**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**

Институт проблем управления

**Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С.**

# Экономико-математические модели управления развитием отраслевого производства

**Москва 1997**

Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С. Экономико-математические модели управления развитием отраслевого производства. М.: ИПУ РАН, 1997. – 64 с.

*В работе рассматривается задача формирования программы развития отрасли в условиях ограниченности финансовых ресурсов. Эта задача включает формирование целей развития отрасли и программы (множества проектов развития), обеспечивающей достижение этих целей. Описывается методология и методы комплексной оценки программы развития и методы формирования оптимального плана реализации программы по критерию упущенной выгоды.*

Рецензент: д.т.н. Цвиркун А.Д.

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

# Оглавление

# ГЛАВА I. Задача стратегического развития отрасли

Рассмотрим, следуя [17], ряд общих понятий стратегического управления. Слова «стратегический фактор», «стратегическое решения», «стратегически важный имеют в настоящее время смысл «существенно важный для получения результата», «жизненно, особенно важный», «поворотное, судьбоносное решение» и т.д. Для стратегических решений, в отличие от тактических, прежде всего характерна необходимость выбора из ряда взаимоисключающих (альтернативных) вариантов действий; крупные масштабы изменений при переходе от одной альтернативы к другой; необходимость сопоставить и комплексно оценить различные аспекты, факторы и критерии, необходимость сделать принципиальный выбор и т.п. При этом, если главный стратегический выбор сделан, то дальше остается конкретизировать, детализировать программу работ и контролировать ее реализацию так, чтобы достигнуть намеченного результата. Это тоже необходимые задачи, но уже не такие масштабные, не требующие принципиальных решений. Такие задачи называют тактическими, текущими, они сравнительно легко решаются в повседневной практике.

Функционирование отрасли как ячейки экономики - это целостный процесс хозяйственной деятельности, направленный на удовлетворение определенных потребностей общества в товарах и услугах (в нашем случае - в строительных материалах и товарах из них). Деятельность эта включает различные области.

1. Связи с внешней средой:
   - рынок продукции (покупатели, конкуренты);
   - рынок поставщиков ресурсов, сырья, материалов и т.п.;

- рынок труда;
- рынок финансов;
- взаимоотношения с региональными и федеральными властями и организациями.

2. Управление собственной деятельностью:

- обеспечение производства товаров и услуг в нужных объемах и нужного качества;
- управление финансами;
- координация работы всех предприятий и др.

Важнейшими элементами стратегического управления являются цели и критерии их достижения. Четкая формулировка целей и критериев обеспечивает возможность управления по результатам, создание системы мотивации персонала, сопоставления и оценки вариантов решений и в конечном счете - концентрации сил на приоритетных направлениях деятельности, обеспечивающих успех.

Цели отрасли на рассматриваемый период (например год) рекомендуется структурировать в виде пяти групп целей и критериев их достижения.

1. Рыночные цели (критерии - доля риска, объем продаж, изменение пропорций, приоритетов в продуктовой политике). Пример формулировки типичной целевой установки: увеличить объем продаж в два раза в первую очередь за счет новых перспективных видов строительных материалов.

2. производственные цели (критерии: объем производства, показатели качества). Пример формулировки типичной целевой установки: обеспечить своевременное выполнение требований рыночных целей, увеличить объем производства в целом в 2 раза, объем производства цемента - в 3 раза, кирпича - в 2,5 раза, обеспечить улучшение потребительских качеств кирпича и керамической

облицовочной плитки в соответствии с рекомендациями маркетинговых исследований.

3. Финансово экономические цели (критерии: прибыль, рентабельность, финансовая устойчивость прирост собственности и др.). Пример формулировки типичной целевой установки: стабильное обеспечение финансовыми ресурсами программы развития приоритетных направлений, увеличение прибыли в 2 раза, рост рентабельности на 30%, увеличение отраслевого капитала за счет строительства новых предприятий и реконструкции старых в два раза.

4. Социальные цели (критерии: уровень жизни работающих, зарплата, социальная защищенность и др.). Пример типичной формулировки: повышение средней зарплаты на 30%, уровня жизни на 50% за счет льгот и доплат малообеспеченным работникам.

5. Другие цели, связанные с решением первоочередных проблем и развитием приоритетных направлений, приводящих к стратегически важным изменениям, которые должны контролироваться руководством отрасли.

Для достижения поставленных целей разрабатываются мероприятия, оцениваются требуемые ресурсы и сроки реализации. Кроме того, каждое мероприятие оценивается по вкладу (эффекту), который оно вносит в достижение поставленных целей.

Для того, чтобы оценить потенциал отрасли и, тем самым, потенциальную возможность достичь поставленных целей, строится зависимость «затраты - эффект» по каждому критерию.

Рассмотрим метод ее построения на примере. Пусть определена совокупность возможных мероприятий, данные о которых приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

| **Мероприятие №** | **Затраты S** | **Эффект Q** | **Эффективность Э = Q/S** |
|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 80 | 2 |
| 2 | 100 | 300 | 3 |
| 3 | 50 | 50 | 1 |
| 4 | 60 | 240 | 4 |

Далее изменяем номера мероприятий так, чтобы самое эффективное мероприятие получило номер 1, следующее за ним - №2 и т.д. При новой нумерации строим таблицу, в которой помимо затрат и эффекта по каждому мероприятию добавляются столбцы, в которых определяются затраты и эффект нарастающим итогом.

Таблица 1.2.

| **Мероприятия** | **Затраты S** | **Эффект Q** | **Затраты нарастающим итогом** | **Эффект нарастающим итогом** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 240 | 60 | 240 |
| 2 | 100 | 300 | 160 | 540 |
| 3 | 40 | 80 | 200 | 620 |
| 4 | 50 | 50 | 250 | 670 |

Таблица затрат и эффекта нарастающим итогом, в которой мероприятия пронумерованы в порядке убывания эффективности и является зависимостью «затраты - эффект» по соответствующему критерию. График этой зависимости приведен на рис 1.1. Эта зависимость имеет замечательное свойство, она определяет максимальный эффект по данному критерию, который можно получить от заданного множества мероприятий при заданной величине финансирования. Фактический

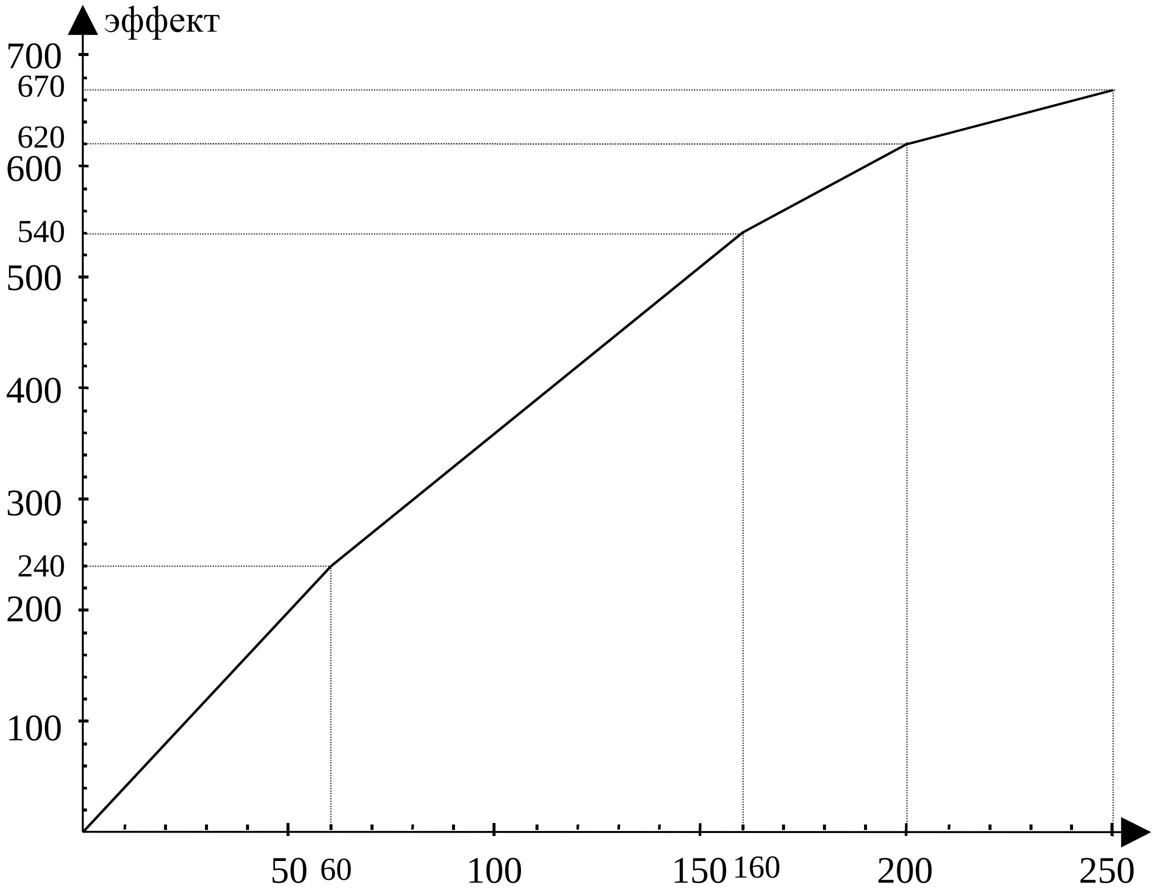


Рис. 1.1. Зависимость «Затраты - Эффект»

эффект может быть меньше за счет дискретности мероприятий. Действительно, если мы имеем 140 единиц финансовых ресурсов, то мы не можем реализовать первые два мероприятия, требующие 160 единиц ресурса. Оптимальный вариант - реализовать второе и третье мероприятия, что дает суммарный эффект 380 единиц, что меньше, чем получается по зависимости 1.1. - эффект 480 единиц. Конечно, если бы каждое мероприятие можно было реализовать частично, с пропорциональным уменьшением и затрат и эффекта, то зависимость 1.1 соответствовала бы реальному эффекту при любом уровне затрат.

Для построения реальной зависимости «затраты - эффект» необходимо решить так называемую задачу о ранце, задавая различные уровни финансирования. Дадим математическую формулировку этой задачи.

Обозначим $x_i$ = 1, если мероприятие i реализуется и $x_i$ = 0 в противном случае. Пусть объем финансирования равен R. Задача о ранце имеет вид для рассматриваемого примера:

$$240x_1 + 300x_2 + 80x_3 + 50x_4 \to \max \quad \text{при ограничении}$$

$$60x_1 + 100x_2 + 40x_3 + 50x_4 \leq R.$$

Для решения этой задачи при различных значениях R эффективным является метод динамического программирования. Для применения метода предварительно строим на плоскости систему координат, одна ось которой соответствует мероприятиям, а вторая - объему финансирования. По оси мероприятий отмечаем номера мероприятий - 1, 2, 3, 4. Из начала координат проводим две дуги - одна горизонтальная, в точку (1,0), а другая - в точку (1,60), где 60 - объем финансирования первого мероприятия. Первая дуга соответствует случаю, когда первое мероприятие не финансируется, а вторая, - когда оно финансируется. Из каждой полученной точки ((1,0) и (1,60)) проводим также по две дуги, для второго мероприятия. Получаем уже четыре точки - (2,0), (2,60), (2,100) и (2,160), соответствующие четырем возможным вариантам для двух первых мероприятий (если бы оба мероприятия требовали одинакового финансирования, то мы получили бы три точки). Продолжая таким же образом, получаем сеть, приведенную на рис. 1.2. Очевидно, что любой путь в сети из начальной вершины (0,0) в конечные вершины соответствует некоторому набору мероприятий. И наоборот, любому набору мероприятий соответствует вполне определенный путь в сети, соединяющий начальную вершину с конечной.

Значение координаты по второй оси равно объему финансирования соответствующего набора мероприятий (или пакета проектов, или

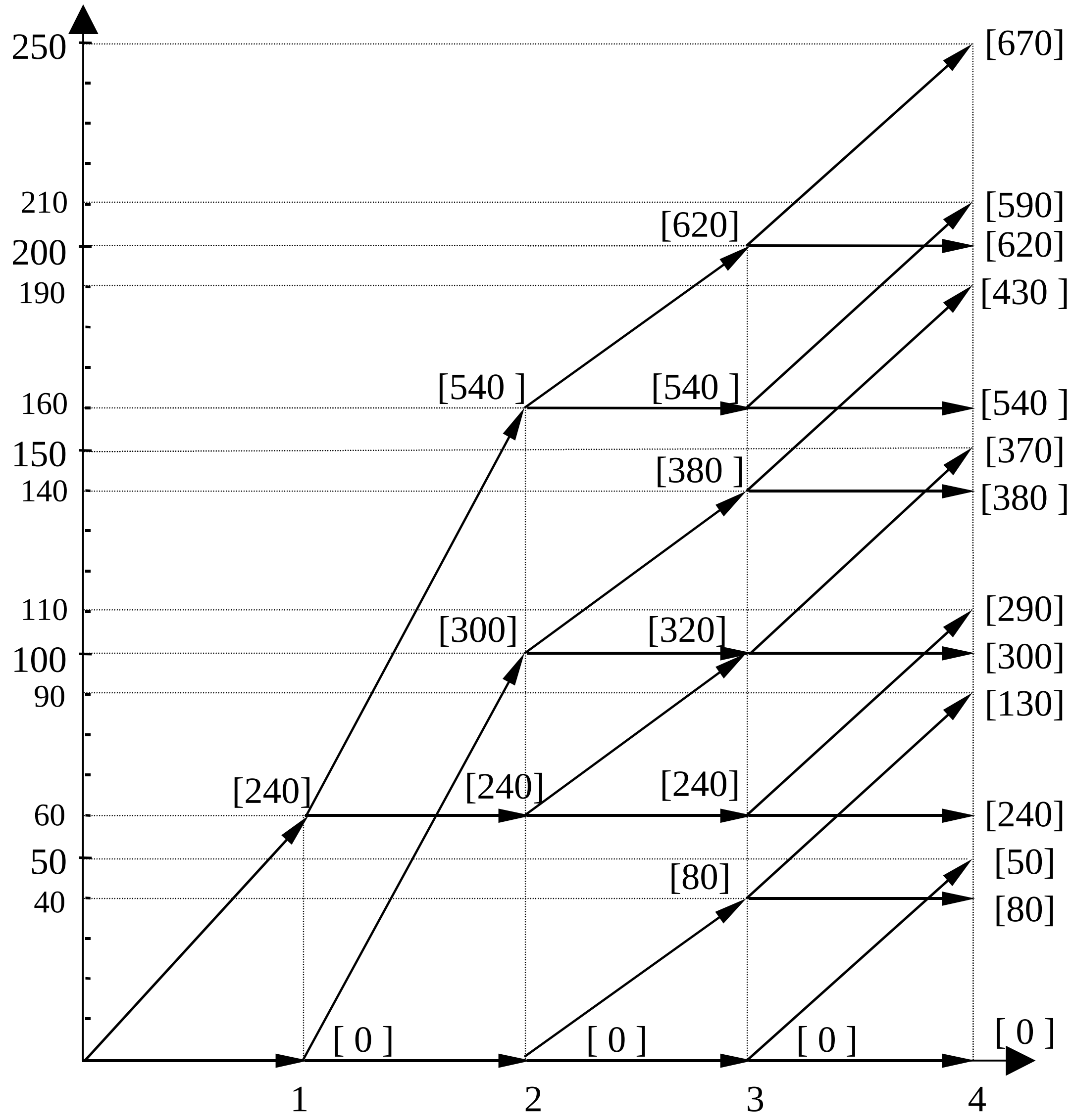


Рис. 1.2.

портфеля проектов, названия бывают различные). Примем длины горизонтальных дуг равными 0, а длины наклонных - эффектам от соответствующих мероприятий. В этом случае длина пути , соединяющего начальную вершину с одной из конечных, будет равна суммарному эффекту от соответствующего этому пути множества мероприятий. Следовательно, путь максимальной длины, соединяющий начало координат и точку (4,S) будет соответствовать множеству мероприятий, дающему максимальный эффект среди всех множеств мероприятий, требующих совокупного финансирования ровно S единиц. Таким образом, мы получаем оптимальные наборы мероприятий при любых объемах финансирования.

Анализируя приведенные решения (рис 1.2), можно заметить любопытный парадокс. При финансировании, например, в объеме 100 единиц, мы получаем эффект в 300 единиц, а при увеличении объема финансирования на 10 эффект составляет всего 290 единиц, то есть на 10 единиц меньше. Аналогичная картина наблюдается при сравнении эффектов при объемах финансирования 200 и 210 единиц, 140 и 150 и т.д. Парадокс в том, что если задать вопрос, в каком случае будет больший эффект, - при финансировании в 100 или в 110 единиц, то любой здравомыслящий человек скажет, что чем больше объем финансирования, тем больше эффект, естественно, при оптимальном наборе мероприятий. Этот парадокс возникает из-за дискретности задачи. Понятно, что варианты, нарушающие монотонность (парадоксальные варианты) мы не должны рассматривать Полученные значения максимального эффекта при различных объемах финансирования выпишем в таблицу.

Таблица 1.3.

| **Объем финансирован.** | 40 | 60 | 100 | 140 | 160 | 200 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Эффект** | 80 | 240 | 300 | 380 | 540 | 620 | 670 |

График этой зависимости приведен на рис. 1.3. На этом же рисунке тонкой линией показан прежний график «затраты - эффект» (см. рис. 1.1).

Имея зависимость «затраты - эффект» можно решать и задачи привлечения дополнительных финансовых ресурсов, в частности, взятия кредита. Пусть, например, имеется 90 единиц ресурса, а кредит можно взять под 300% . Какой величины кредит взять, чтобы получить максимальный финансовых результат?

Из графика на рис. 1.3 видно, что рассмотреть следует 4 варианта - взять кредит10, 70, 110 или 160 единиц. При взятии кредита 10 единиц дополнительный эффект составит 300 - 240 = 60 единиц, то есть эффективность равна 600%, что выше, чем ставка кредита. Это значит, что брать кредит целесообразно. Если взять кредит в размере 70 единиц, то дополнительный эффект составит 540 - 240 = 300 единиц, что дает эффективность 430%, что также больше ставки кредита. При кредите в 110 единиц дополнительный эффект составит 620 - 240 = 380 единиц, что дает эффективность 345%, то есть больше, чем ставка кредита. Наконец, при кредите в 160 единиц дополнительный эффект составит 670 - 240 = 430 единиц, что дает эффективность 281%, то есть ниже ставки кредита. Таким образом оптимальная величина кредита равна 70 единиц, что дает эффект 540 единиц и, за вычетом процентов за кредит 540 - 3·70 = 330 единиц.

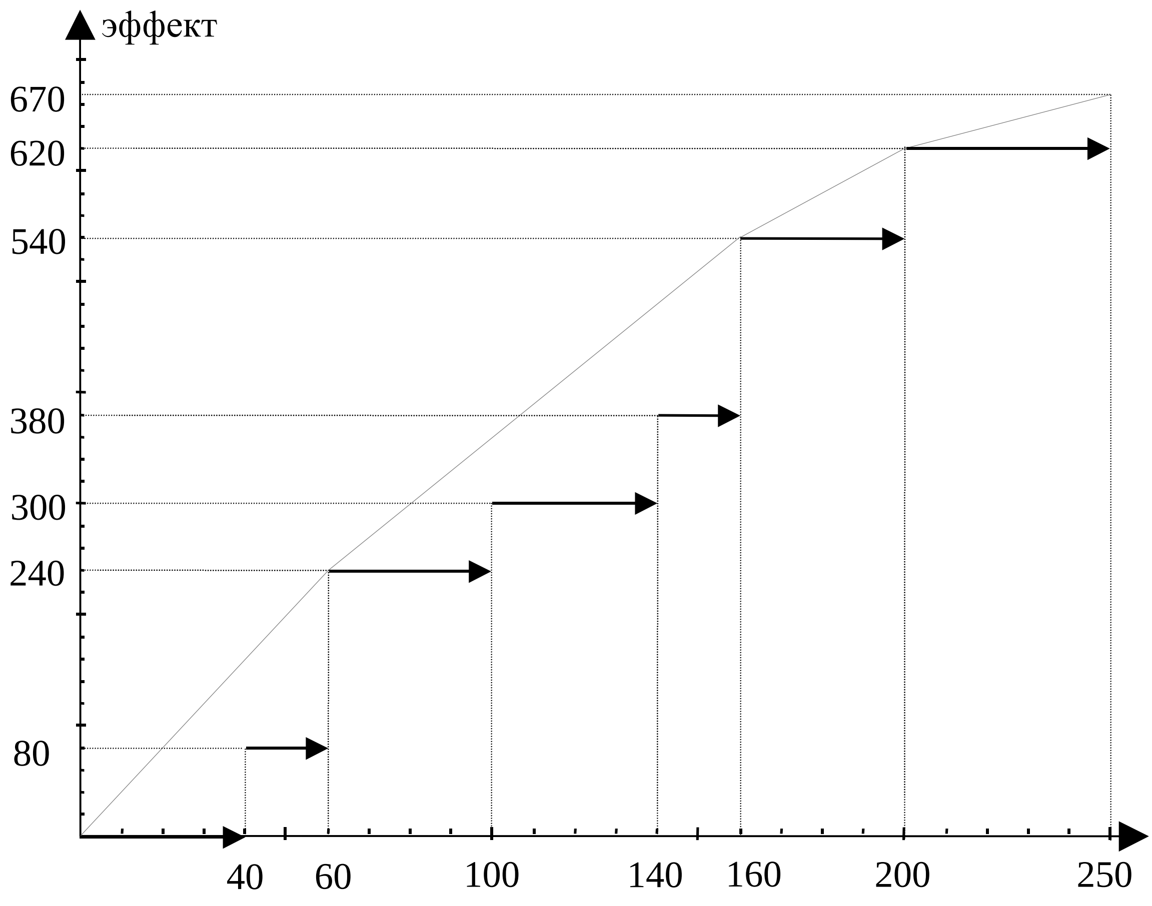


Рис. 1.3.

Зависимость «затраты - эффект» характеризует потенциал отрасли по соответствующему критерию. Зная эту зависимость, можно определить минимальный уровень финансирования, достаточный для достижения поставленных целей. И наоборот, при ограниченных финансах определяется максимальный уровень, который можно достичь по данному критерию. Так например, если поставлена цель обеспечить по данному критерию эффект в 600 единиц, то при заданном множестве мероприятий для этого потребуется не менее 200 единиц финансовых ресурсов (из графика видно, что эффект составит 620 единиц, но при уменьшении финансирования он сразу падает до 540, то есть поставленная цель не достигается). Если же имеется всего 150 единиц финансовых ресурсов, то максимальный уровень эффекта, который можно достичь, составит 380 единиц (причем достаточно для достижения цели всего 140 единиц ресурса). Кроме затрат и эффекта важной характеристикой программы, включающей некоторое множество мероприятий, является риск, под которым мы будем понимать вероятность того, что программа не будет реализована в полном объеме, то есть хотя бы одно мероприятие не будет выполнено. Для оценки риска необходимо оценить вероятность $p_i$ успешной реализации i-го мероприятия программы. Эта оценка проводится, как правило, экспертным путем с учетом таких составляющих, как политический, организационный, финансовый, технический, природный и другие риски. Зная риски $q_i = 1 - p_i$ отдельных мероприятий и предполагая, что успешная реализация каждого мероприятия является случайным событием, не зависящим от других мероприятий, мы можем оценить риск R программы, включающей множество Q мероприятий по следующей формуле:

$$R(Q) = 1 - \prod_{i \in Q} p_i .$$

Величину H(Q) = 1 - R(Q), характеризующую вероятность успешной реализации всех мероприятий программы, назовем надежностью программы.

Рассмотрим задачу выбора множества мероприятий, которые обеспечивают максимальный эффект при ограниченных ресурсах и риске не более заданной величины. Для решения этой задачи удобными являются так называемые РЭСТ-диаграммы (Риск, Эффективность, СТоимость). Для построения РЭСТ-диаграммы введем другую шкалу измерения риска, которую назовем логарифмической шкалой (кратко - L-шкалой) риска. L-шкала связана с исходной шкалой R(Q) соотношением

$$L(Q) = \mathbf{l}n(1-R(Q))^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что L-шкала является монотонным нелинейным преобразованием R-шкалы. Действительно, L является монотонно возрастающей функцией R, причем при R = 0 (нулевой риск) L также равен 0, а при R = 1 (стопроцентный риск) L = ∞, что соответствует абсолютному или бесконечному риску. Основное достоинство L-шкалы состоит в том, что L-риск программы, состоящей из множества Q мероприятий равен сумме L-рисков этих мероприятий, то есть

$$L(Q) = \sum_{i\in Q} \mathbf{l}_i, \text{ где } \mathbf{l}_i = -\mathbf{l}n(1 - q_i), \ i\in Q.$$

Для построения РЭСТ-диаграммы на плоскости строим систему координат, ось абсцисс которой соответствует L-риску, а ось ординат - затратам. Рассматриваем множество всех мероприятий в очередности их номеров. Сначала рассматриваем первое мероприятие и строим точку $x_1$ с координатами ($\mathbf{l}_1$, $s_1$), где $\mathbf{l}_1$ - величина $\mathbf{l}$-риска мероприятия 1, а $s_1$ - затраты на его реализацию. У точки $x_1$ пишем номер координаты [0, 0] точки, из которой она получена и величину эффекта $a_1$ от первого мероприятия в случае его успешной реализации. Далее рассматриваем второе мероприятие. Теперь строим две точки - одну с координатами ($\mathbf{l}_2$, $s_2$), а другую  с координатами ($\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, $s_1 + s_2$). У первой точки пишем координаты точки [0, 0] и эффект $a_2$, а у второй координаты ($\mathbf{l}_1$, $s_1$) и величину эффекта ($a_1 + a_2$). На третьем шаге рассматриваем третье мероприятие и строим уже четыре точки. Это точка с координатами [$\mathbf{l}_3$, $s_3$] и пометкой [0, 0], $a_3$; точка с координатами [$\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_3$, $s_1 + s_3$] и пометкой ($\mathbf{l}_1$, $s_1$), ($a_1 + a_3$); точка с координатами [$\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3$, $s_2 + s_3$] и пометкой ($\mathbf{l}_2$, $s_2$), ($a_2 + a_3$) и, наконец, точка с координатами [$\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3$, $s_1 + s_2 + s_3$] и пометкой ($\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, $s_1 + s_2$) , ($a_1 + a_2 + a_3$). Аналогично рассмотрим мероприятие 4 и т.д.

РЭСТ-диаграмма для рассматриваемого нами примера приведена на рис. 1.4 для величин **l**-рисков, приведенных в таблице 1.4.

Таблица 1.4.

| **Мероприятия** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **l-риск** | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

Анализ РЭСТ-диаграммы позволяет исключить ряд точек из рассмотрения, как явно неоптимальных. Действительно, рассмотрим, например, точку с координатами [0,4; 50]. Она соответствует пакету из уже рассмотренных четырех мероприятий, включающему только четвертое мероприятие. Однако, существует точка [0,3; 40], соответствующая пакету из рассмотренных только двух мероприятий, включающему третье мероприятие, причем этот пакет имеет при меньшем риске и меньших затратах больший эффект. Очевидно, что какие бы мероприятия далее не добавлялись к первому пакету (точка [0,4; 50]), всегда можно получить лучший пакет, заменяя мероприятие 4 на мероприятие 3 (точка [0,3; 40]).

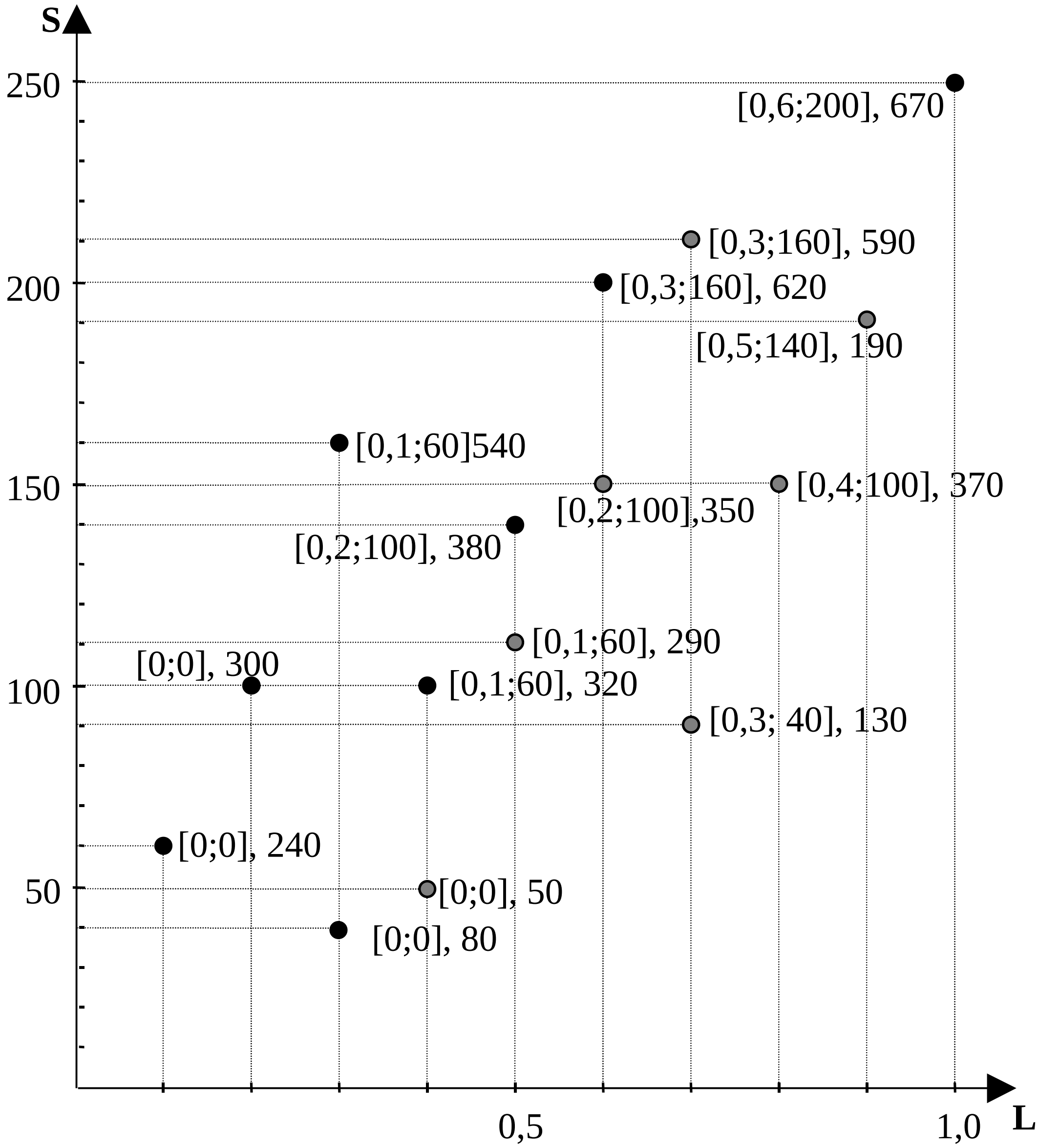


Рис. 1.4. РЭСТ-диаграмма.

Аналогично можно исключить из дальнейшего рассмотрения точки с координатами [0,7; 90], [0,5; 110], [0,6; 150], [0,8; 150], [0,9; 190], [0,7; 210]. Такие точки называются доминируемыми. Дадим точное определение.

<u>Определение</u>. Точка [$L_1$, $S_1$] доминирует точку [$L_2$, $S_2$], если:

1. Число мероприятий, рассмотренных при построении первой точки меньше или равно числу мероприятий, рассмотренному при построении второй точки.

2. Имеют место условия

$$L_1 \le L_2;\ \ S_1 \le S_2;\ \ A_1 \ge A_2$$

(где L - величина L-риска, S - величина затрат, A - величина эффекта).

Все доминируемые точки можно исключить и в дальнейшем не учитывать при рассмотрении следующих мероприятий.

Если первое условие не выполняется, то есть число мероприятий, рассмотренных при построении первой точки больше числа мероприятий рассмотренных при построении второй точки, то будем говорить, что первая точка условно доминирует вторую. Условно доминируемую точку можно исключать из РЭСТ-диаграммы только после того, как на ее основе построена следующая точка. Легко проверить, что все точки, отмеченные на РЭСТ-диаграмме (рис 1.4) серым цветом, являются доминируемыми. На рис. 1.5 приведена РЭСТ-диаграмма без доминируемых точек.

Имея РЭСТ-диаграмму множества мероприятий нетрудно принимать решения о выборе оптимального пакета мероприятий при ограничениях на величину затрат и риска. Достаточно внутри допустимой области определить точку с максимальным эффектом. Так, при величине L-риска не более 0,3 и величине затрат не более 200 из РЭСТ-диаграммы сразу получаем оптимальный пакет, соответствующий точке [0,3; 160] с эффектом 540. Мероприятия, входящие в пакет, также легко определяются на основе пометок, стоящих у точек. Так точка [0,3; 160] помечена [0,1; 60], то есть в соответствующий пакет входит мероприятие с затратами 100 и **l**-риском 0,2. Найдя точку [0,1; 60] мы видим, что это мероприятие имеет эффект 540 - 240 = 300 единиц. Следовательно, это второе мероприятие. Теперь анализируем точку [0,1; 60]. У нее стоит пометка [0; 0], Следовательно ей соответствует мероприятие с затратами 60, **l**-риском 0,1 и эффектом 240, то есть первое мероприятие.

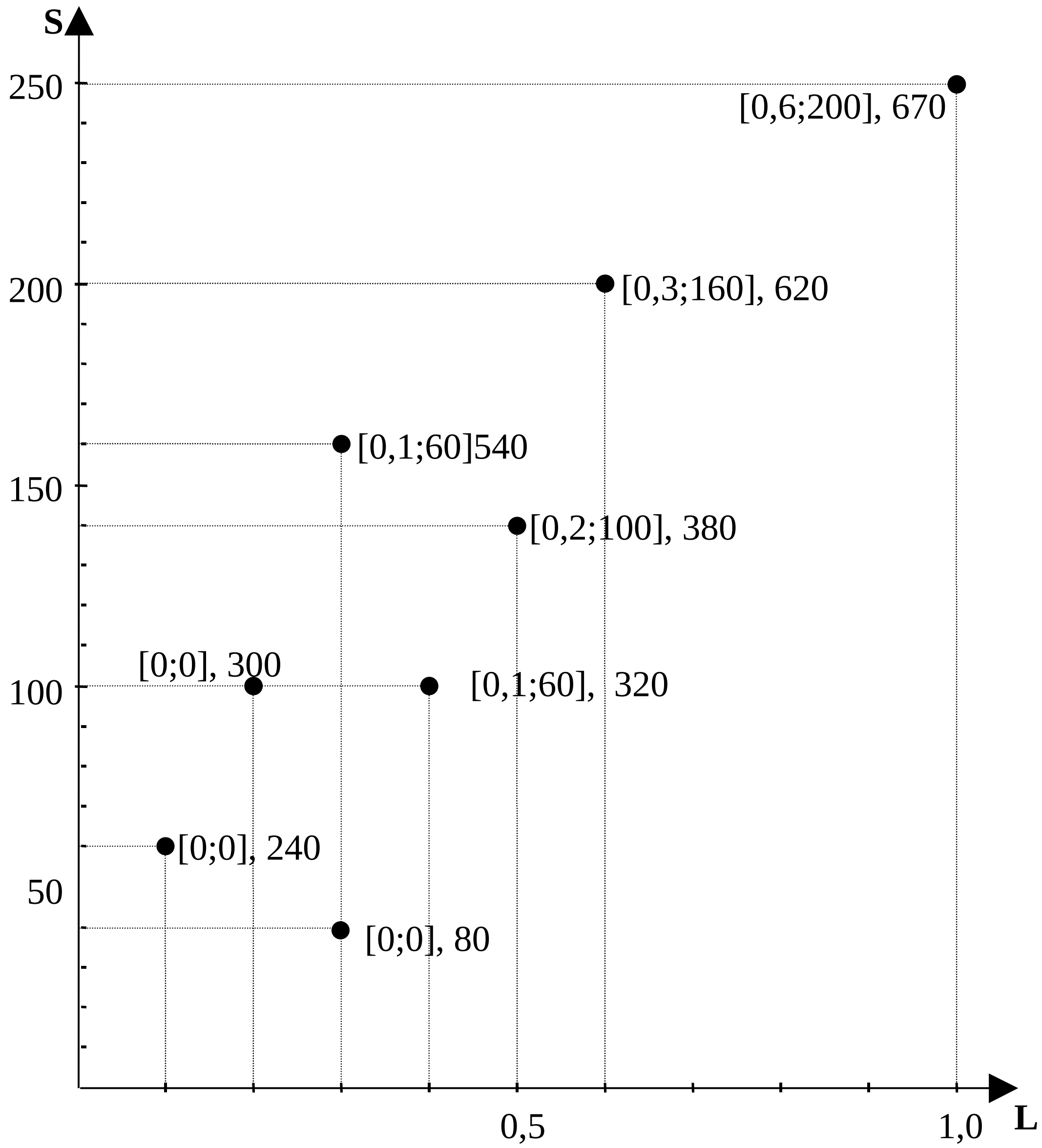


Рис. 1.5. РЭСТ-диаграмма без доминируемых точек.

Проиллюстрируем метод построения РЭСТ-диаграммы и удаление доминируемых (а также условно доминируемых) точек еще на одном примере. Данные о мероприятиях приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5.

| **Мероприятия** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Затраты** | 10 | 20 | 30 | 40 |
| **l-риск** | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |
| **Эффект** | 70 | 50 | 110 | 100 |

I шаг. Строим точку с координатами [0,2; 10] и помечаем ее [0; 0] 70.

II шаг. Строим две точки. Одну - с координатами [0,1; 20], и другую - с координатами [0,3; 30], помечая ее [0,2; 10] 120.

Проверяем, что доминируемых точек нет.

III шаг. Строим четыре точки:

- с координатами [0,4; 30], помечая ее [0; 0] 110;

- с координатами [0,6; 40], помечая ее [0,2; 10] 180.

- с координатами [0,5; 50], помечая ее [0,1; 20] 160;

- с координатами [0,7; 60], помечая ее [0,3; 30] 230;

Проверяя на доминируемость определяем, что точка [0,3; 30] доминирует точку [0,4; 30]. Исключаем точку [0,4; 30] из дальнейшего рассмотрения.

IV шаг. Строим последовательно следующие точки:

- С координатами [0,3; 40], помечая ее [0; 0] 100. Эту точку исключаем, так как она доминируется точкой [0,3; 30].

- С координатами [0,5; 50], помечая ее [0,2; 10] 160. Эту точку исключаем, так как она доминируется точкой [0,3; 30]. Однако, число мероприятий, рассмотренных при построении ранее полученной точки меньше, чем у новой точки, поэтому имеет место условное доминирование. В этом случае сначала строим точку с координатами [0,8; 90], помечая ее [0,5; 50], 260, а затем удаляем пометку [0,2; 10] 160 у точки [0,5; 50], оставляя доминирующую пометку [0,2; 10] 170.

- С координатами [0,4; 60], помечая ее [0,1; 20] 150.

- С координатами [0,6; 70], помечая ее [0,3; 30] 220.

- С координатами [0,9; 80], помечая ее [0,6; 40] 280.

- С координатами [0,8; 90], помечая ее [0,5; 50] 260.

- С координатами [1,0; 100], помечая ее [0,7; 60] 330.

Окончательно РЭСТ-диаграмма без доминируемых точек приведена на рис. 1.6.

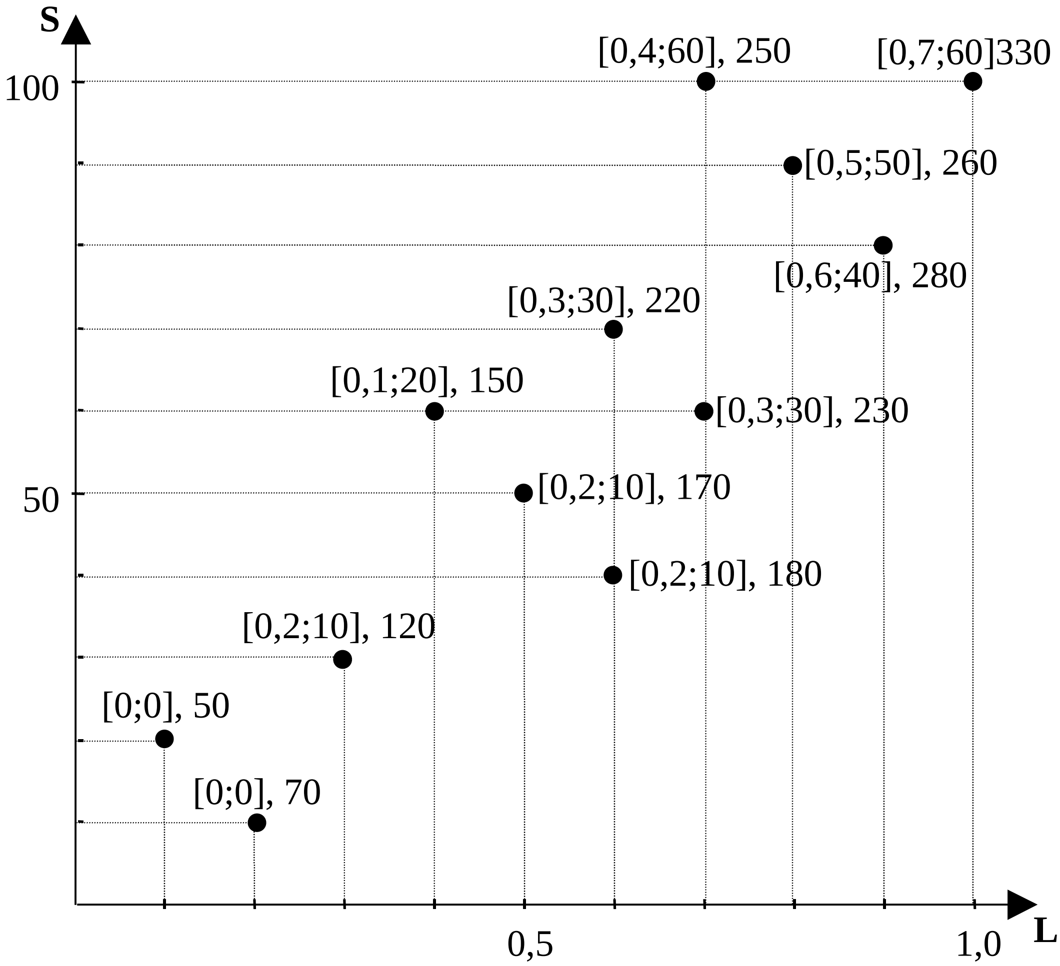


Рис. 1.6.

Таким образом РЭСТ-диаграммы позволяют эффективно решать задачи выбора множества мероприятий по критериям затрат, риска и эффекта. Однако, в ряде случаев нас интересует более детальный анализ пакета мероприятий. Такой более детальный анализ можно провести на основе гистограммы эффекта или, другими словами, графика, показывающего вероятность получения того или иного эффекта. Для получения такого графика воспользуемся методом который мы применяли для получения оптимального пакета мероприятий при ограниченных затратах (без учета риска), изменив немного способ построения сети. А именно, на оси абсцисс по-прежнему отмечаем номера мероприятий, однако, на оси ординат отмечаем не величину затрат, а величину эффекта. Существенно меняется и способ определения чисел в вершинах сети. Описание алгоритма приведем на данных из таблицы 1.6 для пакета из четырех мероприятий.

Таблица 1.6.

| **Мероприятия** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Затраты** | 10 | 20 | 30 | 40 |
| **Риск q** | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| **Надежность p** | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 |

I шаг. Рассматриваем первое мероприятие и проводим из начала координат две дуги - одна в точку (1; 0), а другая в точку (1; 10). У конца первой дуги пишем 0,1, а у конца второй - 0,9. Первая горизонтальная дуга соответствует тому, что мероприятие не реализовано и эффект не получен (вероятность этого равна риску, то есть 0,1), а вторая, наклонная, соответствует успешной реализации мероприятия и получению эффекта 10 (вероятность этого равна надежности проекта, то есть 0,9).

II шаг. Рассматриваем второе мероприятие. Из каждой точки, - [1;10] и [1;0], - проводим по две дуги, получая четыре точки с координатами [2;0], [2;20], [2;10], [2;30], соответствующие четырем возможным вариантам реализации двух проектов. У каждой точки пишем вероятность соответствующего события. Так у точки [2;0] пишем число $q_1 \cdot q_2 = 0{,}02$, что соответствует вероятности того, что оба мероприятия не реализованы, у точки [2;20] пишем число $q_1 \cdot p_2 = 0{,}08$, что соответствует тому, что первое мероприятие не реализовано, а второе - реализовано и т.д.

III шаг. Рассматриваем третье мероприятие. Из каждой из четырех точек, полученных на втором шаге, проводим также по две дуги, соответствующие неудаче (горизонтальная дуга) или удаче (наклонная дуга) в реализации третьего проекта. К ординате точки, полученной на втором шаге добавляется величина эффекта. Мы видим, что на этом шаге две точки совпадут, то есть мы получаем не восемь точек, а семь, с координатами [3;0], [3;10], [3;20], [3;30], [3;40], [3;50] и [3;60]. У совпавших точек соответствующие произведения вероятностей складываем. Заметим, что совпадают две точки, одна из которых соответствует успешной реализации первых двух мероприятий и неудаче в реализации третьего, а вторая - наоборот, неудаче в реализации первых двух проектов и успеху в реализации третьего. У этой точки пишем число

$$p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}216 + 0{,}014 = 0{,}23.$$

IV шаг. Из каждой из семи точек проводим по две дуги, действуя аналогично третьему шагу при совпадении двух или более точек. Окончательные результаты расчетов приведены на рис. 1.7. Числа у конечных вершин (справа) равны вероятности получить соответствующий эффект. Гистограмма распределения эффекта приведена на рис. 1.8.

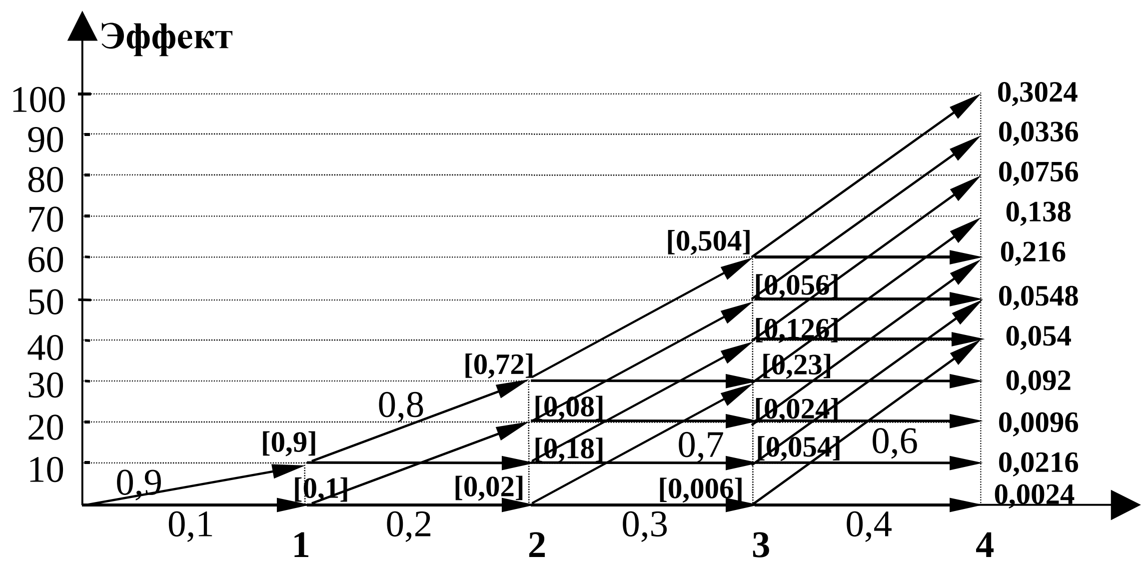


Рис. 1.7.

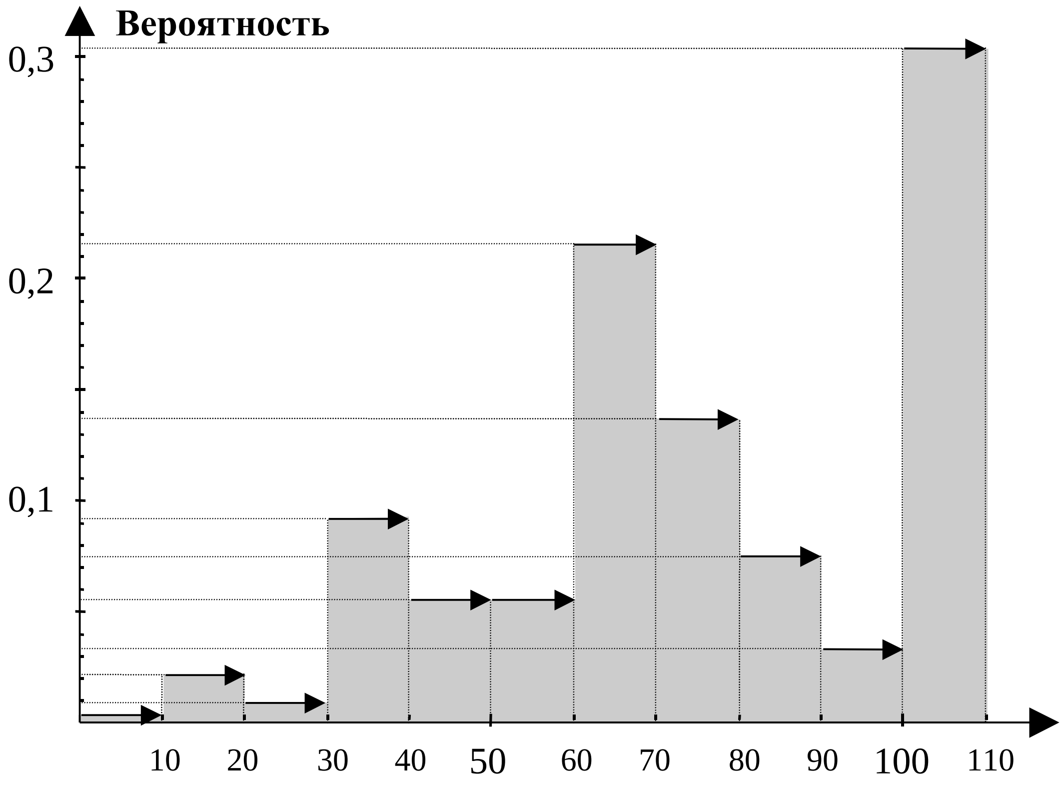


Рис. 1.8.

Построенная один раз сеть рис. 1.7 позволяет легко получать гистограммы эффектов для любого подмножества мероприятий. Для этого достаточно у отсутствующих мероприятий оставить только горизонтальные дуги, присвоив им вес 1. Так, если исключить четвертое и второе мероприятия, то из сети рис 1.7 непосредственно получаем сеть рис. 1.9.

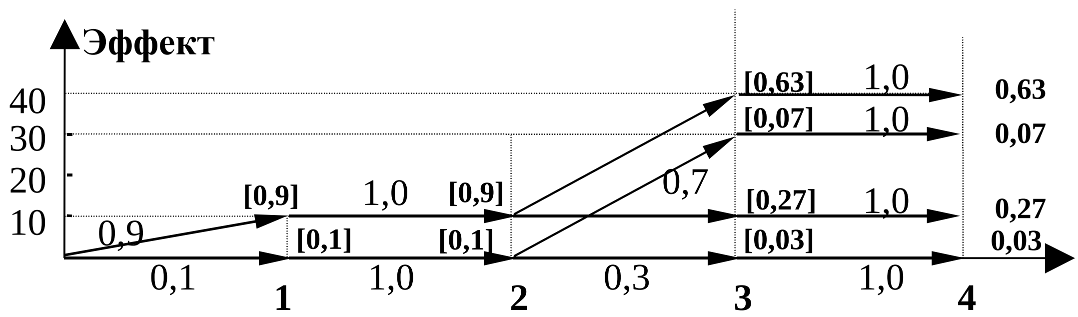


Рис. 1.9.

В целом РЭСТ-диаграммы вместе с описанным методом построения гистограмм эффекта дают достаточный набор средств для принятия решений о выборе пакета мероприятий, обеспечивающих достижение поставленной цели.

# ГЛАВА II. Комплексная оценка вариантов развития

В предыдущих параграфах была рассмотрена задача формирования программы развития, оптимальной по одному критерию. Чтобы учесть все основные цели развития, рассмотрим задачу формирования программы развития с учетом всех критериев. Как правило, цели развития в определенном смысле противоречивы. Так, достижение финансово-экономических целей приводит часто к росту экологического риска. Большие затраты на повышение уровня жизни (социальная цель) затрудняют достижение финансово-экономических целей и т.д. Поэтому задача формирования программы развития с учетом социальных, экономических и экологических целей является задачей многокритериальной оптимизации. Существует несколько подходов к решению задач многокритериальной оптимизации. Большинство из них так или иначе связаны с формированием комплексной оценки, которая в агрегированном виде отражает все цели программы. Пусть программа оценивается по m критериям. Обозначим $x_j$ - значение j-го критерия. Наиболее простой формой представления комплексной оценки является линейная свертка

$$F = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j , \tag{2.1}$$

где $\lambda_j$ - вес j-го критерия, определяемый, как правило, на основе экспертных заключений. Недостатком линейных сверток является опасность потери эффективных вариантов. Вариант называется эффективным (паретооптимальным) если не существует другого варианта, который не хуже данного по всем критериям (мы считаем, что любые два варианта программы отличаются хотя бы по одному критерию). Эту опасность иллюстрирует рис. 2.1.

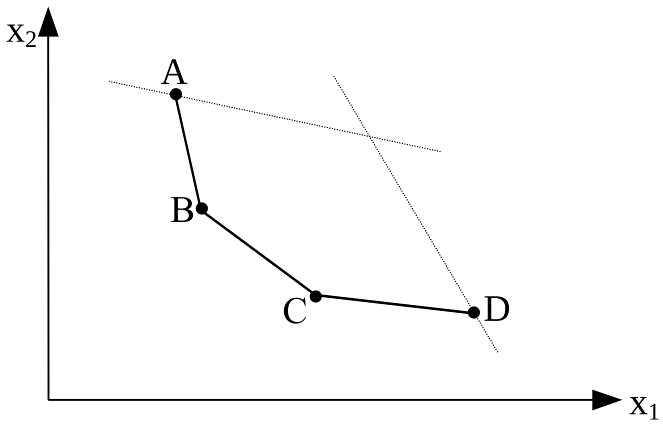


Рис. 2.1.

Легко видеть, что какие бы веса $\lambda_1$, $\lambda_2$ мы ни взяли, будет выбран либо вариант A, либо вариант D, но никогда не будут выбраны варианты B и C. Для того, чтобы избежать этой опасности можно применить нелинейное преобразование шкал, таким образом, чтобы в новом пространстве варианты программы располагались так, как показано на рис. 2.2.

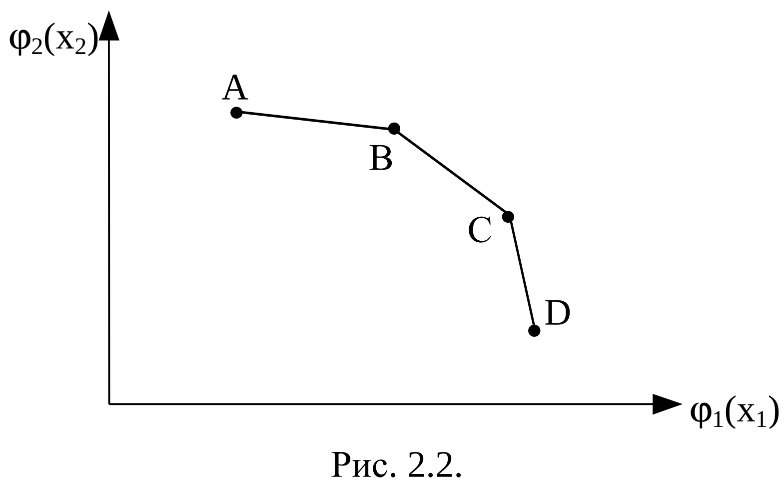


Рис. 2.2.

При таком расположении для любого варианта всегда существуют веса $\lambda_1$ и $\lambda_2$, при которых будет выбран именно этот вариант. Заметим, что нелинейное преобразование может быть выбрано различными способами, однако при этом затрудняется работа экспертов по определению весов в новом пространстве, если оно не имеет достаточно хорошей содержательной интерпретации. В этом случае веса можно определять на основе экспертной информации о сравнительной эффективности выбранных базовых вариантов. Пусть например, выбраны четыре базовых варианта A, B, C, D (рис 2.2) и эксперты установили следующие оценки сравнительной эффективности этих вариантов:

$$D > C > A > B.$$

Пусть варианты имеют следующие оценки по двум критериям в преобразованном пространстве:

Таблица 2.1.

| **Вариант** | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **Критерий 1** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **Критерий 2** | 7 | 6 | 4 | 1 |

Очевидно, что веса $\lambda_1$ и $\lambda_2$ должны быть такими, чтобы выполнялись неравенства

$$4\lambda_1 + \lambda_2 > 3\lambda_1 + 4\lambda_2 > \lambda_1 + 7\lambda_2 > 2\lambda_1 + 6\lambda_2. \qquad (2.2)$$

Решим следующую задачу линейного программирования: определить $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\varepsilon$, такие что

$$\varepsilon \to \max,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$$4\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \varepsilon,$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq \lambda_1 + 7\lambda_2 + \varepsilon,$$

$$\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + \varepsilon.$$

Подставляя $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, преобразуем неравенства к виду:

$$\frac{1-\varepsilon}{2} \geq \lambda_1 \geq \frac{3+\varepsilon}{4}.$$

Из этого уравнения определяем $\varepsilon = -{}^1/_3$, $\lambda_1 = {}^2/_3$.

Отрицательная величина ε означает, что оценки экспертов противоречивы. Тем не менее, мы получили значения весов, при которых это противоречие свелось к минимуму. Другими словами система неравенств (2.2) не имеет решения, но мы нашли решение с минимальной невязкой. При полученных значениях весов комплексные оценки вариантов будут следующими:

$$F_A = 3,\ F_B = 3^1/_3,\ F_C = 3^1/_3,\ F_D = 3.$$

Заметим, что такого противоречия не возникает, если эксперты просто назовут лучший вариант из предъявленных. Пусть это вариант B. Тогда получаем следующую задачу:

$$\varepsilon \to \max,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$$2\lambda_1 + 6\lambda_2 \geq \lambda_1 + 7\lambda_2 + \varepsilon,$$

$$2\lambda_1 + 6\lambda_2 \geq 4\lambda_1 + \lambda_2 + \varepsilon,$$

$$2\lambda_1 + 6\lambda_2 \geq 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \varepsilon.$$

Эта система неравенств сводится к следующей:

$$\frac{1+\varepsilon}{2} \leq \lambda_1 \leq \min\left(\frac{5-\varepsilon}{7}; \frac{2-\varepsilon}{3}\right).$$

Соответствующее решение с максимальной величиной ε имеет вид:

$$\varepsilon = {}^1/_5;\ \lambda_1 = {}^3/_5;\ \lambda_2 = {}^2/_5.$$

При этих значениях весов получаем следующие комплексные оценки вариантов:

$$F_A = 3{,}4;\ F_B = 3{,}6;\ F_C = 3{,}4;\ F_D = 2{,}8.$$

Недостатком описанного выше подхода является достаточно большая нагрузка на экспертов, вынужденных давать оценки весов всех критериев. В последнее время большую популярность получил метод формирования комплексной оценки на основе построения иерархической структуры (дерева) критериев. Идея в том, что все критерии организуются в определенную иерархическую структуру. На каждом уровне этой структуры происходит построение агрегированной оценки критериев предыдущего уровня. На рис. 2.3 приводится иерархическая структура для трех критериев оценки программы развития - экономической эффективности, уровня жизни и экологической безопасности (обозначим их соответственно буквами Э, Ж и Б).

Представляется естественным сначала объединить критерии уровня

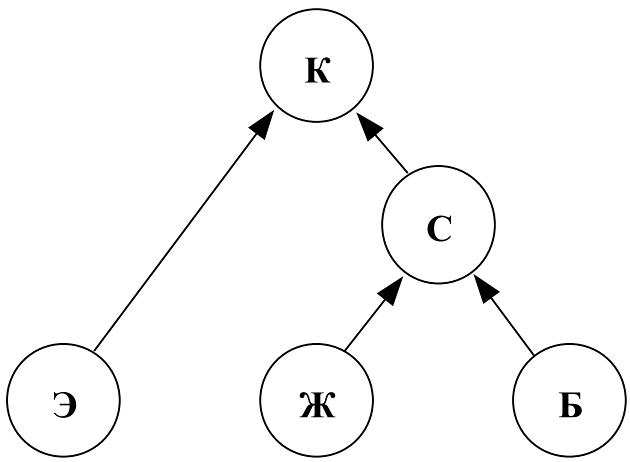


Рис. 2.3.

жизни и экологической безопасности в один агрегированный критерий социального уровня (С). Далее, объединяя социальный уровень с экономической эффективностью, получим комплексную оценку социально-экономического уровня, который обеспечивает анализируемый вариант программы развития. Особенностью иерархической структуры рис. 2.3 является агрегирование в каждом узле дерева только двух оценок. Это крайне привлекательная особенность. Дело в том, что комплексная оценка должна отражать приоритеты развития отрасли. Формирование этих приоритетов, а значит и формирование комплексной оценки должно проводиться первыми лицами (министром, его заместителями, начальниками управлений), то есть лицами, принимающими решения. Здесь мы сталкиваемся с чисто психологической проблемой. Человек способен эффективно оценить (соразмерить) только ограниченное число целей и лучше всего, если на каждом шаге оценки приходится сравнивать не более двух критериев. Такое сравнение в случае двух критериев удобно проводить, подставляя результаты в виде таблицы (матрицы). Предварительно перейдем к дискретной шкале оценок по каждому критерию, а именно, будем оценивать состояние отрасли по каждому критерию по четырехбалльной шкале: плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично, или в числовых оценках - один, два, три, четыре. В таких же шкалах будем оценивать агрегированную и комплексную оценки. На рис. 2.4 приведен пример свертки критерия «уровень жизни» с критерием «экологическая безопасность».

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **4** | 2 | 3 | 4 | 4 |
| **3** | 1 | 2 | 3 | 3 |
| **2** | 1 | 2 | 3 | 3 |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 2 |
| **Б / Ж** | **1** | **2** | **3** | **4** |

Рис. 2.4.

Как уже отмечалось, эта матрица отражает общественные приоритеты, так при критическом положении в области экологии и по уровню жизни приоритет отдается обоим критериям. При удовлетворительном положении в области экологической безопасности приоритет имеет показатель «уровень жизни», поскольку состояние с хорошей оценкой по безопасности и удовлетворительной по уровню жизни оценивается как удовлетворительное, а обратная картина (оценка «хорошо» по уровню жизни и «удовлетворительно» по безопасности) оценивается как оценка «хорошо». С ростом уровня жизни приоритет смещается в сторону показателя экологической безопасности, поскольку состояние «отлично» возможно только при оценке «отлично» по показателю безопасности (при этом, возможна оценка «хорошо» по уровню жизни). Имея оценку социального уровня, мы можем построить матрицу свертки для комплексной оценки социально-экономического уровня. Пример такой оценки приведен на рис. 2.5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **4** | 2 | 3 | 4 | 4 |
| **3** | 2 | 2 | 3 | 3 |
| **2** | 1 | 2 | 3 | 3 |
| **1** | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **С / Э** | **1** | **2** | **3** | **4** |

Рис. 2.5.

Здесь также можно заметить изменение системы приоритетов. При кризисном положении в экономике и обществе приоритет имеют оба показателя - и социальный уровень и уровень экономической эффективности. При удовлетворительном или хорошем значении этих показателей приоритет смещается в сторону экономической эффективности. Наконец, при высоких оценках (хорошо или отлично) приоритет снова имеет показатель социального уровня. Граничные состояния, отделяющие плохие состояния от удовлетворительных, удовлетворительные от хороших и хорошие от отличных, можно также определять по разному. Более того, эти границы могут и должны меняться со временем. Так, состояние «плохо» соответствует сегодняшнему состоянию и по экономической эффективности в отрасли, и по уровню жизни ее работников, и по уровню экологической безопасности. Состояние «удовлетворительно» может соответствовать средним значениям соответствующих показателей по отраслям. Состояние «хорошо» - лучшим значениям показателей по отраслям, а «отлично» - средним значениям по другим странам в соответствующих отраслях. При росте эффективности экономики и уровня жизни цели могут измениться. Так, состояние «отлично»может соответствовать лучшим значениям показателей в мире. Обе матрицы, объединенные в графическую схему формирования комплексной оценки социально-экономического уровня, приведены на рис. 2.6.

Имея дерево свертки критериев можно оценивать любой вариант программы развития отрасли и на основе этого выбирать оптимальный вариант. Рассмотрим задачу выбора программы развития, обеспечивающей переход от состояния «плохо» к состоянию «удовлетворительно». Для этого определим понятия напряженных вариантов программы. Каждый вариант будем описывать вектором $x = \{x_Ж, x_Б, x_Э\}$, компоненты которого определяют оценки по соответствующим критериям.

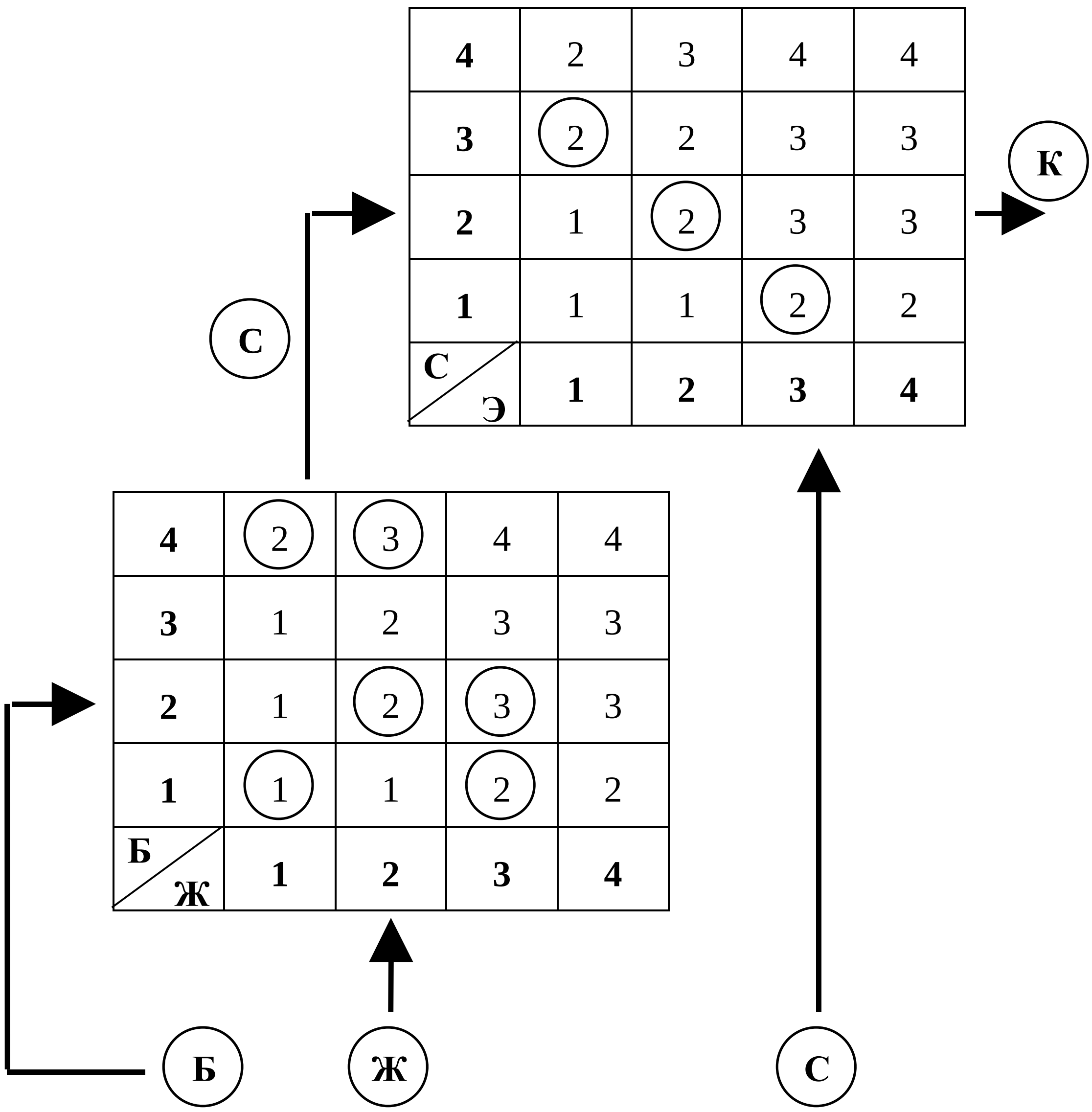


Рис.2.6.

Определение 2.1. Вариант x называется напряженным, если не существует другого варианта y, имеющего то же значение комплексной оценки, у которого оценки по всем критериям не выше, чем у варианта x.

Так, вариант x = (2, 2, 4), имеющий комплексную оценку К = 3, не является напряженным, так как имеется вариант y = (2, 2, 3), имеющий такое же значение комплексной оценки и в то же время его оценки по критериям не превышают оценок варианта x. Для варианта y = (2, 2, 3) таких вариантов не существует. Поэтому он является напряженным.

Значение напряженных вариантов в том, что варианты программы развития, обеспечивающие получение требуемого значения комплексной оценки с минимальными затратами должны быть напряженными. Фактически напряженные варианты это Парето-оптимальные варианты в пространстве критериев. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением только напряженных вариантов. Опишем алгоритм построения всех напряженных вариантов.

Пусть поставлена задача перехода из состояния $x_0$ = (1, 1, 1) с комплексной оценкой «плохо» в состояние с комплексной оценкой «удовлетворительно». Рассматриваем матрицу сверток показателей социального уровня и уровня экономической эффективности. Отмечаем все элементы матрицы, имеющие оценку 2 (удовлетворительно, рис. 2.6) и являющиеся напряженными. Это элементы, имеющие оценку 1 и слева и снизу от них. Имеем три таких элемента: (1; 3), (2; 2) и (3; 1). Для получения каждого из указанных состояний необходимо достичь соответствующих значений по показателям социального уровня (С) и экономической эффективности (Э). Так состояние (1; 3) достигается при достижении оценки 1 по показателю «С» и оценки 3 по показателю «Э». На рис. 2.6 отмечены значения показателей «С» и «Э», которые должны быть достигнуты для получения каждого из трех указанных выше состояний.

Показатели экономической эффективности являются исходными показателями. Показатель социального уровня является агрегированным показателем. Поэтому на основе матрицы свертки показателей «Ж» и «Б» необходимо указать все напряженные варианты, которые дают соответствующие оценки по показателю «С». Так, например, оценка «удовлетворительно» (2) по показателю «С» может быть получена тремя способами: (1; 4), (2; 2) и (3, 1), оценка 3 - двумя способами: (2; 4) и (3; 2), оценка 1 всего одним способом - (1; 1). Это соответствует сохранению существующего положения в области уровня жизни и экологической безопасности. Полученный граф называется сетью напряженных вариантов. Он приведен на рис. 2.7. Как следует из алгоритма его построения, он содержит все напряженные варианты, имеющие комплексную оценку «удовлетворительно».

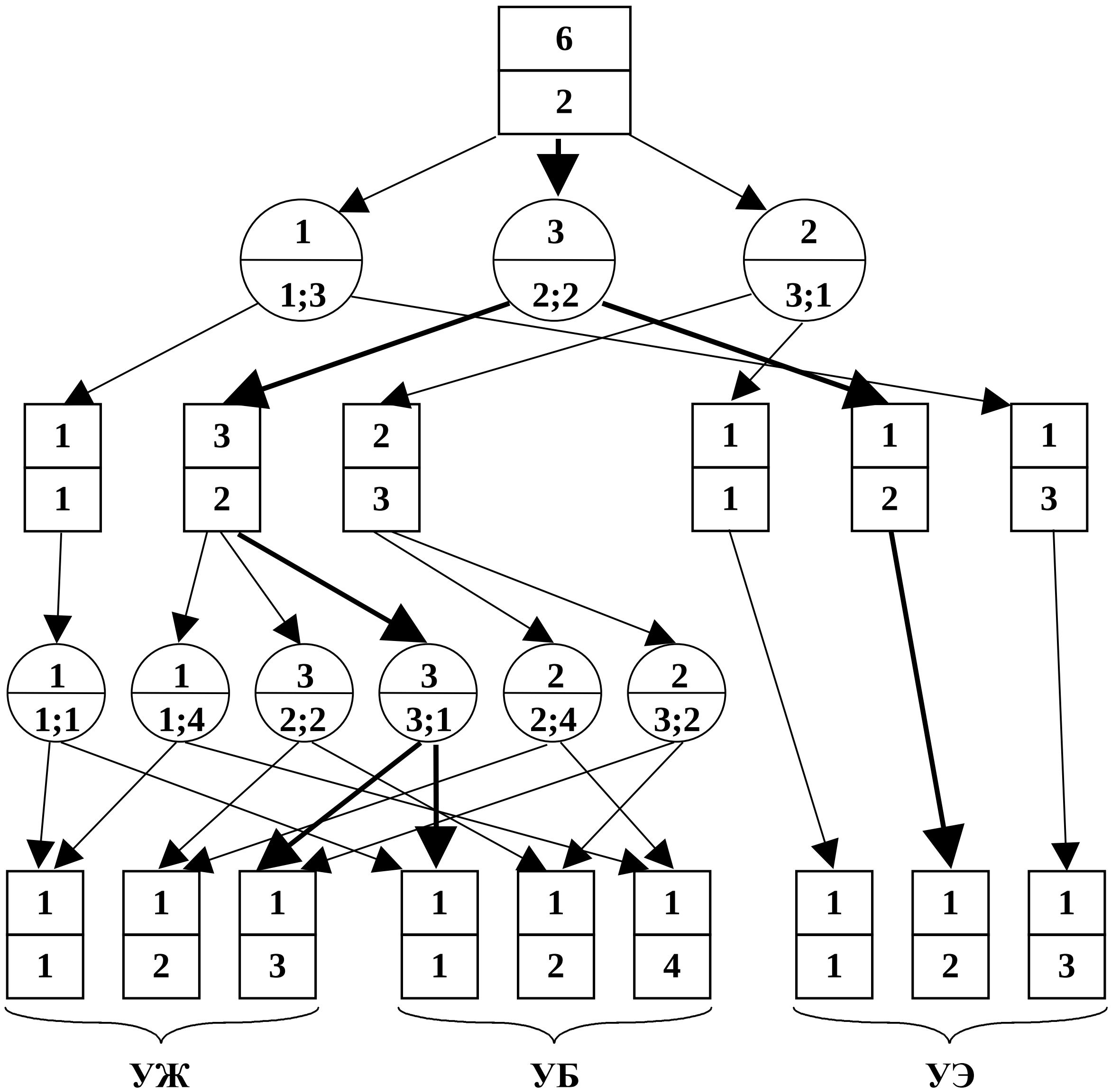


Рис.2.7.

Для получения какого-либо напряженного варианта поступаем следующим образом. Рассматриваем начальную вершину (вход) сети. Из нее исходят три дуги. Берем любую из них, например, дугу, ведущую в вершину (2; 2). Из вершины (2; 2) исходят две дуги. Отмечаем обе эти дуги. Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «Э» указывает, что по этому показателю требуется достичь состояния «удовлетворительно». Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «С» указывает, что по этому показателю также требуется достичь состояния «удовлетворительно». Из трех вариантов достижения оценки 2 по показателю «С» выбираем любой (например, вариант (3; 1), что соответствует оценке «хорошо» по показателю «Ж» и оценке «плохо» по показателю «Б». Полученному напряженному варианту соответствует подграф сети, выделенный на рис. 2.7 толстыми дугами. Он определяет напряженный вариант (3; 1; 2). Имея сеть напряженных вариантов нетрудно определить число напряженных вариантов, обеспечивающих получение требуемой оценки. Для этого применяем следующий алгоритм индексации (пометки) вершин сети:

1 шаг. Помечаем конечные вершины сети индексами 1 (индексы указаны в верхней половине вершины).

2 шаг. Двигаясь снизу вверх последовательно помечаем все вершины. Индекс вершины-кружка на рис 2.7 равен произведению индексов смежных с ней двух вершин нижнего уровня. Индекс вершины-квадрата на рис 2.7 равен сумме индексов смежных с ней вершин нижнего уровня. Индекс начальной вершины-квадрата определяет число напряженных вариантов.

Обоснование алгоритма непосредственно следует из описанного способа определения индексов. Индексы вершин указаны на рис. 2.7 в верхней части вершин. Число напряженных вариантов равно 6.

Построив сеть напряженных вариантов можно решать различные задачи формирования программы развития с учетом факторов стоимости и риска. Рассмотрим сначала задачу выбора варианта программы, обеспечивающего достижение поставленной цели с минимальными затратами. Пусть для каждого критерия i определены затраты $s_{ij}$, необходимые для обеспечения уровня j, то есть разработана подпрограмма (система мероприятий), выполнение которой обеспечивает рост критерия до уровня j. Примем, что подпрограммы по различным критериям независимы, то есть мероприятия i-ой подпрограммы не влияют на другие направления (цели). В этом случае существует эффективный алгоритм определения программы минимальной стоимости. В его основе также лежит метод индексации вершин сети напряженных вариантов снизу вверх.

I шаг. Помечаем нижние вершины сети индексами $s_{ij}$.

Общий шаг. Вершины следующего (более высокого) уровня сети напряженных вариантов помечаются только после того, как помечены все смежные вершины нижележащего уровня. При этом индекс вершины-квадрата (в таких вершинах записывается одно число - оценка соответствующего агрегированного критерия) равен минимальному из индексов смежных вершин-кружков нижележащего уровня, а индекс вершины-кружка (в кружке записаны два числа - это пара оценок критериев нижнего уровня, агрегирование которых дает соответствующую оценку критерия верхнего уровня) равен сумме индексов смежных вершин-квадратов нижележащего уровня.

При описанной процедуре индекс начальной вершины-квадрата равен минимальным затратам на реализацию соответствующей программы. Оптимальный вариант находится «обратным ходом» - сверху вниз. Сначала находим вершину-кружок, смежную с начальной вершиной сети и имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с начальной. Из этой вершины-кружка исходят две дуги к вершинам-квадратам нижележащего уровня. Для каждой вершины-квадрата находим вершину-кружок, имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с соответствующей вершиной-квадратом и т.д. В результате будет выделен подграф, определяющий оптимальный вариант программы.

Рассмотрим работу алгоритма на примере сети напряженных вариантов рис. 2.7.

Пример. Пусть матрица затрат ($s_{ij}$) имеет следующий вид:

Таблица 2.2.

| i \ j | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **Ж** | 2 | 7 | 20 | 60 |
| **Б** | 3 | 10 | 35 | 50 |
| **Э** | 1 | 8 | 50 | 100 |

Индексы вершин сети, полученные на основе описанного алгоритма, указаны на рис. 2.8 в верхней половине соответствующих вершин. Оптимальный вариант выделен толстыми линиями. Это вариант (2; 2; 2) с затратами $s^0 = 25$, соответствующий сбалансированному развитию по всем направлениям.

К сожалению, в весьма редких случаях предположение о независимости отдельных подпрограмм по направлениям выполняется. Как правило, подпрограммы зависимы, то есть выполнение мероприятий по одной подпрограмме влияет на критерии других подпрограмм. Особенно это касается подпрограммы повышения уровня экономической эффективности, которая влияет и на уровень жизни, и на уровень экологической безопасности. При этом, если влияние на уровень жизни, как правило, является положительным (рост экономической эффективности приводит к росту оплаты труда, росту занятости, росту

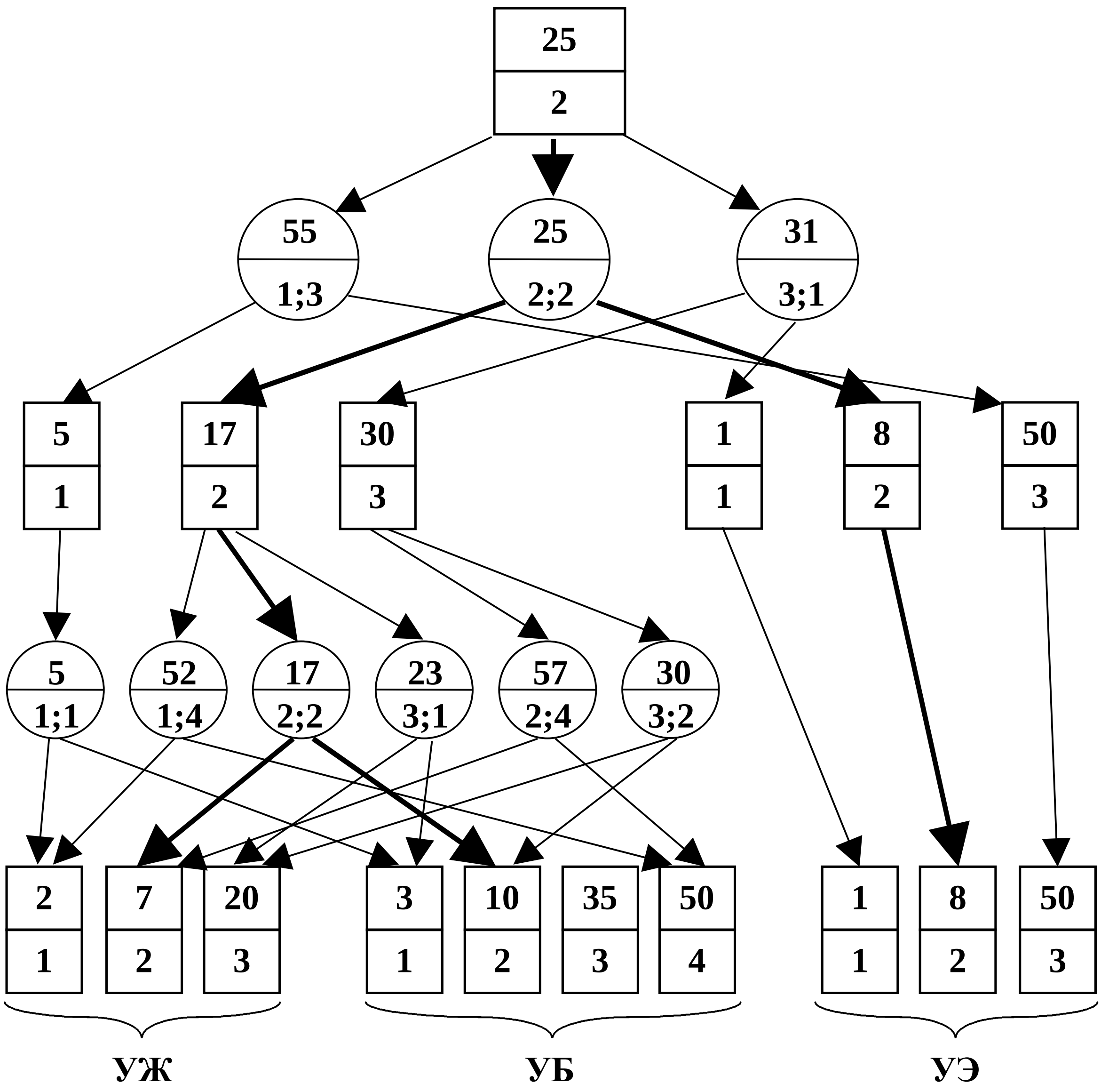


Рис.2.8.

выпуска продуктов и услуг, что повышает уровень жизни), то влияние на уровень экологической безопасности является, как правило, отрицательным (истощение природных ресурсов, увеличение риска аварий и катастроф и т.д.).

Таким образом, с ростом уровня экономической эффективности следует ожидать снижения затрат на достижение требуемой величины уровня жизни, и рост затрат на достижение требуемой величины уровня экологической безопасности. Пусть для каждой оценки уровня экономической эффективности заданы затраты ($s_{Жj}$) и ($s_{Бj}$), требуемые для достижения оценки j, соответственно по критериям (Б) и (Ж). В этом случае, метод определения программы минимальной стоимости основан на переборе возможных оценок уровня экономической эффективности. При каждом значении уровня экономической эффективности решается задача построения программы минимальной стоимости по остальным критериям. Из четырех вариантов, соответствующих четырем возможным значениям уровня экономической эффективности, выбирается наилучший.

Пример. Пусть затраты ($s_{Жj}$) и ($s_{Бj}$) для различных уровней экономической эффективности имеют значения, приведенные в таблице 2.3.

Таблица 2.3.

| **Э** | **i \ j** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **Ж** | 2 | 7 | 20 | 60 |
| | **Б** | 3 | 10 | 35 | 50 |
| **2** | **Ж** | 1 | 3 | 10 | 30 |
| | **Б** | 5 | 15 | 45 | 70 |
| **3** | **Ж** | 0 | 1 | 5 | 15 |
| | **Б** | 8 | 30 | 60 | 100 |
| **4** | **Ж** | 0 | 0 | 2 | 5 |
| | **Б** | 18 | 40 | 70 | 120 |

Для каждого уровня экономической эффективности мы получаем некоторую сеть напряженных вариантов, которая является подграфом сети 2.7. Заметим, однако, что эти подграфы пересекаются только в начальной вершине и некоторых конечных вершинах. Разделим конечные вершины, в которых пересекаются подграфы, на несколько вершин, так чтобы все подграфы имели только одну общую вершину, а именно начальную, рис 2.9. Теперь для получения сети применяем описанный выше алгоритм определения варианта минимальной стоимости. Оптимальный вариант

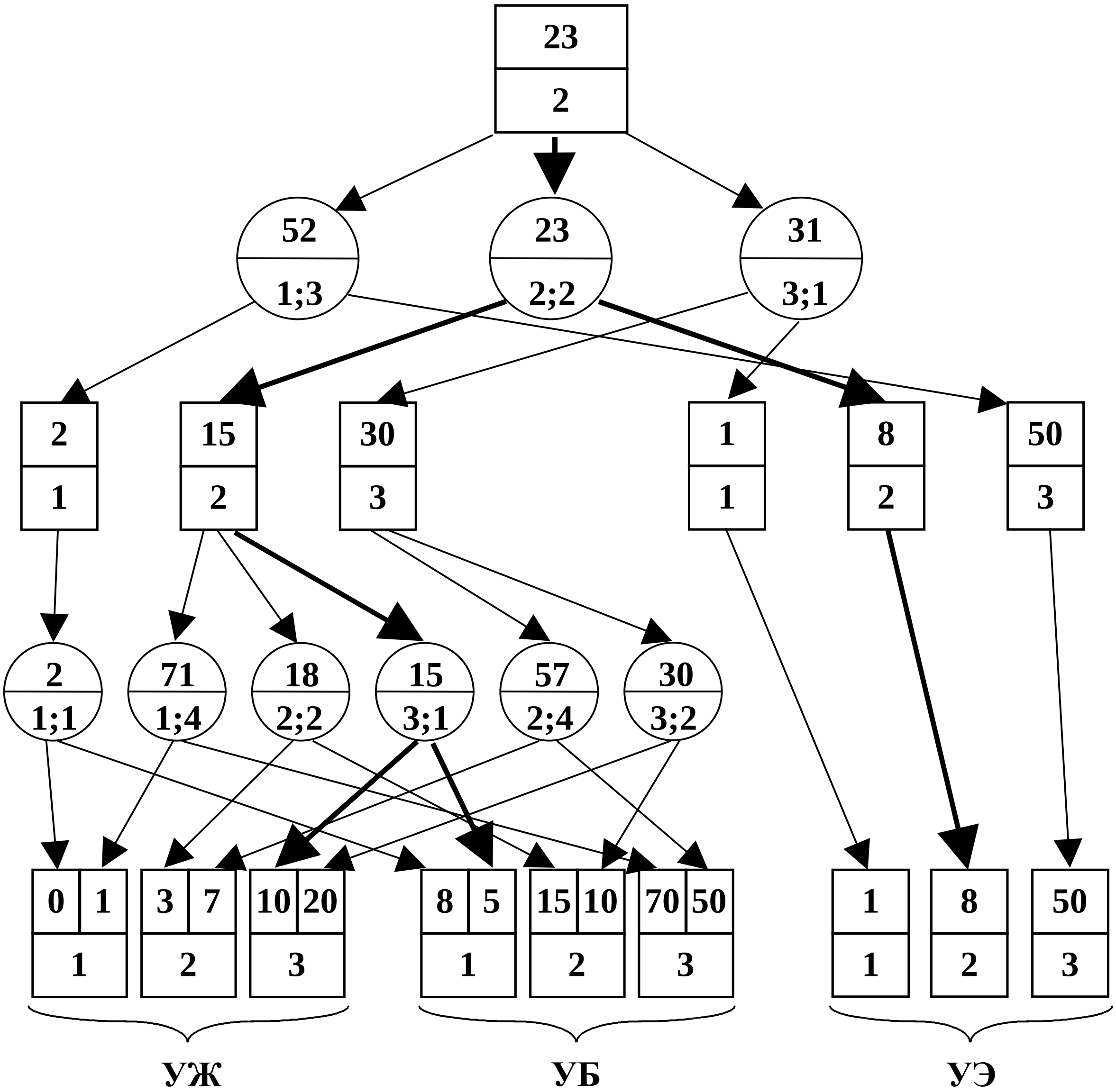


Рис.2.9.

показан на рис. 2.9 толстыми линиями. Это вариант (3; 1; 2) с затратами s = 23. Таким образом можно определять оптимальные варианты программы развития отрасли и для случая, когда одно из направлений влияет на другие.

# ГЛАВА III. Задача минимизации упущенной выгоды

После того, как сформирована программа развития отрасли, то есть выбрано множество проектов, реализация которых обеспечивает достижение поставленных целей, возникает задача построения календарного плана реализации программы. Дело в том, что в условиях дефицита финансовых ресурсов нет возможности вести одновременно реализацию всех проектов программы. Необходимо выбрать первоочередные, реализация которых обеспечивает наибольший эффект. Реализация остальных проектов отодвигается на более поздние сроки. Очевидно, что сдвиг проектов на более поздние сроки приводит к уменьшению эффекта или, как говорят, к упущенной выгоде. Желательно разработать такой план реализации программы, при котором упущенная выгода минимальна. Рассмотрим формальную постановку задачи. Пусть программа состоит из n проектов. Каждый проект будем описывать требуемым объемом финансирования $w_i$ и продолжительностью реализации $\tau_i$. Величина $\tau_i$ определяется максимальным объемом средств $a_i$, который можно освоить в единицу времени, то есть $\tau_i = w_i / a_i$. Примем, что задержка срока реализации проекта на единицу времени (например, на месяц) приводит к упущенной выгоде, которая равна $c_i$. Известны возможные объемы финансирования программы в зависимости от времени, то есть известно, что в k-ом периоде объем финансирования составит $N_k$, $k = \overline{1, p}$. Задача заключается в определении графиков финансирования проектов так, чтобы упущенная выгода

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$$

($t_i$ - момент завершения i-го проекта) была минимальной. Эта задача была поставлена в работе [18], где предложен эвристический алгоритм ее решения. В основе алгоритма лежит упорядочение проектов по убыванию приоритетов $q_i = c_i/w_i$. Там же приведен пример, показывающий, что это правило не всегда дает оптимальное решение. Рассмотрим приближенный алгоритм решения задачи.

Обозначим $x_{ik}$ - объем финансирования i-го проекта в k-ом периоде. Выпишем ограничения на допустимые значения $\{x_{ik}\}$. Ограничения на заданные объемы финансирования по периодам

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \le N_k, \quad k = \overline{1, p}. \tag{3.1}$$

Ограничения на допустимый объем финансирования i-го проекта в k-ом периоде

$$x_{ik} \le a_i, \quad k = \overline{1, p}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

Напомним требование выполнения полного объема работ по проектам:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = w_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Ограничения (3.1) - (3.3) это классические ограничения транспортной задачи. Условия ее разрешимости очевидны:

$$\sum_{k=1}^{p} N_k \ge \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

то есть общий объем финансовых ресурсов должен быть не меньше суммарного объема требуемых ресурсов для реализации всех проектов.

Специфику задачи определяет вид целевой функции. Действительно, момент завершения проекта $t_i$ равен периоду $k_i$ такому, что

$$\sum_{q=1}^{k_i} x_{iq} = w_i,$$

то есть за периоды от 1 до $k_i$ выполнен весь объем работы по i-му проекту.

Аналитически $t_i$ можно записать как функцию $\{x_{ik}\}$следующим образом:

$$t_i = \max_k \left( k \cdot x_{ik} \right),$$

и, соответственно, критерий оптимальности примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} c_i t_i = \sum_i c_i \max_k \left( k \cdot x_{ik} \right). \quad (3.4)$$

Эффективных точных методов решения задачи (3.1) - (3.4) не известно. Ниже дается описание приближенного алгоритма. Предварительно для каждого проекта i определим последовательность чисел

$$d_{ik} = \left[ \frac{k + \tau_i - 1}{\tau_i} \right],$$

где [x] - целая часть x. Другими словами, мы разбиваем ось времени на отрезки длинны $\tau_i$. При этом $d_{ik}$ определяет номер отрезка, которому принадлежит период k. Так, если $\tau_i$ = 3, то первые три периода имеют $d_{ik}$ = 1, следующая тройка - $d_{ik}$ = 2 и т.д.

<u>Лемма</u>.

$$t_i \le \sum_{k=1}^{p} \frac{x_{ik}}{a_i} \cdot d_{ik}. \quad (3.5)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть проект i завершается в периоде q, то есть $t_i$ = q, причем выполняется непрерывно в периодах с $(q - \tau_i + 1)$ до q с максимально допустимым уровнем финансирования $a_i$, то есть

$$x_{ij} = a_i, \; j = \overline{(q - \tau_i + 1), q}.$$

В этом случае

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{x_{ik}}{a_i} d_{ik} = \sum_{k=q-\tau_i+1}^{q} d_{ik}.$$

Покажем, что $\sum_{k=q-\tau_i+1}^{q} d_{ik} = q$.

Действительно, пусть q = (m - 1)$\tau_i$, тогда все периоды от (q - $\tau_i$ + 1) до q имеют $d_{ik}$ = (m - 1) и значит $\sum_{k=q-\tau_i+1}^{q} d_{ik} = (m-1)\tau_i = q$. Если q = (m - 1)$\tau_i$ + $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l} < \tau_i$), то $\mathbf{l}$ периодов имеют $d_{ik}$ = m, а $\tau_i$ - $\mathbf{l}$ периодов имеют $d_{ik}$ = (m - 1). В этом случае

$$\sum_{k=q-\tau_i+1}^{q} d_{ik} = (m-1)(\tau_i - \mathbf{l}) + m\mathbf{l} = (m-1)\tau_i + \mathbf{l} = q\,.$$

Пусть теперь $x_{ik} > 0$ для $k \in Q_i$, причем проект i завершается в периоде q. В этом случае в силу неубывания $d_{ik}$ с ростом k

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{x_{ik}}{a_i} d_{ik} \le \sum_{k=q-\tau_i+1}^{q} d_{ik} = q\,.$$

Лемма доказана.

Заменим величину $t_i$ на ее нижнюю оценку (3.5). В этом случае получаем классическую транспортную задачу $\left(c_{ij} = \frac{d_{ij}c_i}{a_i}\right)$: определить $x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, p}$ такие, что

$$C = \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij} \to \min, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i} x_{ij} \le N_j, \quad j = \overline{1, p}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{j} x_{ij} = wi_j, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.8}$$

Ее решение дает оценку снизу решения исходной задачи. Более того, мы получаем допустимое решение, а значит можем оценить его погрешность.

Пример 3.1. Программа развития отрасли состоит из трех проектов, данные о которых приведены в таблице 3.1. Пусть график финансирования имеет вид $N_1$ = 10, $N_2$ = 8, $N_3$ = 6, $N_4$ = 4. Значения $d_{ik}$ приведены в таблице 3.2, а значения $c_{ik}$ транспортной задачи приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.1.

| **i** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{w_i}$ | 10 | 12 | 6 |
| $\mathbf{a_i}$ | 5 | 4 | 3 |
| $t_i$ | 2 | 3 | 2 |
| $\mathbf{c_i}$ | 3 | 4 | 2 |

Таблица 3.2.

| **i \ k** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 2 | 2 |
| **2** | 1 | 1 | 1 | 2 |
| **3** | 1 | 1 | 2 | 2 |

Таблица 3.3.

| **i \ k** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{6}{5}$ |
| **2** | 1 | 1 | 1 | 2 |
| **3** | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |

Транспортная сеть, в которой показаны только дуги с ненулевыми финансовыми потоками приведена на рис. 3.1.

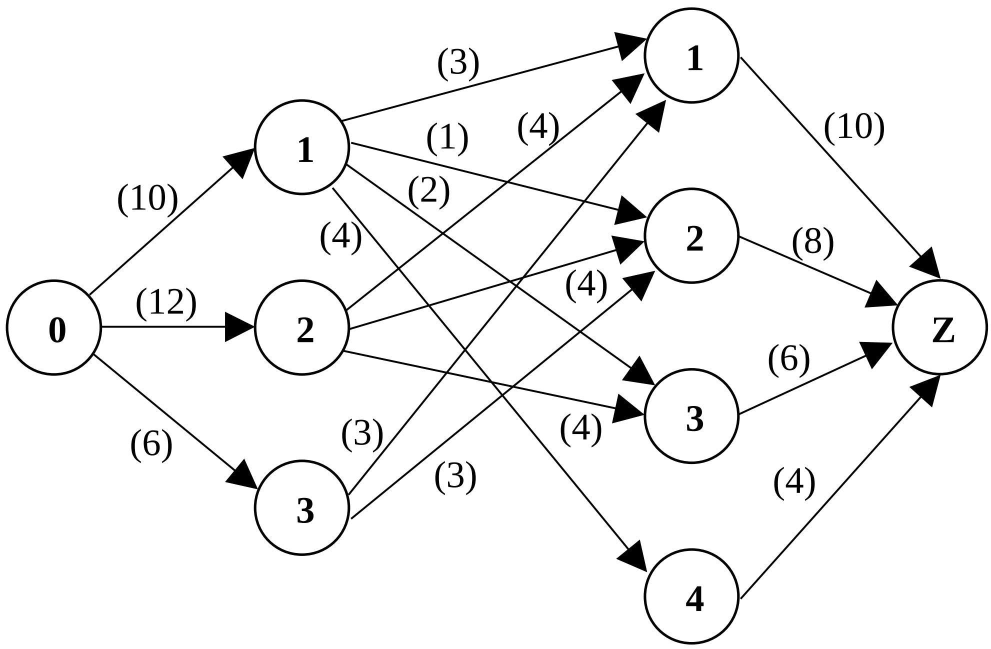


Рис.3.1.

Величина критерия C оценочной задачи (3.6) - (3.8) равна $25^3/_5$. Мы видим, что в полученном решении проект 1 завершается в четвертом периоде, проект 2 - в третьем, а проект 3 - во втором. Это допустимое решение для задачи минимизации упущенной выгоды с величиной упущенной выгоды

$$F = 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 12 + 12 + 4 = 28.$$

Таким образом отклонение полученного решения от оптимального не превышает 2 единицы, поскольку оценку снизу $25^3/_5$ можно заменить на 26 в силу целочисленности значений упущенной выгоды. Для того, чтобы получить оптимальное решение применим метод ветвей и границ. Для этого разобьем множество всех решений на два подмножества. В первом подмножестве проект 1 завершается в четвертом периоде, а во втором -

раньше четвертого периода. Для первого подмножества мы уже имеем оптимальное решение со значением F = 28, поскольку второй проект не может завершаться раньше третьего периода, а третий - раньше второго.

Оценим второе подмножество. Для этого нужно решить транспортную задачу, исключив дугу (1, 4), соответствующую выполнению проекта 1 в четвертом периоде. Оптимальное решение этой задачи приведено на рис. 3.2.

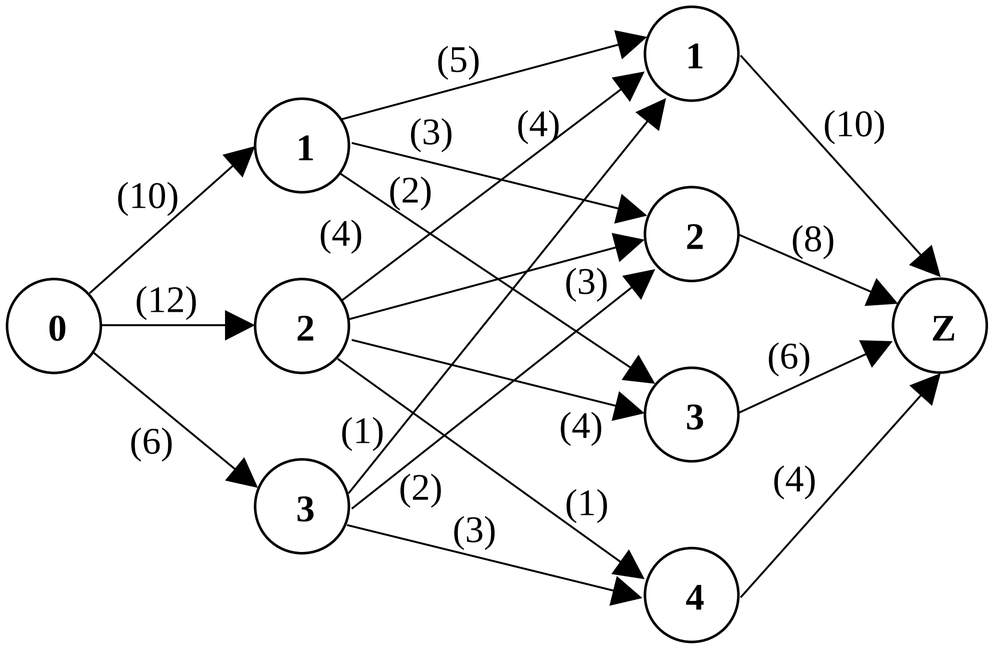


Рис.3.2.

Величина критерия оценочной задачи равна $27^1/_5$ или 28 с учетом целочисленности. Следовательно, полученное выше решение не хуже, чем оптимальное решение во втором подмножестве, а значит является оптимальным.

В рамках рассмотренного подхода можно учесть и ограничения на моменты начала и завершения проектов а также запрещения на выполнение проекта в определенных периодах. Для этого достаточно оставить в транспортной сети только допустимые дуги (i, j) (проект i может выполняться в периоде j).

Пример 3.2. Пусть в задаче, рассмотренной в примере 3.1 имеются дополнительные ограничения. А именно, проект 3 может начинаться только со второго периода, а проект 1 должен завершаться не позже третьего периода. График финансирования имеет вид: $N_1 = 6$, $N_2 = 9$, $N_3 = 10$, $N_4 = 3$. Так как матрица затрат (таблица 3.3) не изменилась, то решаем транспортную задачу исключив из сети дугу (3, 1), так как проект 3 не может выполняться в первом периоде, и дугу (1, 4), так как проект 1 должен завершиться не позже третьего периода. Оптимальное решение задачи приведено на рис.3.3.

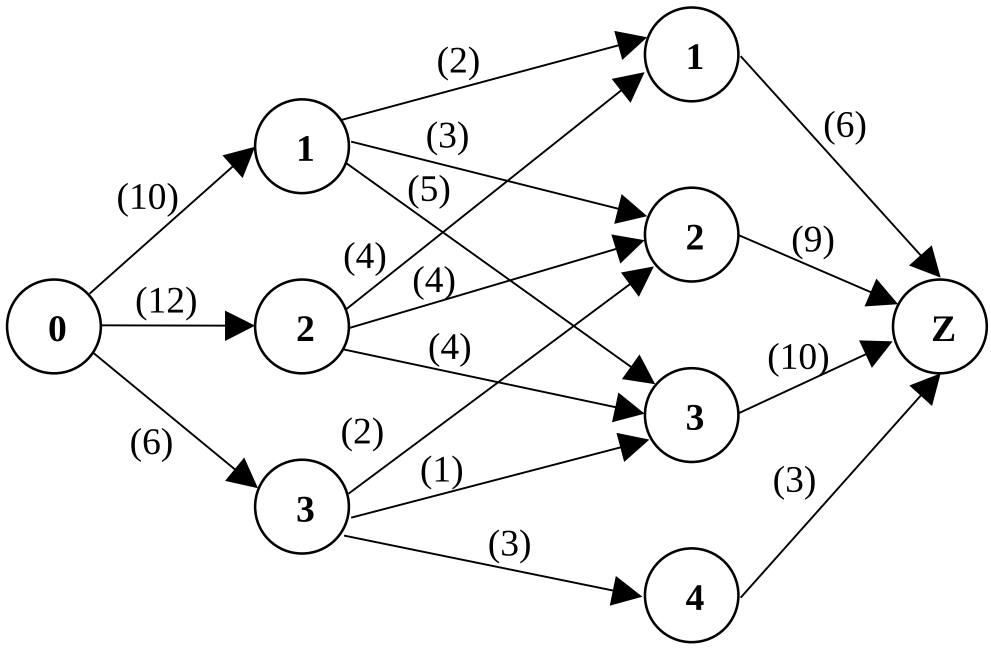


Рис.3.3.

Имеем величину оценки снизу $C = 9 + 12 + 6^2/_3 = 27^2/_3$, или 28. Так как первый проект завершается в третьем периоде, второй также в третьем, а третий - в четвертом, то величина упущенной выгоды $F = 3{\cdot}3 +$

$4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 29$. Погрешность полученного решения составляет 29 - 28 = 1. Покажем, что полученное решение является оптимальным. Для этого заметим, что первый проект не может быть завершен во втором периоде, поскольку в этом случае в третьем периоде образуется избыток финансовых ресурсов. Третий проект может завершиться в третьем периоде, но тогда второй проект завершится в четвертом периоде, что приведет к росту упущенной выгоды на две единицы.

На практике часто встречаются задачи, в которых задан срок завершения проекта, при превышении которого возникают потери. В этом случае выражение для упущенной выгоды принимает вид

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(t_i - D_i\right) 1\left[t_i - D_i\right], \tag{3.9}$$

где $D_i$ - желательный срок завершения i-го проекта, $1[x] = 1$, если $t_i > D_i$ и 0 в противном случае. Для того, чтобы сформулировать оценочную задачу для этого случая определяем числа $d_{ik}$ по аналогии с вышеописанным случаем, принимая за начальный период $(D_i + 1)$, то есть $d_{ik}=0$ если $k \le D_i$ и

$$d_{ik} = \left\lceil \frac{k + \tau_i - D_i - 1}{\tau_i} \right\rceil,$$

если $k > Di$. В этом случае, если $t_i > D_i$, то

$$t_i - D_i \ge \sum_{k > D_i} \frac{x_{ik} d_{ik}}{a_i}.$$

Доказательство этого факта проводится по аналогии с доказательством леммы 3.1.

Таким образом мы получаем оценочную задачу (3.6) - (3.8), решение которой дает приближенное решение исходной задачи с оцениваемой погрешностью.

Пример 3.3. Примем, что все $a_i = 1$. В этом случае объем финансирования проекта $w_i$ совпадает с минимальной продолжительностью его реализации $\tau_i$. Пусть имеются четыре проекта, данные о которых приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4.

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $D_i$ | 3 | 4 | 3 | 2 |
| $c_i$ | 3 | 4 | 2 | 1 |

Пусть $N_k = 1$, $k = \overline{1, 8}$.

Таблица коэффициентов $c_{ij}$ оценочной транспортной задачи приведена ниже.

Таблица 3.5.

| **i \ k** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | **<u>0</u>** | 3 | **<u>3</u>** | 6 | 6 | 9 |
| **2** | 0 | **<u>0</u>** | 0 | **<u>0</u>** | 4 | 4 | **<u>4</u>** | 8 |
| **3** | **<u>0</u>** | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | **<u>2</u>** | 3 | **<u>3</u>** |

Оптимальное решение оценочной задачи выделено жирным шрифтом с подчеркиванием. Имеем C = 12, а величина упущенной выгоды для соответствующего допустимого решения F = 24. Действительно, $t_1 = 5$, $t_2 = 7$, $t_3 = 1$, $t_4 = 8$ и следовательно

$$F = 3(t_1 - 3) + 4(t_2 - 4) + 1\cdot( t_4 - 2) = 24.$$

Разобьем множество всех решений на два подмножества. В первом проект 2 завершается не раньше 7-го периода, а во втором - не позже 6-го периода. Рассмотрим первое подмножество. Так как проект 2 завершается не раньше 7-го периода, то в оптимальном решении транспортной задачи мы можем все работы по проекту, выполняемые во втором и четвертом периодах передвинуть на более поздние периоды, освобождая место для других проектов. Получим решение, приведенное в таблице 3.6.

Таблица 3.6.

| i \ k | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | <u>**0**</u> | <u>**0**</u> | 3 | 3 | 6 | 6 | 9 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | <u>**4**</u> | <u>**4**</u> | <u>**4**</u> | 8 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | <u>**2**</u> | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **4** | <u>**0**</u> | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | <u>**3**</u> |

Для этого решения C = 17, F = 20.

Для второго подмножества клетки (2, 7) и (2, 8) запрещены. Оптимальное решение транспортной задачи приведено ниже.

Таблица 3.7.

| i \ k | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | <u>**0**</u> | 0 | 3 | <u>**3**</u> | 6 | 6 | 9 |
| **2** | 0 | 0 | <u>**0**</u> | <u>**0**</u> | 4 | <u>**4**</u> | $\infty$ | $\infty$ |
| **3** | <u>**0**</u> | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | <u>**3**</u> | <u>**3**</u> |

Имеем C = 13, F = 20.

Выбираем второе подмножество с меньшей оценкой. Это подмножество также разбиваем на два. В первом проект 2 завершается точно в 6-ом периоде, а во втором - не позже 5-го периода. Оптимальное решение оценочной задачи для первого подмножества приведено в таблице 3.8, а для второго - в таблице 3.9.

Таблица 3.8.

| k / i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **0** | **0** | 0 | 3 | 3 | 6 | 6 | 9 |
| **2** | 0 | 0 | **0** | 0 | **4** | **4** | ∞ | ∞ |
| **3** | 0 | 0 | 0 | **2** | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | **3** | **3** |

Имеем C = 16 и F = 16, то есть полученное решение является оптимальным в данном подмножестве.

Таблица 3.9.

| k / i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 3 | **3** | **6** | 6 | 9 |
| **2** | 0 | **0** | **0** | **0** | 4 | ∞ | ∞ | ∞ |
| **3** | **0** | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | **3** | **3** |

Имеем C = 15 и F = 15, то есть полученное решение является оптимальным в этом подмножестве.

Окончательно получаем оптимальное решение, соответствующее решению транспортной задачи, приведенному в таблице 3.9 со значением упущенной выгоды F = 15. Таким образом в данном случае нам пришлось решить пять задач транспортного типа. Заметим, сто число возможных вариантов, определяемое числом перестановок четырех проектов равно 24. С ростом числа проектов число возможных вариантов растет как $n!$ и преимущества описанного метода проявляются в бóльшей степени.

В тех случаях, когда проекты направлены на достижение различных целей в качестве критерия оптимальности распределения финансовых ресурсов целесообразно взять

$$F = \max_i c_i\left(t_i - D_i\right), \tag{3.10}$$

что соответствует минимизации максимальной упущенной выгоды. Эта задача легко сводится к параметрической транспортной задаче. В качестве параметра выступает величина критерия F. Дадим описание алгоритма.

Пусть задана величина F (на первом шаге берем F = 0). В этом случае из условия

$$c_i(t_i - D_i) \le F$$

получаем

$$t_i \le b_i = \frac{F + c_i D_i}{c_i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.11}$$

Оставляем в транспортной сети только дуги (i, j), такие что $j \le b_i$ и определяем максимальный поток в сети при ограничении

$$\sum_{k=1}^{b_i} x_{ik} \le w_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.12}$$

Если этот поток насыщает все входные дуги, то есть $\sum_{k=1}^{b_i} x_{ik} = w_i$ для всех i, то получено оптимальное решение задачи. В противном случае увеличиваем F до такой величины, при которой в сети появляется хотя бы одна новая дуга. Очевидно, что за конечное число шагов будет получено оптимальное решение задачи.

<u>Пример 3.4</u>. Решим задачу, рассмотренную в примере 3.3 для критерия (3.10). Заметим, что величина F должна быть по крайней мере

такой, при которой в любую вершину j идет хотя бы одна дуга. Для вершины 8 имеем

$$\min c_i(8 - D_i) \leq F$$

или

$$\min (15, 16, 10, 6) \leq F.$$

Берем F = 6. В таблице 3.10 знаком (∞) указаны запрещенные клетки. Определяем поток максимальной величины в соответствующей транспортной сети. Единичные потоки по дугам отмечены в таблице 3.10.

Таблица 3.10.

| i \ k | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | | | | ∞ | ∞ | ∞ |
| **2** | | | 1 | 1 | 1 | ∞ | ∞ | ∞ |
| **3** | | | | | | 1 | ∞ | ∞ |
| **4** | | | | | | | 1 | 1 |

Максимальный поток равен 8, то есть все проекты выполняются.

Таким образом мы получили оптимальное решение со значением F = 6. Интересно отметить, что полученное решение имеет суммарную величину упущенной выгоды, равную 16, что весьма близко к оптимальной величине F = 15 (для оптимального решения по критерию суммы упущенной выгоды максимум упущенной выгоды имеет проект 2, и этот максимум равен 8, что больше, чем в полученном выше решении.

Во многих случаях проекты, входящие в программу развития отрасли, зависимы между собой в том смысле, что для начала проекта необходимо, чтобы были завершены другие проекты. Такие зависимости удобно задавать в виде сетевого графика (графа), вершины которого соответствуют проектам, а дуги отражают зависимости между проектами. Наличие дуги (i, j) в сетевом графике означает, что проект j нельзя начинать, пока не завершен проект i. Рассмотрим задачу минимизации упущенной выгоды с учетом зависимостей между проектами. Дадим оценку снизу величины упущенной выгоды. Для этого определим ранние сроки завершения проектов $t_i^p$, применяя известные алгоритмы расчета сетевых графиков [16]. Очевидно, что величина упущенной выгоды

$$F \geq \sum_{i=1}^{n} c_i t_i^p . \qquad (3.13)$$

На основе оценки (3.13) можно предложить метод ветвей и границ для решения задачи. Примем, что проекты имеют номера такие, что

$$\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{w_n}.$$

Напомним, что отношение $\frac{c_i}{w_i}$ характеризует в определенной степени приоритетность проектов по критерию упущенной выгоды. Далее рассматриваем проекты, которые можно начинать, и финансируем их в порядке приоритетности. В силу ограниченности финансов может возникнуть ситуация, когда очередной проект не может быть обеспечен финансированием. Такую ситуацию назовем конфликтной. При возникновении конфликтной ситуации рассматриваем возможные варианты разрешения конфликта. Для каждого такого варианта определяем оценку снизу по формуле (3.13). Согласно методу ветвей и границ, для дальнейшего развития выбирается вариант с минимальной оценкой. Дадим иллюстрацию алгоритма на примере.

Пример3.5. Пусть сетевой график из четырех проектов имеет вид, показанный на рис. 3.4. В вершинах указаны номера проектов (верхнее число) и минимальные продолжительности (нижнее число) Данные о проектах приведены в таблице 3.11.

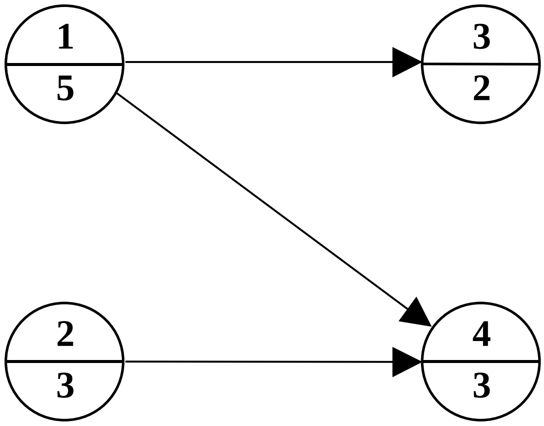


Рис. 3.4.

Таблица 3.11.

| **i** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 20 | 18 | 10 | 12 |
| $a_i$ | 4 | 6 | 5 | 4 |
| $t_i$ | 5 | 3 | 2 | 3 |
| $c_i$ | 12 | 9 | 4 | 2 |

Пусть уровень финансирования программы N = 6 в каждый период. Определим оценку снизу величины упущенной выгоды. Для этого определим ранние времена завершения проектов:

$$t_1^p = 5, \quad t_2^p = 3, \quad t_3^p = 7, \quad t_4^p = 8.$$

Имеем

$$F = 12 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 131.$$

1 шаг. Проекты 1 и 2 не могут финансироваться с максимальным уровнем, так как $a_1 + a_2 = 10 > 6$. Возникла конфликтная ситуация. Рассматриваем два варианта.

*Вариант 1.* Проект 1 финансируется при максимальном уровне финансирования. имеем финансирование первого проекта на уровне $u_1 = 4$, а второго - на остаточном уровне $u_2 = 2$. Через 5 дней проект 1 завершается. К этому моменту остается невыполненным проект 2 в объеме $w_2(5) = 18 - 2 \cdot 5 = 8$ с минимальной продолжительностью $\tau_2(5) = {}^8/_6 = 1^1/_3$. Имеем для первого варианта

$$t_1^p = 5, \quad t_2^p = 5 + 1^1/_3 = 6^1/_3, \quad t_3^p = 5 + 2 = 7, \quad t_4^p = 9^1/_3.$$

Оценка величины упущенной выгоды составит

$$F(1) = 12 \cdot 5 + 9 \cdot 6^1/_3 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 9^1/_3 = 163^2/_3.$$

*Вариант 2.* Проект 2 финансируется на максимальном уровне, то есть $u_2 = 6$, $u_1 = 0$. Через 3 дня проект 2 завершится. Имеем для второго варианта

$$t_1^p = 3 + 5 = 8, \quad t_2^p = 3, \quad t_3^p = 8 + 2 = 10, \quad t_4^p = 8 + 3 = 11,$$

$$F(2) = 12 \cdot 8 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 11 = 185.$$

Выбираем для дальнейшего развития вариант 1, имеющий меньшую оценку.

2 шаг. Поскольку проект 1 выполнен, то можно выполнять два проекта - второй и третий. В данном случае также возникает конфликтная ситуация. Рассматриваем два варианта.

*Вариант 1.* Проект 2 выполняется при максимальном уровне финансирования, то есть $u_2(5) = 6$, $u_3(5) = 0$. Проект завершается в момент $t = 6^1/_3$. Имеем

$$t_2^p = 6^1/_3, \quad t_3^p = 6^1/_3 + 2 = 8^1/_3, \quad t_4^p = 6^1/_3 + 3 = 9^1/_3,$$

$$F(1; 2) = 60 + 9 \cdot 6^1/_3 + 4 \cdot 8^1/_3 + 2 \cdot 9^1/_3 = 169.$$

*Вариант 2.* Проект 3 выполняется на максимальном уровне финансирования, то есть $u_3(5) = 5$, $u_2(5) = 1$. Первым завершается проект 3 (через два дня). За это время проект 2 выполнен в объеме 2, и остался невыполненным объем 6, требующий одного дня для завершения. Имеем

$$t_2^p = 7 + 1 = 8, \quad t_3^p = 7, \quad t_4^p = 8 + 3 = 11,$$

$$F(1;\,3) = 60 + 9 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 182.$$

Выберем вариант 1 с минимальной оценкой $F(1;\,2) = 169$.

<u>3 шаг</u>. Можно выполнять третий и четвертый проекты. Так как $a_3 + a_4 > 6$, то возникает конфликтная ситуация. Рассматриваем два варианта.

*Вариант 1.* Проект 3 выполняется при максимальном уровне финансирования, то есть $u_3(6^1/_3) = 5$, $u_4(6^1/_3) = 1$. Проект 3 завершается в момент $t_3 = 8^1/_3$. К этому моменту остался невыполненным проект 4 в объеме 12 - 2 = 10, что требует 2,5 дня. Имеем:

$$t_1^p = 5, \quad t_2^p = 6^1/_3, \quad t_3^p = 8^1/_3, \quad t_4^p = 10^5/_6,$$

$$F(1;\,2;\,3) = 60 + 57 + 33^1/_3 + 21^2/_3 = 172.$$

*Вариант 2.* Проект 4 выполняется при максимальном уровне финансирования, то есть $u_4(6^1/_3) = 4$, $u_3(6^1/_3) = 2$. Проект 4 завершается через 3 дня. К этому моменту остался невыполненным проект 3 в объеме $10 - 2 \cdot 3 = 4$, что требует еще 0,8 дня. Имеем

$$t_1^p = 5, \quad t_2^p = 6^1/_3, \quad t_3^p = 10^2/_{15}, \quad t_4^p = 9^1/_3,$$

$$F(1;\,2;\,4) = 60 + 57 + 4 \cdot 10^2/_{15} + 2 \cdot 9^1/_3 = 176^1/_5.$$

Сравнивая получаем, что лучшим является вариант 1.

Таким образом мы получили оптимальный вариант, согласно которому проекты завершаются в порядке их приоритетов с величиной упущенной выгоды $F = 172$.

Заметим, что вообще говоря все проекты можно завершить за 10 дней, если на третьем шаге взять уровни финансирования третьего и четвертого проектов соответственно

$$u_3 = \frac{10 \cdot 3}{11} = 2\,{}^{8}\!/_{11};\ u_4 = \frac{12 \cdot 3}{11} = 3\,{}^{3}\!/_{11}.$$

Однако, это не является оптимальным решением, поскольку величина упущенной выгоды в этом случае составит

$$F = 117 + 60 = 177 > 176\,{}^{1}\!/_{5}.$$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные модели и механизмы дополняют комплекс моделей, описанных в работе [8]. В совокупности они образуют достаточный набор средств, который может послужить основой создания систем поддержки принятия решений при разработке и реализации программ развития отрасли.

Безусловно, внедрение систем поддержки принятия решений в практику управления отраслью требует серьезной подготовительной работы по разработке соответствующих методических материалов, созданию программных продуктов, обучению специалистов. Но эта работа окупается за счет существенного роста эффективности принимаемых решений.

Более подробно некоторые из рассмотренных здесь и в [8] моделей описаны в работах [1 - 14].

# ЛИТЕРАТУРА


1. *Бараташвили Е.Ш., Джавахадзе Г.С.* «Капитальное строительство и рыночная экономика» - Тбилиси, «Зедаше», 1992 г.
2. *Бараташвили Е.Ш., Джавахадзе Г.С.* «Основы маркетинга» методические рекомендации - Тбилиси, «Зедаше», 1993 г.
3. *Джавахадзе Г.С.* «Вопросы моделирования капитальных вложений в промышленность строительных материалов», I Республиканская научно-техническая конференция по экономике, технике-технологии, математике и ВТ. Тезисы докладов - Тбилиси, 1993 г.
4. *Бараташвили Е.Ш., Джавахадзе Г.С.* «Проблемы производственного риска в строительстве», I Республиканская научно-техническая конференция по экономике, технике-технологии, математике и ВТ. Тезисы докладов - Тбилиси, 1993 г.
5. *Бараташвили Е.Ш., Мествиришвили Г.А., Джавахадзе Г.С.* «Основы Менеджмента» - Тбилиси, «Зедаше», 1993 г.
6. *Джавахадзе Г.С.* «Менеджер и система экономических интересов», Научно-практическая конференция «Проблемы экономического развития Грузии в процессе формирования рыночных отношений». Тезисы докладов - Тбилиси, 1994 г.
7. *Джавахадзе Г.С.* «Маркетинг, как основа коммерческой деятельности производств» - Тбилиси, «Техинформ» ОИ, 1995 г.
8. *Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С.* «Экономико-математические модели управления производством строительных материалов» (препринт) - Москва, Институт проблем управления РАН,1996 г.

9. *Джавахадзе Г.С.* «Задачи оптимальной специализации предприятий» - Тбилиси, Инженерная Академия Грузии, GEN, №1, 1996 г.

10. *Бараташвили Е.Ш., Джавахадзе Г.С.* «Управление качества и ассортимента продукции производства строительных материалов на основе маркетинга» - Тбилиси, «Моамбе» Грузинской Академии наук Бизнеса, № 2 - 3, 1997 г.

11. *Джавахадзе Г.С.* «Некоторые модели специализации строительного производства», Международная научно-практическая конференция «Управление большими системами» - Москва, 1997 г.

12. *Джавахадзе Г.С.* «Задачи выбора оптимального стандартного набора видов продукции» - Тбилиси, Инженерная Академия Грузии, GEN, №3, 1997 г.

13. *Джавахадзе Г.С.* «Модель оптимального планирования маркетинговых исследований», XL Юбилейная научная конференция Московского физико-технического института. Тезисы докладов - Долгопрудный, 1997 г.

14. *Бараташвили Е.Ш., Мествиришвили Г.А., Джавахадзе Г.С.* «Основы Менеджмента» 2-ое переработанное издание - Тбилиси, Тбилисский Государственный Университет, 1997 г.

15. *Бурков В.* «Основы математической теории активных систем» - Москва, «Наука», 1977 г.

16. *Бурков В., Горгидзе И., Ловецкий С.* «Прикладные задачи теории графов» - Тбилиси, Мецниереба, 1974 г.

17. *Бурков В., Ириков В.* «Модели и методы управления организационными системами» - Москва, Наука, 1994 г.

18. *Бурков В., Квон О, Цитович Л.* «Модели и методы мультипроектного управления» (Препринт) - Москва, Институт проблем управления РАН, 1996 г.

19. *Котлер Ф.* «Основы маркетинга» - Санкт-Петербург, АО «Коруна», АОЗТ «Литера плюс», 1994 г.

20. *Бурков В.Н., Новиков Д.* «Как управлять проектами» - Москва, Синтег-Гео, 1997 г.

21. *Хомяченко О.* «Технология маркетинга на фирме. Экономический аспект» - Москва, Московский физико-технический институт, 1996 г.