно имеется неподвижная точка $\tilde{x} : \ \tilde{x} \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\tilde{x}_{-i})$, то есть $\tilde{x} \in NE$, что и требовалось.

Для проверки компактности NE можно построить последовательность неподвижных точек $\{\tilde{x}_t\}_{t=1,2,...} \in NE$ сходящуюся к некоторой точке $\bar{x}$. Равновесность каждого элемента последовательности $\tilde{x}_t \in NE$, в терминах неравенств (3) сохраняется и в пределе, что завершает доказательство. ▥

Для доказательства Следствия 2.1 достаточно проверить, что рассматриваемое в нем смешанное расширение G_m исходной конечной игры удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, выпуклая оболочка любого конечного множества стратегий есть выпуклый компакт. Кроме того, матожидание полезности $U_i(\sigma_1, ...\sigma_n)$ определенное в (5), есть не только непрерывная, но и линейная (следовательно вогнутая) по переменным σ_i функция, что и требовалось для применения Т.Нэша. ▥

[18] Теорема Какутани о неподвижной точке: замкнутое (т.е. имеющее замкнутый график) выпуклозначное отображение $\mathcal{F}(.)$ выпуклого компакта X в себя имеет неподвижную точку $x : \ x \in \mathcal{F}(x)$.

1.11 Что общего в разных концепциях решений?

Завершая раздел статических (одновременных) игр, в качестве упражнения интуиции в применимости той или иной концепции, попробуем сформулировать универсальную, достаточно широкую концепцию решения, охватывающую многие некооперативные решения как частные случаи. Она выдвигает на первый план понятие *ожиданий*, которое затем пригодится в последовательных играх.

Определение 1.11.1 Набор $\bar{x} \in (X \times X \times ... \times X)$ ожидаемых стратегий (гипотез о всех партнерах, включая себя, причем ожидания любого игрока о себе совпадают с реально выбранной его стратегией) $\bar{x}_{i*} = (\bar{x}_{i1}, ..., \bar{x}_{in}) \in X \quad (i = 1, ..., n)$ можно назвать равновесием с правилом ожиданий – отображением $E: \quad (X \times X \times ... \times X) \Rightarrow (X \times X \times ... \times X)$ если

1) выбор $\bar{x}_{ii} \in X_i$ каждого игрока i является одним из наилучших для него ответов на ожидаемые стратегии $x_{ij} \in X_j$ прочих игроков $j \neq i$, то есть: $u_i(\bar{x}_{ii}, \bar{x}_{ij}) = \max_{x_{ii} \in X_i} u_i(x_{ii}, \bar{x}_{ij})$;

2) ожидания любого игрока i о всех игроках соответствуют заданному правилу согласования ожиданий: $(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*}) \in E(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*})$.

В частности, для Нэшевской концепции решения, правило соответствия ожиданий очень простое $E(x) = (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times ... \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn})$, то есть ожидания должны соответствать действительно выбранным стратегиям. Напротив, для концепции осторожного решения (MaxMin) ожидания соответствуют наихудшим гипотезам о партнерах.[19]

Возможно записать в форме отображения предположений $E(.)$ и другие правила, в том числе, соответствующие равновесию Штакельберга и итерационному доминированию, но это громоздко, и мы этого не коснемся.

Итак, в этом параграфе выражен взгляд на различные концепции решений, как на ситуации, различающиеся именно ожиданиями о партнерах, но не типами рациональности поведения (методами рассуждений игроков). Противоположный взгляд - что рациональность бывает разная - теоретически менее последователен, но практически тоже часто бывает удобен.

[19]Как уже отмечено, в ситуации антагонистической игры это достаточно реалистично, но в других случаях одновременные решения игроков при таком правиле ожиданий могут приводить к исходу, неожиданному для них: пессимизм не всегда оправдается. В этом смысле MaxMin, в отличие от NE, не во всех играх можно назвать равновесием, ведь трудно представить себе популяционную игру, где одни и те же ожидания нарушаются из раунда в раунд.

2 *Глава.* Игры в развернутой форме (“динамические” или “последовательные”)

Перейдем к рассмотрению игр, заданных в развернутой форме, то есть в виде описания не стратегий, а отдельных ходов и их последовательностей. Для этой цели часто применяются сетевые структуры – графы, причем преимущественно — “исходящие” деревья.

2.1 Формализация последовательных игр, соответствие развернутой и нормальной формы игры

Исходящим деревом (out-tree) называют связный направленный (ориентированный) граф с единственным истоком (“корнем”), если в графе нет циклов, и каждый узел имеет единственного непосредственного предшественника.

Часто полезно отражать игры и графами более общего вида, но, как правило, "фундированными". *Фундированным* называют связный направленный граф с одним истоком (корнем) и без циклов.

Упражнение. Чтобы понять, что дерево - не всегда самое экономное представление игры из возможных, представьте девятиклеточные “Крестики-нолики” фундированным графом, не являющимся деревом (в некоторые позиции можно попадать из разных предшественников). Для упрощения можно считать первый ход “X - в центр” уже сделанным, и идентифицировать ходы именами типа “0 - в угол”, “X - в противоположный угол”, отождествляя тем самым эквивалентные ситуации. Докажите, что цена игры - “ничья”.

Граф игры мы будем обозначать $\Gamma(G)$, точки выбора участников будут “узлами”, а ходы – “дугами” графа. Каждому конечному узлу, то есть (финальной) “вершине”, или “исходу” игры, приписываются некоторые выигрыши всех участников. Тем самым, граф игры задает физическую и целевую структуры игры, а информационная структура игры отражается “информационными множествами”, а также отдельно от графа, например, в той или иной концепции решения.

Определение 2.1.1 *Информационное множество* или информационная позиция игры есть несколько узлов (физических позиций) графа игры, соответствующих определенному ходу одного участника, который не может различать между ними (не знает, в котором узле он находится).

Очевидно, одновременная игра есть частный случай последовательной, где у каждого игрока просто всего одно информационное множество.

Чтобы подойти к концепции решения последовательных игр, рассмотрим примеры.

Пример 2.1 (“Террорист”) *Предположим, в самолете летящем из Майами в Нью-Йорк обнаруживается террорист, обещающий взорвать бомбу, если самолет не повернет на Кубу. Допустим, пилот, от которого зависит решение, считает свою смерть (неважно где) хуже посадки на Кубе, которая, в свою очередь, хуже посадки в Нью-Йорке. Это можно отразить, например, такими выигрышами пилота:* $U_{Pilot}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 1, New\text{-}York \to 2)$. *Предположим, данный террорист также жизнелюбив и не хочет умирать, и это видно по его лицу,* только он Кубу предпочитает Нью-Йорку. То есть его цели можно задать в виде $U_{Terrorist}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 2, New\text{-}York \to 1)$. Пилот должен выбрать, поворачивать ли на Кубу, а затем террорист – взрывать ли бомбу, как обещал. Что произойдет, если летчик почему-то, например, по жизнелюбивому виду террориста, вполне уверен в своем (истинном) предположении о целях террориста, то есть его ожидания о целях партнера истинны: $\beta_{pilot}(u_{terr}) = (Bomb \to 0, Cuba \to 2, N - Y \to 1)$?

Для ответа формализуем игру. Можно представить варианты этой игры с последовательными ходами двумя деревьями: Рис. 3 отражает случай, когда террорист НАБЛЮДАЕТ ход пилота, а Рис. 2 - противоположный случай (довольно глупый: что ж тогда угрожать? Но нам важно сравнить их.). То есть, в случае "Б" террорист не способен глядя в иллюминатор определить, куда ведут самолет. Это игра с несовершенной (неполной) информацией о сделанных ходах. Это отражается на дереве игры объединением пунктиром узлов, неразличимых для игрока принимающего здесь решение, объединенные так узлы составляют **информационное множество**, или "историческую позицию" игры.

В этом случае игрок вынужден принимать решение вслепую, и то, что он ходит вторым, а не первым – не имеет значения, равно как и его объявленная в духе cheap-talk (пустые слова) стратегия [N-Y → bomb, Cuba → peace]. Тогда мы можем представить соответствующее дерево "Б" (Рис. 2) в уже известной нам нормальной стратегической форме следующей матрицей стратегий и выигрышей:

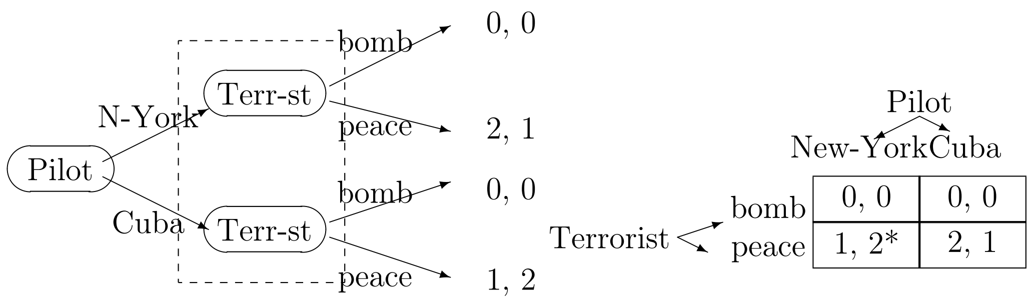
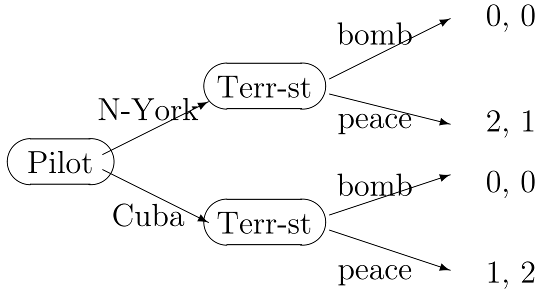


Рис. 2: Игра "Террорист"-Б — без наблюдаемости хода. Развернутая (слева) и нормальная (справа) формы.

Если пилот знает цели партнера, то легко предсказать, что он определит его стратегию "peace" как строго доминирующую, и выберет для себя "New-York". Это произойдет и в том случае когда он рассуждает как Штакельберговский лидер, и по концепции "сложного равновесия", и просто по доминированию – независимо от знания целей партнера. По сути, подобная игра без наблюдаемости хода эквивалентна одновременным играм, изученным выше, и новых понятий не требует.

Интереснее случай "Н" с наблюдаемостью курса самолета. Для прояснения соотношения развернутой и нормальной форм игры на Рис. 3 она переведена и в нормальную форму.

Здесь стратегия (b, b) означает намерение бомбить и в случае поворота на Нью-Йорк (первая компонента вектора (b, b)), и в противоположном случае. Все стратегии террориста, кроме последней (p, p), выглядят глупо с точки зрения его целей, но они физически возможны, поэтому вносятся в матрицу. Важно заметить:



Ter-st: (N,C) \ Pilot:	N-York	Cuba
(b,b)	0, 0	0, 0
(b,p)	0, 0	2, 1*
(p,b)	1, 2*	0, 0
(p,p)	1, 2*	2, 1

Рис. 3: Игра “Террорист-Н” — с наблюдаемостью хода. Развернутая (слева) и нормальная (справа) формы.

стратегией является не ход, а полная инструкция себе — как ходить в ответ на каждый ход противника, то есть в каждом информационном множестве (исторической позиции). Поэтому, в отличие от случая “Б” с несовершенной информации о сделанных ходах (который можно интерпретировать и как игру с одновременными ходами) матрица нормальной формы соответствующая новому дереву оказывается размером не 2×2, *а* 2×4 *— матрица стратегий уже обширнее матрицы выигрышей (возможных исходов). Более того, в отличие от случая “Б”, по ней уже нельзя однозначно восстановить дерево из которого она построена, часть информации утеряна. В этом смысле развернутая форма записи игр более информативна, чем нормальная.*

Итак, **каждая последовательная игра, заданная графом, однозначно может быть представлена и в нормальной форме (свернута)**. *Но обратное действие - восстановление развернутой формы по нормальной - может быть неоднозначно, поскольку свертывание теряет информацию о последовательности ходов.*

2.2 Стратегии нормальные и пошаговые, мультиперсонная форма игры и SPNE

Что есть стратегия? Абстрактно, "полная" или нормальная стратегия — это план-предписание своего поведения в любой ситуации. В данном же контексте, в терминах графа, можно сказать, что полная стратегия есть вектор, описывающий избранные ходы в каждой возможной информационной позиции. Формально, если мы обозначим последовательные исторические позиции (historical nodes) игрока A символами $h_{1A}, h_{2A}, h_{3A}, ...$, *а переменные ходов в этих позициях* $x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...$ *(каждая переменная может принимать столько значений, сколько выходов из этой позиции), то нормальная стратегия* s_A *есть набор* $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$ *описывающий поведение в каждой позиции. Соответственно, выписав по ходам все возможные стратегии и приписав выигрыши всем профилям стратегий, развернутую игру можно свести к нормальной.*

Достаточно ли этого свернутого ("нормального") представления динамической игры и введенных ранее концепция решений (NE, IND), чтобы предсказывать ее исхо-

ды, или нужно пользоваться графом и вводить новые идеи? Несколько последующих разделов убеждают во втором мнении.

Например, в матрице стратегий примера "Террорист-Н" можно заметить целых три Нэшевских равновесия, и одно из них $((b,p),(Cuba))$ *соответствует простой послушной реакции пилота на объявленную на словах стратегию террориста* (b,p). *Но это равновесие и еще одно* $((p,b),(N\text{-}York))$ *– кажутся неправдоподобными с точки зрения содержательного описания игры, и с точки зрения дерева игры. Разве можно поверить, что жизнелюбивый террорист действительно взорвет бомбу после того как увидит, что его не послушались? Эти стратегии слабо доминируются стратегией "peace" в любой ситуации:* (p,p). *Кроме того, и это важнее, они сильно доминируются стратегией "peace" как в подыгре исходящей из узла N-York, так и в "подыгре" исходящей из узла Cuba.*

Определение 2.2.1 *Подыгрой* называют подграф исходной игры, связный от некоторого узла — корня подграфа — до его финальных вершин, и изолированный, то есть не имеющий ни физических ни информационных (через информационные множества) связей с другими подграфами игры, кроме дуги входящей в его корень.

В нашем примере правдоподобным в смысле рациональности поведения в подыграх представляется только одно из трех Нэшевских равновесий $((N\text{-}York),(p,p))$. *То есть, террорист, если он рационален, остановится на стратегии "не бомбить ни в каком случае", как в подыгре, возинкающей после хода (N-York), так и в другой. А пилот, понимая это, полетит в Нью-Йорк.*

Итак, в примере "Террорист" мы выделили среди нескольких NE равновесий одно правдоподобное, с учетом складывающихся по ходу игры ситуаций. Эту идею сужения множества потенциальных исходов благодаря рациональности поведения *не только в начальной точке*, но и позже, можно задать так.

Определение 2.2.2 Назовем *совершенными в подыграх (Нэшевскими) равновесиями* (SPE = SPNE= Subgame Perfect (Nash) Equilibrium) Нэшевские равновесия, являющиеся Нэшевскими равновесиями во всех подыграх (в том смысле, что сужения равновесных стратегий на подыгры являются равновесиями в них).

Заметим, что эту общую идею рациональности поведения "по ситауции"можно отразить и через другую форму стратегического представления исходной игры, называемую *мультиперсонной*. Это означает, что один и тот же игрок, в разных ситуациях (узлах дерева) представлен разными ("условно-ситуационными") игроками. У каждого условного игрока стратегия тогда не вектор, а скаляр – один ход. Эти стратегии иногда называют поведенческими (behavioral) или пошаговыми, ситуативными. В этой форме игра "Террорист" представлена в Таблице 13.

В данном примере, при мультиперсонном представлении Террорист превратится в двух лиц – Террориста в Нью-Йорке, и Террориста на Кубе. Естественно, выигрыши обоих Террористов в образующейся при этом игре трех лиц (Пилота и двух разных террористов) совпадают, но действуют они *каждый за себя*. Это соответствует гипотезе действия "по ситуации", в противоположность действию по заранее объявленному плану. Тем самым, при мультиперсонном представлении используется гипотеза

Pilot↓ \ N-Y-Terr-st→	bomb	peace
N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1
Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2

Pilot↓ \ Cuba-Terr-st→	bomb	peace
N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1
Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2

Таблица 13: Мультиперсонное представление игры “Террорист”.

отсутствия возможности “creadible commitment”, то есть “обязательства, вызывающего доверие”.

Обозначим через NE_{mult} множество Нэшевских равновесий в мультиперсонном стратегическом представлении игры.

В этом примере единственное NE_{mult}, а именно, $(x_P = N - Y, x_{TN} = p, x_{TC} = p)$. Это же, по сути, решение является и единственным SPNE: $(x_P = N - Y, x_{TN} = (p, p))$. Мы предполагаем, что пилот верит в поведение партнера “по ситуации”, а не в обязательство бомбить в Нью-Йорке. Выражая это в мультиперсонных терминах, он просто выбирает, с кем из “условно-ситуационных” Террористов столкнуться. (Если бы летчик верил в обещание Террориста бомбить в Нью-Йорке, игру следовало бы представлять другим деревом, или вместо SPE применять другую концепцию решения.)

На первый взгляд, правдоподобно следующее утверждение:

“Некоторый профиль стратегия является совершенным в подыграх решением (SPE) тогда и только тогда, когда это есть Нэшевское равновесие, являющееся Нэшевским равновесием и в мультиперсонном (пошаговом) представлении игры.”

Однако, оно опровергается примером “решения с дискоординацией” ниже.

Пока мы всюду старались вести рассуждения в общей форме, пригодной для применения и к исходной, конечной или бесконечной игре, и к расширенной (смешанной) игре (правда, смешивания стратегий бесконечных игр мы не касаемся). Теперь заметим, что стратегии или ходы в динамические игры могут быть не только целыми, но и *смешанными*, как и в статических (одновременных) играх. Здесь отличие пошаговых стратегий от "полных” становится важным:

Выгодно ли для игрока смешивать полные стратегии вида $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$, или выгоднее сначала смешивать отдельные ходы, а потом объединять их в полную смешанную стратегию, или это все равно? Одинаково ли множество NE_m в том и другом случае?

Условия эквивалентности того и другого типа поведения определяются теоремой (см. В.И.Данилов, 2001): **Для конечной игры с полной информацией и рациональностью оба способа смешивания эквивалентны.**

2.3 SPNE и обратная индукция

Во многих динамических играх, довольно естественно решения типа SPE (=SPNE) искать *алгоритмом обратной индукции*, то есть “алгоритмом Куна”, по сути эквивалентным определению SPE (проверьте это самостоятельно). При полной информации о сделанных ходах, он описывается так:

1. Отбрасываем (вычеркиваем) сильно доминируемые стратегии во всех финальных подыграх (содержащих только вершины и предвершинные узлы).

2. Невычеркнутые значения выигрышей переносим на предвершинные узлы. Если невычеркнутых значений несколько – то переносим все эти варианты, или, что то же, создаем несколько вариантов дерева игры.

3. Редуцируем каждую игру (каждый из вариантов дерева), удаляя уже рассмотренные вершины, то есть считаем бывшие предвершинные узлы новыми финальными вершинами. Если остался не только корневой узел, то повторяем операции 1–3, уже над редуцированной игрой.

END: В конце останутся возможные значения выигрышей в корневом узле и цепочки, которые их породили — каждая из них означает одно из равновесий SPE, и включает нереализовавшиеся, но подразумеваемые ветви дерева (ожидания).

В случаях со скрытой информацией, нужно рассматривать соответствующие подыгры как одновременные игры. Их NE считать исходом этих подыгр и использовать далее в редукции дерева игры.

Проще всего этот алгоритм срабатывает, когда (в отличие от примера "Террорист") информация полная и каждый игрок имеет различные выигрыши в различных вершинах.[20] Тогда результат алгоритма (то есть SPE) единственен. По сути дела, понятие SPE включает идею оставить итерационно-сильно-недоминируемые стратегии, только порядок отбрасывания доминируемых стратегий изменяется. Оно проводится по подыграм и порядок определен деревом игры Г, а не требованием одновременности как в $INDS$. Если отображать эти операции с игрой на "шахматке" ее нормальной формы, то на любом примере можно заметить, что отбрасывание одной ветви дерева по сильному доминированию соответствует отбрасыванию соответствующей СЛАБО доминируемой стратегии шахматки, или нескольких таких стратегий (отбрасываются не все доминируемые). Эта разница может иметь значение: например, в игре "Террорист" $INDS_{\Gamma}$ не совпадает с $INDS$ игры в нормальной форме, а только с $INDS$ мультиперсонной формы игры.

Итак, пользуясь обратной индукцией и отбрасывая СИЛЬНО доминируемые в подыграх стратегии, мы по сути отбрасываем некоторые (возможно, не все!) СЛАБО доминируемые стратегии нормального представления этой игры, причем в определенном порядке, заданном графом.

Из этого следует некоторые соображения. Во первых SPNE $\subset$ NE не только по определению, но и опираясь на выше-доказанное утверждение, о том, что отбрасывание доминируемых стратегий не расширяет множество NE.

Второе - что любое INDW_{Γ} окажется SPE, т.е. $\mathrm{INDW}_{\Gamma} \subset SPE = INDS_{\Gamma} \neq INDS$ (под IND_{Γ} имея в виду итеративно-недоминируемое решение нормальной формы этой игры, образованное по порядку отбрасывания графа).

Третье, менее тривиальное - это выделение случаев, когда порядок не важен, и SPE можно находить через INDW произвольного порядка отбрасывания в нормальной форме, не обращаясь к графу (см. теорему Куна ниже).

[20] К однозначности выигрышей игру иногда можно привести, объединяя вполне эквивалентные вершины графа в одну. Тогда, скажем, шахматы имеют всего три финальные вершины, только достигаемые многими путями: выигрыш, проигрыш, или ничья белых.

2.3.1 "Дискоординация" в мультиперсонном представлении игры и "обязательство" (commitment)

На первый взгляд, можно определить SPE через пересечение NE в нормальной форме и NE в мультиперсонной. Но отметим, что решение Нэша в мультиперсонном представлении может быть шире чем NE в нормальном. Рассмотрим соответствующий пример "дискоординации".

...

Суть "дискоординации" в том, что в решении NE_{mul} благодаря неадекватным и несогласованным верам, я завтрашний поступаю несогласованно со мной сегодняшним, возможно упуская часть выгоды от координации. Поэтому NE_{mul} неадекватно для описания полной рациональности. Напротив, SPE свободно от этого недостатка. Но в некоторых играх оно обладает другим недостатком этого типа, называемом проблемой "невозможности обязательств" (lack of credible commitment). Скажем, в разобранной игре "Террорист", если бы Террорист на предварительной стадии, до игры, мог связать себя обещанием автоматически взорвать бомбу при посадке в Нью-Йорке, то он выиграл бы больше! Это парадоксальное на первый взгляд связывание себя[21], то есть ограничение своих последующих возможностей, часто приносит выгоду. А обратное – невозможность связать себя обязательством – воспринимается как обидная неэффективность, препятствующая взаимовыгодным сделкам. (См. также в задачнике примеры: Мосты Цезаря, Веревки Одиссея, Цена репутации при кредите.)

С точки зрения моделирования всех таких ситуаций, появление возможности обязательства (commitment) должна изображаться на дереве игры *дополнительной веткой*, не имеющей последующих разветвлений для игрока, дающего обязательство. В примере Террорист это выглядело бы так:

....

Таким образом, возможность связать себя есть *дополнительная* возможность, это новая игра, и получение большего выигрыша в равновесии при возможности обязательств (commitment) не так уж парадоксально.

2.3.2 О существовании решений SPE, единственности и совпадении концепций

Утверждение 2.3.1 *В развернутой форме конечной игры с совершенной информацией (о ходах) существование и обычных и совершенных решений Нэша гарантировано: $SPE \neq \emptyset$ (следовательно и $NE \neq \emptyset$).*

Действительно, существование решений очевидно из алгоритма Куна. Он по существу лишь задает (конечный) алгоритм отбрасывания сильно доминируемых в подиграх стратегий; но отбрасывая одну стратегию, мы всегда сохраняем в множестве допустимых стратегий ту, что ее продоминировала, так что множество SPE не может остаться пустым. Включение $NE \supset SPE$ следует из определения SPE и влечет $NE \neq \emptyset$. ▥

Существование же решений для игр с несовершенной информацией (нетривиальными информационными множествами) не гарантировано, как мы видели в разделе статических (одновременных) игр.

[21] Сравн. пример "веревки Одиссея" в задачнике.

В динамической игре (на дереве Γ) можно рассматривать и итерационное слабое доминирование, то есть понятие $INDW_\Gamma$. В нем порядок отбрасывания стратегий задается деревом игры Γ, а не одновременен, как в обычном $INDW$. Это иногда существенно, а иногда - нет. Скажем, в игре "Террорист" порядок слабого доминирования не важен: решение $INDW = INDW_\Gamma$ оказалось одно и то же. Это не всегда так, как мы увидим в примере (Табл. 16). Итак, в общем случае совпадение $INDW_\Gamma = SPE$ или $INDW_\Gamma = INDW$ не обязательно, можно гарантировать только $INDW_\Gamma \subset SPE$, и вообще, вложение итерационно-слабо-недоминируемых решений в сильные при совпадении порядка отбрасывания. Это вложение можно доказать (проверьте это самостоятельно), поскольку "слабое" доминирование вычеркивает больше стратегий, чем "сильное", принятое для SPE.

Частное достаточное условие единственности и, следовательно, совпадения решений $INDW_\Gamma = SPE$ есть "отсутствие неполного совпадения выигрышей в исходах". Здесь это утверждение распространено на фундированные графы, что упрощает формулировку (это позволяет пару вполне эквивалентных по выигрышам вершин объединить в графе, и считать одной вершиной). Заодно мы сформулируем теорему Куна:

Теорема 3 *Пусть в динамической конечной игре с совершенной информацией, описанной фундированным графом, каждый игрок имеет различные выигрыши в разных вершинах (нет пары вершин с одинаковыми для него выигрышами).*[22] *Тогда*

1) Решения $SPE = INDW_\Gamma$ совпадают между собой и с результатом алгоритма обратной индукции, причем результат существует и единственен по выигрышам.

2) [Кун] Эти решения совпадают с решением SoE (исходом при одновременном порядке слабого итерационного доминированию в стратегическом представлении игры).

Доказательство пункта (1) о существовании (см. Мулен-1985) — довольно очевидно из алгоритма. Действительно, каждый шаг отсечения вершин в алгоритме Куна даст при принятых гипотезах единственный вектор выигрышей. По индукции получаем единственное решение алгоритма. Легко проверить, что это и есть $SPE = INDW_\Gamma$, и что других равновесий SPE, $INDW_\Gamma$ нет.

Доказательство пункта (2) – теоремы Куна – нетривиально и опускается (см. Мулен, 1985). ▥

Отсюда следует, что если игра в стратегической форме представима фундированным графом с различными в указанном смысле исходами, то SoE существует и единственно по выигрышам. Отсюда следует, в частности, существование решения SoE в шахматах (**теорема Цермело**), в шашках, и всех конечных настольных играх с совершенной информацией. Но этого нельзя сказать о карточных играх, где информация о текущем положении игры обычно скрыта (несовершенна), и решение в чистых стратегиях может отсутствовать.

Упражнения:

[22] Здесь подразумевается, что в исследуемой игре любые вершины, совпадающие по выигрышам для всех игроков, можно объединить в одну вершину, и применить эту теорему к этой новой игре. Тем самым, приведенный здесь вариант эквивалентен другому варианту теоремы, где разрешается совпадение выигрышей в некоторых вершинах, но тогда уж выигрыши должны совпадать для всех участников.

Пример 2.2 “Пираты”. *(Мулен, 1985).* Пусть на пиратском корабле 50 разного старшинства пиратов делят 100 кусков золота по следующему обычаю. Старший предлагает дележ – кому сколько. Если половина команды (включая его) согласна, то так и будет, иначе его выбросят за борт, а оставшийся старшим предложит дележ, и так далее.

Предскажите, кто сколько получит, вплоть до младшего юнги (SPE = INDW_Γ?).

Пример 2.3 “Камешки”. Пусть Андрей и Борис договорились, что из лежащих перед ними n=10 камешков Андрей возьмет 1 или 2, по желанию. Потом Борис 1 или 2, и так далее, а взявший последний камень проиграл.

Кто выиграет при идеальной игре обоих, первый или второй? Сохранится ли результат, если можно брать 1 или 2 или 3? Каков общий метод решения всех таких задач $\forall n$? (SPE = INDW_Γ?)

2.4 Решение SPE в непрерывной игре

В непрерывных (по стратегиям и/или времени) играх применение тех же идей и алгоритма обратной индукции аналогично. Только вместо дерева нужно представлять себе (даже если не удается нарисовать) некоторый граф с бесконечными разветвлениями (типа секторов круга).

Пример 2.4 (“Последовательный торг по Рубинштейну”) *(Дележ убывающего пирога= дележ выгоды при инфляции).*
(A.Rubinstein, 1959, see also H.Varian “Microec.Analysis”)
Уезжая из дома, мать оставила двум жадным детям пирог, с таким условием. Сначала Анна предложит дележ $\bar{a}_1 \in [0,1]$ (свою долю), если Виктор согласен, то так и будет, иначе через час Виктор предложит дележ $\bar{v}_2 \in [0,1]$ (свою долю). Если Анна не согласна, она через час сделает третье предложение дележа $\bar{a}_3 \in [0,1]$, и так далее. С каждым часом полезность пирога убывает некоторым темпом (возможно, от нетерпения, или от засыхания пирога, когда $\alpha = \beta$). Конкретнее, через час остается $\alpha \in (0,1)$ исходной полезности для Анны и $\beta \in (0,1)$ полезности Виктора. Если, скажем, на k-й итерации они согласились на дележ $(\bar{a}_k, \bar{v}_k)$; $\bar{a}_k + \bar{v}_k = 1$, то полезность Анны от него будет $A(\bar{v}_k) = a_k = \alpha^k \bar{a}_k$, полезность Виктора – $V(\bar{v}_k) = v_k = \beta^k \bar{v}_k$. Зная конечный период T, в течение которого пирог остается съедобен, нужно предсказать, на какой итерации и как (рациональные и жадные) дети поделятся (подобная игра очень типична в ситуации, когда две фирмы способны осуществить взаимовыгодный проект, но надо договориться о разделе прибыли, а время переговоров означает упущенную прибыль).

Анализируя эту игру торга, для простоты будем считать $\alpha = \beta = 1/2$, T=4, и нарисуем дерево (если можно так выразиться) этой непрерывной по стратегиям игры:

Решение игры в изображенном простом случае (общий случай, и бесконечный вариант игры рассмотрите самостоятельно) легко найти с помощью ступенчатой диграммы уровней полезностей, алгоритмом обратной индукции. Действительно, решим игру с конца: предположим она дошла до последнего, четвертого периода, где Виктор предлагает дележ. Если Анна откажется, то оба получат 0, поэтому она согласится на дележ $a_4 > 0$ сколь угодно близкий к нулю, что изображено нижним концом пунктира. Виктор же тогда получит почти все от оставшегося пирога,

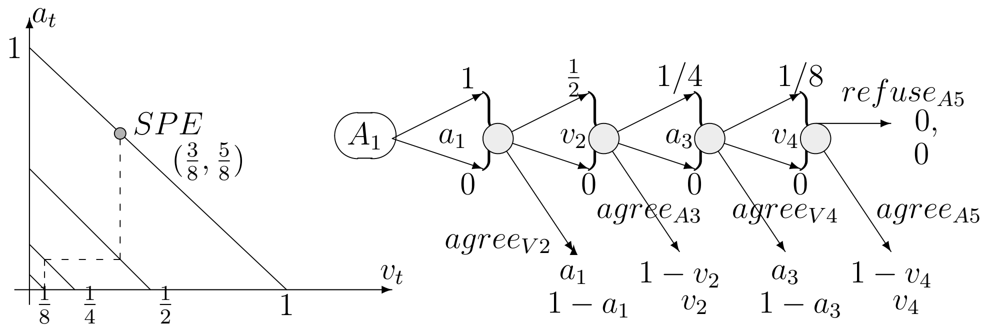


Рис. 4: Игра: дележ убывающего пирога по Рубинштейну (последовательный торг).

то есть почти 1/8. Зная это, на третьем шаге Анна должна предложить партнеру полезность не менее $v_3 = 1/8$, тогда пунктирная линия дает точку 2, где оба имеют примерно по 1/8. Зная это, Виктор на втором шаге предложит партнеру примерно $a_2 = 1/8$, а сам получит остальные 3/8. Аналогично мы получаем SPE: дележ первого шага $a_1 = 5/8,\ v_1 = 3/8$, который и случится, при принятой гипотезе полной рациональности.

Упражнение. Предположите, что дисконты ("кофициенты терпения") Анны α и Виктора β разные, как и в чью пользу (терпеливого ли) изменится решение? Обобщите решение для произвольного числа периодов T, и для бесконечного $T = \infty$, например, переходом к пределу. (Проверьте $A = (1-\beta)/(1-\alpha\beta)$, $V = (1-\alpha)\beta/(1-\alpha\beta)$.)

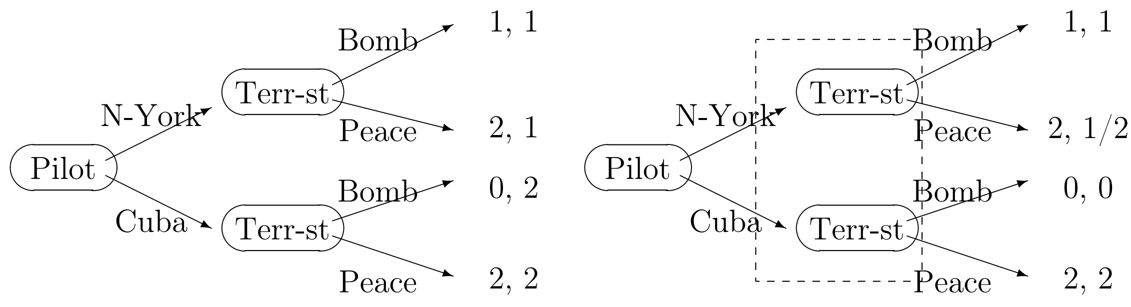
Пример 2.5 Упражнение: Игра входа в отрасль.

Пусть есть отрасль с функцией обратного спроса (ценой от суммарного объема) вида $p(Y) = 9 - Y$ и монополистом - старожилом в этой отрасли, с постоянными предельными издержками $\dot{c}_1(y_1) = 1$ (проверьте, что монопольная цена $p^M = 5$). Пусть потенциальный новичок, входя в отрасль, должен сделать невозвратные начальные капиталовложения $K = 1$ и ожидает предельные издержки $\dot{c}_2(y_2) = 2$. Пусть отрасль может просуществовать два периода (можно обобщить на n) и дисконта нет: прибыли сегодня и завтра равноценны, альтернативное вложение капитала K - с нулевым процентом. Старожил обещает новичку в случае входа добиться (повышением выпуска) снижения цены достаточно низко (< 2), чтобы заставить новичка прекратить производство, предполагая, что после этого новичок банкрот и во втором периоде можно сохранять монополию. Если же новичок войдет, то ожидается решение Штакельберга (т.е. $SPE_{Old,New}$): лидер- старожил установит выпуск раньше). Стоит ли верить этой угрозе или он блефует и можно входить? Обобщите задачу для различных данных $\dot{c}_2(y_2) \neq 2,\ K \neq 1$.

2.5 SPE и INDW$_\Gamma$ при равновыгодных исходах или несовершенстве информации

Теперь рассмотрим SPE и INDW$_\Gamma$ в более сложном случае: при совпадении некоторых значений выигрышей и/или при неполной информации о сделанных ходах. Легко увидеть, что здесь, в отличие от случая предыдущей теоремы, решений может быть множество. Но с существованием решений проблемы могут возникать только при несовершенстве информации.

Пример 2.6 *Случай "C" описанной на (Рис. 5) игры возможен, если террорист — психически особенный человек (это с ними бывает): ему все равно, жить или нет, но приятнее умереть или жить на Кубе. Летчику же смерть в Нью-Йорке предпочтительнее смерти на Кубе, а где быть живым - все равно. Тогда возникает много равновесий* SPE *(3 исхода, исключая (Cuba,Bomb)). Но ни одного* SoE_{Γ}*, поскольку вектор выигрышей пилота при курсе Нью-Йорк (2,1) слабо доминирует над альтернативным, и множество* $INDW_{\Gamma}$ *итерационно (слабо) недоминируемых стратегий состоит из двух неэквивалентных исходов:* $INDW_{\Gamma} = \{(N-Y, Peace) \Rightarrow (2,1);\ (N-Y, Bomb) \Rightarrow (0,1)\}$. *Итак,* $INDW \neq INDW_{\Gamma} \neq SPE$.



Case C: full information, but equal payoffs

Case D: imperfect information

Рис. 5: Игра "Террорист - камикадзе": много решений SPE $\neq$ SoE_{Γ}.

В варианте "D" игры "Террорист" похожее несовпадение. Здесь выигрыши различны, но неинформированность террориста о ходе летчика (не видно, куда летим) позволяет ожидать от него любых ходов. В результате опять неединственно равновесие SPE *(поскольку собственных подыгр нету, то оно равно NE={ (N-Y,Bomb), (Cuba,Peace)}), но одно* $INDW_{\Gamma}$.

В подобной игре, которая эквивалентна одновременной, иногда ни Нэшевского, ни тем более совершенного в подыграх решения не существует (мы видели это при некоторых вариантах выигрышей, скажем, в игре "Монетки": ((1,0),(0,1),(0,1),(0,1))).

Упражнение. Формализуйте графом игру "Выбери масть и картинку" (см. Таблицу 2.7 ниже) и сравните SPE и INDW.???

2.6 Неполная информация о типе партнеров: Байесовское равновесие

Ранее мы предполагали, что игроки либо ничего не знают о целях партнеров (концепции MM, DE), либо знают их точно (SoE,SPE). Теперь рассмотрим случай, когда игрок имеет представление о нескольких типах возможных партнеров с известными целями и гипотезу о вероятности встретить каждого из них (Байесовское равновесие). Для этого мы используем общее представление о выборе в условиях риска, разработанное Нейманом и Моргенштерном - максимизацию ожидаемой полезности (см. микроэкономику).

Чтобы ввести понятие Байесовского равновесия, рассмотрим пример "Инспекция". По сути, это описание равновесия в некоторой популяции инспекторов и нарушителей, но отдельный эпизод встречи такой пары - есть двухшаговая игра. Сначала ходит природа (случай), выбирая типы, которые встретились, а затем одновременно (не видя типа партнера) ходят настоящие игроки.

Пример 2.7 Нарушитель и инспектор. *Рассмотрим игру, где две роли: потенциальный нарушитель и инспектор. Например, нарушение состоит в том, чтобы выпить садясь за руль, а инспектор — сотрудник ГАИ. Предположим, в первой роли бывает по два подтипа: "наглый" водитель, который не очень боится штрафов, или "робкий" водитель. Также и инспектор может быть "старательный", или "ленивый" — то есть сильно недовольный, когда проверит зря. Эти гипотезы отражены в следующей матрице - Таблице 14.*

Таблица 14:
Инспекторы:

	Стара-	тельный	Лени-	вый
	Контр-ть	Лениться	Контр-ть	Лениться
Наглый: Пить	3	0	1	0
	-1	2	-1	2
Наглый: Не пить	-1	0	-4	0
	1	0	1	0
Робкий: Пить	3	0	1	0
	-3	1	-3	1
Робкий: Не пить	-1	0	-4	0
	1	0	1	0

Чтобы предсказать, какая обстановка сложится на этом посту ГАИ: часто ли водители станут проезжать его с нарушением, и часто ли их будут проверять (что, очевидно, связано), нужно задать гипотезы о частоте, с которой встречаются в природе типы. Пусть "наглым" водитель бывает с частотой $\nu \in [0,1]$, а робким — $(\nu - t)$, а инспектор бывает старательным с частотой $\mu \in [0,1]$. Зададим концепцию решения.

Определение 2.6.1 *Рассмотрим игру, где имеется n игроков (ролей) $i = 1,..,n$ и каждый из них может оказаться одним из нескольких (T) типов $t = 1,..,T$, (для простоты записи пусть T одинаково во всех ролях) различающихся целевыми функциями, но не возможностями ходов. Пусть каждый игрок/тип (jt) знает "объективные", то есть известные всем вероятности $(\mu_{i1},..,\mu_{iT})_{\forall i}$ появления типов и максимизирует матожидание своей полезности $U_{jt}(\bar{x})$, зависящее от матрицы $\bar{x} := (x_{it})_{i=1,..,n}^{t=1,..,T}$ текущих стратегий выбранных всеми игроками/типами.*[23]

Тогда Байесовское равновесие BE есть такой набор $\bar{x}$ стратегий (возможно, смешанных) что ни одному игроку/типу нет выгоды отступать от текущей стратегии при знании частоты типов и гипотезе, что все остальные не отступают от

[23] Зависимость от ходов игроков той же роли и своего хода практически не используется, но формально удобнее аргументом считать всю матрицу.

своих. Равновесие называют "вполне разделяющим" (separating equilibrium), если разные типы всех ролей действуют в нем по-разному, его называют "вполне объединяющим" (pooling equilibrium), если разные типы действуют в нем одинаково в своих ролях. В других случаях говорят о частично разделяющем (объединяющем) решении.

Легко заметить, что BE есть (смешанное) SPE в двухшаговой игре, или просто Нэшевское равновесие в подходящим образом заданной игре, а именно в такой, где дополнительный игрок – природа – задал раз и навсегда свои смешанные стратегии $\mu_{i1},..,\mu_{iT}$ $\forall i$.[24]

Чтобы найти BE в примере "инспектор/нарушитель", будем проверять все варианты. Проверим сначала "разделяющее" равновесие вида $(N_{nagl}, N_{robk}, I_{star}, I_{leni} =$ (Пить,Непить, Проверять, Непр.). Запишем условие, необходимое, чтобы "Наглый" не отступил в этой ситуации от стратегии Пить:

U_{nagl}(Пить, Непить, Контр., Лень)$= -1\nu+2(1-\nu) \geq U_{nagl}$(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu + 0(1-\nu) \Leftrightarrow 2 \geq 4\nu \Leftrightarrow 1/2 \geq \nu$.

Аналогично, чтобы "Робкий" не отступил в этой ситуации от стратегии Непить:

U_{robk}(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu + 0(1-\nu) \geq U_{robk}$(Пить, Непить, Контр., Лень)$= -3\nu + 1(1-\nu) \Leftrightarrow \nu \geq 1/5$.

Так же проверяя совместимость стратегий Проверять для Старательного и Непроверять для Ленивого с текущими стратегиями Наглого и Робкого, найдем, что огрничения на вероятность $\mu = t$, при которой обсуждаемое "вполне разделяющее" равновесие возможно, должна лежать в пределах ... $\leq t \leq$ ..., ... $\leq \nu \leq$ ....

Могут ли в этой игре быть "объединяющие" или "частично объединяющие" равновесия, то есть такие, где типы в одной из ролей ведут себя одинаково? Рассмотрев матрицу выинрышей, легко установить, что это невозможно. Например, если оба инспектора "Ленятся", тогда оба водителя начинают "Пить". После этого оба инспектора начнут проверять, и так далее, так или иначе, игра не стабилизируется в этом "объединяющем" состоянии. Аналогично проверяется и неравновесность остальных объединяющих состояний. Поэтому решения могут быть только среди "вполне разделяющих" вариантов.

Что же тогда произойдет, когда ν, t не попадают в пределы, при которых возможно "разделяющее" равновесие? Очевидно, Байесовского равновесия в чистых стратегиях тогда нет, игра раскачивается, и нужно обсуждать Байесовское равновесие в смешанных стратегиях, подобное NE_m. Впрочем, легко догадаться, что это и есть NE_m в подходящим образом сформулированной игре описанных игроков; игре между собой и с природой.

Упражнение: найти такое решение.

2.7 Совершенное Байесовское или слабое секвенциальное равновесие

Теперь рассмотрим более сложную концепцию, совмещающую вероятностный подход Байесовского равновесия и смешанные стратегии с развернутой (динамической) формой игры.

Пример 2.8 ("Вор на базаре") На Рис.6 представлена игра с несовершенной информация о ходах: второй и третий игроки не способны различать, какой ход сделан

[24]Подобного игрока с фиксированной стратегией называют "болваном" ("dummy").

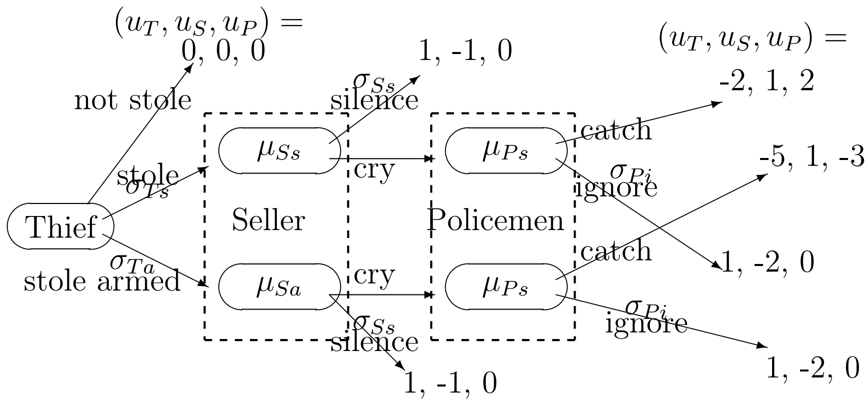


Рис. 6: Игра “Базар”: решения SBE.

первым. Подразумевается популяция трех ролей: Воров, Торговок, Полисменов. Базарный вор может или отдыхать (быть честным), или воровать просто, или воровать с оружием. Торговка может кричать или молчать, когда у нее с лотка тянут товар. Полисмен может или бежать на крик и ловить, или лениться (отдыхать). Записанные на рисунке выигрыши берут за точку отсчета (0,0,0) вариант, когда Вор отдыхает, и остальные - тоже. Когда торговка что-то теряет, ей неприятно, но неприятно вдвойне, если она еще и кричит при этом зря (еще, она побаивается кричать, когда вор вооружен, а не кричать о безоружном считает стыдным, это отражает выигрыш -2 в этом варианте). Если же ее врага-вора поймают - она довольна. О Полисмене, предполагается, что он любит премии за поимку воров, но не любит риска с вооруженными, хотя справится и с таким. О Воре - что он больше отсидит, если пойман с оружием.

Будем рассматривать смешанные стратегии игроков ($\sigma_{thief} \in [0,1]^3, \sigma_{seller} \in [0,1]^2, \sigma_{police} \in [0,1]^2$) как вероятности, с которыми эти ходы в среднем встречаются на описанном базаре. Разыскивая равновесие (то есть стабильное поведение каждого типа), предположим, что ОЖИДАНИЯ всех игроков (предполагаемые вероятности ходов партнеров), а именно: ожидания вора, ожидания торговки, ожидания полисмена — соответствуют наблюдаемым частотам делаемых ходов. Но этого мало, поскольку нужно еще и вне пути игры задать так называемые ВЕРЫ, то есть ожидаемые вероятности нахождения в том или ином узле информационного множества, если игра вдруг, каким-нибудь чудом, туда попадет. Скажем, если все Воры обычно отдыхают, то Торговке, а еще более - Полисмену, все же любопытно знать, с ножом ли тот, кто стащил у нее вещь с лотка, если это случится. Это и есть их (Торговки и Полисмена) априорные, не проверенные жизнью, веры, которые между собой могут не совпадать. Например, Торговка может предполагать частоты верхнего и нижнего узлов графа типа (0.2, 0.8), а Полисмен - (0.9, 0.1), и каждый объявлять свою (возможно, ненаблюдаемую, но известную партнерам) стратегию, исходя из этих априорных вер.

Определение 2.7.1 Смешанная стратегия или "ход" σ_{ih} игрока i из информационного множества h секвенциально-рационален при верах $\bar{\mu}$, при заданных смешанных стратегиях партнеров $\bar{\sigma}_j$ и ходах этого же участника в других позициях, если он является лучшим ответом (откликом) на эти веры и стратегии, то есть максимизирует по σ_{ih} матожидание $E\{u_i(\sigma_{ih}, \bar{\sigma}_{ik}, \bar{\sigma}_j, \bar{\mu})\}$.

Определение 2.7.2 (Сильное) Совершенное Байесовское равновесие (PBE), или, иначе, слабое секвенциальное равновесие в игре n лиц есть профиль (σ, μ) смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Delta X$ и вер $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \Delta M$ всех игроков,[25] таких что
1) это равновесие Нэша.[26]
2) стратегии σ являются секвенциально-рациональными при данных стратегиях партнеров и верах μ;
3) веры μ слабо (только на пути игры) согласованы со стратегиям σ, в смысле Байесовского правила условных вероятностей.[27]

Проверим, может ли быть решением (Отдыхать,[Кричать,Ловить]) (в квадратных скобках, как обычно, ходы вне пути игры) хоть при каких-либо верах. Заметим, что стратегия торговки КРИЧАТЬ лучше противоположной при ее ожидании от Полисмена хода "Ловить". Полисмен же может продолжать объявлять (только на словах, пока Вор не ворует) стратегию Ловить, только если он верит, что если уж Вор своует, то без оружия. Если же с вероятностью более 2/5 он верит в противоположное, то отступит от Ловить. Иначе, проверяемое решение может оставаться SBE (а также SPE, NE) при вере более 3/5 в безоружность, и при любых верах Торговки, возможно и отличающихся от вер Полисмена!

Анализируя эту игру, можно найти, что в ней есть и другие Совершенные Байесовские равновесия, но несовпадение вер торговки и Полисмена в становится невозможным, если Вор хоть иногда ворует: определение PBE не позволяет несоответствие вер практике *на пути игры*.

Упражнение. Пример “Масти и Картинки”.

	Масти:			
	Крас-	*ные*	*Чер-*	*ные*
	Черви ↓	Бубны ↓	Крести ↓	Пики ↓
Старшие: Туз→	8 1	0 3	2 5	0 1
Старшие: Король	6 7	0 1	4 5	2 3
Младшие: Дама	2 3	6 9	8 3	0 1
Младшие: Валет	0 3	4 7	4 9	0 1

Таблица 15: Пример “Масти и Картинки”.

Здесь предполагается, что строчный игрок выберет: Старшие или Младшие, потом столбцовый - Красные или Черные, потом строчный - конкретную картинку из уже

[25] Множество вероятностных пошаговых стратегий ΔX есть смешанное расширение чистых стратегий - ходов X. Ожидания любого игрока о себе считаем равными его стратегии: $\mu_{ii} = \sigma_i$.

[26] Без этого последнего требования это понятие допускало бы "дискоординацию".

[27] В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном последующем информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\mu_h = \sigma_{h-1}$. Для случая сильного согласования вер ниже введено понятие SeqE.

названной группы (из Старших или из Младших), потом столбцовый - конкретную масть из уже названного цвета. Найти SPE, INDW.

Вариант 2: Усложнение задачи - найти SPE, INDW, PBE если последний ход решается жребием - подбрасыванием монетки.

Вариант 3: То же, но результат подбрасывания известен до ходов второму игроку, и только ему.

Вариант 4: Найти SPE, INDW, PBE если *первый* ход решается жребием - подбрасыванием монетки, и никто не видит его.

Пример "Trivial quize" (упрощенный покер)?? Поставив на кон 1 рубль, Анна тянет карту из колоды, где карты от 10-ки включительно до Туза. Смотрит карту, и не показывая Борису (у которого открыт Валет), или удваивает ставку, или пасует и имеет -1, а Борис 1. Если удвоено, то Борис или пасует и имеет -2, а Анна 2, или удваивает, и карта открывется. Если она больше, чем Валет, то Анна выиграла 4 у Бориса, иначе проигрывает 4. Найти SBE (частоты ходов при каждой карте).

2.8 $PBE(\varepsilon)$, секвенциальное равновесие (SeqE), $THPE$

В примере "Базар" проявилась логическая неясность понятия PBE: в нем разные игроки могут иметь разные ожидания об одном и том же партнере вне пути игры. Реалистично ли это? И вообще, как обосновать ожидания игроков о тех ветках игры, которые никогда не реализуются? Это важно, поскольку от этих ожиданий зависят решения, и они могут оказаться логически сомнительными. Устранению этой неясности и сужению множество возможных решений служат понятие $PBE(\varepsilon)$ и понятие (сильного) секвенциального равновесия SeqE.

Определение 2.8.1 *Для заданного малого $\varepsilon > 0$ назовем ε-совершенным равновесием ($PBE(\varepsilon)$) - такой набор смешанных мультиперсонных стратегий $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ и вер $(\mu_1, ..., \mu_n)$, что веры слабо согласованы со стратегиями, а все стратегии секвенциально-рациональны при дополнительном ограничении: ни один ход не может иметь вероятность применения меньше ε.*

По сути, это определение модифицирует PBE, вводя возможность не-рациональных ходов игроков: у любого может "рука дрогнуть", можно ошибиться. То есть, предполагается, что есть случайности, и вероятность всякого хода не менее $\varepsilon > 0$. Важность этой гипотезы видна из примера.

Пример 2.9 Игра "Возьми или оставь" ("сороконожка")*:*

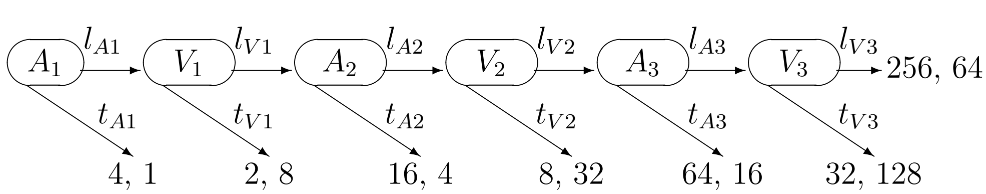


Рис. 7: Игра "Возьми или оставь" (Rosental, 1956?).

Пусть первый из двух игроков (Анна) может взять 4/5 общей прибыли (то есть \$4 из \$5 на ветви $take_{A1}$) на шаге 1, тогда игра закончится, а второму - Виктору

- останется \$1. Либо можно оставить банк на столе ($leave_{A1}$). На шаге 2 прибыль удваивается (например, ведущим), и черед 2-го выбирать: взять ли 4/5 прибыли (то есть \$8 из \$10-и) и закончить тем самым игру, или оставить, и т.д. Предсказывая исход для конечной (скажем, по 3 хода каждого) игры по принципу SPE, PBE, или $THPE$ (определено ниже) мы увидим, что игра тривиально закончится на 1-м шаге $take_{A1}$ с выигрышами (4,1). А по принципу решения $PBE(\varepsilon)$ она может дойти до конца с большой суммой прибыли. (Здесь $\varepsilon-$ вероятность не ниже которой ожидается от любого хода, благодаря случайному поведению – иррациональности).

Покажите, что $\varepsilon > 1/7$ достаточно для ходов типа $leave_i$ и продолжения игры до счастливого конца (или хотя бы для продолжения рациональных ходов до узла V_3). Какое ε *необходимо* для рациональности ходов типа $leave_i$ в конечной и бесконечной играх? Достаточно ли его также и в бесконечной игре?

Но гипотеза о некотором $\varepsilon > 0$ кажется произвольной: какое именно ε реально? Можно предполагать "очень малую" вероятность случайных ходов, тогда формируя концепцию решения приходится переходить в предел $\varepsilon- > 0$. Этим путем мы и пойдем, только предполагая неодинаковые частоты случайных ходов $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ у разных игроков, и будем идти в предел по "определенному направлению". Содержательно, идея секвенциального равновесия, вытекающего из этой идеи, описывается так. В популяции игроков (типов), которую мы рассматриваем, была некоторая предыстория нынешнего состояния. Все игроки ошибались, делая случайные ходы, и все предположения и веры о том, что обычно происходит в каждой информационной позиции или узле игры - обоснованы этой предысторией. При этом частоты случайностей уменьшались, возможно неравномерно, и сейчас оказались практически нулевые. Но наши теперешние веры у всех *одинаковы и обоснованы* предысторией, что формально концепцию можно выразить так.

Определение 2.8.2 (Сильное) секвенциальное равновесие SeqE в игре n лиц есть набор $(\bar{\sigma}, \bar{\mu})$ смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, ..., \bar{\sigma}_n) \in \Delta X$ и вер $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, ..., \bar{\mu}_n) \in \Delta M$ всех игроков, таких что
1) стратегии $\bar{\sigma}_i$ являются секвенциально-рациональными, при данных верах $\bar{\mu}$ и стратегиях партнеров $\bar{\sigma}_j$;
2) веры $\bar{\mu}$ *сильно* согласованы с наблюдаемым стратегиям $\bar{\sigma}$, в том смысле, что существует последовательность вполне смешанных стратегий $\sigma^{(k)} \to \bar{\sigma}$ сходящаяся к равновесной, по которой (однозначно) строится последовательность вер $\mu^{(k)} \to \bar{\mu}$, сходящихся к $\bar{\mu}$.[28]

Если к тому же стратегии $\bar{\sigma}$ секвенциально-рациональны не только при финальных верах $\bar{\mu}$, но и при всех поздних (начиная с некоторого номера) членах построенной последовательности вер $\sigma^{(k)}$, то это равновесие SeqE называют (Совершенным) Равновесием дрожащей руки THPE (Trembling Hand Perfect Equlibrium).[29]

Теперь сопоставим различные концепции решений.

[28]В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном (последующем) информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\bar{\mu}_h = \bar{\sigma}_{h-1}$.

[29]Вообще-то, определение 'дрожащей руки' обычно дают в терминах нормального представления игры, без понятия вер, и получается формально другой объект - (Trembling Hand Nash Equlibrium). Он в играх с полной рациональностью (условия Куна) совпадает по множеству стратегий и выигрышам с THPE, которое нам удобнее для сопоставления с секвенциальным.

2.9 Сопоставление решений SPE, SBE, SeqE, THPE, INDW

Введенные понятия $SeqE$, $THPE$, и идеи случайных ходов оправдывают выделение равновесий со слабым доминированием типа INDW (или SoE) среди равновесий типа SPE. Действительно, все слабо доминируемые стратегии отбрасываются, если есть вероятность (даже если она близка к нулю) любого исхода. Поэтому, во многих играх окажется $THPE = INDW$, и в любом случае $THPE \subset INDW$ (проверьте это).

Традиционно решения SeqE и THPE определяют только для смешанных стратегий, так что можно обозначать SeqE $\equiv SeqE_m$ и THPE $\equiv THPE_m$. Однако нам далее удобно ввести обозначения и определение этих концепций и для чистых стратегий (pure strategies), а именно — это те чистые стратегии, которые входят в соответствующее множество секвенциальных или "дрожащих"равновесий (s как интенсивности применения чистых стратегий, состоят из нулей и единиц):

$$THPE_p := \{s \in THPE_m |\ s - \text{integer }\}, \quad SeqE_p := \{s \in SeqE_m |\ s - \text{integer }\}.$$

Сопоставляя концепциии, понятия $THPE$ и NE_m можно считать полюсами (самое узкое и самое широкое множества среди введенных здесь), между которыми вмещается большинство остальных некооперативных концепций как частный случай смешанных Нэшевских решений. Действительно, SPE в чистых стратегиях обобщается до смешанного SPE_m. Аналогично, каждую концепцию можно рассматривать и в чистой и в смешанной форме. Соответственно, можно составить следующий важный граф вложений (его левый и правый края смыкаются, что отражено повторами обозначений SPE_i):[30]

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
SPE_{mul} & SPE_m & \supset & PBE_m & \supset & SeqE_m & \supset & \mathbf{THPE_m} & \subset & INDW_{m\Gamma} & \subset & SPE_m & \subset & NE_m & \\
\cup & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & \\
SPE \equiv & SPE_p & \supset & PBE_p & \supset & SeqE_p & \supset & THPE_p & \subset & INDW_{p\Gamma} & \subset & SPE_p & \subset & NE_p \equiv NE. &
\end{array} \quad (9)$$

В этом графе центральное положение занимает наиболее узкая, наиболее рафинированная концепция из верхней цепочки с еще гарантированным существованием (см. теорему ниже) – это THPEm. Из приведенных вложений следует, что если $THPE_m$ существует, то существуют и все охватывающие THPEm решения. Для существования же всех “целых” концепций, то есть нижней цепочки, нужны дополнительные условия. Иначе, есть примеры несуществования, даже для наиболее широкой из них концепции NE. Какие условия? Например, $INDW_{p\Gamma}$, $SeqE_p$ и более широкие концепции развернутой формы существуют при совершенстве информации (отсутствии нетривиальных информационных множеств).

Благодаря приведенным выше цепочкам вложений, существование всех названных (смешанных) решений можно вывести из существования THPE. Сформулируем его условия (доказательство этой непростой теоремы мы опускаем).

Теорема 4 *В конечной игре с полной рациональностью (хотя, возможно, и несовершенной информацией о ходах) смешанное Равновесие дрожащей руки существует ($THPE_m \neq \emptyset$).*

[30]Под SPE_{mul} подразумевается решение SPE в мультиперсонном представлении игры, которое бывет шире обычного.

Следствие: $NE_m \neq \emptyset,\ PBE_m \neq \emptyset,\ INDW_\Gamma \neq \emptyset,\ SPE_m \neq \emptyset,\ SeqE_m \neq \emptyset.$

Сложное доказательство опускаем.

Сопоставим концепции далее: решение $THPE_p$ в большинстве случаев совпадает с $INDW_\Gamma$, расхождение мне (С.К.) неизвестно. Равновесие Нэша – это SPE в одношаговой игре с одновременными ходами. Пара равновесие Штакельберга – это просто SPE двухшаговой игры, когда лидер ходит первым (а по сравнению с "оптимистическим Штакельбергом" SPE может включать еще какие-то исходы). Максимин может быть аппроксимирован $PBE(\varepsilon)$-равновесиями модифицированной игры, при элементарных функциях полезности участников с очень большим неприятием риска.

С другой стороны, полезно продемонстрировать, что понятия SPE, SBE, SeqE не тождественны, и понять, почему.

Пример 2.10 ("Ослик" Зелтена, вариант-2) . *Интерпретация игры не обсуждается, игра названа "Ослик" за форму графа:*

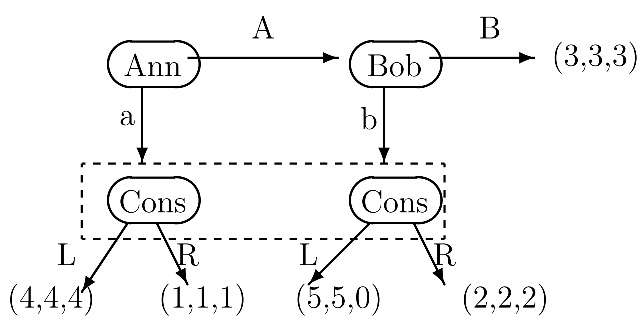


Рис. 8: Игра "Ослик" (Selten, 198..?).

Здесь два SPE в чистых стратегиях: SPE1=(aL[B]) при соответствующих по Байесу верах, и SPE2=(AB[R]) при верах a, b третьего игрока, наблюдающего, что ему дали ход (вероятностях, что дали из позиции a или из b) типа $a > 2b$.

Первое, то есть SPE1, есть также и SPBE, но не может быть секвенциальным равновесием (SeqE), а SPE2 является секвенциальным.

Итак, мы представили широкий арсенал концепций решений, применимых в разных ситуациях игр и их связи. Подбор адекватной модели (графа) и концепции игрового решения под жизненную ситуацию – творческое дело исследователя, требующее знания содержательной стороны дела. Ничем, кроме примеров, учебник здесь не поможет.

Это завершает рассмотрение “популяционных” или “эволюционных” игр, характеризующихся полной рациональностью. Теперь мы займемся играми с более сложной информационной структурой, чем “популяционные”. В принципе, все введенные концепции решений применимы и в них, в том числе в играх с несовершенной рациональностью или необщим знанием, в повторяющихся играх одной пары партнеров. Но в них есть и специфика, и другие решения.

2.10 Отсутствие “общего знания”, игры с репутацией, блеф

Изменим гипотезы игры “сороконожка” (“Бери или оставь”), добавив к возможности иррациональных ходов неопределенность знаний о степени иррациональности партнера (это уже не “общее знание”). Окажется, что концепция решения $PBE(\varepsilon)$ должна модифицироваться, и включать характеристику информации.

Пример 2.11 (Продолжение игры “Бери или оставь”) (“Сороконожка”)

Пусть, в разобранной выше игре “сороконожка” ситуация изменилась: игрок Victor слышал, что Анна в подобной игре из 10-ти ходов сделала 1 иррациональный (невыгодный, ошибочный), и ожидает, соответственно, вероятность иррациональности около $\alpha = 1/10$. Аналогично, Анна слышала, что Виктор в подобной игре из 30-ти ходов сделал 2 иррациональных хода, она ожидает вероятность иррациональности $\beta = 2/30$ (это окажется не то же, что 1/15!). Предположим, игроки считают рациональным *брать* банк, когда вероятность ошибки партнера больше 1/7 и ожидают от партнера такого же мнения. Очевидно, при такой “простоватой” рациональности, Анна на первом ходу ВОЗЬМЕТ (если не ошибется). Но если он ошибется, возьмет ли Виктор? Он может интерпретировать *оставление* Анной как ошибку, и тогда подправить свою субъективную вероятность ошибок А до величины (1+1)/(10+1)=2/11. Либо считать случившееся *оставление* рациональным ходом, и сделать отсюда вывод о текущих гипотезах ($\beta =$?) Анны относительно себя (Виктора). Независимо от того, верны ли эти гипотезы, выгодно ли теперь Виктору *оставлять* и пойдет ли игра до узла V_3?

1)По сравнению с предыдущей ситуацией, оставим Виктора “простым”, а первого игрока предположим способным рассчитать предыдущую ситуацию. Станет ли он на первом шаге ОСТАВЛЯТЬ, независимо от своих гипотез о партнере (БЛЕФОВАТЬ)? Пойдет ли игра до 6-го хода?

2)Что если теперь оба игрока “сложные”, и В просчитывает возможность блефа первого (считающего второго простым), изменит ли это результат?

2.11 Уточнение понятия рациональности; прямая индукция

Кольберг и Мертенс (1986) предложили возможность сужения множества совершенных или других равновесий основанных на обратной индукции с помощью “прямой индукции”. По сути дела она означает решение игры по доминированию и в развернутой и в нормальной форме (по определенному порядку), и пересечение множеств ответов. Это затрагивает фундаментальный вопрос о “creadible commitment”,[31] поднятый Нейманом и Моргенштерном: всегда ли игроки могут до игры рассчитать свои оптимальные стратегии (планируемые реакции на возможные ходы/информацию), а затем только придерживаться их? Часто это не так, и игроку было бы выгодно с самого начала объявить свою стратегию, и лишить себя возможности передумать затем в ходе игры (см. игру “Цезарь сжигает мосты” в задачнике). В следующем же примере (Рис. 9) противоречия не возникает, и прямая индукция выглядит обоснованно.

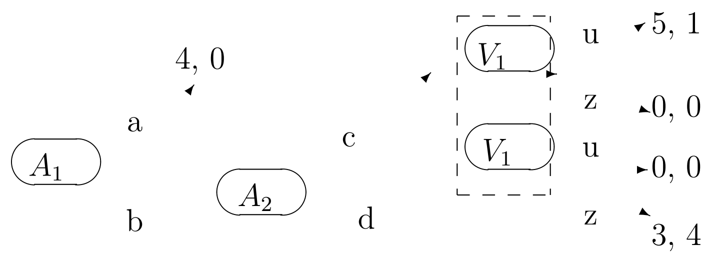


Рис. 9: Прямая индукция.

В этой игре Виктор в ситуации V_1 не знает, сходила ли Анна c или d. Здесь два последовательных равновесия SPE в чистых стратегиях (и еще одно в смешанных): $(a, [d, z])$, (b, c, u). Однако, только последнее остается, если рассматривать прямую индукцию, определяемую так. Приведя эту игру к нормальной форме заметим, что стратегия Анны (b, d), сильно доминируется ее стратегией (a). Зная это, Виктор, в случае наблюдаемого хода (b), должен решить, что Анна имела в виду стратегию (b, c), и сходила (c) а не (d). Тогда ему разумно ходить (u), другой ответ на (b) нерационален. Зная это, Анна пойдет (b) а не (a), и получит 5. Так дополнительные соображения о рациональности по “прямой индукции” сузили множество ожидаемых исходов игры.

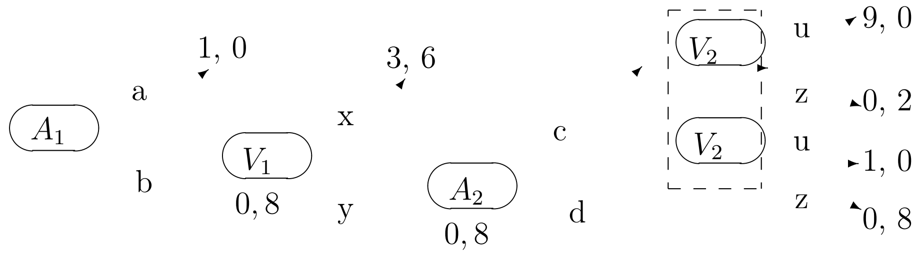


Рис. 10: Прямая индукция при неполной рациональности.

Однако в другой подобной игре (Рис. 10) подобные соображения могут быть обоснованы только неполной рациональностью; множества решений по прямой и по обратной индукции не пересекаются!

На Рис. 10 игроки ходят по очереди, и Виктор также на последнем ходе не знает предыдущего хода Анны. Но это ему и не нужно, ведь в любом случае он сходил бы вниз: (z), этот ход строго доминирует над (u). Поэтому единственное SPE $=(a, [y, d, z])$. Если же мы переведем эту игру в нормальную форму (Табл. 16), то окажется, что стратегия Анны (bc) слабо доминирует над (bd). Одновременно стратегия Виктора (x) слабо доминирует над (yu). Затем (bc) сильно доминирует над (a) и единственное SoE$=(b, x, [, z]) \neq$ SPE. Поэтому SoE не кажется рациональным: как можно верить, что в ситуации A_2 Анна пойдет вверх на (c) ожидая на это рациональный отклик (z)? Но, с другой стороны, в ситуации V_1 Виктор может рассуждать и так: а почему же она вообще пошла сюда, в этот узел, если предполагает меня рациональным? Это невозможно. Тогда она может ожидать от меня иррационального хода: (u). И ожидая его, планировать ход (c). Тогда Виктор ходит (x) и SoE действительно реализуется. При этом, возможно, Анна блефовала, демонстрируя ходом (b) свое неверие в рациональность Виктора, и получила 3 от блефа вместо 1 по тривиальной стратегии a.

Anna\ Victor	x	yu	yz
a	1, 0 (SPE, SoE_{Γ})	1, 0	1, 0
bc	3, 6 $(SoE_{forward})$	9, 0	0, 2
bd	3, 6	1, 0	0, 8

Таблица 16: Прямая индукция.

После хода (b), Виктору надо решить что это: взятие на пушку, глупость или подозрение партнера в глупости. В последних случаях надо ходить вверх! При гипотезе же полной рациональности обоих (известной обоим), нужно не покупаться на блеф, ходить вниз (y, z) и иметь 8. С другой стороны, если бы Анна имела возможность объявить, владея "creadible commitment", стратегию (b, c) и не отступать от нее, то реализовала бы выигрыш 3. Тогда, при "creadible commitment", Виктор вынужден отступить на (x).

Мораль из этого примера: в ситуациях однократной игры, в том числе при неполной рациональности игрок может стараться сделанным ходом сигнализировать о своих гипотезах (истинных или блефовых) относительно партнера, к своей выгоде. Это практически эквивалентно сигнализированию о своем типе в Байесовских играх.

[31]Этот термин в играх означает "выполнимое обещание".

Аналогично, применение стратегий, а не ходов, резонно в повторяемой игре, где игрок способен завоевать репутацию. Тогда прямая индукция правдоподобна.

Упражнение. В примере “футбол или кино” (Рис. 1.1), рассмотрите следующую модификацию. Пусть, Виктор общается с Михаилом, который наверняка увидится с Анной до вечера, до выбора футбол/кино, но стесняется прямо попросить Михаила передать Анне просьбу прийти на футбол или в кино. Он сжигает 1 рубль на глазах Михаила, никак не объясняя своего поступка, но надеясь, что тот расскажет Анне об этом странном случае, и та сделает выводы. Покажите прямой индукцией, что это сжигание – разумный ход Виктора.

2.12 “Почти-совершенная” информация: повторяющиеся игры с угрозами.

“Почти-совершенной” называют информацию о всех сделанных ходах, кроме последнего или текущего. Подобная ситуация возникает в весьма распространенном классе “повторяющихся” игр. Это такие игры, где участники ходят одновременно, затем одновременно наблюдают результат действий партнеров, еще раз разыгрывают эту же игру, и т.д. Например, игра “Монетки”, “Перекресток”, “Футбол или кино” – могут быть разыграны в повторяющемся режиме. Что тогда изменится в типе решения?

Строго говоря, при анализе такой игры уже нельзя обойтись просто матрицей нормальной формы игры. Правильный подход – рассматривать дерево игры с повторяющимися элементами, конечное или бесконечное. Оказывается, что решения при этом могут существенно отличаться от решений однократной аналогичной игры.

Пример 2.12 (“Камень в огород”) (или повторяющаяся “Дилемма заключенных”) Предположим, два недолюбливающих друг друга соседа имеют выбор: бросить соседу камень в огород, уходя утром на работу, или воздержаться.[32] Выигрыши заданы следующей игрой в нормальной форме..

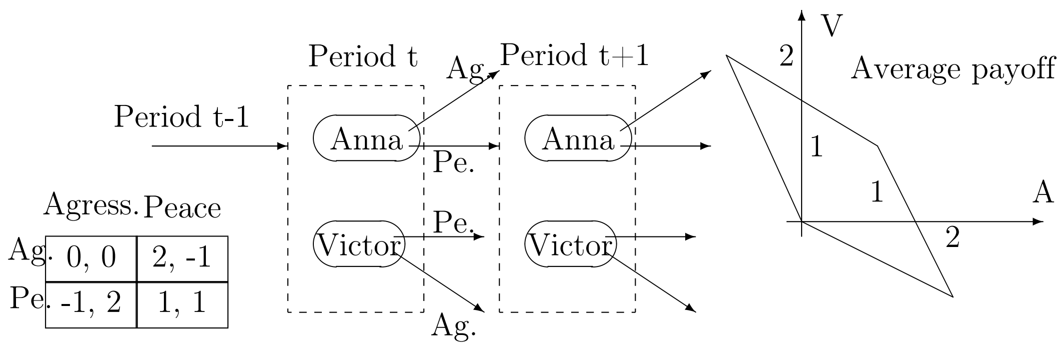


Рис. 11: Повторяющаяся игра “Камень в огород”.

Очевидно, структура игры та же, что в “дилемме заключенных”. Поэтому единственное строго доминирующее равноесие SDE (и одновременно единственный не-Парето-эффективный исход!) есть (Агрессия,Агрессия). Теперь рассмотрим дерево этой игры на конечном интрвале времени, предполагая цели игроков в виде дисконтированной суммы выигрышей по периодам. Окажется, что совершенное в подыграх равновесие (SPE) то же, что и DE: $(Agress., Agress.)^4 = ((Agr., Agr., Agr., Agr.,), (Agr., Agr., Agr., Agr.,))$. Теперь отметим, что “нормальной стратегией” является не просто ход, а последовательность ходов. А стратегией в более общем смысле является объявляемая функция отклика: это последовательность реакций на каждом этапе на каждую из возможных наблюдаемых ситуаций. Поэтому точнее приведенное решение будет записать так: $SPE = \{((Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anyway}, (Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anyway})\}$.

Кроме этого, теоретически, можно рассмотреть и такие стратегии “максимального наказания”:

$\{(Peace, Peace, Peace, Peace,)_{for\ peaceful\ partner},$

$(Peace, ..., Agr., Agr.,)_{for\ agress.\ partner}\},$

[32]Аналогичная игра возникает во многих практических ситуациях. Например, между двумя олигополистами, каждый из которых может снизить цену продукта в некотором периоде, и отнять у конкурента долю рынка, зная, что тот может тоже ответить “агрессией”.

то сеть, обещание быть мирным, пока партнер мирный, иначе переключаться на агрессию до конца веков. Однако эти стратегии "максимальной угрозы" (обещание мстить за агрессию максимально, иначе сохранять мир) не рациональны в смысле SPE в конечной игре, рациональна только чистая агрессия. В бесконечной же игре они могут быть рациональны! (Считают, что целевые цункции бесконечной игры есть взвешенные с некоторым дисконтом выигрыши моментов игр.) Проверьте, что при дисконте близком к 1 (слабое убывание полезности) кроме "максимальной угрозы" много и других решений: скажем, когда оба партнера агрессивны только по понедельникам, а мстят за отступления от этого объявленного правила ограниченное число периодов, Обобщим эту идею.

Теорема 5 ("Народная теорема" (Folk Theorem):) *В бесконечной повторяющейся игре, если дисконт стремится к единице, множество возможных средних выигрышей стремится к множеству всех выигрышей выше гарантированных.*

Доказательство мы опускаем. Иллюстрацией смысла теоремы служит Рис.11. Множество возможных выигрышей - четырехугольник, помеченный (1,1). .....

2.13 Игры с несовершенной памятью, и другие несовершенства рациональности

До сих пор мы предполагали, что каждый игрок помнит все, что он знал ранее, в том числе собственные предыдущие ходы. Иногда это не так: в картах слабые игроки нередко не помнят вышедших карт, даже своих. Как моделировать подобные ситуации? Очевидный ответ – с помощью мультиперсонного представления игры: одного и того же игрока нужно считать другим (хотя с теми же целями), после того, как он забыл часть информации.

Пример 2.13 ("Бабушка и очки".) Бабушка снимает очки, и идет умываться, а очки кладет на видное место у выхода из ванной. Она знает, что не вспомнит, куда их положила, и проектирует ситуацию, чтобы на них наткнуться. В данном случае, она смоделировала себя как другого игрока, чей ход (искать очки) состоится после умывания первого игрока, и приняла адекватное решение (постройте дерево игры и SPE).

Аналогично, мультиперсонное представление игры помогает моделировать ситуации, когда иррациональность участников заключается в изменении их целей по ходу игры.

Пример 2.14 ("Курильщик" (D.Kahneman, A.Tversky, 1982).) Бывший курильщик наиболее предпочитал бы выкуривать 2 сигареты в день, менее приятно для него совсем не курить, а совсем нехорошо (врачи запрещают) курить пачку в день. Он бы и выбрал 2 сигареты, но знает, что тогда предпочтения его изменятся, он не удержится, и будет курить пачку. Поэтому он останавливается на полном воздержании (постройте дерево игры и SPE).

В противоположность двум приведенным примерам иррациональности, рассмотрим ситуацию, которая кажется иррациональной, но ей не является.

Пример 2.15 ("Честный дележ") *(см. J.Tirole 2001), A.Rubinstein 2002 - доклад в РЭШ)* Паре игроков ведущий обещает $ 100 если дележ, предложенный первым будет принят с первого раза вторым. С точки зрения кооперативных игр, возможными дележами является все ядро, от 0 до 100. С точки зрения же Штакельберговского решения первого игрока (то же SPE), можно предлагать всего 1 второму и 99 себе, второй вынужден согласиться. Практически же, многочисленные опыты этой игры с

Истинная иррациональность может иметь разные причины: - несовершенный расчет игры; - несовершенная память; - изменение целей в ходе игры; - иррациональные предпочтения (неполные или нетранзитивные). Мы видели, что модели теории игр, с некоторыми модификациями, оказываются пригодны и к этим ситуациям. Теперь мы покажем, что они пригодны и к некоторым ситуациям совсем без рациональности.

2.14 Игроподобные ситуации без рациональности: псевдооптимизация и эволюционное равновесие

Биологи, исследуя популяции животных, построили различные модели динамических систем их взаимодействия. Системы могут иметь равновесия или не иметь (раскачиваться). В частности, хорошо известны модели Вольтерра "хищники и жертвы", описывающие динамику совместных колебаний численности популяций, например, волков и оленей, связанных в экосистеме.

Нас будут интересовать те ситуации, где переменными являются различные варианты поведения. Окажется, что даже если особи совсем иррациональны (болваны), результирующие равновесия чем-то похожи на рациональное (оптимизирующее) поведение. Это не удивительно, поскольку даже в неживой природе некоторые явления хорошо описываются оптимизационной моделью, например, расположение воды налитой в емкость минимизирует высоту ее центра тяжести. Такие явления можно назвать "псевдооптимизацией": оптимальный, в некотором смысле, исход в отсутствии оптимизирующего субъекта. Это феномен, волновавший религиозных мыслителей и Дарвина, в связи с естественным отбором. Когда игрок не один, то (Парето) оптимальность не гарантирована естественным отбором. Рассмотрим подобную ситуацию - равновесие типа Нэшэвского, но без рациональных субъектов.

Пример 2.16 ("Голуби и ястребы" (см. Ordeshook, p.183)) Пусть популяция воробьев (пример можно применить и к другим животным, или к *популяции типов поведения* людей) состоит из 2 типов птиц: "Агрессивный" (как ястреб) или "Мирный" (как голубь), причем ни один не меняет своего типа поведения (они "болваны"). Но тот тип, который в среднем имеет лучшее благосостояние, обильнее и размножается (либо особи перенимают образ поведения субъектов, выглядящих успешными). Так или иначе, доля агрессивных воробьев в популяции со временем будет возрастать, если они "обыгрывают" более мирных, и наоборот.

Предположим, тип поведения проявляется возле куска корма: двое мирных особей встретившись — вместе его клюют, мирный отступает перед агрессивным, а двое агрессивных деруться, с обоюдными потерями. Эти гипотезы о выигрышах в каждой из 4-х возможных комбинаций (кто с кем окажется возле корки хлеба) отразим матрицей выигрышей:

Обозначим $\alpha(t) \in [0,1]$ текущую долю агрессивных птиц в популяции, тогда $\mu = (1-\alpha(t)) \in [0,1]$ есть доля мирных.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях NE_m, понимая его как стационарное состояние $\bar{\alpha}$ доли агрессивных птиц, то есть решение уравнения:

$U(\bar{\alpha},(1-\bar{\alpha})) = -1\bar{\alpha} + 2(1-\bar{\alpha}) = 2 - 3\bar{\alpha} = U(1-\bar{\alpha},\bar{\alpha}) = 0\bar{\alpha} + 1(1-\bar{\alpha}) = 1-\bar{\alpha}$, $\Rightarrow \bar{\alpha} = 0.5$. При такой доле агрессивных эта пропорция могла бы не меняться.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4" align="center">Второй воробей</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">агресс.</td><td colspan="2">мирный</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Первый
воробей</td><td rowspan="2">агрессивный</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td><td>2</td><td>SNE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">мирный</td><td></td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>SNE</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Таблица 17: “Голуби” и “ястребы”.

Заметим, что кроме найденного симметричного равновесия NE_m $\bar{\alpha} = 0.5$ в системе есть и два крайних равновесия Нэша в чистых стратегиях: (Агр.,Мирн.), (Мирн.,Агр.), однако они не отвечают содержательной формулировке “игры”: нельзя придумать долю α отвечающую этим ситуациям. Напротив, содержательно возможны крайние ситуации, когда какого-то типа просто нет: $\tilde{\alpha} = 0$, $\hat{\alpha} = 1$. Однако, как легко проверить, в отличие от первого, они неустойчивы к возможным *мутациям*, то есть к ненулевой вероятности случайного появления особей любого типа (аналог случайных ходов в ситуациях с рациональностью).

Понятие *локальной устойчивости* эволюционных равновесий в системах такого типа можно сформулировать так. Пусть есть n типов игроков $i = 1, ..., n$ с одинаковыми целевыми функциями $u_1(.) = ... = u_n(.) = u(.)$, доли их в популяции есть $\alpha_1, ...\alpha_n$: $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_i \alpha_i = 1$ (в иной интерпретации, это одинаковые игроки, а $\alpha_1, ...\alpha_n$ есть частоты применения чистых стратегий).

Определение 2.14.1 В описанной ситуации набор стратегий (типов поведения) $(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_n)$ называется “эволюционным равновесием” EvE, если для любого типа поведения i выполняется $u_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{-i}) > u_i(\alpha_i, \bar{\alpha}_{-i})$ $\forall \alpha_i$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ строго предпочтительна при равновесных стратегиях партнеров $\bar{\alpha}_{-i}$), либо $u_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{-i}) \geq u_i(\alpha_i, \bar{\alpha}_{-i})$, $u_i(\bar{\alpha}_i, \alpha_{-i}) > u_i(\alpha_i, \alpha_{-i})$ $\forall(\alpha_i, \alpha_{-i})$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ нестрого предпочтительна, но начинает строго предпочитаться при отклонении партнеров от Нэшевского решения).

Итак, эволюционно- устойчивые стратегии - это Нэшевские стратегии от которых к тому же строго вредно отклоняться при сохранении позиций партнеров, или при отклонении партнеров. Эволюционное равновесие - профиль таких стратегий. Очевидно, $SNE \subset EvE \subset NE$.

Заметим, что показанный эволюционный подход применим и к случаям частичной рациональности такого типа: участники популяции (особи) — это не люди или животные, а бытующие типы поведения. А игроки — люди или животные — поступают тем или иным образом случайно, с некоторой текущей частотой $\alpha(t)$, не занимаясь настоящей оптимизацией, но несколько увеличивая частоту тех ходов, где они в среднем, по опыту, больше выигрывают. Мутации есть случайные ходы. Концепция равновесия и результат в таких ситуациях те же, что в популяциях с реальными особями типа “болванов” (dummy).

Упражнение. В описанной в предыдущем примере ситуации с воробьями, предположите, что есть еще один тип воробьев, его доля в популяции β, он называется “буржуазным”, поскольку уважает собственность. Подразумевается, что если такой воробей нашел корм первым, то считает его своим и дерется с любым претендентом, получая выигрыш (-1), как и претендент. Если же он подходит к корму вторым, то с мирным напарником кормится вместе (выигрыши (1,1)), а агрессивному уступает (выигрыши (0,2)). Считая вероятность быть первым 1/2 и усреднив, получим, что выигрыши равны $u_\beta(\beta, \alpha, \mu) = -1\alpha + 1\mu + 1\beta$... Найдите эволюционное равновесие (β, α, μ) (только ли “буржуазные” типы поведения останутся, единственно ли EvE?).

Пример 2.17 (“Обезьяны: альтруисты и эгоисты”) Пусть, на равнине, равномерно покрытой джунглями рассеяна популяция обезьян. Обязьяна может быть типа альтруиста, вычесывая блох у соседей, либо типа эгоиста, подставляя спину другим, но сама не вычесывая. Предположим, что у каждой обезъяны 8 соседей (как у клетки на шахматной доске), и полезность ее возрастает пропорционально числу альтруистов среди них, но убывает по размеру собственных усилий. Покажите, что при подобной целевой функции окажется, что в этом лесу единственное эволюционное равновесие – полный эгоизм. Напротив, при некоторых параметрах подобной целевой функции и возможности парных мутаций нет эволюционных равновесий: возникающая в эгоистичном лесу пара альтруистов растет, как пятно, в ней возникает пятно эгоистов, и т.д. Подобная ситуация возможна и при единичных мутациях: не из всякого начального положения устанавливается равновесие. В другом варианте игры: когда альтруизм гаснет, если не взаимен – возможно равновесие с полным альтруизмом (точнее, дружелюбием), мутации эгоистов подавляются эволюцией.

Эти соображения о возможности предсказания эволюционных равновесий без рациональности хорошо переносятся с популяций животных и на “популяции” типов поведения людей. Дело в том, что в истории многие сообщества чаще всего не были способны свободно “конструировать” типы поведения, даже если они признавались полезными (вопреки Ж.-Ж.Руссо). Традиционализм перевешивал изменчивость. Нормы возникали, скорее, эволюционно. Другая причина применимости эволюционной концепции та, что даже в бизнесе, тот или иной тип маркетингового поведения зачастую слишком трудно просчитать и оптимизировать. Практически, популяция торговцев просто “пробует” (мутации) множество разных типов поведения, и некоторые из них выживают в равновесии, а неуспешные торговцы “обезъянничают” у успешных или выходят из игры (в обоих случаях их прошлый “тип поведения” погибает). Тем самым, ограниченная рациональность торговцев не препятствует описанию ситуации игроподобной моделью с максимизацией прибыли.

2.15 Содержательное сопоставление различных концепций решений игр

В заключение обзора (заведомо неполного) различных концепций решений игр попробуем сопоставить их между собой; в какой мере некоторые концепции могут считаться частным случаем других или, наоборот, отражать принципиально разные ситуации?

Прежде всего, сопоставляя некооперативные (NE, MaxMin) и кооперативные концепции решений (например, ядро, Парето-границу), можно заметить, что вторые, в отличие от первых, служат скорее критериями оптимальности для определенных ситуаций, чем способами предсказать исход. Действительно, указывая ядро как некоторое множество “интересных” исходов в ситуации, где возможны переговоры, следовало бы указать еще процедуру, которой будут вестись переговоры, построить по ней соответствующую некооперативную игру (кто что может предложить, кто отказаться, и т.д.) и тогда уже пытаться предсказать исход. Причем, исход при некоторых механизмах (дележ Шепли) может быть и не в ядре. Однако, польза простой концепции ядра как именно предсказательной концепции в том, что многие сложные реальные процедуры приводят к ядру, и мы можем иногда предсказывать множество потенциальных исходов *не зная конкретной процедуры*, а лишь ее принадлежность этому классу.

Далее, обсуждая некооперативные концепции, из предыдущего должно быть ясно, что статическая игра – это частный случай динамической, а именно, это однопериодная игра с одновременными скрытыми ходами партнеров. В таком разрезе, прямо по определению, решение Нэша есть SPE этой игры (не имеющей дополнительных подыгр). Но тонкость в том, что это же решение Нэша может быть применимо и к повторяемой игре с такой же структурой возможных ходов и выигрышей, в том числе - к игре бесконечной. Тогда его нужно рассматривать как одно из совершенных в подыграх равновесий (SPE) этой повторяемой игры, такое, где ходы неизменны от раунда к раунду (см. ситуации с Folk Theorem). Именно в этом смысле его называют “равновесием”, хотя строгое обоснование того, что это действительно равновесие должно проводиться именно через соответствующую развернутую форму динамической игры. Итак, NE – это простая концепция, иногда применимая к весьма сложной ситуации, которую мы пытаемся прогнозировать *не зная конкретной динамики*.

Напротив, решение Штакельберга, возникшее первоначально для “статических” игр, на самом деле выражает совершенно определенную динамику: на первом этапе ходит лидер, затем одновременно (по Нэшу) – его последователи. Итак, StE есть SPE в подходящим образом сформулированной двухпериодной игре. Небольшое отличие возникает только в “оптимистической” и “пессимистической” вариациях понятия StE.

Аналогично, понятие итерационно-слабо-недоминируемого множества IWND, приводящее к сложному равновесию SoE, можно рассматривать как осуществляемое на определенном дереве игры, задающем последовательность отметания (слабо) доминируемых альтернатив. В классическом варианте определения SoE последовательность предполагается такой: все игроки одновременно отбросили стратегии в первом раунде, увидели результаты, отбросили во втором, и т.д. Но в определенных случаях (например, при неповторимости выигрышей) и все другие варианты последовательности ходов приводят к тому же результату (см. Мулен, 1985,). Поэтому, опять, ценность данной простой концепции в попытке предсказывать исход *не зная конкретной динамики*. Все же, пытающийся делать такие предсказания должен ясно понимать, что корректным является все же именно анализ динамической игры, и оценивать, насколько принимаемое упрощение исказит прогноз.

Концепции решений динамических некооперативных игр мы уже сравнивали выше.

3 Приложение: Наиболее употребительные определения

Максимин (MM) - исход игры (профиль стратегий) при осторожном поведении всех, то есть при максимизации гарантированных выигрышей, не учитывая в своих расчетах целей и текущих решений партнеров.

Решение в (слабо-) доминирующих стратегиях (WDE) или слабо-доминирующее равновесие - исход игры в случае наличия у каждого "абсолютно-оптимальной"стратегии, то есть стратегии, (слабо) доминирующей над всеми другими его стратегиями независимо от ходов партнеров, их целей и текущих решений. [Аналогично и определение сильно-доминирующего равновесия **SDE**.]

Решение в итерационно- (слабо-)недоминируемых стратегиях ($\mathbf{IND}_W$) - исход игры в случае одновременного итерационного отбрасывания (слабо-) доминируемых стратегий каждым игроком и соответствующего редуцирования игры: исключения отброшенных стратегий из рассмотрения ВСЕМИ игроками. Требует знания или целей партнеров или факта отбрасывания стратегий. [Аналогично определяется Решение в итерационно- сильно-недоминируемых стратегиях (IND_S).]

Равновесие Нэша (NE) - исход игры (профиль стратегий), при котором ни у одного игрока нет стимула отступить от своей текущей стратегии, при знании текущих стратегий партнеров и гипотезе, что партнеры не отступят. [Эквивалентный вариант: Равновесие Нэша - исход, когда все сходили одновременно вслепую, имея лишь некоторые ожидания о запланированном ходе партнеров, а когда карты открылись, то все ожидания оправдались.]

Совершенное в Подыграх Равновесие (Нэша) (SPE = SPNE) - это равновесие Нэша в развернутой форме игры, являющееся также равновесием Нэша во всех ее подыграх. (Внимание: оно может не являться NE этой же игры в нормальной форме, поэтому не всегда $SPE \subseteq NE$!)

Слабый оптимум Парето ($W\mathcal{P}$) - возможный исход, который нельзя улучшить для всех игроков сразу, даже согласовав их ходы. **Сильный оптимум Парето** ($\mathcal{P}$) - исход, который нельзя улучшить для кого-то, не ухудшив для других.

Элемент (слабого) Ядра игры (**C**) - возможный исход, который не блокируется ни одной коалицией в переговорах. Коалиция блокирует в переговорах (отвергает) вариант, если имеет другой, строго более желательный для всех своих членов, среди СВОИХ возможностей (среди вариантов, достижимых независимо от действий внекоалиционных игроков). Т.е. Ядро - множество вариантов, вне которого соглашений быть не может.

Сокращения: MM – MaxiMin, DE – Dominant Equilibrium, SDE – Strong Dominant Equilibrium, IND_W – Iterative (Weakly) Non-Dominant Equilibrium, SoE – Sophisticated Equilibrium, NE - Nash Equilibrium, NE_m – Nash Equilibrium in Mixed stratagies, $SP(N)E$ – Subgame Perfect (Nash) Equilibrium, StE – Stackelberg Equilibrium, $\mathcal{P}$ - Pareto, C – Core.

Список литературы

[1] David M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton.

[2] Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

[3] R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

[4] Fudenberg, Drew & Jean Tirole. 1991. Game Theory.- MIT Press.

[5] Eric Rasmusen. 1989. Games and Information (An Introduction to Game Theory).- Blackwell. Cambridge MA, Oxford UK.

[6] Jean Tirole. 1988. The Theory of Industrial Organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

[7] Andrew Heywood. 1997. Politics.- London, Macmillan.

[8] . J.-E.Lane & S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

[9] Э.Мулен. 1985. Теория игр (с примерами из математической экономики).- М., Мир.

[10] Э.Мулен. 1995?. Кооперативное принятие решений: аксиомы и проблемы.- М., Мир.

[11] H.Varian “Microec.Analysis”

[12] В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

[13] В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа: фиаско рынка”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

Расширенная Библиография

1) Рекомендуемая студентам литература:

1. J. Tirole. 1988. Industrial organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets. (Ж.Тироль. Теория отраслевых рынков.- М.Экономика, 1999.) (Глава 11).

2. В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков".- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

3. В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа” - TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

4. D.M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton. (Part III, Chapters 11-15)

5. Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

6. Andrew Heywood. 1997. Politics .- London, Macmillan.

7. R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

8. Fudenberg, Drew and Jean Tirole. 1991. Game theory.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

9. J.-E.Lane and S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

2) Дополнительная литература используемая в курсе:

9. Э.Мулен. 1985. Теория игр, с примерами из мат. экономики.- пер. с англ. Москва, Мир.

10. Э.Мулен. 1991. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели.- пер. с англ. Москва, Мир.

11. Э.Экланд. 1985. Математическая экономика.- пер. с англ. Москва, Мир.

12. В.Маракулин. 2001. Равновесный анализ математических моделей экономики с не-стандартными ценами (Теория игр - часть 3).- Новосибирск НГУ.

13. Р.Льюс, Э.Райфа. 1971.// Игры и решения.- пер. с англ. Москва, Мир. //

14. Р. Оуен. 1971// Теория игр.- пер. с англ. Москва, Наука. //

15. Дж.фон Нейман, О.Моргенштерн. 1970. Теория игр и экономическое поведение.- пер. с англ. Москва, Наука.

3) Источники задач и упражнений, используемые в курсе:

Книги: J.Tirole 1988, D.M. Kreps 1990, Э.Мулен. 1985, 1991, P.C.Ordeshook 1992. Под-борки задач университетов (из Интернета и личных контактов): Harward, Central Euro-pean University (Budapest), New Economic School (Moscow).