Автор: В.В. Капитоненко,
д-р экон. наук, проф., действит. член
Международной Академии наук Высшей школы

Рецензент: д-р экон. наук, проф. *Н.П. Тихомиров* (зав. кафедрой экономической кибернетики Российской экономической Академии им. Г.В. Плеханова).

Капитоненко В.В.
Финансовая математика и ее приложения: Учебн.-практ. пособие для вузов. - М.: "Издательство ПРИОР", 1999. - с. 144

ISBN-7990-00-0088-9

В пособии даются методы коммерческих расчетов, а также основы портфельной теории: эффективная траектория, линии рынков ценных бумаг и капитала, равновесные цены и т.д. Рассматриваются вопросы учета вероятностной и диапазонной неопределенностей: риски, их измерители, отношение к риску и функция полезности.

Многочисленные разъясняющие примеры, рисунки и графические иллюстрации облегчают восприятие теоретического материала и делают его доступным для освоения в практической деятельности: при составлении и анализе финансовых схем, для кредитных и инвестиционных расчетов, в операциях с ценными бумагами.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей. Оно будет также полезно для широкого круга практических работников и специалистов финансовых институтов.

ISBN 5-7990-0088-9

9 785799 000882

ЧАСТЬ I. Математические основы финансового анализа

1. Наращение и дисконтирование

Время и неопределенность как влияющие факторы

Неотъемлемой составляющей финансового анализа является учет фактора времени. В его основе лежит **принцип неравноценности** *денег в разные календарные сроки.* Одинаковые суммы денег "сегодня" и денег "завтра" оцениваются по-разному. Сегодняшние деньги приравниваются возросшей денежной массе в будущем и, наоборот, вместо денег "потом" можно согласиться на уменьшение выплаты, но сейчас.

Чем вызваны подобные предпочтения? *Во-первых,* возможностью продуктивного использования денег как приносящего доход финансового актива. Так, производственные инвестиции позволяют в перспективе не только вернуть затраченные средства, но и получить весомый добавочный эффект.

Другой фактор, влияющий на предпочтения, — неопределенность будущего и связанный с нею риск. ***Деньги "в кармане"*** могут быть израсходованы на потребление сиюминутно.

Сберегаемые же деньги подвержены всевозможным рискам в зависимости от способа сбережения. Если они хранятся на домашнем "депозите", например, под матрацем, им грозит обесценение из-за инфляции или кончины их владельца.

В случае, когда деньги даются ***в долг***, риск невозврата зависит от успешности кредитуемого мероприятия, которое может завершиться и полным крахом, убытками. Потому-то возвращаемая сумма всегда должна быть больше заемной как с учетом срока ссуды, так и существующего риска потерь.

Формулы, приводимые в данном разделе, позволяют пересчитывать и приводить денежные потоки к различным временным датам *без учета неопределенности.* Для случаев, когда влиянием стохастических факторов и дефицита информации пренебречь нельзя, разработаны специальные подходы. Некоторые из них, в частности для операций с ценными бумагами, будут рассмотрены в следующих темах пособия.

В ближайших параграфах дается методическая и математическая база для вычисления денежных сумм, как наращенных по начальному вкладу, так и предшествующих заданному платежу. Она же является основой для более сложных расчетов, например, потоков платежей или инвестиций. Это позволяет, в частности, сэкономить на изложении многочисленных частных вариантов, заменив их на обобщенный или на задачи для самостоятельных упражнений.

Начисление процентов

Дадим формулы расчета *будущих сумм* **S** *по начальному вкладу* **P**. В основе их построения лежит понятие *единичного периода начисления* (**T=1**) и *процентной ставки* **i**, которая фиксирует процентное увеличение исходной суммы P за первый период. В результате сумма на конец этого промежутка времени

$$S_1 = P + \frac{P}{100} i .$$

Если ставка i измеряется десятичной дробью,

то $S_1 = P + P \times i$.

По отношению к следующим периодам ставки процентов трактуются по-разному в зависимости от принятой схемы начисления: по ***простым*** или по ***сложным процентам***. В первом случае приросты денежных сумм для любого периода будут составлять все ту же долю i от первоначальной суммы P. В результате наращенная за n периодов сумма составит величину

$$S_n = P + niP = P(1 + ni). \qquad (1)$$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться *дробным* измерением ставки i.

В отличие от простых *для сложных процентов* одна и та же ставка i берется для каждого последующего промежутка не от первоначальной суммы, а от результата предыдущего начисления, то есть от суммы, наращенной на начало данного периода. Отсюда следует, что вклад P при ставке сложного процента i через n периодов составит сумму

$$S_n = P(1+i)^n. \qquad (2)$$

Таким образом, последовательность наращенных сумм $\{S_n\}$ в случае простых процентов представляет арифметическую прогрессию, в то время как для сложных процентов прогрессия будет геометрической.

Выражения (1), (2) называют формулой простых и, соответственно, сложных процентов, а под *процентными деньгами* или, кратко, ***процентами** понимают величину дохода (приращение денег)* $I_n = S_n - P$. В финансовых вычислениях в случае меняющихся во времени процентных ставок используют очевидные обобщения правил (1), (2):

$$S_n = P\left(1 + \sum_t n_t i_t\right) \text{ — для простых процентов,}$$

$$S_n = P\prod_t (1 + i_t)^{n_t} \text{ — для сложных процентов.}$$

В практических расчетах формулы (1), (2) используют по необходимости и для дробного числа периодов. Графическая иллюстрация соотношения сумм, наращиваемых по любому, в том числе дробному, сроку $t \geq 0$, приведена на рис. 1.

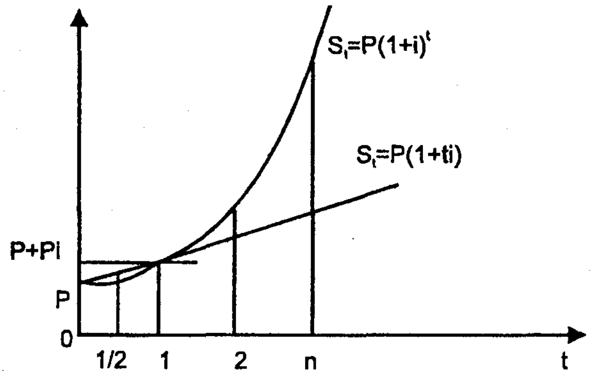


Рис. 1. Соотношение роста по простым и сложным процентам

Подчеркнем, что при срочности $t < 1$ (как видно из рис. 1) начисление по простым процентам превышает сложный процент; при переходе через единичный промежуток картина меняется: превалирует сложный процент, причем с возрастающей во времени отдачей. Например, при $t_1 = \dfrac{1}{2}$ и $t_2 = 2$ имеют место неравенства:

$$(1 + i)^{\frac{1}{2}} < \left(1 + \frac{1}{2} i\right) \text{ и } (1 + i)^2 > (1 + 2i).$$

Дисконтирование и удержание процентов

Эти процедуры в определенном смысле являются обратными по отношению к процессу начисления процентов. **Дисконтированием** называется *авансовое удержание с заемщика процентов в момент выдачи ссуды,* то есть до наступления срока ее погашения.

Другим вариантом дисконтирования является **учет векселей** *в банке, когда банк, принимая вексель от предъявителя, выдает ему обозначенную на векселе сумму до срока его погашения.* При этом банк удерживает в свою пользу проценты (дисконт) от суммы векселя за время, оставшееся до срока гашения. Подобным образом (с дисконтом) государство продает большинство своих ценных бумаг (долговых обязательств).

В нашем случае исходной величиной выступает не начальный вклад P, а некоторая будущая сумма S. Вопрос состоит в том, чтобы определить эквивалентную сумму P, отстоящую на t предшествующих периодов до срока выплаты S. В зависимости от принятого критерия эквивалентности можно выделить ***два подхода к расчету предшествующих сумм.***

Во-первых, по размеру вклада P, который при начислении процентов через t периодов дает сумму S, и, *во-вторых,* по размеру платежа, к которому придем при удержании процентов с финальной суммы S за срок t. Таким образом, при одном толковании за базовую величину, то есть за 100%, принимается размер вклада P, в то время как при другом - за 100% берется будущая сумма S. Кроме того, по каждому варианту дисконтирование можно производить как по простым, так и по сложным процентам.

В случае **приведения по вкладу P** для нахождения дисконтированных значений достаточно воспользоваться формулами (1) и (2), решив их относительно величины P.

В результате получим две формулы:

$$P = \frac{1}{1 + ti} S \qquad (3)$$

при дисконтировании по простым процентам и

$$P = \frac{1}{(1 + i)^t} S \qquad (4)$$

для сложных процентов. Стоящие в этих формулах *мультипликаторы* $\gamma_1 = \frac{1}{1+ti}$ и $\gamma_2 = \frac{1}{(1+i)^t}$ показывают, какую долю составляет P в величине S при простой и соответственно сложной ставке процентов и называются ***дисконтными множителями***.

Величину P, найденную дисконтированием S по вкладу, называют современной, или ***приведенной величиной S***. Это понятие является одним из важнейших в количественном анализе финансовых операций, поскольку именно с помощью дисконтирования учитывается такой фактор, как время.

Формулы **дисконтирования по платежу** (второй подход) можно получить, используя формулы (1) и (2) с заменой схемы начисления процентов на вклад P схемой их удержания с суммы S за тот же срок вложения. За основу их построения можно принять понятие *единичного периода удержания процентов* (дисконтирования) и *учетной ставки d*, которая фиксирует процентное или долевое уменьшение суммы S на один период "назад". Отсюда следует, что на начало этого периода эквивалентная выплате S сумма составит величину P, которая при дробном измерении ставки определяется формулой

$$P = S - dS.$$

По отношению к следующим периодам учетная ставка трактуется по-разному в зависимости от принятой схемы дисконтирования: по простым или по сложным процентам. В первом случае удержания денежных сумм (дисконты) по каждому периоду будут составлять все тот же процент d от все той же суммы S. В результате такого дисконтирования за t периодов получится величина

$$P_t = S - tdS = S(1 - td). \qquad (5)$$

В отличие от этого при учете по сложной ставке последовательные по периодам снижения берутся как один и тот же процент d, но не от одной и той же величины S, а каждый раз от новой, полученной в результате дисконтирования на соседний период. Отсюда следует формула дисконтирования (учета) по сложным процентам, где в качестве процента выступает доля удержания d:

$$P_t = S(1 - d)^t. \qquad (6)$$

В качестве разъясняющих примеров приведем два элементарных упражнения: на начисление процентов (задача а)) и их удержание (задача б)).

а) При двух последовательных одинаковых процентных повышениях заработной платы сумма в 1 млн. руб. обратилась в 1245400 руб. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз.

б) После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена телевизора упала с 3 млн. руб. до 1920000 руб. На сколько процентов снижалась цена телевизора каждый раз.

Схема дисконтирования (3), (4) широко применяется в многообразных задачах финансового анализа, в том числе *для сравнения потоков платежей и при расчете стоимости облигаций и прочих ценных бумаг*. Примеры подобных приложений будут приведены в дальнейшем при рассмотрении соответствующего материала.

Дисконтирование по удержанию (5), (6) используется ***при учете векселей***. Суть этой финансовой операции состоит в следующем. Некто выдает вексель (расписку) с обязательством уплатить сумму S на определенную дату T. Владелец векселя в случае нужды может досрочно учесть его, т. е. получить деньги раньше срока в коммерческом банке (КБ) по установленной последним учетной ставке d, которая уменьшает сумму выплаты. В зависимости от принятых условий учет проводится по простым (5) или по сложным (6) процентам.

Такой вексель, который допускает участие третьих лиц, называется *переводным* или *траттой*. В дальнейшем, на дату T, банк предъявляет вексель тому, кто его выписал, и получает сумму S, извлекая из этой операции собственную выгоду: учитывал по меньшей сумме, а получил большую.

Пример. в) Тратта выдана на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11. Владелец документа учел его в банке 23.09 по учетной ставке 8%.

Так как оставшийся до погашения обязательства период равен 55 дням, то полученная сумма (без уплаты комиссионных) составит

$$P = 100000\left(1 - \frac{55}{360} \times 0{,}08\right) = 98777{,}78 \text{ руб.},$$

а дисконт равен

$$D = 100000 - 98777{,}78 = 1222{,}22 \text{ руб.}$$

Подсчитаем годовую доходность операции учета по простой ставке для банка:

$$i = \frac{1222{,}22 \times 360 \times 100}{98777{,}78 \times 55} \approx 7{,}85\%.$$

Сравнивая эту ставку с доходностями альтернативных вложений, банк может оценить целесообразность проведения подобной операции.

Подытоживая, отметим, что такой известный инструмент денежно-кредитной политики, как *учетная ставка Центрального банка,* используется им по большей части не столько для переучета векселей коммерческих банков, сколько для взыскания с них процентных платежей по предоставленным ссудам. Подобная практика использования учетной ставки, существующая во многих странах, сложилась исторически.

Эквивалентные процентные ставки

Введенные выше процентные ставки: простая, сложная, учётная, являются количественными характеристиками различных финансовых операций. В практической деятельности постоянно возникает потребность в сравнивании между собой по выгодности условий различных финансовых операций и коммерческих сделок. Для этого разнородные и потому несопоставимые ставки по интересующим альтернативным вариантам целесообразно привести к единообразному показателю и, опираясь на его числовые значения, сопоставить имеющиеся варианты.

В основе получения такого показателя лежит понятие **эквивалентной процентной ставки**, т. е. такой, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат, что и применяемая в этой операции ставка. Таким образом, для отыскания эквивалентной ставки выбранного вида (простой, сложной, учетной) необходимо записать условие эквивалентности использования данной ставки и базовой, которое сводится к равенству наращенных сумм. Приведем несколько примеров.

а) Коммерческий банк учитывает векселя по сложной учетной ставке d. Финансовые аналитики банка оценивают доходность его активных операций по ставке сложного годового процента. В связи с этим требуется оценить доходность банковских учетных операций через эквивалентную ставку i сложного процента.

Вложения банка в операции по учету векселей составят величину $P = S(1 - d)^t$, а его выручка при погашении векселей равна сумме S. Записывая условие эквивалентности $P(1 + i)^t = S$, придем к уравнению $S(1 - d)^t(1 + i)^t = S$. Отсюда $i = \frac{d}{1-d}$.

б) Пусть P — первоначальная сумма и на нее в течение года начисляются проценты по годовой ставке j, причем число периодов начисления равно m. Полученная при такой, так называемой m-кратной, капитализации сумма на конец года составит величину

$$S = P(1 + j/m)^m. \qquad (7)$$

Будучи продолжено на T лет такое реинвестирование даст результат

$$Q = P(1 + j/m)^{mT}. \qquad (8)$$

В соответствии с определением эквивалентная годовая ставка i сложных процентов по такой возобновляемой на протяжении T лет операции должна удовлетворять равенству

$$(1 + i)^T = (1 + j/m)^{mT},$$

откуда

$$i = \left(1 + j/m\right)^m - 1.$$

Заметим, что рассмотренным здесь ставкам j, i в финансовом анализе соответствуют **номинальная и эффективная ставки процентов.**

Эффективная ставка

Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, дающая то же соотношение между выданной суммой S(0) и суммой S(T), которая получена при любой схеме выплат.

Общая формула эффективной ставки r_{ef} следует из определения

$$(1 + r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(O)},$$

откуда

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(O)}\right]^{\frac{1}{T}} - 1, \qquad (9)$$

где T - время (в годах), за которое получен доход.

Пусть выплаты процентов происходят по схеме m-кратной капитализации, рассмотренной в примере б). Приводя в соответствие обозначения, получим S(0) = P, S(T) = Q. Подставляя выражения (7), (8) в формулу (9), найдем зависимость эффективной ставки от номинальной ставки j:

$$r_{ef} = (1 + j/m)^m - 1.$$

Таким образом, эффективная ставка измеряет тот относительный доход, который может быть получен в целом за год, т. е. сторонам безразлично — применять ли ставку j при начислении процентов m раз в год или годовую ставку r_{ef}. И та, и другая ставка эквивалентны в финансовом отношении.

Иначе говоря, эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает за T лет тот же финансовый результат, что и m-кратное наращение в год по ставке j/m. Заметим, что если T = 1, то эффективная ставка совпадает с простой годовой ставкой, эквивалентной m-кратному реинвестированию при номинальной ставке j.

Примеры. а) Ниже приведена строка эффективных ставок (%) при номинальной ставке j = 120% и для различных периодов реинвестирования, начиная с 7 дней и до полугодия.

Срочность кредита (дней) номинальная ставка (%)	7	14	21	30	90	180
120	228.5	223.2	219.0	213.8	185.6	156.0

Из таблицы видно, как приумножается годовой доход с помощью "челночного" кредитования, когда источником каждого последующего кредита служит возврат по предыдущему. При практической реализации подобных схем эффективные ставки будут ниже. В качестве понижающих причин можно отметить налоги, которые также вовлекаются в реинвестирование, но со знаком минус, а также запаздывание в выдаче очередного кредита относительно погашения предшествующего.

Для иллюстрации оценим действие второго фактора. Обозначим срочность кредита (время, на которое предоставляется кредит) через τ, и пусть Δ — задержка в реинвестировании (в днях). Очевидно, что в этом случае эффективная годовая ставка

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{\tau \times j}{360}\right)^{\frac{360}{(\tau+\Delta)}} - 1.$$

Так, при значении Δ = 2 можно составить следующую таблицу эффективных ставок, скорректированных с учетом фактора запаздывания.

Срочность кредита (дней) номинальная ставка(%)	7	14	21	30	90	180
120	151.6	180.0	189.7	192.9	181.2	154.9

Характер изменения эффективностей, рассчитанных с учетом задержки, обнаруживает "куполообразную" зависимость от срочности τ. Попробуйте дать содержательную интерпретацию этого факта.

б) Выдан кредит в 2 млн. руб. на 3 месяца под 100% годовых.

С учетом того, что такой краткосрочный кредит подразумевает начисления под простые проценты, получаем

$$S(T) = S(0)\left(1+\frac{3}{12}\right) = 2{,}5 \text{ млн. руб.}$$

Откуда по формуле (9) при $T = \frac{1}{4}$ определяем эффективную ставку

$$r_{ef} = \left(\frac{2{,}5}{2{,}0}\right)^4 - 1 = 1{,}443 = 144{,}3\%.$$

в) Вексель на 30 млн. руб. с годовой учетной ставкой 10% и дисконтированием 2 раза в год выдан на 2 года.

В данном случае $T = 2$, $S(T) = 30$, а выданная в долг под этот вексель сумма

$$S(0) = 30\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right)^4 = 24{,}4 \text{ млн. руб.}$$

и, следовательно,

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(O)}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{(0{,}95)^2} - 1 = 0{,}108 = 10{,}8\%.$$

Расчет эффективной ставки r_{ef} – один из основных инструментов финансового анализа. Его знание позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам: чем выше эффективная ставка сделки, тем (при прочих равных условиях) она выгоднее для кредитора.

Учет инфляции

Идею учета инфляционного фактора поясним, опираясь на простую ситуацию выдачи годового кредита. Пусть кредитор желает получить i_r процентов на ссужаемую им сумму Р. При инфляции деньги обесцениваются и поэтому реальный эквивалент наращиваемой за год суммы $S = P(1 + i)$ составит величину

$S_r = P\frac{(1+i)}{(1+r)}$, где r — годовой темп инфляции.

В результате реальная ставка процентов составит

$$i_r = \frac{S_r - P}{P} = \frac{i-r}{1+r}. \qquad (10)$$

При достаточно большом r ставка процентов i_r может стать даже отрицательной. Отсюда видно, что, если кредитор не отреагирует на инфляцию достаточным увеличением ставки, он будет работать себе в убыток, а заемщик при этом будет обогащаться. Чтобы выровнять условия, следует скомпенсировать обесценивающее влияние индекса цен $\rho = 1 + r$. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке j, определяемой из условия:

$$(1 + j) = (1 + i)(1 + r),$$

то есть

$$j = i + r + ir. \qquad (11)$$

Полагая в (10) $i = j$, получим, что $i_r = i$. Таким образом, используя скорректированную ставку (11), кредитор получит реальный процент, равный тому доходу, который бы он имел в условиях без инфляции.

При невысокой инфляции величины i и r незначительны, и их произведением в формуле (11) можно пренебречь. В этом случае поправка на инфляцию ограничивается величиной темпа r, и ставку корректируют по формуле $j = i + r$.

2. Потоки платежей

Основные понятия

Поток платежей — это множество распределенных во времени выплат и поступлений. Учтем направленность платежа, используя ***положительные*** *величины для поступлений* и соответственно ***отрицательные*** *для выплат*. Согласно принятой знаковой формализации двусторонний поток удобно представлять в виде графической схемы.

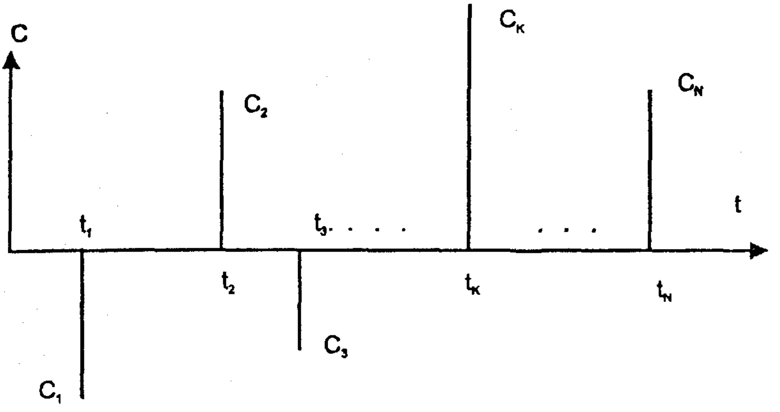


Рис. 2. Двусторонний поток платежей

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных сделок на финансовом рынке: кредитном, с ценными бумагами, а также при управлении финансами предприятий и осуществлении инвестиционных проектов и во многих других задачах экономической теории и практики. Примерами потоков могут служить поступающие в пенсионный фонд взносы; календарь "порционной" выдачи кредита и погашений по нему; купонные выплаты владельцам облигаций; растянутые во времени инвестиции в проект и доходы от его реализации и т. д.

Заинтересованные в платежах стороны преследуют определенные цели, успешность в достижении которых, помимо прочего, зависит от размеров платежей и времени их поступления, т. е. от параметров потока $\{C_i, t_i, N\}$ (рис. 2).

Получатели доходов стремятся к их увеличению и оценивают свой успех суммарным доходом, заработанным за полный срок действия платежей, - t_N . Разумеется, что с учетом временной неравноценности денег они не ограничиваются простой алгебраической суммой всех платежей, а оценивают их как взвешенную сумму, где весами являются множители наращения каждого платежа на определенную дату в будущем, например, t_N.

Вопрос о выборе ставки начисления процентов, входящей в весовые коэффициенты, решается в зависимости от имеющихся альтернатив использования денежного капитала, например — внесение средств на депозит банка по ссудному проценту r. Ввиду однозначной математической связи наращения с дисконтированием за базовую оценку потока платежей можно принять и алгебраическую сумму дисконтированных платежей на какой-либо прошлый момент.

В финансовом анализе эти обобщенные характеристики (оценки) последовательности платежей называются ***наращенной суммой (S)*** и ***современной величиной потока (A)***.

Их числовые значения дают будущий и соответственно упреждающий финансовые эквиваленты распределенного потока платежей. Можно сказать, что чистая приведенная величина равна той денежной массе, которая, будучи положена на депозит в банке по ставке r, вырастет к назначенной дате до величины суммы, наращенной по всему потоку и на ту же дату.

В качестве еще одной обобщающей характеристики остановимся на ***показателе внутренней нормы доходности (q)***. Содержательно этой характеристике отвечает такое значение ставки процента, при котором наращенная сумма потока затрат в точности совпадает с наращенной суммой от потока поступлений, иначе говоря, эта ставка характеризует эффективность, с которой используются расходуемые средства. Отсюда, в частности, следует, что, дисконтируя или начисляя по данной ставке, мы придем к нулевым значениям как приведенной, так, естественно, и наращенной характеристик.

Эти условия одновременно служат и уравнением для отыскания обсуждаемого показателя. Приведем элементарный пример. Пусть поток состоит из двух членов: выплаты, равной $(-S_0)$, и поступления $(+S_T)$. Тогда уравнение относительно внутренней нормы доходности q примет вид:

$$-S_0(1 + q)^T + S_T = 0,$$

откуда

$$q = \left[\frac{S_T}{S_0}\right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Видно, что в этом частном случае внутренняя доходность совпадает с эффективной ставкой процента, как она была определена формулой (9).

Основываясь на введенных определениях, легко понять, что с позиций получателя доходов потоковая ситуация тем лучше, чем выше значение ее обобщенных характеристик: чистого приведенного дохода, наращенной суммы, внутренней нормы доходности.

Рассматриваемые в финансовом анализе потоки платежей весьма разнообразны: сроки выплат, да и сами выплаты могут быть детерминированными величинами, но могут иметь и вероятностный характер. Так, например, в отличие от владельца облигации с фиксированной купонной ставкой, акционер, оценивая свои шансы на будущие доходы, располагает лишь предположительными суждениями о дивидендах. В настоящей главе мы ограничимся лишь детерминированным случаем, который присущ анализу потоков платежей *в условиях определенности*.

При полной определенности платежи задаются фиксированными значениями выплат C_i и моментов их поступления t_i, $i = \overline{1,N}$. Этих данных достаточно для расчета основных системных параметров: S, A, q. Однако могут возникнуть случаи, когда заданными являются обобщенные характеристики и неполный набор параметров потока. В таких случаях может потребоваться найти недостающие параметры или параметр.

Ниже даются примеры решения подобных задач для некоторых типовых потоков. Ввиду того, что задачи на отыскание потоковых параметров носят единообразный характер и по существу базируются на элементарных основах, автор намеренно ограничил состав примеров, оставляя читателю возможные частные случаи и обобщения для самостоятельных упражнений или работы с литературой.

Финансовые ренты

Финансовая рента или ***аннуитет*** — это частный случай потока платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны.

а) Общая постоянная рента. Такой рентой называется последовательность ***p*** одинаковых выплат на протяжении года в течение всего срока ренты **n** (число лет) с **m**-разовым ежегодным начислением процентов по одной и той же годовой ставке **i** (десятичная дробь).

При годовой сумме платежа R отдельные платежи $\frac{R}{p}$ следуют в конце каждого периода длительности $\frac{1}{p}$. На эти поступления наращиваются сложные проценты по ставке i/m столько раз, сколько периодов длины $\frac{1}{m}$ укладывается в течение оставшегося срока ренты. Очевидно, что k-й платеж отстоит от даты завершения n на расстоянии $\left(n-\frac{k}{p}\right)$ лет. Поэтому на него будет произведено $\left(n-\frac{k}{p}\right)m$ процентных начислений и его частичный вклад в наращенную сумму потока S составит величину

$$S_k=\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{(np-k)m}{p}}$$

С учетом того, что общее число платежей за весь срок n равно произведению np, будем иметь

$$S=\sum_{k=1}^{np}S_k=\sum_{k=1}^{np}\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{(np-k)m}{p}}.$$

Очевидно, что слагаемые этой суммы, записанные в обратном порядке, следуют в возрастающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R}{p}$, знаменателем $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$ и числом членов np. Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получим выражение для обобщенной характеристики

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (12)$$

Формулу современной величины потока можно получить аналогичным путем, но уже дисконтируя отдельные платежи с последующим суммированием или, что даст тот же результат, дисконтируя обобщенную характеристику S на начало ренты:

$$A = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-nm} = \frac{R}{P}\times\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \tag{13}$$

Рассматривая в (12), (13) возможные комбинации значений m и p по признаку их совпадения или несовпадения с единицей, придем к современной и наращенной величинам потока для различных частных рент: годовой или p-срочной ($p > 1$), с однократным или m-кратным ($m > 1$) начислением процентов.

По мнению автора, для овладения методами финансового анализа первостепенное значение приобретает не запоминание отдельных формул, а знание общих принципов, посредством которых эти формулы выводятся. В связи с этим, вам предлагается найти обобщенные характеристики перечисленных выше потоков непосредственно и проверить полученные ответы на соответствие формулам (12), (13).

Пример. На счет в банке вносится сумма 100 тыс. руб., однако не сразу, а в течение 10 лет равными долями в конце каждого года. Какой будет сумма на счете после 10 лет, если годовая ставка i = 0,04 (4%).

Условиям данного примера соответствует наиболее простой случай — годовая рента: каждый год — один взнос и одно начисление. Итоговая величина на счете определяется числовым значением суммы S, полученной сложением накоплений по каждому взносу:

$$S = 10\,(1 + 0{,}04)^9 + 10\,(1 + 0{,}04)^8 + \ldots + 10 =$$

$$= \frac{10\left[(1+0{,}04)^{10}-1\right]}{0{,}04} = 120 \text{ тыс. руб.}$$

Замечание. Выше показатели S, A получались сложением наращенных или дисконтированных значений по каждому индивидуальному платежу на "концевую" дату (либо на начало, либо на конец рассматриваемого периода). Как следует из содержания этих показателей, их можно вычислить также последовательным присоединением промежуточных результатов наращивания (соответственно дисконтирования) на дату очередного платежа и т. д. Для пояснения рассмотрим годовую ренту с членом R и ставкой начисления i. Тогда второму способу отвечает следующий ход рассуждений.

В конце первого года имеем поступление $S_1 = R$. В конце второго года на него начислятся проценты и добавится очередной платеж: $S_2 = R(1 + r) + R$. В конце третьего года начисление по первым трем платежам даст результат $S_3 = [R \times (1 + r) + R](1 + r) + R$ и т. д. вплоть до $S = S_n = S_{n-1}(1 + r) + R$.

б) Переменная рента. К этому типу относятся финансовые ренты, элементы которых изменяются в соответствии с каким-либо заданным правилом. Ограничимся рассмотрением ***двух типов*** переменной годовой ренты (выплаты в конце года): *с постоянным абсолютным* a и *с постоянным относительным* q приростами платежей.

1) ***Для первого типа*** последовательность платежей образует арифметическую прогрессию и n-й платеж $R_n = R_1 + (n - 1)a$. Дисконтируя на начало срока ренты, найдем современную величину:

$$A = R_1\gamma + (R_1 + \alpha)\gamma^2 + ... + [(R_1 + (n - 1)\alpha]\gamma^n, \quad (14)$$

где n — срок ренты, а дисконтный множитель $\gamma = \frac{1}{(1+i)}$.

Разделим равенство (14) на γ и запишем результат в виде следующего выражения:

$$A = (1 + i) + R_1(1 + \gamma + ... + \gamma^{n-1}) + \alpha\gamma + 2\alpha\gamma^2 + ... + (n - 1)\alpha\gamma^{n-1}.$$

Вычитая из обеих его частей соответствующие части формулы (14), имеем:

$$Ai = R_1(1 - \gamma^n) + \alpha\gamma\frac{(1-\gamma^n)}{1-\gamma} - n\alpha\gamma^n$$

или, несколько преобразовав это выражение, найдем

$$A = (R_1 + \frac{\alpha}{i})\frac{(1-\gamma^n)}{i} - \frac{n\alpha\gamma^n}{i},$$

Нетрудно понять, что здесь уменьшаемое

$A^* = \left(R_1 + \frac{\alpha}{i}\right)\left(\gamma^1 + \gamma^2 + ... + \gamma^n\right)$, т. е. дает современную величину постоянной ренты с членом $R_1 + \frac{\alpha}{i}$.

Очевидно

$$S = A(1+i)^n = \left(R_1 + \frac{\alpha}{i}\right)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{n\alpha}{i}.$$

Таким образом, для ренты, у которой размеры платежей образуют арифметическую прогрессию, эта характеристика совпадает с наращением для постоянной ренты с платежом, равным $R_1 + \frac{\alpha}{i}$ за вычетом поправки, пропорциональной разности прогрессии.

2) Пусть платежи характеризуются постоянным относительным приростом, т. е. $\frac{R_t - R_{t-1}}{R_{t-1}} = k$, $t = 2, 3, ..., n$.

Тогда их дисконтированные значения образуют геометрическую прогрессию с первым членом $R_1\gamma$, знаменателем $q = (1 + k)\gamma$ и числом членов n. Сумма этих величин, очевидно, равна приведенной стоимости потока:

$$A = R_1\gamma \frac{(1+k)^n \gamma^n - 1}{(1+k)\gamma - 1} = R_1 \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}.$$

Отсюда найдем характеристику

$$S = A(1 + i)^n = R_1[(1 + i)^n - (1 + k)^n]/(i - k).$$

Нерегулярные потоки платежей

Они характеризуются присутствием хотя бы одной нерегулярной составляющей: временные интервалы между соседними выплатами могут быть любыми; размеры поступлений могут быть любыми.

Для получения их обобщающих характеристик требуется прямой счет, который предусматривает вычисление соответствующей характеристики отдельно по каждому платежу с последующим суммированием. При начислении процентов раз в году он сводится к отысканию следующих сумм:

$$S = \sum_t R_t(1 + i)^{n-t}, \qquad A = \sum_t R_t\gamma^t. \qquad (15)$$

Заметим, что методы финансового анализа могут оказаться полезными в казалось бы далеких от его предназначения задачах. Характерными признаками таких возможностей является наличие потоковых величин пусть даже и "некоммерческого" происхождения. В качестве иллюстрации покажем, как можно получить формулу цены многопередельного продукта с помощью наращенной суммы с переменной ставкой начисления процентов.

Пример. Рассмотрим цепочку взаимодействующих и технологически сопряженных производств. Допустимо принять, что в условиях свободной продажи каждый производитель руководствуется принципом ценообразования по себестоимости: $p = (1 + \alpha)C$, где p — цена, C — себестоимость, α — рентабельность, на которую ориентируется продавец. Себестоимость j-го промежуточного продукта складывается из себестоимости C_j^+, добавленной на j-й стадии технологического цикла, и стоимости потребленной в j-м звене продукции предыдущего передела.

Очевидно, что формула "звенного" ценообразования в подобной технологической цепочке совпадает с результатом разовой капитализации вклада по ставке α. Легко понять, что для данной цепной структуры цена конечного продукта P равна наращенной сумме потока платежей C_j по ставкам начисления α_j на единичных интервалах $[j, j + 1]$, $j = \overline{1, n}$ (рис. 3).

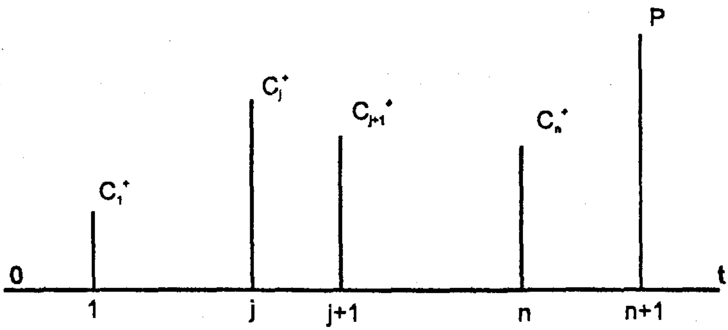


Рис. 3. Ценообразующий поток платежей

Отсюда имеем:

$$P = C_1^+ \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i) + C_2^+ \prod_{i=2}^{n} (1 + \alpha_i) + \ldots + C_n^+ (1 + \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j}^{n} (1 + \alpha_i) C_j^+$$

3. Финансовая эквивалентность обязательств

Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату. В условиях определенности, когда все фигурирующие величины рассматриваются как детерминированные, финансовая эквивалентность сводится к соблюдению требования получить по разным финансовым операциям одинаковые денежные результаты.

С этой целью все платежи по сравниваемым вариантам приводят к одному и тому же моменту в прошлом, будущем или на промежуточную дату, что удобнее. Равенство приведенных величин фактически свидетельствует о безубыточности вносимых изменений для финансовых отношений участников или равновыгодности сравниваемых схем с позиций одного участника, например, инвестора.

При действии *стохастических факторов,* когда параметры финансовой операции и ее результаты могут меняться случайным образом, понятие эквивалентности существенно усложняется и рассматриваться здесь не будет.

Принцип эквивалентности лежит в основе многих финансовых расчетов долгосрочного и кратковременного характера. Он применяется при различного рода изменениях условий контрактов: их объединении, замене, досрочном погашении или, наоборот, пролонгировании сроков платежей и т. д. ***Общий метод решения подобных задач заключается в разработке так называемого уравнения эквивалентности,*** в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнена сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

В заключение дадим несколько **примеров** на использование введенного здесь понятия.

а) Ранее в разделе эквивалентных ставок были найдены равносильные сложная процентная и учетная ставки. Очевидно, что тот же результат можно вывести и из уравнения эквивалентности, которое в данном случае имеет вид:

$P = S(1 - d)^t = S\,(1 + i)^{-t}$.

б) ***Консолидирование задолженности.*** Пусть платежи S_1, S_2, ..., S_m имеют сроки n_1, n_2, ..., n_m и объединены в одну сумму S_0 со сроком n_0.

Причем, если задан срок уплаты, то определяется S_0, и наоборот, если задана величина уплаты, то находим n_0. И в том и в другом случае задача состоит в том, чтобы определить разовый платеж (S_0, n_0), финансово-эквивалентный потоку платежей $\{S_i,\ i = \overline{1, m}\}$.

Условие эквивалентности для решения этих задач получается уравниванием современной стоимости потока $\{S_i,\ i = \overline{1, m}\}$ с дисконтированной на ту же дату величиной платежа S_0. В зависимости от соотношения сроков n_m и n_0 (позже - раньше) можно, кроме того, воспользоваться равенством наращенных сумм ($n_0 > n_m$) или комбинированным вариантом дисконтирований будущих и наращений прошлых относительно n_0 значений $\{S_i\}$ ($n_0 < n_m$). Например, для консолидации по сложным процентам и при смешанном приведении платежей ($n_0 < n_m$) уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+i)^{t_j} + \sum_k S_k(1+i)^{-t_k},$$

где S_j, S_k — суммы объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$ и соответственно $n_k > n_0$; $t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_k - n_0$.

Пример. Поток платежей представляет собой годовую ренту сроком m и размером платежа R. Требуется заменить этот поток финансово-эквивалентной разовой выплатой.

1) Пусть задан срок выплаты: она производится с запаздыванием в один год, т. е. $n_0 = m + 1$. Найти размер выплаты.

Для этой задачи уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_0(1 + i)^{-1} = S,$$

где $S = R\dfrac{(1+i)^m - 1}{i}$ — наращенная сумма ренты.

2) Пусть, наоборот, задана величина консолидирующей выплаты. Положим, для определенности, что она равна сумме всех членов ренты: $S_0 = mR$. Определим ее срок.

Понятно, что при выбранном размере заменяющего платежа его срок n_0 должен предшествовать времени окончания ренты m: $n_0 < m$ и является решением следующего уравнения эквивалентности:

$$mR(1 + i)^{m-n_0} = S.$$

в) ***Консолидация на основе учетной ставки.*** Два векселя со сроками 10.06 (10 тыс. руб.) и 1.08 (20 тыс. руб.) заменяются одним с продлением срока до 01.10. При объединении векселей применена простая учетная ставка 8%. Сроки пролонгации составят 113 и 61 день. Найти сумму S_0 нового векселя.

Заметим, что учетные ставки могут быть применимы и при расчете наращенной суммы: $S = P\dfrac{1}{1 - nd}$. Это следует хотя бы из условия эквивалентности ставки простого процента i, при которой

$$S(1 - nd) = S(1 + ni)^{-1}.$$

Приравнивая наращенную сумму вексельных выплат заменяющему их платежу, найдем этот платеж:

$$S_0 = 10\left(1 - \frac{113}{360}0{,}08\right)^{-1} + 20\left(1 - \frac{61}{360}0{,}08\right)^{-1} = 30{,}532 \text{ тыс. руб.}$$

Определение первичных параметров финансовых рент

К ***первичным*** относятся следующие параметры ренты: размеры платежей, моменты выплат, срок окончания. В этом смысле обобщенные показатели A, S и внутреннюю норму доходности q можно отнести к ***вторичным*** параметрам. Задачи на вычисление первичных характеристик относятся к проблеме выбора потока платежей, дающего требуемые финансовые результаты.

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу построения такой годовой ренты, наращенная сумма которой совпадает с величиной процентов по данному обязательству.

Нетрудно убедиться, что для определения члена ренты R следует воспользоваться следующим уравнением:

$$R\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=P\left[(1+i)^n-1\right],$$

где слева стоит наращенная сумма, а справа — процентные деньги; P — сумма основного долга, n — срок обязательства, i — ставка процента по обязательству. Таким образом, разовую выплату процентов в конце срока можно заменить ежегодными погашениями в размере $R = Pi$.

Задача. Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 100 млн. руб. Предполагается, что отдача от них составит 20 млн. руб. ежегодно. За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке $i = 0{,}1$.

Здесь поток поступлений представляет собой годовую ренту с членом $R = 20$. Определяемым параметром этой ренты является срок n, достаточный для погашения задолженности из наращенной суммы ренты. Уравнение для отыскания n получим, приравнивая наращенные суммы или современные величины долга и ренты.

При использовании наращений будем иметь

$$100(1+0{,}1)^n=\frac{20\left[(1+0{,}1)^n-1\right]}{0{,}1},$$

откуда

$$n=\frac{\ln 2}{\ln 1{,}1}\approx 7{,}3 \text{ года.}$$

ЧАСТЬ II. Типовые приложения

Ниже даются примеры разных приложений из области кредитов, инвестиций и ценных бумаг. При этом мы вынуждены ограничиться только *детерминированными* постановками, то есть случаями, для которых применимы изложенные ранее методы. Понятно, что в реальной действительности исходные данные в значительной мере случайны (курсы ценных бумаг, отдача инвестиций, процентные ставки и т. д.).

Кроме того, некоторых сведений может просто и не быть. При такой недостаточности информации говорят, что анализ и разработка финансовых схем проводятся в условиях риска и неопределенности. Для учета подобных условий детерминированного подхода уже недостаточно и приходится прибегать к *вероятностным методам*.

Вместе с тем методы анализа, ориентированные на полную определенность, во многих практических ситуациях позволяют получить "прикидочные" оценки с помощью простых расчетов. Они используются также для математического описания финансовых операций, проводимых в условиях неопределенности и риска. В последнем случае первичные параметры полученного описания трактуются уже как случайные величины. Поэтому зависящие от них вторичные переменные, например, обобщенные характеристики потоков, будут также случайны. В таких постановках в дополнение к изученным здесь приемам прибегают к вероятностным методам, а в случае оптимизации - к стохастическому программированию и моделям теории игр.

1. Кредитные расчеты

Для кредитной схемы в качестве исходных параметров выступают величина займа **D**, срок его погашения **n**, процент по кредиту **i**, под который выдаются деньги, и поток погашающих платежей $\{y_t\}$. В простейшем случае кредит погашается одним платежом в конце срока предоставления, то есть:

$$y_n = D\ (1 + i)^n. \qquad (16)$$

Этот платеж состоит из двух частей: возврата основного долга D и выплаты процентов $I = D\ (1 + i)^n - D$,

то есть $y_n = D + I$.

В финансовой практике может оказаться, что у кредитора возникает необходимость вернуть часть денег досрочно, а заемщику, в свою очередь, удобнее производить выплаты (основной суммы и процентов по ней) по частям. Причины подобных ситуаций весьма разнообразны и могут быть вызваны как текущими потребностями в ликвидных средствах, так и прогнозируемыми возможностями альтернативных вложений и т. д.

Поэтому кредитор и заемщик зачастую предпочитают не однократную выплату, а в несколько приемов, т. е. потоком платежей. В зависимости от преследуемых интересов стороны могут выбирать различные, удобные для них режимы в виде постоянных и переменных финансовых рент, а также нерегулярных потоков платежей.

Если выбор сделан, то планирование кредитной схемы сводится к определению членов ренты при условии равенства ее соответствующей обобщенной характеристики с величиной разового погашения (16) или с размером основного долга D.

В общем случае члены потока погашающих платежей состоят из двух денежных сумм: идущей на покрытие основного долга и выплачиваемой в виде процентов на его остаток, приуроченный к моменту предыдущего платежа.

$$y_t = D_t + I_t,\ t = \overline{1,n}.$$

Здесь под моментом t подразумевается конец года t, а сумма всех промежуточных возвратов D_t равняется величине займа D:

$$\sum_{t=1}^{n} D_t = D.$$

Планирование в этих параметрах позволяет анализировать различные допустимые варианты финансового обслуживания долга, в том числе и с пропуском по какой-либо причине одной из названных компонент: $D_t I_t = 0$. Так, при разовой выплате долга в конце срока величина $D_n = D$ и поэтому все остальные компоненты долговых взносов отсутствуют: $D_1 = D_2 = \dots = D_{n-1} = 0$. Как следствие - остаток долга на начало каждого года ($t = 1, \dots, n$) остается неизменным и равным своей первоначальной величине D, а выплаты процентов, начисляемых на равные остатки, будут равны:

$$I_t = iD,\ \ t = \overline{1,n}.$$

Понятно, что такая последовательность выплат ($y_t = iD$, $t = \overline{1, n-1}$, $y_n = D + iD$) финансово эквивалентна наращению (16).

Можно показать, что при указанной схеме процентных выплат отмеченный факт имеет место для любой последовательности погашений $\{D_t\}$ долга D такой, что $\sum_{t=1}^{n} D_t = D$.

Для кредита срочности n = 2 это свойство легко устанавливается прямой проверкой. В самом деле, пусть D_1 и D_2 — два произвольных по величине последовательных погашения основного долга D, т. е. $D_1 + D_2 = D$. Тогда поток процентных платежей состоит всего из двух выплат: первая $I_1 = iD$ производится по всему долгу D, а вторая $I_2 = i(D - D_1)$ начисляется на его остаток $D - D_1$. Накладываясь, эти долговые выплаты и проценты образуют финансовую ренту из двух срочных уплат $У_1 = D_1 + iD$ и $У_2 = D_2 + i(D - D_1)$. Наращенная сумма такой ренты

$$S = У_1(1 + i) + У_2 = (D_1 + iD)(1 + i) + (D - D_1) +$$
$$+ i(D - D_1) = D(1 + i)^2,$$

что совпадает с обслуживанием долга одной уплатой $У_2 = D(1 + i)^2$.

Для доказательства общего случая воспользуемся индукцией. Выделим в потоке погашающих платежей две части: по замыкающему покрытию долга D_n и по остатку $D - D_n$, погашаемому за срок $n - 1$.

Здесь первая часть вбирает в себя завершающее погашение D_n и последовательные выплаты процентов iD_n. Наращенная сумма такого потока платежей

$$S_n^{(1)} = iD_n(1 + i)^{n-1} + iD_n(1 + i)^{n-2} + \ldots + iD_n + D_n,$$

что, как легко убедиться, совпадает с формулой сложных процентов

$$S_n^{(1)} = D_n(1 + i)^n.$$

Для второй части, т. е. последовательности долговых уплат $\{D_t,\ t = \overline{1, n-1}\}$, в силу индукции эквивалентная ей на момент времени $(n - 1)$ величина наращения составит

$$S_{n-1}^{(2)} = (D - D_n)(1 + i)^{n-1},$$

что в конце года n дает значение

$$S_n^{(2)} = (D - D_n)(1 + i)^n.$$

Таким образом, полная последовательность платежей $\{D_t,\ t = \overline{1,n}\}$ порождает наращение

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = D(1 + i)^n,$$

что совпадает с условием кредита (16).

Приведем примеры распространенных кредитных схем.

Равные процентные выплаты

Этой схеме отвечает поток срочных уплат $\{y,\ t = \overline{1,n}\}$, изображенный на рис. 4.

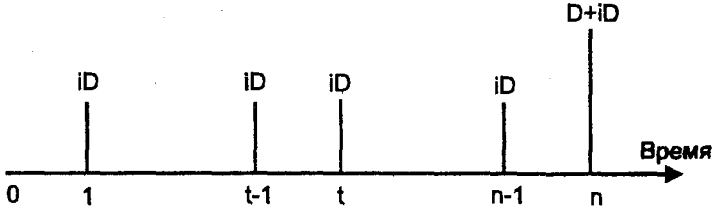


Рис. 4. Долг погашается разово, проценты — в рассрочку

Погашение долга равными суммами

Долг делится поровну между всеми ежегодными платежами, т. е. $D_t = \dfrac{D}{n},\ t = \overline{1,n}$. В этом случае остаток долга, что очевидно, следует арифметической прогрессии с разностью $(-\dfrac{D}{n})$. Из чего вытекает, что выплачиваемые в году $t + 1$ проценты составят величину

$$I_{t+1} = i\left(D - \frac{D}{n}t\right).$$

Равные срочные выплаты

По этому методу на протяжении всего срока регулярно выплачиваются постоянные срочные уплаты $y_t = y$. Они образуют годовую ренту. Приравняв первоначальную сумму долга D современной величине этой ренты, получим уравнение относительно неизвестной y:

$$y(\gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^n) = D,$$

где γ — дисконтный множитель. Откуда найдем размер уплаты

$$y = \frac{iD}{1 - \gamma^{n}}. \qquad (17)$$

Зная первую процентную выплату $I_1 = iD$ и платеж (17), найдем сумму первого погашения D_1. Это, в свою очередь, дает остаток долга для начисления процентов в следующем году, их величину I_2 и позволит определить платеж $D_2 = y - I_2$ и т. д. Видно, что с течением времени уплаты процентов уменьшаются, поэтому уплаты по долгу растут (так называемое прогрессивное погашение).

Аналогичные рассуждения позволяют найти *рекуррентные связи*, т. е. зависимости между последовательными во времени значениями, что удобно для практических расчетов в более общих случаях. Здесь же они позволяют вывести формулы, связывающие текущие выплаты долга и процентов и исходные параметры n, i, D.

Действительно, пусть d_t - остаток долга на начало периода t, $d_1 = D$.

Из (17) следует, что $iD = y - y\gamma^n$.

Отсюда получим, что

$D_1 = y - iD = y\gamma^n$, $D_2 = y - i(D - D_1) = y - i(D - y\gamma^n) = y\gamma^n + iy\gamma^n = y\gamma^{n-1}$ и, в чем легко убедиться, $D_t = y\gamma^{n-(t-1)}$.

Из полученного выражения непосредственно следует, что платежи основного долга образуют ряд: D_1, $D_1(1 + i)$, ..., $D_1(1 + i)^{n-1}$, т. е. каждый следующий член совпадает с наращением предыдущего.

Напомним, что, как уже отмечалось, все рассмотренные выше схемы приводят к одинаковому финансовому результату.

Формирование фонда

Поток уплат $\{y_t\}$ можно рассматривать как ренту кредитора, по которой он ежегодно начисляет проценты по ставке i и таким образом накапливает к концу срока n причитающуюся ему сумму (16). Очевидно, что накопление этой суммы может производить и заемщик, причем с выгодой для себя, если его ставка начисления j будет выше, т. е. $j > i$.

Это достигается с помощью так называемого ***погасительного фонда***. Такой фонд формируется из последовательных взносов (например, на специальном счете в банке), на которые начисляются проценты. Размеры взносов, независимо от характера формируемой ими ренты (постоянная, переменная и т. д.) выбираются так, чтобы ее наращенная по ставке j сумма равнялась наращенному долгу (16). Например, для схемы равных процентных выплат (рис. 4) накопление средств в погасительный фонд можно производить путем регулярных ежегодных взносов таких, что

$$\frac{R(1+j)^n - 1}{j} = D.$$

В этом случае срочная уплата заемщика (кредитная выплата в момент t составит величину

$$y_t = Di + R.$$

Ее часть Di в виде ежегодных процентов идет кредитору, а остаток R поступает в фонд. В конце срока накопленная в фонде сумма D направляется на погашение основного долга.

2. Оценка инвестиционных процессов

Инвестиционный процесс — это последовательность взаимосвязанных инвестиций (вложений денег), растянутых на несколько временных периодов, отдача (доходы) от которых также растянута во времени. В терминах финансового анализа этот процесс характеризуется двусторонним потоком платежей, положительные члены которого соответствуют доходной части, а отрицательные — вложениям, необходимым для осуществления инвестиционного проекта.

Как мы уже знаем, при анализе подобных потоков широко используются их обобщенные параметры: наращенная сумма S, приведенная стоимость A, внутренняя норма доходности q. Для инвестиционных процессов эти показатели приобретают смысл количественных характеристик для оценки эффективности проектных вложений. Рассмотрим основные из них.

Чистый приведенный доход

При помощи данного показателя все доходы E_t и затраты C_t по анализируемому инвестиционному проекту приводятся (путем дисконтирования) к одному моменту времени и берется их разность. В общем виде это можно записать как алгебраическую сумму

$$W = \sum R_t v^t, \qquad (18)$$

положительные и отрицательные слагаемые которой соответствуют доходам и капиталовложениям за период t, а v — дисконтный множитель по ставке сравнения i. Содержание показателя W можно раскрыть на следующем примере. Пусть капиталовложения полностью осуществляются за счет заемных средств, причем ссуда выдана под ставку i. Тогда W представляет собой ожидаемый чистый доход по инвестиционному проекту, приведенный к его началу.

Показатель эффективности W оценивает, на сколько приведенный доход перекрывает приведенные затраты, т. е. является *абсолютной* характеристикой. Следующий показатель, который мы здесь рассмотрим, определяет, во сколько раз приведенный доход больше приведенных затрат, т. е. является *относительной* характеристикой.

Рентабельность

Как отмечалось, этот показатель представляет собой отношение приведенных доходов к приведенным на эту же дату расходам.

$$U = \frac{\text{Сумма приведенных доходов}}{\text{Сумма приведенных затрат}} = \frac{\sum E_t v^t}{\sum C_t v^t} \qquad (19)$$

Срок окупаемости

При анализе инвестиционных проектов важно знать срок, за который отдача от реализации проекта компенсирует издержки на его реализацию. В финансовом анализе соответствующие суммы вычисляются с учетом фактора времени, т. е. определяется такой период времени, в течение которого сумма приведенных доходов достигнет или превзойдет (в предыдущий период она была меньше) сумму приведенных затрат. Этот период и называется ***сроком окупаемости***. Применение данного показателя проиллюстрируем следующим примером.

Пример. Инвестиционный проект характеризуется следующими показателями:

Годы	0	1	2	3	
Затраты (С)	100	50	–	–	
Доходы (Е)	–	100	400	800	

Определим срок окупаемости при доходности альтернативного вложения равной 100 процентам годовых.

Суммы затрат и доходов первого года соответственно равны:

$$100 + \frac{50}{1+1} = 125; \qquad 0 + \frac{100}{1+1} = 50,$$

для второго года сумма затрат: $100 + \frac{50}{1+1} = 125$, а сумма доходов:

$$0 + \frac{100}{1+1} + \frac{400}{(1+1)^2} = 150.$$

Сумма доходов превзошла сумму затрат в течение второго года, поэтому срок окупаемости равен 2 годам (проект окупается в течение второго года его реализации). Чем меньше срок окупаемости, тем эффективнее проект.

Внутренняя норма доходности

Этот измеритель эффективности производственных инвестиций фактически является аналогом одноименной обобщающей характеристики двустороннего потока. Его численное значение определяет ту ставку процента, при которой капитализация всех доходов на завершающую дату их поступления дает сумму, равную наращению инвестиционных затрат по той же ставке (обозначим ее q_B) и на ту же дату. В общем случае, когда инвестиции и отдача от них задаются в виде потока платежей $\{R_t\}$, q_B определяется из уравнения:

$$\sum R_t v^t = 0. \qquad (20)$$

Здесь v — дисконтный множитель по ставке q_B, R_t — член двустороннего потока платежей, t — время, измеряемое от начала осуществления инвестиционного процесса.

Из данного определения следует также, что внутренняя норма q_B имеет смысл такой ставки процента, для которой срок окупаемости проекта ($t_{ок}$) совпадает с его продолжительностью (T), то есть с датой поступления "замыкающего" дохода. Мы знаем, что при фиксированной ставке i меньшему сроку окупаемости инвестиций отвечает большая эффективность их использования.

Наоборот, при сроке окупаемости, фиксированном на дату продолжительности проекта, чем выше внутренняя норма доходности q_B, тем лучше. Так, если капиталовложения производятся только за счет привлеченных под ставку i средств, разность $q_B - i$ показывает эффект инвестиционной деятельности. При $q_B = i$ доход только окупает инвестиции, при $q_B < i$ инвестиции убыточны.

Из сказанного следует, что уровень q_B полностью определяется внутренними характеристиками проекта $\{R_t,\ t = \overline{1,T}\}$ и является корнем уравнения (20). Следует, однако, отметить, что у данного уравнения может быть несколько корней. Действительно, его левая часть — многочлен от неизвестной γ, а всякий многочлен степени n, $n \geq 1$ имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность. По этой причине задача отыскания внутренней нормы доходности $q_B = \dfrac{1-\gamma}{\gamma}$ некорректна и в общем случае из найденных корней приходится выбирать тот единственный, который не противоречит инвестиционному смыслу решения.

Показатель приведенных затрат

Пусть имеется ряд инвестиционных проектов, различающихся затратами, но тождественных по результату. Это, например, могут быть различные варианты нового строительства, технического перевооружения или, скажем, конкурирующие проекты возведения моста и т. д. Сюда же относится случай, когда проекты можно условно привести к одинаковым результатам, скорректировав для этого издержки на их осуществление.

Для тождественных по итогам инвестиционных проектов практика предлагает метод их оценки путем сравнения соответствующих этим проектам затрат. Здесь наряду с *капитальными* затратами учитываются также *текущие* издержки, например, себестоимость годового выпуска продукции на проектируемых фондах. В качестве примера рассмотрим проект j с разовыми капитальными вложениями и растянутыми во времени текущими издержками, приходящимися на период отдачи от этих вложений (рис. 5).

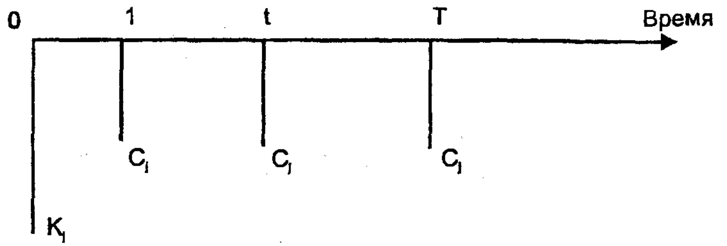


Рис. 5. Поток затрат по проекту с номером j

Пусть n — число анализируемых проектов. Каждому из них соответствует свой поток затрат (рис. 5), и все они характеризуются достаточно длительным периодом отдачи T. Имея это в виду, будем при определении современной величины A_j этого потока считать его длительность бесконечно большой. В результате найдем

$$A_j = K_j + C_j\gamma + C_j\gamma^2 + ... + C_j\gamma^t + ... = K_j + \frac{C_j}{i}.$$

где $\gamma = \dfrac{1}{1+i}$ — дисконтный множитель по ставке сравнения i.

Из сравниваемых вариантов наилучшим естественно считать такой вариант l, у которого современная величина потока затрат будет наименьшей:

$$A_l = \min_{j \le n} \{A_j\}$$

Очевидно, что данный критерий выбора равносилен минимизации известного из экономической литературы показателя приведенных затрат

$$C_j + iK_j \xrightarrow[j]{} \min.$$

В бывшем СССР в качестве ставки сравнения i использовался нормативный коэффициент эффективности. Для ряда отраслей он был установлен в диапазоне от 0,1 до 0,5, а средний для народного хозяйства составлял 0,15 (минимально допустимая отдача с каждого рубля вложений), что предполагало максимально допустимые сроки окупаемости от 10 до 2, а в среднем около 6 лет. Подобные нормативы экономической эффективности применяются в ряде стран при бюджетном финансировании освоения государственно важных технических и технологических новшеств.

Пример. Предприятие имеет возможность выбрать агрегат из трех предложенных вариантов, каждый из которых обеспечивает выпуск запланированного годового объема продукции. Варианты различаются себестоимостью годового выпуска и капитальными вложениями.

Вариант	Капиталовложения на внедрение агрегата, Kj, млн. руб.	Себестоимость годового выпуска продукции, Cj, млн. руб.	Приведенные затраты, млн. руб.
I	400	70	$70 + 0{,}15 \times 400 = 130$
II	450	61	$61 + 0{,}15 \times 450 = 128{,}0$
III	500	52	$52 + 0{,}15 \times 500 = 127$

Исходя из нормативной минимально допустимой отдачи на вложенные средства в размере 15%, предприятие предпочтет вариант III, как вариант с минимальными приведенными затратами.

Указанные в этом разделе определения ограничиваются общей конструкцией расчетных формул, которая в каждом конкретном случае уточняется в зависимости от параметров проекта и характеристик внешней среды: динамики процентных ставок, темпов инфляции и т. д.

Так, полагая ставку наращения $i = 0$, мы придем к показателям, которые игнорируют действие фактора времени, но тем не менее они позволяют получить удобные для ручного счета грубые оценки эффективности. Например, если некоторое мероприятие дает ежегодную прибыль П, а капитальные затраты на его осуществление равны К, то упрощенный показатель срока окупаемости ($t_{ок}$) находится из уравнения:

$$П \times t_{ok} - К = 0.$$

Соответственно, если значение ставки альтернативного вложения изменялось каждый год, то, например, показатель рентабельности (19) примет вид:

$$U = \frac{E(O) + \frac{E(1)}{1+i_1} + \frac{E(2)}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots + \frac{E(n)}{(1+i_1)(1+i_2)+\ldots+(1+i_n)}}{C(O) + \frac{C(1)}{1+i_1} + \frac{C(2)}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots + \frac{C(k)}{(1+i_1)(1+i_2)+\ldots+(1+i_k)}}, \quad (21)$$

где k — последний год, в котором были сделаны инвестиции по данному проекту; n — год окончания получения доходов.

В условиях инфляции с годовым темпом r при оценке эффективности проекта необходимо учитывать фактор обесценивания денежного потока $\{R_t,\ t = \overline{1,T}\}$. Это можно сделать с помощью корректировки платежей R_t к их реальному значению:

$$R_t^* = R_t(1 + r)^{-t}$$

или, что равносильно, заменяя ставку приведения i на скорректированную ставку i*(11):

$$1 + i^* = (1 + i)(1 + r).$$

При первом способе эффективности оцениваются по скорректированному потоку $\{R_t^*\}$ и ставке сравнения i; для второго варианта расчет производится с использованием номинальных значений $\{R_t\}$, но по скорректированной ставке i*.

При изменяющихся темпах ежегодной инфляции $\{r_t\}$ учет обесценивания денег производится аналогично формуле (21). Например, реальные (скорректированные) значения членов потока доходов и расходов рассчитываются по формуле:

$$R_t^* = \frac{R_t}{(1 + r_1)(1 + r_2)\ldots(1 + r_t)}.$$

Пример.

Применение введенных здесь формул проиллюстрируем в терминах инвестиционных затрат предприятия на освоение производства новой продукции. Этап налаживания выпуска новых изделий сопряжен с дополнительными издержками и сопровождается падением прибыли. Это, в частности, вызвано перераспределением ресурсов в пользу новшества, что на первых порах не компенсирует снижение прибыли в "консервативном" производстве.

Однако за временным горизонтом освоения новая продукция становится экономически выгодной, общая прибыль предприятия возрастает и превышает исходный уровень. Вместе с тем период ее снижения порождает целый ряд трудностей, в том числе возможную нехватку средств на покрытие постоянных затрат: на содержание завода, страховку, заработную плату административно-управленческому персоналу (постоянные расходы) и т. п. Для простоты рассмотрения отмеченную закономерность представим трехступенчатым графиком (рис. 6).

Здесь первая, вторая и третья ступени отвечают соответственно исходному уровню прибыли, ее падению на стадии освоения и приращению после освоения. Очевидно, что *этап освоения* (AD) нуждается во вложениях, компенсирующих его невыгодность. Требуемые для этого инвестиции позволят "дальновидному" предприятию безболезненно пережить этот период и выйти на повышенный уровень прибыли ED. Для оценки эффективности этих затрат воспользуемся принятыми в инвестиционном анализе показателями приведенного дохода (18), рентабельности (19), срока окупаемости вложений и внутренней доходности проекта.

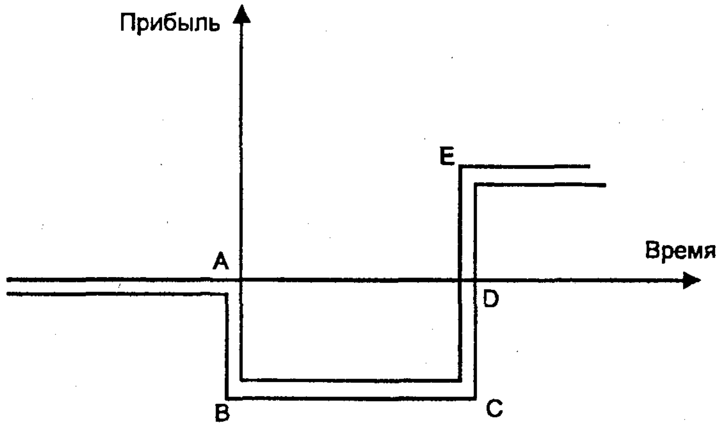


Рис. 6. Динамика изменения прибыли

Обозначим период освоения AD через T. Пусть Δ^- и Δ^+ есть перепады прибыли: AB - потери и ED - превышение. Суть рассматриваемого мероприятия в том, чтобы за счет нововведения получить прирост прибыли, что соответственно требует дополнительных затрат Δ^- T на этапе внедрения. Вопрос состоит в том, на сколько эффективны эти затраты и стоит ли проводить данное мероприятие в жизнь.

Изобразим двустороннюю последовательность платежей по данному проекту в виде следующей графической схемы.

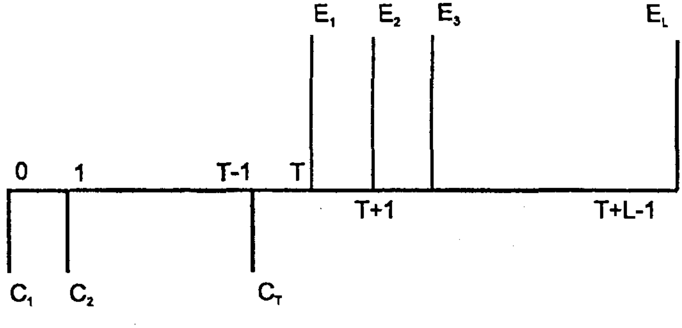


Рис. 7. Поток платежей по проекту ($C_i = \Delta-$, $E_j = \Delta+$)

Чистый приведенный доход (W):

$$W = -\Delta^-\left(\frac{1-\gamma^T}{1-\gamma}\right) + \Delta^+\gamma^{\,T}\left(\frac{1-\gamma^L}{1-\gamma}\right).$$

Рентабельность (U):

$$U = \frac{\Delta^+\gamma^{\,T}\left(1-\gamma^L\right)}{\Delta^-\left(1-\gamma^T\right)}.$$

Срок окупаемости ($t_{ок}$) находится из формулы:

$$\Delta^-\left(\frac{1-\gamma^T}{1-\gamma}\right) = \Delta^+\left(\gamma^T + \ldots + \gamma^{tok}\right) = \Delta^+\left(\frac{\gamma^T - \gamma^{tok+1}}{1-\gamma}\right).$$

Уравнение для отыскания внутренней нормы доходности ($q_В$) имеет вид:

$$\Delta^-\left(\frac{1-\eta^T}{1-\eta}\right) = \Delta^+\eta^{\,T}\left(\frac{1-\eta^L}{1-\eta}\right).$$

где: $\eta = (1 + q_В)^{-1}$.

Применим эти формулы для частного случая $T = 1$, $L >> 1$, $\gamma^L \approx 0$: период отдачи L существенно превышает единичный период освоения и величиной γ^L можно пренебречь. Подставив эти значения в предыдущие формулы, найдем:

$$W = -\Delta^- + \frac{\Delta^+}{i}; \; U = \frac{\Delta^+}{\Delta^- i},$$

а уравнения для определения срока окупаемости и внутренней нормы доходности имеют вид:

$$\frac{\Delta^+}{i}\left(1-\gamma^{tok}\right) = \Delta^-; \; \Delta^-\left(1-\eta\right) = \Delta^+\eta,$$

Откуда $\gamma^{tok} = 1 - \dfrac{\Delta^- i}{\Delta^+}$; $q_В = \dfrac{\Delta^+}{\Delta^-}$;

Таким образом, принятие или непринятие проекта сводится к анализу следующих условий целесообразности:

$$W > 0,\; U > 1,\; \frac{q_В}{i} > 1.$$

3. Финансовые расчеты на рынке ценных бумаг (РЦБ)

Рынок ценных бумаг (акций, облигаций, фьючерсов, опционов и пр.) предоставляет заинтересованным лицам возможности для выгодного вложения или привлечения денег.

Особую роль на этом рынке играют ***спекулянты***. Они получают доходы на сделках, комбинируя роли продавца и покупателя, сроки сделок и виды ценных бумаг. Общая тенденция их участия такова, что при росте цен предпочтение отдается продаже, а при удешевлении — привлекательной становится покупка. Как следствие - при массовых продажах превалирует предложение, а в противоположном случае — спрос. Эти изменения, как легко понять, способствуют сглаживанию ценовых выбросов и выравнивают курсовые колебания. В этом, как известно, и состоит положительное влияние спекуляций, предохраняющее рынок ценных бумаг от "разогрева" или падения.

И, наконец, можно выделить участников, которых привлекает *возможность страхования риска*, например, нежелательного изменения цены реального актива (валюта, товар, акции и т. д.) в планируемых с ним сделках.

В случае валюты такую возможность дает ***фьючерсный рынок***. Так, с позиции покупателя валюты, он *хеджируется*, когда приобретает контракт на ее покупку по приемлемой для себя цене и ниже ожидаемой, которая его не устраивает. Если к моменту выполнения контракта реальная цена окажется выше, то выигранная на фьючерсном рынке разница дает ему дополнительные средства на приобретение нужного количества валюты.

Если же стоимость контракта, по которой он открывает позицию, превысит реальную цену в будущем, то разница проигрывается; в этом случае она выступает как плата за страховку. Независимо от того, что произойдет с курсом валюты, фактические расходы покупателя по реальной сделке совпадут с изначально заявленной им ценой, т. е. той, которую он назначил как участник рынка валютных фьючерсов.

Имея в виду применение изложенных ранее методов, остановимся здесь на характеристиках доходности ценных бумаг и их ***курсов***, т. е. *цен, по которым они покупаются и продаются*. Оставаясь в рамках детерминированного анализа, мы во всех наших изысканиях будем опираться на точное задание требующихся для расчетов данных: дивидендов по акциям, процентных ставок и т. д.

В противном случае предлагаемые здесь оценки будут носить приблизительный характер. Так, при *вероятностном* характере процентных ставок их фактические значения могут отклониться от ожидаемых, в том числе и в неблагоприятную сторону.

Величина возможных сдвигов зависит от меры рассеяния случайной ставки — ее дисперсии, что, собственно, и определяет риск участников сделки. Очевидно, что рисковая ценная бумага должна стоить меньше, т. е. курсовую стоимость, найденную для детерминированного случая, следует скорректировать в сторону удешевления, и тем больше, чем выше риск.

Аналогично нужно подходить и для определения доходности. С увеличением риска требования инвестора к ожидаемой доходности возрастают. Это, в свою очередь, приводит к задаче о процентной ставке, увеличенной с учетом премии за риск.

Доходность ценных бумаг

Для расчета доходности ценной бумаги надо сопоставить получаемый по ней доход (аналог процентных денег) с ценой приобретения (начальный вклад). В случае, когда в расчет принимается полный доход за весь срок хранения, полученный инвестором как в виде дивидендов (d), так и за счет разницы в ценах продажи (C_1) и покупки (C_0), говорят о ***полной*** доходности:

$$\text{полная доходность} = \frac{\text{полный доход}}{\text{цена покупки}} = \frac{d + C_1 - C_0}{C_0} \qquad (22)$$

С позиции рынка упомянутые в определении (22) цены продажи и покупки инвестором совпадают соответственно с ценами покупки и продажи рынком, т. е. с так называемыми в практике фондового рынка *ценами* ***рыночного спроса*** (ask-price) и ***рыночного предложения*** (bid-price). В реальности они не совпадают.

Покупая ценные бумаги у одних и продавая их другим, фондовый рынок в лице своих профессиональных торговцев (дилеров, расчетных фирм, брокеров и т. д.) взимает плату за посреднические услуги, извлекая ее из превышения цены продажи (ask-price) над ценой покупки (bid-price), т. е. покупает дешевле, чем продает. Если учесть разницу (*спрэд*) в этих ценах (bid-ask spread) для одного и того же момента времени t: $\underline{C}_t < \overline{C_t}$, то придем к уточненной формуле эффективности (полной доходности):

$$\text{полная доходность} = \frac{\text{дивиденты за период + цена-бид в конце − цена аск в начале периода}}{\text{цена-аск в начале периода}}$$

$$= \frac{d + \underline{C}_1 - \overline{C_0}}{\overline{C_0}}.$$

В отличие от этого показателя участниками фондового рынка широко используется еще одна характеристика - показатель ***текущей доходности,*** учитывающий только текущий доход в расчете на текущий курс:

$$\text{текущая доходность} = \frac{\text{текущий доход (процентные выплаты за текущий период)}}{\text{текущая курсовая стоимость}} \qquad (23)$$

При этом *предполагается,* что прибыль инвестора формируется только за счет текущих доходов (предусмотренными по ценной бумаге порционными выплатами за период их начисления), а спекулятивный доход, извлекаемый за счет возможной перепродажи, отсутствует.

Так, для облигаций, приобретаемых с дисконтом, например для ГКО, текущий доход определяется разницей между номиналом и текущей котировкой на вторичном рынке, в случае купонных облигаций — доходом, выплачиваемым по купонам; при определении текущего дохода по акциям в расчет принимаются только дивидендные выплаты.

Этот измеритель удобен для оценивания текущей конъюнктуры как обращающихся на рынке ценных бумаг, так и тех, что имеются на руках у инвестора (в знаменателе расчетной формулы (23) стоит не цена приобретения, а текущий курс).

При решении конкретных задач формулы показателей доходности (22), (23) уточняются как по видам ценных бумаг (различные типы облигаций, акций, срочных контрактов и т. д.), так и в зависимости от динамики курса, длительности учитываемого периода, потока дивидендов. В литературе для специалистов-практиков (работников инвестиционных институтов, фондовых бирж и других участников рынка) зачастую предлагаются упрощенные зависимости, которые приводят к грубым оценкам, в частности без учета времени и риска.

По мнению автора, эффективность принимаемым мерам должна придавать позиция оперирующей стороны. Принимающее решение лицо, исходя из собственных интересов или интересов заказчика, заинтересовано в такой расшифровке общих формул (22), (23), которая позволит ему достичь максимально высоких финансовых результатов. В условиях детерминированного анализа для этого необходимо овладеть элементарными приемами обработки потоков платежей и методами измерения эффективности инвестиций.

Примеры.

Облигации. Эти долговые бумаги характеризуются:

номинальной стоимостью;

сроком погашения;

купоном, т. е. процентными выплатами, которые производятся с определенной периодичностью на протяжении срока обращения облигации.

Купонная ставка по облигации считается по отношению к номинальной стоимости независимо от рыночного курса облигации:

$$\text{купонная ставка} = \frac{\text{доход (процентные выплаты) в руб.}}{\text{номинальная стоимость}} \times 100\%$$

Используя эту формулу, можно рассчитать, сколько рублей получит владелец облигации в виде дохода по купонам или, другими словами, процентные платежи по облигации:

$$\text{доход (процентные выплаты) за год} = \frac{\text{номинальная стоимость} \times \text{купонная ставка}}{100\%}$$

В практике используются различные ***типы*** облигаций:

бескупонные, по которым не производятся купонные платежи, а выплачивается только номинальная стоимость в момент погашения (например, государственные бумаги — ГКО);

купонные, которые приобретаются и гасятся по номиналу (например, ОФЗ-ПК), и т. д.

1) Оценим ***текущую доходность*** вложений в бескупонную облигацию с номиналом Р и курсовой стоимостью $C = 95\%$, приобретаемой на весь оставшийся до погашения срок, равный $T_{дней}$. Здесь, согласно положению о фондовых биржах, курс облигации указан в процентах к ее номинальной стоимости.

Очевидно, что для расчета текущей доходности к погашению по ставке простого процента следует воспользоваться формулой:

$$\eta_{\text{тек.}} = \frac{(100\% - C)\,360}{C \times T} 100\%$$

или

$$\eta_{\text{тек.}} = \frac{(\text{дисконт} \times 360\ )}{(\text{номинал - дисконт})\,T} 100\%.$$

Так, если до погашения осталось 40 дней, то текущая доходность

$$\eta = \frac{5 \times 360}{95 \times 40} 100\% \approx 47{,}4\%.$$

Та же формула справедлива и для доходности по цене размещения на первичном аукционе. Используемый на рынке ГКО показатель ***эффективной доходности*** ($\eta_{\text{эф}}$) опирается на понятие эффективной ставки (9), рассчитываемой по формуле сложного процента. Для трехмесячных ГКО такая ставка фактически предполагает возможность четырехкратного реинвестирования вклада C на этом рынке. Так, при C = 80% из соотношения $C(1 + \eta_{\text{эф}})^{1/4} = P$ находим

$$\eta_{\text{эф.}} = \left(\frac{100}{80}\right)^4 - 1 = 1{,}44 = 144\%$$

2) Облигация, выпущенная номиналом 100000 руб., с *купонной* ставкой 8% сроком на 5 лет, продавалась с дисконтом 20%. Тогда для держателя облигации, который реализует свой доход в виде дисконта при погашении ее эмитентом согласно (22, 23),

$$\text{полная доходность (по формуле простых процентов)} = \frac{\text{пятилетний доход}}{\text{цена покупки} \times \text{пятилетний срок}} \times 100\%$$

$$= \frac{(100000 \times 8\% \times 5 + 100000 \times 20\%)}{100000 \times 80\% \times 5(\text{лет})} \times 100\% = 15\%,$$

$$\text{текущая доходность} = \frac{\text{годовой купонный доход}}{\text{рыночная цена}} \times 100\%$$

$$= \frac{10^5 \times 8\%}{10^5 \times 80\%} \times 100\% = 10\%.$$

В этом примере можно прийти к более точной оценке ***полной доходности***, которая учитывает неравноценность денег, поступающих владельцу облигации в различные годы. Для этого следует вычислить наращенный инвестором к концу пятилетнего срока доход, который формируется за счет начисления процентов на последовательные купонные поступления.

Подставляя найденную таким образом величину в качестве составляющей пятилетнего дохода, придем к уточненной характеристике этого показателя. Пусть, например, ставка начисления процентов на купонные выплаты равна тем же 8%. Тогда, как легко понять, наращенная сумма по потоку купонных выплат

$$S = 10^3 \cdot 8\{(1{,}08)^4 + (1{,}08)^3 + (1{,}08)^2 + 1{,}08 + 1\} = 46{,}96$$

и, следовательно,

$$\text{полная доходность} = \frac{S + \text{дисконт}}{\text{цена покупки} \times 5} \times 100\% = \frac{66{,}96}{80 \times 5} \times 100\% = 16{,}7\%.$$

3) В ситуации, когда инвестор получает доход в виде разницы между покупной ценой и ценой продажи облигации другому инвестору, корректно рассматривать прирост курсовой стоимости как доход инвестора (а падение — как убыток). Соотнося этот доход с ценой покупки, придем к показателю доходности подобной сделки. Например, доходность ГКО с позиции продавца на вторичном аукционе рассчитывается по так называемому показателю ***доходности к аукциону***

$$\eta = \frac{(\text{цена продажи} - \text{цена покупки}) \times 360}{\text{цена покупки} \times \text{срок владения}} \times 100\%.$$

4) Облигации без обязательного погашения с периодической (пусть раз в год) выплатой процентов.

Доход от данного вида облигаций получают только в виде процентов, поскольку выплату номинала в необозримом будущем не следует принимать в расчет.

Пусть g — объявленная годовая норма доходности облигации,

N — номинальная цена (руб.),

C — курс покупки (%).

Определим цену облигации (руб.) через ее курс (%)

$$P = \frac{CN}{100}. \qquad (24)$$

Вложение P обеспечивает инвестору бесконечный поток доходов, т. е. вечную ренту с членом $g \times N$.

Описанную ситуацию вполне корректно интерпретировать в терминах инвестиционного проекта, для которого измеритель внутренней нормы доходности q определяет эффективность вложений в данную облигацию, т. е. ее доходность. Соотношение (20) для определения этой числовой характеристики получится уравниванием современной величины A ренты, дисконтированной по ставке q, с ценой облигации P. Очевидно, что приведенная стоимость

$$A = Ng\gamma + Ng\gamma^2 + ... + Ng\gamma^n + ... = \frac{Ng}{q}.$$

Приравнивая ее к цене P, найдем доходность

$$q = \frac{Ng}{P}$$

или с учетом (24)

$$q = \frac{g}{C} 100\%.$$

Например, для вечной ренты, приносящей 4,5% дохода и купленной по курсу 90%, доходность составит

$$q = \frac{4,5}{90}\ 100\% = 5\%.$$

Акции. По доходности акция характеризуется существенно более высокой, чем облигации, степенью неопределенности как по дивидендам, так и по изменению ее цены.

Известны различные приемы, например, методы *технического* и *фундаментального* анализа, которые используют инвесторы для повышения своей информированности и, тем самым, снижения риска. Не останавливаясь на этих подробностях, ограничимся здесь примерами применения отдельных формул.

5) Инвестор приобрел за 800 руб. *привилегированную акцию* АО номинальной стоимостью 1000 руб. с фиксированным размером дивиденда 30% годовых. В настоящее время курсовая стоимость акции — 1200 руб. Определите текущую доходность по данной акции (без учета налогов).

Укажем на одну из особенностей привилегированных акций, которую необходимо учитывать при решении задач. В отличие от обыкновенных акций для них процент выплат фиксирован и определяется как для купонных облигаций по номиналу.

Отсюда текущий доход d = 1000 руб. × 30% = 300 руб. ***Текущая доходность***, согласно определению (23), рассчитывается по отношению к курсовой стоимости в данный момент, а не к стоимости в момент покупки.

Таким образом, показатель текущей доходности

$$\eta = \frac{300}{1200} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Заметим, что эффективность вложений в этом случае совпадает с внутренней нормой доходности q двустороннего потока с затратным платежом — 800 руб. и растянутыми во времени порциями доходов по 300 руб. каждая.

Из уравнения для q:

$$\frac{300}{1+q} + \frac{300}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{300}{(1+q)^n} = 800$$

получим, что

$$\frac{300}{q} = 800$$

и, следовательно, доходность вложения

$$q = \frac{3}{8} \approx 37,5\%.$$

6) Возможна ситуация, когда инвестор продает акцию, не успев получить дивиденд. В этом случае можно говорить о ***доходности операций с акцией***:

$$\eta = \frac{\text{прибыль от перепродажи}}{\text{цена приобретения}} \times 100\%. \qquad (25)$$

Рассмотрим такой пример.

Пример. Пусть инвестор приобретает акцию с предполагаемым ростом курсовой стоимости 43% за квартал и в конце квартала продает ее. Инвестор имеет возможность оплатить за свой счет 60% от фактической стоимости акции. Под какой максимальный квартальный процент может взять инвестор ссуду в банке, с тем чтобы обеспечить доходность на вложенные собственные средства на уровне не менее 30% за квартал (без учета налогов).

Для рассматриваемой ситуации прибыль в (25) должна учитывать не только разницу цен, но и выплату по ссуде. Пусть x — квартальная ставка процента, а N — начальный курс. По условию инвестор оплачивает 0,6N за счет собственных средств, при этом наращенная сумма его долга равна 0,4N (1 + x). Прибыль от операции, как легко понять, даст сумму

$$П = 1,43N - (0,6N + 0,4N(1 + x)),$$

т. е. будет меньше разницы цен 1,43N − N на величину выплачиваемых процентов 0,4Nx. Сопоставляя ее с затратами инвестора, равными 0,6N, найдем квартальную доходность:

$$\eta = \frac{0{,}43N - 0{,}4Nx}{0{,}6N}.$$

По условию $\eta \geq 0{,}3$. Откуда $x \leq 0{,}625$, т. е. максимально приемлемая ставка $X_{max} = 62{,}5\%$.

Завершим рассмотрение примеров рядом иллюстративных задач на определение доходности операций с ***производными*** ценными бумагами.

7) Текущий курс акций составляет 30 долл. Инвестор соглашается купить *опцион* за 200 долл. на покупку 100 акций по 35 долл. через два месяца. Допустим, что к назначенному сроку курс акций поднимется до 50 долл. Какова годовая ставка процента на вложенные в покупку опциона 200 долл.

По условию инвестор выигрывает разницу между курсом акции (50 долл.) и ее контрактной ценой (35 долл.), равную 15 долл. Сопоставляя его двухмесячный выигрыш по всем акциям, очищенный от затрат на опцион, с размером этих затрат, получим годовую доходность:

$$\eta = \frac{((50-35)\times 100 - 200)\times 12}{200\times 2}\times 100\% = 3900\%.$$

8) Согласно правилам *фьючерсной* торговли для открытия одной позиции (приобретения одного валютного фьючерса) участник должен внести порядка 10% от объема заключенного контракта по текущему курсу. Пусть для определенности эта сумма равна P руб., а τ — количество календарных дней, в течение которых изменялась котировочная цена по данному контракту. В этих обозначениях доходность вложения по ставке простого процента можно рассчитать по формуле:

$$\eta = \frac{(\text{изменение котировочной цены})}{P}\times\frac{360}{\tau}\times 100\%.$$

Следует иметь в виду, что эта величина может быть и отрицательной, например, для покупателя (игрока на повышение) при снижении котировок (в соответствии с механизмом проведения торгов).

Дадим числовую иллюстрацию. Пусть текущий курс доллара соответствует 5000 руб. Тогда для заключения тысячедолларового контракта необходимо внести 10% его объема, т. е. $P = 5000 \times 1000 \times 0{,}1 = 500000$ руб. При росте котировочной цены на 100 руб./долл. выигрыш покупателя составит 100000 руб. Это обеспечивает доходность игры на повышение:

$$\eta = \frac{100000}{500000} \times 100\% = 20\%,$$

что в расчете на год дает 7200%. Эффект высокого процента, так называемый *"эффект рычага"*, объясняется системой финансовых гарантий и сборов на бирже, определенных правилами фьючерсной торговли. Так, в рассмотренном примере для ведения фьючерсной операции задействуется в 10 раз меньше средств, чем при игре на валютной бирже.

9) В завершение приведем описание схемы, основанной на ***комбинировании*** различных активов. Схема предельно проста.

В начале операции берется валютный кредит, который затем конвертируется в рубли по курсу "спот" (текущему курсу межбанковской валютной биржи). Полученная сумма (в рублях) делится на две части:

— первая часть расходуется для закупки наличной валюты на один из ближайших месяцев на фьючерсном рынке;

— вторая (оставшаяся) часть помещается в активы: ГКО, депозит и т. д. по выбору инвестора.

Непременным условием проведения схемы является то, чтобы выбранный актив был ликвиден на дату исполнения фьючерсного контракта. В конце операции происходит обратная конвертация рублей в валюту по фьючерсному курсу и возврат кредита.

Проведем анализ данной операции с точки зрения ее целесообразности. Для простоты пренебрежем относительно малыми затратами инвестора, необходимыми для участия во фьючерсных торгах, т. е. первой частью рублевой наличности. Без ограничения общности сумму основного долга примем равной одному доллару. Для наглядности представим всю операцию в виде цепной схемы, изображенной на рис. 8.

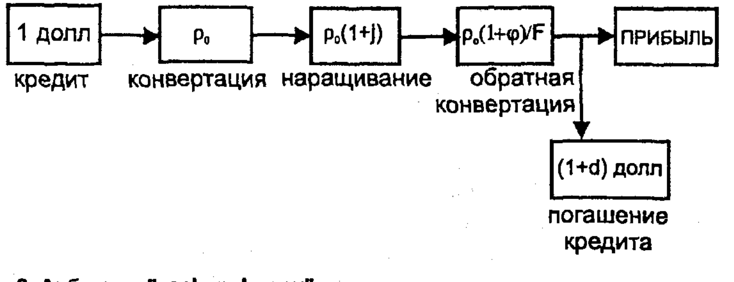


Рис. 8. Арбитраж "cash and carry"

Поясним обозначения, принятые в схеме:

ρ_0 — начальный курс доллара,

j — доходность по рублевому активу,

d — ставка по валютному кредиту,

F — фьючерсный курс (стоимость контракта в момент открытия позиции).

Заметим, что фигурирующие здесь ставки j, d приведены к дате исполнения фьючерсного контракта. Очевидно, что условие целесообразности состоит в том, чтобы получить положительную прибыль:

$$П = \frac{\rho_0(1 + j)}{F} - (1 + d) > 0,$$

что устанавливает следующее ограничение на доходность j:

$$j > \frac{F}{\rho_0}(1 + d) - 1.$$

До сих пор при расчете доходности ценных бумаг мы пренебрегали влиянием налогов. При необходимости его можно учесть, скорректировав доход на величину налогового изъятия. В результате придем к ***показателям доходности с учетом налогообложения***.

$$\text{текущая доходность с учетом налогообложения} = \frac{\text{дивиденты за год (в руб.)} - \text{сумма налогов}}{\text{текущая курсовая стоимость}} \qquad (26)$$

$$\text{полная доходность с учетом налогообложения} = \frac{(\text{все полученные дивиденты} - \text{все уплаченные налоги} + \text{прибыль от перепродажи} - \text{налог})}{\text{цена покупки}} \qquad (27)$$

10) Правительство РФ решает выпустить сроком на три месяца краткосрочные долговые обязательства, доход по которым выплачивается в виде дисконта. Банковская ставка по депозитам — 60%. Обязательства размещаются среди производственных предприятий. Определите размер дисконта (при расчете необходимо учесть налогообложение).

Легко понять, что данные долговые обязательства удастся разместить в том случае, если доход предприятия-покупателя окажется не меньше, чем его процентные деньги при том же вложении. Для эмитента, чем цена размещения выше, тем лучше. Поэтому цена продажи, а значит и дисконт, должны удовлетворять следующему условию:

ДИСКОНТ = ДЕПОЗИТНЫЙ ДОХОД,

причем, согласно требованию задачи, при определении обеих частей этого равенства надо учитывать налоги.

Допустим, что доход по долговым обязательствам государства налогом не облагается, а доходы (проценты) по депозиту облагаются налогом на прибыль по ставке, равной 32%. Обозначим искомый дисконт через X%, тогда цена приобретения долгового обязательства равна 100 – X(%).

Очевидно, что показатель доходности краткосрочных долговых обязательств должен быть сопоставим с уровнем банковской ставки по депозитам в пересчете на трехмесячный период, т. е. 60% : 4 = 15%. С учетом сказанного процентные деньги за вычетом налогов составят 0,68 от величины (100 – X) × 0,15. Таким образом, дисконт определяется из уравнения:

$$X = (100 - X) \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}68$$

и составляет 9,25%, а цена размещения - 90,75% от номинала.

Курсы ценных бумаг

Курсовые стоимости выявляются (формируются) на рынке ценных бумаг в ходе взаимодействия спроса с предложением и представляют собой цены, по которым эти ценные бумаги продаются и покупаются. Так, на фондовой бирже курс определяется путем единовременного сопоставления всех поступивших на биржу в течение определенного периода времени приказов на покупку и продажу какой-либо одной ценной бумаги.

По результатам этого сопоставления биржа оформляет сделки, причем пары из приказов на покупку и продажу подбираются таким образом, чтобы максимизировать количество проданных и купленных ценных бумаг. Очевидно, что при такой организации торгов устанавливаемый биржей курс (P_E) (цена, взвешенная по всем сделкам) уравновешивает спрос на ценную бумагу с ее предложением. Математически это означает, что

$$P_E = \arg \{\max_p \min [D(p), S(p)]\}, \qquad (28)$$

где D(p), S (p) — кривые спроса и предложения, которые соответствуют поданным на биржу заявкам. Графически решению (28) отвечает максимальная ордината пунктирной кривой $\varphi_{(p)} = \min[D_{(p)}, S_{(p)}]$, изображенной на рис. 9.

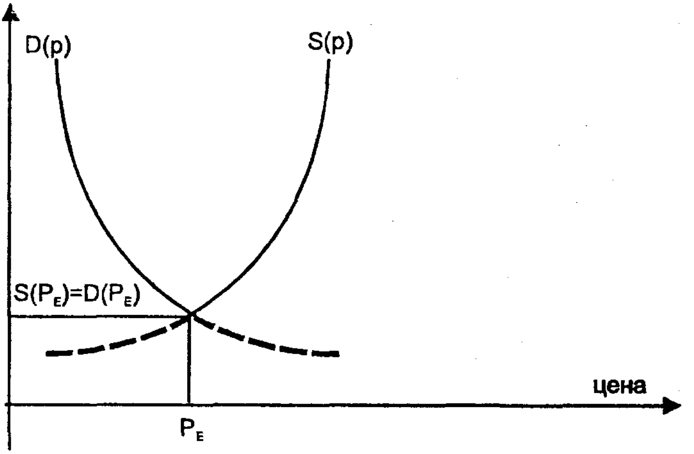


Рис. 9. Курс как равновесная цена

Заметим, что предложенная интерпретация не является универсальной и по мере нарушения условий совершенной конкуренции теряет свою привлекательность. Однако в любом случае, вне зависимости от конкурентных характеристик рынка ценных бумаг, формирование курсовых стоимостей всегда происходит под влиянием ценовых предпочтений его участников.

В свою очередь, эти предпочтения зависят от конкурирующих альтернатив: для одних — отказаться от продажи и довольствоваться дивидендами по ценной бумаге, для других — не покупать, а положить свои деньги, например, на депозит в банке. Принимая свои решения, заинтересованные стороны анализируют значительное число факторов как фундаментального характера, скажем, общеэкономическое состояние и политическую обстановку, так и текущего плана: рыночную конъюнктуру, спекулятивные мотивы, субъективную потребность в деньгах и т. д.

Опираясь на материал данного пособия, ограничимся здесь рассмотрением только двух факторов - *дохода по ценной бумаге и ставки сравнения*, и проанализируем их влияние на величину курсовой стоимости. Не прибегая пока к математическому обоснованию, отметим ***одну из фундаментальных закономерностей, которую выявляет фондовый рынок***: стоимость акций возрастает с ростом дивиденда и убывает пропорционально размеру банковской ставки.

Вместе с тем следует оговориться, что для приобретаемых с дисконтом облигаций данное утверждение требует уточнения в своей первой части. Для них получаемый при погашении доход меняется в сторону, противоположную цене покупки.

Суть использования математических расчетов для определения того, во сколько должен оценивать рынок ту или иную ценную бумагу, сводится к следующему. Допустим, что заранее известен поток доходов $y_1, y_2, ..., y_n$ по какой-либо ценной бумаге за весь срок владения n. За оценку ее курса принимается такой депозитный вклад P под банковскую ставку i, который к концу срока n возрастет до величины, равной наращенной сумме потока доходов $\{y_k, k = \overline{1,n}\}$ на ту же дату.

Как следует из этого определения, для инвестора с таким "бюджетом" (P) безразлично, положить ли все деньги на депозит или потратить их на ценные бумаги. Очевидно, что из совпадения наращенных сумм вытекает равенство современных величин, т. е. ***формула для расчетов курса*** примет следующий вид:

$$P = \frac{y_1}{(1+i)} + \frac{y_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{y_n}{(1+i)^n}, \tag{29}$$

иначе говоря, курсовая стоимость оценивается суммой всех дисконтированных доходов.

В общем случае последнее слагаемое в (29), наряду с дивидендной выплатой, содержит также доход инвестора по рассматриваемой ценной бумаге: а) при погашении — для облигаций или б) за счет продажи — в случае акций. Таким образом, его можно записать в виде суммы финального дивиденда (купонного платежа) D_n и финальной выплаты F:

$$y_n = D_n + F,$$

где F - дисконт в случае (а) и, соответственно, доход от продажи в случае (б).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) **"Вечная облигация"**. Пусть срок погашения облигации достаточно велик. В этом случае фактом погашения облигации по номинальной стоимости можно пренебречь: $F/(1 + i)^n \approx 0$, а слагаемые в (29) рассматривать как члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $b_n = y/(1 + i)^n$, где y — купонный платеж $(y_1 = y_2 = ... = y)$. По формуле суммы членов беско-

нечной прогрессии $S_\infty = \frac{b_1}{1-q}$ = получим *курсовую стоимость облигации*:

$$P = \frac{y}{i},$$

где доход y равен произведению купонной ставки на номинал F, т. е.

$$\text{курсовая стоимость} = \frac{\text{купонная ставка}}{\text{банковская ставка}} \times \text{номинал}$$

2) **Бескупонная облигация с погашением по номиналу**. Полагая в (29) $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$, $y_n = F$, найдем цену n-периодной бескупонной облигации, выраженную через ее номинальную стоимость F:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

или в процентах к номиналу:

$$P\,(\%) = \frac{100\%}{(1+i)^n}.$$

Например, для одноопериодной облигации n = 1 инвестор, формируя заявку, указывает цену покупки, ориентируясь на условия аукциона и приемлемую для него доходность j:

$$P_{(\%)} = \frac{100}{1+j}.$$

3) **Привилегированная или простая акция с известным размером дивиденда**. В этом случае F = 0, так как акции эмитентом не погашаются; $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y$. Полагая, что n стремится к бесконечности, придем к тем же формулам, что и в п. 1).

4) **Облигации с периодической выплатой процентов, погашаемые в конце срока**. Пусть дата покупки совпадает с датой купонных платежей или с датой выпуска. Пользуясь обозначениями формулы (29), придем к следующему потоку доходов $\{y_i, i = \overline{1,n}\}$:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = y, \quad y_n = y + N,$$

где y = rN — купонный платеж, r — купонная ставка, N — номинальная цена. Отсюда получим курсовую стоимость:

$$P = \frac{N}{(1+i)^n} + rN\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k}. \qquad (30)$$

Обозначая через K первое слагаемое этой формулы, приведем ее к равенству:

$$P = K + rN\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right),$$

которое эквивалентно соотношению:

$$P = K + \frac{r}{i}(N - K).$$

Последняя формула связывает текущую цену P с дисконтированной величиной K финальной выплаты N и четко выделяет роль купонного процента r.

Формула (29) курсовой стоимости P получена при условии, что дата покупки совпадает с датой дивидендного платежа или датой выпуска. Пусть покупка производится между двумя купонными выплатами со сдвигом τ, отнесенным к длительности купонного периода. В этом случае цену P следует скорректировать с учетом наращения на момент покупки. Скорректированная таким образом цена должна быть равна величине:

$$P_\tau = P\,(1 + i)^\tau.$$

Пример. Определить ориентировочную рыночную стоимость облигации номиналом 100000 руб. при условии, что срок погашения облигации через 3 года, купонная ставка 10% годовых, ставка банковского процента i = 4%.

Подставляя данные примера в расчетную формулу (30), найдем курс:

$$P = \frac{10000}{(1{,}04)^3} + \frac{10000}{(1{,}04)} + \frac{10000}{(1{,}04)^2} + \frac{10000}{(1{,}04)^3} = 116662 \text{ руб.}$$

Пример. Определите, по какой цене (в процентах к номиналу) будет совершена сделка купли-продажи "однопериодной" облигации на предъявителя при условии, что годовой купон — 10%, сделка заключается за 18 дней до выплаты дохода, а расчетный год считается равным 360 дням (прочие ценообразующие факторы, а также налогообложение в расчет не принимать).

При этом следует учесть, что получателем дохода (процентов) по облигации в данном случае будет ее предъявитель, т. е. покупатель.

Очевидно, что в силу близости даты покупки к сроку погашения удержанием с номинала можно пренебречь и при определении цены сделки необходимо учесть ту часть дохода, которая причитается продавцу за время **владения облигацией.** В результате получим

$$P = 100\% + \frac{10\%(360 - 18)}{360} \approx 109{,}5\%.$$

Приведенные здесь формулы позволяют получить ориентировочные оценки курсовой стоимости, зависящие от выбранной ставки сравнения и ожидаемых доходов. Однако даже для "однобумажного" рынка соискатели ценной бумаги и ее продавцы могут опираться на различные, приемлемые для них ставки и учитывать, наряду с оговоренными, множество других ценообразующих факторов.

В результате называемые цены будут различны, а курсовая стоимость сформируется в ходе рыночного усреднения. Те же формулы можно применить для получения возможных значений при установлении договорной цены в индивидуальных сделках, когда окончательный выбор происходит по итогам переговоров.

ЧАСТЬ III. Математические основы финансового анализа в условиях риска и неопределенности

1. Риски и их измерители

Случайность и неопределенность как факторы, создающие риск

До сих пор мы имели дело с финансовыми задачами, в которых интересующие нас характеристики однозначно определялись при заданных значениях влияющих на них детерминированных факторов. Вместе с тем реальность финансового рынка такова, что не располагает к детерминированному толкованию его задач: при таком подходе решения, как правило, носят весьма приближенный характер и дают грубые оценки, не учитывающие вероятностного происхождения и (или) неопределенности участвующих в задаче параметров.

Как и в общей схеме исследования операций для задач, решаемых участниками финансового рынка, можно выделить **контролируемые** и **неконтролируемые** (неподвластные оперирующей стороне) факторы.

Среди последних, в зависимости от информированности о них, различаются *неопределенные* и *случайные*. При этом к ***случайным*** параметрам относятся те, относительно которых известны необходимые для описания случайных величин (случайных процессов) характеристики: законы распределения или, по крайней мере, их первые моменты - математические ожидания и дисперсии.

Для ***неопределенных*** факторов вероятностные суждения о них полностью отсутствуют; в лучшем случае предвидения оперирующей стороны о возможных последствиях подкрепляются знанием диапазонов численных значений влияющих переменных.

Поясним сказанное на **примере** будничной задачи пассажира метро, следующего со станции A на станцию B, имеющую два выхода в город: по ходу поезда — выход C и от хвостового вагона — выход D. Обозначим длину платформы через l и пусть для определенности учреждение F, в которое спешит наш пассажир, расположено ближе к выходу D. Рационализируя свое поведение, гражданин старается угадать место посадки так, чтобы по прибытии на станцию В оказаться ближе к пункту назначения F.

Очевидно, что при полном знании он сядет в последний вагон. В общем случае пассажир-"оптимизатор" стремится занять положение x (считая от D), экономящее его путь по станции В до требуемого выхода. Такой пассажир при полном незнании взаимного расположения F, C и D (неопределенность) будет выбирать x так, чтобы свести к минимуму максимальное из двух возможных расстояний (рисков) x и $l - x$, т. е. будет решать следующую минимаксную задачу:

$$\min_x \{\max(x, l - x) \,/\, 0 \le x \le l\}. \qquad (1)$$

Тогда его выбор, как легко понять из рисунка 1, определится условием $x = l - x$.

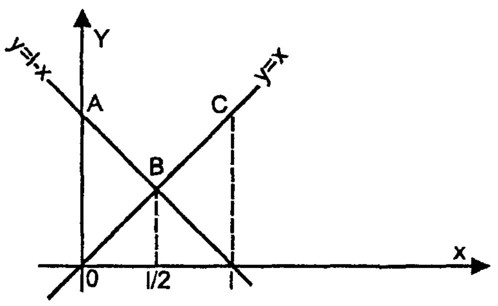


Рис. 1. Графическое решение минимаксной задачи

На этом графике ломаная ABC представляет график функции $\varphi_{(x)} = \max(x, l - x)$, а ее низшая (переломная) точка B дает искомое решение $x = l/2$. Отсюда следует, что в условиях неопределенности предпочтительное место посадки, что собственно и отражается повседневным опытом, это есть середина платформы.

При вероятностном знании (случайность) мнения пассажира о том, какой из выходов выгоднее,— будут различны. Здесь разница проявляется через значение вероятностей (весов) p и q его противоположных суждений о том, к которому выходу будет ближе F. Пусть p — вероятность того, что F ближе к D, а q — вероятность альтернативы ($p + q = 1$). В этом случае риски x, l —

x, фигурирующие в (1), уже неравнозначны, а взвешиваются с вероятностями p и q, т. е. задача пассажира примет вид

$$\min_x \{\max (px,\ q(l - x) \ /\ 0 \le x \le l\}, \qquad (2)$$

а ее решение находится из уравнения

$$px = q(l - x),$$

т. е. $x = ql$, $\quad l - x = pl \qquad (3)$

Таким образом, чтобы определиться с расстоянием x на станции отправления A, пассажиру следует разделить протяженность l обратно пропорционально известным ему вероятностям p и q. Например, при p = 4/5 избегающий риска пассажир, сообразуясь с этой вероятностью, займет место x = l/5.

В качестве финансовой аналогии рассмотренного выше можно привести, например, задачу о диверсификации единичного вклада по двум депозитам: рублевому и в валюте. Наращенная сумма такого вклада на конец периода начисления, скажем года, запишется в виде

$$S = x_0(1\ r) + \frac{(1 - x_o)}{K_o} \times (1 + d)K_1 . \qquad (4)$$

В этой формуле r и d — процентные ставки по рублевому и валютному депозитам; K_0, K_1 — курс доллара к рублю в начале и конце периода; дробь x_0 определяет пропорцию, в которой вклад разделяется на рублевую и валютную части.

Согласно формуле (4) x_0 — доля рублевого вложения; остаток $(1 - x_0)$ вкладчик конвертирует в доллары и помещает на валютный депозит. В конце срока с помощью обратной конвертации по курсу K_1 валюта переводится в рубли и итоговая рублевая наличность определяется суммой S. Очевидно, что для вкладчика важно определить пропорцию x_0 наилучшим, в смысле приумножения своего богатства, образом.

Пусть будущий курс K_1 (курс валюты на конец срока депозита) известен. Тогда задача становится элементарной. Депозиты будут равновыгодны, если множители наращения (1 + r) и $\dfrac{K_1(1 + d)}{K_0}$ совпадают. В этом случае депозитное вложение доллара с предварительной конвертацией и без нее дает одинаковый результат, т. е. $K_0(1 + r) = K_1(1 + d)$.

При нарушении этого условия в пользу рубля (рублевый депозит выгодней) курс K_1 будет меньше величины

$$\alpha = \frac{K_0(1+r)}{(1+d)} \tag{5}$$

и все нужно хранить в рублях ($x_0 = 1$); наоборот, при $K_1 > \alpha$ выгодным становится валютный вклад: его-то и следует использовать ($x_0 = 0$).

В реальности ***будущий курс валюты*** точно неизвестен. Он может быть задан коридором возможных значений ($K_1 \in [a, b]$), с наличием вероятностных характеристик или без них. Заметим, что диапазонную неопределенность при необходимости можно смоделировать вероятностной, рассматривая величину K_1 как случайную и равномерно распределенную в интервале (a, b).

Рассмотрим задачу инвестора как игру с природой, которая может назначать доллару любой курс K_1 в заданном промежутке $[a, b]$. Здесь можно выделить два крайних случая, когда неопределенность снимается. Очевидно, что если $b < \alpha$, то $K_1(1 + d) < K_0(1 + r)$ при всех возможных вариантах реализации неопределенности $K_1 \in [a, b]$, и тогда следует использовать только безрисковую компоненту ($x_0 = 1$).

В случае, когда $a > \alpha$, (т. е. при самом неблагоприятном для валютного депозита курсе $K_1 = a$, он все равно выгоднее), оптимальным объектом вложения становится рисковый актив ($x_0 = 0$).

Для промежуточного варианта, когда $\alpha \in [a, b]$, доходность сравниваемых активов зависит от того, в каком из двух диапазонов $I_1 = [a, \alpha]$ или $I_2 = [\alpha, b]$ окажется значение курса K_1. Чтобы смягчить проигрыш, который дает однородный вклад в случае ошибочных предсказаний, целесообразно его диверсифицировать по двум депозитам. Как выбрать наилучшую пропорцию x_0 смеси?

Очевидно, что доходность комбинированного вклада будет ниже, чем для оптимальной чистой стратегии (заранее неизвестной), но выше доходности ошибочной чистой стратегии. Так, при $K_1 \in I_1$ риск смешанной стратегии определяется ее проигрышем по сравнению с наращением на рублевом депозите ($x_0 = 1$). Отсюда и из формулы (4) найдем величину недобора

$$F(x_0, K_1 \in I_1) = (1 + r) - S = \frac{1}{K_0}(1 - x_0)\big(K_0(1+r) - K_1(1+d)\big). \tag{6}$$

Аналогичная формула возможных потерь в случае $K_1 \in I_2$ имеет вид:

$$F(x_0, K_1 \in I_2) = \frac{1}{K_0} x_0 (K_1(1+d) - K_0(1+r)). \qquad (7)$$

Допустим, что осторожный инвестор, желающий обеспечить себе твердый доход, придерживается критерия минимизации наибольшего из двух рисков (6) и (7). Математически это означает, что он решает следующую минимаксную задачу:

$$\min_{x_0} \max\{F(x_0, K_1 \in I_1), F(x_0, K_1 \in I_2)\}.$$

Очевидно, что

$$F(x_0, K_1 \in I_1) \le F(x_0, a), F(x_0, K_1 \in I_2) \le F(x_0, b).$$

Таким образом, задача свелась к определению оптимального значения x_0 из условия

$$\min_{x_0} \max\{F(x_0, a), F(x_0, b)\}, \qquad (8)$$

и уравнение $F(x_0, a) = F(x_0, b)$ для определения наилучшей пропорции x_0 примет вид:

$$(1 - x_0)(K_0(1 + r) - a(1 + d)) = x_0(b(1 + d) - K_0(1 + r)).$$

Откуда после очевидных упрощений найдем формулу оптимальной (в смысле минимакса) пропорции:

$$x_0 = \frac{\alpha - a}{b - a}.$$

Как следует из приведенных выше неравенств, это решение дает гарантированный результат, т. е. независимо от варианта реализации неопределенности $K_1 \in [a, b]$ потери заведомо не превысят оптимального значения критерия (8).

В качестве **примера** возьмем следующий набор исходных данных: $K_0 = 5500$; $r = 0{,}2$; $d = 0{,}1$, и пусть годовой прогноз инвестора для возможных значений будущего курса K_1 ограничивается вилкой неопределенности: $a = 5600$, $b = 6100$. При этих условиях параметр $\alpha = \frac{5500 \times 1{,}2}{1{,}1} = 6000$ и оптимальная пропорция примет значение $x_0 = \frac{6000 - 5600}{6100 - 5600} = 0{,}8$, т. е. 80% рублевой наличности надо разместить под ставку $r = 0{,}2$, а остальные 20%

следует конвертировать в доллары и положить на валютный депозит.

Задачу о депозите можно продолжить, *заменив неопределенность вероятностным описанием курса* K_1. Подобная постановка нам еще встретится при изложении общей задачи об оптимальном портфеле, поэтому здесь мы ее рассматривать не будем.

Отмеченная выше разница между риском и неопределенностью относится к способу задания информации и определяется наличием (в случае *риска*) или отсутствием (при *неопределенности*) вероятностных характеристик неконтролируемых переменных. В упомянутом смысле эти термины употребляются в ***математической теории исследования операций***, где различают задачи принятия решений при риске и соответственно в условиях неопределенности.

Риск как несоответствие ожиданиям

В подобных задачах окончательный выбор основан на оценивании и сравнении различных возможных альтернатив. При этом предполагается, что для каждого мыслимого способа действия прогнозируемые последствия могут из-за влияния неконтролируемых факторов не совпасть с тем, что произойдет на самом деле. Вызванные данными расхождениями потери, а возможно и приобретения, зависят от меры случайности этих рассогласований, а также от их амплитудных характеристик (величины рассогласований). Чем больше разброс возможных значений относительно ожидаемой величины, тем выше риск.

Таким образом, каждый результат по каждому допустимому варианту взвешивается по ***двум критериям***. Один дает ***прогнозную*** характеристику варианта, а другой — меру возможного расхождения: *риск*.

Например, в качестве первого критерия может быть среднее значение (математическое ожидание) возможного результата; второй критерий (степень риска) дает его изменчивость. При этом, как правило, рискованность варианта возрастает с ростом ожидаемой результативности.

Таким образом, каждый результат по каждой сомнительной альтернативе взвешивается по двум этим критериям. На что решится оперирующая сторона, зависит от ее отношения к риску, от того, в каких пропорциях она готова обменять дополнительные порции риска на дополнительные порции выигрыша. Подробно эти вопросы будут изучаться в разделе, посвященном модели поведения инвестора.

Меры риска

Ответ на вопрос "Что принять за меру риска?" зависит от содержания конкретной задачи, которую решает финансовый аналитик. В приложениях широко применяют различные типовые конструкции, основанные на показателях изменчивости или вероятности сопряженных с риском состояний.

Так, финансовые риски, вызванные колебаниями результата вокруг ожидаемого значения, например, эффективности, оценивают с помощью дисперсии или ожидаемого абсолютного уклонения от средней. В задачах управления капиталом распространенным измерителем степени риска является *вероятность возникновения убытков или недополучения доходов по сравнению с прогнозируемым вариантом.*

2. Среднеквадратическая характеристика риска

Опираясь на формулы доходности (22), (23), можно понять, что при действии стохастических причин любое ее конкретное значение r является реализацией определенной случайной величины R. При этом ожидаемый результат оценивается математическим ожиданием E(R), а его колеблемость — дисперсией V(R).

Чем больше дисперсия (вариация), тем в среднем больше отклонение, т. е. выше неопределенность и риск. Поэтому за степень рискованности таких вложений зачастую принимают величину среднеквадратического отклонения $\sigma(R) = \sqrt{V(R)}$. Для детерминированной эффективности эта величина равна нулю и вложение становится безрисковым: его эффективность не отклоняется от ожидаемого значения. Как видно из формулы дисперсии $V(R) = M[R - E(R)]^2$, она не дает полной картины линейных уклонений $\Delta(R) = R - MR$, более наглядных для оценивания рисков.

Тем не менее, задание дисперсии позволяет установить связь между линейным и квадратичным отклонениями с помощью известного *неравенства Чебышева.*

Вероятность (Вер) того, что случайная величина отклоняется от своего математического ожидания больше, чем на заданный допуск δ, не превосходит ее дисперсии, деленной на δ^2.

Применительно к случайной эффективности R можно записать:

$$\text{Вер } (|R - E(R)| > \delta) \leq \frac{V(R)}{\delta^2}. \qquad (9)$$

Отсюда видно, что незначительному риску по среднеквадратичному отклонению соответствует малый риск и по линейным отклонениям: точки R с большой вероятностью будут располагаться внутри δ-окрестности ожидаемого значения E(R).

Пример 1. Сравним по риску вложения в две акции: А и В. Каждая из них по-своему откликается на возможные рыночные ситуации, достигая с известными вероятностями определенных значений доходности.

	Ситуация 1		Ситуация 2	
	вероятность	доходность	вероятность	доходность
A	0,5	20%	0,5	10%
B	0,99	15,1%	0,01	5,1%

Выбранные акции таковы, что имеют одинаковую ожидаемую доходность: $e_A = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 10 = 15\%$, $e_B = 0,99 \cdot 15,1 + 0,01 \cdot 5,1 = 15\%$. Измерим риск отклонением по абсолютному значению разницы между "фактом" и ожиданием.

Найдем эти отклонения: $\Delta_{A1} = 20 - 15 = 5\%$, $\Delta_{A2} = 15 - 10 = 5\%$, $\Delta_{B1} = 15,1 - 15 = 0,1\%$, $\Delta_{B2} = 15 - 5,1 = 9,9\%$.

Оценивая ожидаемый риск средним абсолютным отклонением, получим его меру для каждой акции: $\varepsilon_A = 5\%$, $\varepsilon_B = 0,99 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 9,9 = 0,198\%$. Измеряя изменчивость среднеквадратичным отклонением, придем к следующим мерам рисков:

$$\sigma_A = \sqrt{0,5 \times 5^2 + 0,5 \times 5^2} = 5\%, \ \sigma_B = \sqrt{0,99 \times (0,1)^2 + 0,01 \times (9,9)^2} = $$
$$= 0,995\%.$$

Из сопоставления всех найденных значений видно, что превышение риска по активу А сохраняется независимо от способа измерения ε и σ, т. е. данные меры изменчивости взаимно согласованы.

3. Риск разорения

Особый вариант риска связан с разорением. В общем случае этот риск порождается такими большими «минусовыми" отклонениями ($R < E(R)$), которые не оставляют инвестору возможность их компенсировать. Попробуем определить вероятностную меру разорения, приписывая ей вероятность осуществления подобного события.

Пример 2. Предположим, что на рынке могут возникнуть только два исхода и на каждый из них акции A и B откликаются неслучайным образом. Вероятности этих исходов и соответствующих им значений доходности зададим следующей таблицей.

	Исход 1		Исход 2	
	вероятность	доходность	вероятность	доходность
A	0,2	5%	0,8	1,25%
B	0,2	–1%	0,8	2,75%

Согласно этой таблице доходности акций, в отличие от примера 1, однозначно определяются состояниями рынка, реализованными с заданными вероятностями ($p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}8$). Прослеживая по таблице отрицательную связь между эффективностями, можно утверждать, что коэффициент корреляции $\sigma_{AB} = -1$. В рассматриваемом случае ожидаемые доходности акций совпадают:

$$e_A = 5 \cdot 0{,}2 + 1{,}25 \cdot 0{,}8 = 2\%,$$

$$e_B = -1{,}0 \cdot 0{,}2 + 2{,}75 \cdot 0{,}8 = 2\%,$$

и дисперсии (квадратичные характеристики рисков) также совпадают:

$$V_A = (5 - 2)^2 \cdot 0{,}2 + (1{,}25 - 2)^2 \cdot 0{,}8 = 2{,}25,$$

$$V_B = (-1 - 2)^2 \cdot 0{,}2 + (2{,}75 - 2)^2 \cdot 0{,}8 = 2{,}25.$$

Заодно можно убедиться, что коэффициент корреляции

$$\sigma_{AB} = \frac{E(r_A\ r_B) - e_A e_B}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0{,}2 \times 5(-1) + 0{,}8 \times 1{,}25 \times 2{,}75 - 2 \times 2}{\sqrt{2{,}25}\sqrt{2{,}25}} = -1.$$

Предположим теперь, что инвестор взял деньги в долг под процент, равный 1,5%. Ставка процента по кредиту ниже ожидаемой доходности по акциям, которые будут приобретены на заемные деньги, поэтому действия инвестора вполне разумны.

Однако если инвестор вложит деньги в акции А, то при исходе 1 он выиграет $(5 - 1{,}5) = 3{,}5\%$, а при исходе 2 проиграет $(1{,}25 - 1{,}5) = - 0{,}25\%$, причем с вероятностью $p_2 = 0{,}8$. Напротив, если он вложится в актив В, то разорение ему грозит с вероятностью $p_1 = 0{,}2$ в первой ситуации (исход 1), когда он теряет $(-1 - 1{,}5) = -2{,}5\%$.

Подсчитаем ожидаемые потери (П) при покупке акций А и В соответственно: $П_A = 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}2$; $П_B = 0{,}2 \cdot 2{,}5 = 0{,}5$.

Как видим, в первом случае они меньше. Зато риски разорения, оцениваемые через вероятность наступления события, наоборот, при приобретении акций А будут больше $(0{,}8 > 0{,}2)$. Это превышение возможности банкротства должно отпугивать осторожного вкладчика, который к тому же "играет" на заемном капитале, от акций А в пользу бумаг В.

В свою очередь, ожидаемый риск $П_A < П_B$ склоняет его к выбору в пользу акций А. Как действовать в подобной ситуации инвестору? Это зависит от его индивидуальных предпочтений, выражаемых, в том числе, *функцией полезности инвестора* — понятием, которое будет изучаться в следующем разделе.

Сравнивая в описанных примерах ситуации, полезно отметить, что при равенстве ожидаемых значений доходности, дисперсий и при отсутствии собственных средств риск разорения может быть различным.

Пример 3. Продолжим пример и рассмотрим два способа снижения риска разорения: разделение вклада по вложениям (А и В) и разделение капитала по источникам (собственный и заемный).

Диверсификация вложений. На такую возможность снижения риска указывает наличие полной отрицательной корреляции $\sigma_{AB} = -1$. Эта отрицательная связь обусловлена противоположными реакциями активов А и В на возможные исходы: при изменении рыночной ситуации проигрыш по одной из бумаг смягчается выигрышем по другой. Отсюда появляется возможность такого комбинирования активов, при котором достигаемая доходность смеси независимо от исхода будет достаточна для погашения взятого кредита.

Пусть x_A, x_B — доли вложений в акции А и В, $x_A + x_B = 1$. Доходность смеси

$$R = x_A R_A + x_B R_B = x_A R_A + (1 - x_A) R_B,$$

где R_A, R_B — случайные доходности акций А и В. Очевидно, что ситуационные доходности смешанного вклада равны:
для первого исхода

$r_1 = 5\%x_A + (1 - x_A)(-1\%)$

и для второго исхода

$r_2 = 1{,}25\%x_A + (1 - x_A) \times 2{,}75\%.$

Отсюда придем к условиям гарантированного неразорения:

$$\begin{cases} 6x_A - 1 > 1{,}5 \\ 2{,}75 - 1{,}5x_A > 1{,}5 \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получим

$0{,}42 < x_A < 0{,}83.$

Выбирая пропорции x_A, $x_B = 1 - x_A$ в соответствии с найденным решением, инвестор полностью исключает риск разорения.

Более того, полная обратная корреляция активов ($\sigma_{AB} = -1$) позволяет распределить вложения таким образом, чтобы получить безрисковую по среднеквадратической характеристике комбинацию, то есть комбинацию с детерминированной эффективностью ($\sigma^2(R) = 0$). В самом деле, с учетом $\sigma_{AB} = -1$, $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 2{,}25$ и по правилам теории вероятностей дисперсия эффективности смеси

$$\sigma^2(R) = x_A^2\sigma_A^2 - 2x_Ax_B\sigma_A\sigma_B + x_B^2\sigma_B^2 = 2{,}25(x_A - x_B)^2.$$

Таким образом, выбирая $x_A = x_B = 1/2$, то есть вкладываясь в каждый актив половиной капитала, инвестор добивается детерминированной доходности $r = 2\%$, что одновременно избавляет его и от риска разорения.

Диверсификация капитала. Риск разорения можно также снизить, увеличивая в "единичном" вкладе долю собственных средств. Обозначим эту долю через ϑ. Очевидно, что выплаты процентов по долгу при наличии собственных средств ϑ уменьшатся по сравнению с их отсутствием ($\vartheta = 0$) на величину, определяемую произведением ставки процента на ϑ.

Снижение этих выплат сужает условие разорения. Так, если $1{,}5\vartheta = 0{,}25$ ($\vartheta \approx 0{,}17$), то элиминируется риск по акции А. По тем же соображениям, чтобы гарантированно исключить риск разорения от приобретения акции В, доля собственных средств должна удовлетворять условию $1{,}5\vartheta = 2{,}5$, то есть $\vartheta \approx 1{,}67$, что нереально. Это означает, что даже при инвестировании только собственных средств в покупку акций В риск разорения сохраняется. Очевидно, что требование вкладывать собственные деньги можно ослабить, если не отказываться от определенного риска и ориентироваться на предполагаемые потери $П_В = 0{,}5$. Тогда получим $1{,}5\vartheta = 0{,}5$, то есть $\vartheta \approx 0{,}33$.

4. Показатели риска в виде отношений

Только что мы убедились, что с ростом доли личных средств (наряду с заемными) инвестора при покупке ценных бумаг риск его разорения падает. Но достигается это ценой снижения рентабельности собственного капитала. Финансисты поэтому стремятся найти определенный компромисс между риском разорения и рентабельностью. Для этого они ограничивают риск, измеряемый отношением максимума потерь Y с собственным капиталом, некоторым приемлемым для них пороговым значением (ξ_1 и ξ_2):

$$K_1 = \frac{Y}{C} < \xi_1$$

или, с учетом вероятности потерь:

$$K_2 = \frac{pY}{C} < \xi_2 .$$

В этих формулах K_1, K_2 — ***коэффициенты риска***; Y— максимально возможная сумма убытка, руб.; p — вероятность потерь; C — объем собственных денежных ресурсов с учетом точно известных поступлений, руб.; ξ_1, ξ_2 — позиционные ограничения на риск.

В финансовом менеджменте чаще применяют обратные коэффициенты $\frac{C}{Y}$ и $\frac{C}{pY}$, которые уместно назвать ***коэффициентами покрытия рисков*** и которые ограничиваются снизу $(>\frac{1}{\xi_1}, >\frac{1}{\xi_2})$.

Здесь в знаменателе стоят неблагоприятные риски-отклонения Y, взвешенные, по необходимости, с учетом их вероятности. В числителе указываются размеры фонда собственных средств, которыми названные риски могут покрываться.

Дадим с этих позиций интерпретацию распространенного в бухгалтерской практике *коэффициента Кука:*

$$Н_К = \frac{\text{собственный капитал}}{\text{активы, взвешенные с учетом риска}} . \qquad (10)$$

Здесь в качестве весов рассматриваются риски-вероятности. Их изначальный смысл состоит в том, что они указывают вероятность потери соответствующего актива.

Их же инструктивный смысл, обусловленный задачами нормативного регулирования, которые решает Центральный банк, хотя и коррелирует с изначальным, но частично искажает фактические вероятности в пользу этих задач. В частности, с целью сохранения финансовой стабильности коммерческих банков (КБ) от них требуется соблюдение определенного минимального значения коэффициента Кука ($\geq h_{min}$).

Но вернемся к нашей интерпретации. Обозначим собственный капитал КБ через С и пусть A_i — объем его i-ого актива, а p_i — вероятность потери этого актива. При такой трактовке произведение p_iA_i дает ожидаемые потери по активу i, а $\sum_i p_iA_i$ в знаменателе дроби (10) — ожидаемые потери в целом по активной части бухгалтерского баланса.

Таким образом, из нормативного ограничения h_{min} вытекает, что собственный капитал должен гарантированно покрывать часть ожидаемых потерь всех активов, равную дроби h_{min}:

$C \geq h_{min} \times$ ожидаемые потери всех активов.

Пусть, например, имеется только один, абсолютно рисковый актив А ($p = 1$), тогда при $h_{min} = 0{,}05$ это неравенство означает, что средства, "пропавшие" в данном активе, не должны превосходить двадцатикратного размера собственного капитала.

С этих позиций можно дать интерпретацию и других нормативов, скажем, ликвидности и платежеспособности. Мы, однако, этого делать не будем по причине неактуальности для дальнейшего изложения.

Дробные риски не нормированы, то есть могут меняться в произвольных границах, однако их численные значения так или иначе связаны с вероятностью: альтернатива с большим показателем K_1 имеет и более высокую вероятность разорения.

5. Вероятностные риски

О возможных уклонениях от ожидаемого результата можно говорить как о *рисках неопределенности* и о вероятностях этих уклонений — как о ***вероятностных рисках***. Последние, в частности, *измеряют вероятности нежелательных событий, отрицательно или даже разрушительно влияющих на финансовые результаты.*

Ограничимся здесь примерами двух видов подобных рисков: кредитного и депозитного.

Если существует кредитный риск, то соответствующий актив либо принесет к концу периода определенный доход (который обычно выше, чем у безрискового актива), либо не вернется в полном объеме. *Вероятность, с которой этот актив не будет возвращен, и является* ***кредитным риском.***

Очевидно, что пропажа части активов чревата, например, для коммерческого банка не только снижением доходности, но и возможной нехваткой средств для погашения обязательств. В этом смысле нормативные ограничения рисков по различным категориям активов (наличность, ценные бумаги, ссуды и т. д.), которые устанавливает Центральный банк, выполняют роль инструментов управления в общей системе регулирования банковской деятельности.

Риски пассивов, по мнению автора, заслуживают не менее пристального внимания вопреки тому, что в инструкциях Центробанка им не отводится должного места. Позиция автора опирается на факты нашей жизни, когда мы с вами оказывались свидетелями (хорошо, если не участниками) банкротств даже крупных банков по причине массового оттока депозитов. Справедливости ради отметим, что частично этот тип риска учитывается в завышении одноименных нормативов по активам, где, например, риск долгосрочных кредитов приравнен единице.

Под ***рискованными пассивами*** следует понимать *пассивы с вероятностным характером или неопределенностью их изъятия в течение срока, на который рассчитывается финансовый результат.* В качестве примера можно назвать депозиты до востребования и остатки на расчетных счетах предприятий-клиентов КБ. За ***меру*** такого ***риска (депозитного)*** целесообразно принять *вероятность оттока пассивов в течение рассматриваемого срока.*

Очевидно, что депозитный риск может привести к потере активов, которые банк будет вынужден потратить на выполнение своих обязательств перед вкладчиками. В подобной ситуации *депозитный риск индуцирует риск активов* и осложняет финансовое положение коммерческого банка.

Пример 4. В общем случае депозитный риск зависит от длины анализируемого периода и динамики изъятия вкладов. Для наших целей достаточно его простейшего описания через вероятность (q) оттока депозитов за данный период.

Если отзываемые депозиты оплачиваются за счет имеющихся активов и начальный актив совпадают с начальным пассивом (А = П), то ожидаемый процентный доход банка составит:

$$e_М = П(r_А - r_П) - П \times q(1 + r_А),$$

где $r_А$, $r_П$ — ставки по активам и пассивам, т. е. ожидаемый доход равен безрисковой марже за вычетом потерь из-за прогнозируемого ухода пассивов в объеме $П \times q$.

Здесь депозитный риск целиком перешел в риск активов: формула не изменится и запишется точно так же для случая безрисковых пассивов П и кредитного риска q.

Очевидно, что рисковые активы и пассивы можно трактовать как безрисковые, корректируя при этом вероятностные характеристики процентных ставок таким образом, чтобы получить эквивалентные финансовые результаты. При этом потери (изъятия) части рисковых активов (пассивов) переводятся в адекватные изменения процентных ставок, начисляемых на их исходные значения (без учета потерь).

Пример 5. Покажем, как это делается. Пусть а — актив, одновременно свободный от кредитного риска ($\varsigma = 0$) и от риска процентной ставки (r_a — детерминированная величина, $\sigma_a^2 = 0$). Тогда проценты в конце периода составят величину $S = ar_a$. При наличии кредитного риска процентные выплаты становятся случайной величиной, для которой можно записать следующий ряд распределения:

S	ar_a	-a
P	$1-\varsigma$	ς

Этой таблице однозначно соответствуют вероятности эквивалентной процентной ставки R_a:

R_a	r_a	-1
P	$1-\varsigma$	ς

Отсюда найдем ее математическое ожидание:

$$e_a = r_a (1 - \varsigma) - \varsigma$$

и дисперсию:

$$\sigma_a^2 = E(R_a^2) - e_a^2 = \varsigma(1 - \varsigma)(1 + r_a)^2.$$

Пусть кредитный риск $\varsigma = 0{,}05$, а безрисковая ставка $r_a = 0{,}1$. В данном случае риск актива можно перевести в риск случайной процентной ставки с ожидаемым значением $e_a = 0{,}1 \cdot 0{,}95 - 0{,}05 = 0{,}045$ и дисперсией $\sigma_a^2 = 0{,}05 \cdot 0{,}95 \cdot (1{,}1)^2 = 0{,}575$.

6. Двухкритериальная трактовка риска

Пусть имеется набор альтернатив и каждая альтернатива характеризуется двумя показателями: убытком Δ_i и его вероятностью p_i: $\alpha_i = (\Delta_i, p_i)$. Инвестор склоняется к выбору такой альтернативы, для которой:

$$\Delta_i \to \min, \quad p_i \to \min, \tag{11}$$

то есть желает свести к минимуму и вероятностный риск, и риск-уклонение.

Так, в примере 2 риск альтернатив A и B можно представить векторами $\alpha_A = (0{,}25\%,\ 0{,}8)$ и $\alpha_B = (2{,}5\%,\ 0{,}2)$. Сопоставляя их, приходим к выводу, что альтернатива A лучше по критерию потерь, но хуже по риску-вероятности. Здесь нет доминирования преимуществ ни по одной из альтернатив, и окончательный выбор связан с компромиссом.

На него можно пойти, основываясь, например, на скаляризации критериев p и Δ показателем ожидания убытка $\Pi = p\Delta$ и выбирая альтернативу по минимальному значению этого показателя: $p_i\Delta_i \underset{i}{\to} \min$. Результатом такого выбора будет вариант A с $\Pi_A = 0{,}2 = \min\,(0{,}2;\ 0{,}5)$.

Еще один прием компромисса состоит в разделении вклада по активам A и B согласно *правилу минимакса* (2). Переписывая его в терминах нашего примера, получим минимаксную задачу:

$$Z = \min_{x}\{\max(x_A\Pi_A,\ (1 - x_A)\Pi_B)\}. \tag{12}$$

Ее решение $x_A = \frac{5}{7}$ находится из уравнения:

$$\Pi_A x_A = \Pi_B(1 - x_A),$$

где $\Pi_A = 0{,}2$; $\Pi_B = 0{,}5$. Полученная пропорция позволяет снизить риск до значения $Z(x_A = \frac{5}{7}) = \frac{1}{7} < \min(\Pi_A, \Pi_B)$, с той же ожидаемой доходность $e_Z = 2\%$.

В дальнейшем, в разделе по оптимальному портфелю, мы продемонстрируем влияние диверсификации на снижение дисперсионной меры риска (среднеквадратичного отклонения). В частности, там будет показано, что за счет определенного смешения активов с полной отрицательной корреляцией ($\sigma_{AB} = -1$) можно достичь даже нулевого (в смысле среднеквадратичного отклонения) риска.

Рассмотренный здесь частный пример тем не менее обнаруживает ***общее положение***: наличие у риска двух сторон — *вероятности* и *уклонения* (цены). Катастрофические последствия больших уклонений Δ даже при малом шансе p требуют самого тщательного анализа подобных исходов.

Среди уже рассмотренных скалярных измерителей риска можно выделить те, чья конструкция содержит элементы как риска-отклонения, так и риска-вероятности. Это прежде всего *среднеквадратические* меры (СКО и дисперсия) и, кроме того, показатели риска, задаваемые *минимаксом* (12) и ***в виде отношений*** (10). Подобные числовые характеристики представляют собой скалярную сверку двухкритериального риска (11).

Одно и то же значение дисперсии σ^2 случайной величины воспринимается по-разному в зависимости от размера M ожидаемого результата. Соотнося числовые значения этих показателей — дисперсию с математическим ожиданием, придем к относительной характеристике риска в виде показателя, именуемого в теории вероятностей коэффициентом вариации

$K = \sigma/M/$

Эту меру рассеяния можно также рассматривать как свертку, заменяющую двухкритериальную задачу на максимум среднего выигрыша и минимум риска ($M \to \max$, $\sigma \to \min$) однокритериальной минимизацией относительного риска ($\sigma/M \to \min$).

Пример 6. Пусть А — вклад, размещенный в рисковый актив под ставку r_a. Под рисковым будем понимать актив, подверженный кредитному риску. Обозначим вероятность возможной утраты этого актива через ς.

Учитывая, что размер актива в конце рассматриваемого срока принимает различные значения с некоторыми вероятностями, можно считать эту величину дискретной случайной величиной, что позволяет записать для нее ряд распределения. В нашем случае этот ряд задается таблицей:

A	a	o
P	$1-\varsigma$	ς

Математическое ожидание для этой случайной величины $e_A = (1 - \varsigma)a$. Сравнивая табличные значения со средним e_A, найдем риски отклонения:

$^{+}\Delta = a - e_A = \varsigma a$; $^{-}\Delta = O - e_A = -(1 - \varsigma)a$.

Применяя формулу дисперсии:

$$\sigma_A^2 = (1 - \varsigma)\,{}^{+}\Delta^2 + \varsigma\,{}^{-}\Delta^2,$$

получим квадратическую меру риска:

$$\sigma_A^2 = \varsigma(1 - \varsigma)a^2$$

как результат свертки рисков-вероятностей и рисков-отклонений.

Выше мы определили математическое ожидание величины актива, приносящего процентный доход, отсюда ожидаемый размер наращенной суммы

$$e_S = e_A(1 + r_a)$$

и соответственно ожидаемая процентная ставка

$$e_a = (e_S - a)/a = (1 - \varsigma)\,(1 + r_A) - 1 = r_A(1 - \varsigma) - \varsigma,$$

что совпадает с оценкой, полученной в примере 5.

Пример 7. Усложним предыдущий пример. Будем считать, что инвестиции А состоят из двух частей: собственного капитала К и займа П. Имея на руках эту сумму, инвестор размещает ее таким образом, чтобы в конце срока получить процентную маржу $M = A(1 + r_A) - П(1 + r_П) - K$. Эта маржа с учетом тождества $A = П + K$ равна разности

$$M = r_A A - r_П П = (r_A - r_П)П + r_A K\,, \tag{13}$$

где r_A, $r_П$ — соответственно ставки по выданным кредитам и привлеченным депозитам ($r_A > r_П$).

При отсутствии каких бы то ни было рисков фактический и ожидаемый результаты совпадают с теми величинами, которые дает формула (13). В таком случае очевидно, что $M > 0$.

Изменим слегка ситуацию, введя в действие кредитный риск (как в таблице примера 6), сохранив при этом гипотезу о безрисковости пассивов, означающую безрисковость сроков и ставок привлечения. Ради упрощения будем считать совпадающими сроки займа П с периодом предоставления кредитов.

Усредняя в исходной формуле М, найдем математическое ожидание процентного дохода с учетом риска ς:

$$e_M = П(r_A - r_П) + K r_A - \varsigma(П + K)(1 + r_A) \tag{14}$$

В этом выражении можно выделить безрисковую маржу, сделанную на заемных средствах и процента с капитала, и ожидаемый урон по наращению из-за риска ς (вычитаемое). Отсюда мера риска в виде отношения равна:

$$K_1 = \frac{\varsigma(\Pi + K)(1 + r_A)}{K} = \varsigma\left(1 + \frac{\Pi}{K}\right)(1 + r_A).$$

Таким образом, степень риска K_1 гиперболически убывает с ростом собственных средств. Однако это достигается за счет снижения рентабельности их использования:

$$\frac{e_M}{K} = ((r_A(1-\varsigma)-\varsigma)-r_\Pi)\frac{\Pi}{K} + (r_a(1-\varsigma)-\varsigma).$$

Обозначим пропорцию вклада П/К через η. При $e_м < 0$ возрастает риск разорения. Как следует из выражения (14), этот эффект будет тем ощутимее, чем строже выполняется условие:

$$r_A(\Pi + K) - r_\Pi \Pi < \varsigma(\Pi + K)(1 + r_A),$$

или равносильное ему неравенство

$$\frac{1}{\varsigma(1+\eta_A)}\left((\eta_A - \eta_\Pi) + \frac{\eta_\Pi}{1+\eta}\right) < 1. \qquad (15)$$

Из неравенства (15) видно, как растут шансы на банкротство в зависимости от увеличения кредитного риска ς, соотношения η заемных и собственных средств и как они уменьшаются по мере расширения зазора между ставками размещения (кредитования) r_A и заимствования r_Π.

Пусть некто взял в долг под ставку $r_\Pi = 1{,}5\%$, а кредитует по ставке $r_A = 3\%$ и действует на 2/3 за свой счет ($\eta = 1/2$). Тогда уже при кредитном риске $\varsigma = 0{,}1$ получим, что:

$$0{,}1 >> \frac{1{,}5\% + \frac{1{,}5\%}{1{,}5}}{100\% + 3\%} = \frac{2{,}5}{103} = 0{,}024,$$

т. е. риск разорения весьма велик.

7. Отношение к риску

Характер и динамика хозяйственных процессов во многом зависят от экономических побуждений, мотивов и личностных особенностей работающих людей. Человек — это неотъемлемая активная составляющая экономической системы, и познать ее без модельных представлений об экономическом поведении людей не представляется возможным.

Поэтому экономическая теория уделяет столь важное внимание формированию модели "человека экономического", в частности на основе постулата о его рациональном поведении.

Среднестатистический человек — оптимизатор постоянно находится в ситуации выбора между конкурирующими целями. Движимый поиском выгоды, он считает, прогнозирует, выбирает и конструирует свое поведение таким образом, чтобы улучшить собственное положение.

Однообразие его микроэкономических поступков облегчает развитие макроэкономических представлений. Что благоразумно для отдельной семьи, не станет бессмысленным для общества в целом.

Однако то, что остается от индивидуума после "научной" операции усреднения, не имеет ничего общего с его бесконечной сложностью, которая познается искусством. "Человек, всегда и везде, кто бы он ни был, любил действовать так, как он хотел, а вовсе не так, как повелевали ему разум и выгода; хотеть же можно и против собственной выгоды, а иногда и положительно должно" [Ф. М. Достоевский].

Функция полезности дохода

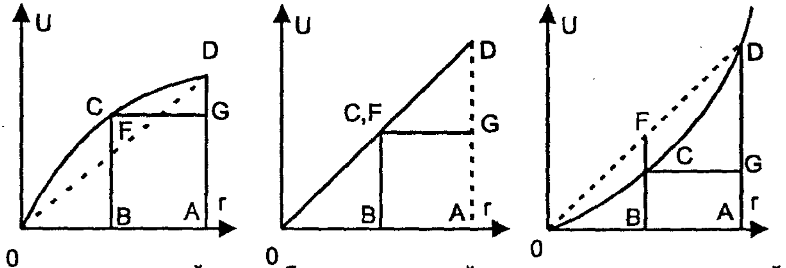
Современная теория финансов также базируется на аксиоматических предпосылках о поведении индивидуумов, но уже в качестве инвесторов при совершении операций на финансовых рынках. Их поведение предполагается рациональным и описывается в простейших ситуациях максимизацией ожидаемого значения функции полезности дохода (ФП).

Ее вид выбирается таким образом, чтобы *математические свойства функции соответствовали свойствам инвестиционных решений,* зависящим, в первую очередь, от отношения к доходу и сопряженному с ним риску. Те, кто знаком с методом производственной функции (ПФ), могут без труда усмотреть аналогию с построением типовых зависимостей выпуска от затрат.

Чтобы облегчить понимание предмета, пожертвуем математическими тонкостями, освободив место для графических иллюстраций. Читателю с обостренным чувством математической строгости можно рекомендовать специальную литературу с "недозированным" применением формализаций.

В наших рассуждениях будем исходить из *упрощенного **понятия полезности***, в соответствии с которым *все побуждения представительного инвестора полностью описываются одной числовой величиной — доходом, и чем больше доход, тем больше полезность от обладания им.* Таким образом, полезность рассматривается нами как неубывающая функция U(r) с единственной переменной — доходом r; примем, что U(0) = 0.

Теоретически могут существовать ***три типа возрастания функции U(r)***: с затухающими, неизменными и нарастающими приростами полезности ΔU при движении аргумента по оси дохода с одинаковым шагом Δr. Этим возможностям отвечают варианты графиков, изображенных на рис. 2.



а — с падающей отдачей б — с постоянной отдачей в — с возрастающей отдачей

Рис. 2. Три типа возрастания полезности

Подумаем, какой из этих типов функции полезности больше соответствует поведенческой характеристике инвестора. На рис. 2 абсциссы соответствуют доходу, а ординаты - значениям полезности. При сравнении кривых просматривается разница между а), б) и в) в смысле оценок превышения полезности от выигрыша некоторой суммы (ВА) по сравнению с потерей той же суммы (ВО = ВА).

Так, для а) — при одинаковых выигрышах и потерях последние воспринимаются более ощутимо (GD < ВС), в случае в) — более ощутимы выигрыши (GD > ВС), а у б) — оценки одинаковых приобретений и потерь равнозначны (GD = ВС).

Отсюда понятно, что экономическое поведение по типу (а), при котором человек больше боится потерять, чем желает приобрести, будет отличаться от типов (б) и (в) в пользу осторожных решений и умеренных действий. Этого почти достаточно, чтобы классифицировать кривую а) как полезность для не склонных к риску инвесторов.

Чтобы разнообразить понимание проблемы, применим рис. 2 к поведению инвесторов, выбирающих между рисковым и безрисковым вложениями. Итак, пусть (а), (б), (в) — три вкладчика и каждый из них руководствуется своей кривой полезности, изображенной на рис. 2. Им предлагается на выбор поместить свои средства в безрисковую операцию с доходом 0В или принять на себя риск вложения с равновероятными исходами: получить доход 0А или не получить ничего (т. е. 0). Заметим, что согласно условию ожидаемый доход E_r альтернативы, связанной с риском, тот же, что и для стабильного варианта: $E_r = 1/2$ 0А = 0В.

В соответствии с общей теорией будем считать, что каждый может сравнивать не только события, но и комбинации событий с данными вероятностями. В нашем случае — события А и 0 с вероятностями $P_A = P_0 = \frac{1}{2}$.

То же самое предполагается для связанных с этими событиями полезностей, то есть количественно определенная (выраженная числом) полезность понимается как объект, для которого подсчет математического ожидания является законным.

Теперь мы вправе ожидать следующего. Каждый из инвесторов сравнивает полезность (ВС) стабильного дохода (0В) с математическим ожиданием полезности E_u = BF (то есть E_u = 1/2 AD) как функции случайного дохода и выбирает ту альтернативу, у которой значение сравниваемого показателя больше (max (BC, BF)).

Проверяя это условие для каждой кривой на рис. 2, можно утверждать, что инвестор (а) остановится на безрисковом варианте (BC > BF), для вкладчика (б) обе альтернативы: без риска или с ним — равнозначны (BC = BF) и ему все равно, какой из них воспользоваться. Инвестор (в) предпочтет связанные с риском вложения с определенной ожидаемой прибылью стабильному получению этой ожидаемой суммы (BC < BF).

Таким образом, каждый вид кривой полезности (а, б, в) дает один из возможных вариантов модели отношения человека к риску: не расположенный к риску (а); безразличный (нейтральный) (б); расположенный (склонный) к риску, у которого "полезность азарта" вытесняет полезность дохода (в).

Реальный опыт, основанный, в частности, на многочисленных специальных экспериментах, убеждает, что большинство субъектов экономики (индивидуумы, фирмы, инвесторы и т. п.) в своих действиях и решениях склонны к стабильности.

В пользу такого вывода говорит, например, более высокий уровень ожидаемой эффективности рисковых вложений по сравнению с безрисковыми. При игнорировании риска вложения потекли бы к более эффективным, но менее надежным активам.

В результате возросшего спроса на рисковые инвестиции их ожидаемые доходности поползли бы вниз до уровня эффективности безрисковых вложений.

То, что этого не происходит, свидетельствует о неприятии инвесторами большого риска. Подтверждение этому можно найти в самых различных областях экономической жизни: профессии с высоким уровнем риска гарантируют в среднем более высокую оплату, чем профессии с низким уровнем риска; для нестабильной экономики, в которой хозяйствующие субъекты преимущественно планируют свою деятельность на краткосрочную перспективу, характерны увеличенные ставки процентов; экономические агенты покупают страховки и предпринимают значительные усилия для диверсификации своих портфелей и т. д.

Мы надеемся, что перечисленного достаточно, чтобы убедить читателя в закономерности допущения несклонности инвестора к риску. Следовательно, мы с полным основанием можем следующим образом ответить на поставленный в начале данного подраздела вопрос — наиболее адекватно поведение инвестора описывает графическая модель а), изображенная в левой части рис. 2. Эту строго вогнутую функцию называют ***функцией уклонения от риска***, а линейную и строго выпуклую функцию (рис. 2 б) и в)) — соответственно ***нейтральной относительно риска*** и ***функцией стремления к риску.***

Концепция функции полезности является важнейшим элементом общей теории риска. В данной работе, опуская сложные теоретические построения, мы ограничимся достаточно простыми для использования в математических моделях функциями полезности.

Примерами такого рода функций являются ***квадратичная*** ($u = r - ar^2$), ***логарифмическая*** ($u = \ln r$), ***логарифмическая со сдвигом*** ($u = \ln(1 + ar)$), экспоненциальная ($u = 1 - \exp(-ar)$, ***степенная*** ($u = r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$). Эти функции широко используют при математическом осмыслении инвестиционных задач и для выявления закономерностей финансового рынка.

Однако зависят они только от дохода r и поэтому не учитывают влияния внешних факторов на предпочтения человека (инвестора) и, следовательно, на течение кривых полезности. Тем не менее при их конструировании математические свойства подбирались таким образом, чтобы соответствовать типовым разновидностям инвестиционного поведения. Это определяет возможности их прикладного и теоретического приложений.

8. Типовые функции полезности дохода

В настоящем разделе мы прокомментируем наиболее распространенные типовые зависимости.

Квадратичная функция полезности

Рассмотрим следующий вид этой функции:

$$U(r) = ar + br^2 \ (a > 0,\ b < 0). \qquad (16)$$

Функция (16), известная еще как *полезность Неймана-Монгенштерна (ФП Н.-М.)*, широко используется в теории финансов, в частности рынка ценных бумаг. В основе этой популярной функции лежит известная теорема Н.-М., в которой доказывается, что *при определенных допущениях индивид ведет себя таким образом, чтобы максимизировать ожидаемое значение полезности* (16). Мы также будем опираться на эту функцию в отдельных разделах модели оптимального портфеля и для равновесного анализа цен рисковых активов.

Из графика квадратичной зависимости (16) понятно, что как кривая полезности он имеет смысл только на ограниченном интервале $(0, -\frac{a}{2b})$, где предельная полезность $\frac{du}{dr} = a + 2br \rangle\ 0$ (рис. 3).

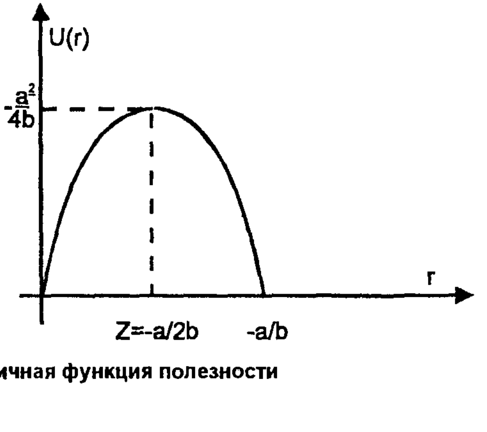


Рис. 3. Квадратичная функция полезности

Из-за этого анализ, проводимый с помощью такой простой функции, ограничен и может применяться только теми инвесторами, которые просчитывают варианты с возможностью дохода R ниже критического уровня $Z = -a/2b$. Здесь прописной R обозначен случайный доход с возможными значениями $r \in (0; -a/2b)$.

Пример 8. Рассмотрим простейшую иллюстрацию выбора по максимуму ожидаемой полезности (16). Возьмем два различных инвестиционных портфеля. При одинаковой ожидаемой величине отдачи один из них не связан с риском (доход полностью определен), а другой связан с риском.

Характеристики рискового портфеля зададим следующей таблицей распределения:

R - случайный доход	-4	4
P - вероятности	0,5	0,5

Этот портфель сулит приращение вложенных средств на 4 ед. с вероятностью 0,5 или их потерю на те же 4 ед. с той же вероятностью 0,5.

Второй портфель с риском не связан и не обещает никаких изменений с вложенными средствами, зато позволяет сохранить их без всяких потерь. Иначе говоря, индивид сберегает, но не инвестирует, т. е. данный портфель содержит только деньги.

Пусть функция полезности $U(r) = 1{,}2r - 0{,}1r^2$. Так как для первого портфеля доход R — случайная величина, то и U(R) — случайная величина с таким рядом распределения:

U(R)	U(-4) = – 6,4	U(4) = 3,2
P	0,5	0,5

Посчитаем для него ожидаемую величину полезности:

$E_u = E(U(R)) = 0{,}5(-6{,}4) + 0{,}5 \times 3{,}2 = -1{,}6.$

Для второго портфеля доход есть неслучайная величина $r = 0$ и его полезность $U\ (r = 0) = 0$ также неслучайна, а потому ее ожидаемое значение совпадает с ней самой и равно нулю.

Таким образом, для безрискового портфеля величины ожидаемой полезности больше $(0 > -1{,}6)$, т. е. инвестор предпочтет деньги.

Графически это решение выглядит следующим образом (рис. 4).

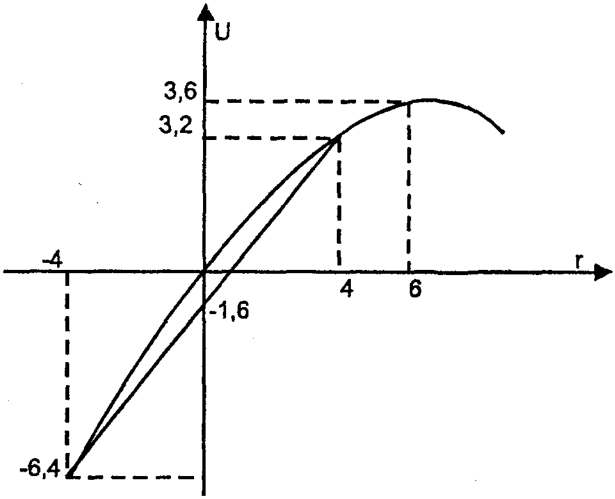


Рис. 4. График простейшего выбора

Заметим, что данный пример имеет демонстрационный характер. Ответ очевиден, и его можно угадать. В самом деле, поскольку сравниваемые активы равноэффективны, то не склонный к риску инвестор (модель с квадратичной функцией полезности) выберет тот вариант, который имеет меньший разброс результата, в нашем случае — безрисковый.

Логарифмическая функция полезности

Эта функция имеет вид:

$$U(r) = \log_a r. \qquad (17)$$

Известно, что функция полезности задается с точностью до монотонно неубывающего преобразования. Поэтому выбор основания a у логарифма (17) принципиального значения не имеет и определяется удобством:

$$\log_a r = \log_a b \times \log_b r.$$

Впервые такая полезность была рассмотрена Д. Бернулли в связи с так называемым Петербургским парадоксом в его статье, представленной в 1738 г. Императорской академии наук в Петербурге. Его рассуждения основывались на гипотезе о том, что полезность бесконечно малого выигрыша dx пропорциональна этому выигрышу и обратно пропорциональна денежной сумме, которой игрок обладает:

$$dU = U(x + dx) - U(x) = \frac{Kdx}{x}. \qquad (18)$$

Следовательно, при выборе надлежащих единиц числовой полезности можно считать, что $K = 1$ и прирост полезности от обладания суммой x_2 по сравнению с x_1 таким образом равен:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Превышение полезности Δ_{12} от выигрыша конечной суммы η по сравнению с потерей той же суммы есть разность $\Delta_1 - \Delta_2$ (см. рис. 5).

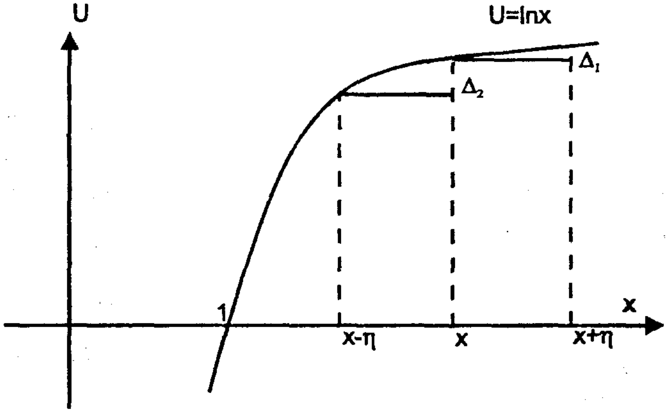


Рис. 5. Логарифмическая функция полезности (x > 0)

Здесь $\Delta_1 = \int_{x}^{x+\eta} \frac{dZ}{Z} = \ell n \frac{x+\eta}{x}, \Delta_2 = \int_{x-\eta}^{x} \frac{dz}{Z} = \ell n \frac{x}{x-\eta}$. Вычитая, найдем:

$$\Delta_{12} = \ell n \frac{x+\eta}{x} - \ell n \frac{x}{x-\eta} = \ell \eta \left(1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right).$$

Таким образом, избыточность $\Delta_{12} < 0$, т. е. при одинаковых выигрышах и потерях последние более ощутимы, чем первые.

И в завершение приведем следующую экономическую сентенцию, заимствованную из А. Смита. "К бережливости нас побуждает желание улучшить наше положение, — говорит А. Смит,— и это желание, в конце концов, оказывается сильнее, чем стремление к наслаждениям, толкающее нас к расходам".

Пример 9. Парадокс Петербургской игры. Прежде чем перейти к нему, рассмотрим конструктивно схожие игры, но без парадокса. Каждая такая игра состоит из серии партий и их число n оговаривается заранее. Перед началом каждой партии игрок уплачивает некоторый взнос μ, так что $n\mu$ — общий уплаченный им взнос. Предполагается, что игрок обладает неограниченным капиталом, т. е. никакой проигрыш не может вызвать окончание игры.

Введем случайную величину X_K как (положительный или отрицательный) выигрыш при К-ом повторении игры. Тогда сумма $S_n = x_1 + ... + x_n$ является суммарным выигрышем при n повторениях игры, а $(Sn - n\mu)$ — общий чистый выигрыш. Пусть для определенности игра проводится машиной, при опускании в которую игроком взноса μ включается вероятностный механизм выигрыша X_K.

Если случайная величина X_K имеет конечное математическое ожидание $m = E(X_K)$, то согласно закону больших чисел среднее значение из n выигрышей оказывается близким к m и весьма правдоподобно, что при больших n разность $(S_n - nm) = n \times \left(\frac{S_n}{n} m\right)$ окажется малой по сравнению с n.

Следовательно, если $\mu < m$, то при больших n игрок будет, вероятно, иметь выигрыш $S_n - n\mu = n\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)$ порядка $n(m-\mu)$.

Понятно, что $n(m - \mu) > 0$. По тем же соображениям взнос $\mu > m$ практически наверняка приводит к убытку.

Для общего случая существует не только $E(X_K)$, но и $D(X_K)$, и закон больших чисел дополняется *центральной предельной теоремой (в курсе теории вероятностей)*. Последняя говорит о том, что весьма правдоподобно, что при $\mu = m$ чистый выигрыш $S_n - n\mu$ будет иметь величину порядка $\sqrt{n}$ и что при достаточно больших n этот выигрыш будет с примерно равными шансами положительным или отрицательным, т. е. игра становится безобидной.

В отличие от представленной схемы *для Петербургской игры* платеж $E(X_K)$ равен бесконечности и, следовательно, к ней нельзя применять закон больших чисел. Иначе говоря, при назначенном взносе μ невозможно выяснить, будет ли она для играющего благоприятной, убыточной или безобидной, и это несмотря на то, что ожидаемый выигрыш сулит бесконечность.

Тем не менее этот парадокс можно разрешить, вводя функцию полезности (17), т. е. предполагая, что отношение игрока к деньгам описывается гипотезой (18). Покажем, как это делается.

Начнем с того, что познакомим читателя с самой игрой. В ней участвуют двое. Петр собирает взносы и реализует механизм случайного выигрыша по партиям: бросает монету раз за разом, пока она не выпадет "орлом". Он обязуется платить Павлу 2 дуката, если "орел" выпадет при первом бросании, 4 дуката — если при втором, 8 — если при третьем и так далее, так что каждый неудачный для него бросок удваивает величину платежа. Предположим, что мы хотим определить ожидаемый результат Павла.

Испытание (партия) Петербургской игры состоит в бросании правильной монеты до тех пор, пока не выпадет "орел". Если это случится на r-ом бросании, то игрок получает 2^r дукатов. Другими словами, "партийный" выигрыш представляет собой случайную величину, принимающую значения 2^1, 2^2, 2^3, ... с вероятностями 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3} ... соответственно.

Математическое ожидание формально определяется суммой

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} x_r f(x_r)$, в которой $x_r = 2^r$ и $f(x_r) = 2^{-r}$, так что каждое слагаемое равно единице.

Разумеется, что здесь x_r — r-е значение случайной величины **x** независимо от номера партии. Таким образом, конечного математического ожидания не существует и закон больших чисел "не работает".

Заметим, что классическая теория, основываясь на измененной игре (игрок не получает ничего, если при испытании произойдет более чем N бросаний), получала для нее конечное математическое ожидание выигрыша. После чего, с помощью довольно громоздких и не совсем строгих рассуждений, ею при $N \to \infty$ делался вывод о том, что взнос $\mu = \infty$ является "безобидным".

Между тем от парадокса бесконечности вполне возможно уйти, если оценивать результат не в деньгах, а в единицах полезности. При таком подходе "истинная ценность" выигрыша измеряется его ожидаемой полезностью:

$$E(U(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} U(x_r) f(x_r), \qquad (19)$$

где согласно (17) $U(x_r) = \log_2 x_r$, а значения $x_r = 2^r$ принимаются с вероятностью $f(x_r) = 2^{-r}$. Подставляя эти обозначения в (19), получим, что:

$$E(U(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r}. \qquad (20)$$

Пусть $a_r = \dfrac{r}{2^r}$, тогда $\lim \dfrac{a_{r+1}}{a_r} = \dfrac{1}{2} < 1$, т. е. выполняется признак сходимости бесконечного ряда $\{a_r\}$. Отсюда вытекает, что ожидаемая полезность (20), равная сумме U^* этого ряда, будет конечной: $E(U(x)) = U^*$.

Павел оценивает свой взнос μ в единицах полезности и потому его чистый результат определяется разностью $(S_n - n\log_2\mu)$, где $S_n = U(x_i) + \ldots + U(x_n)$ и при больших n $\dfrac{Sn}{n} \approx U^*$.

Короче, случай $\log_2\mu < U^*$ ($\mu < 2^{U^*}$) благоприятен для Павла, а случай $\log_2\mu > U^*$ ($\mu > 2^{U^*}$) неблагоприятен; при $\mu = 2^{U^*}$ получим безобидную Петербургскую игру при шансах 50% на 50% с чистым выигрышем порядка $\sqrt{n}$.

Известны и другие приемы разрешения Петербургского парадокса; из них наиболее близкий к изложенному здесь основан на введении переменного взноса $\mu = \log_r n$ и видоизмененной записи закона больших чисел.

Несмотря на игровой характер, этот пример имеет прямое отношение к современной финансовой теории, поскольку в нем выясняется, сколько следует платить за обладание рисковым активом, причем с учетом индивидуального отношения к риску. В данном примере переход от полезности азарта ($U(x) = x$) к осторожности ($U(x) = \log_2 x$) позволил получить ответы на все поставленные вопросы.

Ступенчатая функция полезности дохода

Инвестор с начальным капиталом W получает случайный доход R. За меру риска его деятельности можно принять вероятность разорения. Тогда вероятность противоположного события (неразорения) является, как легко уяснить, математическим ожиданием в виде следующей ступенчатой случайной величины (рис. 6):

$$U(R) = \begin{cases} 1, \text{если } R + W \geq 0 \\ 0, \text{если } R + W < 0, \end{cases} \qquad (21)$$

принимаемой за функцию полезности в задаче о разорении.

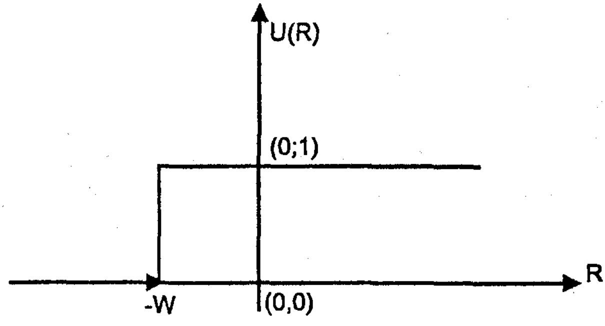


Рис. 6. Функция полезности в задаче о разорении

В самом деле, по определению математического ожидания,

$$E(U(R)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(R)\,f(R)dR,$$

где $f(R)$ — плотность распределения вероятностей случайного дохода R. Для ступенчатой функции полезности (21) эта характеристика равна

$$E(U(R)) = \int_{-W}^{\infty} f(R)dR = P(R \geq -W) = P(R+W \geq 0),$$

то есть определяет вероятность того, что полученный доход будет не меньше –W, иначе говоря, начального капитала W хватит, чтобы покрыть убытки ($W \geq -R$).

Таким образом, стремление инвестора к максимизации ожидаемой полезности (21) побуждает его к поиску таких решений, которые дают максимум вероятности неразорения.

Для прикладного использования функции полезности (21), например, при диагностировании финансовой устойчивости, приходится получать выражение случайного дохода R в зависимости от влияющих факторов, например, для банка — процентного дохода в зависимости от объемов и структуры пассивов и активов, и сравнивать его с собственным капиталом W.

9. Функция полезности карты кривых безразличия

Вначале дадим несколько предварительных соображений. Естественно считать, что при выборе из доступных альтернатив инвестор сравнивает их между собой, руководствуясь ожидаемым доходом и риском. Не склонный к риску финансист заведомо отбраковывает невыгодные по данным показателям варианты.

Например, предоставлена возможность выбора между вложениями в два вида ценных бумаг, причем $m_1 > m_2$, а $\sigma_1 \le \sigma_2$, то, конечно, любой разумный инвестор вложит деньги в 1-й вид. Если, напротив, $m_1 \le m_2$, а $\sigma_1 > \sigma_2$, то инвестор выберет 2-й вид, поскольку с ним связана меньшая неопределенность, а по доходности он не уступает.

Но в общем случае, когда:

$$m_1 < m_2, \ \ \sigma_1 < \sigma_2$$

$$(\text{или } m_1 > m_2, \ \sigma_1 > \sigma_2),$$

однозначного разумного решения нет. Инвестор может предпочесть вариант с большим ожидаемым доходом, связанным, однако, с большим риском, либо вариант с меньшим ожидаемым доходом, но более гарантированным и менее рискованным.

Типы кривых безразличия в зависимости от отношения к риску

Выбор, который делает инвестор, во многом зависит от свойств его характера; от его склонности к риску; от того, сколькими порциями дохода он готов пожертвовать ради упрочения надежности в его получении и каков для него эффект замещения рисков доходами.

Эти рассуждения подразумевают наличие у инвестора некоторой функции U (σ, m), с помощью которой он может анализировать варианты, причем предпочтение отдается варианту с большим значением этой функции. При существовании такой зависимости эквивалентные варианты будут определяться из уравнения:

$$U(\sigma, m) = C.$$

Это уравнение неявным образом задает σ как функцию m при фиксированной правой части C. График этой функции соединяет все точки данного уровня полезности и называется ***кривой безразличия уровня С***. Для различных значений уровня получим карту кривых безразличия, и задача инвестора будет состоять в том, чтобы, исходя из своих бюджетных возможностей, подобраться к кривой безразличия с максимально возможным уровнем С.

Можно сказать, что полезность кривой безразличия для инвестора тем выше, чем больше уровень С. Этим и объясняется название рассматриваемой зависимости U (σ, m) как функции полезности карты кривых безразличия, или, кратко, *уровневой функции полезности.*

Как и для функции полезности дохода (рис. 2), строение типовых уровневых кривых полезности зависит от "темперамента" субъекта. На рис. 7 изображены карты типовых кривых безразличия для нерасположенных (а), равнодушных (б) и склонных к риску (в).

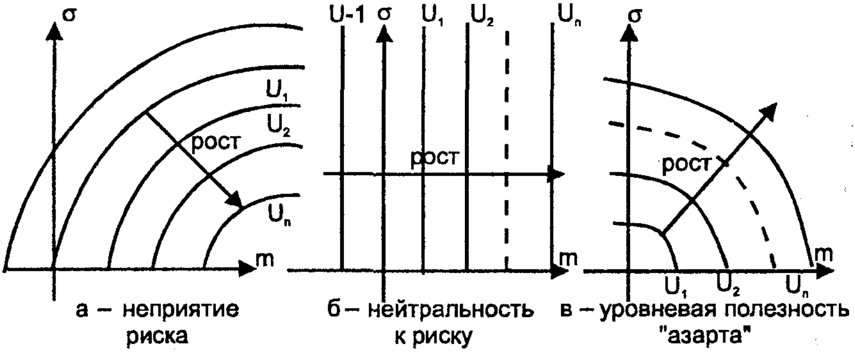


Рис. 7. Три типа кривых безразличия (U1 < U2 < ... < Un...)

Графики наглядно демонстрируют, что характер этих кривых отражает модели разных типов восприятия рисков. Инвестор (а), двигаясь по кривой безразличия, сохраняет уровень полезности своих вложений, компенсируя более высокий риск приростом ожидаемого дохода и по мере восхождения требует на каждую дополнительную единицу риска все большей компенсации.

Субъект (в) по натуре "безрассудный" игрок и ради риска готов "карабкаться" по кривой безразличия вверх вопреки потерям ожидаемого дохода.

Пример модели промежуточного поведения показывает инвестор (б): он безразличен к неопределенности σ и для него, чем крупнее ожидаемый выигрыш m, тем будет лучше, вне зависимости от сопровождающих этот выигрыш рисков.

При фиксированном доходе m и снижающемся риске полезность инвестиций у (а) растет, для (в) — падает, а в случае (б) — не меняется (рис. 7).

Уровневая функция полезности, выводимая из полезности Неймана-Монгенштерна

Рассмотрим квадратичную функцию полезности, отличающуюся от функции (16) наличием свободного члена, и возьмем его таким, что:

$$U(R) = aR + b(R - E(R))^2, \ (b < 0). \qquad (22)$$

Запись функции полезности Неймана-Монгенштерна (ФП Н.-М.) в форме (22) более наглядна, нежели в функции (16): инвестор считает полезным для себя увеличить доход R, но избегает при этом его отклонений от прогнозного значения E(R). Чем больше $|b|$, тем сильнее проявляется тенденция к снижению рисков-уклонений, связанных со случайностью, таким образом, $\frac{1}{|b|}$ ассоциируется с показателем склонности к риску. Переходя в функцию (22) к ожидаемой полезности, получим *уровневую* ФП Н.-М:

$$U\,(m,\sigma) = am + b\sigma^2, \qquad (23)$$

где $m = E(R)$, $\sigma^2 = E(R - E(R))^2$, $U\,(m, \sigma) = E(U(R))$.

Можно сказать, что как критерий максимизации выражение (23) представляет свертку двух критериев: максимума ожидаемого дохода m и минимума риска σ^2.

Подчеркнем, что функция полезности карты кривых безразличия (23) и функция полезности дохода (22) однозначно связаны друг с другом. Отсюда понятно, что решения инвестиционных задач, полученные по любой из этих функций, должны совпасть, а кривые безразличия можно рассматривать либо как траекторию постоянной полезности U (m,σ), либо как траекторию постоянной ожидаемой величины полезности Н.-М. E[U(x)].

Пример 10. Используя данные *примера 8*, убедимся, что ФП (23) приводит к тому же результату, что и ФП (16). В нашем случае:

$$U\,(m, \sigma) = E(U(R)) = 1{,}2\ E(R) - 0{,}1\ E(R)^2.$$

Отсюда, применяя известную формулу $\sigma^2(R) = E(R^2) - E^2(R)$, получим

$$U(m, \sigma) = 1{,}2m - 0{,}1\,m^2 - 0{,}1\sigma^2. \qquad (24)$$

Сравним значения этой функции, используя характеристики первого и второго портфелей из примера 8. Эти портфели сулят нулевые ожидаемые доходы ($m_1 = m_2 = 0$), и поскольку второй портфель безрисковый, то $\sigma_2^2 = 0$. Дисперсию дохода для первого (рискового) портфеля сосчитаем, воспользовавшись рядом распределения из примера 8:

$$\sigma_1^2 = 0{,}5(-4)^2 + 0{,}5 \cdot (4)^2 = 16.$$

Вычислим уровневые полезности каждого портфеля:

$$U_1 = U(m = 0, \sigma_1 = 4) = -0{,}1 \cdot 4^2 = -1{,}6;\ U_2 =$$

$$= U(m = 0, \sigma_2 = 0) = 0.$$

$U_2 > U_1$, поэтому, как и в примере 8, следует выбрать **безрисковый** портфель (рис. 8).

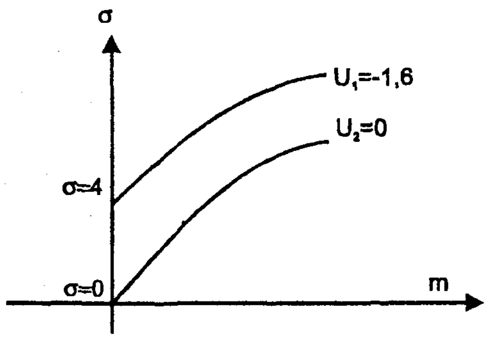


Рис. 8. Кривая безразличия, на которой лежит второй портфель, расположена выше. Уровень кривой безразличия совпадает с ожидаемой величиной полезности дохода вдоль нее (см. пример 8)

Пример 11. Рассмотрим простейшую задачу портфельных инвестиций и решим ее двумя способами: максимизируя ожидаемую полезность и с помощью уровневой функции полезности.

Итак, имеются два актива со случайными эффективностями R_1, R_2. Возможные значения этих эффективностей и их вероятности сведены в таблицу:

вероятности (ρ)	0,2	0,8
R1	5%	1,25%
R2	−1%	2,75%

Пусть функция полезности инвестора

$$U(R) = 1{,}2R - 0{,}1R^2. \qquad (25)$$

Будем искать оптимальные пропорции x_1, x_2 ($x_1 + x_2 = 1$) составного актива по критерию ожидаемой полезности.

При этом способе полезность составного актива выступает как случайная величина со значениями, зависящими от долей x_1 и x_2. Комбинируя эти значения полезности с заданными вероятностями (p), придем к математической постановке интересующей нас задачи максимизации.

Чтобы воспользоваться этой схемой, запишем ряд распределения случайной эффективности смеси (составного актива):

вероятности (p)	0,2	0,8
доход "смеси" (R)	$5x_1 + (-1)(1 - x_1) = 6x_1 - 1$	$1{,}25x_1 + 2{,}75(1 - x_1) = 2{,}75 - 1{,}5x_1$

От него с помощью функции(25) легко перейти к ряду распределения случайных значений полезности U(R):

вероятности (p)	0,2	0,8
полезность (U(R))	$U_1(x_1) = 1{,}2(6x_1 - 1) - 0{,}1(6x_1 - 1)^2$	$U_2(x_1) = 1{,}2(2{,}75 - 1{,}5x_1) - 0{,}1(2{,}75 - 1{,}5x_1)^2$

и найти:

$$E(U(R)) = 0{,}2U_1(x_1) + 0{,}8U_2(x_1). \qquad (26)$$

Дифференцируя это выражение по x_1, получим уравнение:

$0{,}2(1{,}2 \cdot 6 - 0{,}2(6x_1 - 1)6) + 0{,}8\ (-1{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}2(2{,}75 - 1{,}5x_1)(-1{,}5)) = 0$,

из которого найдем, что $x_1 = 0{,}5$, т. е. в каждый актив следует вложиться половиной наличности. Вычисляя (26) при $x_1 = 0{,}5$, найдем, что максимум ожидаемой полезности равен двум: $\max E(U(R)) = 0{,}2U_1(0{,}5) + 0{,}8U_2(0{,}5) = 2$.

Решим ту же задачу, опираясь на уровневую функцию полезности (24), выводимую из функции полезности инвестора (25). Для оптимизации по данному методу необходимо выразить ожидаемую доходность смеси и дисперсию этой доходности через неизвестные x_1 и x_2.

В примере 2 эти активы уже фигурировали и там было установлено, что $m_1 = m_2 = 2$ и $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = 2{,}25$ и $\sigma_{12} = -1$. Отсюда легко получить характеристики составного актива: $m = 2$, $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 - 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 = 2{,}25(2x_1 - 1)^2$.

Подставляя эти формулы в функцию (24), получим следующую задачу максимизации:

$$2 - 0{,}1 \times 2{,}25(2x_1 - 1)^2 \xrightarrow[x_1]{} \max, \qquad (27)$$

которая имеет очевидное решение $x_1 = 0{,}5$, что совпадает с ответом, найденным первым методом. Максимальный уровень, т. е. значение критерия (27) на оптимальном решении $x_1 = 0{,}5$, тот же, что и у максимума ожидаемой доходности — 2.

Кривая безразличия для уровневой ФП Н.-М.

Ее уравнение выводится из ФП Н.-М. (23) и имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{c - am}{b}}, \text{ где } m \ge \frac{c}{a}.$$

Этой зависимости соответствует карта кривых безразличия, изображенных на рис. 9.

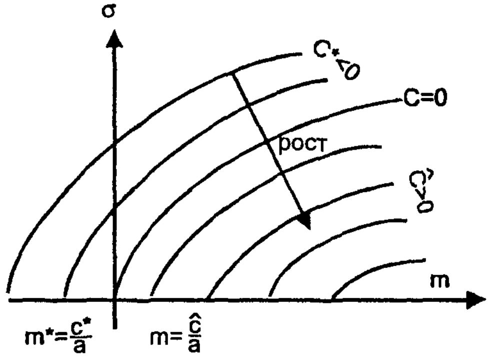


Рис. 9. Кривые безразличия уровневой функции полезности

Как видим, характер полученных кривых согласуется с линиями уровня, нанесенными на рис. 7 для случая а) (неприятие риска).

10. Снижение риска

Данная глава вводит читателя в ту область финансовой теории, которая занимается рисками. Чтобы не нарушить логики подачи материала, нам пришлось отказаться от обильного текстоемкого изложения конкретных финансовых инструментов и схем, направленных на снижение риска (фьючерсы, опционы и т. д.). Все это, как нам кажется, вполне подробно изложено в специальной литературе и финансовой периодике.

Есть еще, конечно, накопленный опыт у различных финансовых институтов: коммерческих банков, инвестиционных компаний и пр. Однако в рыночных условиях его распространение сдерживается по той простой причине, которая в научных терминах именуется принципом технологической замкнутости. В этом, в частности, заключается не последний довод для автора в пользу изложения не набора одиночных сведений, а концептуальных положений и базовых понятий, необходимых в том числе и для освоения последующего материала.

И в завершение несколько слов *о задаче снижения риска*. Общая постановка проблемы исследования финансовых операций обязательно включает два основополагающих критерия: ожидаемый финансовый результат и риск. Оперирующая сторона может влиять на числовые значения этих критериев, учитывая изменения контролируемых переменных и собственные возможности управления некоторыми из них.

В свою очередь, неконтролируемые параметры находятся вне сферы действия и знаний того, кто разрабатывает и принимает решения по финансовой операции. Их учет возможен лишь на основе использования игровых принципов, в частности гарантированного результата, или прибегая к помощи ситуационного анализа.

Отсюда ясно, что снизить риск, оставаясь на уровне приемлемого финансового результата, можно за счет расширения состава контролируемых параметров, иначе говоря, за счет добавочной информации. Вместе с тем такое расширение должно быть экономически оправданным, т. е. *цена добытых сведений не должна перекрывать выигрыш от их использования.*

Еще одно очевидное положение заключается в том, что успех финансовой схемы во многом зависит от тех конструктивных элементов, из которых она складывается. Отсюда вытекают еще два общеизвестных принципа ограничения риска: *диверсификация* и *страхование.*

Диверсификация предполагает включение в финансовую схему различных по своим свойствам активов. Чем их больше, тем, в силу закона больших чисел, значительнее (из-за взаимопогашения рисков-уклонений) их совместное влияние на ограничение риска. Подробнее этот эффект будет обсуждаться в следующей главе, посвященной оптимальному портфелю ценных бумаг.

В случае риска разорения используют ***страхование*** (перенесение убытков на других лиц с помощью гарантий), но это уже ближе к проблемам страхового дела и актуарной математики. В финансовом анализе в смысле страхования зачастую употребляют также термин ***хеджирование***, имея при этом в виду любую схему, позволяющую ограничить риск.

Так, если инвестор сознательно использует противоположную реакцию разных ценных бумаг на одно и то же событие, то говорят, что он применяет хеджирование. В этом смысле можно сказать, что *хеджирование есть специальный случай диверсификации*.

Упомянем еще один из основных приемов борьбы с рисками, основанный на их распределении между большим количеством лиц. Здесь уже имеет место не диверсификация вклада по активам, а ***диверсификация актива по вкладам*** ("диверсификация наоборот"), например, совместное инвестирование одного проекта разными лицами (инвестпуллы).

Пример 12. Влияние информированности на степень риска финансовой операции проиллюстрируем историческим эпизодом, приведенным А. Толстым в романе "Черное золото". Но прежде ознакомим читателя с понятием "асимметричной информации". Упомянутая в названии "асимметрия" означает различную степень информированности, например, участников финансового рынка. В результате тот, кто полнее осведомлен, получает конкурентные преимущества и может рассчитывать на более высокие финансовые результаты.

Именно так случилось с бароном Ротшильдом — величайшим финансовым игроком на рынке ценных бумаг — @ему повезло быть поблизости от битвы при Ватерлоо. Узнав о неожиданном разгроме Наполеона, он в утлой лодчонке, ночью, переплыл бурный Ла-Манш, загнал десяток лошадей, но поспел к открытию Лондонской биржи и встал на своем квадрате у колонны. Одежда его была в пыли, борода растрепана, глаза блуждали. Он униженно протягивал для продажи английские бумаги — это могло означать только то, что Наполеон вышел победителем при Ватерлоо. Началась паника, английские ценные бумаги полетели вниз, а тайные маклеры Ротшильда скупали их до того часа, когда решетчатые крылья оптического телеграфа принесли истинную весть о полном торжестве англичан. К вечеру этого дня Ротшильд стал самым богатым человеком в Европе".

Пример 13. Исключение риска с помощью страховки. Предположим, что владелец имеет недвижимость в сумме 50000 долл. Вероятность того, что он понесет имущественные убытки в 10000 долл. составляет 0,1. Если стоимость страховки равна возможному убытку (т. е. страхование с точки зрения статистики обосновано) — страховой полис на покрытие возможного убытка в 10000 долл. будет стоить $10000 \cdot 0{,}1 = 1000$ долл.

В таблице показаны два варианта отношения к материальному имуществу: страховать его или нет.

Страхование	Вероятность потерь 0,1	Вероятность отсутствия потери 0,9	Ожидаемый размер имущества	Риск
нет	40000	50000	m1 = 49000	σ1 = 3000
да	49000	49000	m2 = 49000	σ2 = 0

Здесь $m_1 = 0{,}1 \cdot 40000 + 0{,}9 \cdot 50000 = 49000$. Абсолютный риск ($\sigma$), измеренный среднеквадратичным отклонением, составит:

$$\sigma_1 = \sqrt{0{,}1 \times 9^2 \times 10^6 + 0{,}9 \times 10^6} = 3000,$$

а относительный риск, измеренный коэффициентом вариации, будет равен: $\eta_1 = \dfrac{\sigma_1}{m_1} = 0{,}06$.

Ясно, что при одном и том же ожидаемом состоянии материального имущества (полная компенсация потерь при страховом возмещении за вычетом стоимости полиса) страхование полностью исключает риск. Что бы ни случилось, благосостояние в любом случае будет на одном и том же уровне — 49000.

На этом рассмотрение примеров закончим, имея в виду, что диверсификация риска будет дана в следующей главе.

ЧАСТЬ IV. Задача об оптимальном портфеле ценных бумаг

Этот раздел нашего пособия посвящен проблемам, стоящим перед инвестором, формирующим портфель ценных бумаг. Вначале дадим общую математическую постановку задачи оптимизации портфеля, составляемого только из рисковых компонент (ценных бумаг).

Затем для наглядности изучим "облегченный" двувидовой портфель. Изменения портфельных свойств при добавлении безрискового актива и доказательство теоремы об инвестировании в два фонда рассмотрим на примере трехкомпонентного портфеля.

Далее охарактеризуем особенности, которые появляются при переходе к большеразмерному случаю (многокомпонентному портфелю). В заключение исследуем вопрос о соответствии оптимального состава портфеля инвестора структуре ценных бумаг, обращающихся на фондовом рынке, т. е. портфелю рынка.

1. Модель задачи оптимизации рискового портфеля

Обозначим через x_j, $j = 1, ..., n$ — долю в общем вложении, приходящуюся на j-й вид ценных бумаг, так что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \qquad (28)$$

Эффективность портфеля:

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j, \qquad (29)$$

где R_j — случайные эффективности с известными математическими ожиданиями $E(R_j) = m_j$ и дисперсиями $D(R_j) = \sigma_j^2$.

Не расположенный к риску инвестор действует в соответствии с теоремой Н.-М, составляя портфель таким образом, чтобы максимизировать математическое ожидание полезности (16) дохода R_p. Очевидно, по общему свойству задач условной оптимизации, что с расширением выбора (29) (при росте n) шансы на более высокий уровень ожидаемой полезности увеличиваются, т. е. ему и в самом деле приходится решать портфельную задачу. Из предыдущего материала мы знаем, что к одинаковому оптимальному результату можно прийти, пользуясь вместо (16) уровневой функцией полезности U (m, σ) (23).

В качестве целевой эту функцию, как уже отмечалось, можно рассматривать как скаляризацию двухкритериальной задачи оптимизации с ограничением (28) и критериями $E(R_p) \to \max$, $D(R_p) \to \min$. Чтобы записать эту задачу через неизвестные $\{x_j, j = \overline{1,n}\}$, нам придется воспользоваться правилами теории вероятностей для получения ожидаемого значения и дисперсии случайной эффективности R_p. Переходя к математическому ожиданию суммы (29), получим формулу ожидаемого эффекта:

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j m_i .$$

Для записи дисперсии воспользуемся определением ковариации двух случайных величин R_i и R_j:

$$V_{ij} = E((R_i - m_i)(R_j - m_j)).$$

Отклонение от ожидаемого значения определится следующим образом:

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \ (R_j - m_j).$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения есть дисперсия эффекта портфеля:

$$V_p = E((R_p - m_p)^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j E((R_i - m_i)(R_j - m_j)) = \sum_{i} \sum_{j} V_{ij} x_i x_j$$

Очевидно, что:

$$V_{ii} = E((R_i - m_i)^2) = \sigma_i^2,$$

т. е. V_{ii} являются дисперсиями R_i.

Модель двухкритериальной оптимизации портфеля инвестора

Суммируя записанные выше отдельные элементы формализации, придем к следующей оптимизационной задаче, которую решает инвестор:

$$m = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j \to \max \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad (36)$$

Если инвестор *только покупает* ценные бумаги, то добавляется *условие неотрицательности* $x_j \geq 0$.

Для инвестора, который готов участвовать *в операциях типа коротких продаж* (short-sale), что равносильно взятию в долг суммы $(-x_j)$ под случайную ставку R_j, *неизвестные* x_j *могут быть любого знака*. Подобное заимствование сводится к тому, что инвестор продает акции, которых у него нет и которые он обещает поставить на оговоренную дату. При этом он назначает цену продажи, исходя из оценки будущего курса.

На дату поставки инвестор приобретает акции на реальном рынке и закрывает свои обязательства. Из-за возможного несоответствия цены приобретения ожиданиям инвестора вся операция сопряжена с риском процентной ставки Rj, учитываемой в модели характеристиками m_i, σ_i^2.

Мы здесь не даем схемы коротких продаж, т. е. продаж ценных бумаг, которых в данный момент нет, рекомендуя обратиться к специальной литературе. Для нас важно только то, что если некоторые переменные x_j окажутся отрицательными, то это будет означать, что по данным позициям следует участвовать в подобных операциях.

Очевидно, что точка $(x_1,\ldots x_n)$, доставляющая максимум полезности U (m, σ), принадлежит множеству таких допустимых точек задачи (30), которые не могут быть улучшены сразу по двум критериям — m и σ. В теории многокритериальной оптимизации такие решения называются *Парето-оптимальными*, или эффективными.

Чтобы пояснить смысл этого понятия, представим себе контур, соединяющий точки с координатами m, σ, вычисленными для допустимых точек некоторого "условного" множества **x** (рис. 1).

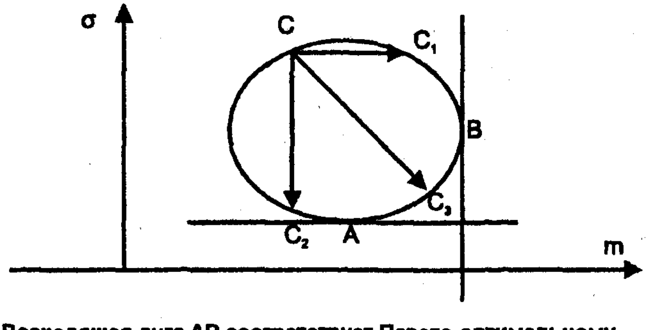


Рис. 1. Восходящая дуга AB соответствует Парето-оптимальному множеству решений

Множеству эффективных точек соответствует восходящая дуга АВ: для любой посторонней точки, например С, можно построить улучшающую ее точку (*) в том смысле, что либо $m^* > m$, $\sigma^* = \sigma$ (точка C_1), либо $m^* = m$, $\sigma^* < \sigma$ (точка C_2), либо $m^* > m$, $\sigma^* < \sigma$ (точка C_3), а для "своих" точек этого сделать нельзя.

В связи с этим ясно, что поиск оптимального по критерию полезности U (m, σ) портфеля можно проводить в два этапа: *вначале*, решая задачу (30), найти множество эффективных портфелей, а *затем* из этого множества отобрать портфель с максимальным уровнем полезности. Очевидно, что это может быть сделано с помощью множества эффективных точек.

Для решения задачи первого этапа воспользуемся известным методом сведения многокритериальных задач к однокритериальным. Его суть состоит в замене критерия ограничивающим его значение условием.

Однокритериальная модель эффективного портфеля

Задавшись уровневым ограничением m_p на величину критерия ожидаемого эффекта, сведем двухкритериальный выбор (30) к следующей однокритериальной задаче оптимизации *Т. Марковица.*

Найти доли x_j распределения исходного капитала, минимизирующие вариацию эффективности портфеля:

$$V_p = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j \qquad (31)$$

при условии, что обеспечивается заданное значение m_p ожидаемой эффективности, то есть:

$$\sum_j m_j x_j = m_p\,, \qquad (32)$$

и выполняется бюджетный баланс:

$$\sum_j x_j = 1. \qquad (33)$$

Решение этой задачи обозначим знаком *. Если $x_j^* > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_j^* наличного капитала в ценные бумаги вида j.

Если $x_j^* < 0$, то это означает рекомендацию участвовать в операции типа коротких продаж (short-sale), что позволит добавить к собственному капиталу величину заемного $(-x_j^*)$.

При этом, несмотря на потерю процентов $m_j x_j^*$, общий выигрыш инвестора возрастет. Математически это следует из расширения допустимого множества задачи, а по экономической сути объясняется тем, что выигрыш за счет дополнительно приобретенных на занятые деньги бумаг превышает издержки по операциям short-sale. Если таковые операции невозможны, то приходится вводить дополнительное требование: значения x_j не должны быть отрицательными.

Решение задачи о максимально полезном портфеле

Чтобы перейти ко второму этапу — поиску портфеля наивысшей пользы, необходимо получить множество эффективных точек x^*, решая задачу Г. Марковица при разных значениях m_p.

В плоскости портфельных характеристик m_p, $\sigma_p{}^*$ найденным эффективным точкам будет соответствовать соединяющая их кривая, которая называется ***траекторией эффективных портфелей***, или, кратко, эффективной траекторией.

Полезно подчеркнуть, что, *во-первых*, множество эффективных портфелей составляет подмножество множества допустимых портфелей и, *во-вторых*, что на эффективной траектории допустимые портфели являются одновременно и эффективными в том смысле, что они дают минимальный риск при фиксированной ожидаемой доходности или максимальную ожидаемую доходность при данном риске. В дальнейшем мы обоснуем вид эффективной траекторией, условно показанный на рис. 2.

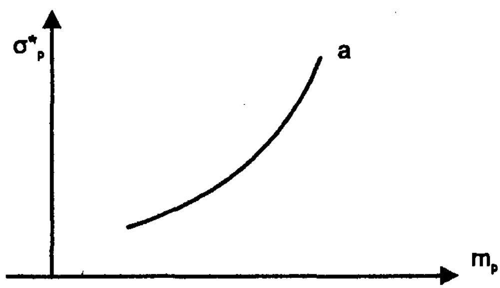


Рис. 2. Изменение минимального риска с ростом требуемой ожидаемой эффективности портфеля

Имея кривую а, инвестор находит на ней точку m_A, σ_A, в которой полезность U (m, σ) максимальна, и вслед за этим устанавливает оптимальный для себя портфель как решение x^* задачи

(31 — 33) при $m_p = m_A$. Пользуясь картой кривых безразличия (рис. 9 на с. 90), представим это решение графически, как показано на рис. 3.

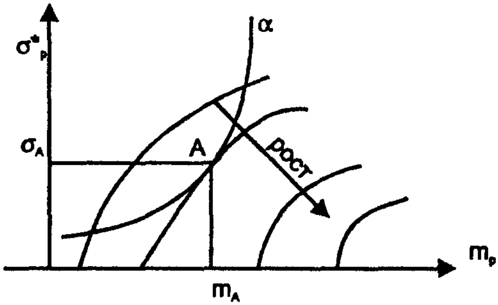


Рис. 3. Графическое решение задачи о максимально полезном рисковом портфеле

Влияние диверсификации вклада на снижение риска

Мы уже упоминали об этом эффекте в конце предыдущей главы в связи с задачей ограничения риска. Настало время обсудить его (эффект диверсификации) более подробно. Предположим сначала, что инвестор формирует портфель из тех видов ценных бумаг, случайные доходности которых взаимно независимы, а следовательно, и некоррелированы, т. е. $V_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Желая получить портфель с ожидаемым эффектом m_p, равным приемлемой для инвестора величине M, он может ограничить свой выбор таким набором из n видов ценных бумаг, для которых $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j = M$. Для такого инвестора задача (31 — 33) примет следующий вид:

$$\max\left(V_p = \sum_j x_j^2 \sigma_j^2 / \sum_j m_j x_j = \frac{1}{n}\sum_j m_j, \sum_j x_j = 1\right). \qquad (34)$$

Ранее в качестве одной из числовых мер риска нами рассматривалось среднеквадратическое отклонение. В модели (34) эта величина представлена выражением:

$$\sigma_p = \left(\sum_j x_j^2 \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

и характеризует риск, связанный с инвестированием в портфель ценных бумаг. Зачастую этот риск так и именуют — ***"риск портфеля"***.

Очевидно, что вектор x с одинаковыми компонентами $x_j = \frac{1}{n}$ дает допустимое решение задачи (34). Известно, что значение критерия $\sigma_p{}^* = \sqrt{V_p}{}^*$ на оптимальном решении x* не может превысить величину:

$$\sigma_p = \left(\frac{1}{n^2} \sum \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \left(\sum_j \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\bar{\sigma} = \max_j \sigma_j$, тогда:

$$0 < \sigma_p{}^* \le \sigma_p \le \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

т. е. при росте числа n видов ценных бумаг, включаемых в портфель, риск эффективного портфеля (34) ограничен и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Отсюда вытекает ***главное практическое правило финансового рынка***: для повышения надежности эффекта от вклада в рискованные ценные бумаги целесообразно делать вложения не в один их вид, а составлять портфель, содержащий возможно большее разнообразие ценных бумаг, эффект от которых случаен, но случайные отклонения независимы.

Однако в реальности большого разнообразия достичь трудно, поскольку *гипотеза независимости эффектов в достаточной степени условна* и ограничивает возможности подобного расширения: технологическая сопряженность и экономическая взаимозависимость хозяйствующих субъектов естественным образом проявляются в статистическом взаимодействии случайных эффективностей ценных бумаг.

Отметим также, что с *практической* точки зрения выгоды от масштабной диверсификации далеко не бесспорны: ее экономически обоснованные размеры ограничиваются влиянием *тран-*

сакционных издержек. С ростом числа сделок эти издержки делают включение в портфель малых партий большого числа активов неоправданно дорогим занятием.

Пример 14. Рассмотрим условную ситуацию, когда инвестор может формировать портфель из различных видов ценных бумаг, эффективности которых взаимно некоррелированы.

Ожидаемые значения эффективностей и их среднеквадратичных отклонений приведены в таблице:

j	1	2	3	4	5	6
mj	11	10	9	8	7	6
σj	4	3	1	0,8	0,7	0,7

Если инвестор вложит свой капитал поровну в ценные бумаги только первых двух видов, то ожидаемая эффективность портфеля $m_p = 1/2(11 + 10) = 10,5$ окажется чуть меньше, чем покупка только 1-го вида, но зато среднеквадратичное отклонение портфеля $\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2} = 2,5$ окажется меньшим, чем у наименее "рискового" из этих двух видов ($2,5 < \min(4; 3)$).

В следующей таблице показаны ожидаемые эффективности и среднеквадратичные отклонения портфелей, составленных поровну из первых двух, трех и т. д. ценных бумаг, с характеристиками из 1-й таблицы.

N	2	3	4	5	6
mp	10,5	10	9,5	9	8,5
σp	2,5	1,7	1,23	1,04	0,87

Ясно, что диверсификация позволила снизить риск почти втрое при потере ожидаемой эффективности всего на 20%.

2. Эффективные портфели из двух активов

Предлагаемые модели в значительной мере иллюстративны. В силу своей простоты они позволяют записать решения в явном виде и наглядно пояснить результаты общего случая. Кроме того, будет проведен анализ задачи с двувидовым портфелем с безрисковой составляющей. Его результаты потребуются нам при изложении *модели Д. Тобина,* которая отличается от задачи Г. Марковица (31 – 33) тем, что учитывает возможность привлечения безрисковых ценных бумаг, скажем, купонных облигаций, имеющих гарантию со стороны государства и покупаемых по номинальной стоимости.

Эффективная траектория для рискового портфеля

В дальнейшем нам потребуется формула *парного коэффициента корреляции* (нормированного показателя степени статистической связи):

$$r_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

где V_{ij} — ковариация двух случайных величин R_i, R_j. Рассмотрим возможность комбинирования в портфеле двух видов рисковых ценных бумаг с характеристиками $(m_1, \sigma_1) < (m_2, \sigma_2)$. Запишем соотношения (31), (32), (33), полагая $n = 2$:

$$V_p = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2,$$

$$m_p = m_1x_1 + m_2x_2, \quad x_1 + x_2 = 1. \qquad (35)$$

В этом случае при каждом заданном значении m_p получается, в силу уравнений (32), (33), единственный допустимый портфель (точка А на рис. 4).

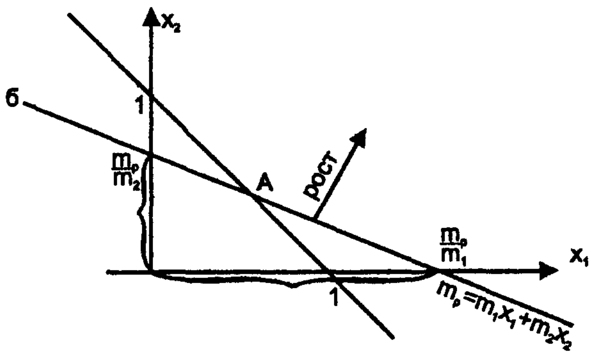


Рис. 4. Единственность допустимого портфеля при n = 2

При повышательном движении прямой "б" можно выйти на допустимые точки со сколь угодно высоким уровнем m_p, что достигается с помощью коротких продаж по первому активу ($x_1 < 0$, $x_2 > 1$).

Исключая x_2, преобразуем (35) к следующему виду:

$$V_p = \sigma_p^2 = (\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\, x_1^2 + \\ + 2\sigma_2(r_{12}\sigma_1 - \sigma_2)x_1 + \sigma_2^2 \qquad (36)$$

$$m_p = (m_1 - m_2)\, x_1 + m_2.$$

Характеристика m_p линейно зависит от x_1. Поэтому $\sigma_p^2(m_p)$ — неотрицательная квадратичная функция от m_p, причем ее график при нулевом дискриминанте квадратного трехчлена (36) касается горизонтальной оси. Этот дискриминант $D = 4\sigma_2^2\sigma_1^2(r_{12}^2 - 1)$.

Отсюда следует, что нулевой риск можно получить только при комбинации активов с полной положительной или отрицательной корреляцией: $r_{12} = \pm 1$. Для $r_{12} = -1$, когда эффективности меняются разнонаправленно, этот вывод согласуется со здравым смыслом и был ранее отмечен в примере 11.

Для плюсовой единичной корреляции безрисковый портфель можно получить сочетая "закупки" одного из активов с короткими продажами другого, что с учетом поменявшей знак переменной фактически меняет корреляцию на обратную.

Понятно, что для достаточно больших m_p, достигаемых с помощью операции "short-sale", допустимые портфели будут эффективны (рис. 5).

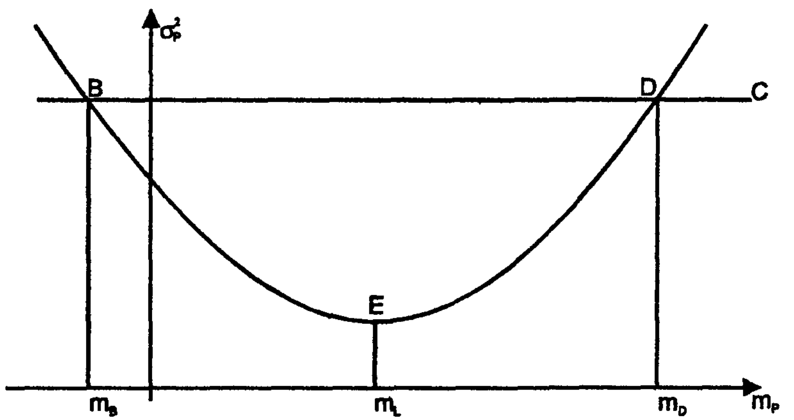


Рис. 5. При заданном уровне C риска σ_p^2 тот из двух допустимых портфелей B, D эффективен (D), у которого больше ожидаемая доходность ($m_D > m_B$)

Отсюда *вывод*: при использовании операции типа "short-sale" можно получать эффективные портфели сколь угодно высокой доходности m_p.

Очевидно, что переход к координате σ_p сохранит конфигурацию графика рис. 5. Назовем соответствующую кривую *графиком допустимых портфелей,* или допустимой траекторией. При ограничении на знак переменных эта траектория будет находиться в пределах промежутка $[m_1, m_2]$, при снятии ограничения на знак ветви этой кривой уйдут в бесконечность. Восходящая часть этой кривой будет определять эффективную траекторию: укороченную до точки m_2 кривую "б", если short-sale невозможен, и простирающуюся в бесконечность кривую "а" при наличии взятого в долг капитала.

Для "большеразмерного" портфеля эти кривые расходятся (кривая "а" не продолжает кривую "б", как в двумерном случае, а располагается ниже), но ведут себя аналогичным образом. Доказано, что их наклон, отображающий зависимость риска (среднеквадратичного отклонения) от эффективности, постепенно возрастает (в математике такая функция называется строго выпуклой). Естественно, при большей свободе правил игры можно добиться лучших результатов (кривая риска "а" расположена ниже кривой "б" (рис. 6).

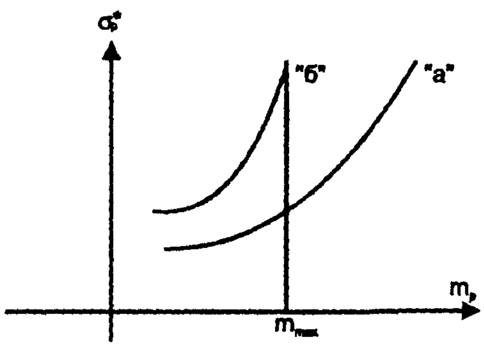


Рис. 6. Эффективные траектории в многомерном случае
а) При допущении short-sale б) При запрещении short-sale

Пример 16. Рассмотрим влияние корреляции на характер траектории эффективных портфелей. Пусть $m_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$ и соответственно $m_2 = 1$, $\sigma_2 = 2$, и выделим четыре случая: $r_{12} = 0$; 3/4; 1; –1. Формула абсциссы вершины параболы (36) имеет вид:

$$x_{1B} = \frac{(\sigma_2 - r_{12}\sigma_1)\sigma_2}{(\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}.$$

Подставляя в нее исходные данные, вычислим для каждого варианта корреляции координату x_{1B}. Соответственно для каждого случая получим координату $x_{1B} = \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, 2, \frac{2}{3}$. Отсюда и из формул (36) определим повариантные значения доходности m_{pB} и риска σ_{pB} для "вершинного" портфеля, т. е. того, который располагается в начале эффективной траектории. Данные вычислений сведем в следующую таблицу:

№ варианта	I	II	III	IV
r12	0	3/4	1	–1
x1B	4/5	5/4	2	2/3
mpB	1/5	–1/4	–1	1/3
σpB	√4/5	√7/8	0	0

При полном вложении в один из активов: $x_1 = 1$ или $x_2 = 1$, независимо от номера варианта $m_p = 0$, $\sigma_p = 1$ и соответственно $m_p = 1$, $\sigma_p = 2$. Этих данных вполне хватает, чтобы представить все четыре случая в удобном для сравнения графическом виде (рис. 7).

Различия между графиками по расположению вершины М относительно полосы $[m_1, m_2]$ и характеру течения кривых в координатах "доходность - риск" вызваны различием корреляций, так как прочие условия во всех вариантах совпадают.

В нашем примере $m_1 = 0$; $m_2 = 1$. Поэтому, комментируя различия, воспользуемся обозначением [0; 1], хотя выводы будут справедливы и для произвольных значений $0 \leq m_1 < m_2$.

В случае полной корреляции ($r_{12} = \pm 1$) эффективные траектории представляют собой повышающие полупрямые, упирающиеся в ось абсцисс, и весь риск в точке М элиминируется. Внутри полосы [0; 1] отрицательная единичная корреляция выгоднее, вне этой полосы предпочтительнее становится случай $r_{12} = 1$.

Для независимых активов вершина М всегда находится в полосе [0; 1], и этот случай занимает промежуточное по выгоде положение между вариантами детерминированной линейной связи ($r_{12} = \pm 1$). При плюсовой корреляции вершина может оказаться и левее полосы [0; 1].

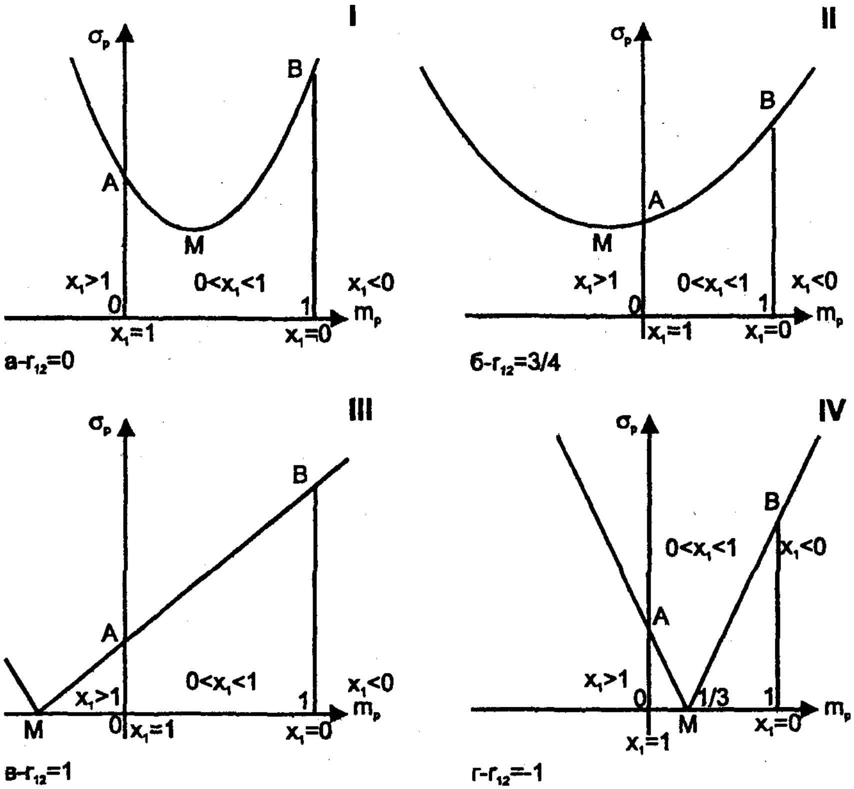


Рис. 7. Влияние корреляции на поведение допустимой траектории и ее эффективной части

Двувидовой портфель с безрисковой составляющей

Несмотря на простоту, эта модель является важным элементом портфельной теории и понадобится нам, когда мы будем изучать расширение Д. Тобина для задачи Г. Марковица. Найдем эффективную траекторию таких портфелей. Пусть r_0 — эффективность безрискового вложения, а случайная эффективность R_r имеет ожидание m_r и вариацию σ_r^2, естественно $r_0 < m_r$. Деление вклада на безрисковую и рисковую части в долях x_0 и $x_r = 1 - x_0$ приводит к портфелю со случайной эффективностью:

$R_p = x_0 r_0 + x_r R_r$.

Ожидаемое значение этой эффективности и ее среднеквадратичное отклонение равны:

$$m_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) m_r, \quad \sigma_p = |1 - x_0|\, \sigma_r. \qquad (37)$$

Допустим, что имеется возможность брать и давать в долг под безрисковую ставку r_0, т. е. переменная x_0 может быть любого знака. В отличие от этого по рисковому активу операция short-sale лишена финансового смысла, поскольку при $x_r = 1 - x_0 < 0$ разность $m_p - r_0 = (x_0 - 1)(r_0 - m_r) < 0$.

Следовательно, $m_p < r_0$, а $\sigma_p = (x_0 - 1)\sigma_r > 0$. Эта смесь (составной актив) заведомо хуже, чем однородный безрисковый вклад. Чтобы уйти с неэффективной траектории, следует ввести ограничение неотрицательности для x_r или равносильное условие $x_0 \le 1$.

Исключая $x_0 \le 1$ из соотношений (37), получим:

$$\sigma_p = \frac{m_p - r_0}{m_r - r_0} \sigma_r, \qquad (38)$$

т. е. связь между риском σ_p и ожидаемой эффективностью m_p линейна (рис. 8).

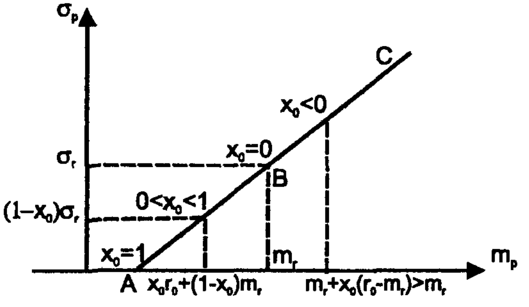


Рис. 8. Эффективная траектория двувидового портфеля с безрисковой составляющей

Очевидно, что все сочетания активов, представленные точками луча АС, являются Парето-оптимальными, причем часть АВ всей траектории относится к случаю отсутствия заемного капитала ($x_0 \ge 0$). Продолжающая эту часть полупрямая ВС появляется при разрешении брать в долг под ставку r_0 (x_0 — без ограничения на знак). При допущении такой возможности, как видно из рис. 8, можно получить любую ожидаемую доходность, но при этом риск тоже растет.

Из множества эффективных портфелей инвестор отберет такой, который доставляет максимум полезности $U(m, \sigma)$.

Пример 16. Некто может беспроцентно ссужать или занимать деньги ($r_0 = 0$, x_0 — без ограничения на знак), а кроме того, он имеет возможность вложиться под рисковую ставку R_r с характеристиками $m_r = 2$, $\sigma_r^2 = 4$. Очевидно, что брать деньги в долг под рисковую ставку R_r (short-sale), чтобы беспроцентно держать их у себя, — бессмысленно, т. е. $x_r = 1 - x_0 \geq 0$. Отношение индивида к риску задано уровневой функцией полезности $U(m, \sigma) = m - \frac{1}{8}\sigma^2$.

Решим вместе с вкладчиком его задачу и найдем оптимальный портфель.

Уравнение (38) траектории эффективных портфелей для нашего субъекта примет вид:

$\sigma = m$.

Определению эффективного портфеля с оптимальным сочетанием доходности m и риска σ отвечает следующая оптимизационная задача:

$$\max\left(m - \frac{1}{8}\sigma^2 / \sigma = m\right).$$

Она сводится к максимизации квадратичной функции:

$$Y(m) = m - \frac{1}{8}m^2$$

при условии, что $m \geq 0$, и имеет очевидное решение:

$m^* = 4$.

Отсюда и из (37) найдем риск $\sigma^* = 4$, оптимальные пропорции $x_r^* = 1 - x_0 = 2$, $x_0^* = -1$ и максимальный уровень полезности $Y(4) = 2$. На рис. 9 дано графическое решение задачи с помощью карты кривых безразличия $m - \frac{1}{8}\sigma^2 = C$.

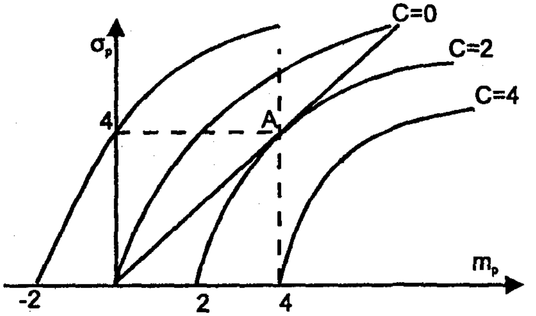


Рис. 9. Оптимальный портфель A — точка касания кривой безразличия $\sigma = \sqrt{8(m-c)}$ и эффективной траектории $\sigma = m$

Согласно полученному ответу (точка А) вкладчик-оптимизатор воспользуется возможностью беспроцентного кредита для удвоения капитала и полностью инвестирует его в рисковый актив.

3. Задача об эффективном портфеле с безрисковой компонентой

Эта задача отличается от постановки (31 — 33) тем, что инвестор кроме рисковых ценных бумаг учитывает также возможность безрисковых вложений с гарантированной эффективностью r_0. Обозначив долю таких вложений через x_0, придем к следующему расширению задачи (31 — 33):

$$\min \left(\sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} V_{ij} x_i x_j \,/\, r_0 x_0 + \sum_{j \neq 0} m_j x_j = m_{p_1} x_0 + \sum_{j \neq 0} x_j = 1 \right). \quad (39)$$

Вложение в два фонда

Рассмотрим случай без ограничения на знак неизвестных x_0, x_1, ..., x_n. Очевидно, что всякий эффективный портфель траектории "a" на рис. 6 является допустимым для задачи (39) при том же значении ожидаемой доходности m_p.

Возьмем какой-нибудь портфель В на этой траектории и будем сочетать его с безрисковым вкладом по схеме рис. 8 (точки В, А). В результате получим прямолинейную траекторию всех возможных портфелей, представленную на рис. 10 лучом AF.

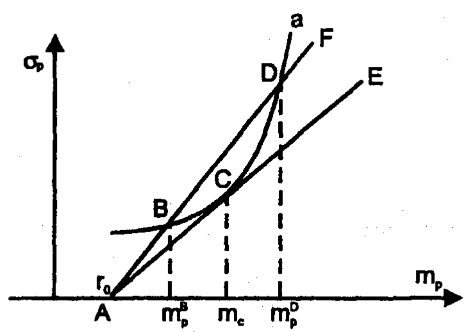


Рис. 10. АСЕ — эффективная траектория при допущении заемного капитала и безрисковых вложений

Обозначим пропорции эффективного портфеля В, полученные как решение укороченной задачи (31 — 33), через x_1^B, x_2^B,

..., x_n^B. Очевидно, что $x_0 + \sum_{j\neq 0} (1 - x_0)\, x_j^B = 1$ и, кроме того, $r_0x_0 + m_p^B(1 - x_0) = r_0x_0 + \sum_{j\neq 0} m_j(1 - x_0)x_j^B = m_p$.

Отсюда следует, что портфель (x_0, $(1 - x_0)x_1^B$, ..., $(1 - x_0)x_n^B$) является допустимым для задачи (39), т. е. траектория AF — одна из допустимых. Но она для модели (39) неэффективна, так как в диапазоне доходностей (m_p^B, m_p^D) ее портфели дают более высокий риск, чем у кривой "а" (рис. 10). Отсюда ясно, что получить эффективную траекторию в задаче (39) можно только с помощью такой точки С на траектории "а", в которой прямая АСЕ касается этой траектории. Так, из рис. 10 видно, что с помощью означенной прямой можно добиться любой доходности $m_p \geq r_0$ с наименьшим по сравнению со всеми другими допустимыми портфелями риском.

При запрещении заемного капитала, т. е. для неотрицательных переменных x_0, x_1, ..., x_n, аналогичные доводы подсказывают, что кривая эффективных комбинаций АСЕ получается сочленением касательной АС с последующей за точкой С частью траектории "б", перенесенной на рис. 11 с рис. 6.

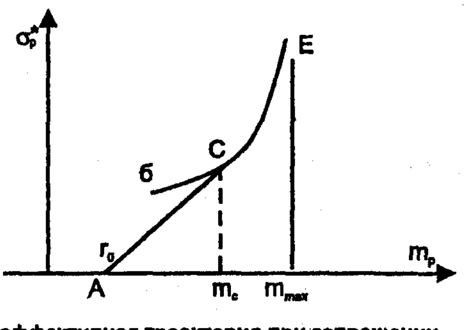


Рис. 11. АСЕ — эффективная траектория при запрещении заемного капитала и допущении безрисковых вложений

Вид ломаной кривой АСЕ на рис. 11 объясняется понижающим влиянием детерминированной компоненты r_0 на ожидаемую доходность и риск портфеля. Из-за этого портфели с ее участием не могут дать достаточно высоких значений $m_p > m_c$ и для таких уровней доходности приходится довольствоваться комбинациями только рисковых вложений.

Изложенного достаточно, чтобы понять, что при возможности безрисковых вложений задача инвестора сводится к поиску оптимального по полезности распределения капитала между безрисковым активом A и рисковым портфелем C. При данном значении эффективности r_0 портфель C определяется единственным образом и будет один и тот же для всех вкладчиков, независимо от их оценок полезности.

Более того, "касательный" портфель C по результату смешивания его с безрисковым активом A оказывается наилучшим по сравнению с прочими рисковыми портфелями эффективной траектории ("а" или "б"). Имея это в виду, будем называть портфель, который в координатах $x_1, ..., x_n$ соответствует точке касания C, оптимальным рисковым или, кратко, ***оптимальным портфелем***.

Пример 17. Найдем оптимальный портфель на траектории эффективных комбинаций из двух рисковых ценных бумаг с характеристиками $m_1 = 2$, $\sigma_1 = 1$; $m_2 = 3$, $\sigma_2 = 2$; $r_{12} = 1/2$ при условии, что эффективность добавляемого безрискового актива $r_0 = 1$.

Подставляя данные примеры в (36), получим, что:

$\sigma_p^2 = 3x_1^2 - 6x_1 + 4$, $m_p = -x_1 + 3$.

Исключив x_1, придем к уравнению эффективной траектории:

$$\sigma_p = \sqrt{3m_p^2 - 12m_p + 13},$$

"стартующей" из низшей точки $m_{pB} = 2$, $\sigma_{pB} = 1$.

Чтобы найти абсциссу m_C точки касания C, запишем известное уравнение касательной к функции f(x) в точке x_0:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В обозначениях нашего примера оно примет вид:

$$\sigma = \sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13} + \frac{(6m_c - 12)}{2\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13}}(m - m_c).$$

Данная прямая проходит через точку A с координатами $m = r_0 = 1$, $\sigma = 0$ (рис. 10). Это позволяет получить следующее уравнение для неизвестной доходности m_C оптимального портфеля:

$$\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13} + \frac{3(m_c - 2)}{\sqrt{3m_c^2 - 12m_c + 13}}(1 - m_c) = 0.$$

Откуда $m_C = \frac{7}{3}$. Пользуясь связью между m_p и $x_1 (x_1 = 3 - m_p)$ найдем, полагая $m_p = \frac{7}{3}$, структуру оптимального портфеля

$x_1 = 3 - 7/3 = 2/3$, $x_2 = 1/3$.

Таким образом, в оптимальном портфеле С на две стоимостные единицы ценных бумаг 1-го вида должна приходиться одна стоимостная единица бумаг 2-го вида.

Теорема об инвестировании в два фонда

Эта теорема утверждает, что если инвесторы интересуются только ожидаемой доходностью и стандартным отклонением своего портфеля, то каждый инвестор-оптимизатор будет комплектовать портфель только из "касательного" (оптимального) портфеля С и безрискового актива.

Подтвердим предшествующее графическое обоснование математическим доказательством. Чтобы не утомлять читателя матричными обозначениями в многомерном случае, предложим ему покомпонентную запись на примере трехвидового портфеля. Для большего упрощения задачи ограничимся некоррелированными активами и неизвестными x_0, x_1, x_2 произвольного знака. Несмотря на эти частности, нашего рассмотрения вполне достаточно, чтобы понять, как доказывается теорема в общем случае.

При $n = 3$ и $V_{12} = 0$ из общей записи (39) получим следующую модель сформулированной задачи:

$$\min\left(\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \,/\, r_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_p, x_0 + x_1 + x_2 = 1\right). \quad (40)$$

Для ее решения воспользуемся *методом множителей Лагранжа* и введем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \sigma_1{}^2 x_1{}^2 + \sigma_2{}^2 x_2{}^2 + \lambda_1(m_p - r_0 x_0 - m_1 x_1 - m_2 x_2) +$$
$$+\lambda_2 (1 - x_0 - x_1 - x_2).$$

Тогда решение поставленной задачи должно удовлетворять соотношениям:

$\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$, $i = 0,1,2$, $j = 1,2$, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} -r_0\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\sigma_1^2 x_1 - m_1\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\sigma_2^2 x_2 - m_2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ r_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_p \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений, заменяя $\lambda_2 = -r_0\lambda_1$, найдем:

$$x_1 = \frac{(m_1 - r_0)\lambda_1}{2\sigma_1^2}, \; x_2 = \frac{(m_2 - r_0)\lambda_1}{2\sigma_2^2}. \tag{41}$$

Исключая из четвертого и пятого уравнений переменную x_0, придем к соотношению:

$$(m_1 - r_0)x_1 + (m_2 - r_0)x_2 = m_p - r_0. \tag{42}$$

Подставляя (41) в (42), получим уравнение для λ_1:

$$\frac{(m_1 - r_0)^2\lambda_1}{2\sigma_1^2} + \frac{(m_2 - r_0)^2\lambda_1}{2\sigma_2^2} = m_p - r_0,$$

откуда $\mathring{\lambda}_1 = \frac{2}{g}(m_p - r_0)$, где

$$g = \frac{(m_1 - r_0)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(m_2 - r_0)^2}{\sigma_2^2},$$

и компоненты оптимального решения (41)

$$\mathring{x}_1 = \frac{(m_1 - r_0)}{g\sigma_1^2}(m_p - r_0), \; \mathring{x}_2 = \frac{(m_2 - r_0)}{g\sigma_2^2}(m_p - r_0).$$

Отсюда видно, что отношение долей рисковых вложений

$$\frac{\mathring{x}_1}{\mathring{x}_2} = \frac{(m_1 - r_0)\sigma_2^2}{(m_2 - r_0)\sigma_1^2} \tag{43}$$

не зависит от назначаемого инвестором уровня ожидаемой доходности m_p.

Подставляя найденные оптимальные значения $\mathring{x}_1$, $\mathring{x}_2$ в критерий задачи (40), определим минимум дисперсии портфеля при заданном m_p:

$$\mathring{\sigma}_p^2 = \frac{1}{g^2}\left(\left(\frac{m_1 - r_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 - r_0}{\sigma_2}\right)^2\right)(m_p - r_0)^2.$$

Из этого соотношения с учетом обозначения q^2 следует линейность уравнения эффективной траектории модели (40):

$$\mathring{\sigma}_p = \frac{1}{\sqrt{g}}(m_p - r_0). \tag{44}$$

Пусть m_p^* — ожидаемая эффективность рискового портфеля с пропорциями (43). Очевидно, что этот портфель получается как решение задачи (40) при $m_p = m_p^*$, у которого $\mathring{x}_0 = 0$, и он обязан лежать на прямой (44). Полагая в (40) $x_0 = 0$, придем к "укороченной" оптимизационной задаче (35) ($m_p = m_p^*$, $r_{12} = 0$) с тем же оптимальным решением, но уже на эффективной траектории "а" (рис. 6).

Таким образом, точка на прямой (44), соответствующая $x_0 = 0$, должна лежать на кривой $\sigma_p^*(m_p^*)$ (кривая "а" на рис. 6), т. е. $\mathring{\sigma}_p\ (m_p^*) = \sigma_p^*(m_p^*)$. В то же время при всех $m_p \neq m_p^*$ минимум риска для задачи (40) будет меньше, чем у задачи (35) $^\circ\sigma_p(m_p) < \sigma_p^*(m_p)$. Иначе говоря, прямая (44) расположена под кривой "а" и имеет с ней одну общую точку — точку касания (m_p^*, σ_p^*), что было представлено на рис. 10 (прямая АЕ касается кривой "а" в точке С).

В заключение несколько слов о портфельных задачах произвольной размерности. Как и в рассмотренных частных случаях, если ограничения на знак отсутствуют, эти задачи допускают явное решение и его можно найти методом множителей Лагранжа. При условии неотрицательности неизвестных они принимают вид задач квадратичного программирования, для решения которых разработаны специальные вычислительные методы.

Представление о свойствах решения можно получить с помощью *обобщенного метода Лагранжа*, вводя дополнительные множители $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ по каждому неравенству $x_j \geq 0$, и со ссылкой на *теорему Куна-Таккера*.

Опуская подробный анализ, основанный на условиях дополняющей нежесткости, ограничимся здесь кратким описанием **качественных особенностей эффективного портфеля**.

а) С увеличением требуемой ожидаемой эффективности вклады в каждую ценную бумагу ***меняются** линейно*, если возможен short-sale, или *кусочно-линейно*, если такие операции запрещены. Некоторые вклады растут (это относится к более эффективным, но и более рисковым ценным бумагам), некоторые уменьшаются (менее эффективные и менее рисковые ценные бумаги).

б) ***Мера риска*** эффективного портфеля возрастает с ростом требуемой ожидаемой эффективности, причем *одинаковым последовательным приростом этой меры отвечают все меньшие и меньшие приросты эффективности*.

Соответствующие этим выводам графические иллюстрации можно получить, опираясь на частные случаи эффективных портфелей, рассмотренные выше; для рискового портфеля из трех активов подтверждающие диаграммы имеются в работе Первозванских. (См. список литературы.)

4. Рыночный портфель

Будем считать, что состояние и динамику рынка ценных бумаг в течение длительного времени определяют его участники. В свою очередь, их поведение определяется "предписаниями" портфельной теории. Все они максимизируют личные полезности, добиваясь правильного распределения капитала между безрисковыми и рисковыми вложениями.

При этом рисковые вложения производятся в пропорциях, задаваемых структурой оптимального комплекта-портфеля C (рис. 10), и по объему могут соответствовать любому, в том числе и дробному, числу комплектов. Таким образом, предполагается, что поведение всех участников соответствует одной и той же модели (39), т. е. они знают все параметры $\{V_{ij}\}$, r_0, $\{m_j\}$, иначе говоря, располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшие решения.

Ясно, что перечисленное является *некоторой идеализацией* реальных условий, игнорирующей возможные отклонения по причине несимметричной информации, из-за нестационарности рынка и воздействия внешних факторов (вспомним недавний кризис на фондовых рынках стран Юго-Восточной Азии, из-за которого наши банки потеряли около 500 млн. долл.).

На таком идеальном рынке инвесторы-максимизаторы предъявляют спрос на рисковые ценные бумаги в ассортименте, совпадающем с пропорциями "касательного" портфеля C. В зависимости от соотношения этого спроса и рыночного предложения цены на активы уменьшаются (при избыточности предложений) или растут (при дефиците).

С учетом этих ценовых изменений корректируются параметры модели (39), а следовательно, и спрос на ценные бумаги. Этот процесс самоорганизуется таким образом, что по всем видам финансовых активов предложение и спрос выравниваются. В результате рисковый портфель рынка ценных бумаг приближается и начинает копировать структуру оптимального портфеля C.

Отсюда следует, что при сделанных допущениях о характере фондового рынка задача отыскания оптимального рискового портфеля C решается самим рынком. А если так, то инвестору можно не проводить самостоятельных расчетов, а достаточно "перерисовать" найденное рынком решение: проанализировать рыночные пропорции обращающихся ценных бумаг и формировать свой портфель, придерживаясь этих пропорций.

Высказанные здесь гипотезы: замкнутость, стационарность, равновесность (равная информированность, совпадение целей участников, абсолютная ликвидность бумаг), бесфрикционность (отсутствие зазора между ценами спроса и предложения) лежат в основе *теории равновесия на конкурентном финансовом рынке*. Центральное место в этой теории занимает ***модель В. Шарпа***, известная как модель установления цен на капитальные активы (Capital Asset Pricing Model, CAPM).

Ниже мы ознакомим читателя с содержанием этой модели, ее теоретическими выводами и обсудим возможности практических применений.

Реальный *фондовый рынок* по своим характеристикам расходится с идеальным. Этот рынок постоянно испытывает воздействие внешних факторов (незамкнут) и в силу этого необязательно стационарен. Для него может не выполняться гипотеза малости влияния на цену, например, из-за сговора между частью участников. Ему присуща асимметричность информированности. Ставки, применяемые при покупке и продаже ценных бумаг, при выдаче и получении кредита, — неодинаковы.

По мере удаления от условий идеальной конъюнктуры понятие соответствия между рыночным и оптимальным (касательным) портфелем C инвестора теряет смысл, что ставит под сомнение целесообразность копирования инвестором портфеля рынка. В связи с этим для получения приемлемых результатов инвесторы при работе на фондовом рынке зачастую опираются на собственные модификации модели (39) с учетом доступной им информации и нарушений гипотез об идеальном рынке.

Представление о таких моделях и портфельных эвристиках, широко внедряемых в практику и простых по сравнению с оптимизацией, можно почерпнуть из финансовой периодики и деловой литературы. Здесь эти вопросы не рассматриваются, а будут даны только обещанные ранее элементы классической портфельной теории.

Определение рыночного портфеля

Пусть конкурентный финансовый рынок пребывает в равновесии. Это означает, что спрос всех инвесторов по каждому активу совпадает с совокупным предложением этого актива.

В соответствии с теоремой о двух фондах каждый инвестор комплектует портфель только из долей оптимального рискового портфеля C и безрискового актива с доходностью r_0 таким образом, чтобы максимизировать свою уровневую полезность U (m, σ) (рис. 12).

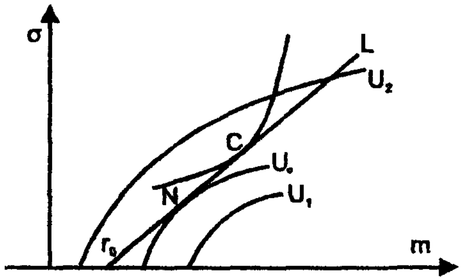


Рис. 12. Оптимальный выбор инвестора

Точка N, выбранная не безразличным к риску инвестором, определяется точкой касания подходящей кривой безразличия U (m, σ) = U_0 и прямой эффективных двухфондовых портфелей L.

Напомним, что вид этих уровневых кривых уже обсуждался — чем выше кривая, тем ниже полезность. Поэтому-то точка N дает максимум полезности: более низкая кривая (U_1) неосуществима, а более высокая (U_2) — невыгодна.

Выбор точки N задает пропорции деления капитала между безрисковым активом и портфелем C. Решение инвестора под номером K можно представить числом α_K, определяющим в его портфеле стоимостную долю безрискового актива. Тогда $(1 - \alpha_K)$ — доля рискового актива C.

Если $\alpha_K = 1$, то весь капитал инвестируется в безрисковый актив; при $\alpha_K = 0$ весь капитал инвестируется в портфель C; если $\alpha_K < 0$, инвестор занимает деньги (под безрисковый процент r_0) и расширяет закупки портфеля C $(1 - \alpha_K > 1)$. Очевидно, что разные α_K отвечают разным точкам касания N_K для несхожих по функции полезности вкладчиков.

Если W_K — суммарный капитал инвестора K, то $Y_K = (1 - \alpha_K)W_K$ — капитал, вложенный в портфель C. Пусть соотношение $\gamma_1 : \gamma_2 : ... : \gamma_n$ задает пропорции, в которых рисковые бумаги входят в этот портфель, $(\sum\gamma_i = 1)$. Тогда $\gamma_i Y_K$ — вклад K-го инвестора в акцию i. Обозначим рыночную стоимость фирмы i, выражаемую ценой всех ее акций, через V_i. По предположению рынок находится в равновесии. Тогда суммируя все вложенные в акции этой фирмы капиталы, можем записать баланс спроса на i-й актив его предложению:

$$\sum_K \gamma_i Y_K = V_i$$

и поскольку суммарный капитал уравновешивает стоимость V всех рыночных активов $\sum_K Y_K = V$, где V — суммарная рыночная стоимость всех фирм. Из этих соотношений выведем, что:

$$\gamma_i = \frac{V_i}{\sum Y_K} = \frac{V_i}{V}, \qquad (45)$$

т. е. доля всех акций i в оптимальном портфеле C равна доле этих акций на всем рынке. Таким образом, ***портфель рынка имеет ту же структуру, что и оптимальный (касательный) портфель, вычисленный на основе вероятностных характеристик ценных бумаг***, а сам рынок имеет свойства, присущие этому оптимальному портфелю. В связи с этим последний отождествляют с ***рыночным портфелем*** и, говоря о нем, называют его рыночным.

Одним из следствий результата (45) является тот факт, что каждый инвестор K владеет одинаковой, присущей ему долей Z_K каждой фирмы. В самом деле, из (45) вытекает, что $\frac{\gamma_i}{V_i} = \frac{1}{V}$ для всех i. Отсюда следует, что доля стоимости фирмы i, принадлежащая инвестору K, определяется отношением:

$$Z_i^K = \frac{\gamma_i Y_K}{V_i} = \frac{Y_K}{V} = \frac{Y_K}{\sum Y_S},$$

также не зависящим от i, т. е. будет одна и та же для всех фирм $(Z_1^K = Z_2^K = ... = Z_K)$. Таким образом, каждый инвестор владеет одинаковыми частями каждой фирмы, равными доле участия его капитала $\left(\frac{Y_K}{\sum Y_S}\right)$ на рынке рисковых активов.

Основное уравнение равновесного рынка

На траектории "а" эффективных рисковых портфелей выделим точку рыночного портфеля С (рис. 10). Пусть $i \le n$ — некоторый рисковый актив. Построим кривую риска "б", отвечающую всевозможным долевым сочетаниям Q и (1 − Q) вложений капитала в акции i и в портфель С. Это приведет к следующей диаграмме (рис. 13).

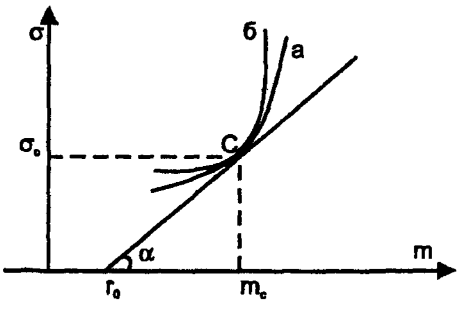


Рис. 13. Взаиморасположение эффективной кривой "а" и кривой риска "б"

Поясним характер расхождения этих кривых. Очевидно, что при $Q \neq 0$ комбинированный вклад дает неэффективную смесь рисковых активов. Поэтому кривая "б" должна быть над эффективной траекторией "а". При $Q = 0$ и та и другая кривая дают точку рыночного портфеля С, т. е. соприкасаются в этой точке. Поэтому касательная из точки r_0 к кривой "а" будет касаться в той же точке С и кривой "б". Этих замечаний уже достаточно, чтобы получить основное свойство рыночного портфеля. Пусть

Q — смесь акции i с портфелем С, которая имеет доходность:

$$R(Q) = QR_i + (1 - Q)R_C.$$

Отсюда найдем математическое ожидание этой доходности:

$$m(Q) = Qm_i + (1 - Q)m_C \qquad (46)$$

и ее среднеквадратичное отклонение (35):

$$\sigma(Q) = \sqrt{Q^2\sigma_1^2 + 2\,Q(1-Q)r_{ic}\sigma_i\sigma_c + (1-Q)^2\sigma_c^2}\,. \qquad (47)$$

Интересующее нас соотношение получим, приравняв значения тангенса одного и того же угла α, вычисленные двумя способами. Во-первых, этот тангенс равен угловому коэффициенту прямой r_0C, т. е. $tg\alpha = \dfrac{\sigma_c}{m_c - r_c}$, и, во-вторых, он совпадает со значением производной функции $\sigma(m)$, изображенной графиком "б", вычисленной в точке m_C, т. е. при $Q = 0$.

При нахождении этой производной, заметим, что соотношение (46) позволяет выразить дисперсию (47) как сложную функцию от m;

$$\sigma = \sigma\left(Q(m)\right), \text{ где } Q = \frac{m - m_c}{m_i - m_c},\ m = m(Q),\ \text{откуда:}$$

$$\frac{d\sigma}{dm}(Q) = \frac{d\sigma}{dQ}(Q) \times \frac{dQ}{dm} = \frac{Q\sigma_i^2 + (1-2Q)r_{ic}\sigma_i\sigma_c - (1-Q)\sigma_c^2}{\sigma(Q)} \times \frac{1}{(m_i - m_c)}.$$

Полагая $Q = 0$, получим, что

$$\sigma(0) = \sigma_c,\ \frac{d\sigma}{dm}(0) = \frac{r_{ic}\sigma_i\sigma_c - \sigma_c^2}{\sigma_c} \times \frac{1}{(m_i - m_c)}.$$

Приравняв эту производную угловому коэффициенту, придем к равенству:

$$\frac{r_{ic}\sigma_i - \sigma_c}{m_i - m_c} = \frac{\sigma_c}{m_c - r_0},$$

из которого легко выводится следующее **основное уравнение равновесного рынка:**

$$m_i - r_0 = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c}(m_c - r_o). \tag{48}$$

Коэффициент пропорциональности:

$$\beta_i = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c} = \frac{cov(R_i, R_c)}{V_c} \tag{49}$$

называется ***бета вклада относительно оптимального (рыночного) портфеля.***

Превышение ожидаемой эффективности какой-либо рисковой ценной бумаги или портфеля рисковых ценных бумаг над эффективностью безрискового вклада именуется ***премией за риск.***

Линия рынка ценных бумаг (Security market line, SML)

Соотношение (48) означает, что премия за риск, связанный с любой ценной бумагой $i \le n$, пропорциональна премии за риск рыночного портфеля в целом с коэффициентом пропорциональности β_i.

Если по оси абсцисс откладывать величины бета (β), а по оси ординат — ожидаемую эффективность (m), то получим прямую, именуемую линией рынка ценных бумаг (рис. 14).

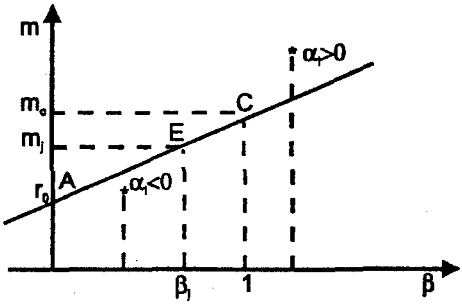


Рис. 14. Линия рынка ценных бумаг

Эта прямая проходит через точку А (0, r_0), соответствующую безрисковому активу, и точку С (1, m_C), представляющую оптимальный рисковый портфель. В самом деле, для безрискового актива показатель корреляции $r_{OC} = 0$. Поэтому его бета вклада $\beta_0 = 0$ и премия (48) ему не выплачивается ($m_0 = r_0$).

Напротив, ввиду идентичности оптимального и рыночного портфелей в формуле (48) $\beta_C = 1$ и, следовательно, премии владельцам этих портфелей (инвестору и рынку) будут одинаковыми.

Располагая этой прямой, можно по известному бета ценной бумаги j найти ее ожидаемую эффективность в виде ординаты m_j соответствующей точки Е на данной прямой.

Бета вклада

Остановимся на свойствах данного показателя, которые обусловлены влиянием парной статистической связи случайных эффективностей рынка и обращающихся на нем ценных бумаг. Приведем необходимые для этого сведения из регрессионного анализа двух случайных величин *Y*, *X*, и прежде всего формулу линейной аппроксимации:

$$\hat{Y} = \frac{r_{yx}\sigma_y}{\sigma_x} \times (x - m_x) + m_y. \qquad (50)$$

Известно, что данное соотношение дает линейное по *X* приближение для случайной величины *Y*? наилучшее в том смысле, что:

$$M(Y-\hat{Y})^2 = \min_{a,b} M(Y - aX - b)^2 .$$

Легко убедиться, опираясь на формулу (50), что дисперсия:

$$D(Y) = M(\hat{Y} - m_y)^2 + M(Y - \hat{Y})^2. \quad (51)$$

Формулам (50) и (51) можно дать следующую наглядную иллюстрацию:

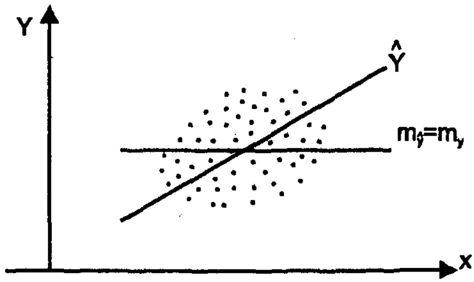


Рис. 16. Поле корреляции и прямая регрессии $\hat{Y}$

Первое слагаемое в формуле (51) определяется отклонениями точек прямой $\hat{Y}$ от математического ожидания m_y, а второе — вариацией переменной Y относительно прямой $\hat{Y}$. В случае линейной детерминированной связи Y от X каждому *x* будет соответствовать единственное значение *y* на прямой регрессии, и поэтому $M(Y - \hat{Y})^2 = 0$, а $M(\hat{Y} - m_y)^2 = D(Y)$.

Для независимой пары Y, X их корреляция $r_{yx} = 0$, и линейное соотношение (50) дает прямую нулевого наклона $\hat{Y} = m_y$; при этом $M(\hat{Y} - m_y)^2 = 0$, а вся дисперсия сосредоточена во втором слагаемом: $M(Y - \hat{Y})^2 = D(Y)$.

Подытоживая, можно сказать, что слагаемое $M(\hat{Y} - m_y)^2$ характеризует ту часть флуктуаций переменной Y, которая вызвана линейным влиянием входной переменной X, а остаток $M(Y - \hat{Y})^2$ дисперсии D(Y) определяется действием неучтенных факторов.

Используя эти формулы, проанализируем зависимость случайной эффективности $Y = R_i$ ценной бумаги i от случайной эффективности рынка $X = R_C$. В этих обозначениях формула квадратичной линейной регрессии $\hat{r}_i$ случайной величины R_i на случайную величину R_C имеет вид:

$$\hat{r}_i = \frac{r_{ic}\sigma_i}{\sigma_c}(r_c - m_c) + m_i. \quad (52)$$

Откуда видно, что угловой коэффициент прямой (52) совпадает с бета вклада (49). Соотношение (52) дает наилучшую среднеквадратичную линейную оценку эффективности акции i в зависимости от реализованного значения r_C. Поэтому понятно, что бета величины ценных бумаг являются коэффициентами, определяющими влияние общей ситуации на рынке на судьбу каждой ценной бумаги.

Если β_i положительна, то эффективность актива меняется однонаправленно с рынком, *если β_i отрицательна*, то эффективность актива будет снижаться при возрастании эффективности рынка.

Чем больше абсолютное значение бета вклада актива, тем чувствительнее реагирует его эффективность на изменения общерыночной ситуации R_C. Этот вывод тем точнее, чем меньше разброс $M(R_i - \hat{R}_i)^2$.

Равенство (51) можно интерпретировать как разложение общего риска на две части: обусловленную влиянием рынка и ту, что определяется воздействием внешних факторов. При этом сила рыночного влияния оценивается той долей общей дисперсии, которая приходится на вариацию точек регрессии (52):

$$\eta = \frac{M(\hat{R}_i - m_i)^2}{M(R_i - m_i)^2} = \frac{\beta_i^2\,\sigma_c^2}{\sigma_i^2} = r_{ic}^2. \quad (53)$$

Как видим, эта величина совпадает с квадратом коэффициента корреляции случайных эффективностей R_i и R_C.

Заметим, что более точному размежеванию риска отвечает известное разложения дисперсии

$$D(Y) = D(M(Y/x)) + MD(Y/x), \quad (54)$$

где первое слагаемое — дисперсия условного математического ожидания, а второй член — математическое ожидание условной дисперсии. Если теоретическая регрессия M(Y/x) линейна, т. е. задается уравнение (50), разложения (54) и (51) совпадают, и, таким образом, при выполнении гипотезы линейности проведенное здесь рассмотрение становится строгим.

Ввиду независимости эффективных рисковых комбинаций от безрисковой альтернативы r_0 в "касательный" портфель C вполне могут попасть акции с ожидаемой доходностью m_i ниже, чем ставка r_0. Эти бумаги, как видно из (48), имеют минусовые бета вклада и отрицательно коррелированы с рынком ($r_{ic} < 0$). Как мы уже знаем, подобные бумаги обладают хеджирующими свойствами, т. е. позволяют ограничить риск портфеля.

Как следует из формулы премирования

$$m_i - r_0 = \beta_i(m_C - r_0),$$

назначаемые рынком поощрения зависят от линии поведения ценных бумаг. Те, что копируют рыночные тенденции ($r_{ic} > 0$), премируются, причем тем щедрее, чем выше "рыночная" компонента риска (53). Наоборот, "строптивые" ценные бумаги ($r_{ic} < 0$) штрафуются, и тем жестче, чем больше вносимый рынком риск (53) расширяет диапазон их "неповиновения".

Альфа вклада

Модель (48) определяет эффективности m_i тех ценных бумаг, которые покупаются и продаются на идеальном рынке. Реальные ценные бумаги могут отклоняться от прямой (рис. 14), отвечающей модели идеального конкурентного рынка. Соответствующие этим отклонениям невязки α_i между фактическими значениями m_i и модельными оценками вызваны погрешностями описания реальной рыночной ситуации оптимальным портфелем и называются ***альфа вклада***:

$$\alpha_i = m_i - (r_i + \beta_i(m_C - r_0)).$$

Наблюдаемые всплески ($\alpha_i > 0$) и провалы ($\alpha_i < 0$) означают, что *теоретическая* линия рынка ценных бумаг (SML) занижает (соответственно завышает) возможности ценной бумаги i. Поэтому одна из практических рекомендаций финансового анализа сводится к включению в портфель прежде всего тех ценных бумаг, которые недооценены рынком ($\alpha_j > 0$), т. е. продаются дешевле, чем того заслуживают.

На рис. 14 точки, соответствующие недооцененным ценным бумагам, будут располагаться выше линии рынка AC, а точки, соответствующие переоцененным ценным бумагам, — ниже этой линии.

Линия рынка капитала
(Capital market line, CML)

В теореме об инвестировании в два фонда была найдена эффективная траектория общей задачи (39), которая, как оказалось, определяется касательной из точки (r_0, 0) к эффективной траектории "укороченной" задачи (31 – 33) (рис. 10). В результате задача инвестора свелась к отысканию такой точки на касательной прямой, которая дает оптимальное по индивидуальной полезности сочетание рыночного портфеля С с безрисковым активом r_0.

Данная прямая не персонифицирована по инвесторам и может рассматриваться как неотъемлемая характеристика конкурентного финансового рынка. В теории она называется ***линией рынка капитала*** и имеет вид касательной, изображенной на рис. 16.

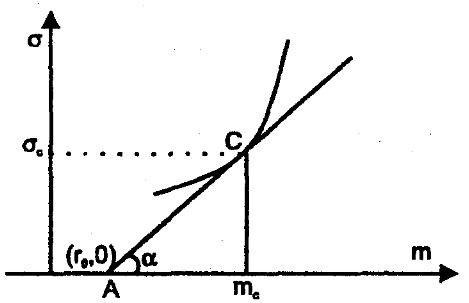


Рис. 16. АС — линия рынка капитала

Пусть m_C и σ_C — ожидаемая доходность и стандартное отклонение в точке С. Тогда угловой коэффициент прямой:

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_c}{m_c - r_0}$$

определяет величину риска, поощряемого единичной премией.

Можно сказать, что восходящее движение вдоль линии капитала оплачивается неизменным размером добавочного риска на очередную добавочную единицу доходности Δm_p, т. е. риск взимается пропорционально. Для сравнения отметим, что при перемещении по криволинейной траектории эффективных рисковых портфелей (рис. 6) последовательные приросты ожидаемой доходности отличаются прогрессивным возрастанием риска.

И наконец, на кривой безразличия уровневой полезности U (m, σ) (рис. 9) компенсация возрастающего риска возрастанием доходности производится во все увеличивающихся пропорциях, т. е. имеет место регрессивное рискообложение.

Обратную "среднему" риску λ величину:

$$\mu = \frac{m_c - r_0}{\sigma_c}.$$

иногда именуют ***рыночной ценой риска***, ее также допустимо назвать ***премией за единицу риска***.

Ранее, при обсуждении рыночной доли в разложении (53), было показано, что вносимый рынком риск по ценной бумаге i можно измерить характеристикой рассеяния:

$$\xi_i = \sqrt{\mu\left(\hat{R}_i - m_i\right)^2} = \beta_i \sigma_c.$$

За этот риск рынок выдает премию $\Pi_i = \mu\xi_i$, повышая тем самым ожидаемую эффективность i-го вложения до уровня $m_i = r_0 + \Pi_i$, что с учетом равенства $\Pi_i = \frac{(m_c - r_0)}{\sigma_c} \times \beta_i \sigma_c$ дает иную форму записи SML (48).

Равновесная цена на идеальном рынке

Напомним, что цена и ожидаемая доходность финансового актива находятся в обратной зависимости. Например, когда облигация имеет высокую цену, уровень ее доходности низок; когда цена низка — уровень доходности высок.

Рыночное равновесие определяет усредненную цену финансового актива и соответственно ожидаемый уровень его доходности. При прочих равных условиях кривую спроса можно представить как нормальную убывающую зависимость, связывающую цену актива с величиной спроса на него со стороны инвесторов. Более высокая цена, очевидно, ведет к меньшему совокупному спросу. Заимствуя из экономической теории термин ***"неценовые детерминанты спроса"***, можно в качестве таковых выделить следующие: *цены других активов, риски, корреляции, расположенность к риску.*

При изолированном изменении любого из этих факторов спрос на данный актив будет меняться. Так, с возрастанием риска он снизится, что отзовется увеличением равновесной ожидаемой доходности. Напротив, актив, который отрицательно коррелируется с рынком, пользуется повышенным спросом, так как он помогает инвестором уменьшить риск их портфелей. Поэтому несмотря на его более низкую ожидаемую доходность инвесторы все равно будут вкладывать в него средства.

Очевидно, что взаимное расположение разных кривых спроса связано также с отношением инвесторов к риску. Более осторожные реагируют на риск резким свертыванием спроса и тем самым сообща сбивают цену. Отсюда можно заключить, что общий уровень цен на равновесном рынке, помимо собственно рисков испытывает также давление, зависящее от отношения инвесторов к риску, и с ростом их агрессивности повышается.

Допустимо считать, что в краткосрочном периоде рыночное предложение активов не меняется и равновесие цен зависит только от изменений спроса, вызванных действием *неценовых детерминант*. Покажем, как учитывается их влияние в колебаниях рыночной стоимости фирмы.

Для упрощения выкладок рассмотрим простой случай двухпозиционного рынка. По одной позиции рынок сводит кредиторов и заемщиков, которые привлекают и размещают деньги под безрисковый процент r, а по другой — выступает посредником между продающей свои акции фирмой и инвесторами. Рынок является бескорыстным в том смысле, что использует одни и те же цены для покупки и продажи, т. е. не берет комиссионных.

Итак, на рынке присутствует одна фирма и K инвесторов. Спрос каждого инвестора определим через желаемую для приобретения долю фирмы — $Z_к$, где к = 1, 2, ..., K.

Пусть $W_к$ — начальный капитал инвестора K. Каждый инвестор на двухпозиционном рынке решает задачу размещения своего капитала между двумя видами вложений: в акции фирмы и под неслучайную ставку r, то есть — уже известную нам задачу о двувидовом портфеле с безрисковой составляющей.

Его окончательный выбор на прямой эффективных портфелей (38) зависит от его отношения к риску и определяется личной функцией полезности дохода $F_к$:

$$U_к = F_к - C_к F_к^2, \quad C_к > 0.$$

Будем считать, что каждый инвестор предусматривает возможность использования заемного капитала по ставке r с тем, чтобы увеличить свою долю $Z_к$.

Обозначим рыночную стоимость фирмы, приуроченную к дате принятия инвестиционных решений, то есть к началу периода, через V_X. Эта стоимость формируется под влиянием индивидуальных решений $\{Z_к,\ к = \overline{1,K}\}$, составляющих совокупный инвестиционный спрос на акции фирмы.

В свою очередь, предпочтения $Z_к$ участников зависят от прогнозируемого ими экономического состояния фирмы. На основе этих прогнозов у каждого участника складывается свое мнение-оценка возможной стоимости фирмы V на конец рассматриваемого периода. Последнее позволяет считать цену V случайной величиной с заданными средними: математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

Легко понять, что, если разрешено инвестировать за счет заемных средств, рынок будет способствовать такому перераспределению капиталов (от тех, кто избегает короткой позиции, к тем, кто ее использует), при котором в равновесии

$$\Sigma W_к = V_x,\ \ \Sigma Z_к = 1. \qquad (55)$$

Выбирая объем вложения $Z_к V_x$, инвестор *К* в конце периода будет располагать средствами

$$F_к = (W_к - Z_к V_x)\rho + Z_к V = \rho W_к + Z_к(V - \rho V_x). \qquad (56)$$

В этом выражении множитель $\rho = 1 + r$ — коэффициент наращения по начальному вкладу $(W_к - Z_к V_x)$, а второе слагаемое $Z_к V$ равно стоимости принадлежащих инвестору акций в конце периода.

Задача инвестора состоит в том, чтобы максимизировать ожидаемую полезность благосостояния $F_к$. Эта полезность является сложной функцией от переменной $Z_к$. Ее первая производная $\frac{dU}{dZ_k} = \frac{dU}{dF_k} \times \frac{dF_k}{dZ_k} = (1 - 2C_k F_k)(V - \rho V_x)$, а ее вторая производная

$$\frac{d^2U}{dZ_k^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial Z_k dF_k} \times \frac{dF_x}{dZ_k} = (-2C_к)(V - \rho V_x)^2 < 0.$$

Поэтому, если нет ограничений на короткую позицию, необходимое и достаточное условие точки максимума запишется в виде:

$$E[(1 - 2C_к F_к)(V - \rho V_x)] = 0. \qquad (57)$$

Подставляя (56) в (57), получим следующее уравнение для определения оптимального значения $Z_к$:

$$E\left\{\left[\frac{1}{2Ck} - \rho W_k - Z_K(V - \rho V_x)\right]\left[V - \rho V_x\right]\right\} = 0. \qquad (58)$$

Откуда:

$$Z_к E(V - \rho V_x)^2 = \left(\frac{1}{2C_k} - \rho W_k\right) E(V - \rho V_x).$$

Раскрывая математические ожидания в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$Z_к(E(V^2) - 2m\rho V_x + \rho^2 V_x^2) = \left(\frac{1}{2C_k} - \rho W_k\right)(m - \rho V_x) \quad (59)$$

Рассмотрим равенства (59) при различных к = 1, 2, ... К и сложим их с учетом (55) и тождества $E(V^2) = \sigma^2 + m^2$. В результате получим:

$$\sigma^2 + m^2 - 2m\rho V_x + \rho^2 v_x^2 = (m - \rho V_x)(\sum \frac{1}{2C_k}) - \rho V_x(m - \rho V_x).$$

Это соотношение приводится к виду:

$$(m - \rho V_x)\left(\sum \frac{1}{2C_k} - m\right) = \sigma^2.$$

Раскрывая, найдем рыночную стоимость фирмы:

$$V_x = \frac{1}{\rho}\left[m - \frac{\sigma^2}{\left(\sum \frac{1}{2C_k} - m\right)}\right]. \quad (60)$$

Таким образом, текущая стоимость фирмы может рассматриваться как дисконтированная величина ее цены m, ожидаемой на конец периода, скорректированная с учетом риска и предрасположенностей к нему инвесторов. Здесь мы ограничились частным случаем одной фирмы. В случае со многими фирмами-продавцами (j = 1, 2, 3, ...) формулы равновесных цен имеют вид:

$$Vx_j = \frac{1}{\rho}\left[m_j - \frac{\sum_i \sigma_{ij}}{\sum_k \frac{1}{2C_k} - \sum_i m_i}\right].$$

Такое расширение позволяет выявить влияние взаимных ковариаций будущих цен и их математических ожиданий.

Процентная ставка, скорректированная с учетом риска

Рассмотрим операцию с ценной бумагой, состоящую из покупки ее в начале периода по цене P_0 и продажи в конце периода по цене P_1. Дивидендные выплаты, полученные таким "однопериодным" акционером, обозначим через D_1. В детерминированном анализе за возможную оценку курсовой стоимости принимается уже знакомая нам величина:

$$P_0 = \frac{P_1 + D_1}{1 + r_0},$$

где r_0 — эффективность безрискового вложения. Вместе с тем для инвестора-практика более точной оценкой стоимости является дисконтированная величина ожидаемого дохода, основанная на ставке, которую он прогнозирует в качестве эффективности вклада. В модели системы установления цен на капитальные активы (CAPM) эта ставка m_i определяется ожидаемой доходностью i-го вложения и согласно основному уравнению равновесного рынка (48):

$$m_i = r_0 + \beta_i(m_C - r_0).$$

Дисконтируя по этой ставке, получим оценку текущей стоимости:

$$P_0 = \frac{E(P_1) + E(D_1)}{1 + r_0 + \beta_i(m_c - r_0)}. \tag{61}$$

В этой формуле числитель равен ожидаемым от акции платежам: математическому ожиданию случайного дохода за счет будущих продаж и дивидендных поступлений ($E(P_1)$, $E(D_1)$), а знаменатель равен единице плюс процентная ставка, требуемая инвесторами.

Чем больше вносимый рынком риск, тем (при *положительных* бета) больше требуемая ставка доходности и, следовательно, тем меньше цена акции при заданном уровне будущих потоков платежей.

Напротив, для *отрицательно* коррелированных активов ($r_{ic} < 0$), т. е. $\beta_i < 0$, инвестор, высоко оценивая их хеджирующие способности, готов поступиться частью дохода ($m_i < r_0$) и корректирует безрисковую ставку r_0 в сторону удорожания P_0. В формуле (61) цена акции выражена с помощью коэффициента дисконтирования, скорректированного с учетом риска и знака корреляции.

Опираясь на определение (49) коэффициентов "бета", выведем еще одну формулу цены P_0, основанную на "переадресации" риска со ставки дисконтирования на ожидаемые платежи. Для этого преобразуем выражение (61), раскрыв ковариацию в определении бета i-го вклада (49). Доходность акции i за период владения ею равна:

$$R_i = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0},$$

отсюда

$$\operatorname{cov}(R_i, R_c) = \operatorname{cov}\left(\frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} R_c\right),$$

где случайная величина R_c — доходность рыночного портфеля C. Используя определение ковариации, перейдем к математическим ожиданиям и получим:

$$\operatorname{cov}(R_i, R_c) =$$

$$= E\left\{\left[\frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} - \frac{E(P_1 + D_1) - P_0}{P_0}\right][R_c - E(R_c)]\right\} =$$

$$\frac{1}{P_o} E\{[(P_1 + D_1) - E(P_1 + D_1)][R_c - E(R_c)]\} = \frac{1}{P_0}\operatorname{cov}(P_1 + D_1, R_c),$$

т. е.

$$\beta_i = \frac{1}{P_0}\frac{\operatorname{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}.$$

Подставляя это выражение в (61), будем иметь:

$$P_0 = \frac{E(P_1 + D_1)}{1 + r_0 + \dfrac{1}{P_0}\dfrac{\operatorname{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}(m_c - r_0)},$$

откуда

$$P_0(1 + r_0) + \frac{\operatorname{cov}(P_1 + D_1, R_c)}{\sigma_c^2}(m_c - r_0) = E(P_1 + D_1)$$

и, наконец,

$$P_0 = \frac{E(P_1 + D_1) - \operatorname{cov}(P_1 + D_1, R_c)\lambda}{1 + r_0}, \qquad (62)$$

где $\lambda = \dfrac{m_c - r_0}{\sigma_c^2}$ — цена риска.

В данной формуле, чтобы учесть риск, корректируется числитель, а дисконтирование проводится по безрисковой ставке. Числитель в (62) иногда называют *безрисковым эквивалентом будущим платежам*. Как подход с корректировкой коэффициента дисконтирования (61), так и подход с безрисковым эквивалентом (62) могут применяться для оценивания курсовых стоимостей конкретных акций.

Если величина бета эмпирически оценена, то САРМ позволяет с помощью линии ценных бумаг (рис. 14) найти ожидаемую доходность акции, которая одновременно дает коэффициент дисконтирования будущих рисковых поступлений.

Выше для простоты были рассмотрены частные случаи проблемы равновесных цен. В общей постановке эта проблема формулируется в тех же условиях, что и расширенная задача об эффективном портфеле (39).

Представим себе инвесторов, которые, опираясь на функции полезности и результаты расчета модели (39), определились с оптимальными решениями своих портфельных задач. Таким образом, каждый знает наилучшие пропорции распределения имеющегося капитала по интересующим его активам. Этого, однако, мало. Чтобы воплотить найденные решения, необходимо еще знать и цены, по которым следует покупать акции. Ответ на данный вопрос дают формулы цен равновесия на идеальном рынке.

О статистическом направлении в САРМ

Рассмотренные в данной главе методы применяются для решения портфельных задач инвестора и для оценивания доходностей и курсовых стоимостей ценных бумаг. Модели и формулы, которые при этом используются, требуют знания определенных вероятностных характеристик финансового рынка и его составных: дисперсий и математических ожиданий, корреляций, условных математических ожиданий.

Количественные оценки этих характеристик находят в результате статистической обработки необходимых для этого реальных данных с помощью хорошо известных методов. Для экономии расчетов в статистике финансового рынка обосновывается целесообразность применения ***метода ведущего фактора***, роль которого играет эффективность рыночного портфеля R_C. Эта величина, именуемая ***эффективностью рынка***, *представляет собой* *взвешенную (с учетом капитала) сумму эффективностей всех рисковых ценных бумаг, обращающихся на рынке.*

Конечно, на практике невозможно следить за поведением всех ценных бумаг, поэтому рассмотрению подлежат истории только тех, которые на протяжении достаточно длительного периода фигурируют на торгах и оборот которых достаточно существенен для рынка.

Пусть даны последовательности наблюдений эффективности $R_j^{(t)}$, $t = 1, 2, ..., T$ и ведущего фактора $R_C^{(t)}$, относящегося к тем же моментам времени.

Согласно принятой гипотезе случайные величины R_j и R_C связаны соотношением:

$$R_j = a_j + b_j R_C + e_j,$$

где e_j — взаимно не коррелированные и не коррелированные с R_C случайные величины с нулевым ожидаемым значением, а постоянные параметры a_j, b_j подлежат оценке по наблюдениям. Отсюда вытекает, что теоретическая регрессия R_j относительно случайной эффективности рынка R_C будет линейна:

$$E(R_j/R_C) = a_j + b_j R_C.$$

Известно, что условное математическое ожидание дает наилучшее среднеквадратичное приближение среди всех функций $f(R_C)$. Таким образом, принятая гипотеза означает, что теоретическая регрессия $E(R_j/R_C)$ совпадает со среднеквадратичной линейной регрессией (50).

Из основного соотношения следует, что:

$$m_j = a_j + b_j m_C,$$

и, следовательно,

$$R_j - m_j = b_j(R_C - m_C) + e_j.$$

Отсюда для вариаций получаем:

$$V_j = b_j^2 V_C + V_{ej},$$

а для ковариаций ($i \neq j$) имеем:

$$V_{ij} = E\{(R_i - m_i)(R_j - m_j)\} = b_i b_j V_C,$$

где учитываются некоррелированности e_i, e_j, R_C.

Как следует из (49) и (50), в рассматриваемом случае коэффициент регрессии b_i для i-й ценной бумаги совпадает с ее бета вклада β_i.

При нарушении гипотез идеального финансового рынка возможности применения моделей САРМ и методов классической статистики ограничиваются. С целью преодоления возникающих при этом трудностей прибегают как к более "изощренным" ***методам идентификации*** (см. список литературы), так и к разработке различных портфельных эвристик, в значительной степени основанных на здравом смысле и возможностях компьютеризации. Эти направления, однако, выходят за рамки обсуждавшихся здесь подходов, и мы их не рассматриваем.

Список литературы

Бромвич М. Анализ экономической эффективности капиталовложений. Пер. с англ. М.: Инфра-М, 1996.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968.

О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. Пер. с англ. М.: Дело ЛТД, 1995.

Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.

Райбман Н.С., Капитоненко В.В. и др. Дисперсионная идентификация. М.: Наука, 1981.

Сакс Дж. Д., Ларрен Ф.Б. Макроэкономика. Глобальный подход. Пер. с англ. М.: Дело ЛТД, 1996.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.

Харрис Л. Денежная теория. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1990.

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1992.

Содержание