К. А. Багриновский,
В. М. Матюшок

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

микроэкономика

Москва
Издательство Российского университета дружбы народов
1999

К.А. Багриновский, В.М. Матюшок

Экономико-математические методы и модели (микроэкономика)

Рекомендовано

Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям

Москва

Издательство Российского университета дружбы народов

1999

ББК 65+22.1
Б 14

У т в е р ж д е н о
*РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов*

Р е ц е н з е н т ы:
доктор экономических наук *О.Б. Брагинский*,
доктор экономических наук *Н.Е. Егорова*

Багриновский К.А., Матюшок В.М.
Б 14 Экономико-математические методы и модели (микроэкономика): Учеб. пособие. — М.: Изд-во РУДН, 1999. — 183 с.: ил.

ISBN 5-209-00952-1

В настоящем издании представлены основные разделы математического моделирования микроэкономических процессов и явлений: оптимизация производственной программы предприятия (фирмы), проблемы рыночного регулирования на уровне предприятий и отраслей, анализ свойств состояния рыночного равновесия.

Пособие подготовлено на кафедре математических методов анализа экономики Российского университета дружбы народов в соответствии с программой курса «Экономико-математические модели и методы» и предназначено для студентов, аспирантов экономических факультетов, а также практических работников в сфере экономики, менеджмента, финансов и кредита, банковского дела.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда в рамках исследовательского проекта № 96-02-02025.

ISBN 5-209-00952-1 ББК 65+22.1

Предисловие

При подготовке этого издания была поставлена задача сделать книгу полезной не только для изучения основных экономико-математических моделей микроэкономики, но и для их практического использования в области постановки и решения задач анализа и оптимального выбора в области потребительского спроса и в сфере управления предприятиями в рыночных условиях. Для достижения поставленной цели в первой главе изложены основные определения и типы моделей, показан вклад выдающихся ученых в экономико-математическую науку, раскрыты математические модели сферы потребления, способы разработки функций, описывающих зависимость потребительского спроса от цен и доходов.

Последующие главы пособия посвящены вопросам разработки оптимальной стратегии поведения предприятия в рыночных условиях, способам построения функций предложения, характеризующих его зависимость от цен располагаемых производственных ресурсов.

В пособии изложены также методы разработки оптимальной производственной программы и способы построения производственных функций, в том числе с учетом научно-технического прогресса. В заключительной главе книги представлены принципы математического анализа рынка, включая вопросы достижения равновесия и его устойчивости в случае многих товаров и ресурсных ограничений.

При изложении материала авторы стремились подчеркнуть роль выдающихся творцов экономической теории и экономико-математической науки. Важно не только знать их теории, методы и модели, но и проникнуть в лабораторию их мысли, понять условия, приведшие их к тем или иным выводам. Тогда их теории, методы и модели не будут слепо копироваться в других условиях, а будут служить руководством к исследованию конкретных экономических реалий, построению (не копированию) соответствующих им моделей и разработке на этой основе практических рекомендаций. Только так можно стать настоящим экономистом, который в состоянии не только вылечить «больную» экономику, но и проложить курс для экономического роста как важнейшей материальной предпосылки благосостояния человека.

Авторы выражают признательность Л.Н. Пламадяла и Д. Пользину за техническое содействие в подготовке данного пособия.

Глава I

ПРЕДМЕТ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

§1. Основные определения и типы моделей

Курс «Экономико-математические методы и модели» объединяет комплекс экономических и математических дисциплин, предназначенных для изучения экономики. Экономико-математические методы и модели имеют общий с другими экономическими дисциплинами объект исследования — экономику как социально-экономическую систему. Однако у этого научного направления есть свой собственный предмет исследования. Оно изучает разные стороны своего объекта и прежде всего количественные взаимосвязи и закономерности. При этом используются особые научные методы, которые сами становятся объектом исследования.

О значении и оценке мировым научным сообществом данного направления можно судить по количеству лауреатов Нобелевской премии по экономике, проводивших свои исследования на стыке экономики и математики. Нобелевская премия по экономике начала присуждаться с 1969 г. Лауреатами этой премии, по нашим подсчетам, стали 36 выдающихся ученых-экономистов, в том числе 26 ученых-экономистов — за исследования на стыке экономики и математики.

Выявление количественных взаимосвязей и закономерностей в социально-экономической системе облегчается при использовании информационных технологий. Однако реальный синтез экономической теории, статистики, математики и информатики еще впереди и, как нам представляется, принесет в будущем немало открытий. При этом существенную роль будут играть различные модели.

В общем виде ***модель*** можно определить как условный образ (упрощенное изображение) реального объекта (процесса), который создается для более глубокого изучения действительности. Метод исследования, базирующийся на разработке и использовании моделей, называется *моделированием.* Необходимость моделирования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процесса). Значительно доступнее создавать и изучать прообразы реальных объектов (процессов), т.е. модели. Можно сказать, что теоретическое знание о чем-либо, как правило, представляет собой совокупность различных моделей. Эти модели отражают существенные свойства реального объекта (процесса), хотя на самом деле действительность значительно содержательнее и богаче.

Подобие между моделируемым объектом и моделью может быть физическое, структурное, функциональное, динамическое, вероятностное и геометрическое. При физическом подобии объект и модель имеют одинаковую или сходную физическую природу. Структурное подобие предполагает наличие сходства между структурой объекта и структурой модели. При выполнении объектом и моделью под определенным воздействием сходных функций наблюдается функциональное подобие. При наблюдении за последовательно изменяющимися состояниями объекта и модели отмечается динамическое подобие, вероятностное подобие — при наличии сходства между процессами вероятностного характера в объекте и модели, а геометрическое подобие — при сходстве пространственных характеристик объекта и модели.

На сегодняшний день общепризнанной единой классификации моделей не существует. Однако из множества моделей можно выделить словесные, графические, физические, экономико-математические и некоторые другие типы

Словесная, или монографическая, модель представляет собой словесное описание объекта, явления или процесса. Очень часто она выражается в виде определения, правила, теоремы, закона или их совокупности.

Графическая модель создается в виде рисунка, географической карты или чертежа. Например, зависимость между ценой и спросом может быть выражена в виде графика, на оси ординат которого отложен спрос (D), а на оси абсцисс — цена (P). Кривая нам наглядно иллюстрирует, что с ростом цены спрос падает, и наоборот. Конечно, данную зависимость можно выразить и словесно, но графически она намного нагляднее (рис. 1.1).

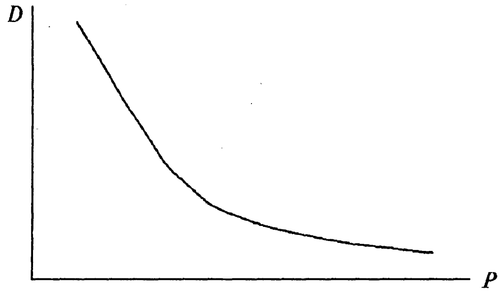

Рис. 1.1. Графическая модель, отображающая зависимость между спросом и ценой

Физические, или вещественные, модели создаются для конструирования пока еще несуществующих объектов. Создать модель самолета или ракеты для проверки ее аэродинамических свойств значительно проще и экономически целесообразнее, чем изучать эти свойства на реальных объектах.

Экономико-математические модели отражают наиболее существенные свойства реального объекта или процесса с помощью системы уравнений. Единой классификации экономико-математических моделей также не существует, хотя можно выделить наиболее значимые их группы в зависимости от признака классификации.

По степени агрегирования объектов моделирования различают модели:

- микроэкономические;
- одно-, двухсекторные (одно-, двухпродуктовые);
- многосекторные (многопродуктовые);
- макроэкономические;
- глобальные.

По учету фактора времени различают модели:

- статические;
- динамические.

В статических моделях экономическая система описана в статике, применительно к одному определенному моменту времени. Это как бы снимок, срез, фрагмент динамической системы в какой-то момент времени. Динамические модели описывают экономическую систему в развитии.

По цели создания и применения различают модели:

- балансовые;
- эконометрические;
- оптимизационные;
- сетевые;
- систем массового обслуживания;
- имитационные (экспертные).

В балансовых моделях отражается требование соответствия наличия ресурсов и их использования.

Параметры эконометрических моделей оцениваются с помощью методов математической статистики. Наиболее распространены эконометрические модели, представляющие собой системы регрессионных уравнений. В данных уравнениях отражается зависимость эндогенных (зависимых) переменных от экзогенных (независимых) переменных. Данная зависимость в основном выражается через тренд (длительную тенденцию) основных показателей моделируемой экономической системы. Эконометрические модели используются для анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов с использованием реальной статистической информации.

Оптимизационные модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший вариант производства, распределения или потребления. Ограниченные ресурсы при этом будут использованы наиболее эффективным образом для достижения поставленной цели.

Сетевые модели наиболее широко применяются в управлении проектами. Сетевая модель отображает комплекс работ (операций) и событий и их взаимосвязь во времени. Обычно сетевая модель предназначена для выполнения работ в такой последовательности, чтобы сроки выполнения проекта были минимальными. В этом случае ставится задача нахождения критического пути. Однако существуют и такие сетевые модели, которые ориентированы не на критерий времени, а, например, на минимизацию стоимости работ.

Модели систем массового обслуживания создаются для минимизации затрат времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания.

Имитационная модель наряду с машинными решениями содержит блоки, где решения принимаются человеком (экспертом). Вместо непосредственного участия человека в принятии решений может выступать база знаний. В этом случае ЭВМ, специализированное программное обеспечение, база данных и база знаний образуют экспертную систему. Экспертная система предназначена для решения одной или ряда задач методом имитации действий человека, эксперта в данной области.

По учету фактора неопределенности различают модели:
- детерминированные (с однозначно определенными результатами);
- стохастические (с различными вероятностными результатами).

По типу математического аппарата различают модели:
- линейного и нелинейного программирования;
- корреляционно-регрессионные;
- матричные;
- сетевые;
- теории игр;
- теории массового обслуживания и т.д.

§2. Основатели математической экономики и эконометрики

Математическая экономика и эконометрика объединяют достаточно широкий круг дисциплин. Над их созданием трудилось большое число ученых. Знать наиболее выдающихся из них и их конкретный вклад в науку во времени означает знание и понимание процесса становления науки, ее основных достижений и стоящих перед ней проблем. Само по себе это формирует восприятие научной дисциплины как процесс постижения человечеством таинств экономики, как социально-экономической системы. При этом подавляющее большинство ученых руководствовалось не столько соображениями личной выгоды, сколько благородной идеей поиска наиболее точной модели социально-экономической системы или методов ее формирования.

Сам термин «экономико-математические методы и модели» появился лишь в XX веке. До этого экономико-математическая наука развивалась в рамках политической экономии, а позже в рамках чистой экономической теории. Кстати термин «политическая экономия» был введен во Франции в 1614 г. Антуаном де Монкретьеном и обозначал науку о государственном хозяйстве, об экономике национальных государств. Политическая экономия рассматривалась и А. Смитом как отрасль знания, необходимая государственному деятелю и законодателю, как наука, которая ставит себе целью «обогащение как народа, так и государя». При таком понимании данной науки без ее определения как политическая обойтись было нельзя.

В конце XIX — начале XX века, благодаря во многом вышедшей в 1890 г. книге английского экономиста Альфреда Маршалла «Принципы экономики» («Principles of economics»), все более широкие позиции завоевывает термин «экономическая теория» (экономикс). С этого времени экономическая теория понимается как общественная наука, изучающая поведение людей в процессе производства, обмена и потребления материальных благ и услуг в целях удовлетворения своих неограниченных потребностей посредством ограниченных ресурсов. Термин «политическая экономия» сохранился, но он относится лишь к той части экономической теории, которая касается роли государства в регулировании экономики.

Впервые в истории количественную модель национальной экономики создал **Франсуа Кенэ (1694—1774)**, французский экономист, лейб-медик Людовика XV. Данная модель получила название «Экономическая таблица Кенэ». Политической экономией Франсуа Кенэ начал заниматься в возрасте около 60 лет. Франсуа Кенэ — основоположник школы физиократов, которая признавала единственной производительной отраслью только сельское хозяйство. Он ввел понятие совокупного продукта общества, движение которого рассматривается с единой макроэкономической точки зрения.

В «Экономической таблице Кенэ», как было показано учеными-экономистами в XX веке, содержались зачатки таких будущих теорий, как теория рынка, теория экономической динамики, модель мультипликатора.

Существенный вклад в экономико-математическую науку внесли основатели классической экономической школы и марксистская экономическая наука. **Давид Рикардо** для обоснования принципа сравнительных преимуществ использовал количественные методы и числовые примеры. Также поступали

К. Маркс и **В.И. Ленин**. Особого внимания заслуживают их воспроизводственные модели. Кстати именно К. Марксу принадлежат слова, что наука лишь тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой.

Заметный вклад в экономико-математическую науку внесла Лозаннская экономическая школа в лице ее виднейших представителей Леона Вальраса и Вильфредо Парето.

Вальрас Леон (1834—1910), швейцарский экономист, один из основателей и крупнейший представитель математической школы в политической экономии. Он родился во Франции, в течение 22 лет (с 1870 по 1892 г.) возглавлял кафедру политической экономии в Лозаннском университете в Швейцарии. Примечательно название основного труда Л. Вальраса «Элементы чистой политической экономии», в котором он сделал попытку построить обобщенную математическую модель экономики, а также рассчитать условия равновесия экономической системы, в которой рынки всех товаров взаимосвязаны, все цены и объемы производства взаимно согласованы, все секторы и все участники экономической системы стремятся максимизировать полезность. Модель Л. Вальраса включает в себя производство, обмен, образование капиталов и денежное обращение. Над своей моделью он работал всю жизнь, придя к теории общего равновесия. Л. Вальрас показал невозможность сведения различных факторов к какому-то одному, например к труду. Ценность фактора определяется не только затратами труда, но и его полезностью или редкостью.

Парето Вильфредо (1848—1923), другой ярчайший представитель Лозаннской экономической школы и ее глава. Родился в Италии, после окончания Туринского университета занимал инженерные должности. В 1892 г. сменил Л. Вальраса на посту заведующего кафедрой экономики Лозаннского университета, которой руководил до 1907 г. Продолжил теоретические изыскания своего предшественника, причем особое внимание уделял использованию математических методов анализа. Основной его вклад в экономическую науку — принцип оптимума по Парето, который гласит: «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а которое некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением».

Данный принцип положен в основу современной математизированной теории экономики благосостояния. Он соблюдается в оптимизационных моделях, в которых оптимальное решение находится через ряд последовательных улучшений первоначального базисного решения.

Однако этот принцип имеет не только большое экономико-математическое, но и несоизмеримое нравственно-этическое значение. Прежде чем произвести какие-либо изменения, необходимо убедиться, не причинят ли они кому-либо вреда. Далее желательно, чтобы эти изменения принесли некоторым людям пользу, но не по нашей, а по их собственной оценке. И только в этом случае эти изменения могут рассматриваться как **улучшение**. Игнорирование этого принципа приводит к противоположным результатам — «хотели как лучше, а получилось как всегда».

На базе дифференциального исчисления в математической экономике возникли теории, получившие название маржиналистских (*от англ.* marginal — предельный). Это теория предельной полезности, теория предельной производительности труда, теория предельной доходности и другие. Все эти теории базируются на принципах предельного анализа в экономике. Наиболее существенный вклад в эти теории внесли Стенли Джевонс и Джон Кларк.

Джевонс Уильям Стенли (1835—1882), английский экономист, основатель математической школы западной политэкономии. Преподавая в Манчестерском колледже, а затем Лондонском университете, он явился основоположником теории предельной полезности, предельных издержек и предельных условий «оптимального поведения», внес существенный вклад в теорию индексов (сконструировал взвешенный индекс цен) и дал собственную трактовку деловых циклов. Он вывел экономическую науку из колеи трудовой теории стоимости и направил ее в новое русло. Его заслуги в экономической теории соизмеримы с заслугами Ньютона в физике. Результаты научных исследований Стенли Джевонса были высоко оценены и он был принят в члены Королевского общества. В этом обществе это был второй экономист после В. Петти. К сожалению, Ст. Джевонс в возрасте 47 лет утонул в Темзе.

Другой маржиналист **Кларк Джон Бейтс (1847—1938)**, американский экономист, прожил большую жизнь. Он учился в Европе, преподавал в колледжах США, являлся профессором Колумбийского университета. Он одним из первых применил принципы предельного анализа к экономике, автор теории предельной производительности факторов производства. Однако Дж. Кларк ошибочно полагал, что распределение дохода между владельцами факторов производства (труд, земля, капитал) соответственно предельной производительности факторов является социально справедливым.

Маршалл Альфред (1842—1924), английский экономист, основатель неоклассической экономической теории, математической экономики и Кембриджской экономической школы. Он родился в Лондоне в семье кассира Национального банка Англии. Отец надеялся, что мальчик станет священником. Однако молодой Маршалл имел свои планы. Он прекратил заниматься теологией и начал в Кембридже изучать математику. Одновременно он занимался философией и экономикой.

В 1863 г. он получил степень магистра математики и поставил перед собой цель укрепления классической экономической теории с помощью математики. Будучи профессором и руководителем кафедры политэкономии Кембриджского университета (1885—1908), А. Маршалл скоро перерос рамки классической школы. В своем труде «Принципы экономики» («Principles of economics»), вышедшем в 1890 г., он заложил основы неоклассической школы и математической экономики. Этот труд на протяжении многих десятилетий служил основным учебником по экономической теории во многих странах мира.

По Маршаллу, достижение на рынке посредством цен равновесия между спросом и предложением лежит в основе почти всех экономических проблем. Его модель «спрос—предложение» — один из наиболее полезных инструментов в арсенале экономиста. Он сформулировал свойства кривой спроса, дал понятие эластичности спроса от цены, ввел в анализ понятия мгновенного, короткого и длительного периодов, показав как зависит цена от длительности рассматриваемого периода.

Особые заслуги А. Маршалла состоят в том, что он воспитал целую плеяду великих ученых-экономистов. Достаточно сказать, что под его руководством в Кембриджском университете получили образование такие известнейшие экономисты, как Артур Пигу и Джон М. Кейнс.

Кейнс Джон Мейнард (1883—1946), английский экономист и государственный деятель, основатель макроэкономики. Отец Кейнса читал лекции в Кембриджском университете по экономике и логике. После школы Дж. Кейнс поступил в частный колледж Итона, затем в Королевский колледж Кембриджского университета. Его любимым предметом стала экономика, а любимыми учителями — А. Маршалл и А. Пигу. После окончания Кембриджского университета (1906) Кейнс поступает на работу в государственное Управление по делам Индии. Однако служба в этом учреждении показалась ему скучной, и через два года он уплывает в Бомбей.

По приглашению своего учителя А. Маршалла Кейнс в 1909 г. возвращается в Кембриджский университет, где читает лекции по экономике и занимается научной работой. Опубликование им в 1913 г. первой экономической монографии «Индийская валюта и финансы» имела своим следствием назначение Дж. Кейнса членом Королевской комиссии по финансам Индии. В работе «Трактат о вероятностях» («Treatise on probability», 1919) Кейнс широко применяет математические уравнения.

После первой мировой войны участвовал в работе Парижской мирной конференции в качестве главного представителя Британского казначейства. Выступал против чрезмерных репараций в Германии. Его предложения о размере репараций в 2 млрд ф. ст. были почти в 12 раз меньше цифры, предложенной банком Англии. Кейнс предвидел, что за намеренное обнищание Германии последует возмездие, которое не заставит себя долго ждать. Он выступал за предоставление Германии американских займов, предвосхитив известный план Маршалла для послевоенной Европы. Из-за несогласия с величиной репараций Кейнс покинул Парижскую мирную конференцию.

В 1920-е годы в своих работах Кейнс критикует политику невмешательства государства в экономику, принцип «laissez faire». После посещения в середине 20-х годов Советского Союза Кейнс в статье «Беглый взгляд на Россию» очень пессимистично отозвался о ее экономической системе.

В главном своем труде «Общая теория занятости, процента и денег» (1936) Кейнс показал, что экономика страны не просто сумма составляющих ее малых подсистем — фирм и домашних хозяйств, а нечто качественно иное. А раз это так, то бесполезно давать микроэкономические ответы на макроэкономические проблемы. Кейнс выступает за активное государственное регулирование экономики. Центральным понятием в кейнсианской модели выступает эффективный спрос, который стимулирует производство. Задача государства состоит в поддержании *эф-*

фективного спроса, основными компонентами которого являются *потребление домашних хозяйств, инвестиции, госрасходы* и *чистый экспорт.* В развитой экономике обычно значительная часть национального дохода не потребляется, а выступает в виде сбережений, отложенного спроса. Отсюда время от времени наступают кризисы перепроизводства. Задача государства состоит в том, чтобы через бюджетно-налоговую и кредитно-денежную политику активизировать сбережения, повысить эффективный спрос. Для этого пригодны льготное налогообложение и кредитование, государственные закупки товаров и услуг, инвестиции в производственную и социальную инфраструктуру, стимулирование экспорта, который расширяет рынок. Возникающий при этом бюджетный дефицит может покрываться как за счет внутренних и внешних займов, так и в известных пределах за счет денежной эмиссии. Все это создает условия для полной занятости и повышает эффективный спрос и, наоборот, эффективный спрос создает условия для полной занятости.

Кейнс разработал модель общего экономического равновесия, развил понятие мультипликатора, исследовал вопросы денежного обращения, инфляции, международной денежной системы. Его идеи воплотились в многочисленных программах государственного регулирования экономики, в создании Международного Валютного Фонда.

Незаурядность Кейнса проявилась во всем. Он составил себе солидный капитал, успешно играя на бирже. Будучи казначеем Кембриджского Королевского колледжа, укрепил его финансовое положение. Он дружил со многими знаменитыми людьми. Женой Кейнса была прима Дягилевского балета Лидия Лопухина. Он безвозмездно помогал балетной труппе, а в 1935 г. в Кембридже построил здание театра.

За научные заслуги Кейнс в 1945 г. был удостоен звания лорда. Он стал основателем направления в экономической теории, которое теперь носит его имя. Однако, в отличие от многих своих последователей, он рассматривал экономическую теорию не как свод норм, правил, законов, предназначенных для того, чтобы «...давать советы, немедленно применимые в политике. Это скорее метод, чем доктрина, аппарат мышления, техника обдумывания, помогающая тому, кто овладел этим методом, делать корректные выводы».

В создание и использование эконометрических моделей существенный вклад внесли Роналд Фишер, Рагнар Фриш и Ян Тинберген.

Фишер Роналд Эйлмер (1890—1962), английский статистик и генетик. Является одним из основателей математической статистики, с помощью которой оцениваются параметры уравнения регрессии. Он учился в Кембридже, работал в отделе статистики одной из экспериментальных станций, преподавал в Кембриджском университете. Внес вклад в теорию статистической проверки гипотез, разработал методику планирования эксперимента. За научные заслуги был избран в члены Лондонского королевского общества.

Фриш Рагнар Антон Киттиль (1895—1973), норвежский экономист, один из основателей эконометрии. Окончил университет в Осло и в течение 34 лет (с 1931 по 1965 г.) преподавал в том же университете. Его научная и практическая деятельность охватывает теорию программирования и макроэкономического планирования, теорию экономических моделей циклического, общего равновесного и неравновесного экономического развития, экономическую динамику и математическую статистику. Фриш — автор норвежского варианта системы национальных счетов. Он первым определил эконометрию как синтез экономической теории, статистики и математики. В 1930 г. он организовал Эконометрическое общество и стал первым редактором журнала «Эконометрика». В 1969 г. за научный вклад «в формирование понятий эконометрии и математической экономии» ему была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Тинберген Ян (1903—1994), нидерландский экономист, видный представитель современной математической экономии. Окончил Лейденский университет, работал в центральных экономических ведомствах Нидерландов, в Комитете по планированию ООН, преподавал в Школе экономики и Лейденском университете,. Его работы посвящены теории экономического роста, государственного регулирования экономики, составлению долгосрочных программ экономического развития. Он в числе первых совершил переход от концептуальных моделей к расчетным. В 1969 г. «за научный вклад в области эконометрии и математического представления экономической теории» награжден Нобелевской премией по экономике.

Леонтьев Василий Васильевич (1906—1999), американский экономист русского происхождения. Родился в С.-Петербурге. Там же в 1921—1925 гг. он изучал философию, социологию и экономические науки. Затем учился в аспирантуре в Берлинском университете, где в 1928 г. получил степень доктора философии. С 1927 г. младший научный сотрудник Кильского института мировой экономики, с 1929 г. работает в Китае в качестве экономического советника при министерстве железных дорог. В 1931 г. эмигрирует в США, где до 1975 г. преподает экономику в Гарвардском университете. В 1946 г. организует Центр экономического анализа, который впоследствии прославил Гарвардскую экономическую школу. С 1975 по 1986 г. — директор Нью-Йоркского института экономического анализа.

В 1941 г. опубликовал первую крупную монографию «Структура американской экономики 1919—1929 гг.», в которой изложил основы нового метода экономического анализа и прогнозирования, получившего название метод «затраты—выпуск» (Input—Output), известный в отечественной литературе как метод межотраслевого баланса. Этот метод, благодаря его строгой математической формализации, стал применяться в большинстве стран мира, в учреждениях ООН и принес его автору широкую известность. В последующих работах он развивал свой метод и создал динамический вариант модели «затраты—выпуск», учитывавшей технический прогресс, изменение цен и базировавшийся на гибких коэффициентах.

Под руководством В. Леонтьева группа экспертов по заказу ООН подготовила доклад-прогноз «Будущее мировой экономики», который был переведен и опубликован в СССР на русском языке в 1979 г.

В 1973 г. удостоен Нобелевской премии «за развитие метода экономического анализа "затраты—выпуск"», используемого в различных формах более чем в 50 промышленных странах для планирования и прогнозирования.

Объясняя студентам, как функционирует экономика, он сравнивал ее с яхтой в море. «Чтобы дела шли хорошо, нужен ветер — это заинтересованность, руль — это государственное регулирование... Самое трудное состоит в том, чтобы найти правильное соотношение между ответственными действиями предприятий и государства».

Перед экономической наукой всегда стояла проблема, как наилучшим образом использовать ограниченные экономические ресурсы. Поиском оптимума в экономике занимались многие экономисты. Однако наиболее существенный вклад в теорию оптимального распределения ресурсов с созданием соответствующих моделей внесли Л.В. Канторович и Т. Купманс.

Канторович Леонид Витальевич (1912—1986), советский математик и экономист. В 1930 г. окончил Ленинградский университет. С 1934 по 1960 г. работал профессором в этом же университете, затем в институтах Академии наук в Новосибирске и Москве, Академии народного хозяйства. С 1964 г. — академик АН СССР.

Еще до войны Л.В. Канторович опубликовал статью об оптимальном раскрое материала, открыв тем самым метод линейного программирования. Работы Л.В. Канторовича получили признание во всем мире. В 1975 г. он единственный из советских экономистов был удостоен Нобелевской премии (вместе с Т. Купмансом) за «вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Купманс Тьяллинг (1910—1985), американский экономист голландского происхождения. В 1933 г. окончил университет в Утрехте. Работал профессором в Нидерландской школе экономики, затем в финансовом секретариате Лиги Наций. В 1940 г. переехал в США. Работал исследователем в Принстонском университете, в коммерческих фирмах. С 1944 по 1985 г. — профессор в Чикагском и Йельском университетах.

Т. Купманс инициатор целого ряда направлений исследований в математическом программировании и эконометрии. В 1975 г. он был удостоен Нобелевской премии (вместе с Л.В. Канторовичем) за «вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Фридмэн Милтон (р. 1912), американский экономист, глава монетаристского направления в современной экономической науке, глава Чикагской экономической школы. Он родился в Нью-Йорке в бедной семье иммигрантов из Восточной Европы.

В 1928—1932 гг. — студент Рутгерского университета, после окончания которого получил степень бакалавра по математике и экономике. В 1933 г. в Чикагском университете получил степень магистра и начал заниматься научной работой. Во время второй мировой войны — сотрудник казначейства США, занимается налогами и военно-экономическими исследованиями. После окончания войны выступал в качестве консультанта при реализации плана Маршалла. С 1948 г. возвращается в Чикагский университет.

На формирование научных позиций М. Фридмэна большое влияние оказали идеи экономистов Кембриджской школы, американского экономиста-математика, первого президента Международного эконометрического общества Ирвинга Фишера (1867—1947) и его знаменитое «уравнение обмена», а также сотрудничество с такими крупными учеными-экономистами, как Саймон Кузнец — лауреат Нобелевской премии по экономике 1971 г., Герберт Саймон — лауреат Нобелевской премии по экономике 1978 г. и др.

В своих многочисленных трудах М. Фридмэн выступает за возврат к традиционным критериям рыночной экономики, за сужение государственного регулирования экономики, так как «ни одно правительство не может быть мудрее рынка». «За неизбежные ошибки правительства мы отвечаем своими деньгами, а оно — нашими». Он выступает за оздоровление денежного обращения, сфера кредитно-денежных отношений — основная для теоретических изысканий и практических рекомендаций. Экономические идеи М. Фридмэна и его сторонников получили название монетаризма.

Фридмэн подметил отсутствие жесткой связи между ростом дохода и потреблением, цель которого состоит в сохранении относительно устойчивого жизненного стандарта. Потребитель стремится сохранить его даже в периоды снижения текущих доходов. Отсюда некорректность кейнсианской теории «эффективного спроса». Однако основной удар по кейнсианской концепции «накачивания спроса» был нанесен возникшей в середине 70-х годов в развитых странах Запада стагфляцией — периодом хронической инфляции и спадом экономической активности. Устранить ее удалось с помощью рецептов монетаристов, а не сторонников кейсианства. Однако монетаризм не содержит абсолютных рецептов экономического роста. Существует, например, британская версия монетаризма М. Тэтчер, польская версия Джеффри Сакса («шоковая терапия») и др. Главное в монетаризме — это обеспечение стабильности «путем оздоровления денежного обращения, освобождения рыночных сил от пут регулирования, создание атмосферы, в которой человек обретает экономическую свободу, а предприниматель стремится к капиталовложениям, новациям, риску».

С 1967 г. М. Фридмэн — президент Американской экономической ассоциации. Нобелевская премия присуждена ему в 1976 г. В решении Нобелевского комитета отмечена книга М. Фридмэна «Капитализм и свобода», а также указано, «что редко случается, чтобы экономист оказывал столь сильное влияние не только на экономические исследования, но и на актуальную практику».

Глава II

ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

§1. Понятие корреляционного и регрессионного анализа

Для решения задач экономического анализа и прогнозирования очень часто используются статистические, отчетные или наблюдаемые данные. При этом полагают, эти данные являются значениями случайной величины.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от случая принимает различные значения с некоторой вероятностью. Закон распределения случайной величины показывает частоту ее тех или иных значений в общей их совокупности.

При исследовании взаимосвязей между экономическими показателями на основе статистических данных часто между ними наблюдается стохастическая зависимость. Она проявляется в том, что изменение закона распределения одной случайной величины происходит под влиянием изменения другой. Взаимосвязь между величинами может быть полной (функциональной) и неполной (искаженной другими факторами).

Пример функциональной зависимости — выпуск продукции и ее потребление в условиях дефицита.

Неполная зависимость наблюдается, например, между стажем рабочих и их производительностью труда. Обычно рабочие с большим стажем трудятся лучше молодых, но под влиянием дополнительных факторов — образование, здоровье и т.д. эта зависимость может быть искажена.

Раздел математической статистики, посвященный изучению взаимосвязей между случайными величинами, называется *корреляционным анализом* (*от лат.* correlatio — соотношение, соответствие). Основная задача корреляционного анализа — это установление характера и тесноты связи между результативными (зависимыми) и факторными (независимыми) показателями (признаками) в данном явлении или процессе. Корреляционную связь можно обнаружить только при массовом сопоставлении фактов.

Характер связи между показателями определяется по корреляционному полю. Если y — зависимый признак, а x — независимый, то, отметив каждый случай $x(i)$ с координатами x_i и y_i, получим корреляционное поле. По расположению точек можно судить о характере связи (рис. 2.1).

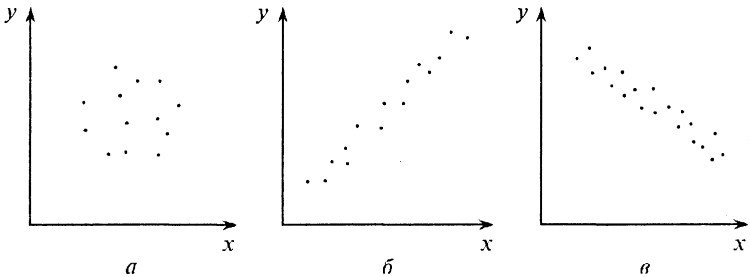

Рис. 2.1. Примеры корреляционных полей:

а — переменные x и y не коррелируют; *б* — наблюдается сильная положительная корреляция; *в* — наблюдается слабая отрицательная корреляция

Теснота связи определяется с помощью коэффициента корреляции, который рассчитывается специальным образом и лежит в интервалах от минус единицы до плюс единицы. Если значение коэффициента корреляции лежит в интервале от 1 до 0,9 по модулю, то отмечается очень сильная корреляционная зависимость. В случае, если значение коэффициента корреляции лежит в интервале от 0,9 до 0,6, то говорят, что имеет место слабая корреляционная зависимость. Наконец, если значение коэффициента корреляции находится в интервале от –0,6 до 0,6, то говорят об очень слабой корреляционной зависимости или полном ее отсутствии.

Таким образом, корреляционный анализ применяется для нахождения характера и тесноты связи между случайными величинами.

Регрессионный анализ своей целью имеет вывод, определение (идентификацию) уравнения регрессии, включая статистическую оценку его параметров. Уравнение регрессии позволяет найти значение зависимой переменной, если величина независимой или независимых переменных известна[1].

Практически, речь идет о том, чтобы, анализируя множество точек на графике (т.е. множество статистических данных), найти линию, по возможности точно отражающую заключенную в этом множестве закономерность (тренд, тенденцию), — линию регрессии.

По числу факторов различают одно-, двух- и многофакторные уравнения регрессии.

По характеру связи однофакторные уравнения регрессии подразделяются:

а) на линейные:

$$y = a + bx\ ,$$

где x — экзогенная (независимая) переменная, y — эндогенная (зависимая, результативная) переменная, a, b — параметры;

б) степенные:

$$y = a \cdot x^b\ ,$$

в) показательные:

$$y = a \cdot b^x\ ,$$

г) прочие.

§2. Определение параметров линейного однофакторного уравнения регрессии

Пусть у нас имеются данные о доходах (x) и спросе на некоторый товар (y) за ряд лет (n):

[1] Ряд авторов считают корреляционный анализ частью регрессионного анализа, а другие полагают, что регрессионный анализ является частью корреляционного как общей теории взаимосвязи между случайными величинами.

Год i	Доход x	Спрос y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
...	...	...
n	x_n	y_n

Предположим, что между x и y существует линейная взаимосвязь, т.е.

$$y = a + bx .$$

Для того, чтобы найти уравнение регрессии, прежде всего нужно исследовать тесноту связи между случайными величинами x и y, т.е. корреляционную зависимость.

Пусть

$x_1, x_2, ..., x_n$ — совокупность значений независимого, факторного признака;

$y_1, y_2, ..., y_n$ — совокупность соответствующих значений зависимого, результативного признака;

n — количество наблюдений.

Для нахождения уравнения регрессии вычисляются следующие величины:

1. Средние значения

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ — для экзогенной переменной;

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$ — для эндогенной переменной.

2. Отклонения от средних величин

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \qquad \Delta y_i = y_i - \bar{y} .$$

3. Величины дисперсии и среднего квадратичного отклонения

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n-1}, \qquad D_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2}{n-1};$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y}.$$

Величины дисперсии и среднего квадратичного отклонения характеризуют разброс наблюдаемых значений вокруг среднего значения. Чем больше дисперсия, тем больше разброс.

4. Вычисление корреляционного момента (коэффициента ковариации):

$$K_{x,y} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_1 + \Delta x_2 \cdot \Delta y_2 + \ldots + \Delta x_n \cdot \Delta y_n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \Delta y_i}{n-1}.$$

Корреляционный момент отражает характер взаимосвязи между x и y. Если $K_{x,y} > 0$, то взаимосвязь прямая. Если $K_{x,y} < 0$, то взаимосвязь обратная.

5. Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$R_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Доказано, что коэффициент корреляции находится в интервале от минус единицы до плюс единицы $(-1 \le R_{x,y} \le 1)$. Коэффициент корреляции в квадрате $(R^2_{x,y})$ называется коэффициентом детерминации.

Если $R_{x,y} \ge |0,8|$, то вычисления продолжаются.

6. Вычисления параметров регрессионного уравнения.

Коэффициент b находится по формуле

$$b = \frac{K_{x,y}}{D_x}.$$

После чего можно легко найти параметр a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} .$$

Коэффициенты a и b находятся методом наименьших квадратов, основная идея которого состоит в том, что за меру суммарной погрешности принимается сумма квадратов разностей (остатков) между фактическими значениями результативного признака y_i и его расчетными значениями $y_{i\,р}$, полученными при помощи уравнения регрессии

$$y_{iр} = a + bx_i .$$

При этом величины остатков находятся по формуле

$$u_i = y_i - y_{iр} ,$$

где y_i — фактическое значение y; $y_{i\,р}$ — расчетное значение y.

Пример. Пусть у нас имеются статистические данные о доходах (x) и спросе (y). Необходимо найти корреляционную зависимость между ними и определить параметры уравнения регрессии.

Год i	Доход x	Спрос y
1	10	6
2	12	8
3	14	8
4	16	10,3
5	18	10,5
6	20	13

Предположим, что между нашими величинами существует линейная зависимость.

Тогда расчеты лучше всего выполнить в Excel, используя статистические функции:

СРЗНАЧ — для вычисления средних значений;

ДИСП — для нахождения дисперсии;

СТАНДОТКЛОН — для определения среднего квадратичного отклонения;

КОРЕЛЛ — для вычисления коэффициента корреляции.

Корреляционный момент можно вычислить, найдя отклонения от средних значений для ряда x и ряда y, затем при помощи функции СУММПРОИЗВ определить сумму их произведений, которую необходимо разделить на $n-1$.

Результаты вычислений можно свести в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Параметры линейного однофакторного уравнения регрессии

Показатели	x	y
Среднее значение	15	9,3
Дисперсия	14	6,08
Среднее квадратичное отклонение	3,7417	2,4658
Корреляционный момент	8,96	
Коэффициент корреляции	0,9712	
Параметры	$b = 0,64$	$a = -0,3$

В итоге наше уравнение будет иметь вид

$$y = -0,3 + 0,64x\,.$$

Используя это уравнение, можно найти расчетные значения y и построить график (рис. 2.2).

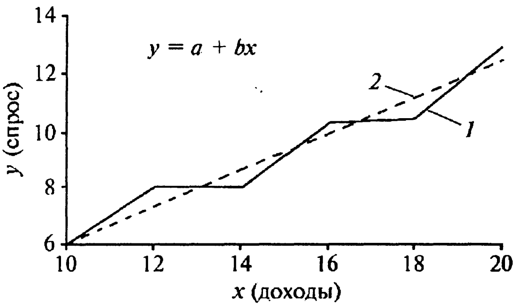

Рис. 2.2. Фактические (*1*) и расчетные (*2*) значения **y**

Ломаная линия на графике отражает фактические значения y, а прямая линия построена с помощью уравнения регрессии и отражает тенденцию изменения спроса в зависимости от дохода.

Однако встает вопрос, насколько значимы параметры a и b? Какова величина погрешности?

§3. Оценка величины погрешности линейного однофакторного уравнения

1. Обозначим разность между фактическим значением результативного признака и его расчетным значением как u_i:

$$u_i = y_i - y_{i\,\text{р}},$$

где y_i — фактическое значение y; $y_{i\,\text{р}}$ — расчетное значение y; u_i — разность между ними.

2. В качестве меры суммарной погрешности выбрана величина

$$S = \frac{\sum\limits^{n} u_i^2}{n-2}.$$

Для нашего примера $S = 0{,}432$.

Поскольку $\bar{u}$ (среднее значение остатков) равно нулю, то суммарная погрешность равна остаточной дисперсии.

3. Остаточная дисперсия находится по формуле

$$D_u = \frac{\sum (u_i - \bar{u})^2}{n-2} = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = S.$$

Для нашего примера $D_u = 0{,}432$. Можно показать, что

$$D_u = \left(1 - R_{x,y}^2\right) \cdot D_y.$$

Если $R_{x,y}^2 = 1$, то $D_u = 0$;

$R_{x,y}^2 = 0$, то $D_u = D_y$.

Таким образом, $0 \le D_u \le D_y$.

Легко заметить, что если

$$R_{x,y} = 0{,}9, \text{ то } D_u = (1 - 0{,}81) \cdot D_y = 0{,}91 \cdot D_y .$$

Это соотношение показывает, что в экономических приложениях допустимая суммарная погрешность может составить не более 20% от дисперсии результативного признака D_y.

4. Стандартная ошибка уравнения находится по формуле

$$\sigma_u = \sqrt{D_u} ,$$

где D_u — остаточная дисперсия. В нашем случае $\sigma_u = 0{,}6572$.

5. Относительная погрешность уравнения регрессии вычисляется как

$$\vartheta = \frac{\sigma_u}{\bar{y}} \cdot 100\% ,$$

где σ_u — стандартная ошибка; $\bar{y}$ — среднее значение результативного признака.

В нашем случае $\vartheta = 7{,}07\%$.

Если величина ϑ мала и отсутствует автокорреляция остатков, то прогнозные качества оцененного регрессионного уравнения высоки.

6. Стандартная ошибка коэффициента b вычисляется по формуле

$$S_b = \frac{\sigma_u}{\sqrt{nD_x}} .$$

В нашем случае она равна $S_b = 0{,}07171$.

Для вычисления стандартной ошибки коэффициента a используется формула

$$S_a = \sigma_u \sqrt{\frac{D_x + \bar{x}^2}{n \cdot D_x}} .$$

В нашем примере $S_a = 1{,}108$.

Стандартные ошибки коэффициентов используются для оценивания параметров уравнения регрессии.

Коэффициенты считаются значимыми, если

$$\frac{S_a}{|a|} < 0{,}5; \qquad \frac{S_b}{|b|} < 0{,}5.$$

В нашем примере

$$\frac{S_a}{|a|} = \frac{1{,}108}{|0{,}3|} = 3{,}69, \qquad \frac{S_b}{|b|} = \frac{0{,}07171}{0{,}64} = 0{,}112.$$

Коэффициент a не значим, так как указанное отношение больше 0,5, а относительная погрешность уравнения регрессии слишком высока — 26,7%.

Стандартные ошибки коэффициентов используются также для оценки статистической значимости коэффициентов при помощи t-критерия Стьюдента. Значения t-критерия Стьюдента содержатся в справочниках по математической статистике. В таблице 2.2 приводятся его некоторые значения.

Далее находятся максимальные и минимальные значения параметров (b^-, b^+) по формулам:

$$b^- = b - t_{\text{Ст}} \cdot S_b,$$

$$b^+ = b + t_{\text{Ст}} \cdot S_b.$$

Таблица 2.2

Некоторые значения t-критерия Стьюдента

Степени свободы	Уровень доверия (c)	
(n–2)	0,90	0,95
1	6,31	12,71
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78
5	2,02	2,57

Для нашего примера находим

$$b^- = 0{,}64 - 2{,}78 \cdot 0{,}07171 = 0{,}44\,,$$

$$b^+ = 0{,}64 + 2{,}78 \cdot 0{,}07171 = 0{,}839\,.$$

Если интервал (b^-, b^+) достаточно мал и не содержит ноль, то коэффициент b является статистически значимым на c-процентном доверительном уровне.

Аналогично находятся максимальные и минимальные значения параметр a. Для нашего примера

$$a^- = -0{,}3 - 2{,}78 \cdot 1{,}108 = -3{,}38\,,$$

$$a^+ = -0{,}3 + 2{,}78 \cdot 1{,}108 = 2{,}78\,.$$

Коэффициент a не является статистически значимым, так как интервал (a^-, a^+) велик и содержит ноль.

Вывод: полученные результаты не являются значимыми и не могут быть использованы для прогнозных расчетов. Ситуацию можно поправить следующими способами:

а) увеличить число n;

б) увеличить количество факторов;

в) изменить форму уравнения.

§4. Проблема автокорреляции остатков. Критерий Дарбина—Уотсона

Часто для нахождения уравнений регрессии используются динамические ряды, т.е. последовательность экономических показателей за ряд лет (кварталов, месяцев), следующих друг за другом.

В этом случае имеется некоторая зависимость последующего значения показателя от его предыдущего значения, которое называется автокорреляцией. В некоторых случаях зависимость такого рода является весьма сильной и влияет на точность коэффициента регрессии.

Пусть уравнение регрессии построено и имеет вид:

$$y_t = a + bx_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n,$$

где u_t — погрешность уравнения регрессии в год t.

Явление автокорреляции остатков состоит в том, что в любой год t остаток u_t не является случайной величиной, а зависит от величины остатка предыдущего года u_{t-1}. В результате при использовании уравнения регрессии могут быть большие ошибки.

Для определения наличия или отсутствия автокорреляции применяется критерий Дарбина—Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(u_t - u_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}.$$

Возможные значения критерия DW находятся в интервале от 0 до 4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $DW \approx 2$.

§5. Построение уравнения степенной регрессии

Уравнение степенной агрессии имеет вид:

$$y = a \cdot x^b,$$

где a, b — параметры, которые определяются по данным таблицы наблюдений.

Таблица наблюдений составлена и имеет вид

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Прологарифмируем исходное уравнение и в результате получим

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x.$$

Обозначим $\ln y$ через y', $\ln a$ как a', а $\ln x$ как x'.

В результате подстановки получим

$$y' = a' + bx'.$$

Данное уравнение есть не что иное, как уравнение линейной регрессии, параметры которого мы умеем находить.

Для этого прологарифмируем исходные данные:

$\ln x$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	...	$\ln x_n$
$\ln y$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	...	$\ln y_n$

Далее необходимо выполнить известные нам вычислительные процедуры по нахождению коэффициентов a и b, используя прологарифмированные исходные данные. В результате получим значения коэффициентов b и a'. Параметр a можно найти по формуле

$$a = e^{a'}.$$

В этих же целях можно воспользоваться функцией EXP в Excel.

§6. Двухфакторные и многофакторные уравнения регрессии

Линейное двухфакторное уравнение регрессии имеет вид

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

где a, b_1, b_2 — параметры; x_1, x_2 — экзогенные переменные; y — эндогенная переменная.

Идентификацию этого уравнения лучше всего производить с использованием функции Excel ЛИНЕЙН[2].

Степенное двухфакторное уравнение регрессии имеет вид

$$y = a x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta},$$

[2] См.: *Матюшок В.М.* Excel 7.0. Общие и экономические расчеты. — М.: Изд-во РУДН, 1997. Глава 6.

где a, α, β — параметры; x_1, x_2 — экзогенные переменные; y — эндогенная переменная.

Для нахождения параметров этого уравнения его необходимо прологарифмировать. В результате получим

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2.$$

Идентификацию этого уравнения также лучше всего производить с использованием функции Excel ЛИНЕЙН. Следует помнить, что мы получим не параметр a, а его логарифм, который следует преобразовать в натуральное число.

Линейное многофакторное уравнения регрессии имеет вид

$$y = a + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n,$$

где a, b_1, b_n— параметры; x_1, x_n — экзогенные переменные; y — эндогенная переменная.

Идентификацию этого уравнения также лучше всего производить с использованием функции Excel ЛИНЕЙН.

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ И СПРОСА

§1. Модели распределения доходов

Рыночный спрос определяется на базе решений, которые принимаются множеством отдельных лиц исходя из их потребностей и располагаемых доходов. Но чтобы распределить средства между разнообразными потребностями, необходимо их как-то сопоставить. В качестве основы для сопоставления различных потребностей в конце XIX века экономисты приняли полезность. Сам термин «полезность» был введен английским философом И. Бентамом (1748—1832). Согласно Бентаму, максимизация полезности является руководящим психологическим принципом поведения людей. Категория полезности была взята на вооружение экономистами и легла в основу теории потребительского поведения, которая в свою очередь базируется на гипотезе о сопоставимости полезностей самых разнообразных благ. Считалось, что при заданных ценах потребители стремятся так распределить свои средства на покупку различных благ, чтобы максимизировать ожидаемое удовлетворение или полезность от их потребления. При этом они руководствуются своими личными вкусами и представлениями.

Экономистами во второй половине XIX века было выдвинуто два подхода к сравнению и соизмерению полезности различных благ — количественный и порядковый.

Практически одновременно английский экономист Стенли Джевонс, австрийский экономист Карл Менгер (1840—1921) и швейцарский экономист Леон Вальрас предложили *количественную* теорию полезности. В основе этой теории лежала гипотеза о возможности соизмерения различных благ. Эту теорию разделял А. Маршалл.

Однако эта теория встретила серьезную критику. Английский экономист Френсис Эджуорт (1845—1926), Вильфредо Парето и американский экономист Ирвинг Фишер предложили альтернативную количественной *порядковую* теорию полезности, которая в настоящее время является наиболее распространенной.

В основе моделей потребительского поведения и спроса находятся модели распределения доходов и теория полезности. Рассмотрим вначале модели распределения доходов.

В основе построения моделей личного потребления лежит принцип распределения потребителей по группам, для формирования которых используются как данные о социальном положении семей, так и сведения об их доходах. В соответствии с этим подходом все множество потребителей, т.е. население страны или региона, рассматривается как совокупность нескольких групп семей, каждая из которых характеризуется определенным уровнем дохода и примерно одинаковым социальным статусом (служащие, рабочие, крестьяне и т.п.). При этом считается, что каждая такая группа обладает некоторой общностью в выборе и предпочтении тех или иных потребительских благ. При разбиении потребителей на группы по различным уровням дохода обычно используют модели распределения доходов различных типов.

Для характеристики равномерности распределения доходов в обществе часто используется так называемая кривая Лоренца. Она строится следующим образом: все множество потребителей данной страны или региона разбивается на некоторое количество групп, обычно равных по численности, но различных по доходам. Затем подсчитывается, какую долю национального дохода получает каждая такая группа, причем счет ведется начиная с группы с наименьшим доходом в сторону его увеличения.

Далее на диаграмме (рис. 3.1) наносятся точки, соответствующие вычисленным долям в процентах. Очевидно, что совершенно равномерному распределению дохода отвечает прямая линия (биссектриса угла на диаграмме), если же распределение неравномерное, то возникает кривая линия, причем ее кривизна и отклонение от биссектрисы будет тем более, чем менее равномерным оказывается распределение доходов.

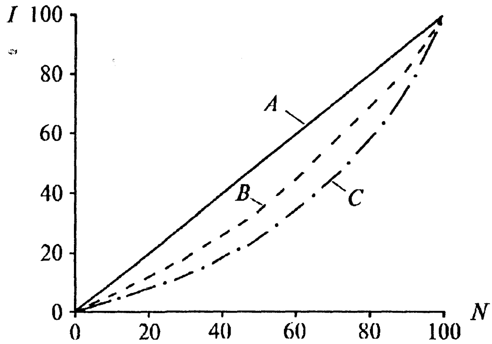

Рис. 3.1. Кривые Лоренца

На рис. 3.1 представлены три случая распределения доходов в случае, когда население разделено на 5 равных по численности (по 20% каждая) групп. Прямая A соответствует равномерному распределению. Кривая B иллюстрирует следующее распределение доходов: 1-я группа имеет 15% дохода, 2-я группа — 18%, 3-я группа — 20%, 4-я группа — 22% и 5-я группа — 25%.

Кривая C отвечает еще более неравномерному распределению доходов: 1-я группа получает 10%, 2-я группа — 15%, 3-я группа — 18%, 4-я группа — 20%, 5-я группа — 37%.

Модель распределения доходов, принадлежащая В. Парето, также предназначена для анализа характера неравномерности доходов в обществе. Она строится следующим образом:

обозначим через I_m — наименьший доход, который может получать семья в данном обществе. Тогда для характеристики относительного числа семей (в процентах) $N(I)$, получающих доход не менее I, может быть использовано соотношение

$$N(I) = \left(\frac{I_m}{I}\right)^{\alpha} \cdot 100 \qquad (\alpha > 0),$$

которое является модификацией формулы В. Парето.

Исследования, проведенные в различных странах и в разные периоды времени, дают основание полагать, что указанное соотношение вполне применимо и в том случае, когда речь идет о доходах от недвижимости и капитальных вложений. При этом показатель α обычно находится в интервале от 1,2 до 2. Очевидно, что меньшие значения α соответствуют более равномерному распределению доходов в обществе, а высокое значение α свидетельствует о резкой дифференциации доходов. В литературе можно встретить мнение о том, что при $\alpha = 1{,}5$ имеет место сравнительно справедливое распределение доходов (рис. 3.2).

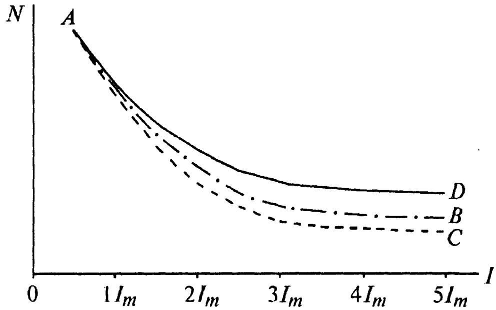

Рис. 3.2. Модель распределения доходов В. Парето

Здесь линия *AB* соответствует распределению дохода с $\alpha = 1{,}5$, линии *AC* и *AD* — значениям $\alpha = 2$ и $\alpha = 1{,}2$.

Разбиение на доходные группы в случае $\alpha = 1{,}5$ может быть выполнено следующим образом:

1-я группа имеет доход от $1I_m$ до $2I_m$, состоит из 65% потребителей;

2-я группа имеет доход от $2I_m$ до $3I_m$, включает 17% потребителей;

третья группа имеет доход от $3I_m$ до $4I_m$, в нее входят 7% потребителей и т.д. (рис. 3.3).

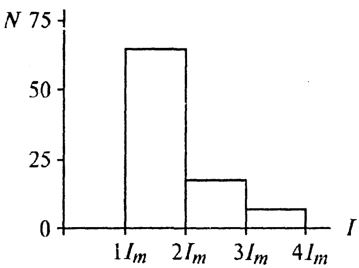

Рис. 3.3. Доходные группы населения при $\alpha = 1{,}5$

Результаты исследований, проведенных в обществах, где основным источником доходов является заработная плата, показывают, что эти доходы распределяются скорее по нормальной кривой, впрочем не совсем симметричной и с урезанными концами (рис. 3.4).

Такой вид кривой объясняется наличием как нижнего, так и верхнего предела заработков; причем возможность получения высокой заработной платы ограничена вследствие воздействия многих факторов, совокупное влияние которых и приводит к квазинормальной кривой распределения доходов.

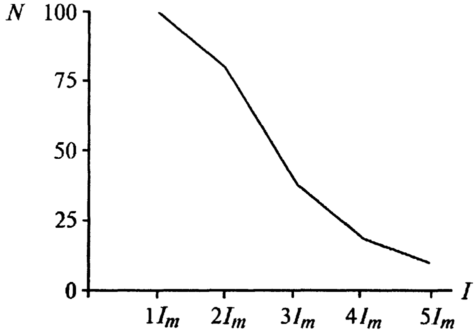

Рис. 3.4. Нормальная кривая распределения доходов

Разбиение на доходные группы в этом случае имеет вид, представленный на рис. 3.5.

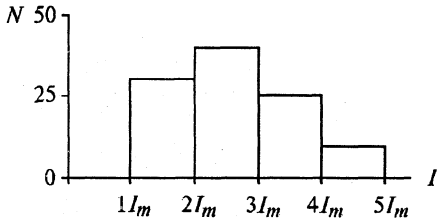

Рис. 3.5. Квазинормальное распределение доходов

Выбор конкретной модели распределения доходов, а следовательно, и способ формирования доходных групп определяются в результате анализа данных о доходах потребителей в рассматриваемом обществе или регионе.

В дальнейшем изложении основ теории потребления мы будем исходить из того, что указанное формирование групп произведено и множество потребителей представлено как совокупность m групп с номерами $i = 1, ..., m$.

При этом, как уже отмечалось выше, предполагается, что члены группы достаточно схожи в определении своих предпочтений, и, следовательно, вся группа может рассматриваться как единый потребитель в вопросах формирования спроса на товары и услуги, выступающие на потребительском рынке.

§2. Количественный подход к анализу полезности и спроса

Количественный подход к анализу полезности основан на представлении о возможности измерения полезности различных благ в гипотетических единицах — ютилах (utility — полезность). Это означает, что конкретный потребитель может сказать, что потребление одной чашки кофе приносит ему удовлетворение в 30 ютилов, двух чашек кофе — 56 ютилов, двух чашек кофе и одной сигареты — в 70 ютилов и т.д.

Следует иметь в виду, что количественные оценки полезности того или иного товара имеют исключительно индивидуальный, субъективный характер. Один и тот же товар может представлять большую ценность для одного потребителя и никакой ценности для другого. Для некурящего и непьющего кофе человека, их потребление не имеет никакой полезности, скорее наоборот приносит вред. Следовательно, количественный подход не имеет возможности объективно измерить полезность того или иного товара в ютилах. Невозможно также сравнить размеры удовлетворения, получаемые различными потребителями. Предполагается, что только конкретный потребитель может дать количественную оценку в ютилах полезности любого потребляемого им товарного набора.

Количественная функция общей полезности (TU), вначале возрастающая, имеет точку максимума (S), после которой она становится убывающей (рис. 3.6). Для конкретных потребителей очень важно почувствовать точку максимума полезности и прекратить избыточное потребление благ. Поэтому и говорят, что самое ценное чувство — это чувство меры.

Предельная полезность (MU) — это прирост общей полезности товарного набора при увеличении объема потребления данного товара на единицу:

$$MU(Q_A) = \frac{d(TU)}{d(Q_A)}.$$

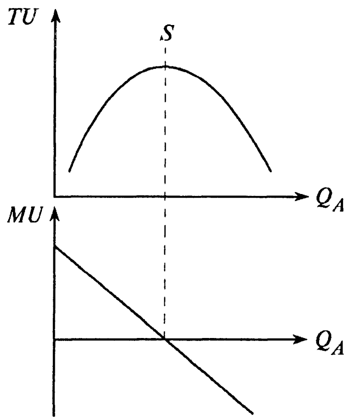

Рис. 3.6. График функции общей (*вверху*) и предельной полезности

Чаще всего, как видно на нижнем графике (см. рис. 3.6), предельная полезность падает и в точке максимума становится равной нулю, а далее — отрицательной.

Однако возможности человека оценивать полезность того или иного товарного набора в определенном количестве единиц полезности подвергнуты сомнению. Более распространенной считается точка зрения, что человеку присущи отношения предпочтения при оценке или полезности тех или иных товаров.

§3. Отношение предпочтения и функция полезности

Теория оптимального выбора потребителя исходит из того, что он осуществляет право сравнения и свободного выбора на некотором множестве X потребительских наборов, в каждый из которых включаются все виды продукции, являющиеся предметами потребления для данной группы семей. Не умаляя общности можно считать, что всякий такой набор состоит из фиксированного числа (n) элементов и имеет вид

$$X = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

где элементы $x_j \geq 0$, поскольку они выражают количество потребляемой продукции.

Далее предполагается, что сравнительная оценка различных наборов данным потребителем с точки зрения его вкусов, привычек, традиций и т.д. может быть выражена при помощи так называемого бинарного отношения слабого предпочтения.

Это отношение определено на множестве потребительских наборов X, выражается формулой «предпочтительнее чем ... или равноценен», записывается при помощи знака $\succcurlyeq$.

Формула $x \succcurlyeq y$, где x и y суть потребительские наборы, означает, что данный потребитель (группа семей) в равных условиях либо предпочтет набор x набору y, либо не видит различия между ними, т.е. считает их равноценными. На базе отношения слабого предпочтения вводится отношение безразличия (равноценности): два набора x и y безразличны для потребителя, если одновременно выполняются условия $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$. Факт равноценности двух наборов обычно записывается при помощи $y \sim x$. Понятие строгого (сильного) предпочтения $\succ$ определяется следующим образом: $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $x \succcurlyeq y$, а соотношение $y \succcurlyeq x$ не имеет места.

В теории потребления обычно исходят из того, что отношение слабого предпочтения удовлетворяет важным предположениям, которые называются аксиомами теории потребления.

Первая аксиома гласит, что рассматриваемое отношение является совершенным, транзитивным и рефлексивным. Совершенность отношения означает, что для любых двух наборов из множества X обязательно имеет место либо соотношение $x \succcurlyeq y$, либо $y \succcurlyeq x$, либо оба вместе, т.е. $x \sim y$.

Это означает, что не существует таких наборов, которые потребитель не мог бы сравнить с другими. Транзитивность отношения состоит в том, что из соотношений $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq z$ следует, что $x \succcurlyeq z$, где x, y, z — потребительские наборы. Это требование отражает совместимость (непротиворечивость) оценок потребителей и вызывает обычно много дополнительных обсуждений. Рефлексивность отношения, т.е. выполнение для любого набора соотношения $x \succcurlyeq x$, вытекает из его совершенства.

Следует заметить, что вследствие выполнения первой аксиомы соответствующее отношение безразличия $\sim$ оказывается так называемым отношением эквивалентности. Это означает, что все множество X потребительских наборов распадается на попарно непересекающиеся множества — классы эквивалентности, каждый из которых называется множеством безразличия.

Рассмотрим два примера отношений предпочтения и соответствующих множеств безразличия:

1) пусть $n = 2$ и количество каждого продукта в наборе $x = (x_1, x_2)$ выражено в весовых единицах (кг), а потребитель строит свою сравнительную оценку следующим образом: «набор x предпочтительнее набора y или равноценен ему, если его суммарный вес больше или равен весу второго набора», т.е. $x \succcurlyeq y$; если $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$.

Нетрудно видеть, что это отношение удовлетворяет первой аксиоме и каждый класс безразличия будет состоять из наборов одинакового веса;

2) лексикографическое предпочтение: количество продуктов в наборе $x = (x_1, x_2)$ выражено в любых единицах, потребитель считает первый продукт чрезвычайно ценным и сравнивает наборы по правилу «набор x предпочтительнее набора y, если количество первого продукта в этом наборе больше его количества в наборе y, а если эти величины в обоих наборах равны, то предпочтение определяется по количеству второго продукта».

Этот способ сравнительной оценки определяется формулой

$$x \succ y, \text{ если } x_1 > y_1$$
$$\text{или, если } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 > y_2.$$

Это отношение также удовлетворяет первой аксиоме, и каждый набор образует свой собственный класс безразличия.

Для множества безразличия, состоящего из наборов, которые равноценны некоторому набору x, используется обозначение

$$C_x = \{\, y \in X \mid y \sim x \,\}.$$

Обозначим множество всех слабо предпочтительных по отношению к x наборов через C_x^+, а множество всех слабо не предпочтительных наборов через C_x^-.

Вторая аксиома теории потребления состоит в том, что для любого набора x оба множества C_x^+ и C_x^- являются замкнутыми подмножествами векторного пространства R_n. Это означает, что оба множества содержат все свои предельные точки и множество безразличия

$$C_x = C_x^+ \cap C_x^-,$$

т.е. определяется как пересечение этих множеств. Отношение предпочтения, обладающее таким свойством, называется непрерывным.

Из выполнения этих двух основных аксиом вытекает, что существует непрерывная скалярная функция $u(x)$, определенная на связном множестве X потребительских наборов и являющаяся индикатором предпочтения, поскольку она обладает следующим характеристическим свойством: $x \succcurlyeq y$ тогда и только тогда, когда $u(x) \geq u(y)$.

Таким образом, если потребитель слабо предпочитает набор x набору y, то значение функции u в точке x будет иметь не меньшее значение, чем в точке y, и, наоборот, если значение индикатора для некоторого набора x не меньше, чем для набора y, то потребитель слабо предпочитает набор x набору y.

Индикатор предпочтения — функция $u(x)$ обычно называется функцией полезности потребительских наборов. Нетрудно видеть, что любое монотонное преобразование функции полезности, например функции $\ln u$, e^u или $au + b$ (где $a > 0$), может играть роль функции полезности, поскольку оно обладает указанным характеристическим свойством. Таким образом, функция полезности не является измерителем какой-то конкретной «полезности», но лишь дает представление о ранжировании (порядке) различных наборов, почему она и называется часто функцией порядковой, или ординальной, полезности.

Заметим, что каждому множеству C_x безразличия соответствует свое постоянное значение функции полезности: $u(x) = \text{const}$.

Рассмотрим с точки зрения построения функций полезности приведенные выше примеры:

1) «весовое» предпочтение удовлетворяет обеим аксиомам теории потребления, а в качестве функции полезности можно использовать сам вес набора, т.е.

$$u(x) = u(x_1, x_2) = x_1 + x_2;$$

2) лексикографическое упорядочение не является непрерывным, поскольку предпочтительное множество (C_x^+) и непредпочтительное множество (C_x^-) не пересекаются между собой. В связи с этим функция полезности (индикатор предпочтения) здесь не существует.

Порядковый подход к анализу полезности является наиболее распространенным. От потребителя не требуется, чтобы он умел соизмерять блага в каких-то искусственных единицах измерения. Достаточно, чтобы потребитель был способен упорядочить все возможные товарные наборы по их «предпочтительности». В порядковой теории полезности понятие «полезность» означает не что иное, как порядок предпочтения. Утверждение: «Набор А предпочтительнее для данного потребителя, чем набор В», — то же самое, что и утверждение: «Набор А полезнее для данного потребителя, чем набор В». Вопрос, на сколько единиц полезнее набор А, чем набор В, не ставится. Потребитель выбирает предпочтительный набор товаров из всех доступных для него.

Рассмотрим наборы только из двух товаров x и y. (Товары x и y можно рассматривать как комбинированные товары.)

Отношения предпочтения, характерные для каждого индивида, отражают посредством кривой безразличия (рис. 3.7).

Кривая безразличия отражает множество точек, каждая из которых представляет собой такой набор из двух товаров, что потребителю безразлично, какой из этих наборов выбрать. Наборы А и В с точки зрения данного потребления равноценны и лежат на одной и той же кривой безразличия. Для нашего потребителя любой набор, лежащий на кривой II, предпочтительнее любого набора, лежащего на кривой I, и т.д.

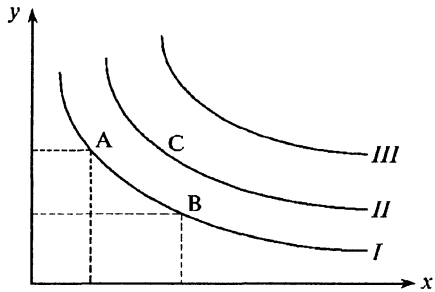

Рис. 3.7. Кривые безразличия

В зависимости от функций полезности различают следующие типы кривых безразличия:

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ (чай и кофе) имеет вид

$$u = ax + by,$$

где a, b — параметры; u — полезность; x, y — товары.

Из функции полезности можно найти y:

$$y = \frac{u - ax}{b}$$

и построить кривые безразличия линейного типа (рис. 3.8).

2. Неоклассическая функция полезности имеет вид

$$u = x^a y^b,$$

где $a + b \leq 1$.

Чтобы построить кривые безразличия (рис. 39), необходимо найти y:

$$y = \left(\frac{u}{x^a}\right)^{\frac{1}{b}}.$$

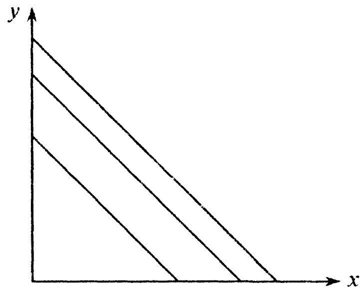

Рис. 3.8. Кривые безразличия линейного типа

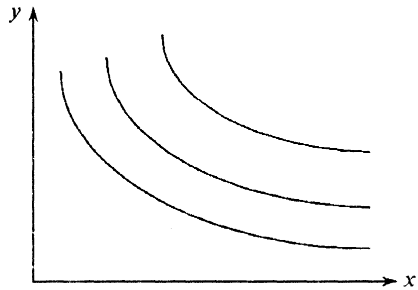

Рис. 3.9. Кривые безразличия неоклассического типа

3. Функции с полным взаимодополнением благ (при увеличении спроса на одно из двух благ растет спрос и на второе благо, например, сахар и чай, бензин и моторное масло) имеют кривые безразличия в виде точки на пересечении двух прямых (рис. 3.10). Избыток одного блага не имеет значения. Полезность достигается лишь при определенной комбинации обоих благ:

$$u = \min\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right).$$

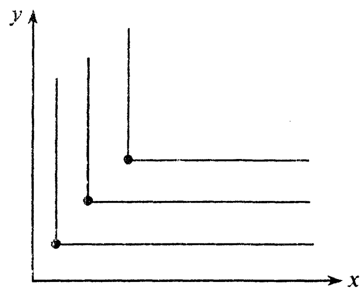

Рис. 3.10. Кривые безразличия функций с полным взаимодополнением благ

Основным рабочим понятием порядковой теории полезности является предельная норма замещения (*MRS* — marginal rate of substitution).

Предельной нормой замещения блага x благом y (MRS_{xy}) называют количество блага y, которое должно быть сокращено «в обмен» на увеличение количества блага x на единицу, с тем чтобы уровень удовлетворения потребителя остался неизменным:

$$MRS_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ при условии, что } u = \text{const}.$$

§4. Решение задачи об оптимальном выборе потребителя

Кривые безразличия графически отражают систему предпочтений потребителя. Естественно потребитель стремится приобрести товарный набор, принадлежащий наиболее удаленной от начала координат кривой безразличия. Однако это не всегда возможно, так как потребительское поведение ограничивается средствами, которыми он располагает.

Если обозначать рыночные цены блага x через p_x, а блага y через p_y, а его доход через I, то бюджетное ограничение потребителя можно записать в виде уравнения

$$I = p_x x + p_y y\,.$$

Доход потребителя равен сумме его расходов на покупку товаров x и y.

Преобразуем уравнение и получим уравнение бюджетной линии, которая имеет вид прямой линии (рис. 3.11). Чем выше доход, тем дальше от начала координат находится линия бюджетного ограничения:

$$y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\,.$$

Пусть заданы линия бюджетного ограничения и несколько кривых безразличия. Какой товарный набор выбирает потребитель?

Оптимум потребителя будет в точке C (рис. 3.12). В рамках бюджетного ограничения индивид постарается так распределить свой доход между различными благами, чтобы максимизировать полезность u. Соответствующий набор благ называется оптимальным планом потребления и обычно обозначается точкой касания бюджетной линии и кривой безразличия.

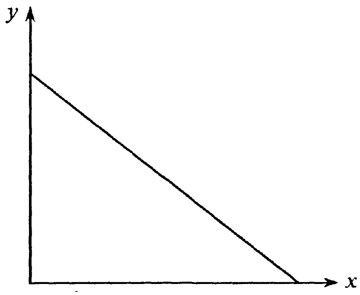

Рис. 3.11. Бюджетная линия

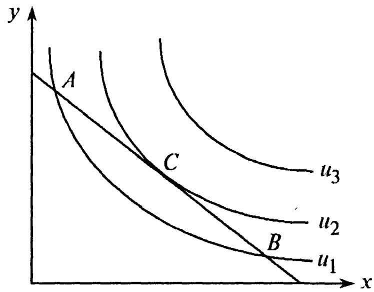

Рис. 3.12. Оптимальный выбор потребителя

В точке оптимума выполняется равенство

$$\frac{p_x}{p_y} = MRS_{xy}.$$

Соотношение цены блага x к цене блага y равно предельной норме замещения блага x благом y.

В общем случае рассмотрим потребителя (группу семей) с определенным доходом I, предназначенным для приобретения набора товаров $x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$, цены которых соответственно равны $p = (p_1, ..., p_j, ..., p_n)$.

Здесь x, p — неотрицательные векторы.

Ограниченность возможного выбора потребителя выражается с помощью бюджетного ограничения:

$$(p, x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq I.$$

Постановка задачи оптимального выбора потребителя может быть сформулирована двояко:

а) в терминах отношения предпочтения: наилучшим (оптимальным) считается набор $\hat{x}$, который является «наиболее предпочтительным по отношению $\succcurlyeq$» среди всех неотрицательных векторов x, удовлетворяющих бюджетному ограничению. Наиболее предпочтительным на множестве R обычно называется набор $\hat{x}$, обладающий тем свойством, что он удовлетворяет условию

$$\hat{x} \succcurlyeq x \text{ для всех } x \in R.$$

Очевидно, что единственность такого набора, вообще говоря, не обеспечена;

б) в терминах функции полезности: оптимальный набор $\hat{x}$ соответствует наибольшему значению $u(x)$ в указанных выше условиях, т.е. является решением задачи:

$$u(x) = u(x_1, ..., x_j, ..., x_n) \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq I; \; x_j \geq 0 \; (j = 1, ..., n).$$

При анализе задачи оптимального выбора обычно применяется еще одно важное предположение теории потребления, которое носит название гипотезы ненасыщения потребителя и состоит в том, что для любых двух наборов x и y справедливо соотношение

$$\text{если } x \geq y, \text{ то } x \succcurlyeq y.$$

Также считается справедливым и более точное соотношение

$$\text{если } x \geq y \text{ и } x \neq y, \text{ то } x \succ y.$$

Это означает, что для «ненасыщаемого» потребителя всякий набор x, который содержит любого продукта столько же либо (хотя бы по одной позиции) несколько больше, чем набор y, оказывается более предпочтительным. Предположение о ненасыщении при помощи функции полезности выражается следующим образом:

$$\text{если } x \geq y, \text{ то } u(x) \geq u(y),$$
$$\text{если } x \geq y \text{ и } x \neq y, \text{ то } u(x) > u(y).$$

Таким образом, функция полезности является монотонно возрастающей по каждому аргументу x_j.

Если функция полезности имеет производные по своим аргументам, то из предположения о ненасыщаемости (и монотонности $u(x)$) следует, что все первые частные производные функции полезности являются положительными, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} > 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

для любого набора потребительских благ. Величина частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = mu_j$$

имеет следующий экономический смысл: она показывает, на сколько увеличится полезность набора, если количество потребляемого блага увеличится на «малую единицу». В связи с этим указанная производная носит название предельной (маргинальной, дифференциальной) полезности.

В экономических исследованиях, как правило, используются некоторые конкретные виды выпуклых функций полезности, причем подбор вида функции и оценка числовых значений параметров производятся на основе наблюдений и анализа поведения потребителей. Чаще всего применяются линейная, квадратическая и логарифмическая функции вида

$$u(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \log\left(x_j - x_j^0\right).$$

В пространстве двухэлементных наборов $x = (x_1, x_2)$ поверхности безразличия (т.е. линии $u(x_1, x_2) = \text{const}$) обычно называются кривыми безразличия.

Например, для логарифмической функции

$$u(x_1, x_2) = \log x_1 + \log x_2$$

кривые безразличия имеют вид

$$\log x_1 + \log x_2 = \log (x_1 x_2) = \text{const},$$

т.е. являются просто гиперболами в положительном ортанте, удовлетворяющими уравнению

$$(x_1 \cdot x_2) = \text{const}.$$

На рис. 3.13 $C_2 > C_1$, т.е. более высокая кривая безразличия соответствует большему уровню полезности тех наборов, которые составляют кривую безразличия.

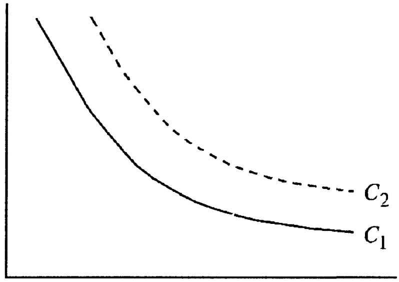

Рис. 3.13. Кривые безразличия для логарифмической функции полезности

Рассмотрим задачу оптимального выбора потребителя для ненасыщаемого потребителя.

Нетрудно заметить, что оптимальный набор $\hat{x}(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n)$ необходимо должен удовлетворять бюджетному ограничению как точному равенству. В самом деле, если бы оптимальный набор достигался бы при условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \hat{x}_j < I,$$

то потребитель мог бы купить на оставшиеся деньги некоторое количество любого блага и тем самым получить новый набор с большей полезностью. Это означает, что внутренняя точка множества не может быть оптимальным набором.

Таким образом, задача об оптимальном наборе имеет вид

$$u(x) = u(x_1, ..., x_j, ..., x_n) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I.$$

Решение этой задачи на условный экстремум находится при помощи метода множителей. Оптимальный набор определяется путем решения следующей системы из $(n + 1)$ уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{x}) = \bar{\lambda} p_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \hat{x}_j = I \end{cases}$$

относительно $(n + 1)$-го неизвестного, а именно — элементов оптимального набора $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ и множителя Лагранжа $\bar{\lambda}$.

Таким образом, при заданной системе цен потребитель должен выбрать такой набор, в котором все предельные полезности пропорциональны ценам. При этом оптимальное значение множителя Лагранжа $\bar{\lambda}$ часто называют «предельной полезностью денег» и трактуют как прирост максимальной полезности при увеличении дохода I на малую единицу. Заметим, что соотношения оптимальности могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{p_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{mu_j}{p_j} = \bar{\lambda} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

который допускает любопытную интерпретацию: в оптимальной точке величина дополнительной полезности в расчете на одну денежную единицу должна быть одинакова для всех товаров и услуг. Необходимо также отметить, что для некоторых товаров могут быть выполнены соотношения

$$\hat{x}_j = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} \le \bar{\lambda} p_j,$$

которые означают, что такие товары сравнительно мало полезны и относительно дороги, а поэтому и не должны быть включены в оптимальный набор потребителя, максимизирующего свою полезность при ограниченном доходе.

Рассмотрим простой пример.

Пусть $n = 2$, функция полезности

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2,$$

бюджетное ограничение

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Решение задачи оптимального выбора

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} = \lambda p_1; \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} = \lambda p_2,$$

отсюда

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{\lambda p_1}; \qquad \hat{x}_2 = \frac{1}{\lambda p_2}.$$

Используя бюджетное ограничение, имеем

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{I}; \qquad \hat{x}_1 = \frac{I}{2p_1}; \qquad \hat{x}_2 = \frac{I}{2p_2}.$$

Как видно из приведенного решения, оптимальный выбор потребителя имеет очень естественный вид: количество потребляемого блага прямо пропорционально доходу (I) и обратно пропорционально его цене. Геометрическая интерпретация решения задачи оптимального выбора приведена на рис. 3.12.

В более реалистичных вариантах постановки задачи оптимального выбора при помощи дополнительных условий могут быть учтены ограничения по ассортименту потребляемых товаров и услуг, возможность взаимной замены различных продуктов и т.п.

§5. Функции спроса. Коэффициент эластичности

В результате решения задач оптимального выбора оказывается возможным проследить связь между изменением систем цен и доходов группы потребителей, с одной стороны, и спросом этой группы на товары и услуги — с другой и построить таким образом функцию оптимального спроса.

В достаточно общей форме оптимальный спрос выражается при помощи функций вида

$$D_j = \hat{x}_j\ (I;\, p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В ряде случаев функции оптимального спроса имеют особенно простой вид. Так, если функция полезности имеет логарифмический вид, то оптимальный спрос выражается формулой

$$D_j = x_j^0 + \frac{c_j(I - I_0)}{p_j \sum\limits_{j=1}^{n} c_j} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где

$$I_0 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^0.$$

В подавляющем большинстве случаев, однако, конкретная форма функции спроса определяется путем статистической обработки результатов специальных наблюдений за доходами и расходами представителей различных социальных групп. В результате изучения функции спроса обычно устанавливаются некоторые классификационные признаки товаров.

Если для некоего товара выполняется условие

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_j} < 0,$$

то товар называется нормальным, так как спрос на него снижается по мере увеличения его цены. Однако существуют товары, спрос на которые повышается, невзирая на повышение цены.

Эта парадоксальная ситуация возникает тогда, когда при повышении цены на малоэффективный товар (например, картофель) группа потребителей с низким доходом просто не может приобретать более высококалорийный продукт (мясо) и вынуждена компенсировать нехватку калорий усиленной покупкой картофеля.

Товары, для которых имеет место неравенство

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_j} > 0,$$

называются аномальными, или товарами Гиффина.

При фиксированном доходе и в практических целях для нормальных товаров используются, как правило, функции спроса двух видов:

1) линейная функция спроса

$$D_j\ (p_j) = a_0 - a_1 p_j,$$

где $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ — статистически оцениваемые параметры модели;

2) степенная функция спроса

$$D_j = a_0 p_j^{-\alpha}.$$

Во многих прикладных исследованиях значительную роль играет *коэффициент эластичности.*

Мера реагирования эндогенной переменной на изменение экзогенной переменной называется эластичностью. Однако это определение слишком общее. Конкретнее эластичность можно определить как предел отношения между относительным приращением функции y:

$$\frac{\Delta y}{y}$$

(зависимой переменной) и относительным приращением независимой переменной x:

$$\frac{\Delta x}{x},$$

когда $\Delta x \to 0$ и обозначается $E_x(y)$.

Таким образом эластичность можно выразить формулой

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

или в непрерывном случае

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Из практических соображений эластичность относят к проценту прироста независимой переменной. В этом случае *эластичность показывает, насколько процентов повышается или понижается эндогенная переменная y, если независимая переменная x изменяется на 1%.*

Различают дуговую эластичность, то есть среднюю на каком-то отрезке кривой, и точечную эластичность — значение производной в заданной точке. Для практического вычисления эластичности используется формула английского математика и экономиста Р. Аллена (1906—1983). Он предложил использовать среднюю точку интервала, по которому происходит изменение в качестве знаменателя дроби. Тогда вычисляются:

относительное изменение эндогенной переменной

$$\frac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2}$$

и относительное изменение экзогенной переменной

$$\frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}.$$

Затем вычисляется отношение первого ко второму. Необходимо помнить, что формула Аллена, хотя и популярная, но не единственно возможная. Однако ее не следует применять к очень широким интервалам, так как в этом случае она может ввести в заблуждение.

Для определения эластичности спроса от цены можно воспользоваться формулой

$$E_p(D) = -\frac{p}{D} \cdot \frac{\Delta D}{\Delta p} \quad \text{при } \Delta p \to 0,$$

или

$$E_{Dpj} = -\frac{d \ln D_j}{d \ln p_j}.$$

Коэффициент эластичности спроса по цене показываёт, на сколько процентов уменьшится (увеличится) спрос, если цена товара увеличится (уменьшится) на 1%.

Для линейной функции спроса принимается, что

$$E_{Dpj} = -\frac{a_1 \overline{p}}{\overline{D}},$$

где $\overline{p}$ — среднее значение цены, $\overline{D}$ — среднее значение спроса по использованной выборке.

Очевидно, что для степенной функции спроса

$$E_{Dp} = \alpha.$$

Если коэффициент эластичности близок к нулю, то спрос на товар практически не зависит от его цены. В этом случае говорят, что спрос неэластичен по цене. Это относится в основном к предметам первой необходимости. Спрос называется нормально эластичным, если $E_{Dp} \approx 1$, что имеет место для товаров длительного пользования. Для предметов роскоши обычно $E_{Dp} > 1$, т.е. спрос является суперэластичным.

При постоянных ценах товары различаются по характеру изменения спроса в зависимости от величины дохода I. Товар j называется ценным (или товаром высшего ряда), если

$$\frac{\partial D_j}{\partial I} > 0,$$

т.е. спрос на него возрастает по мере перехода от менее доходных групп потребителей к более доходным. Для малоценного товара имеет место противоположное неравенство

$$\frac{\partial D_j}{\partial I} < 0,$$

что означает вытеснение этого товара из потребительского набора группы потребителей по мере увеличения ее категории доходности.

На основе известной классификации товаров по трем группам (предметы первой необходимости, длительного пользования, роскоши) можно представить изменение спроса в зависимости от повышения дохода при помощи графика (рис. 3.14).

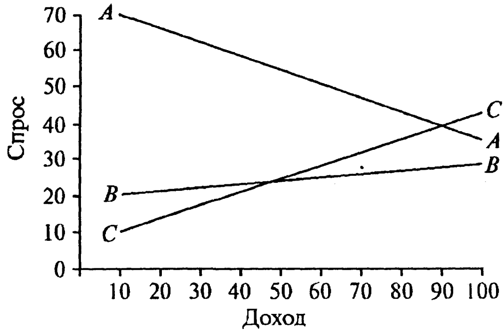

Рис. 3.14. Изменение спроса в зависимости от дохода

Здесь по горизонтальной оси (I) отложены относительные величины дохода, а по вертикали — доли расходов по указанным трем группам товаров.

Нетрудно видеть, что доля спроса на товары первой необходимости падает с 70% (при малых доходах) до 35% (при доходе в 10 раз большем — линия AA); сравнительно стабильна (в пределах от 20% до 27%) доля расходов на товары второй группы (линия BB) и значительно возрастает доля расходов на предметы роскоши (от 10% до 43% — линия CC). Для изучения изменения спроса в зависимости от дохода различных потребительских групп применяются в основном модели двух типов:

1. Модели степенного вида (функции Энгеля):

$$D = aI^{\gamma}.$$

Здесь показатель γ имеет смысл коэффициента эластичности, так как он показывает, на сколько процентов увеличится спрос на товар, если доход увеличится на 1%. Коэффициент эластичности спроса от дохода находится как

$$E_I(D) = \frac{I}{D} \cdot \frac{dD}{dI}.$$

Для предметов первой необходимости показатель $\gamma < 1$, т.е. при увеличении дохода дополнительные затраты на эти товары этой категории составляют все убывающую долю. Для предметов длительного пользования показатель эластичности γ приблизительно равен 1, что означает примерное постоянство доли расходов на эти предметы в дополнительном доходе. Для предметов роскоши показатель эластичности $\gamma > 1$. Это означает, что при значительном увеличении дохода все большая часть его прироста тратится именно на товары этой группы.

2. Идея разделения потребляемых товаров и услуг на ряд различных групп развита далее при конструировании так называемых функций Торнквиста. Для товаров первой необходимости эта функция определяется в виде

$$D_1 = \frac{a_1 I}{I + b_1},$$

где a_1, b_1 — параметры модели.

Заметим, что при очень большом доходе, условно представляемом как ($I \to \infty$), величина спроса $D_1 \to a_1$, что выражает факт асимптотического насыщения потребителя предметами первой необходимости.

Функция спроса Торнквиста для товаров длительного пользования отражает тот факт, что спрос на эти товары возникает лишь с некоторого (достаточно высокого) уровня дохода I_2. Соответствующее выражение имеет вид:

$$D_2 = \frac{a_2(I - I_2)}{I + b_2}, \text{ если } I \geq I_2,$$

где a_2, b_2 — параметры модели,

$$D_2 = 0, \text{ если } I < I_2.$$

Как видно, спрос на товары этой группы также имеет асимптотическую тенденцию к насыщению, поскольку

$$\lim_{I \to \infty} D_2 = a_2.$$

Для предметов роскоши используется формула, в которой отсутствует тенденция к насыщению, а спрос начинается с еще более высокого уровня дохода I_3:

$$D_3 = \frac{a_3 I(I - I_3)}{I + b}, \text{ если } I \geq I_3;$$

$$D_3 = 0, \text{ если } I < I_3.$$

Легко видеть, что при достаточно больших значениях дохода I

$$D_3 \approx b_3 I.$$

Это означает, что в этой ситуации практически весь прирост дохода тратится на предметы роскоши. Графическое изображение функций Энгеля и Торнквиста для трех групп товаров представлено на рис. 3.15 и 3.16.

§6. Изменение цен и компенсация

Проблема компенсации путем увеличения дохода потребителя возникает во всех тех случаях, когда происходит повышение цен на один или несколько потребляемых товаров. При этом возможны различные подходы к решению этой проблемы. Наиболее прямой из них использует понятие функции спроса в достаточно общей форме и опирается на понятие компенсации

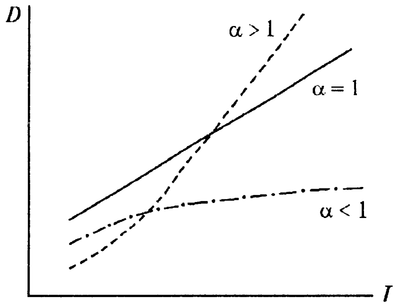

Рис. 3.15. Кривые Энгеля: рост спроса на различные группы товаров в зависимости от дохода

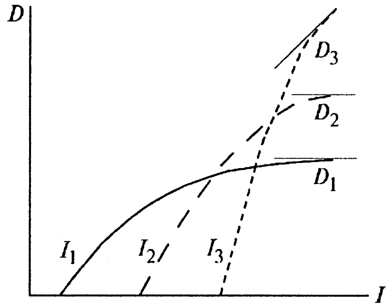

Рис. 3.16. Кривые Торнквиста

как на такое увеличение дохода, которое позволяет оставить спрос на товар на том уровне, который определялся прежней ценой. Таким образом, применяется функция спроса

$$D = D(I, p),$$

где I — исходный уровень дохода, p — исходный уровень цены.

Обозначим новый уровень цены

$$p' = p + \Delta p_1,$$

а компенсирующее изменение дохода

$$I' = I + \Delta I_1.$$

Легко видеть, что спрос остается неизменным, если выполняется условие

$$D(I', p') - D(I, p) \cong \frac{\partial D}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial D}{\partial p}\Delta p = 0.$$

Для нормальных и ценных товаров

$$\frac{\partial D}{\partial p} < 0 \text{ и } \frac{\partial D}{\partial I} > 0,$$

поэтому при повышении цены ($\Delta p > 0$), для сохранения уровня спроса необходимо увеличение дохода в размере

$$\Delta I = -\frac{\dfrac{\partial D}{\partial p}}{\dfrac{\partial D}{\partial I}}\Delta p.$$

В конкретном случае, когда функция спроса имеет вид

$$D(I, p) = aI^{\gamma} p^{-\alpha},$$

получаем следующее простое соотношение между повышением цены и компенсацией

$$\Delta I = -\frac{\alpha I}{\gamma p}\Delta p,$$

или

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\alpha \Delta p}{\gamma p}.$$

Это означает, что относительное увеличение дохода должно быть пропорционально относительному изменению цены с коэффициентом пропорциональности, равным отношению эластичностей этих факторов.

В более сложном случае многих товаров указанный подход основан на использовании функций спроса вида

$$D_j = f_j(I, p_1, \dots, p_n) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Повышение цены одного из товаров (например, с номером n) изменяет, вообще говоря, спрос на каждый товар. Если для некоторого товара j имеет место соотношение

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_n} < 0,$$

т.е. при повышении цены на товар n падает спрос на товар j, то продукты n и j являются взаимодополняющими (например, автомобили и бензин).

Нетрудно видеть, что если среди перечня товаров имеются взаимодополняющие, то в общем случае невозможно точно решить задачу компенсации путем увеличения дохода.

Если же для товара j справедливо неравенство

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_n} > 0,$$

т.е. повышение цены на товар n вызывает увеличение спроса на товар j, то они называются взаимозаменяемыми (масло и маргарин). Функция спроса обладает свойством сильной валовой заменимости, если все товары являются взаимозаменяемыми. Нетрудно видеть, что в этом случае повышение цены на один товар приводит к снижению спроса только на этот товар, но увеличивает спрос на все остальные. В этой ситуации для расчета необходимой компенсации можно использовать подход, рассмотренный выше для случая одного товара. Однако при этом получается слишком высокий уровень компенсации, поскольку повысится потребление практически всех товаров.

В связи с этим применяется более экономный способ оценки размера компенсации, основанный на использовании понятия функции полезности. При таком подходе объемы спроса на различные товары рассматриваются как решение задачи об оптимальном выборе потребителя в условиях ограниченности дохода:

$$u(x_1, \ldots, x_n) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le I$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n).$$

Решение этой задачи

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$$

определяет максимально достижимый уровень функции полезности $\hat{u}$, который, очевидно, зависит и от системы цен $p = (p_1, ..., p_n)$ и от уровня дохода I.

Пусть теперь, как и прежде, повышена цена p_n товара n. Решение модифицированной задачи будет таково, что максимальный уровень $\hat{u}$ понизится. В связи с этим возникает естественный вопрос: на сколько нужно увеличить доход I, чтобы восстановить прежнее значение $\hat{u}$, а следовательно, и прежний уровень удовлетворения потребителя. В достаточно общей форме ответ на этот вопрос дает уравнение Слуцкого, основные выводы из которого будут далее рассмотрены на простом примере.

Пусть $n = 2$, функция полезности

$$u(x_1, x_2) = c_1 \ln x_1 + c_2 \ln x_2.$$

Решение задачи оптимального выбора имеет вид

$$\hat{x}_1 = \frac{c_1 I}{(c_1 + c_2)p_1}; \qquad \hat{x}_2 = \frac{c_2 I}{(c_1 + c_2)p_2}.$$

Максимальный уровень функции полезности

$$\hat{u} = c_1 \ln c_1 + c_2 \ln c_2 + (c_1 + c_2)\ln I -$$
$$- c_1 \ln (c_1 + c_2)p_1 - c_2 \ln (c_1 + c_2)p_2.$$

Условие сохранения максимального уровня имеет вид

$$d\hat{u} = 0,$$

или

$$\frac{c_1 + c_2}{I} dI - \frac{c_1}{p_1} dp_1 - \frac{c_2}{p_2} dp_2 = 0.$$

Отсюда получаем выражение для компенсации в случае изменения цен

$$dI = \hat{x}_1 dp_1 + \hat{x}_2 dp_2.$$

Таким образом, если цена p_2 возрастает ($dp_2 > 0$), а цена p_1 остается неизменной ($dp_1 = 0$), то спрос на второй товар упадет, а спрос на первый товар не изменится. Размер компенсации определяется в этом случае отношением

$$dI = \hat{x}_2 dp_2.$$

Таким образом, достигнутый уровень удовлетворения будет сохранен, если доход будет увеличен ровно настолько, чтобы потребитель мог приобрести прежний объем второго товара. Однако нетрудно показать, что на самом деле потребитель использует компенсацию следующим образом: его спрос на товар с повышенной ценой (товар 2) уменьшится, но возрастет объем закупок первого товара. При этом уровень полезности останется тем же, каким он был до повышения цен и получения компенсации. Иллюстрацию этого перехода можно найти на рис. 3.17.

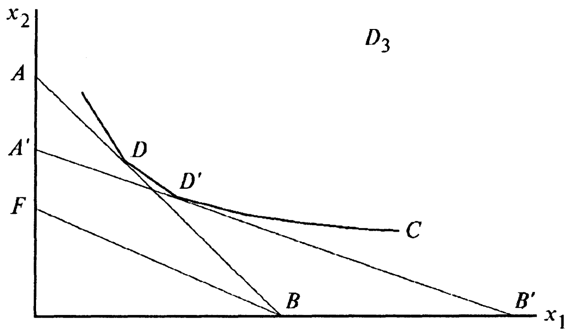

Рис. 3.17. Оптимальный набор при изменении цен и компенсации

Здесь линия C — кривая безразличия, соответствующая максимальному уровню полезности;

линия AB — бюджетная линия до повышения цен;

точка D — оптимальный набор;

линия FB — бюджетная линия после повышения цены p_2, но до выплаты компенсации;

линия $A'B'$ — бюджетная линия после выплаты компенсации ($A'B' \parallel FB$);

точка D' — оптимальный набор в новых условиях.

В более общем случае, когда задача оптимального выбора имеет вид:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \ln x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq I \qquad x_j \geq 0 \ \ (j = 1, \ldots, n),$$

можно показать, что компенсационная доплата, сохраняющая прежний уровень максимальной полезности, связана с изменением цен соотношением

$$dI = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j dp_j ,$$

где $\hat{x}_j$ — оптимальный спрос на j-тый товар до изменения цен, а dp_j — изменение цены на j-тый товар.

Глава IV

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБЫЛИ ПРЕДПРИЯТИЯ

§1. Понятие производства и производственных функций

Под производством понимается любая деятельность по использованию природных, материально-технических и интеллектуальных ресурсов для получения как материальных, так и нематериальных благ.

С развитием человеческого общества характер производства меняется. На ранних стадиях развития человечества господствовали природные, натуральные, «естественно возникшие» элементы производительных сил. Да и сам человек в это время в большей степени был продуктом природы. Производство в этот период получило название натурального.

С развитием средств производства начинают преобладать «исторически созданные» материально-технические элементы производительных сил. Это эпоха капитала.

В настоящее время решающее значение имеют знания, технологии, интеллектуальные ресурсы самого человека. Наша эпоха — это эпоха информатизации, эпоха господства научно-технических элементов производительных сил. Владение знаниями, новыми технологиями имеет решающее значение для производства. Во многих развитых странах ставится задача всеобщей информатизации общества. Потрясающими темпами развивается всемирная компьютерная сеть Internet.

Традиционно роль общей теории производства выполняет теория материального производства, понимаемая как процесс превращения производственных ресурсов в продукт. Основными производственными ресурсами являются труд (L) и капитал (K).

Способы производства или существующие производственные технологии определяют, какой объем продукции производится при заданных количествах труда и капитала. Математически существующие технологии выражаются через **производственную функцию**. Если обозначить объем выпускаемой продукции через Y, то производственную функцию можно записать

$$Y = f(K, L).$$

Это выражение означает, что объем выпуска является функцией количества капитала и количества труда. Производственная функция описывает множество существующих в данный момент технологий. Если изобретается лучшая технология, то при тех же затратах труда и капитала объем выпуска увеличивается. Следовательно, изменения в технологии изменяют и производственную функцию.

Методологически теория производства во многом симметрична теории потребления. Однако если в теории потребления основные категории измеряются лишь субъективно или вообще пока не подлежат измерению, то основные категории теории производства имеют объективную основу и могут быть измерены в определенных натуральных или стоимостных единицах.

Несмотря на то, что понятие «производство» может представиться очень широким, нечетко выраженным и даже расплывчатым, поскольку в реальной жизни под «производством» понимается и предприятие, и стройка, и сельскохозяйственная ферма, и транспортное предприятие, и очень крупная организация типа отрасли народного хозяйства, тем не менее экономико-математическое моделирование выделяет нечто общее, присущее всем этим объектам. Этим общим является процесс преобразования первичных ресурсов (производственных факторов) в конечные результаты процесса. Поэтому основным исходным понятием в описании экономического объекта становится «технологический способ», который представляется обычно как вектор v затрат—выпуска, включающий в себя перечисление объемов затрачиваемых ресурсов (вектор x) и сведения о результатах их преобразования в конечные продукты или другие характеристики (прибыль, рентабельность и т.п.) (вектор y):

$$v = (x; y).$$

Размерность векторов x и y, а также способы их измерения (в натуральных или стоимостных единицах) существенно зависят от изучаемой проблемы, от уровней, на которых ставятся те или иные задачи экономического планирования и управления. Совокупность векторов — технологических способов, которые могут служить описанием (с допустимой точки зрения исследователя точностью) производственного процесса, реально осуществимого на некотором объекте, называется технологическим множеством V данного объекта. Для определенности мы будем полагать, что размерность вектора затрат x равна N, а вектора выпуска y — соответственно M. Таким образом, технологический способ v является вектором размерности $(M + N)$, а технологическое множество $V \subset R_+^{M+N}$. Среди всех технологических способов, осуществимых на объекте, особое место занимают способы, которые выгодно отличаются от всех прочих тем, что они требуют либо меньших затрат при одинаковом выпуске, либо соответствуют большему выпуску при одинаковых затратах. Те из них, которые занимают в определенном смысле предельное положение в множестве V, представляют особый интерес, поскольку они являются описанием допустимого и предельно выгодного реального производственного процесса.

Скажем, что вектор $v^{(1)} = (x^{(1)}; y^{(1)})$ предпочтительнее, чем вектор $v^{(2)} = (x^{(2)}; y^{(2)})$ с обозначением $v^{(1)} \succ v^{(2)}$, если выполняются следующие условия:

1) $y_i^{(1)} \geq y_i^{(2)} \quad (i = 1, \ldots, M)$;

2) $x_j^{(1)} \leq x_j^{(2)} \quad (j = 1, \ldots, N)$

и при этом имеет место по крайней мере одно из двух:

а) существует такой номер i_0, что $y_{i_0}^{(1)} > y_{i_0}^{(2)}$;

б) существует такой номер j_0, что $x_{j_0}^{(1)} < x_{j_0}^{(2)}$.

Технологический способ $\tilde{v}$ называется эффективным, если он принадлежит технологическому множеству V и не существует другого вектора $v \in V$, который был бы предпочтительнее $\tilde{v}$.

Приведенное определение означает, что эффективными считаются те способы, которые не могут быть улучшены ни по одной затратной компоненте, ни по одной позиции выпускаемой продукции, без того чтобы не перестать быть допустимыми. Множество всех технологически эффективных способов обозначим через V^*. Оно является подмножеством технологического множества V или совпадает с ним. По существу задача планирования хозяйственной деятельности производственного объекта может быть интерпретирована как задача выбора эффективного технологического способа, наилучшим образом соответствующего некоторым внешним условиям. При решении такой задачи выбора достаточно существенным оказывается представление о самом характере технологического множества V, а также его эффективного подмножества V^*.

В ряде случаев оказывается возможным допустить в рамках фиксированного производства возможность взаимозаменяемости некоторых ресурсов (различных видов топлива, машин и работников и т.п.). При этом математический анализ подобных производств основывается на предпосылке о континуальном характере множества V, а следовательно, на принципиальной возможности представления вариантов взаимной замены при помощи непрерывных и даже дифференцируемых функций, определенных на V. Указанный подход получил свое наибольшее развитие в теории производственных функций.

С помощью понятия эффективного технологического множества производственную функцию (ПФ) можно определить как отображение

$$y = f(x),$$

где $v = (x; y) \in V^*$.

Указанное отображение, вообще говоря, является многозначным, т.е. множество $f(x)$ содержит более чем одну точку. Однако для многих реалистичных ситуаций производственные функции оказываются однозначными и даже, как сказано выше, дифференцируемыми. В наиболее простом случае производственная функция есть скалярная функция N аргументов:

$$y = f(x_1, \ldots, x_N).$$

Здесь величина y имеет, как правило, стоимостный характер, выражая объем производимой продукции в денежном выражении. В качестве аргументов выступают объемы затрачиваемых ресурсов при реализации соответствующего эффективного технологического способа. Таким образом, приведенное соотношение описывает границу технологического множества V, поскольку при данном векторе затрат $(x_1, ..., x_N)$ производить продукции, в количестве большем, чем y, невозможно, а производство продукции в количестве меньшем, чем указанное, соответствует неэффективному технологическому способу. Выражение для производственной функции оказывается возможным использовать для оценки эффективности принятого на данном предприятии методе хозяйствования. В самом деле, для заданного набора ресурсов можно определить фактический выпуск продукции и сравнить его с рассчитанным по производственной функции. Полученная разница дает полезный материал для оценки эффективности в абсолютном и относительном измерении.

Производственная функция представляет собой очень полезный аппарат плановых расчетов, и поэтому в настоящее время развит статистический подход к построению производственных функций для конкретных хозяйственных единиц. При этом обычно используется некоторый стандартный набор алгебраических выражений, параметры которых находятся при помощи методов математической статистики. Такой подход означает в сущности оценку производственной функции на основе неявного предположения о том, что наблюдаемые производственные процессы являются эффективными. Среди разнообразных типов производственных функций наиболее часто применяются линейные функции вида

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j x_j,$$

поскольку для них легко решается задача оценивания коэффициентов по статистическим данным, а также степенные функции

$$y = a_0 \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j},$$

для которых задача нахождения параметров сводится к оцениванию линейной формы путем перехода к логарифмам.

В предположении о дифференцируемости производственной функции в каждой точке множества X возможных комбинаций затрачиваемых ресурсов полезно рассмотреть некоторые связанные с ПФ величины.

В частности, дифференциал

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

представляет собой изменение стоимости выпускаемой продукции при переходе от затрат набора ресурсов $x = (x_1, ..., x_N)$ к набору $x + dx = (x_1 + dx_1, ..., x_N + dx_N)$ при условии сохранения свойства эффективности соответствующих технологических способов. Тогда величину частной производной

$$q_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

можно трактовать как предельную (дифференциальную) ресурсоотдачу или, иными словами, коэффициент предельной продуктивности, который показывает, на сколько увеличится выпуск продукции в связи с увеличением затрат ресурса с номером j на «малую» единицу. Величина предельной продуктивности ресурса допускает истолкование как верхний предел цены p_j, которую производственный объект может уплатить за дополнительную единицу j-того ресурса с тем, чтобы не оказаться в убытках после ее приобретения и использования. В самом деле, ожидаемый прирост продукции в этом случае составит

$$\Delta_j f = q_j$$

и, следовательно, соотношение

$$p_j \le q_j$$

позволит получить дополнительную прибыль.

В коротком периоде, когда один ресурс рассматривается как постоянный, а другой как переменный, большинство производственных функций обладают свойством убывающего предельного продукта. Предельным продуктом переменного ресурса называют прирост общего продукта в связи с увеличением применения данного переменного ресурса на единицу.

Предельный продукт труда можно записать как разность

$$MPL = F(K, L + 1) - F(K, L),$$

где MPL — предельный продукт труда.

Предельный продукт капитала можно также записать как разность

$$MPK = F(K + 1, L) - F(K, L),$$

где MPK — предельный продукт капитала.

Характеристикой производственного объекта является также величина средней ресурсоотдачи (продуктивности производственного фактора)

$$m_j = \frac{y}{x_j},$$

имеющего ясный экономический смысл количества выпускаемой продукции в расчете на единицу используемого ресурса (производственного фактора). Величина, обратная к ресурсоотдаче

$$d_j = \frac{1}{m_j},$$

обычно называется ресурсоемкостью, поскольку она выражает количество ресурса j, необходимое для производства одной единицы продукции в стоимостном выражении. Весьма употребительны и понятны такие термины, как фондоемкость, материалоемкость, энергоемкость, трудоемкость, рост которых обычно связывают с ухудшением состояния экономики, а их снижение рассматривается как благоприятный результат.

Частное от деления дифференциальной продуктивности на среднюю

$$E_j = \frac{q_j}{m_j} = \frac{x_j}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_j}$$

называется коэффициентом эластичности продукции по производственному фактору j и дает выражение относительного прироста продукции (в процентах) при относительном приросте затрат фактора на 1%. Если $E_j \leq 0$, то происходит абсолютное снижение выпуска продукции при увеличении потребления фактора j; такая ситуация может иметь место при использовании технологически неподходящих продуктов или режимов. Например, излишнее потребление топлива приведет к излишнему повышению температуры и необходимая для производства продукта химическая реакция не пойдет. Если $0 < E_j \leq 1$, то каждая последующая дополнительная единица затрачиваемого ресурса вызывает меньший дополнительный прирост продукции, чем предыдущая.

Если $E_j > 1$, то величина приростной (дифференциальной) продуктивности превосходит среднюю продуктивность. Таким образом, дополнительная единица ресурса увеличивает не только объем выпускаемой продукции, но и среднюю характеристику ресурсоотдачи. Так процесс повышения фондоотдачи происходит, когда вводятся в действие весьма прогрессивные, эффективные машины и приборы. Для линейной производственной функции коэффициент a_j численно равен величине дифференциальной продуктивности j-того фактора, а для степенной функции показатель степени α_j имеет смысл коэффициента эластичности по j-тому ресурсу.

§2. Изокванта и ее типы

При моделировании потребительского спроса один и тот же уровень полезности различных комбинаций потребительских благ графически отображается с помощью кривой безразличия.

В экономико-математических моделях производства каждая технология графически может быть представлена точкой, координаты которой отражают минимально необходимые затраты ресурсов K и L для производства данного объема выпуска. Множество таких точек образуют линию равного выпуска, или *изокванту*. Таким образом, производственная функция графически представляется семейством изоквант. Чем дальше от начала координат расположена изокванта, тем больший объем производства она

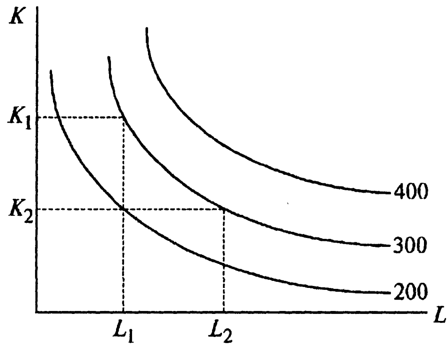

Рис. 4.1. Изокванты, соответствующие различному объему производства

отражает. В отличие от кривой безразличия, каждая изокванта характеризует количественно определенный объем выпуска. На рис. 4.1 представлено три изокванты, соответствующие объему производства в 200, 300 и 400 единиц продукции.

Можно сказать, что для выпуска 300 единиц продукции необходимо K_1 единиц капитала и L_1 единиц труда или K_2 единиц капитала и L_2 единиц труда, или любая другая их комбинация из того множества, которое представлено изоквантой $Y_2 = 300$.

В общем случае в множестве X допустимых наборов производственных факторов выделяется подмножество X_c, называемое *изоквантой* производственной функции, которое характеризуется тем, что для всякого вектора $x \in X_c$ справедливо равенство

$$f(x) = c.$$

Таким образом, для всех наборов ресурсов, соответствующих изокванте, оказываются равными объемы выпускаемой продукции. По существу изокванта представляет собой описание возможности взаимной замены факторов в процессе производства продукции, обеспечивающей неизменный объем производства. В связи с этим оказывается возможным определить коэффициент взаимной замены ресурсов, используя дифференциальное соотношение вдоль любой изокванты

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Отсюда коэффициент эквивалентной замены пары факторов j и k равен:

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{q_j}{q_k}.$$

Полученное соотношение показывает, что, если производственные ресурсы замещаются в отношении, равном отношению приростных продуктивностей, то количество производимой продукции остается неизменным. Нужно сказать, что знание производственной функции позволяет охарактеризовать масштабы возможности осуществить взаимную замену ресурсов в эффективных технологических способах. Для достижения этой цели служит коэффициент эластичности замены ресурсов по продукции

$$\sigma_{jk} = -\frac{d\ln\left(\dfrac{x_j}{x_k}\right)}{d\ln\left(\dfrac{q_j}{q_k}\right)},$$

который вычисляется вдоль изокванты при неизменном уровне затрат прочих производственных факторов. Величина σ_{jk} представляет собой характеристику относительного изменения коэффициента взаимной замены ресурсов при изменении соотношения между ними. Если отношение взаимозаменяемых ресурсов изменится на σ_{jk} процентов, то коэффициент взаимной замены γ_{jk} изменится на один процент. В случае линейной производственной функции коэффициент взаимной замены остается неизменным при любом соотношении используемых ресурсов и поэтому можно считать, что эластичность $\sigma_{jk} = \infty$. Соответственно бóльшие значения σ_{jk} свидетельствуют о том, что возможна бóльшая свобода в замене производственных факторов вдоль изокванты и при этом основные характеристики производственной функции (продуктивности, коэффициент взаимозамены) будут меняться очень слабо.

Для степенных производственных функций для любой пары взаимозаменяемых ресурсов справедливо равенство $\sigma_{jk} = 1$. В практике прогнозирования и предплановых расчетов часто используются функции постоянной эластичности замены (CES), имеющие вид:

$$y = a_0 \left[\sum_{j=1}^{N} a_j x_j^{-\alpha} \right]^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Для такой функции коэффициент эластичности замены ресурсов

$$\sigma = \frac{1}{1+\alpha}$$

и не меняется в зависимости от объема и отношения затрачиваемых ресурсов. При малых значениях σ_{jk} ресурсы могут заменять друг друга лишь в незначительных размерах, а в пределе при $\sigma_{jk} = 0$ они теряют свойство взаимозаменяемости и выступают в процессе производства лишь в постоянном отношении, т.е. являются взаимодополняющими. Примером производственной функции, описывающей производство в условиях использования взаимодополняющих ресурсов, является функция «выпуска—затрат», которая имеет вид

$$y = \min_j \left\{ a_j x_j \right\} \quad (j = 1, \ldots, N),$$

где a_j — постоянный коэффициент ресурсоотдачи j-того производственного фактора. Нетрудно видеть, что производственная функция такого типа определяет выпуск по «узкому месту» на множестве используемых производственных факторов. Различные случаи поведения изоквант производственных функций для различных значений коэффициентов эластичности замены представлены на графике (рис. 4.2).

Представление эффективного технологического множества с помощью скалярной производственной функции оказывается недостаточным в тех случаях, когда нельзя обойтись единственным показателем, описывающим результаты деятельности производственного объекта, но необходимо использовать несколько (M) выходных показателей. В этих условиях можно использовать векторную производственную функцию

$$y_i = f_i(x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) \quad (i = 1, \ldots, M).$$

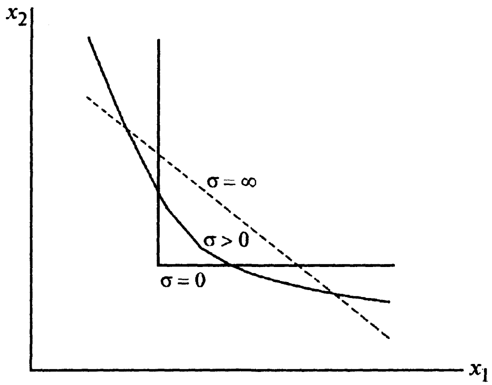

Рис. 4.2. Различные случаи поведения изоквант

Важное понятие предельной (дифференциальной) продуктивности вводится соотношением

$$q_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, N).$$

Аналогичное обобщение допускают все остальные главные характеристики скалярных ПФ.

Подобно кривым безразличия изокванты также подразделяются на различные типы.

Для линейной производственной функции вида

$$Y = A + b_1 K + b_2 L,$$

где Y — объем производства; A, b_1, b_2 — параметры; K, L — затраты капитала и труда, и полном замещении одного ресурса другим изокванта будет иметь линейную форму (рис. 4.3).

Для степенной производственной функции

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

изокванты будут иметь вид кривых (рис. 4.4).

Если изокванта отражает лишь один технологический способ производства данного продукта, то труд и капитал комбинируются в единственно возможном сочетании (рис. 4.5).

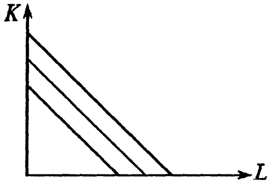

Рис. 4.3. Изокванты линейного типа

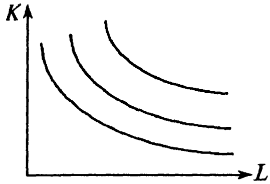

Рис. 4.4. Изокванты степенной производственной функции

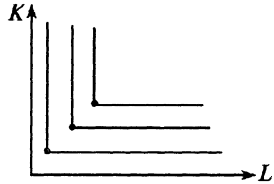

Рис. 4.5. Изокванты при жесткой дополняемости ресурсов

Такие изокванты иногда называют изоквантами леонтьевского типа — по имени американского экономиста В.В. Леонтьева, который положил такой тип изокванты в основу разработанного им метода input—output (затраты—выпуск).

Ломаная изокванта предполагает наличие ограниченного количества технологий F (рис. 4.6).

Изокванты подобной конфигурации используются в линейном программировании для обоснования теории оптимального распределения ресурсов. Ломаные изокванты наиболее реалистично представляют технологические возможности многих производственных объектов. Однако в экономической теории традиционно используют главным образом кривые изокванты, которые получаются из ломаных при увеличении числа технологий и увеличении соответственно точек излома.

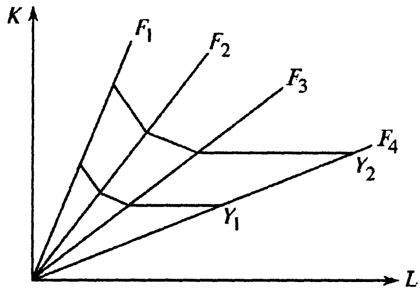

Рис. 4.6. Ломаные изокванты

§3. Оптимальная комбинация ресурсов

Использование аппарата производственных функций дает возможность решения задачи об оптимальном использовании средств, предназначенных для приобретения производственных факторов.

Предположим, что факторы (x_1, ..., x_N) могут быть закуплены по ценам (p_1, ..., p_N), а объем имеющихся средств для приобретения составляет b (руб.). Тогда соотношение, описывающее множество допустимых наборов факторов, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j \le b.$$

Граничная линия этого множества, соответствующая полному использованию имеющихся средств, т.е.

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b,$$

называется **изокостой**, поскольку ей отвечают наборы, имеющие одинаковую стоимость b. Задача об оптимальном использовании средств формулируется так: требуется найти набор факторов, который дает наибольший выпуск продукции при ограниченных финансовых средствах b. Таким образом, требуется найти решение задачи:

$$\begin{aligned}
&y = f(x_1, \dots, x_N) \to \max \\
&\sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b \\
&x_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, N).
\end{aligned}$$

Искомое решение находится из системы уравнений:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad (j = 1, \dots, N) \\
\sum\limits_{j=1}^{N} p_j x_j = b,
\end{cases}$$

где λ — множитель Лагранжа.

В частности, если число факторов $N = 2$, задача допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 4.7).

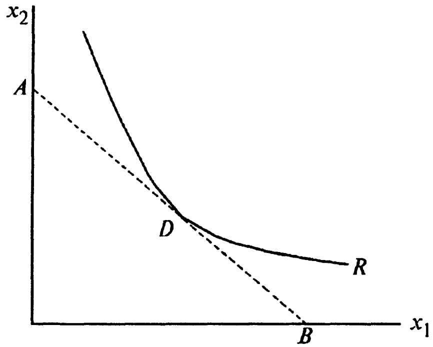

Рис. 4.7. Оптимальная комбинация ресурсов

Здесь отрезок AB есть изокоста, кривая R — изокванта, касающаяся изокосты в точке D, которая и соответствует оптимальному набору факторов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Полезно привести полное решение поставленной задачи для случая двух факторов, т.е. $N = 2$.

Пусть $x_1 = K$ — капитал (основные фонды),

$x_2 = L$ — труд (рабочая сила);

производственная функция

$$y = f(K, L) \to \max;$$

условие ограниченности ресурса

$$rK + wL = Q,$$

где r — цена использования машин и оборудования (т.е. услуг капитала), равная норме банковского процента; w — ставка оплаты труда.

Условия оптимальности имеют вид

а) $\dfrac{\partial y}{\partial K} = r.$

Это условие означает, что объем используемого капитала должен быть принят на том уровне, когда маргинальная фондоотдача ($\partial y/\partial K$) равна норме процента; дальнейшее увеличение капитала приведет к снижению его эффективности;

б) $\dfrac{\partial y}{\partial L} = w.$

Это условие требует, чтобы количество занятой рабочей силы было взято на уровне, когда маргинальная производительность труда ($\partial y/\partial L$) равна ставке заработной платы, так как дальнейшее увеличение количества занятых приводит к убыткам (точка $\hat{L}$ на рис. 4.8).

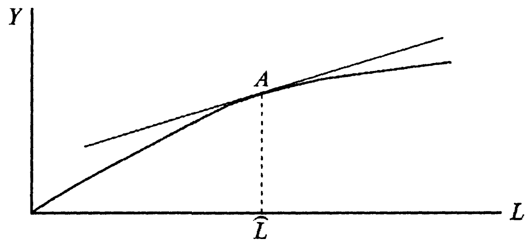

Рис. 4.8. Оптимальное количество занятых

Здесь угловой коэффициент касательной в точке A равен w.

Для ПФ типа Кобба—Дугласа задача имеет вид

найти

$$\max y = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

при условии

$$rK + wL = b.$$

Получим следующее решение

$$\hat{K} = \frac{\alpha b}{(\alpha+\beta)r}; \quad \hat{L} = \frac{\beta b}{(\alpha+\beta)w};$$

$$\hat{y} = a\hat{K}^{\alpha}\hat{L}^{\beta}; \quad \hat{\lambda} = \frac{(\alpha+\beta)\hat{y}}{b}.$$

Множитель $\hat{\lambda}$ характеризует здесь предельную продуктивность финансовых средств, т.е. показывает, на какую величину Δy изменится максимальный выпуск продукции $\hat{y}$, если объем средств b увеличится на «малую» единицу.

Заметим, что сумма эластичностей капитала (α) и труда (β) характеризует так называемый удельный выпуск (отдачу) при изменении масштаба производства, т.е. когда расход ресурсов (K и L) увеличивается в одинаковое число раз. Если $\alpha + \beta > 1$, то отдача возрастает, если $\alpha + \beta = 1$, то отдача постоянная, если $\alpha + \beta < 1$, то отдача убывает, а производственная функция является выпуклой вверх.

§4. Функции предложения и их свойства

Функция предложения $S(p)$ описывает зависимость между рыночной ценой товара и его предложением на изолированном рынке этого товара. В общем случае следует исходить из того, что рассматриваемый продукт производится на достаточно большом количестве конкурирующих между собой предприятий. В такой ситуации естественно считать, что каждый производитель стремится к наибольшей прибыли, и его индивидуальный выпуск продукта увеличивается по мере роста цены на этот продукт. Но тогда и общее предложение товара на рынке $S(p)$, как сумма индивидуальных выпусков, является возрастающей функцией цены, т.е. $S'(p) > 0$.

В более специфических ситуациях (олигополия, монополия) поведение предприятия необязательно определяется стремлением к максимальной прибыли, поскольку при повышении цены производитель может обеспечить себе заметный прирост прибыли и без увеличения объема выпуска. Таким образом, строго говоря, должны быть исследованы случаи, когда $S(p) = \text{const}$ или даже $S'(p) < 0$ (рис. 4.9).

На рис. 4.9 представлено семейство функций предложения. Линия AB соответствует совершенной конкуренции и стремлению производителей к получению максимальной прибыли, линия AC отвечает неизменному выпуску, который тем не менее дает возможность вести хозяйство с приличной прибылью в условиях несовершенной конкуренции; линия AD представляет снижающийся объем производства, что возможно в условиях монополии и резкого роста цен.

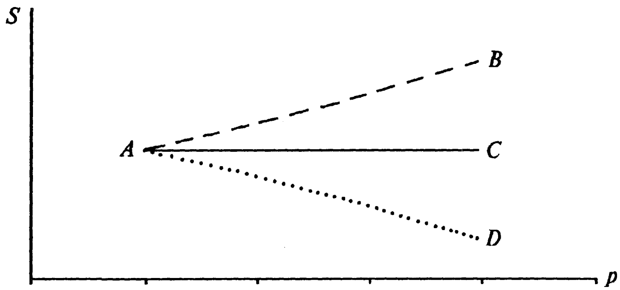

Рис. 4.9. Возрастающая, неизменная и убывающая функции предложения

В дальнейшем анализе в качестве основного рассматривается состояние совершенной конкуренции и рост предложения в зависимости от роста цен. Для практических расчетов применяются функции предложения двух основных видов, параметры которых определяются путем обработки статистических данных:

1) линейная функция

$$S(p) = b_0 + b_1 p \qquad (b_0 > 0;\ b_1 > 0);$$

2) степенная функция

$$S(p) = b_0 p^{\beta} \qquad (b_0 > 0;\ \beta > 0).$$

Коэффициент эластичности предложения по цене (E_{Sp}) показывает, на сколько процентов увеличится предложение товара, если его цена вырастает на 1%.

Для линейной функции предложения

$$E_{Sp} = \frac{b_1 \bar{p}}{\bar{S}},$$

где $\bar{p}$, $\bar{S}$ — средние значения цены и предложения по таблице наблюдений.

Для степенной функции

$$E_{Sp} = \frac{d\ln S}{d\ln p} = \beta.$$

Для функции предложения, определяемой как решение рассмотренной ниже (§5) задачи оптимизации прибыли (см. формулу на с. 90, помеченную звездочкой), имеем

$$S(p) = \left(\frac{p-a}{bh}\right)\frac{1}{h-1}.$$

Эластичность предложения по цене

$$E_{Sp} = \frac{1}{(h-1)} \cdot \frac{p}{(p-a)},$$

т.е. полностью определяется характером постоянных и переменных издержек.

В более общем случае объем предложения j-того товара рассматривается не только в зависимости от его цены (p_j), но и от цен на другие товары. В этой ситуации система функций предложения имеет вид

$$S_j = S_j(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где n — количество наименований товаров.

Товары i и j называются конкурирующими, если перекрестная эластичность

$$E_{S_j p_i} < 0,$$

т.е. при увеличении цены p_i уменьшается выпуск j-того товара; товары являются комплектными, если

$$E_{S_j p_i} > 0.$$

В этом случае рост производства одного товара необходимо вызывает увеличение выпуска другого.

§5. Моделирование издержек и прибыли предприятия (фирмы)

В основе построения моделей поведения производителя (отдельного предприятия или фирмы; объединения или отрасли) лежит представление о том, что производитель стремится к достижению такого состояния, при котором ему была бы обеспечена наибольшая прибыль при сложившихся рыночных условиях, т.е. прежде всего при имеющейся системе цен.

Наиболее простая модель оптимального поведения производителя в условиях совершенной конкуренции имеет следующий вид: пусть предприятие (фирма) производит один продукт в количестве y физических единиц. Если p — экзогенно заданная цена этого продукта и фирма реализует свой выпуск полностью, то она получает валовой доход (выручку) в размере

$$R(y) = py.$$

В процессе создания этого количества продукта фирма несет производственные издержки в размере $C(y)$. При этом естественно считать, что $C'(y) > 0$, т.е. издержки возрастают с увеличением объема производства. Также обычно полагают, что $C''(y) > 0$. Это означает, что дополнительные (маргинальные) издержки на производство каждой дополнительной единицы продукции возрастают по мере увеличения объема производства. Это предположение связано с тем, что при рационально организованном производстве, при малых объемах могут быть использованы лучшие машины и высококвалифицированные работники, которых уже не окажется в распоряжении фирмы, когда объем производства вырастет. На рис. 4.10 представлены типичные графики функций $R(y)$ и $C(y)$. Производственные издержки состоят из следующих составных частей:

1) материальные затраты C_m, в число которых входят расходы на сырье, материалы, полуфабрикаты и т.п.

Разность между валовым доходом и материальными затратами называется **добавленной стоимостью** (условно чистой продукцией):

$$VA = Z = R - C_m;$$

2) расходы на оплату труда C_L;

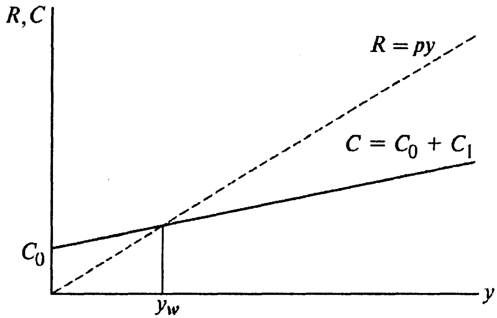

Рис. 4.10. Линии выручки и издержек предприятия

3) расходы, связанные с использованием, ремонтом машин и оборудования, амортизация, так называемая оплата «услуг капитала» C_k;

4) дополнительные расходы C_r, связанные с расширением производства, строительством новых зданий, подъездных путей, линий связи и т.д.

Совокупные производственные издержки:

$$C = C_m + C_L + C_k + C_r.$$

Как уже было отмечено выше,

$$C = C(y),$$

однако эта зависимость от объема выпуска (y) для разных видов издержек различна. А именно имеют место:

а) постоянные расходы C_0, которые практически не зависят от y, в т.ч. оплата административного персонала, аренда и содержание зданий и помещений, амортизационные отчисления, проценты за кредит, услуги связи и т.п.;

б) пропорциональные объему выпуска (линейные) затраты C_1, сюда входят материальные затраты C_m, оплата труда производственного персонала (часть C_L), расходы по содержанию действующего оборудования и машин (часть C_k) и т.п.:

$$C_1 = ay,$$

где a — обобщенный показатель затрат указанных видов в расчете на одно изделие;

в) «сверхпропорциональные» (нелинейные) затраты C_2, в составе которых выступают приобретение новых машин и технологий (т.е. затраты типа C_r), оплата сверхурочного труда и т.п. Для математического описания этого вида затрат обычно используется степенная зависимость

$$C_2 = by^h \qquad (h > 1).$$

Таким образом, для представления совокупных издержек можно использовать модель

$$C(y) = C_0 + C_1 + C_2 = C_0 + ay + by^h.$$

(Заметим, что условия $C'(y) > 0$, $C''(y) > 0$ для этой функции выполнены.)

Рассмотрим возможные варианты поведения предприятия (фирмы) для двух случаев:

1. Предприятие имеет достаточно большой резерв производственных мощностей и не стремится к расширению производства, поэтому можно полагать, что $C_2 = 0$ и совокупные издержки являются линейной функцией объема выпуска:

$$C(y) = C_0 + ay.$$

Прибыль составит

$$\Pi(y) = R - C = py - (C_0 + ay).$$

Очевидно, что при малых объемах выпуска

$$0 \le y \le y_w$$

фирма несет убытки, так как $\Pi < 0$.

Здесь y_w — точка безубыточности (порог рентабельности), определяемая соотношением

$$\Pi(y_w) = 0.$$

Если $y > y_w$, то фирма получает прибыль, и окончательное решение об объеме выпуска зависит от состояния рынка сбыта производимой продукции (см. рис. 4.10).

2. В более общем случае, когда $C_2 \neq 0$, имеются две точки безубыточности $y_e^{(1)}$ и $y_e^{(2)}$, причем положительную прибыль фирма получит, если объем выпуска y удовлетворяет условию

$$y_e^{(1)} < y < y_e^{(2)}.$$

На этом отрезке в точке $y = \hat{y}$ достигается наибольшее значение прибыли. Таким образом, существует оптимальное решение задачи о максимизации прибыли. В точке A, соответствующей издержкам при оптимальном выпуске, касательная к кривой издержек C параллельна прямой линии дохода R.

Следует заметить, что окончательное решение фирмы также зависит от состояния рынка, но с точки зрения соблюдения экономических интересов ей следует рекомендовать оптимизирующее значение выпуска (рис. 4.11).

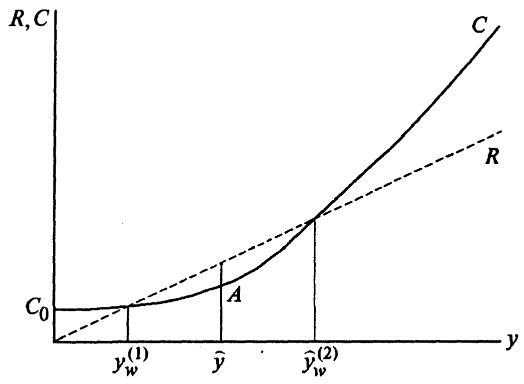

Рис. 4.11. Оптимальный объем выпуска

В общем случае, когда $C(y)$ является нелинейной возрастающей и выпуклой вниз функцией (так как $C'(y) > 0$ и $C''(y) > 0$) объема выпуска, ситуация полностью аналогична той, которая рассмотрена в пункте 2. По определению прибылью считается величина

$$\Pi(y) = R(y) - C(y).$$

Точки безубыточности $y_e^{(1)}$ и $y_e^{(2)}$ определяются из условия равенства прибыли нулю, а максимальное ее значение достигается в точке $\hat{y}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Pi'(\hat{y}) = 0 \quad \text{или} \quad R'(\hat{y}) - C'(\hat{y}) = 0.$$

Таким образом, оптимальный объем производства характеризуется тем, что в этом состоянии маргинальный валовой доход ($R'(y)$) в точности равен маргинальным издержкам $C'(y)$.

В самом деле, если $y < \hat{y}$, то $R'(y) > C'(y)$, и тогда следует увеличить выпуск продукции, поскольку ожидаемый дополнительный доход превысит ожидаемые дополнительные издержки. Если же $y > \hat{y}$, то $R'(y) < C'(y)$, и всякое увеличение объема уменьшит прибыль, поэтому естественно рекомендовать уменьшить объем производства и придти в состояние $y = \hat{y}$ (рис. 4.12).

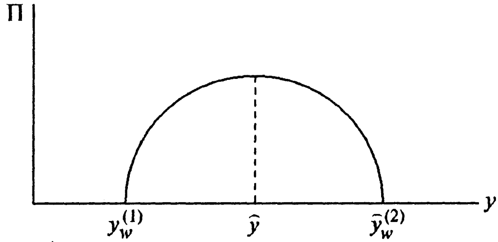

Рис. 4.12. Точка максимума прибыли и зона безубыточности

$$\hat{y} = \left(\frac{p-a}{bh}\right)^{\frac{1}{h-1}}. \qquad (*)$$

Нетрудно видеть, что при увеличении цены (p) оптимальный выпуск, а также прибыль увеличиваются, т.е.

$$\frac{d\hat{y}}{dp} > 0.$$

Это верно также и в общем случае, так как

$$\frac{d\hat{y}}{dp} = \frac{1}{C''(\hat{y})} > 0.$$

Пример. Фирма производит сельскохозяйственные машины в количестве y штук, причем объем производства в принципе может изменяться от 50 до 220 штук в месяц. При этом естественно увеличение объема производства потребует увеличения затрат как пропорциональных, так и сверхпропорциональных (нелинейных), поскольку потребуется приобрести новое оборудование и расширить производственные площади.

В конкретном примере будем исходить из того, что общие издержки (себестоимость) на производство продукции в количестве y изделий выражаются формулой

$$C(y) = 1000 + 20y + 0{,}1y^2 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Это означает, что постоянные издержки

$$C_0 = 1000 \text{ (т. руб.)},$$

пропорциональные затраты

$$C_1 = 20y,$$

т.е. обобщенный показатель этих затрат в расчете на одно изделие равен: $a = 20$ тыс. руб., а нелинейные затраты составят $C_2 = 0{,}1y^2$ $(b = 0{,}1)$.

Приведенная выше формула для издержек является частным случаем общей формулы, где показатель $h = 2$.

Для нахождения оптимального объема производства воспользуемся формулой точки максимума прибыли (*), согласно которой имеем:

$$\hat{y} = \frac{p - 20}{0{,}2} = 5p - 100.$$

Совершенно очевидно, что объем производства, при котором достигается максимальная прибыль, весьма существенно определяется рыночной ценой изделия p.

В табл. 4.1 представлены результаты расчета оптимальных объемов при различных значениях цены от 40 до 60 тыс. рублей за изделие.

В первом столбце таблицы фигурируют возможные объемы выпуска y, второй столбец содержит данные о полных издержках $C(y)$, в третьем столбце представлена себестоимость в расчете на одно изделие:

$$AC = \frac{C(y)}{y}.$$

Таблица 4.1

Данные об объемах выпуска, затратах и прибыли

Объемы и затраты				Цены и прибыли					
Y	*C*	*AC*	*MC*	40	42	44	50	54	60
50	2250	45	30	–250	–150	–50	250	450	740
			33						
80	3240	40,5	36	-40	+120	280	760	1080	1560
			38						
100	4000	40	40	***0***	200	400	1000	1400	2000
			41						
110	4410	40,1	42	–10	***210***	430	1090	1530	2190
			43						
120	4840	40,3	44	–40	200	***440***	1160	1640	2360
			47						
150	6250	41,7	50	–250	50	350	***1250***	1850	2750
			52						
170	7290	42,9	54	–490	–150	190	1210	***1890***	2910
			57						
200	9000	45	60	–1000	–600	–200	1000	1800	***3000***
			62						
220	10240	46,5	64	–1440	–1000	–560	760	1640	2960

Четвертый столбец характеризует значения указанных выше маргинальных издержек MC, которые показывают, во сколько обходится производство одного дополнительного изделия в данной ситуации. Нетрудно заметить, что маргинальные издержки возрастают по мере роста производства, что хорошо согласуется с положением, высказанным в начале этого параграфа. При рассмотрении таблицы следует обратить внимание на то, что оптимальные объемы находятся точно на пересечении строки (маргинальные издержки — MC) и столбца (цена — p) с равными их значениями, что совершенно аккуратно соотносится с правилом оптимальности, установленным выше.

Проведенный выше анализ относится к обстановке совершенной конкуренции, когда производитель не может повлиять своими действиями на систему цен, и поэтому цена p на товар y выступает в модели производителя как экзогенная величина.

В случае же несовершенной конкуренции производитель может оказывать непосредственное влияние на цену. В особенности это относится к монопольному производителю товара, который формирует цену из соображения разумной рентабельности.

Рассмотрим фирму с линейной функцией издержек, которая определяет цену таким образом, чтобы прибыль составляла определенный процент (долю $0 < \gamma < 1$) от валового дохода, т.е.

$$\Pi = py - (C_0 + ay) = \gamma py.$$

Отсюда имеем

$$p = \frac{C_0 + ay}{(1-\gamma)y} = \frac{a}{1-\gamma} + \frac{C_0}{y}.$$

Валовой доход

$$R = \frac{a}{1-\gamma}y + C_0$$

и производство оказывается безубыточным, начиная с самых малых объемов производства ($y_w \approx 0$). Легко видеть, что цена зависит от объема, т.е. $p = p(y)$, и при увеличении объема производства (y) цена товара уменьшается, т.е. $p'(y) < 0$. Это положение имеет место для монополиста и в общем случае.

Требование максимизации прибыли для монополиста имеет вид

$$\Pi = p(y)y - C(y) \to \max.$$

Предполагая по-прежнему, что $C'(y) > 0$, $C''(y) > 0$, имеем уравнение для нахождения оптимального выпуска ($\hat{y}$):

$$p(\hat{y}) + \hat{y}p'(\hat{y}) - C'(\hat{y}) = 0.$$

Полезно заметить, что оптимальный выпуск монополиста ($\hat{y}$), как правило, не превосходит оптимального выпуска конкурентного производителя $\hat{y}$ в формуле на с. 90, помеченной звездочкой.

Более реалистичная (но также простая) модель фирмы используется для того, чтобы учесть ресурсные ограничения, которые играют очень большую роль в хозяйственной деятельности производителей. В модели выделяется один наиболее дефицитный ресурс (рабочая сила, основные фонды, редкий материал, энергия и т.п.) и предполагается, что фирма может его использовать не более чем в количестве Q. Фирма может производить n различных продуктов. Пусть $y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ — искомые объемы производства этих продуктов; $p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n$ — их цены. Пусть также q — цена единицы дефицитного ресурса. Тогда валовой доход фирмы равен

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j,$$

а прибыль составит

$$\Pi(y_1, \ldots, y_n) = R(y_1, \ldots, y_n) - qQ.$$

Легко видеть, что при фиксированных q и Q задача о максимизации прибыли преобразуется в задачу максимизации валового дохода.

Предположим далее, что функция издержек ресурса для каждого продукта $C_j(y_j)$ обладает теми же свойствами, которые были высказаны выше для функции $C(y)$. Таким образом, $C_j'(y_j) > 0$ и $C_j''(y_j) > 0$.

В окончательном виде модель оптимального поведения фирмы с одним ограниченным ресурсом следующая:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} C_j(y_j) \le Q,$$
$$y_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Нетрудно видеть, что в достаточно общем случае решение этой оптимизационной задачи находится путем исследования системы уравнений:

$$\begin{cases} p_j = \lambda C_j'(\hat{y}_j) \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j(\hat{y}_j) = Q, \end{cases} \tag{**}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Заметим, что соотношение

$$p_j = \lambda C_j'(\hat{y}_j)$$

является по существу аналогом отмеченного выше совпадения в оптимальной точке маргинального дохода и маргинальных издержек. В случае квадратичных функций издержек

$$C_j(y_j) = a_j y_j^2$$

из системы уравнений (**) имеем:

$$\begin{aligned} \hat{y}_j &= \frac{p_j}{2a_j\hat{\lambda}} \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{a_j}}. \end{aligned} \tag{***}$$

Заметим, что оптимальный выбор фирмы зависит от всей совокупности цен на продукты (p_1, ..., p_n), причем этот выбор является однородной функцией системы цен, т.е. при одновременном изменении цен в одинаковое число раз оптимальные выпуски $\hat{y}$ не изменяются. Нетрудно видеть также, что из уравнений, помеченных звездочками (***), следует, что при увеличении цены на продукт n (при неизменных ценах на другие продукты) его выпуск следует увеличить с целью получения максимальной прибыли, так как

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial p_n} > 0,$$

а производство остальных товаров уменьшится, так как

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial p_n} < 0.$$

Эти соотношения в совокупности показывают, что в данной модели все продукты являются конкурирующими. Из формулы (***) вытекает также очевидное соотношение

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial Q} > 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

т.е. при увеличении объема ресурса (капиталовложений, рабочей силы и т.п.) оптимальные выпуски увеличиваются.

В заключение параграфа приведем ряд простых примеров, которые помогут лучше понять правило оптимального выбора фирмы по принципу максимума прибыли:

1) пусть $n = 2$; $p_1 = p_2 = 1$; $a_1 = a_2 = 1$; $Q = 0{,}5$; $q = 0{,}5$.

Тогда из (***) имеем:

$$\hat{y}_1 = 0{,}5;\ \hat{y}_2 = 0{,}5;\ \Pi = 0{,}75;\ \hat{\lambda} = 1;$$

2) пусть теперь все условия остались прежними, но удвоилась цена на первый продукт: $p_1 = 2$.

Тогда оптимальный по прибыли план фирмы: $\hat{y}_1 = 0{,}6325$; $\hat{y}_2 = 0{,}3162$.

Ожидаемая максимальная прибыль заметно возрастает: $\Pi = 1{,}3312$; $\hat{\lambda} = 1{,}58$;

3) заметим, что в предыдущем примере 2 фирма должна изменить объемы производств, увеличив производство первого и уменьшив производство второго продукта. Предположим, однако, что фирма не гонится за максимальной прибылью и не станет менять налаженное производство, т.е. выберет программу $y_1 = 0{,}5$; $y_2 = 0{,}5$.

Оказывается, что в этом случае прибыль составит $\Pi = 1{,}25$. Это означает, что при повышении цен на рынке фирма может получить значительное увеличение прибыли без изменения плана выпуска.

§6. Методы учета научно-технического прогресса

Общепризнанным следует считать тот факт, что с течением времени на предприятии, сохраняющем фиксированную численность работников и постоянный объем основных фондов, выпуск продукции увеличивается. Это означает, что помимо обычных производственных факторов, связанных с затратами ресурсов, существует фактор, который обычно называют **научно-техническим прогрессом (НТП)**. Этот фактор можно рассматривать как синтетическую характеристику, отражающую совместное влияние на экономический рост многих существенных явлений, среди которых нужно отметить следующие:

а) улучшение со временем качества рабочей силы вследствие повышения квалификации работников и освоения ими методов использования более совершенной техники;

б) улучшение качества машин и оборудования приводит к тому, что определенная сумма капитальных вложений (в неизменных ценах) позволяет по прошествии времени приобрести более эффективную машину;

в) улучшение многих сторон организации производства, в том числе снабжения и сбыта, банковских операций и других взаимных расчетов, развитие информационной базы, образование различного рода объединений, развитие международной специализации и торговли и т.п.

В связи с этим термин «научно-технический прогресс» можно интерпретировать как совокупность всех явлений, которые при фиксированных количествах затрачиваемых производственных факторов дают возможность увеличить выпуск качественной, конкурентоспособной продукции. Весьма расплывчатый характер такого определения приводит к тому, что исследование влияния НТП проводится лишь как анализ того дополнительного увеличения продукции, которое не может быть объяснено чисто количественным ростом производственных факторов. Главный подход к учету НТП сводится к тому, что в совокупность характеристик выпуска или затрат вводится время (t) как независимый производственный фактор и рассматривается преобразование во времени либо производственной функции, либо технологического множества.

Остановимся на способах учета НТП путем преобразования производственной функции (ПФ), причем за основу примем двухфакторную ПФ:

$$y = f(K, L),$$

где в качестве производственных факторов выступают капитал (K) и труд (L). Модифицированная ПФ в общем случае имеет вид

$$y = f(K, L, t),$$

причем выполняется условие

$$\frac{\partial f}{\partial t} > 0,$$

которое и отражает факт роста производства во времени при фиксированных затратах труда и капитала. Геометрическая иллюстрация такого процесса дана на рис. 4.13, где показано, что изокванта, соответствующая выпуску продукции в объеме Q, смещается с течением времени ($t_2 > t_1$) вниз и налево.

При разработке конкретных модифицированных ПФ обычно стремятся отразить характер НТП в наблюдаемой ситуации. При этом различают четыре случая:

а) существенное улучшение со временем качества рабочей силы позволяет добиться прежних результатов с меньшим количеством занятых; подобный вид НТП часто называют трудосберегающим. Модифицированная ПФ имеет вид

$$y = f(K, l(t)L),$$

где монотонная функция $l(t)$ характеризует рост производительности труда;

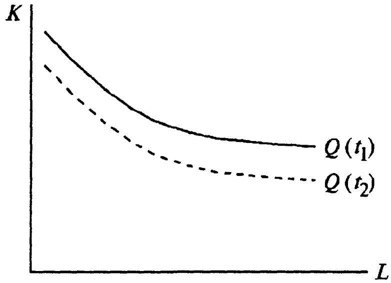

Рис. 4.13. Рост производства во времени при фиксированных затратах труда и капитала

б) преимущественное улучшение качества машин и оборудования повышает фондоотдачу, имеет место капиталосберегающий НТП и соответствующая ПФ:

$$y = f(k(t)K, L),$$

где возрастающая функция $k(t)$ отражает изменение фондоотдачи;

в) если имеет место значительное влияние обоих упомянутых явлений, то используется ПФ в форме

$$y = f(k(t)K, l(t)L);$$

г) если же нет возможности выявить влияние НТП на производственные факторы, то применяется ПФ в виде

$$y = a(t)\, f(K, L),$$

где $a(t)$ — возрастающая функция, выражающая рост продукции при неизменных значениях затрат факторов. Для исследования свойств и особенностей НТП используются некоторые соотношения между результатами производства и затратами факторов. К их числу относятся:

а) средняя производительность труда

$$l = \frac{y}{L},$$

б) средняя фондоотдача

$$k = \frac{y}{K},$$

в) коэффициент фондовооруженности работника

$$x = \frac{K}{L},$$

г) равенство между уровнем оплаты труда и предельной (маргинальной) производительности труда

$$w = \frac{\partial y}{\partial L},$$

д) равенство между предельной фондоотдачей и нормой банковского процента

$$\frac{\partial y}{\partial K} = r.$$

Говорят, что НТП является нейтральным, если он не изменяет с течением времени определенных связей между приведенными величинами.

Рассмотрим далее три случая:

1) прогресс называется нейтральным по Хиксу, если в течение времени остается неизменным соотношение между фондовооруженностью (x) и предельной нормой замены факторов (w/r). В частности, если $w/r = \text{const}$, то замена труда на капитал и наоборот не принесет никакой выгоды и фондовооруженность $x = K/L$ также останется постоянной. Можно показать, что в этом случае модифицированная ПФ имеет вид

$$y = a(t)\; f(K, L)\,,$$

и нейтральность по Хиксу эквивалентна рассмотренному выше влиянию НТП непосредственно на выпуск продукции. В рассматриваемой ситуации изокванта с течением времени смещается налево вниз путем преобразования подобия, т.е. остается в точности той же формы, что и в исходном положении;

2) прогресс называется нейтральным по Харроду, если в течение рассматриваемого периода времени норма банковского процента (r) зависит лишь от фондоотдачи (k), т.е. на нее не влияет НТП. Это означает, что предельная фондоотдача установлена на уровне нормы процента и дальнейшее увеличение

капитала нецелесообразно. Можно показать, что такой тип НТП соответствует производственной функции

$$y = f(K, l(t)L),$$

т.е. технический прогресс является трудосберегающим;

3) прогресс является нейтральным по Солоу, если сохраняется неизменным равенство между уровнем оплаты труда (w) и предельной производительностью труда и дальнейшее увеличение затрат труда невыгодно. Можно показать, что в этом случае ПФ имеет вид

$$y = f(k(t)K, L),$$

т.е. НТП оказывается фондосберегающим. Дадим графическое представление трех типов НТП на примере линейной производственной функции

$$y = bK + cL \qquad (b > 0, \ c > 0).$$

В случае нейтральности по Хиксу имеем модифицированную ПФ

$$y = a(t)\,(bK + cL),$$

где $a(t)$ — возрастающая функция t. Это означает, что с течением времени изокванта Q (отрезок прямой AB) смещается к началу координат параллельным переносом (рис. 4.14) в положение A_1B_1.

В случае нейтральности по Харроду модифицированная ПФ имеет вид

$$y = bK + cl(t)L,$$

где $l(t)$ — возрастающая функция.

Очевидно, что с течением времени точка A остается на месте и изокванта смещается к началу координат при помощи поворота в положение AB_1 (рис. 4.15).

Для прогресса, нейтрального по Солоу, соответствующая модифицированная ПФ

$$y = bk(t)K + cL,$$

где $k(t)$ — возрастающая функция. Изокванта смещается к началу координат, но точка B не сдвигается, и происходит поворот в положение A_1B (рис. 4.16).

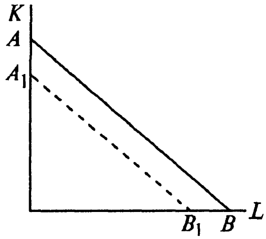

Рис. 4.14. Сдвиг изокванты при нейтральном НТП по Хиксу

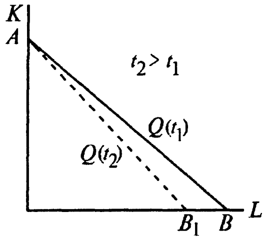

Рис. 4.15. Сдвиг изокванты при трудосберегающем НТП

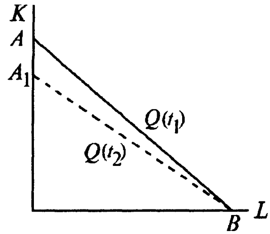

Рис. 4.16. Сдвиг изокванты при фондосберегающем НТП

При построении моделей производства с учетом НТП в основном используются следующие подходы:

а) представление об экзогенном (или автономном) техническом прогрессе, который существует также в том случае, когда основные производственные факторы не изменяются. Частным случаем такого НТП является нейтральный прогресс по Хиксу, который обычно учитывается с помощью экспоненциального множителя, например:

$$y = ae^{\lambda t} f(K, L).$$

Здесь $\lambda > 0$, характеризует темп НТП. Нетрудно видеть, что время здесь выступает как независимый фактор роста производства, однако при этом создается впечатление, что НТП происходит сам по себе, не требуя дополнительных затрат труда и капиталовложений;

б) представление о техническом прогрессе, овеществленном в капитале, связывает рост влияний НТП с ростом капитальных вложений. Для формализации этого подхода за основу берется модель прогресса, нейтрального по Солоу:

$$y = f(k(t)K, L),$$

которая записывается в виде

$$y = f(K_0 + k(t)\Delta K,\ L),$$

где K_0 — основные фонды на начало периода, ΔK — накопление капитала в течение периода, равное сумме инвестиций.

Очевидно, что если инвестирование не производится, то $\Delta K = 0$, и увеличение выпуска продукции за счет НТП не происходит;

в) рассмотренные выше подходы к моделированию НТП обладают общей чертой: прогресс выступает как заданная экзогенно величина, которая влияет на производительность труда или фондоотдачу и посредством этого сказывается на экономическом росте.

Однако в долгосрочном плане НТП является и результатом развития, и, в значительной мере, его причиной. Поскольку именно экономическое развитие позволяет богатым обществам финансировать создание новых образцов техники, а затем уже пожинать плоды научно-технической революции. Поэтому вполне правомерен подход к НТП как эндогенному явлению, вызванному (индуцированному) экономическим ростом.

Здесь выделяются два основных направления моделирования НТП:

1) модель индуцированного прогресса основана на формуле

$$y = f(k(t)K,\ l(t)L),$$

причем предполагается, что общество может распределять предназначенные для НТП инвестиции между его различными направлениями. Например, между ростом фондоотдачи ($k(t)$) (улучшение качества машин) и ростом производительности труда ($l(t)$) (повышение квалификации работников) или выбором наилучшего (оптимального) направления технического развития при данном объеме выделенных капитальных вложений;

2) модель процесса обучения в ходе производства, предложенная К. Эрроу, основана на наблюдаемом факте взаимного влияния роста производительности труда и количества новых изобретений. В ходе производства работники приобретают опыт и время на изготовление изделия уменьшается, т.е. про-

изводительность труда и сам трудовой вклад зависят от объема производства

$$L = \varphi(y).$$

В свою очередь, рост трудового фактора, согласно производственной функции

$$y = f(K, L),$$

приводит к росту производства. В простейшем варианте модели используются формулы:

$$L = y^h L_0 \qquad (1 > h > 0),$$
$$y = aK^\alpha L^\beta \qquad (\alpha > 0,\ \ \beta > 0)$$

(производственная функция Кобба—Дугласа).

Отсюда имеем соотношение

$$y^{1-\beta h} = aK^\alpha L_0^\beta,$$

которое при заданных функциях $K(t)$ и $L_0(t)$ показывает более быстрый рост y, обусловленный отмеченным выше взаимным влиянием НТП и экономического развития.

Пусть, например: $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{2}{3}$; $h = \frac{1}{2}$.

Тогда рост без учета взаимного влияния описывается уравнением

$$y = aK^{\frac{1}{3}} L_0^{\frac{2}{3}},$$

а рост с учетом взаимного влияния уравнением

$$y^{\frac{2}{3}} = aK^{\frac{1}{3}} L_0^{\frac{2}{3}},$$

или

$$y = a^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}} L_0,$$

т.е. оказывается существенно более быстрым.

Для линейной модели:

$$y = bk + cL,$$
$$L = \alpha Y,$$
$$Y(1 - \alpha c) = bK,$$
$$Y = \frac{b}{1 - \alpha c} K,$$

т.е. фондоотдача увеличивается.

Глава V

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

§1. Понятие оптимизационных задач и оптимизационных моделей

Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются *оптимизационными*.

Оптимизационные задачи (ОЗ) решаются с помощью оптимизационных моделей (ОМ) методами математического программирования.

Структура оптимизационной модели состоит из целевой функции, области допустимых решений и системы ограничений, определяющих эту область. Целевая функция в самом общем виде, в свою очередь, также состоит из трех элементов:

– управляемых переменных;

– неуправляемых переменных;

– формы функции (вида зависимости между ними).

Область допустимых решений — это область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

Если система ограничений несовместима, то область допустимых решений является пустой. Ограничения подразделяются:

а) на линейные (*I* и *II*) и нелинейные (*III* и *IV*) (рис. 5.1);

б) детерминированные (A, B) и стохастические (группы кривых C_i) (рис. 5.2).

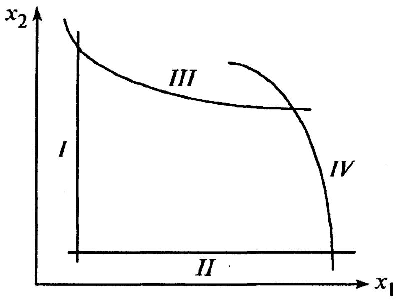

Рис. 5.1. Линейные и нелинейные ограничения

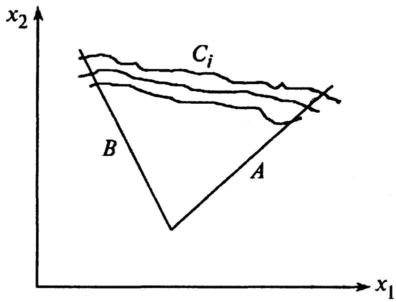

Рис. 5.2. Детерминированные и стохастические ограничения

Стохастические ограничения являются возможными, вероятностными, случайными.

ОЗ решаются методами математического программирования, которые подразделяются:

- на линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- динамическое программирование;
- целочисленное программирование;
- выпуклое программирование;
- исследование операций;
- геометрическое программирование и др.

Главная задача математического программирования — это нахождение экстремума функций при ограничениях в форме уравнений и неравенств.

Рассмотрим ОЗ, решаемые методами линейного программирования.

§2. Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными

Пусть:

b_i — количество ресурса вида i ($i = 1, 2, ..., m$);

$a_{i,j}$ — норма расхода i-того ресурса на единицу j-того вида продукции;

x_j — количество продукции вида j ($j = 1, 2, ..., n$);

c_j — прибыль (доход) от единицы этой продукции (в задачах на минимум — себестоимость продукции).

Тогда ОЗ линейного программирования (ЛП) в общем виде может быть сформулирована и записана следующим образом:

Найти переменные x_j ($j = 1, 2, ..., n$), при которых целевая функция

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max (\min),$$

была бы максимальной (минимальной), не нарушая следующих ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \ge b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m.$$

Все три случая можно привести к так называемой канонической форме, введя дополнительные переменные

$$\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где k — количество дополнительных переменных, и условие неотрицательности искомых переменных: $x_j \ge 0$.

В результате решения задачи находится некий план (программа) работы некоторого предприятия. Отсюда и появилось слово «программирование». Слово «линейное» указывает на линейный характер зависимости как в целевой функции, так и в системе ограничений. Следует еще раз подчеркнуть, что задача обязательно носит экстремальный характер, т.е. состоит в отыскании максимума или минимума (экстремума) целевой функции.

§3. Геометрическая интерпретация ОЗЛП

Пусть необходимо найти оптимальный план производства двух видов продукции (x_1 и x_2), т.е. такой план, при котором целевая функция (общая прибыль) была бы максимальной, а имеющиеся ресурсы использовались бы наилучшим образом. Условия задачи приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Данные о запасе и нормах расхода ресурсов

Вид продукции	Норма расхода ресурса на единицу продукции			Прибыль на единицу изделия
	A	*B*	*C*	
1	2	0,1	3,5	4
2	1	0,5	1	5
Объем ресурса	12	4	18	–

Оптимизационная модель задачи запишется следующим образом:

а) целевая функция:

$$4x_1 + 5x_2 \to \max;$$

б) ограничения:

$$2x_1 + x_2 \leq 12 \text{ (ограничение по ресурсу } A\text{)},$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \leq 4 \text{ (ограничение по ресурсу } B\text{)},$$
$$3{,}5x_1 + x_2 \leq 18 \text{ (ограничение по ресурсу } C\text{)};$$

в) условие неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0.$$

Данную и подобные оптимизационные модели можно продемонстрировать графически (рис. 5.3).

Преобразуем нашу систему ограничений, найдя в каждом из уравнений x_2, и отложим их на графике. Любая точка на данном графике с координатами x_1 и x_2 представляет вариант искомого плана. Однако ограничение по ресурсу *A* сужает область допустимых решений. Ими могут быть все точки, ограниченные осями координат и прямой *AA*, так как не может быть израсходовано ресурса *A* больше, чем его на предприятии имеется. Если точки находятся на самой прямой, то ресурс используется полностью.

Аналогичные рассуждения можно привести и для ресурсов *B* и *C*. В результате условиям задачи будет удовлетворять любая точка, лежащая в пределах заштрихованного многоугольника. Данный многоугольник называется областью допустимых решений.

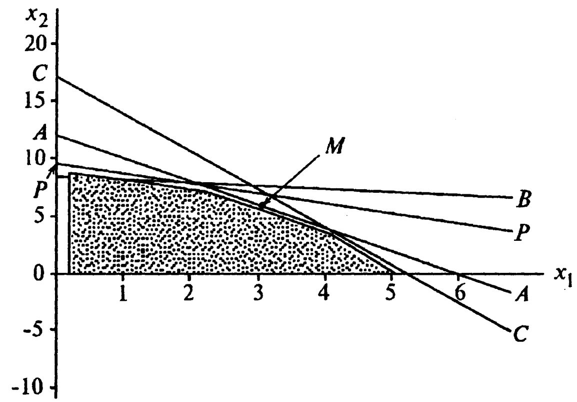

Рис. 5.3. Геометрическая интерпретация оптимизационной задачи линейного программирования

Однако нам необходимо найти такую точку, в которой достигался бы максимум целевой функции. Для этого построим произвольную прямую $4x_1 + 5x_2 = 20$, как $x_2 = 4 - 4/5x_1$ (число 20 произвольное). Обозначим эту линию *PP*. В каждой точке этой линии прибыль одинакова. Перемещая эту линию параллельно ее исходному положению, найдем точку, которая удалена от начала координат в наибольшей мере, однако не выходит за пределы области допустимых решений. Это точка *M*, которая лежит на вершине многоугольника. Координаты этой точки ($x'_1 = 3{,}03$ и $x'_2 = 7{,}4$) и будут искомым оптимальным планом.

§4. Симплексный метод решения ОЗЛП

Симплексный метод — это вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений при переходе от одной базисной точки (базисного решения) к другой. При этом значение целевой функции улучшается.

Базисным решением является одно из допустимых решений, находящихся в вершинах области допустимых значений. Проверяя на оптимальность вершину за вершиной, приходят к искомому оптимуму. На этом принципе основан симплекс-метод.

Симплекс — это выпуклый многогранник в n-мерном пространстве с $n + 1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости (гиперплоскость делит пространство на два полупространства).

Например, линия бюджетных ограничений делит блага на доступные и недоступные.

Доказано, что если оптимальное решение существует, то оно обязательно будет найдено через конечное число итераций (шагов), кроме случаев «зацикливания».

Алгоритм симплексного метода состоит из ряда этапов.

Первый этап. Строится исходная ОМ. Далее исходная матрица условий преобразуется в приведенную каноническую форму, которая среди всех других канонических форм выделяется тем, что:

а) правые части условий (свободные члены b_i) являются величинами неотрицательными;

б) сами условия являются равенствами;

в) матрица условий содержит полную единичную подматрицу.

Если свободные члены отрицательные, то обе части неравенства умножаются на –1, а знак неравенства меняется на противоположный. Для преобразования неравенств в равенства вводятся дополнительные переменные, которые обычно обозначают объем недоиспользованных ресурсов. В этом их экономический смысл.

Наконец, если после добавления дополнительных переменных матрица условий не содержит полную единичную подматрицу, то вводятся искусственные переменные, которые не имеют никакого экономического смысла. Они вводятся исключительно для того, чтобы получить единичную подматрицу и начать процесс решения задачи при помощи симплексного метода.

В оптимальном решении задачи все искусственные переменные (ИП) должны быть равными нулю. Для этого вводят ИП в целевую функцию задачи с большими отрицательными коэффициентами ($-M$) при решении задачи на max, и с большими положительными коэффициентами ($+M$), когда задача решается на min. В этом случае даже небольшое ненулевое значение ИП будет резко уменьшать (увеличивать) значение целевой функции. Обычно M в 1000 раз должно быть больше, чем значения коэффициентов при основных переменных.

Второй этап. Строится исходная симплекс-таблица и отыскивается некоторое начальное базисное решение. Множество переменных, образующих единичную подматрицу, принимается за начальное базисное решение. Значения этих переменных равны свободным членам. Все остальные внебазисные переменные равны нулю.

Третий этап. Проверка базисного решения на оптимальность осуществляется при помощи специальных оценок коэффициентов целевой функции. Если все оценки коэффициентов целевой функции отрицательны или равны нулю, то имеющееся базисное решение — оптимальное. Если хотя бы одна оценка коэффициента целевой функции больше нуля, то имеющееся базисное решение не является оптимальным и должно быть улучшено.

Четвертый этап. Переход к новому базисному решению. Очевидно, что в оптимальный план должна быть введена такая переменная, которая в наибольшей степени увеличивает целевую функцию. При решении задач на максимум прибыли в оптимальный план вводится продукция, производство которой наиболее выгодно. Это определяется по максимальному положительному значению оценки коэффициента целевой функции.

Столбец симплексной таблицы с этим номером на данной итерации называется *генеральным столбцом.*

Далее, если хотя бы один элемент генерального столбца a_{ij0} строго положителен, то отыскивается генеральная строка (в противном случае задача не имеет оптимального решения).

Для отыскания генеральной строки все свободные члены (ресурсы) делятся на соответствующие элементы генерального столбца (норма расхода ресурса на единицу изделия). Из полученных результатов выбирается наименьший. Соответствующая ему строка на данной итерации называется *генеральной*. Она соответствует ресурсу, который лимитирует производство на данной итерации.

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении генеральных столбца и строки, называется *генеральным элементом*.

Затем все элементы генеральной строки (включая свободный член) делятся на генеральный элемент. В результате этой операции генеральный элемент становится равным единице. Далее необходимо, чтобы все другие элементы генерального столбца стали бы равны нулю, т.е. генеральный столбец должен стать единичным. Все строки (кроме генеральной) преобразуются следующим образом. Полученные элементы новой строки умножаются на соответствующий элемент генерального столбца и полученное произведение вычитается из элементов старой строки.

Значения новых базисных переменных получим в соответствующих ячейках столбца свободных членов.

Пятый этап. Полученное базисное решение проверяется на оптимальность (см. третий этап). Если оно оптимально, то вычисления прекращаются. В противном случае необходимо найти новое базисное решение (четвертый этап) и т.д.

§5. Пример решения ОЗЛП симплексным методом

Пусть необходимо найти оптимальный план производства двух видов продукции x_1 и x_2 (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Исходные данные примера

Вид продукции	Норма расхода ресурса на единицу прибыли		Прибыль на единицу изделия
	A	*B*	
1	5	8	7
2	20	4	3
Объем ресурса	20	36	–

1. Построим ОМ

$$F(x) = 7x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20 \text{ — ограничение по ресурсу } A;$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 36 \text{ — ограничение по ресурсу } B.$$

2. Преобразуем задачу в приведенную каноническую форму. Для этого достаточно ввести дополнительные переменные x_3 и x_4. В результате неравенства преобразуются в строгие равенства:

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 + x_4 = 36.$$

Построим исходную симплексную таблицу и найдем начальное базисное решение. Им будет пара значений дополнительных переменных, которым соответствует единичная подматрица

$$x_3 = 20 \text{ и } x_4 = 36.$$

Базисные переменные	Свободные члены (план)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	20	5	2	1	0
x_4	36	8	4	0	1
$F_j - C_j$	–	7	3	0	0

1-я итерация. Находим генеральный столбец и генеральную строку:

$$\max(7, 3) = 7,$$

$$\min\left(\frac{20}{5}; \frac{36}{8}\right) = \frac{20}{5}.$$

Генеральный элемент равняется 5.

Базисные переменные	Свободные члены (план)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	4	1	0,4	0,2	0
x_4	4	0	0,8	–1,6	1
$F_j - C_j$	28	0	0,2	–1,4	0

2-я итерация. Найденное базисное решение не является оптимальным, так как строка оценок ($F_j - C_j$) содержит один положительный элемент. Находим генеральный столбец и генеральную строку:

$$\max(0,\ 0{,}3,\ -1{,}4,\ 0) = 0{,}2,$$

$$\min\left(\frac{4}{0{,}4};\ \frac{4}{0{,}8}\right) = \frac{4}{0{,}8}$$

Базисные переменные	Свободные члены (план)	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	0	1	–0,5
x_2	5	0	1	–2	1,25
$F_j - C_j$	29	0	0	–1	–0,25

Найденное решение оптимально, так как все специальные оценки целевой функции ($F_j - C_j$) равны нулю или отрицательны. $F(x) = 29$; $x_1 = 2$; $x_2 = 5$.

§6. Решение оптимизационной задачи линейного программирования в Excel

Пусть предприятие (например, мебельная фабрика) производит столы и стулья. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Данные о расходе ресурсов и прибыли от реализации продукции

Продукты и ресурсы	Столы	Стулья	Объем ресурсов
Расход древесины на изделие, $м^3$	0,5	0,04	200
Расход труда, чел.-ч	12	0,6	1800
Прибыль от реализации единицы изделия, руб.	180	20	–

Кроме того, на производство 80 столов заключен контракт с муниципалитетом, который, безусловно, должен быть выполнен. Необходимо найти такую оптимальную производственную программу, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

Пусть x_1 — количество столов, x_2 — количество стульев.

Тогда система ограничений и целевая функция запишутся следующим образом:

$180x_1 + 20x_2 \to \max$ (целевая функция);
$0{,}5x_1 + 0{,}04x_2 \leq 200$ (ограничения по древесине);
$12x_1 + 0{,}6x_2 \leq 1800$ (ограничения по труду);
$x_1 \geq 80$ (контракт с муниципалитетом);
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$;
x_1, x_2 — целые числа.

Для решения задачи в Excel запишем ее в виде, представленном на рис. 5.4.

Для решения задачи вызовем меню *Сервис—Поиск решения* (*Tools—Solver*).

В открывшемся диалоговом окне *Поиск решения* (рис. 5.5) укажем:

- адрес целевой ячейки (в нашем примере D5);
- диапазон искомых ячеек (A2:A3);
- ограничения: A2 >= 80,
  A2:A3 = целое,
  A2:A3 >= 0,
  B2 <= D2,
  B3 <= D3.

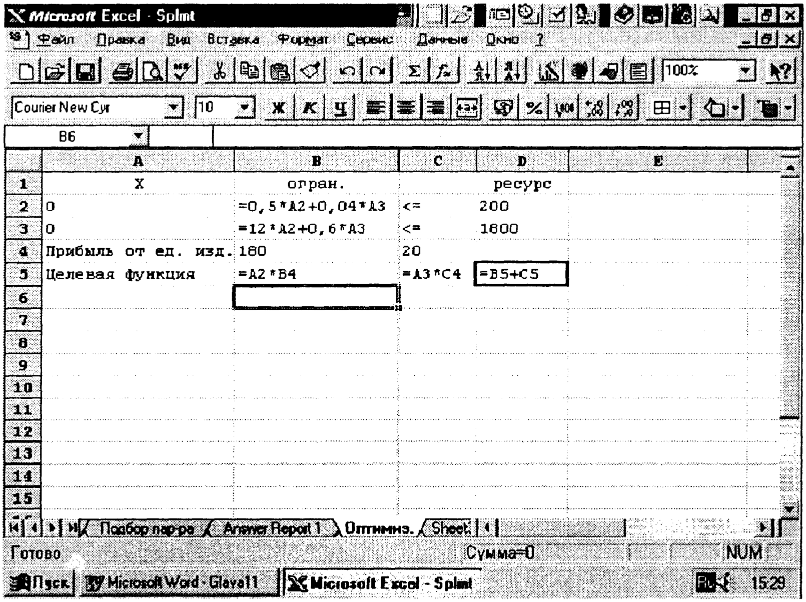

Рис. 5.4. Запись исходных данных для решения задачи линейной оптимизации

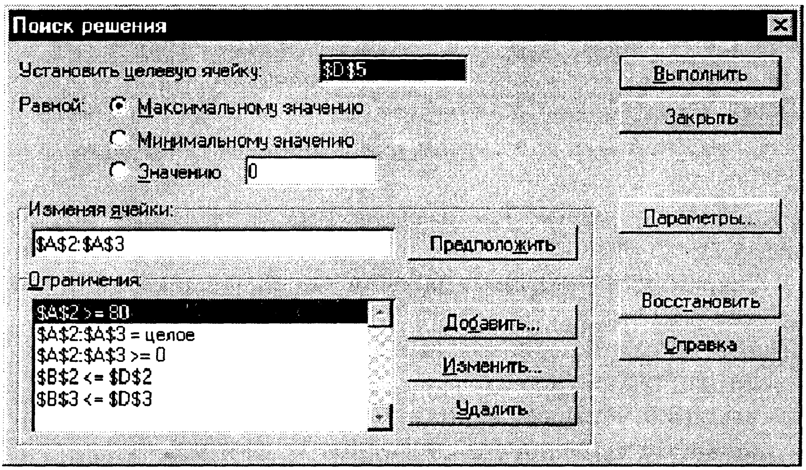

Рис. 5.5. Диалоговое окно *Поиск решения*

Добавления, изменения и удаления ограничений производятся с помощью кнопок *Добавить, Изменить, Удалить* (*Add, Change, Delete*).

Для нахождения оптимального решения нажмем кнопку *Выполнить* (*Solve*). В результате в таблице получим значение целевой функции — 42400 млн руб. при $x_1 = 80$ и $x_2 = 1400$ (рис. 5.6).

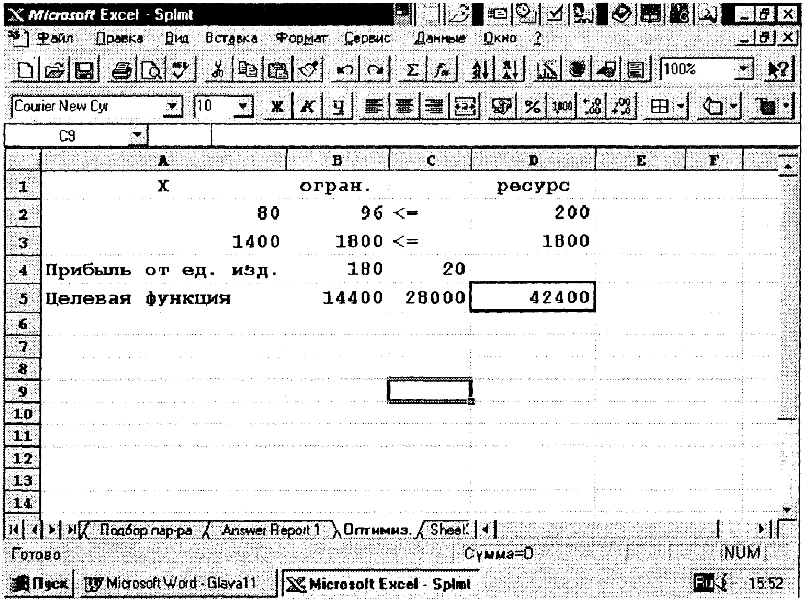

Рис. 5.6. Рабочий лист с найденным оптимальным решением

Диалоговое окно *Результаты поиска решения* позволяет (рис. 5.7):

- сохранить на текущем рабочем листе найденное оптимальное решение;
- восстановить первоначальные значения;
- сохранить сценарий;
- выдать отчеты по результатам, устойчивости, пределам, необходимые для анализа найденного решения.

Если щелкнуть по кнопке *OK*, то на месте исходной таблицы получим таблицу с найденными оптимальными значениями (см. рис. 5.6).

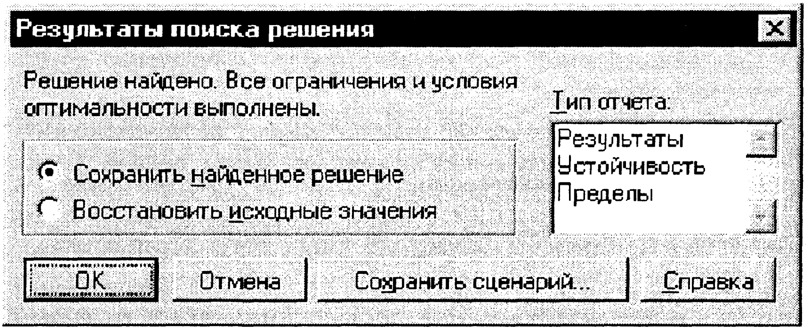

Рис. 5.7. Диалоговое окно *Результаты поиска решения*

Как видно из результатов решения, предприятию производить столы не очень выгодно. Поэтому оно ограничило объем их выпуска в количестве, необходимом для выполнения контракта. Остальные ресурсы направлены на производство стульев.

§7. Двойственная задача ЛП

Двойственная задача ЛП может быть сформулирована следующим образом:

найти переменные y_i $(i = 1, 2, ..., m)$, при которых целевая функция была бы минимальной

$$Z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

не нарушая ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Данная задача называется двойственной (симметричной) по отношению к прямой задаче, сформулированной во втором параграфе данной главы. Однако правильным будет и обратное утверждение, так как обе задачи равноправны. Компоненты решения двойственной задачи называются *объективно обусловленными оценками.*

Прямая и обратная задачи ЛП связаны между собой теоремами двойственности.

Первая теорема двойственности. Если обе задачи имеют допустимые решения, то они имеют и оптимальное решение, причем значение целевых функций у них будет одинаково

$$F(x) = Z(y) \text{ или } \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Если же хотя бы одна из задач не имеет допустимого решения, то ни одна из них не имеет оптимального решения.

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости). Для того чтобы векторы $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задачи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$y_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j - c_j\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Следствие 1. Пусть оптимальное значение некоторой переменной двойственной задачи строго положительно

$$y_i > 0.$$

Тогда из условия (1) получим

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

Экономический смысл данных выражений можно интерпретировать в следующей редакции. Если объективно обусловленная оценка некоторого ресурса больше нуля (строго положительна), то этот ресурс полностью (без остатка) расходуется в процессе выполнения оптимального плана.

Следствие 2. Пусть для оптимального значения некоторой переменной x_i прямой задачи выполняется условие строгого неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i.$$

Тогда, основываясь на том же первом условии (1), можно заключить, что $y_i = 0$.

Экономически это означает, что если в оптимальном плане какой-то ресурс используется не полностью, то его объективно обусловленная оценка обязательно равна нулю.

§8. Решение двойственной задачи ЛП

Ранее (§6) мы рассматривали прямую задачу ЛП:

$$F(x) = 180x_1 + 20x_2 \to \max$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}04x_2 \le 200$$
$$12x_1 + 0{,}6x_2 \le 1800$$
$$x_1 \ge 80$$
$$x_1 x_2 \ge 0.$$

В системе неравенств должны быть однотипные знаки «меньше или равно». Поэтому неравенство $x_1 \ge 80$ умножим на –1 и поменяем знак неравенства на противоположный.

$$Z(y) = 200y_1 + 1800y_2 - 80y_3 \to \min$$

$$0{,}5y_1 + 12y_2 - y_3 \geq 180$$
$$0{,}04y_1 + 0{,}6y_2 \geq 20$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Ограничение на целочисленность переменных здесь не требуется.

Решение прямой задачи дало следующие результаты:

$$x_1 = 80; \ x_2 = 1400; \ F(x) = 42400.$$

В результате решения двойственной задачи получим

$$y_1 = 0; \ y_2 = 33{,}3; \ y_3 = 220; \ Z(y) = 42400.$$

Объективно обусловленная оценка $y_1 = 0$ указывает на то, что у нас избыток древесины: $y_2 = 33{,}3$, т.е. больше нуля. Значит этот ресурс (труд) полностью используется в оптимальном плане. Значение целевой функции $Z(y)$ равно $F(x) = 42400$. Это свидетельствует о том, что найденное решение оптимально.

§9. Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ

Анализ задачи с использованием объективно обусловленных оценок показывает, что первый ресурс (древесина) расходуется не полностью. Можно убедиться, что для найденного оптимального плана достаточно 96 куб. м древесины, а 104 куб. м избыточны. Изменение ограничения по древесине с 200 до 96 куб. м не повлияет на оптимальный план. Следовательно, объективно обусловленные оценки являются устойчивыми в некоторых пределах изменения исходных условий задачи.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера дефицитности ресурсов. Древесина, объективно обусловленная оценка которой у нас равна нулю, не дефицитна, а трудовые ресурсы с объективно обусловленной оценкой, равной в нашей задаче 33,3, дефицитны и используются полностью.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера влияния ограничений на целевую функцию при приращении данного ресурса на единицу. Так, например, уменьшение задания по производству столов с 80 до 79 увеличивает целевую функцию на 220 руб., а увеличение трудовых ресурсов с 1800 до 1801 чел.-ч увеличивает целевую функцию (если снять условие целочисленности) на 33,3 руб.

Объективно обусловленные оценки выступают как меры взаимозаменяемости резервов (ограничений). Так, например, если увеличить задание по производству столов на единицу, то для того чтобы целевая функция осталась прежней, нужно добавить 6,6 чел.-ч (220/33,3). В этом случае x_1 будет равен 81, $x_2 = 1391$, а значение целевой функции составит 42400.

Следует иметь в виду, что при существенном изменении исходных условий задачи обычно получается уже другая система оценок. Следовательно, объективно обусловленные оценки обладают свойством конкретности, так как определяются совокупностью условий данной задачи. Для другой задачи и других условий их значения будут совершенно иными.

§10. Разработка производственной программы фирмы

Разработку производственной программы фирмы можно выполнить, используя метод производственных функций, который дает возможность получить описание эффективного технологического множества в терминах связи между «входом» (затратами производственных факторов) и «выходом» (результатами производственной деятельности) объекта. Однако во многих случаях представляется полезным иметь сведения о структуре того или иного эффективного технологического способа, т.е., если возможно, понять, комбинацией каких более простых процессов он является. В качестве основной модели, позволяющей дать описание не только связей «вход»—«выход», но и параметров внутреннего состояния производственной системы, применяется, как правило, линейная модель производства. Эта модель строится исходя из предположения, что всякий допустимый технологический способ (в том числе эффективный) может быть представлен в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами так называемых базисных производственных способов. Наиболее распространенное истолкование такого представления основывается на том, что производственное предприятие рассматривается как объединение параллельно работающих взаимосвязанных цехов, участков и т.п., причем в каждом из них используется некая определенная технология. Тогда описание такой технологии (т.е. производство продукции и соответствующие затраты) можно считать базисным производственным способом. Время работы цеха по этой технологии обычно называют интенсивностью базисного способа. В рассматриваемом примере все основные показатели затрат и выпуска для производственного объекта в целом оказываются суммой подобных же величин по отдельным цехам.

Говоря более точно, линейные модели производства основаны на следующих гипотезах о свойствах технологического множества V:

1. Технологическое множество V является конусом в R_+^{m+n}, т.е. для любого $\alpha > 0$ имеет место следующий факт: если $v \in V$, то $\alpha v \in V$.

Последнее означает, что вместе с допустимым технологическим способом

$$v = (x, y)$$

допустимой является также технология, для которой затраты и выпуск увеличены (уменьшены при $\alpha < 1$) в одной и той же пропорции.

2. Имеет место аддитивность технологических способов, т.е. если $v^{(1)} \in V$ и $v^{(2)} \in V$, то $(v^{(1)} + v^{(2)}) \in V$.

Данная предпосылка выражает упомянутое выше свойство параллельности технологий: если допустимым является выпуск продукции в размере $y^{(1)}$ при затратах $x^{(1)}$, а также выпуск $y^{(2)}$ при затратах $x^{(2)}$, то возможен выпуск $(y^{(1)} + y^{(2)})$ при затратах ресурсов $(x^{(1)} + x^{(2)})$.

3. Существует конечный выбор базисных технологических способов $(v_1, ..., v_n)$, при помощи которых могут быть представлены все технологические способы $v \in V$, т.е. для всякого v найдутся такие неотрицательные числа $z_1, ..., z_n$, называемые интенсивностями базисных способов, для которых справедливо соотношение

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j z_j .$$

Выполнение указанных трех предположений означает, что множество V является выпуклым многогранным конусом. В конкретной задаче планирования производства обычно используется подмножество множества V, определяемое системой ограничений двух видов. Условия первого вида предназначены для характеристики ограниченности запасов ресурсов, которые необходимы для осуществления производственного процесса. Группу условий второго вида образуют плановые задания по отдельным видам продукции, комплектам или стоимостным показателям. Ограничивающие условия обоих видов записываются обычно в терминах интенсивностей базисных технологий. При этом произвольная базисная технология (с номером j) имеет вид

$$v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}),$$

где m — общее число компонент (продуктов и ресурсов). В некоторых случаях различные виды компонент отличаются знаками (например, положительные числа относятся к продуктам, а отрицательные представляют объемы затрачиваемых ресурсов), но в большинстве случаев смысл каждой компоненты специально оговаривается.

Условия ресурсного характера общего типа имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, mm),$$

где mm — число общих ограничений «меньше или равно».

Кроме того, возможны локальные ограничения

$$z_j \le \hat{b}_j,$$

которые отражают ограниченность производственной мощности по j-тому базисному способу. Ограничения, отражающие необходимость выполнения планового задания по некоторому продукту, вообще говоря, имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \ge b_i \quad (i = mm + 1, \ldots, m).$$

Таким образом, линейная модель производства позволяет представить взаимозаменяемость и комбинирование фиксированных технологических способов, считающихся основными, в некоторых пределах, обозначенных ресурсами и плановыми ограничениями. Рассматривая производственный объект как кибернетическую систему, можно сказать, что характеристики основных производственных способов (их коэффициенты затрат и выпуска) являются основными параметрами системы, а обусловленные плановым решением значения интенсивностей (z_j) представляют собой описание состояния системы. Плановое решение определяется на множестве возможных состояний Z при помощи некоторого правила выбора «наилучшего» состояния. По существу формирование такого правила выбора отражает представление об интересах производственного объекта и связанного с этим выделением множества эффективных технологических способов. Указанное правило выбора может быть сформулировано при помощи некоторого формализованного критерия (скалярная оптимизация) или набора ряда оценочных показателей (многокритериальная оптимизация). Оно может быть по существу неформальным правилом, если окончательный выбор решения зависит от условий среды, окружающей данный производственный объект, от предыдущих решений и, наконец, от субъективных оценок руководителей.

В рассматриваемой нами модели очень часто используется скалярное правило выбора наилучшего состояния, базирующееся на нахождении оптимального значения некоторой целевой функции. Эта функция обычно имеет смысл выпуска наибольшего возможного количества продукции либо в стоимостном выражении, либо в заданном комплекте. Зачастую применяются целевые функции, выражающие максимизацию прибыли или минимизацию затрат.

Если целевая функция является линейной относительно искомых интенсивностей основных технологических способов, то возникает линейная оптимизационная модель производства, которая, с одной стороны, благодаря своей относительной простоте доступна для достаточно детального математического анализа, а с другой стороны, имеет самостоятельное значение как инструмент принятия и поддержки решения в достаточно несложных ситуациях, а также как элемент более сложных конструкций решающих систем.

Обратимся далее к одной из линейных оптимизационных моделей, которая представляет собой способ решения задачи оптимизации производственной программы в условиях фиксированных цен на продукцию для предприятия, хозяйственный интерес которого состоит в получении наибольшей выручки (товарной продукции). Пусть в процессе производства используется m видов ресурсов, запасы которых также фиксированы. Тогда вектор затрат—выпуска, описывающий основной технологический способ, запишется следующим образом:

$$v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}; c_j).$$

Здесь неотрицательные числа a_{ij} $(i = 1, ..., m)$ представляют собой нормы затрат производственных факторов, а c_j — стоимость товарной продукции, полученную предприятием при реализации технологии v_j с единичной интенсивностью. Если имеющиеся запасы ресурсов составляют b_i $(i = 1, ..., m)$, то оптимизационная модель для разработки программы предприятия имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Предположим, что полученная задача линейного программирования имеет единственное решение

$$\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n).$$

Тогда технологический способ

$$\hat{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \hat{z}_j$$

есть эффективный способ, позволяющий выполнить оптимальную производственную программу и получить максимальный объем товарной продукции:

$$\hat{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{z}_j .$$

Допустим далее, что запасы используемых ресурсов b_i ($i = 1, ..., m$) могут изменяться в некоторых пределах. Если при этом не меняется оптимальный базис представленной выше задачи линейного программирования, то в силу теоремы двойственности

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{u}_i ,$$

где $\hat{u}_i$ ($i = 1, \ldots, m$) — оптимальные оценки, которые являются компонентами решения двойственности задачи. Легко видеть, что полученное соотношение можно рассматривать как определение скалярной производственной функции, причем в качестве дифференциальной продуктивности ресурса с номером i выступает оптимальная оценка $\hat{u}_i$. Приведенное представление распространяется и на более общую ситуацию, когда в пределах изменения запасов ресурсов b_i происходит смена оптимального базиса. Тогда оптимальные оценки следует считать, вообще говоря, многозначными функциями от запасов ресурсов, а производственную функцию

$$\hat{c} = f(b_1, \ldots, b_m)$$

определить в каждой точке как минимум из конечного числа линейных функций

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(1)} b_i ; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(2)} b_i ; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(s)} b_i ,$$

где $u^{(1)}$, ..., $u^{(s)}$ — суть вершины многогранника, являющегося множеством допустимых решений двойственной задачи. Такого рода производственная функция является кусочно-линейной, она имеет непрерывные производные во всех точках области определения, кроме точек, принадлежащих гиперплоскостям смены оптимального базиса. Следует заметить, что при увеличении запаса некоторого ресурса (b_i) при неизменных количествах прочих ресурсов, соответствующая оптимальная оценка ($\hat{u}_i$) уменьшается. При достаточно больших значениях некоторое количество ресурса становится излишним, а оценка $\hat{u}_i$ становится равной нулю. Это означает, что в рассматриваемом случае используемые ресурсы являются не взаимозаменяемыми, а взаимодополняющими.

В частном случае, когда в задаче присутствуют лишь локальные ограничения

$$z_0 \to \max; \quad a_i z_0 \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где через z_0 обозначен объем выпускаемой продукции, через a_i — ресурсоемкость единицы продукции по i-тому ресурсу, решение можно представить в виде

$$z_0 = \min_i \frac{b_i}{a_i}.$$

Это выражение известно так же, как производственная функция для взаимодополняющих (комплементарных) производственных факторов, и широко применяется в сложных моделях производства.

Величина оптимальной оценки $\hat{u}_i$ производственного фактора имеет троякий смысл: измерителя дополнительного вклада единицы i-того фактора в повышении значения целевой функции; коэффициента, характеризующего относительную дефицитность этого фактора по сравнению с другими, а также выражает верхний предел цены, которую согласен заплатить производитель за дополнительную единицу ресурса.

Для того, чтобы подробнее остановиться на стоимостной интерпретации оптимальных оценок, воспользуемся двумя группами соотношений между оптимальными решениями прямой и двойственной задач линейного программирования (ЛП).

Прямой задаче ЛП

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

соответствует двойственная задача:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Пусть $\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)$; $\hat{u} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$ — оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$1)\ \hat{u}_i \left(b_i - \sum_{o=1}^{m} a_{ij} \hat{z}_j \right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$2)\ \hat{z}_j \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{u}_i - c_j \right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Рассматривая условия первой группы, можно установить, что при $\hat{u}_i$, т.е. в том случае, когда оптимальная оценка i-того ресурса строго положительна, необходимо выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{z}_j = b_i.$$

Таким образом, оптимальный (эффективный) технологический способ использует данный ресурс полностью. Отсюда можно заключить, что этот производственный фактор является ограничивающим, и дополнительное поступление некоторого количества ресурса приведет к увеличению целевой функции. Если такой функцией является выпуск товарной продукции (или прибыль), то увеличение ресурса на единицу сулит получение дополнительной продукции на сумму в $\hat{u}_i$ денежных единиц. Следовательно, производство может приобрести указанную единицу по цене

$$p_i \le \hat{u}_i$$

и ожидать получение дополнительной прибыли. Если же i-тый ресурс используется не полностью в процессе производства, то его оптимальная оценка обязательно равна нулю

$$\hat{u}_i = 0.$$

В самом деле, малое дополнительное увеличение такого ресурса не приведет к увеличению выпуска, поскольку в данный момент имеется его излишек. В связи с этим затраты на приобретение дополнительного количества не являются оправданными. Здесь нужно отметить некоторые недостатки этого рассуждения. Во-первых, приведенная оценка сохраняет свой смысл лишь для достаточно малых количеств дополнительного ресурса, которые не приводят к изменению оптимального базиса задачи ЛП, а следовательно, и к изменению системы оптимальных оценок. Вполне возможно, что существенное дополнительное количество ресурса сделает более выгодным и приведет к включению в оптимальный план другой технологический способ, который связан с эффективным использованием упомянутого ресурса, что сразу повлечет изменение его оптимальной оценки в сторону увеличения.

Во-вторых, приведенное рассуждение основывается на статической модели производства, в которой весь процесс происходит в сравнительно короткий период времени. Поэтому оптимальная оценка характеризует ресурс лишь с точки зрения эффективности его использования лишь в этом кратком периоде, не затрагивая проблемы формирования запасов и движения ресурсов во времени.

Тем не менее приведенное стоимостное истолкование оптимальных оценок служит надежной базой для концепции «теневых» или расчетных цен, лежащих в основе расчета между подразделениями внутри предприятия или производственного объединения.

Условия второй группы могут быть также использованы для составления расчетных цен на готовую продукцию. Предположим, что базисный технологический способ с номером j имеет конечным результатом выпуск определенного вида продукции j (в натуральном выражении, равном q_j). Тогда, если в оптимальном решении прямой задачи $\hat{z}_j > 0$, то технологический способ j рекомендован к осуществлению и в оптимальном плане предлагается производить продукцию с номером j. Из соответствующего соотношения второй группы вытекает, что при $\hat{z}_j > 0$ имеет место равенство

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i.$$

Таким образом, при фиксированной цене изделия c_j, оптимальные оценки $\hat{u}_i$ выражают разложение цены по отдельным элементам совокупных затрат с учетом ограниченности ресурсов, представленных в рассматриваемой модели.

Конечно, для создания более полной картины распределения затрат по элементам необходимо использовать более детальные модели производства. Если в число ограничений включаются трудовые ресурсы, многие виды материальных ресурсов, лимиты капитальных вложений, то цена продукции представляется как сумма расчетной заработной платы, материальных затрат и затрат на пополнение и создание новых производственных фондов.

Некоторым недостатком приведенного представления является отсутствие в нем выражений для прибавочного продукта и дополнительного полезного эффекта у потребителя, которые присутствуют в большинстве концепций формирования цены.

В связи с этим данное соотношение следует рассматривать лишь в контексте приведенной модели производства, как средство анализа внутренних свойств исследуемого производственного объекта. С этой точки зрения соотношения второй группы и вытекающие из них следствия удобно использовать для оценки экономической эффективности новых предлагаемых базисных производственных способов. В самом деле, из соотношений второй группы вытекает, что если для некоторого базисного технологического способа j выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i > c_j,$$

которое означает, что затраты ресурсов, исчисленные с помощью оптимальных оценок, как внутренних цен, превосходят ожидаемую выручку от продажи j-того изделия, то необходимо $\hat{z}_j = 0$. Последнее означает, что такой «нерентабельный» базисный способ не рекомендуется для использования в оптимальном плане производства.

Пусть теперь предлагается новый технологический способ вида

$$(a_{1l}, \ldots, a_{il}, \ldots, a_{ml}; c_l).$$

Если оказывается, что

$$c_l \le \sum_{i=1}^{m} a_{il}\hat{u}_i,$$

то предлагаемый способ не следует включать в число базисных, поскольку он не дает дополнительной выгоды по сравнению с уже используемыми.

Если же имеет место обратное неравенство

$$c_l > \sum_{i=1}^{m} a_{il}\hat{u}_i,$$

то следует ввести предлагаемую технологию в состав базисных и найти оптимальное решение новой, расширенной, задачи. Если в результате расчета получим интенсивность $\hat{z}_l > 0$, то новая технология станет составной частью оптимального способа.

Рассмотренная статическая задача максимизации выручки широко используется для разработки производственной программы на производственных участках, цехах, т.е. таких объектах, функционирование которых обеспечивается в основном за счет привлечения ресурсов, предоставляемых извне обычно некоторым управляющим центром. В более общем случае возникает вопрос о наилучшем использовании финансовых средств, предназначенных для приобретения внешних ресурсов.

§11. Обобщения и приложения модели производства

1. В тех случаях, когда самостоятельное предприятие функционирует в рыночных условиях, необходимо возникает вопрос о наилучшем использовании собственных и заемных финансовых средств для приобретения дополнительных количеств ресурсов, которые могут применяться наряду с некоторыми фиксированными факторами (например, зданиями, сооружениями, машинами и т.п.). Математическая формулировка такой задачи основана на разделении всех ресурсов на постоянные ресурсы, запасы которых считаются заданными (b_i) ($i = 1, ..., m_1$), и нанимаемые (арендуемые) ресурсы ($i = m_1 + 1, ..., m$), запасы которых определяются косвенным образом через сумму собственных средств и кредита (K).

Рассмотрим ниже модели двух типов. В **модели первого типа** все производственные процессы являются краткосрочными в том смысле, что результаты производства появляются на рынке в течение одного периода (года), а нанимаемые производственные факторы взаимозаменяемы. В этой ситуации модель оптимизации товарной продукции имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le K_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} K_i \le K$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n); \quad K_i \ge 0 \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m).$$

Здесь p_i — цены капитальных факторов; K_i — средства, выделяемые на их приобретение.

Таким образом, задача состоит в определении не только интенсивностей производственных способов, но и нахождении оптимального распределения финансовых ресурсов.

Двойственная задача к приведенной линейной программе выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m_1} u_i b_i + wKb_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} u_i a_{ij} + \sum_{i=m_1+1}^{m} p_i v_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$w \geq v_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$w \geq 0; \;\; v_i \geq 0.$$

Здесь приняты обозначения: w — двойственная оценка финансовых ресурсов; u_i — оценка фиксированного ресурса; v_i — оценка нанимаемого ресурса.

Модели второго типа имеют динамический характер. Они описывают более реалистичную обстановку, когда производственные процессы могут быть не только краткосрочными, но и долгосрочными, в том смысле, что их результаты появятся на рынке не в данном исходном периоде, а в некотором последующем.

В этом случае при выборе наилучшего решения необходимо учесть, что денежная выручка, полученная, например, в следующем году, должна быть приведена (дисконтирована) на основе процентной ставки за кредит. Таким образом, следует принять в расчетах, что

$$c_j^{(t+1)} = \frac{c_j^t}{1+r},$$

где r — ставка банковского процента $(0 < r < 1)$.

Мы приведем пример построения динамической модели для простого случая, когда все множество производственных процессов может быть разбито на два подмножества: S — множество краткосрочных процессов; L — множество долгосрочных процессов, результаты которых появляются на второй год. Модель позволяет найти оптимальное решение для исходного года, но с учетом зависимости результатов от времени изготовления изделий:

$$\sum_{j \in S} c_j z_j + \sum_{j \in L} \frac{c_j}{1+r} z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m_1)$$

$$p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le K_i \quad (i = m_1 + 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} K_i \le K$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, n); \quad K_i \ge 0 \quad (i = m_1 + 1, \dots, m).$$

Анализ представленной модели при различных вариантах изменения цен на продукцию (c_j), цен на покупные ресурсы (p_i), а также ставки банковского процента (r) позволяет выбрать наиболее удачную программу в меняющихся условиях рынка.

2. Большой интерес представляют производственные объекты, деятельность которых основана на самофинансировании. Это означает, что возможность приобретения производственных ресурсов в основном зависит от того, насколько успешной была хозяйственная деятельность предприятия в предыдущие периоды. Таким образом модель, представляющая поведение предприятия, по существу должна быть динамической. Оставаясь в рамках линейных моделей, рассмотрим следующую простую динамическую оптимизационную модель

$$f_t = \sum_{j=1}^{n} c_j^t z_j^t \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t z_j^t \le b_i^t \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$z_j^t \ge 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

где запасы ресурсов b_i^t в каждый период (год) t определяются при помощи параметров β_i ($i = 1, ..., m$) как доли оптимального выпуска продукции в предыдущем периоде

$$b_i^t = \beta_i \hat{f}_{t-1} \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Используя соотношения, вытекающие из теории двойственности, имеем

$$\hat{f}_t = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \hat{u}_i^t \right) \hat{f}_{t-1}.$$

Таким образом получаем, что темп роста производства продукции на подобном хозрасчетном предприятии определяется величиной

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \hat{u}_i^t.$$

Поскольку величины оптимальных оценок обусловливаются в основном технологическими коэффициентами и ценами на продукцию, то определение наилучшего темпа роста λ^t может быть сделано путем рационального выбора параметров β_i, которыми в значительной мере может распоряжаться само предприятие. Из приведенной формулы, в частности, вытекает очевидная зависимость между долей средств, которые необходимо направить на развитие предприятия, и эффективностью использования ресурсов на этом предприятии. Если эффективность, характеризуемая оптимальными оценками, велика, то высокий темп развития производства обеспечивается и при малых значениях коэффициентов β_i. Для иллюстрации рассмотрим следующий простой пример. Пусть динамическая модель предприятия имеет вид

$$\begin{aligned}
&5z_1 + 6z_2 + 6z_3 \to \max \\
&3z_1 + 2z_2 + z_3 \le \beta_1 \hat{f}_{t-1} \\
&z_1 + 3z_2 + 4z_3 \le \beta_2 \hat{f}_{t-1} \\
&z_1 \ge 0; \ \ z_2 \ge 0; \ \ z_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

При $\beta_1 = \beta_2$ оптимальные оценки ресурсов равны

$$u_1 = \frac{14}{11} = 1{,}273; \quad u_2 = \frac{13}{11} = 1{,}182,$$

следовательно, величина

$$\lambda^t = 1{,}273\beta_1 + 1{,}182\beta_2.$$

Если $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}41$, то $\lambda^t = 1{,}006$;
$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}42$, то $\lambda^t = 1{,}031$;
$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}44$, то $\lambda^t = 1{,}080$;
$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}45$, то $\lambda^t = 1{,}105$.

Таким образом, в данном случае достаточно высокий темп роста производства (около 8—10% в год) может быть достигнут лишь при условии отчисления на развитие предприятия примерно 90% выручки. Подобные расчеты могут быть положены в основу выбора системы экономических нормативов для групп однородных предприятий и отраслей промышленности.

3. Описанные в пп. 1 и 2 модели могут служить основой расчетов оптимальной производственной программы для производственных предприятий (фирм). Однако во многих случаях объект такого типа следует рассматривать как составную часть более сложной отраслевой, региональной или народнохозяйственной системы. В такой обстановке представленные автономные модели не отражают многих требований, которые сложная система (ее регулирующий центр) предъявляет к предприятию как элементу своей подсистемы. Наиболее распространенным способом выражения такой «вертикальной» связи оказывается формулировка специальных заданий по отдельным видам или группам изделий в форме заказа (контракта), обязательного для выполнения на данном предприятии. Разрабатывая математическую модель поведения предприятия в этих условиях, по-прежнему исходят из предположения о существовании некоторой целевой функции

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j,$$

максимизация которой соответствует хозяйственным интересам рассматриваемого объекта[1]. Группа ограничений, в условиях выполнения которых происходит оптимизация, состоит из четырех главных подгрупп:

а) условия, отражающие ограниченность трудовых, материальных и энергетических ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1).$$

Здесь через m_1 обозначено число строго лимитированных видов ресурсов, запасы которых не могут быть увеличены в течение расчетного периода;

б) условия, связанные с необходимостью выполнения контрактов центра по группам взаимозаменяемых изделий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \ge S_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m).$$

Здесь величина m определяется количеством таких «заказных» групп изделий;

в) условия, выражающие ограниченность производственной мощности по выпуску изделия определенного вида, т.е. «локальные» ограничения типа

$$z_j \le d_j \quad (j \in N_1 \subset N).$$

Здесь $N = \{1, \ldots, n\}$, число элементов множества N_1 определяется количеством изделий, по которым лимитирована производственная мощность;

г) условия, определяемые заказом на конкретные, строго указанные виды продукции (изделия):

$$z_j \ge l_j \quad (j \in N_2 \subset N).$$

Количество номеров и сами номера определяются спецификой заказа (контракта) центра.

---

[1] В условиях рыночной системы предприятие *де юре* не стремится к максимизации прибыли, хотя *де факто* эффективное использование ресурсов становится основополагающим.

Путем соединения перечисленных соотношений и требовании максимизации целевой функции f получается линейно-программная модель для определения оптимального плана производства предприятия, действующего в условиях обязательного выполнения заказа. Вообще говоря, ограничения этой модели являются противоречивыми и система условий может оказаться несовместимой. Возникающая в этом случае задача максимизации целевой функции называется несобственной. Решение несобственных задач линейного программирования осуществляется специальными методами, основанными либо на коррекции системы ограничений, либо на применении методов регуляризации. Причиной возникновения несовместимости может служить либо несогласованность заказа, с одной стороны, и ресурсных и мощностных ограничений — с другой; либо определенные неточности в задании основных технологических способов и ограничительных условий. Мы будем исходить из того, что эти недостатки устранены специальными приемами и в дальнейшем изложении изучается случай, когда система ограничений совместна и поставленная задача имеет оптимальное решение. В целях проведения дальнейшего экономико-математического анализа обозначим двойственные переменные, соответствующие ограничениям подгруппы (а) через u_i $(i = 1, ..., m_1)$; ограничениям подгруппы (б) через v_i $(i = m_1 + 1, ..., m)$; ограничениям подгруппы (в) через u'_j, для подгруппы (г) через v'_j.

В указанных обозначениях функционал двойственной задачи имеет вид

$$g = \sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i v_i + \sum_{j\in N_1} d_j u'_j - \sum_{j\in N_2} l_j v'_j.$$

В силу равенства оптимальных значений прямой и двойственной задачи имеем, что максимальная величина целевой функции $\hat{f}$ может быть представлена при помощи соотношения

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{m_1} b_i \hat{u}_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i \hat{v}_i + \sum_{j\in N_1} d_j \hat{u}'_j - \sum_{j\in N_2} l_j \hat{v}'_j.$$

Здесь через $\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{u}'_j, \hat{v}'_j$ обозначены компоненты оптимального решения двойственной задачи.

Из приведенного соотношения видно, что каждая оптимальная оценка $\hat{u}_i, \hat{u}'_i$ сохраняет свой смысл приростной продуктивности ресурса (в случае оценки $\hat{u}'_i$ производственной мощности). Величина такой оценки показывает, что при увеличении ресурса (мощности) на дополнительную «малую единицу» максимальное значение целевой функции увеличится на $\hat{u}_i$ (соответственно $\hat{u}'_i$).

Из той же формулы вытекает, что оптимальная оценка $\hat{v}_i$ может быть интерпретирована как мера потери в целевой функции, которая возникает, если заказ по i-той группе изделий будет увеличен. Аналогичный смысл следует придать оптимальной оценке $\hat{v}'_j$ относительно «индивидуального» заказа изделия с номером j. Таким образом, если среди указанных оптимальных оценок имеются отличные от нуля, то возникает возможность количественного измерения несоответствия между заданиями центра и хозяйственными интересами производственной единицы. Полученная информация может быть использована для согласования интересов верхнего и нижнего звеньев при помощи специальных мер, включающих в себя изменения цен изделий, подбор уточненных значений экономических нормативов, компенсационных платежей.

4. Если в ходе производственного процесса становятся возможными значительные изменения интенсивностей технологических способов, то предположение о пропорциональности затрат ресурсов и результатов хозяйственной деятельности является, вообще говоря, неверным. Тем самым нарушается одна из важнейших предпосылок построения линейной модели (см. §10) и становится необходимым использовать более сложные, нелинейные модели производства. При этом обычно сохраняется смысл понятия интенсивности производственного способа и ее содержательная интерпретация, что позволяет использовать ее в качестве промежуточного аргумента в зависимости между затратами и результатами.

Наиболее естественным обобщением линейной модели является выпуклая модель производства, в которой множество Z допустимых интенсивностей описано при помощи ограничений вида:

$$g_i(z_i, \ldots, z_n) \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

с вогнутыми (выпуклыми вниз) функциями $g_i(z)$.

Применяется следующее скалярное правило выбора наилучшего решения

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \to \max,$$

где f — выпуклая вверх функция своих аргументов, которая обычно имеет смысл выпуска товарной продукции. Свойство выпуклости функции $f(z)$, а также вогнутости функций $g_i(z)$ связано с представлением об убывающей эффективности производства, т.е. о снижении предельных норм выпуска $\partial f/\partial z_j$ и увеличении предельных норм затрат $(\partial g_i/\partial z_j)$ при расширении масштабов производства, т.е. интенсивностей z_j. Напомним, что в линейных моделях производства эти нормы считаются постоянными, т.е. не зависящими от масштабов производства. Аналогом двойственных оценок линейной модели в рассматриваемом случае служат оптимальные значения множителей Лагранжа в задаче нахождения седловой точки функции

$$L(z, u) = f(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i\big(b_i - g_i(z)\big).$$

Точка $(\tilde{z}, \tilde{u})$ называется седловой точкой функции L в положительном ортанте $(m + n)$-мерного пространства переменных z_j $(j = 1, \ldots, n)$; u_i $(i = 1, \ldots, m)$, если выполнены условия

$$L(z, \tilde{u}) \le L(\tilde{z}, \tilde{u}) \le L(\tilde{z}, u)$$

для всех $z \ge 0$; $u \ge 0$.

Иными словами в точке $(\tilde{z}, \tilde{u})$ достигается максимальное значение функции Лагранжа по группе переменных интенсивностей и минимальное по множителям Лагранжа. Для выпуклой задачи оптимизации, дополненной условием телесности, седловая точка функции Лагранжа всегда существует. При этом ее первая компонента $\tilde{z}$ является решением задачи оптимизации, а вторая компонента $\tilde{u}$ дает оптимальный набор множителей Лагранжа, которые используются для параметрического анализа оптимальных планов.

В качестве непосредственного приложения выпуклой модели производства рассмотрим задачу распределения некоторого запаса ресурса между несколькими производствами. Эта задача заключается в том, что требуется найти такой совместный план работы ряда предприятий, при выполнении которого общий выпуск продукции достигает наибольшего значения в условиях ограниченности запаса основного ресурса (например, энергии). Обозначим через z_j — интенсивности производственной деятельности j-того предприятия, через $f_j(z_j)$ — соответствующий выпуск продукции, через $g_j(z_j)$ — величину затрат основного ресурса. При этом предполагается, что все f_j выпуклы вверх, а g_j выпуклы вниз.

Математическая модель задачи имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z_j) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(z_j) \le b$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Пусть основной ресурс является дефицитным, тогда запас b расходуется полностью, и решение задачи находится методом условной экстремизации. Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L(z, y) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z_j) + u\left(b - \sum_{j=1}^{n} g_j(z_j)\right).$$

Условия оптимальности дают систему соотношений

$$\hat{z}_j\left(\frac{df_j}{dz_j}(\hat{z}) - u\frac{dg_j}{dz_j}(\hat{z})\right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\hat{y}\left(b - \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{z}_j)\right) = 0.$$

Ресурс расходуется полностью и обычно его оптимальная оценка $\hat{y} > 0$.

Если при этом все предприятия действуют, т.е. $\hat{z}_j > 0$ ($j = 1, ..., n$), то в оптимальном плане выполнены равенства

$$\frac{df_j}{dz_j} = \hat{u}\frac{dg_j}{dz_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Это означает, что для оптимального распределения ресурсов, нужно выбрать интенсивности работы предприятий таким образом, чтобы были равны между собой все отношения приростов продукции к приростам затрат ресурса

$$\frac{f'_j(z_j)}{g'_j(\hat{z}_j)} = \hat{u}.$$

Поскольку каждая из этих величин служит характеристикой ресурсоемкости продукции на предприятии, то требование их равенства в оптимальном плане выражает в явной форме принцип равной эффективности использования ресурсов по различным конкурирующим направлениям. В самом деле, если бы некоторое направление имело бы большую эффективность, чем другие, то следовало бы увеличить его долю в распределении ресурса за счет уменьшения доли остальных. Вновь полученный план позволит получить больший объем продукции и, следовательно, исходный план не является оптимальным.

5. В рассмотренных выше моделях оптимизации правило выбора наилучшего решения (оптимального плана) представлено при помощи требования максимизации скалярной функции, которая таким образом отражает степень достижения целей объекта и поэтому часто называется целевой функцией.

Однако построение такой целевой функции для реального экономического объекта представляет собой, как правило, очень трудную задачу. Причины этого связаны с многообразным характером целей развития, влиянием не только экономических, но и социальных факторов, сложностью оценки полезности конечных результатов хозяйственной деятельности и т.п. Поэтому некая синтезированная общая цель производственного объекта часто может быть выражена лишь в словесной форме, но практически не поддается формулировке при помощи четко выраженной скалярной целевой функции. В связи с этим оказывается перспективным считать, что объект ставит перед собой задачу достижения не одной общей цели, но имеет в виду систему целей, каждой из которой отвечает частная целевая функция. Такой подход позволяет поставить задачу выбора наилучшего решения как проблему многокритериальной оптимизации на множестве Z допустимых наборов интенсивностей технологических способов.

Пусть $f_l(z)$ $(l = 1, ..., L)$ — целевые функции, соответствующие системе L целей производственного объекта, определенные на множестве Z. При этом большему значению f_l отвечает более высокая степень достижения l-той цели. Можно сказать, что требуется найти решение задачи векторной оптимизации

$$f(z) = \{f_1(z), \dots, f_L(z)\} \to \max$$

для $z \in Z$.

В данной ситуации векторная целевая функция $f(z)$ выступает в виде компромисса между различными целями и позволяет условно сформулировать некоторую, вообще говоря, некорректную математическую задачу, в которой требуется найти план, который был бы точкой максимума для нескольких различных функций. Для того, чтобы хотя бы частично устранить эту неправильность, используются некоторые примирительные определения решений многокритериальной задачи. Наиболее распространенным из них является понятие оптимума Парето, которое звучит следующим образом:

вектор $\tilde{z}$ называется оптимумом Парето в задаче векторной оптимизации

$$f(z) \to \max; \quad z \in Z,$$

если не существует такого допустимого вектора $z \in Z$, что

$$f_l(z) \geq f_l(\tilde{z}) \quad (l = 1, \dots, L),$$

причем для некоторого номера l_0

$$f_l(z) > f_l(\tilde{z}).$$

Это означает, что для оптимального, по Парето, вектора $\tilde{z}$ характерно следующее свойство: если некоторый допустимый вектор z дает большее значение некоторой частной целевой функции, чем для вектора $\tilde{z}$, то необходимо существует другая частная целевая функция, значение которой в точке $\tilde{z}$ больше, чем ее значение в точке z. Нетрудно видеть, что определение оптимума Парето является естественным обобщением максимума скалярной функции $f(z)$, которое можно сформулировать так: допустимый вектор $\tilde{z}$ является оптимальным, если не существует другого допустимого вектора z, для которого было бы $f(z) > f(\tilde{z})$.

Вообще говоря, оптимум Парето не является единственным. Совокупность всех таких оптимумов образует множество Парето, которое может иметь сложную структуру. Чаще всего представление о множестве Парето дается при помощи графического изображения в пространстве частных целевых функций (критериев). Пример такого представления приведен на рис. 5.8.

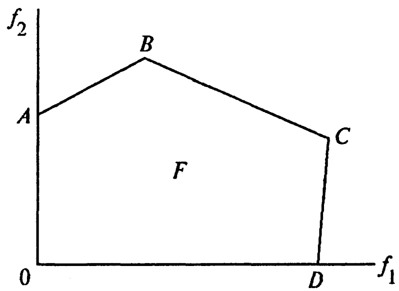

Рис. 5.8. Оптимальность по Парето

Здесь множество F есть образ множества допустимых интенсивностей Z при монотонном преобразовании

$$f(z) = \{f_1(z), f_2(z)\}.$$

Отрезок BC является образом множества Парето в задаче

$$f(z) \to \max; \quad z \in Z.$$

Проблема описания множества Парето в конкретной задаче многокритериальной оптимизации оказывается обычно очень сложной и решается путем последовательного решения серии вспомогательных однокритериальных задач. При этом используется, в частности, тот факт, что оптимальный план всякой задачи вида

$$\sum_{l=1}^{L} \alpha_l f_l(z) \to \max; \quad z \in Z; \quad \alpha_l \geq 0 \quad (l = 1, \ldots, L)$$

является оптимумом Парето. Следовательно, изменяя коэффициенты, можно построить некоторый набор точек множества Парето.

Глава VI

ОСНОВЫ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫНКА

§1. Рыночное равновесие. Сравнительная статика

В общем случае согласование экономических интересов между участниками сложного процесса производства, распределения и потребления наиболее эффективно осуществляется с помощью рыночного механизма, который выступает в роли регулятора взаимосвязей между хозяйственными субъектами. В основном варианте рынка, в условиях свободной конкуренции производитель и потребитель выступают как независимые агенты, что позволяет свободно принимать компромиссные решения по заключению сделок и вырабатывать взаимовыгодные условия покупки и продажи тех или иных товаров. В ситуации, когда сделки совершаются большим числом участников, можно считать, что цены складываются как результат массового взаимодействия продавцов и покупателей, а каждый отдельный участник практически не влияет на их формирование. В связи с этим применяемые ниже термины «продавец» и «покупатель» следует понимать как описание агрегированных множеств реальных продавцов и покупателей, каждое из которых обладает своими специфическими интересами. Сам процесс достижения равновесия как согласованного решения представляется как последовательность действий, каждое из которых может быть интерпретировано либо как реальная сделка по некоторой промежуточной цене, либо как переговорный акт между продавцом и покупателем с целью выяснения возможной цены, объема спроса и предложения.

Наиболее простые модели равновесия относятся к случаю, когда предметом сделок является один товар, а в качестве участников выступают независимые продавец (производитель) и покупатель (потребитель). Предполагая, что спрос (D) и предложение (S) зависят только от цены товара (p), скажем, что состояние равновесия в узком смысле, есть совпадение спроса и предложения

$$D(\tilde{p}) = S(\tilde{p}),$$

где $\tilde{p}$ — цена равновесия (рис. 6.1).

Равновесием в широком смысле считается любое состояние, в котором избыточный спрос $E(p) = D(p) - S(p) \le 0$.

Фактическое значение цены равновесия $\tilde{p}$ определяется как факторами производства, так и потребления.

При этом со стороны производителя на цену равновесия влияют удельные издержки на производство продукции так, что их увеличение приводит к повышению цены равновесия, а уменьшение — к ее понижению. Со стороны потребителя существенное влияние оказывают его доход (увеличение дохода вызывает повышение цены равновесия) и относительная полезность данного товара для потребителя (ее увеличение также приводит к росту цены равновесия).

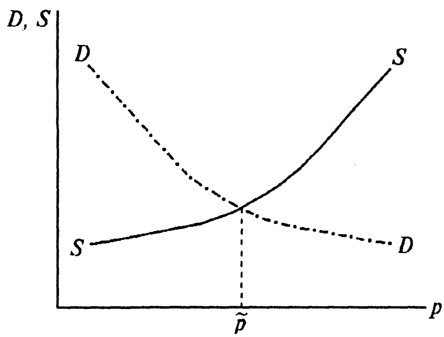

Рис. 6.1. Равновесие спроса и предложения

Для иллюстрации этого положения рассмотрим следующий простой пример.

Предположим, что производитель продукта стремится к максимальной прибыли при условии, что функция издержек имеет вид (см. гл. IV)

$$C(y) = c_0 + by^2,$$

где c_0 — постоянные издержки, b — коэффициент «удельных» издержек.

Тогда оптимальное решение в зависимости от цены (функция предложения) имеет вид:

$$S(p) = \frac{p}{2b}.$$

Пусть далее функция спроса потребителя определяется соотношением (см. гл. III):

$$D(p) = \frac{\gamma I}{p},$$

где I — доход потребителя, γ — коэффициент относительной полезности товара.

Цена равновесия определяется в данном случае как решение уравнения:

$$\frac{p}{2b} = \frac{\gamma I}{p}.$$

Отсюда

$$\tilde{p} = \sqrt{2b\gamma I}.$$

При увеличении издержек (b) цена равновесия повышается, но объем обмена

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{p}}{2b} = \sqrt{\frac{\gamma I}{2b}}$$

уменьшается, так что денежная выручка производителя остается неизменной

$$Q = \tilde{p}\tilde{S} = \gamma I$$

(она равна той доле дохода потребителя, которую он выделяет на покупку данного товара).

При увеличении дохода потребителя (I) или коэффициента относительной полезности (γ) цена равновесия также повышается и объем обмена также увеличивается

$$\tilde{S} = \tilde{D} = \frac{\gamma I}{\tilde{p}} = \sqrt{\frac{\gamma I}{b}}.$$

Денежная выручка производителя (и расходы потребителя) увеличивается

$$Q = \tilde{p}\tilde{S} = \gamma I.$$

Таким образом, цена равновесия выступает как показатель, сочетающий в себе в результате компромисса разнохарактерные интересы производителя и потребителя.

Цена равновесия, как правило, очень чутко реагирует на изменение внешних условий или экзогенных факторов.

В качестве таких факторов со стороны спроса могут выступать изменение уровня дохода потребителей, приобретающих данный товар, а также влияние моды и появление новых товаров аналогичного назначения. В случае увеличения дохода ($I' > I$) кривая спроса занимает более высокое положение $D'D'$ (рис. 6.2) и новая цена равновесия ($\tilde{p}'$) оказывается большей, чем прежняя ($\tilde{p}' > \tilde{p}$).

При этом, как видно, объем продаж товара в денежном выражении увеличивается ($Q' > Q$).

Если же на рынке появляется более эффективный или более дешевый заменитель рассматриваемого нами товара, то покупатели уменьшают ту долю дохода, которую они предназначали ранее для его покупки ($\gamma' < \gamma$), и спрос на этот товар падает. В результате кривая спроса сдвигается вниз и налево (рис. 6.3) и новая цена равновесия становится более низкой, нежели прежняя ($\tilde{p}'' < \tilde{p}$).

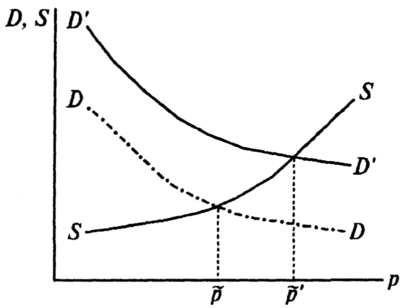

Рис. 6.2. Смещение кривой спроса при увеличении дохода

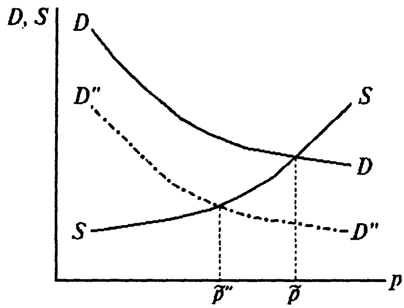

Рис. 6.3. Смещение кривой спроса при появлении на рынке более дешевого аналогичного товара

Объем продаж товара также уменьшается.

Изменение условий со стороны предложения может происходить вследствие различных обстоятельств. Например, снижение уровня предложения товара может быть вызвано уменьшением производства из-за разрыва ранее существовавших хозяйственных связей; плохим урожаем сельскохозяйственных продуктов; уменьшением импорта и т.п. Во всех этих случаях кривая предложения смещается вниз направо в положение $S'S'$ и новая цена равновесия оказывается больше старой ($\tilde{p}' > \tilde{p}$) (рис. 6.4).

Заметим, что при этом объем продаж в натуральном выражении снижается, но в денежном выражении может и увеличиться.

Разработка новых экономичных технологий, специальные государственные или коммерческие дотации могут служить причиной того, что производство товара в прежних объемах осуществляется с меньшими издержками. В этой обстановке кривая предложения смещается налево вверх ($S''S''$) (рис. 6.5) и цена равновесия уменьшается ($\tilde{p}'' < \tilde{p}$).

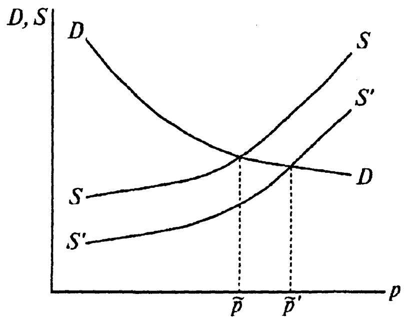

Рис. 6.4. Снижение объема предложения ведет к росту равновесной цены

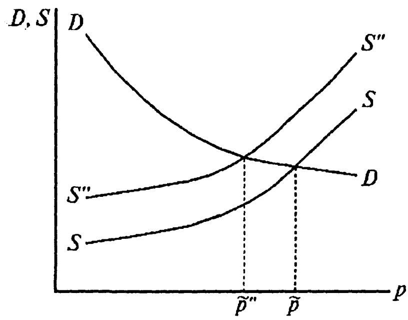

Рис. 6.5. Новые технологии, дотации смещают кривую предложения вверх, равновесная цена снижается

Особым является случай монопольного рынка, когда предложение либо практически не зависит от цены (является неэластичным), либо даже уменьшается по мере увеличения цены. В этой ситуации изменение цены равновесия определяется изменением спроса (рис. 6.6).

Проведенный выше анализ позволяет изучить и более общий случай, когда имеет место одновременное влияние нескольких различных факторов на цену равновесия: например, увеличиваются доходы потребителей и осуществляются дополнительные дотации или льготы производству. В такой обстановке противоположные тенденции (к росту и к снижению цены) могут быть взаимно погашены и стабильный уровень цен сохранится.

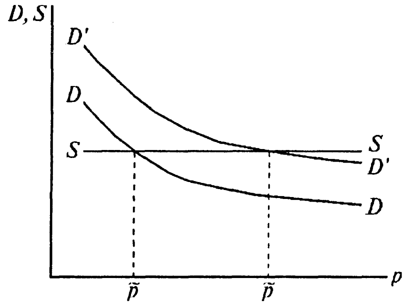

Рис. 6.6. На монопольном рынке предложение практически не зависит от цены

Если же имеет место рост доходов потребителей, но не улучшаются условия производства, то появляются условия для неконтролируемого роста цен, который обычно называется инфляцией спроса (***demand-pull inflation***).

В ситуации, когда доходы потребителей практически не возрастают, но увеличиваются издержки производителей, появляется другой вид инфляции — инфляция издержек (***cost-push inflation***). В реальной обстановке различные причины инфляции переплетаются между собой и классификация инфляционных явлений становится весьма затруднительной.

Количественное исследование изменения положения равновесия вследствие вариации внешних условий и соответствующих им параметров называется сравнительной статикой. Покажем на примерах, как проводится такой анализ.

Предположим, что функция предложения некоторого товара представлена формулой

$$S(p) = 4p - 3,$$

а функция спроса имеет вид

$$D(p) = \frac{10}{p}.$$

Цена равновесия ($\tilde{p}$) есть решение уравнения

$$4p - 3 = \frac{10}{p}.$$

Очевидно, что $\tilde{p} = 2$, а объем продаж $Q = 10$.

1. Допустим сначала, что доход потребителей увеличился на 10%, и теперь функция спроса выглядит так:

$$D_1(p) = \frac{11}{p}.$$

Новая цена равновесия удовлетворяет уравнению

$$4p - 3 = \frac{11}{p},$$

откуда новая цена равновесия

$$\tilde{p}_1 = 2{,}075.$$

Таким образом, мы видим, что повышение дохода на 10% привело к росту цены почти на 4%. Это означает, что эластичность цены равновесия по доходу приблизительно равна

$$E_{p_i} \approx 0{,}4,$$

т.е. в среднем при увеличении дохода на 1% цена увеличится на 0,4%.

2. В этом примере рассмотрим случай, когда функция спроса осталась прежней, но произошло снижение цен на сырье и материалы, которые используются в производстве данного товара, вследствие чего изменилась (стала более эластичной) функция предложения. Пусть она выражается следующим образом:

$$S(p) = 5p - 3.$$

Теперь цена равновесия ($\tilde{p}_2$) находится из уравнения

$$5p - 3 = \frac{10}{p}.$$

Отсюда имеем $\tilde{p}_2 = 1{,}475$.

Таким образом, при увеличении эластичности предложения по цене на 20% цена равновесия снизилась на 12,7%. Отсюда вытекает, что в среднем снижение цен на сырье и материалы на 1% имеет своим следствием снижение равновесной цены товара на 0,6%.

Методы сравнительной статики используются и в более сложной ситуации, когда речь идет о равновесии на рынках многих товаров. Они дают возможность оценить действенность и эффективность многих мероприятий государственного управления экономикой.

§2. Моделирование процесса достижения равновесия

Цена равновесия $\tilde{p}$ может быть интерпретирована как «**справедливая**» цена обмена, которая устанавливается в результате многочисленных парных сделок между продавцами и покупателями. Это состояние равновесия замечательно тем, что в нем полностью удовлетворен спрос, а также отсутствует излишнее производство товара, т.е. нет перепроизводства продукта и нерационального расходования производственных ресурсов. Таким образом, с производственной точки зрения состояние равновесия соответствует наибольшей экономии ресурсов. В связи с этим состояние равновесия является приемлемым и подходящим для обеих групп участников рыночного обмена — производителей и потребителей и поэтому может выступить как конечная цель процесса регулирования при помощи цен.

Как правило, в конкурентной экономике без сговора (коалиции) достижение равновесия есть стихийный процесс, основанный на том, что при любой цене, превышающей равновесную, количество товара, которое стремятся предложить продавцы (производители), будет превосходить то количество, на которое покупатели (потребители) намерены предъявить спрос; возникает давление на цену в сторону ее понижения, причем деятельность некоторых продавцов, желающих избавиться от товара, будет направлена против существующего (слишком высокого) уровня цены. Подобным же образом можно показать, что цена, находящаяся ниже уровня равновесия, испытывает давление в сторону повышения.

При возникновении и оформлении устойчивого спроса на товар в зависимости от цены, т.е. при наличии не меняющейся во времени функции спроса $D(p)$, различают, следуя А. Маршаллу, три основных вида рыночного равновесия:

а) мгновенное равновесие достигается в обстановке, когда предложение фиксировано ($S_1(p) = \text{const}$), т.е. производители товара не готовы к расширению производства или не в состоянии это сделать; равновесие такого рода обычно достигается при достаточно высокой цене $\tilde{p}_1$, что и является стимулом для последующих действий производителей;

б) кратковременное равновесие возникает тогда, когда в действие вводятся наличные резервы (свободные производственные мощности) и предложение несколько увеличивается, причем $S'_2(p) > 0$ равновесная цена $\tilde{p}_2$ в этой ситуации оказывается ниже $\tilde{p}_1$, но и остается еще довольно высокой;

в) длительное нормальное равновесие устанавливается в ситуации, когда в деле принимают участие практически все производители, способные производить данный товар без резкой перестройки своей хозяйственной деятельности. Функция предложения $S_3(p)$ также возрастающая и равновесная цена $\tilde{p}_3$ соответствует нормальным издержкам производства (рис. 6.7).

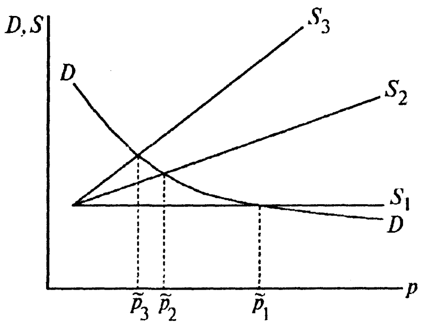

Рис. 6.7. Длительное нормальное равновесие на рынке

Процесс приближения к нормальному равновесию во времени можно представить при помощи последовательности малых дискретных шагов, используя представления о функциях спроса и предложения, которые сами могут изменяться в ходе рыночного процесса вследствие изменения условий производства и потребления.

Одна из основных моделей процесса достижения равновесия использует его дискретное представление с помощью так называемых **«торговых»** дней с номерами $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \ldots$.

Предполагается, что к началу торгового дня t известна начальная цена товара p_t, которая полностью определяет объем предложения

$$S_t = S(p_t).$$

Далее считается, что в течение дня предложенный товар полностью реализуется по цене p_{t+1}, которая определяется из условия временного равновесия

$$D(p_{t+1}) = S_t$$

и является исходной ценой для следующего торгового дня $(t + 1)$ и т.д.

Геометрическая иллюстрация этого процесса приближения к равновесию (рис. 6.8) напоминает паутину и поэтому сама модель часто называется паутинообразной. Можно показать, что сходимость указанного рыночного процесса будет гарантирована, если выполнено условие

$$S'(p) \le |D'(p)|.$$

Последнее означает, что для сходимости достаточно, чтобы маргинальное предложение не превосходило бы маргинального спроса, или, иными словами, положительная реакция производителя на повышение цены не была бы столь же значительной, как отрицательная реакция потребителя, т.е. это процесс в обстановке относительно неактивных производителей. Заметим, что если $S'(p) = -D'(p)$, то возникает ситуация так называемого **«свиного цикла»**, при которой состояние равновесия оказывается недостижимым. В случае, если наклон линии спроса круче наклона линии предложения, спираль будет раскручиваться в обратном порядке. Если наклоны линий спроса и предложения одинаковы, то паутина закольцуется (рис. 6.9).

Вторая модель процесса достижения равновесия, напротив, может быть использована для описания ситуации активных производителей, готовых сразу же откликнуться на возникающий спрос. Подобный процесс задается при помощи следующей системы соотношений: в торговый день t задано предложение S_t и оно определяет цену p_t как решение уравнения

$$S(p_t) = S_t.$$

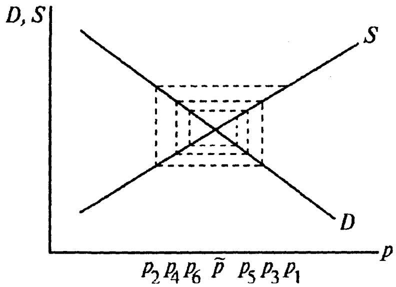

Рис. 6.8. Паутинообразная модель

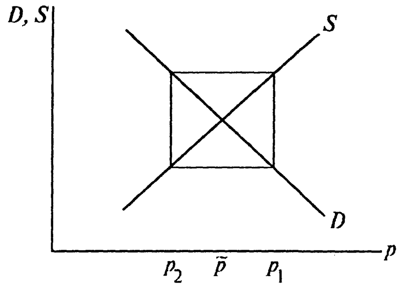

Рис. 6.9. Закольцованная паутинообразная модель (равновесие на рынке недостижимо)

Эта цена характеризует объем спроса

$$D_t = D(p_t),$$

а предложение на следующий торговый день прямо ориентируется на спрос предыдущего дня

$$S_{t+1} = D_t.$$

Описанный процесс также может быть представлен при помощи паутинообразной модели, причем достаточное условие сходимости имеет вид:

$$S'(p) > |D'(p)|,$$

что соответствует более сильной реакции производителей по сравнению с потребителями. Проиллюстрируем обсуждаемый процесс достижения равновесия на примере, который был представлен ранее в §1.

Пусть функция предложения

$$S(p) = 4p - 3,$$

а функция спроса

$$D(p) = \frac{10}{p}.$$

Основное соотношение имеет вид

$$4p_{t+1} - 3 = \frac{10}{p_t}.$$

Отсюда цена в каждый следующий рыночный день определяется через цену в предыдущий день по формуле

$$p_{t+1} = \frac{2{,}5}{p_t} + 0{,}75.$$

Предположим, что начальная цена $p_0 = 1{,}5$, и сведем результаты расчета в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Сходимость цены к равновесной во времени

p	D	S	$E = D - S$
1,5	6,67	3	3,67
2,42	4,14	6,67	–2,53
1,78	5,61	4,14	1,47
2,15	4,65	5,61	–0,96
1,91	5,23	4,65	0,58
2,06	4,85	5,23	–0,38
1,96	5,10	4,85	0,25
2,02	4,95	5,10	–0,15
1,99	5,02	4,95	0,07
2,01	4,98	5,02	–0,04
2,00	5	4,98	0,02

Таким образом, мы видим, что по прошествии 11 «рыночных» дней процесс установления цены сходится к состоянию равновесия, причем получается уже известное нам значение равновесной цены $\tilde{p} = 2$. Заметим, что промежуточные значения цены попеременно становятся то больше, то меньше равно-

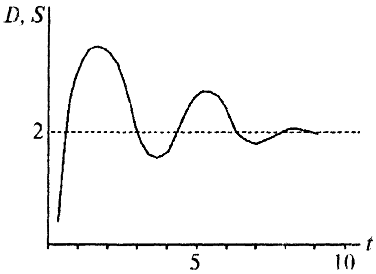

Рис. 6.10. Процесс сходимости цены к равновесной

весной величины. Это означает, что процесс имеет колебательный характер с уменьшающейся амплитудой (рис. 6.10).

Строго монотонный характер имеет процесс достижения, известный под названием «нащупывание», в котором важную роль играет внешнее (централизованное) регулирование. Мы рассмотрим здесь одну из моделей такого процесса, которая носит имя П. Самуэльсона. В этой модели изменение цены прямо ставится в зависимость от величины избыточного спроса в торговый день t:

$$\Delta p_t = p_{t+1} - p_t = aE_t = a(D_t - S_t) \quad (a > 0);$$
$$D_t = D(p_t); \qquad S_t = S(p_t).$$

При $E_t > 0$ (спрос больше предложения) цена повышается, в противном случае снижается. Этот процесс сходится при любом соотношении между $S'(p)$ и $D'(p)$. Его наиболее распространенная интерпретация состоит в том, что на рынке имеется арбитр (аукционер), который оценивает величину остаточного спроса и на основании этой оценки объявляет цену (p_{t+1}) на следующий день, а все участники процесса неукоснительно следуют его указаниям. Потребители образуют свой спрос в соответствии с функцией спроса $D(p)$, а производители обеспечивают выпуск согласно функции предложения $S(p)$. Величина a, которая называется параметром настройки, играет в этой схеме большую роль, поскольку при слишком малых его значениях процесс сходится очень медленно, а при слишком больших может и не сходиться к равновесию.

Продемонстрируем ход этого процесса на приведенном выше примере, причем положим значение параметра $a = 0{,}1$.

Основное соотношение имеет вид

$$p_{t+1} = p_t + 0{,}1\left(\frac{10}{p_t} - 4p_t + 3\right).$$

Результаты расчетов с $p_0 = 1{,}5$ приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

«Нащупывание» равновесной цены по модели П. Самуэльсона

p	D	S	$E = D - S$
1,5	6,67	3	3,67
1,87	5,35	4,48	0,87
1,96	5,11	4,83	0,28
1,99	5,03	4,96	0,07
2	5	5	0

Для анализа свойств такого управляемого рыночного процесса может быть использована модель в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{dt} = a\left[D(p) - S(p)\right].$$

Состояние равновесия на сложном рынке многих товаров также может быть определено с помощью функций спроса и предложения. Предположим, что на рынке выступает L различных товаров с номерами $l = 1, \ldots, L$. Обозначим через $p = (p_1, \ldots, p_L)$ систему цен на товары, $D_l(p)$ — функции спроса, $S_l(p)$ — функции предложения. Тогда равновесием в узком смысле является состояние, при котором реализуется совпадение спроса и предложения по всем товарным позициям

$$D_l(\tilde{p}) = S_l(\tilde{p}) \qquad (l = 1, \ldots, L),$$

где $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_L)$ — система равновесных цен.

Равновесием в широком смысле следует полагать всякое состояние, для которого

$$D_l(p) \le S_l(p) \qquad (l = 1, \ldots, L).$$

Свойства состояния равновесия на рынке многих товаров в большинстве случаев подобны такому же состоянию на рынке одного товара. Однако для более тщательного его изучения полезно рассмотреть отдельно рынки взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров.

В случае рынка взаимозаменяемых товаров функции спроса удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial D_l}{\partial p_l} < 0; \quad \frac{\partial D_k}{\partial p_l} > 0 \quad (k \neq l); \quad (l, k = 1, \ldots, L).$$

Последнее условие означает, что при повышении цены на любой товар и неизменности цен на другие товары потребительский сектор будет снижать свой спрос на него, но одновременно повысит спрос на другие, заменяющие его товары.

Процесс достижения равновесия в этом случае может быть представлен при помощи изучения последовательности «торговых дней». При этом считается, что к началу торгового дня $(t + 1)$ известна система цен $p_t = (p_{t_1}, \ldots, p_{t_L})$, которая была сформирована ранее и послужила ориентиром для производителей, поставляющих на рынок товары в количествах

$$S_{t_l} = S_l(p_t) \quad (l = 1, \ldots, L).$$

В течение торгового дня $(t + 1)$ происходит полная распродажа товаров, и новая система цен p_{t+1} определяется в соответствии с функциями спроса. Иначе говоря, новая система цен находится как решение системы уравнений:

$$D_l(p_{t+1}) = S_{t_l} \quad (l = 1, \ldots, L).$$

Следует заметить, что сходимость этого процесса к положению равновесия обеспечена в том случае, когда выполнено условие

$$\|S'(p)\| < \|D'(p)\|,$$

где $S'(p)$, $D'(p)$ — матрицы Якоби (составленные из первых частных производных) для функций предложения и спроса соответственно. В ходе последовательных обменов могут применяться различные способы регулирования, которые позволяют осуществить достижение равновесия, если сходимость не имеет места, или ускорить процесс достижения равновесия. В большинстве случаев причиной несходимости процесса оказывается слишком высокая эластичность предложения по цене, которая обусловливает нарушения приведенного выше достаточного условия. Для того, чтобы уменьшить эту эластичность, применяется «**поощрение за недопроизводство**» обычно в форме либо прямой компенсации при малом объеме производства, либо путем резкого повышения налогов при больших объемах производства.

Для описания процесса достижения равновесия с централизованным регулированием («**нащупывание**») применяется упомянутая выше схема, которая для случая многих товаров имеет вид

$$p_{t+1,l} = \max\left[0;\ p_{t_l} + a_l(D_{t_l} - S_{t_l})\right] \quad (l = 1, \dots, L).$$

Здесь $a_l > 0$ — параметры настройки,

$$D_{t_l} = D_l(p_t); \quad S_{t_l} = S_l(p_t).$$

Использование знака max позволяет избежать появления отрицательных значений цен.

В случае взаимодополняющих (комплементарных) товаров их рынки можно рассматривать независимо друг от друга. При этом состояние равновесия со стороны спроса в значительной мере определяется тем, какую долю своего дохода потребительский сектор выделяет на приобретение данного товара, а со стороны предложения оно зависит от тех объемов ресурсов, которые могут быть выделены на производство этого продукта.

Таким образом, можно считать, что функция спроса имеет вид

$$D = D(p, I),$$

где p — цена товара; I — часть дохода потребителя, выделенная для его приобретения, причем справедливы соотношения

$$\frac{\partial D}{\partial p} < 0; \quad \frac{\partial D}{\partial I} > 0. \qquad (*)$$

Регулирование объема спроса осуществляется путем изменения указанной доли потребительского дохода.

Функция предложения выражается следующим образом:

$$S = S(p, Q),$$

где Q — объем ресурсов, выделяемых для регулирования поведения производителя.

При этом имеют место неравенства

$$\frac{\partial S}{\partial p} > 0; \quad \frac{\partial S}{\partial Q} > 0. \qquad (**)$$

Исходя из условия равновесия

$$D(\tilde{p}, I) = S(\tilde{p}, Q)$$

и соотношений (*) и (**) получаем, что цена равновесия $\tilde{p}$ зависит от объема ресурсов (Q) и дохода (I) следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Q} = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial Q}}{\left(\dfrac{\partial D}{\partial p} - \dfrac{\partial S}{\partial p}\right)} < 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial I} = \frac{\dfrac{\partial D}{\partial I}}{\left(\dfrac{\partial S}{\partial p} - \dfrac{\partial D}{\partial p}\right)} > 0.$$

Таким образом, при увеличении объема ресурсов со стороны производства (Q) цена равновесия при неизменном спросе уменьшается (рис. 6.11): кривая предложения S_1 соответствует фиксированному объему ресурса R, а кривая S_2 — увеличенному объему ($Q + \Delta Q$).

Подобным же образом при неизменном предложении и увеличении доходов потребителей кривая спроса D сдвигается вправо и равновесная цена увеличивается (рис. 6.12).

Полученные результаты можно использовать для разработки методов внерыночного регулирования, основанных на субсидиях и дотациях. В некоторых случаях существование равновесия не является само собой разумеющимся и его реализация требует дополнительных усилий:

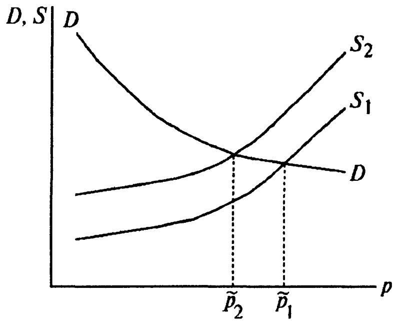

Рис. 6.11. При увеличении объема ресурсов равновесная цена уменьшается

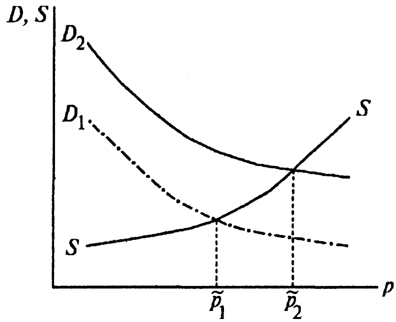

Рис. 6.12. Рост доходов потребителя сдвигает кривую спроса вправо вверх

1) ситуация, в которой производитель несет большие издержки в процессе производства и поэтому не может начать поставлять продукцию по цене ниже обусловленной границы рентабельности (p_0). Однако эта цена оказывается весьма высокой для потребителей и спрос при ценах $p \geq p_0$ оказывается меньше объемов производства, при которых оно рентабельно (рис. 6.13).

Как видно, в этой обстановке равновесия в узком смысле не существует, но есть равновесие в широком смысле при $p \geq p_0$ (предложение больше спроса). Положение может быть исправлено путем дотирования производителя, после чего кривая предложения (S_1) перемещается налево в положение (S_2), и может быть достигнута точка равновесия;

2) случай дефицита, когда производство товара невелико и слабо реагирует на повышение цены, т.е. почти или полностью неэластично, а потребители готовы приобрести большое количество товара практически по любой цене (рис. 6.14).

Нетрудно видеть, что в области разумных цен нет равновесия ни в узком, ни в широком смысле, напротив, имеет место дефицит товара. Равновесие может быть достигнуто либо путем резкого подъема производства, либо посредством резкого ограничения (рестрикции) доходов потребителей, например денежной реформы.

Свойства экономического равновесия на рынках многих товаров могут быть изучены при помощи следующей модели замкнутой экономики.

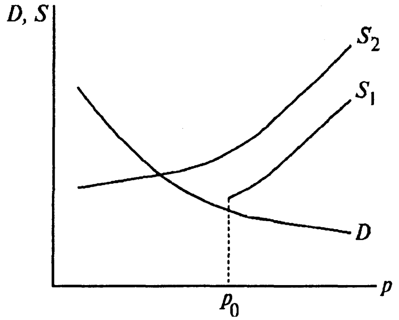

Рис. 6.13. Дотирование производителя позволяет достигнуть равновесия на рынке

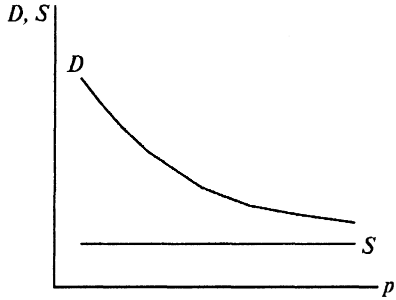

Рис. 6.14. При недостаточном производстве неэластичного товара равновесие на рынке отсутствует, наблюдается дефицит

Пусть имеется L рынков товаров с номерами $l = 1, ..., L$; m потребителей ($i = 1, ..., m$) и n производителей ($j = 1, ..., n$). Вектор $p(p_1, ..., p_l, ..., p_l)$ представляет систему цен на товары; через D_{il} обозначен спрос i-того потребителя на l-тый товар, через S_{jl} — предложение l-того товара производителем с номером j. Группа условий равновесия по каждому товару имеет вид

$$S_l = \sum_{j=1}^{n} S_{jl} = \sum_{i=1}^{m} D_{il} = D_l \quad (l = 1, \ldots, L). \qquad (***)$$

Предлагаем так же, как и ранее, что функции спроса зависят от системы цен и от дохода потребителя (I_i)

$$D_{il} = D_{il}(p_1, \ldots, p_L; I_i).$$

Функции предложения выражаются через систему цен и финансовый ресурс производителя (Q_j)

$$S_{jl} = S_{jl}(p_1, \ldots, p_L; Q_j).$$

При заданных доходах (I_i) и ресурсах (Q_j) система L уравнений (***) служит для нахождения равновесной системы цен

$$\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_L).$$

Можно показать, что существование экономически осмысленной (неотрицательной) равновесной системы цен связано с выполнением дополнительного условия на соотношениях доходов потребителей (I_i) и ресурсов производителей (Q_j).

В дальнейшем будем исходить из того, что совокупный доход (I) потребителей полностью тратится на закупку товаров

$$\sum_{l=1}^{L} p_l D_l = \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{i=1}^{m} D_{il} = \sum_{i=1}^{m} I_i = I,$$

а совокупный ресурс (Q) производителей получен в результате продажи товаров

$$Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j = \sum_{l=1}^{L} p_l S_l = \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{j=1}^{n} S_{jl}.$$

Возможны следующие два случая:

а) означенные совокупные величины равны между собой

$$Q = I \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{j=1}^{n} S_{jl} = \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{i=1}^{m} D_{il}. \qquad (****)$$

Данная ситуация получается в результате нормальной работы самообеспечивающейся системы рынков, в которой денежный спрос (Q) со стороны производителей полностью удовлетворяется за счет расходов потребителей (I). При естественных предположениях относительно функций спроса и предложения (см. выше) система уравнений (***) с учетом (****) дает возможность найти равновесную систему цен с точностью до постоянного множителя, т.е. систему относительных цен. Для удобства один из товаров обычно принимается за базовый (например, деньги) или просто называется единицей счета (его цена равна 1);

б) совокупный доход потребителей и доход производителей не равны между собой

$$Q \neq I.$$

В этом случае система уравнений (***), вообще говоря, не имеет неотрицательного решения, т.е. не существует экономически осмысленной системы равновесных цен.

Рассмотрим следующий пример рынка двух товаров, на котором действуют два производителя (каждый поставляет лишь один товар) и два потребителя (каждый из них использует оба товара).

Пусть p_1, p_2 — цены товаров:

1) функции предложения имеют вид

$$S_1(p_1) = 10p_1; \quad S_2(p_2) = 40p_2.$$

Таким образом, совокупный доход производителей

$$Q = p_1S_1 + p_2S_2 = 10p_1^2 + 40p_2^2;$$

2) функции спроса выражены следующим образом:
совокупный доход потребителей

$$I = Q = 10p_1^2 + 40p_2^2,$$

доход первого потребителя

$$I_1 = 0{,}6I,$$

доход второго

$$I_2 = 0{,}4I.$$

Функции спроса первого потребителя на товары соответственно

$$D_{11} = \frac{0{,}8I_1}{p_1} = \frac{0{,}48I}{p_1}; \quad D_{12} = \frac{0{,}2I_1}{p_2} = \frac{0{,}12I}{p_2}.$$

Функции спроса второго потребителя

$$D_{21} = \frac{0{,}5I_2}{p_1} = \frac{0{,}2I}{p_1}; \quad D_{22} = \frac{0{,}5I_2}{p_2} = \frac{0{,}2I}{p_2}.$$

Условие равновесия:

$$\begin{cases} 10p_1 = 0{,}48\dfrac{I}{p_1} + 0{,}2\dfrac{I}{p_1} = 0{,}68\dfrac{I}{p_1} \\ 40p_2 = 0{,}12\dfrac{I}{p_2} + 0{,}2\dfrac{I}{p_2} = 0{,}32\dfrac{I}{p_2}. \end{cases}$$

Отсюда имеем соотношение равновесных цен

$$\tilde{p}_1 = 2{,}915\tilde{p}_2.$$

Если принять второй товар за базовый (единицу счета — рубль), а физические объемы товаров выразить в тоннах, то равновесное состояние на рынках имеет вид:

цены $\tilde{p}_1 = 2{,}915$ руб./т;

$\tilde{p}_2 = 1$ руб./т.

Производство первого продукта $S_1 = 29{,}15$ т,

второго продукта $S_2 = 40$ т.

Закупки потребителей:

$D_{11} = 20{,}62$ т; $D_{12} = 15$ т;

$D_{21} = 8{,}59$ т; $D_{22} = 25$ т.

Совокупный доход производителей:

$R = 125$ тыс. руб.

Расходы потребителей:

$I_1 = 75$ тыс. руб.; $I_2 = 50$ тыс. руб.

В заключение рассмотрим модель равновесия, в которой множество производственных возможностей предприятия (рис. 6.15) задано при помощи соотношения

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \le 1; \quad y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0.$$

При этом предприятие стремится максимизировать валовой доход

$$R = p_1 y_1 + p_2 y_2.$$

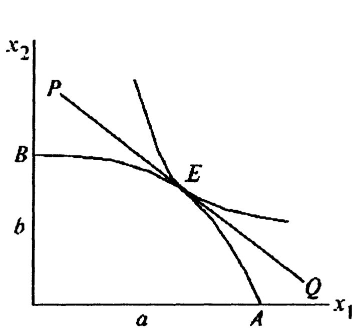

Рис. 6.15. Оптимум по Парето

Решение этой задачи имеет вид

$$\hat{y}_1 = \frac{p_1 a^2}{\sqrt{p_1^2 a^2 + p_2^2 b^2}}; \qquad \hat{y}_2 = \frac{p_2 b^2}{\sqrt{p_1^2 a^2 + p_2^2 b^2}}.$$

Эти выражения дают нам зависимость предложения от цен (функции предложения S_1 и S_2). Потребитель стремится максимизировать свою функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = c_1 \ln x_1 + c_2 \ln x_2$$

при условии ограниченности бюджета

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Решение этой задачи следующее:

$$\hat{x}_1 = \frac{c_1 I}{(c_1 + c_2) p_1}; \quad \hat{x}_2 = \frac{c_2 I}{(c_1 + c_2) p_2}.$$

Оно представляет собой функции спроса D_1 и D_2.

Условия равновесия представляются в следующей форме

$$\hat{y}_1 = \hat{x}_1; \quad \hat{y}_2 = \hat{x}_2.$$

Решая полученную систему уравнений относительно p_1 и p_2, получаем значение равновесных цен

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{c_1 I}{c_1 + c_2}},$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{c_2 I}{c_1 + c_2}},$$

а также координаты точки равновесия E

$$x_1^E = \frac{c_1 I}{(c_1 + c_2)\tilde{p}_1}; \qquad x_2^E = \frac{c_2 I}{(c_1 + c_2)\tilde{p}_2}.$$

Точка E касания границы множества производственных возможностей и наивысшей достижимой кривой безразличия является оптимумом Парето. Разделяющая эти множества прямая PQ называется линией цен.

Процесс достижения равновесия осуществляется здесь путем одновременного движения потребителя и производителя.

Потребитель достигает наивысшего уровня полезности в точке E, двигаясь по линии цен, т.е. находясь в рамках бюджетного ограничения (см. рис. 6.15).

Производитель достигает наивысшего уровня прибыли в точке E, двигаясь вдоль границы множества производственных возможностей AB.

§3. Моделирование рыночных механизмов в условиях ограниченности ресурсов

Развитием модели «нащупывания» состояния равновесия является модель функционирования рынка, построенная на базе итерационного метода решения задач выпуклого программирования, суть которого состоит в следующем: рассматривается задача максимизации выпуклой вверх функций n переменных

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \to \max$$

при условиях

$$g_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где функции $g_i(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ также выпуклые.

Неотрицательной седловой точкой функции Лагранжа

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x),$$

где u_i — множители Лагранжа (двойственные переменные), называется точка $(\tilde{x}, \tilde{u})$, для которой выполнены соотношения:

$$L(x, \tilde{u}) \le L(\tilde{x}, \tilde{u}) \le L(\tilde{x}, u),$$

для всех $x \ge 0$; $u = (u_1, ..., u_m) \ge 0$.

Справедлива следующая теорема (Куна—Таккера).

Если: 1) $f(x)$, $g_i(x) \ge 0$ $(i = 1, ..., m)$ — выпуклые функции при $x \ge 0$, 2) существует вектор x^0, такой что $g_i(x^0) > 0$ $(i = 1, ..., m)$, то вектор $\tilde{x}$ будет оптимальным решением сформулированной выше задачи максимизации тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\tilde{u}$, что $(\tilde{x}, \tilde{u})$ является неотрицательной седловой точкой функции Лагранжа $L(x, u)$.

Таким образом, решение задачи максимизации сводится к нахождению седловой точки функции Лагранжа, которое в свою очередь осуществляется путем применения следующего итерационного процесса (К. Эрроу, Л. Гурвиц):

$$x_j(t+1) = \max\left\{0; x_j(t) + \alpha_j\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(t)\right]\right\},$$

$$u_j(t+1) = \max\left\{0; u_j(t) - \beta_j g_j\big(x(t)\big)\right\}.$$

Здесь t — номер итерации.

Начальные значения $x_j(0)$ $(j = 1, ..., n)$; $u_i(0)$ $(i = 1, ..., m)$ предполагаются известными (заданными) числами. Присутствие знака max обеспечивает неотрицательность переменных в ходе реализации итерационного процесса.

Положительные величины α_j, β_i называются параметрами настройки и должны быть выбраны достаточно малыми, чтобы обеспечить устойчивость процесса. Применяются различные правила для фиксации момента окончания итерационного процесса. В качестве основных используется как критерий совпадения вида

$$D(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[x_j(t+1) - x_j(t)\right]^2 < \xi,$$

где ξ — достаточно малое число, так и задание определенного числа (T) итераций, после чего полученные значения

$$x_j(T) \quad (j = 1, \ldots, n); \qquad u_i(T) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

считаются координатами искомой седловой точки. При этом вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ есть решение задачи максимизации, а вектор $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$ характеризует сравнительную важность ограничений оптимизационной задачи.

Рассмотрим сложную экономическую систему, состоящую из потребительского сектора, производственного сектора и сектора ресурсного обеспечения.

Пусть потребительский сектор представлен единой функцией полезности

$$U(x) = U(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n),$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ — набор потребляемых благ, которую он стремится максимизировать.

Производственный сектор состоит из n предприятий (производств) ($j = 1, ..., n$), каждое из них производит один продукт (в количестве y_j) и все они производят различные продукты. Уровень производства определяется производственной функцией:

$$y_j = f_j(r_{j1}, \ldots, r_{jl}, \ldots, r_{js}),$$

где r_{jl} ($l = 1, ..., s$) — объемы используемых производственных ресурсов.

Ресурсный сектор определен объемами ресурсов (труда, капитала, земли, энергетики и т.д.) R_l ($l = 1, ..., s$), предназначенных для использования в производственном секторе. При этом имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} r_{jl} \le R_l \quad (l = 1, \ldots, s).$$

Состояние равновесия в широком смысле в рассматриваемой системе определяется как следующее соотношение между спросом (x_j) и предложением (y_j) для всех видов благ

$$x_j \le y_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В дальнейшем будем исходить из того, что функция полезности $U(x)$ и все производственные функции $f_j(r_j)$ ($j = 1, ..., n$) являются выпуклыми. В этом случае задача о нахождении состояния равновесия может быть сформулирована как задача выпуклого программирования:

найти

$$\max U(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

при условиях:

$$1)\ f_j(r_j) - x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $r_j = (r_{j1}, \ldots, r_{js})$;

$$2)\ R_l - \sum_{j=1}^{n} r_{jl} \geq 0 \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{2}$$

$$3)\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n); \quad r_{jl} \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s).$$

Как было показано выше, решение этой задачи в свою очередь сводится к отысканию неотрицательной седловой точки функции Лагранжа

$$L(x, p, w) = u(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j \left[f_j(r_j) - x_j \right] + \sum_{l=1}^{s} w_l \left(R_l - \sum_{j=1}^{n} r_{jl} \right),$$

где $p = (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$ — вектор множителей Лагранжа, соответствующих производственным ограничениям (1). Эти величины имеют смысл цен на различные виды продукции; $w = (w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_n)$ — вектор множителей Лагранжа, связанных с ресурсными ограничениями (2). Компоненты этого вектора представляют собой оценки важности используемых в производстве факторов. Например, ставка заработной платы выступает как оценка трудовых ресурсов; стоимость услуг капитала выражается оценкой капитальных ресурсов и т.д.

Условия первого порядка для отыскания седловой точки (условия Куна—Таккера) имеют вид

$$1)\ \tilde{x}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial x_j} = \tilde{x}_j \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} - \tilde{p}_j \right] = 0 \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$2)\ \tilde{r}_{jl} \cdot \frac{\partial L}{\partial r_{jl}} = r_{jl}\left[\tilde{p}_j \frac{\partial f_j}{\partial r_{jl}} - \tilde{w}_l\right] \mp 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s);$$

$$3)\ \tilde{p}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial p_j} = \tilde{p}_j\left[f_j(\tilde{r}_j) - \tilde{x}_j\right] = 0 \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$4)\ \tilde{w}_l \cdot \frac{\partial L}{\partial w_l} = \tilde{w}_l\left[R_l - \sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{jl}\right] = 0 \quad (l = 1, \ldots, s).$$

Условия первой группы имеют следующий экономический смысл: если равновесный объем какого-либо блага ($\tilde{x}_j$) отличен от нуля, то необходимо выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \tilde{p}_j,$$

которое совпадает с условием максимума функции полезности потребителя в условиях ограниченного дохода (см. гл. I). Таким образом, эти условия суть выражения оптимального поведения потребителя. Заметим, что из требования максимальности функции Лагранжа по переменным x_j вытекает, что при $\tilde{x}_j = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \le \tilde{p}_j,$$

т.е. предельная полезность неиспользуемого блага не превосходит его цены в состоянии равновесия.

Условия второй группы состоят в том, что при $\tilde{r}_{jl} > 0$, т.е. в том случае, когда j-тое предприятие использует ненулевой объем l-того ресурса, должно быть выполнено соотношение

$$\tilde{p}_j \frac{\partial f_j}{\partial r_{jl}} = \tilde{w}_l,$$

которое может быть интерпретировано как необходимое условие максимума прибыли j-того предприятия (см. гл. IV). Это означает, что в состоянии равновесия осуществляется оптимальная производственная программа для всех предприятий.

Если l-тый ресурс не потребляется на j-том предприятии, т.е. $\tilde{r}_{jl} = 0$, то из максимальности функции Лагранжа по $\tilde{r}_{jl}$ имеем

$$\tilde{p}_j \frac{\partial f_j}{\partial r_{jl}} \leq \tilde{w}_l,$$

т.е. маргинальная продуктивность этого ресурса на j-том предприятии не выше его цены (ресурс слишком дорог и относительно малоэффективен).

Условия третьей группы характеризуют соотношения между спросом и предложением всякого блага в состоянии равновесия. Если цена блага $\tilde{p}_j > 0$, то необходимо выполнение равенства

$$x_j = f_j(\tilde{r}_j) = \tilde{y}_j,$$

т.е. имеет место равенство спроса ($\tilde{x}_j$) и предложения ($\tilde{y}_j$) этого блага. Если же равновесная цена $\tilde{p}_j = 0$, то из требования минимальности функции Лагранжа по $\tilde{p}_j$ следует, что

$$\tilde{x}_j \leq \tilde{y}_j = f_j(\tilde{r}_j),$$

т.е. предложение блага (как правило) превосходит спрос на него.

Условия четвертой группы связаны с распределением ресурсов между предприятиями и оценкой значимости этих ресурсов. Если равновесная цена l-того ресурса $\tilde{w}_l > 0$, то имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{jl} = R_l,$$

которое свидетельствует о полном использовании запаса ресурса (спрос на ресурс равен его предложению). Если же $\tilde{w}_l = 0$, то из условия минимальности функции Лагранжа по переменной $\tilde{w}_l$ вытекает:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_{jl} \le R_l,$$

т.е. предложение ресурса не меньше, чем спрос на него.

Процедура отыскания неотрицательной седловой точки реализуется путем конкретизации общего итерационного процесса, представленного выше. Исходные значения фазовых переменных

$$x_j(0) \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$r_{jl}(0) \quad (j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s),$$

а также двойственных переменных (цен)

$$p_j(0) \quad (j = 1, \ldots, n); \quad w_l(0) \quad (l = 1, \ldots, s)$$

считаются известными. Последующие значения определяются по формулам:

$$1)\ x_j(t+1) = \max\left\{0;\ x_j(t) + \alpha_j\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(t) - p_j(t)\right]\right\} \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$2)\ r_{jl}(t+1) = \max\left\{0;\ r_{jl}(t) + \beta_{jl}\left[p_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial r_{jl}}(t) - w_l(t)\right]\right\}$$
$$(j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s);$$

$$3)\ p_j(t+1) = \max\left\{0;\ p_j(t) - \gamma_j\left[f_j\left(r_j(t)\right) - x_j(t)\right]\right\} \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$4)\ w_l(t+1) = \max\left\{0;\ w_l(t) - \delta_l\left[R_l - \sum_{j=1}^{n} r_{jl}(t)\right]\right\} \quad (l = 1, \ldots, s).$$

Здесь положительные числа α_j; β_{jl}; γ_j; δ_l являются параметрами настройки. В качестве признака окончания расчетов обычно используют либо фиксированное число итераций (T), либо итерационный процесс прекращается и равновесное состояние считается найденным, если выполняется условие:

$$EY(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\left[y_j(t) - x_j(t)\right] < \xi,$$

где $\xi > 0$ — заданное число; $y_j = f_j(r_{j1}, \ldots, r_{js})$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Полезно привести также аналоги итерационных формул в дифференциальной форме:

$$1)\ \frac{\partial x_j}{\partial t} = \delta_{x_j} L_{x_j} = \delta_{x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - p_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\text{где } \delta_{x_j} = \begin{cases} 0, \text{если } x_j = 0;\ L_{x_j} < 0. \\ 1, \text{для всех остальных случаев;} \end{cases}$$

$$2)\ \frac{\partial r_{jl}}{\partial t} = \delta_{r_{jl}} L_{r_{jl}} = \delta_{r_{jl}}\left(\frac{\partial f_j}{\partial r_{jl}} - w_l\right) \quad (j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, s),$$

$$\text{где } \delta_{r_{jl}} = \begin{cases} 0, \text{если } r_{jl} = 0;\ L_{r_{jl}} < 0. \\ 1, \text{для всех остальных случаев;} \end{cases}$$

$$3)\ \frac{\partial p_j}{\partial t} = -\delta_{p_j} L_{p_j} = \delta_{p_j}\left(f_j(r_j) - x_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\text{где } \delta_{p_j} = \begin{cases} 0, \text{если } p_j = 0;\ L_{p_j} > 0. \\ 1, \text{для всех остальных случаев;} \end{cases}$$

$$4)\ \frac{\partial w_l}{\partial t} = -\delta_{w_l} L_{w_l} = \delta_{w_l}\left(R_l - \sum_{j=1}^{n} r_{jl}\right) \quad (l = 1, \ldots, s),$$

$$\text{где } \delta_{w_l} = \begin{cases} 0, \text{если } w_l = 0;\ L_{w_l} > 0. \\ 1, \text{для всех остальных случаев.} \end{cases}$$

Анализ приведенного итерационного процесса показывает, что он достаточно точно имитирует рыночный механизм достижения состояния равновесия при помощи изменения объемов спроса на блага и ресурсы, а также путем варьирования соответствующими ценами. Как видно, спрос потребителя на некоторое благо возрастает до тех пор, пока предельная полезность его превышает цену этого блага, которая, в свою очередь, возрастает, если спрос оказывается больше предложения блага со стороны производственного сектора. Подобным же образом регулируется спрос производства на ресурсы: он возрастает, пока предельная эффективность ресурса больше его цены, т.е. предприятие имеет дополнительную прибыль от приобретения ресурса, и рост прекращается, когда эта прибыль становится нулевой. Цена ресурса также увеличивается, если спрос на него превышает предложение со стороны ресурсного сектора, а при достижении равенства спроса и предложения, цена становится неизменной.

Литература

Багриновский К.А., Сумин Г.А. Математические методы в экономике и планировании народного хозяйства. — М.: Изд-во РУДН, 1993.

Багриновский К.А., Рубцов В.Н. Модели и методы прогнозирования и долгосрочного планирования народного хозяйства. — М.: Изд-во РУДН, 1992.

Бункина М.К., Семенов В.А. Макроэкономика. — М.: АО «ДИС», 1996.

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. Т. 1. — СПб.: Экономическая школа, 1996.

Долан Э. Дж., Линдсей Д. Микроэкономика / Пер. с англ. — СПб., 1994.

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. — М.: АО «ДИС», 1997.

Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельев Т.И. Математические методы и модели в планировании. — М.: Экономика, 1987.

Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel / Пер. с англ. — К.: Диалектика, 1997.

Кейнс Дж. М. Избранные произведения / Пер. с англ. — М.: Экономика, 1993.

Кристофер Доугерти. Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 1997.

Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. — СПб.: BHV—Санкт-Петербург, 1997.

Кубонива М. и др. Математическая экономика на персональном компьютере / Пер. с яп. — М.: Финансы и статистика, 1991.

Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. — М.: Изограф, 1997.

Лопатников Л. Экономико-математический словарь. — М.: «ABF», 1996.

Макконел Р., Брю С.Л. Экономикс / Пер. с англ. — М.: Республика, 1992.

Матюшок В.М. Excel 7.0. Решение общих и экономических задач. — М.: Изд-во РУДН, 1997.

Матюшок В.М. и др. Персональный компьютер: диалог и программные средства. — М.: Изд-во УДН, 1989.

Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика / Пер. с англ. — М.: Экономика, 1992.

Самуэльсон П. Экономика. Т. 1—2. — М., 1993.

Справочник по математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. — М.: Высшая школа, 1987.

Федосеев В.М. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. — М.: Финстатинформ, 1996.

Оглавление

Кирилл Андреевич Багриновский,
Владимир Михайлович Матюшок

Экономико-математические методы и модели (микроэкономика)

Учебное пособие

Редактор *Ж.В. Медведева*
Технический редактор *Ю.В. Чванова*
Корректор *О. Бельтран-Легас*
Компьютерная верстка *А.Г. Платонов*
Дизайн обложки *О.И. Романова*

Тематический план 1998 г., № 20

Лицензия серия ЛР № 020458 от 4 марта 1997 г.

Гигиенический сертификат № 77.ФЦ.8.953.П.122.3.99
от 1 марта 1999 г.

Подписано в печать 12.04.99 г. Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 10,7. Уч.-изд. л. 9,72.
Усл. кр.-отт. 11,2. Тираж 3000 экз. Заказ 255

Издательство Российского университета дружбы народов
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография ИПК РУДН
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3