

ЭКОНОМЕТРИКА

учебник

Под общей редакцией профессора В. Б. Уткина

$$P_j^* = \frac{n_j}{n} \quad t_{b_0} = b_0^* \frac{\sqrt{N-2}}{\sigma_0^*}$$
$$m_{y_i}^* = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \gamma = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{n}} \Phi_T^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{n}} u_{\alpha}$$
$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad Q = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \eta(x_i)]^2$$
$$D[P^*] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum D[X_i] = \frac{P(1-P)}{n}$$



Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебник

2-е издание

Под редакцией
профессора В. Б. Уткина

Москва, 2012

УДК 330.43(075.8)

ББК 65в6я73

Э40

Авторы:

К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор (глава 11, приложения 2, 3);

В. Н. Башлыков — кандидат технических наук, доцент (главы 1–6, 8, 10, приложение 1);

Н. А. Брызгалов — кандидат технических наук, доцент (введение, глава 7);

В. В. Мартынов — кандидат технических наук, доцент (главы 1–6, 8, 10);

В. Б. Уткин — кандидат технических наук, профессор (введение, глава 7, 11).

Глава 9 написана совместно всеми авторами.

Рецензенты:

В. А. Зотов — доктор физико-математических наук, профессор;

В. И. Бусов — доктор экономических наук, профессор.

Эконометрика: Учебник / Под ред. проф. В. Б. Уткина. —
Э40 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. — 564 с.

ISBN 978-5-394-01616-5

Учебник подготовлен при государственной поддержке ведущих научных школ. Грант № НШ 1907.2006.10.

Учебник содержит систематизированное изложение методологических основ эконометрики и написан на базе лекционных курсов, которые авторы преподавали в ряде вузов г. Москвы. В книге представлены важнейшие сведения по теории вероятностей (случайные события и величины; функции случайного аргумента) и математической статистике (общая характеристика статистических методов; методы статистической обработки результатов испытаний; статистическая проверка гипотез). В части “Методы эконометрики” содержится изложение методологии моделирования сложных экономических систем; методов дисперсионного, регрессионного и корреляционного анализа и основ применения метода экспертного оценивания. В учебник включены прикладные наработки авторов по рассматриваемой тематике, примеры и задания для самостоятельной работы.

Для студентов экономических специальностей вузов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников и специалистов по прикладной экономике, статистике и финансам.

УДК 330.43(075.8)

ББК 65в6я73

ISBN 978-5-394-01616-5

© Коллектив авторов, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	9
---------------	---

Часть I ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Случайные события.....	11
1.1. Предмет теории вероятностей.....	11
1.2. Основные понятия и определения.....	16
1.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий.....	20
1.3.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей.....	22
1.3.2. Классический способ определения вероятности.....	24
1.4. Понятие условной вероятности. Стохастическая зависимость случайных событий.....	25
1.5. Правила действий с вероятностями.....	27
1.6. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли.....	32
1.7. Формула полной вероятности.....	35
1.8. Формула Байеса.....	36
<i>Вопросы для самопроверки.....</i>	<i>39</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>40</i>
2. Случайные величины.....	44
2.1. Случайные величины и их классификация.....	44
2.2. Закон распределения случайной величины и формы его представления.....	45
2.2.1. Понятие распределения случайной величины.....	45
2.2.2. Функция вероятности.....	46
2.2.3. Функция распределения.....	47
2.2.4. Плотность распределения.....	53

2.3.	Числовые характеристики скалярных случайных величин.....	56
2.3.1.	Характеристики положения.....	56
2.3.2.	Характеристики рассеивания.....	61
2.3.3.	Моменты случайной величины.....	64
2.4.	Основные теоретические распределения скалярных случайных величин	67
2.5.	Распределение случайного вектора.....	82
2.6.	Частные и условные распределения компонент случайного вектора	86
2.6.1.	Частные распределения	86
2.6.2.	Условные распределения. Стохастическая зависимость случайных величин.....	90
2.7.	Числовые характеристики векторных случайных величин.....	95
2.8.	Нормальное распределение двумерного случайного вектора	99
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	102
	<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	102
3.	Функции случайных аргументов.....	106
3.1.	Общая характеристика задач исследования функций случайных аргументов	106
3.2.	Теоремы о числовых характеристиках случайных величин.....	107
3.3.	Определение числовых характеристик функций случайных аргументов.....	112
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	118
	<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	118

Часть II МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4.	Статистические методы оценивания характеристик продукции.....	120
4.1.	Общая характеристика статистических методов оценивания характеристик продукции и результатов ее применения	120
4.2.	Общая схема эксперимента.....	123
4.3.	Сущность выборочного метода	125

4.4.	Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме.....	131
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	136
	<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	137
5.	Методы статистической обработки результатов испытаний	138
5.1.	Постановка задачи оценивания вероятностных характеристик случайных величин.....	138
5.2.	Основные требования к оценкам.....	139
5.3.	Оценивание законов распределения случайных величин.....	143
5.4.	Точечное оценивание числовых характеристик случайных переменных	150
5.4.1.	Оценивание вероятности наступления случайного события	150
5.4.2.	Оценивание математического ожидания случайной величины.....	152
5.4.3.	Оценивание дисперсии и стандартного отклонения случайной величины.....	156
5.4.4.	Определение числовых характеристик случайных величин при большом объеме измерений.....	158
5.5.	Интервальное оценивание числовых характеристик случайных величин.....	158
5.5.1.	Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала	158
5.5.2.	Оценивание вероятности наступления случайного события	163
5.5.3.	Оценивание математического ожидания.....	168
5.5.4.	Оценивание стандартного отклонения	173
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	177
	<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	179
6.	Статистическая проверка гипотез	182
6.1.	Сущность проверки статистических гипотез.....	182
6.2.	Методы проверки гипотез о законах распределения.....	190
6.2.1.	Постановка задачи.....	190
6.2.2.	Проверка гипотез о законе распределения	193

6.3.	Методы проверки гипотез о параметрах законов распределения.....	202
6.3.1.	Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий.....	202
6.3.2.	Проверка гипотез о равенстве дисперсий.....	208
6.4.	Проверка гипотез методом последовательного анализа	213
6.4.1.	Сущность метода последовательного анализа.....	213
6.4.2.	Проверка гипотезы о вероятности наступления события	216
6.4.3.	Проверка гипотезы о математическом ожидании.....	218
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	<i>220</i>
	<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>221</i>

Часть III МЕТОДЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

7.	Методология моделирования сложных экономических систем.....	226
7.1.	Методы моделирования экономических систем.....	226
7.1.1.	Математическая модель экономической системы.....	228
7.1.2.	Классификация математических моделей ..	230
7.2.	Имитационные модели экономических систем.....	242
7.2.1.	Методологические основы применения метода имитационного моделирования.....	242
7.2.2.	Классификация имитационных моделей	249
7.3.	Технология моделирования случайных факторов.....	259
7.3.1.	Генерация псевдослучайных чисел.....	259
7.3.2.	Моделирование случайных событий.....	267
7.3.3.	Моделирование случайных величин.....	273
7.3.4.	Моделирование случайных векторов	282
7.4.	Основы организации имитационного моделирования.....	289
7.4.1.	Этапы имитационного моделирования	289
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	<i>296</i>

8.	Методы статистического анализа	
	результатов испытаний	297
8.1.	Общая характеристика методов статистического анализа результатов испытаний	297
8.2.	Основы дисперсионного анализа	299
8.2.1.	Сущность дисперсионного анализа	299
8.2.2.	Однофакторный дисперсионный анализ	301
8.2.3.	Проверка существенности влияния фактора в однофакторном дисперсионном анализе	305
8.2.4.	Выявление уровня фактора, влияющего на результаты испытаний.....	309
8.2.5.	Примеры однофакторного дисперсионного анализа	312
8.2.6.	Особенности проведения двухфакторного дисперсионного анализа	316
	<i>Вопросы для самопроверки</i>	321
	<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	321
9.	Основы регрессионного анализа	323
9.1.	Сущность регрессионного анализа	323
9.2.	Задача регрессионного анализа	326
9.3.	Метод наименьших квадратов.....	328
9.4.	Предпосылки регрессионного анализа	336
9.5.	Статистический анализ уравнения регрессии	338
9.6.	Спецификация регрессионной модели	365
9.7.	Регрессионные модели с гетероскедастичными остатками.....	369
9.8.	Метод взвешенных наименьших квадратов (МВНК)	379
9.9.	Нелинейные регрессионные модели и их линеаризация.....	383
9.9.1.	Логарифмические модели.....	384
9.9.2.	Полулогарифмические модели	387
9.9.3.	Логлинейная модель.....	388
9.9.4.	Линейно-логарифмическая модель.....	389
9.9.5.	Обратная модель	390
9.9.6.	Степенная модель	391
9.9.7.	Показательная модель	392
9.10.	Оценки коэффициентов нелинейных регрессионных моделей	393

9.10.1. Оценки коэффициентов параболы второго порядка.....	393
9.10.2. Определение коэффициентов функций, отличных от полинома.....	394
<i>Вопросы для самопроверки</i>	397
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	398
10. Основы корреляционного анализа	399
10.1. Сущность корреляционного анализа	399
10.2. Классификация методов корреляционного анализа	401
10.3. Однофакторный корреляционный анализ	401
10.4. Анализ тесноты связи	405
10.5. Многофакторный корреляционный анализ	407
10.6. Автокорреляция.....	413
<i>Вопросы для самопроверки</i>	416
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	416
11. Применение метода экспертного оценивания в эконометрических исследованиях	419
11.1. Общая характеристика метода экспертных оценок	419
11.2. Классификация методов получения экспертной информации	427
11.3. Типы шкал и методы моделирования предпочтений экспертов	432
11.4. Методы обработки и анализа экспертных оценок.....	447
11.4.1. Оценка согласованности мнений экспертов ...	448
11.4.2. Обобщение мнений экспертов.....	463
11.4.3. Выделение подгрупп экспертов с близкими мнениями.....	465
11.4.4. Оценка и учет компетентности экспертов...	468
<i>Вопросы для самопроверки</i>	472
Литература	473
Приложение 1. Список таблиц	478
Приложение 2. Система основных финансово-экономических показателей	514
Приложение 3. Основные математические и экономические термины и определения	520

ВВЕДЕНИЕ

В 30-х гг. XX в. сформировалось новое направление в экономической науке, возникшее в результате взаимодействия и взаимообусловленности трех групп методов: экономических, статистических и математических. Именно междисциплинарный подход к изучению экономических явлений привел к созданию такой научной и учебной дисциплины, как эконометрика.

Под эконометрикой понимают совокупность экономических и математико-статистических методов, дающих возможность выявлять закономерности и связи в экономических процессах и явлениях.

Дальнейшему развитию эконометрики способствовало стремительное развитие вычислительной техники с высокими технологическими характеристиками, что позволило сделать доступными для массового пользователя такие статистические методы, как многофакторный дисперсионный, регрессионный и корреляционный анализ, проверку непараметрических гипотез, анализ временных рядов для решения исследовательских и практических задач, составляющих предмет эконометрики.

По современным представлениям фундамент экономического образования составляют макро- и микроэкономика и эконометрика, тогда как остальные дисциплины Государственного образовательного стандарта играют роль надстройки. В свою очередь, статистические и математические методы, используемые в экономических исследованиях, составляют ядро эконометрики.

Учебник написан на основе методологии системного анализа и структурно состоит из введения, трех частей и приложений.

В первой части содержатся основные сведения из теории вероятностей (3 главы: случайные события, случайные величины, функции случайных аргументов).

Вторая часть (4 главы) посвящена вопросам математической статистики: общей характеристике статистических методов; основам статистической обработки результатов испытаний, прежде всего – точечному и интервальному оцениванию числовых характеристик случайных величин; методам статистической проверки параметрических и непараметрических гипотез.

В третьей части (5 глав) изложены методы эконометрики. Глава 7 содержит методологию моделирования сложных экономических систем. Особо выделены метод имитационного моделирования и технология моделирования случайных факторов различных типов (случайных событий; величин; векторов). В главах 8, 9, 10 представлены особенности применения методов одно- и многофакторного дисперсионного, регрессионного (в том числе с использованием нелинейных моделей) и корреляционного анализа, соответственно. Глава 11 содержит сведения об использовании метода экспертного оценивания при анализе результатов статистического исследования.

В приложениях приведены статистические таблицы, необходимые для практической реализации изложенных методов.

Эффективная работа с учебником возможна при наличии у читателя прочных знаний в объеме программ вузов по высшей математике, экономической теории и основам математического моделирования систем.

Материалы настоящего учебника подготовлены авторами на основе отечественных и зарубежных источников с расширением прикладных аспектов за счет собственных научно-практических разработок. Авторы весьма признательны рецензентам книги и всем, кто ознакомился с ее содержанием на этапах подготовки рукописи к печати, за ценные замечания и предложения, которые были с благодарностью приняты.

Часть I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей — математическая наука, занимающаяся изучением закономерностей в случайных явлениях массового характера.

Под случайным принято понимать явление, которое при многократном наблюдении (воспроизведении одного и того же комплекса условий проведения эксперимента) протекает каждый раз по-разному.

Например, в 1827 г. ботаник Р. Броун открыл явление, которое впоследствии было названо броуновским движением. Наблюдая под микроскопом частицы пыльцы, он заметил, что они находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить. Вскоре было обнаружено, что это движение — общее свойство любых мелких частиц, взвешенных в жидкости. Интенсивность движения зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц. Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории других частиц, так что близкие частицы очень быстро становятся удаленными.

Приведем другой пример. Производится стрельба из артиллерийского орудия. С помощью методов баллистики при определенных исходных данных (начальной скорости движения снаряда \bar{V}_0 , угле бросания Θ_0 , баллистическом коэффициенте

снаряда C) можно рассчитать теоретическую траекторию движения (штрихпунктирная линия на рис. 1.1).

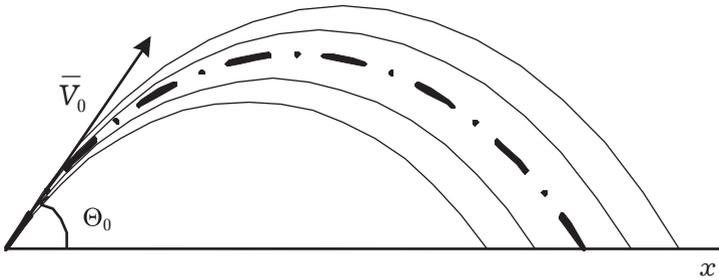


Рис. 1.1

При реальных стрельбах траектория полета каждого отдельного снаряда будет отклоняться от расчетной. При проведении нескольких выстрелов при одних и тех же исходных данных (V_0, Θ_0, C) будем наблюдать рассеивание траектории полета снарядов относительно расчетной. Это обусловлено действием большого числа второстепенных факторов, влияющих на траекторию полета, но не заданных в числе исходных данных. К таким факторам следует отнести: ошибки при изготовлении снаряда, отклонение веса снаряда от номинального значения, неоднозначность структуры заряда, ошибки в установке угла наклона ствола орудия, метеорологические условия и т. д.

Основные факторы, учитываемые при наблюдении случайного явления, определяют его протекание в общих чертах, и от наблюдения (опыта) к наблюдению не меняются. Второстепенные факторы вызывают различия в их результатах.

Вполне очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором точно и полно учтены факторы, определяющие явление. Невозможно достигнуть того, чтобы при многократных наблюдениях результаты полностью и в точности совпадали.

Иногда при решении практических задач случайными отклонениями пренебрегают, рассматривая не само реальное явление, а его упрощенную схему (модель), полагая, что в данных условиях наблюдения явление протекает вполне определенным образом.

При этом из всей совокупности факторов, влияющих на явление, выделяются основные, наиболее существенные. Влиянием остальных, второстепенных, факторов просто пренебрегают.

Данная схема изучения явлений часто применяется в механике, технике, психологии, экономике и других отраслях знаний. При таком подходе к изучению явлений выявляется основная закономерность, присущая данному явлению и дающая возможность предсказать результат наблюдения при определенных исходных данных. По мере развития науки число учитываемых факторов увеличивается, явление исследуется подробнее, научный прогноз становится точнее. Описанная схема изучения явлений получила название классической схемы, так называемых точных наук.

Однако при решении многих практических задач классическая схема “точных наук” неприменима. Существуют задачи, результат решения которых зависит от достаточно большого числа факторов, зарегистрировать и учесть которые практически невозможно.

Например, производится обстрел объекта из артиллерийского орудия с целью его поражения. Как было отмечено выше, при стрельбе из артиллерийского орудия имеет место рассеивание точек падения снарядов. Если размеры объекта существенно превышают размеры зоны рассеивания, то этим рассеиванием можно пренебречь, поскольку выпущенный снаряд попадет в цель. Если размер объекта меньше размеров зоны рассеивания, то некоторая часть снарядов в цель не попадет. В этих условиях приходится решать задачи, например, по определению среднего числа снарядов, попавших в цель, требуемого числа снарядов для надежного поражения цели и др. При решении таких задач классическая схема “точных наук” оказывается недостаточной. Эти задачи связаны со случайной природой рассеивания снарядов, и при их решении случайностью этого явления пренебрегать нельзя. Необходимо изучить рассеивание снарядов как случайное явление с точки зрения присущих ему закономерностей. Надо исследовать закон распределения координат точек падения снарядов, выяснить источники, вызывающие рассеивание, и т. д.

Рассмотрим еще пример. Система автоматического управления функционирует в условиях непрерывно воздействующих помех. Действие помех приводит к отклонению управляемых параметров от расчетных значений. При исследовании процесса функционирования системы необходимо установить природу и структуру случайных возмущений, выяснить влияние конструктивных параметров системы на вид этой реакции и т. п.

Все подобные задачи, а число их в природе чрезвычайно велико, требуют изучения не только основных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и исключений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих результату наблюдений при заданных исходных данных элемент неопределенности.

С теоретической точки зрения второстепенные (случайные) факторы ничем не отличаются от основных (наиболее существенных). Точность решения задачи можно повышать за счет учета большого числа факторов, от самых существенных до самых ничтожных. Однако это может привести к тому, что решение поставленной задачи ввиду сложности и громоздкости будет практически неосуществимым и не будет представлять никакой ценности.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных факторов, определяющих явление в главных чертах, и второстепенных факторов, влияющих на явление в качестве возмущений. Элементы неопределенности, сложности, присущие случайным явлениям, требуют создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях. При многократных наблюдениях однородных случайных явлений обнаруживаются в них вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросать монету, то частота появления цифры (отношение числа бросаний, при которых появилась цифра, к общему числу бросаний) постепенно

стабилизируется, приближаясь к числу, равному 0,5. Такое же свойство “устойчивости частоты” обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее неопределенным (случайным).

Закономерности в случайных явлениях появляются всегда, когда имеют дело с массой однородных случайных явлений. Они оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, а средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже неслучайным.

Методы теории вероятностей приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний случайный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным (случайным).

Вероятностные методы не противопоставляют себя классическим методам “точных наук”, а являются их дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В зависимости от сложности случайного явления для его описания используют следующие понятия: *случайное событие*, *случайная величина*, *случайная функция* (рис. 1.2).



Рис. 1.2

Именно в такой последовательности и будем рассматривать закономерности в случайных явлениях.

1.2. Основные понятия и определения

Одним из фундаментальных понятий в теории вероятностей является испытание (эксперимент). Под испытанием понимают наблюдение того или иного явления при реализации определенного комплекса условий (наблюдение этого же явления в других условиях считается другим испытанием).

Если результат испытания фиксируется только как факт, то его называют событием.

Введем следующую формальную схему испытания (эксперимента) (рис. 1.3).

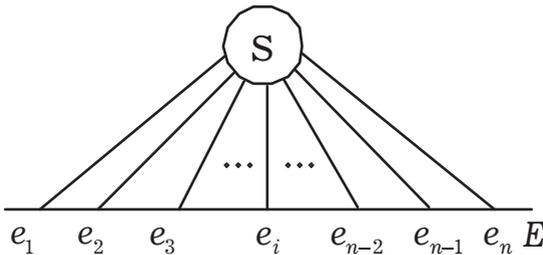


Рис. 1.3

S — комплекс условий эксперимента;

E — множество результатов эксперимента.

В одной реализации эксперимента может появиться один, и только один исход, который называют *элементарным событием* e_i . Множество всех исходов эксперимента E называют *пространством элементарных событий*. Оно вводится описательным путем.

Пример 1.1. Производится прием готовой продукции на предприятии. Элементарными событиями будут e_1 — исправное изделие не принято, e_2 — принятое изделие исправно, e_3 — принято исправным дефектное изделие. Множество ис-

ходов: e_1, e_2, e_3 образует пространство элементарных событий $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Группируя различным образом элементарные события, также будем получать события. Событие A — это подмножество пространства элементарных событий $A \subset E$.

В дальнейшем события будем обозначать прописными буквами начала латинского алфавита: A, B, C и т. д. или такими же буквами с цифровыми индексами.

Например, событие A — изделие принято (пример 1.2.) включает элементарные события e_2 — принятое изделие исправно и e_3 — принято исправным дефектное изделие:

$$A = \{e_2, e_3\}.$$

Пример 1.2. Производится обстрел m целей. Элементарные события: e_1 — ни одна цель не поражена ($e_1 = 0$); поражена одна цель ($e_2 = 1$); поражено две цели ($e_3 = 1$) и т. д. до $e_{m+1} = m$. В этом случае получаем пространство элементарных событий

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{m+1}\}.$$

Событие B — поражение не менее двух целей (пример 1.2.) включает элементарные события e_3, e_4, \dots, e_{m+1}

$$E = \{e_3, e_4, \dots, e_{m+1}\}.$$

Все множество событий, которое можно построить на пространстве элементарных событий, называют полем событий или σ — (сигма) — алгеброй.

Событие, которое наступает всякий раз при реализации комплекса условий, называют *достоверным*. Например, падение на землю монеты или кости при их подбрасывании и т. д.

Событие, которое никогда не наступает при реализации данного комплекса условий, называют *невозможным*. Например, процедура банкротства более m предприятий при диагностике m предприятий является событием невозможным.

В дальнейшем будем обозначать достоверные события буквой U , а невозможные — буквой V .

Событие, которое при реализации данного комплекса условий может как наступить, так и не наступить, называют *случайным*. Например, попадание в цель при одном выстреле, прием партии готовой продукции при контроле ее качества, отказ элемента системы в процессе ее функционирования в течение времени t и т. п.

Между различными событиями, принадлежащими одному и тому же пространству элементарных событий, могут быть установлены определенные соотношения и операции. Обычно для изображения событий используют логические диаграммы Эйлера-Венна (Венна).

Рассмотрим некоторые операции над событиями.

Произведением (пересечением) нескольких событий A_1, A_2, \dots, A_n называют событие

$$B = \prod_{i=1}^n A_i,$$

состоящее в совместном (одновременном или последовательном) их наступлении. Событие B включает те, и только те элементарные события, которые принадлежат одновременно и A_1 , и A_2 , и ..., и A_n . Диаграмма Венна для события $B = A_1 \cdot A_2$ показана на рис. 1.4 (заштрихованная область).

Например, событие, заключающееся в нормальном функционировании технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов (рис. 1.5), является произведением двух событий: A_1 — исправная работа первого элемента и A_2 — исправная работа второго элемента, причем оба эти события при испытании осуществляются одновременно. Примером произведения событий, наступающих при испытании последовательно, является поражение трех целей при их обстреле из орудия тремя снарядами.

Суммой (объединением) событий A_1, A_2, \dots, A_n называют событие C , состоящее в наступлении хотя бы одного из них и обозначаемое

$$C = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Событие C включает в себя все те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из событий A_i .

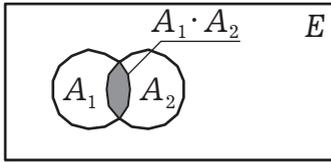


Рис. 1.4

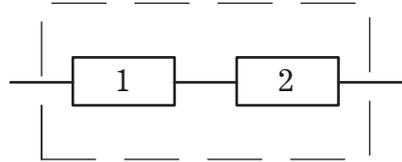


Рис. 1.5

В рассмотренном выше примере (см. рис. 1.5), событие C является суммой событий A_1 или A_2 , если C — отказ цепи, а A_1 и A_2 — отказ первого и второго элемента соответственно. Диаграмма Венна представлена на рис. 1.6 (заштрихованная область).

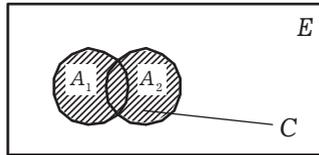


Рис. 1.6

События A_1 и A_2 называются *несовместными* в данном испытании, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_1 — получение одного попадания в цель и A_2 — получение двух попаданий (в той же серии выстрелов) являются несовместными. Символически признак несовместности событий A_1 и A_2 можно представить так:

$$A_1 \cdot A_2 = \emptyset.$$

У несовместных событий нет общих точек на диаграмме. Несколько событий называются *парно несовместными*, если никакие два из них в данном испытании не могут наступить вместе. Например, при стрельбе по цели из орудия двумя снарядами события A_0 — ни одного попадания в цель, A_1 — одно попадание в цель, A_2 — два попадания в цель попарно несовместны. Обычно попарно несовместные события называют просто *несовместными*.

Несколько событий A_1, A_2, \dots, A_n составляют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них, т. е., если

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = U. \quad (1.1)$$

Так, в рассматриваемом выше примере стрельбы по цели двумя снарядами события A_0, A_1, A_2 составляют полную группу несовместных событий. Диаграмма Венна для данного случая показана на рис. 1.7.

Два несовместных события, составляющих полную группу, называются *противоположными* (рис. 1.8).

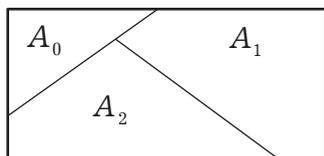


Рис. 1.7

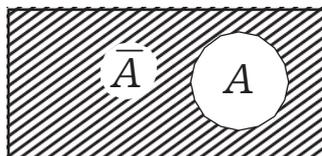


Рис. 1.8

Их обычно обозначают A и \bar{A} (не “А”). Например, отказ и нормальное функционирование элемента технической системы, попадание и промах при стрельбе одним снарядом по цели являются противоположными событиями.

Для противоположных событий справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A + \bar{A} &= U, \\ A \cdot \bar{A} &= V. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий

При обработке результатов испытаний принято считать наиболее информативной характеристикой того, как часто наступало некоторое событие A в серии испытаний, произведенных при одном и том же комплексе условий, отношение числа $N(A)$ испытаний, в которых оно имело место, к общему их числу:

$$P^*(A) = \frac{N(A)}{N}. \quad (1.3)$$

Эту величину $P^*(A)$ принято называть *частотой* наступления события (иногда ее называют частотостью). Вполне очевидно, что для невозможного события

$$P^*(V) = 0,$$

для достоверного

$$P^*(U) = 1,$$

а для случайного

$$0 \leq P^*(A) \leq 1.$$

Знаки нестрогого неравенства здесь поставлены потому, что случайное событие, в принципе, может наступить или не наступить во всех произведенных испытаниях.

При многократном осуществлении какого-либо одного и того же испытания частота наступления соответствующего ему события сравнительно редко сколько-нибудь значительно отклоняется от некоторого неотрицательного числа, причем тем реже, чем больше произведено испытаний. Такое свойство частоты называют *устойчивостью*. Это свойство, многократно проверенное экспериментально, является одной из наиболее характерных закономерностей, которые присущи случайным явлениям.

Число, относительно которого при неограниченном увеличении количества испытаний стабилизируется частота наступления события в определенных условиях, принимают за меру объективной возможности его появления в этих условиях и называют *вероятностью* данного события.

Обозначать вероятности принято буквами p или P с указанием или без указания в скобках соответствующего события.

Из введенного выше понятия вероятности следует, что

$$0 \leq P \leq 1,$$

причем для достоверного события

$$P(U) = 1,$$

а для невозможного

$$P(V) = 0.$$

Вероятность случайного события позволяет судить о том, как часто оно будет иметь место при проведении данного эксперимента. Например, если вероятность нормального функционирования системы за промежуток времени T равна 0,94, то при достаточно большом числе испытаний системы в соответствующих условиях она не откажет в среднем в 94 испытаниях из каждых 100.

Особенность устойчивости частоты состоит в том, что при увеличении числа испытаний она не стремится к вероятности как к пределу, а стабилизируется относительно этой характеристики так, что существенные отклонения частоты от вероятности оказываются все более и более редкими. Тем не менее это дает основание принимать за вероятность события частоту его наступления, полученную по результатам большого числа испытаний. Однако следует иметь в виду, что практическое применение такого способа нахождения вероятностей может быть существенно ограничено стоимостью соответствующих экспериментов. Кроме того, обычно проблематичным является решение вопроса о том, какое число испытаний можно считать достаточным для нахождения вероятности интересующего события без большого риска допустить существенную ошибку в оценке ее величины.

Например, еще в XVIII в. было замечено, что среди обычной корреспонденции письма без адреса обладают определенной устойчивостью. Замечено, что на протяжении нескольких лет на каждый миллион писем приходилось в среднем 25–27 писем без адреса.

Частотный подход к определению вероятности, несмотря на его кажущуюся простоту, приводил к теоретическим и математическим трудностям. Поэтому в современной теории вероятностей понятие вероятности события обычно вводят аксиоматически.

1.3.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Рассмотрим формулировки аксиом, данные академиком А. Н. Колмогоровым.

1. Каждому случайному событию $A \subset E$ поставлено в соответствие число $P(A)$, $0 \leq P(A) \leq 1$, которое называют вероятностью наступления события A .

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(U) = 1.$$

3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_r, A_n$ попарно несовместные, то

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Из аксиом следуют свойства вероятности, которые приведем без доказательства.

1. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(V) = 0.$$

2. Вероятность события \bar{A} , противоположного событию A , равна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

3. Если событие A влечет за собой событие B ($A \subset B$), то

$$P(A) \leq P(B).$$

4. Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

5. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Таким образом вводится одно из правил действия с вероятностями — правило сложения вероятностей.

Другое правило — правило умножения вероятностей — опирается на понятие условной вероятности. *Условной вероятностью $P(A/B)$ называют вероятность события A , вычисленную при условии, что событие B произошло.*

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность

другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

или

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

1.3.2. Классический способ определения вероятности

В теории вероятностей широкое распространение получили задачи, условия которых соответствуют так называемой схеме урн. Сущность этой схемы может быть сформулирована следующим образом. Результаты эксперимента представляются конечным числом *равновозможных и несовместных* исходов, составляющих *полную группу*, причем некоторые исходы благоприятствуют наступлению какого-либо события, т. е. при осуществлении любого из них данное событие имеет место. (Понятие равновозможности исходов эксперимента в классической теории вероятностей является основным, однако формально не определяется).

Такая схема реализуется наиболее просто, если эксперимент заключается в том, что из “урны” (непрозрачного сосуда), содержащего некоторое известное количество одинаковых на ощупь шаров разного цвета, извлекается наудачу некоторое число шаров, а интересующим экспериментатора событием является выход определенной комбинации шаров каждого цвета. Этим и объясняется принятое название данной схемы.

Классический способ определения вероятности представляется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.4)$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A ;

n — общее число равновозможных несовместных исходов.

В “урне” находятся K одинаковых на ощупь шаров, в том числе M белых и $(K - M)$ черных. Испытание заключается в из-

влечении из нее наудачу N каких-либо шаров. Интересующее нас событие состоит в том, что среди выбранных шаров ровно m окажутся белыми.

Очевидно, что общее число всех равновозможных и несовместных исходов рассматриваемого испытания равно C_K^N . Событие, вероятность которого надо определить, будет иметь место, если в выборку попадут любые m белых шаров и любые $(N - m)$ черных. Количество вариантов выбора m белых шаров из общего их числа M равно C_M^m . Каждый такой вариант может осуществиться с каким-либо из C_{K-M}^{N-m} вариантов выбора $(N - m)$ черных шаров из $(K - M)$, имеющихся в “урне”. Следовательно, число исходов, благоприятствующих наступлению интересующего нас события, равно произведению $C_M^m C_{K-M}^{N-m}$. Таким образом, согласно формуле (1.4), искомая вероятность определяется выражением:

$$P = \frac{C_M^m C_{K-M}^{N-m}}{C_K^N}.$$

Общим недостатком классического способа определения вероятности является его ограниченная применимость. Действительно, далеко не все комплексы условий приводят к возможности применения рассмотренных способов.

Поэтому в теории вероятностей разработаны способы, позволяющие определить вероятности одних событий через известные вероятности других. Основу этих способов составляют правила умножения и сложения вероятностей, опирающиеся на понятие условной вероятности.

1.4. Понятие условной вероятности.

Стохастическая зависимость случайных событий

Пусть производится испытание со случайным исходом, в результате которого могут произойти (или не произойти) какие-то события A и B или несколько событий.

Вероятность события при условии наступления в данном испытании другого события (нескольких событий) называют условной и обозначают $P(A/B)$, $P(A/B_1, B_2, \dots, B_n)$ и т. д.

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. Осуществляется однократное бросание игральной кости и рассматриваются события: A — выпадение шести очков, B — выпадение четного числа очков. Применение классического способа определения вероятности в данном случае даст $P(A) = \frac{1}{6}$. Если в комплекс условий такого испытания ввести факт наступления события B , то соответствующая условная вероятность $P(A/B)$ оказывается равной $\frac{1}{3}$ (число всех равновозможных несовместных исходов испытания с выпадением четного числа очков — три, а выпадение шести очков происходит только в одном из них). Если же в комплекс условий испытания ввести факт наступления события \bar{B} , то условная вероятность $P(A/\bar{B})$ оказывается равной нулю, поскольку появление шести очков при выпадении нечетного их числа невозможно (события A и \bar{B} несовместны). Таким образом, для рассмотренного испытания

$$P(A/B) \neq P(A/\bar{B}), \quad (1.5)$$

причем

$$\begin{aligned} P(A/B) &\neq P(A), \\ P(A/\bar{B}) &\neq P(A). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из приведенного примера видно, что между событиями может существовать особого типа зависимость, которая проявляется в том, что вероятность одного из них изменяется при наступлении или ненаступлении другого (других). Такую зависимость называют стохастической (вероятностной).

Два события A и B являются *стохастически зависимыми*, если факт наступления или ненаступления одного из них изменяет вероятность наступления другого так, что выполняется условие (1.6). В противном случае, когда одно из событий не “реагирует” на появление или не появление другого изменением своей вероятности, т. е. имеют место равенства

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A), \quad (1.7)$$

они являются *стохастически независимыми*. (В дальнейшем для краткости первое слово термина “стохастическая зависимость” будем опускать).

Зависимость (так же, как и независимость) событий всегда взаимна, т. е., если событие A зависит от B , то и B зависит от A . Более того, в этом случае зависимыми оказываются события A и B , A и \overline{B} , \overline{A} и \overline{B} .

Несовместные события всегда зависимы. В самом деле, если события A и B несовместны, то при любом значении вероятности $P(A)$ условная вероятность $P(A/B)$ равна нулю и, следовательно, $P(A/B) \neq P(A)$.

Несколько событий называются попарно независимыми, если независимыми являются любые два из них.

Несколько событий независимы в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не изменяется при появлении любой комбинации остальных. Следует иметь в виду, что для независимости событий в совокупности их попарной независимости недостаточно.

1.5. Правила действий с вероятностями

Область практического применения классического способа определения вероятности ограничена задачами, условия которых сводятся к “схеме урн”. Ограничена на практике и область статистического способа определения вероятностей событий по их частотам. Поэтому при решении практических задач широко используются методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий находить вероятности других, связанных с ними. Систему таких методов и представляет собой, в сущности, сама теория вероятностей. Ее основу составляет совокупность правил действия с вероятностями, а именно — правил (теорем) умножения и сложения вероятностей.

Правила умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_1/A_2) = P(A_2)P(A_1/A_2). \quad (1.8)$$

При независимости событий A_1 и A_2

$$P(A_2/A_1) = P(A_2), P(A_1/A_2) = P(A_1),$$

поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2). \quad (1.9)$$

Вероятность произведения нескольких событий определяется соотношением

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots \\ \dots P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}), \quad (1.10)$$

а если эти события независимы в совокупности, то

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.11)$$

Правила сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т. е.:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2). \quad (1.12)$$

Вероятность суммы нескольких событий в общем случае определяется соотношением

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \\ + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\dots A_n). \quad (1.13)$$

Если же события несовместны, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad (1.14)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице. Действительно в этом случае согласно соотношению (1.1)

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(U),$$

но $P(U) = 1$, а

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.16)$$

Принимая во внимание, что противоположные события по определению являются несовместными и составляют полную группу, из соотношения (1.16) получим также

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (1.17)$$

или

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.18)$$

Пример 1.3. По цели производится три независимых выстрела. Вероятности попадания в цель при каждом очередном выстреле равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3.

Найти вероятности трех промахов, одного, двух и трех попаданий, а также вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Решение.

Для решения задачи используем следующие обозначения событий: A_i — попадание в цель при i -м выстреле ($i = 1, 2, 3$); B_j — получение ровно j попаданий ($j = 0, 1, 2, 3$); B — получение хотя бы одного попадания.

Определяем вероятности возможных исходов испытания.

1. В соответствии с известным соотношением

$$P(B_0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3),$$

а поскольку события A_1, A_2, A_3 в совокупности независимы, то

$$P(B_0) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3).$$

Используя равенство (1.18) получаем

$$\begin{aligned}
 P(B_0) &= [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] = \\
 &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

2. Далее рассчитываем

$$P(B_1) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3).$$

Но события $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ несовместны, поэтому

$$P(B_1) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3),$$

а так как события $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ независимы в совокупности, то

$$\begin{aligned}
 P(B_1) &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + \\
 &\quad + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)
 \end{aligned}$$

или с учетом равенства (1.18)

$$\begin{aligned}
 P(B_1) &= P(A_1)P[1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] + \\
 &\quad + [1 - P(A_1)]P(A_2)[1 - P(A_3)] + \\
 &\quad + [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]P(A_3).
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Таким образом

$$P(B_1) = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,398.$$

3. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
 P(B_2) &= P(A_1)P(A_2)[1 - P(A_3)] + \\
 &\quad + P(A_1)P[1 - P(A_2)]P(A_3) + \\
 &\quad + [1 - P(A_1)]P(A_2)P(A_3),
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

так что

$$P(B_2) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,092.$$

4. С учетом независимости событий A_1, A_2, A_3 в совокупности имеем

$$P(B_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{1.22}$$

и, следовательно,

$$P(B_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006.$$

5. Принимая во внимание, что события B_0, B_1, B_2, B_3 несовместны и составляют полную группу, проверим правильность произведенных вычислений сложением их вероятностей:

$$0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1.$$

Следовательно, вычисления произведены правильно.

6. Вероятность события B (хотя бы одного попадания в цель) вычислим всеми возможными способами:

а) принимая во внимание, что события A_1, A_2, A_3 совместны и независимы, по (1.13) находим:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ &\quad - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) = \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,3 - 0,1 \cdot 0,2 - 0,1 \cdot 0,3 - 0,2 \cdot 0,3 + \\ &\quad + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,496; \end{aligned}$$

б) принимая во внимание, что события B_1, B_2, B_3 несовместны, по формуле (1.15) получаем:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \\ &= 0,398 + 0,092 + 0,006 = 0,496; \end{aligned}$$

в) из соотношения (1.18) имеем

$$P(B) = 1 - P(B_0) = 1 - 0,504 = 0,496.$$

Нетрудно увидеть, что последний способ в вычислительном отношении является наиболее рациональным.

В задачах, подобных рассмотренной, при большом числе испытаний и исходов отыскание необходимых соотношений между событиями существенно упрощается при использовании соответствующего графа (дерева) событий. Применительно к задаче примера 1.3 такой граф представлен на рис. 1.9.

Использование графа (дерева) событий позволяет не только упростить процесс отыскания вероятностей интересующих событий, но и проводить проверку правильности расчетов. При этом используется свойство графа, состоящее в том, что сумма вероятностей исходов на каждом уровне графа равна единице.

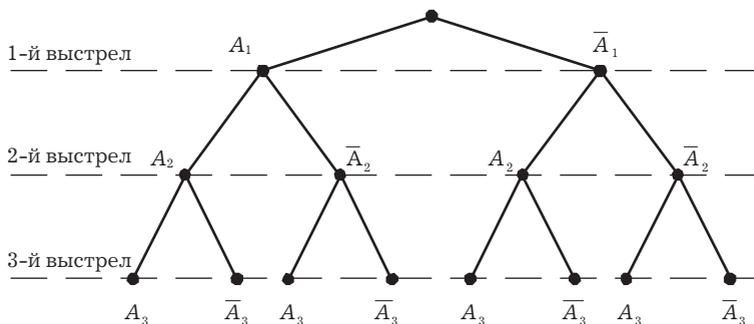


Рис. 1.9

Пример 1.4. В урне лежат три белых шара, три черных и три красных. Одновременно берут три шара. Какова вероятность того, что все три шара окажутся:

- а) одинакового цвета;
- б) разного цвета.

Решение.

Предположим, что шары вынимаются через малые промежутки времени. Для наступления события а) первый взятый наудачу шар может оказаться любого цвета, но второй шар должен быть того же цвета, а вероятность этого события равна $2/8$. Третий шар также должен быть того же цвета с вероятностью $1/7$. По формуле (1.11) искомая вероятность

$$P(A) = 1 \cdot 2/8 \cdot 3/7 = 1/28.$$

Для случая б), рассуждая аналогично, получаем

$$P(B) = 1 \cdot 6/8 \cdot 3/7 = 9/28.$$

1.6. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли

При решении целого ряда практических задач приходится сталкиваться со следующей схемой проведения испытаний. Производится N испытаний, в результате каждого из которых наступает либо событие A , либо противоположное ему событие \bar{A} . Вероятность события A в любом испытании не зависит от ис-

ходов всех других испытаний (испытания являются независимыми) и равна p (это обеспечивается одинаковым комплексом условий проведения каждого испытания). Такая схема испытаний впервые была рассмотрена Я. Бернулли и носит его имя.

Применительно к схеме Бернулли простейшая задача заключается в определении вероятности $P_N(k)$ того, что событие A при N испытаниях наступит ровно k раз ($k = 0, 1, 2, \dots, N$).

Очевидно, что такой результат будет иметь место, если событие A произойдет в каких-либо k испытаниях и не произойдет (т. е. произойдет событие \bar{A}) в $(N - k)$ остальных. Поскольку испытания являются независимыми, вероятность каждого из этих исходов равна $p^k(1 - p)^{N - k}$.

Число всех таких несовместных исходов представляется числом сочетаний из N элементов по k , так как испытаниями, в которых наступит событие A , могут быть любые k из общего их числа N .

Следовательно,

$$P_N(k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N - k}, \quad (1.23)$$

где $C_N^k = \frac{N!}{k!(N - k)!}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Полученная формула называется формулой Бернулли. Для удобства ее практического использования составлена таблица значений вероятностей $P_N(k)$ в зависимости от значений N, p, k . Такая таблица помещена в приложении 1 под номером 4. В таблице даны значения вероятностей $P_N(k)$ для $N = 5 \div 30$ и вероятностей $p = 0,01 \div 0,5$. Если $p > 0,5$, то для определения указанных вероятностей нужно применить табл. 1.1 со значениями аргументов k и p , приведенными в правой крайней колонке и в последней строке.

Отметим следующее. События, состоящие в наступлении события A ровно k раз, являются несовместными и образуют полную группу. Поэтому

$$\sum_{k=0}^N P_N(k) = 1.$$

Пример 1.5. В условиях примера 1.3 найти вероятности трех промахов, одного, двух и трех попаданий, если вероятность попадания в цель при всех выстрелах одинакова и равна 0,5.

Решение.

По формуле Бернулли (1.23), приняв $N = 3$ и $p = 0,5$, с помощью табл. 4 приложения 1 находим:

$$\begin{aligned} P(B_0) = P_3(0) = 0,125; & \quad P(B_2) = P_3(2) = 0,375; \\ P(B_1) = P_3(1) = 0,375; & \quad P(B_3) = P_3(3) = 0,125. \end{aligned}$$

Заметим, что непосредственно из соотношений (1.19)–(1.22), полученных в процессе решения примера 1.3, при $P(A_i) = \text{const} = p$ имеем:

$$\begin{aligned} P(B_0) = P_3(0) &= (1 - p)^3; \quad P(B_2) = P_3(2) = 3p^2(1 - p); \\ P(B_1) = P_3(1) &= 3p(1 - p)^2; \quad P(B_3) = P_3(3) = p^3, \end{aligned}$$

что совпадает с результатами использования формулы Бернулли, поскольку

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = 3; \quad C_3^2 = 3; \quad C_3^3 = 1.$$

В некоторых задачах применительно к схеме Бернулли требуется определить вероятность $P_N(k \geq m)$ того, что при N испытаниях событие A наступит не менее m раз.

Поскольку все исходы N испытаний являются несовместными, эта вероятность в соответствии с (1.15) определяется выражением

$$P_N(k \geq m) = \sum_{k=m}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Его целесообразно использовать лишь при $m > N/2$, а при $m \leq N/2$ для уменьшения объема необходимых вычислений вероятность $P_N(k \geq m)$ целесообразно вычислять через вероятность противоположного события, т. е. по формуле

$$P_N(k \geq m) = 1 - P_N(k < m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Таким образом, для вычисления вероятности того, что при осуществлении N испытаний в схеме Бернулли событие A наступит не менее m раз, следует использовать соотношения

$$P_N(k \geq m) = \begin{cases} \sum_{k=m}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, & \text{при } m > N/2; \\ 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, & \text{при } m \leq N/2. \end{cases} \quad (1.24)$$

1.7. Формула полной вероятности

При решении целого ряда задач из области экономической практики встречаются такие, в которых интересующее нас событие может наступать при реализации различных комплексов условий, причем осуществление самих комплексов условий представляет собой случайное событие. В общем виде эти задачи формулируются следующим образом.

В данном испытании событие A может наступить с одним из несовместных случайных исходов $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$, называемых *гипотезами*, вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_i), \dots, P(H_n)$ которых известны (заданы или поддаются вычислению).

Известны также условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_i), \dots, P(A/H_n)$ наступления события A при осуществлении каждого из этих исходов. Требуется найти вероятность события A безотносительно к тому, какой из исходов $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$ будет иметь место.

В соответствии с условиями такой задачи событие A представляется соотношением

$$A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_i A + \dots + H_n A.$$

Отсюда, применяя правила сложения и умножения вероятностей с учетом того, что события $H_1 A, H_2 A, \dots, H_i A, \dots, H_n A$ несовместны, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i). \quad (1.25)$$

Формула (1.25) и называется *формулой полной вероятности*, а определяемая ею вероятность $P(A)$ — *полной вероятностью* события A .

Пример 1.6. Вероятность изготовления изделий с дефектом равна 0,4. Приемка готовых изделий производится по системе контроля, при которой дефектное изделие принимается с вероятностью 0,05, а кондиционное — с вероятностью 0,99. Найти вероятность того, что предъявленное на контроль изделие будет принято.

Решение.

По условиям задачи событие A — предъявленное на контроль изделие будет принято — может наступить с одним из противоположных, т. е. несовместных и составляющих полную группу исходов:

H_1 — предъявленное изделие является дефектным;

H_2 — предъявленное изделие является кондиционным, причем

$$P(H_1) = 0,4; P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0,6.$$

Каким окажется принятое изделие, дефектным или кондиционным, в данном случае не имеет значения, так что вероятность $P(A)$, которую требуется определить, по смыслу является полной вероятностью. Поэтому, используя формулу (1.25), находим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \\ &= 0,4 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,99 = 0,614. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассмотренных условиях принимается в среднем 614 изделий из каждой тысячи предъявленных на контроль независимо от их качества.

1.8. Формула Байеса

Формула полной вероятности позволяет определять вероятность наступления события до проведения испытания. При этом вероятности гипотез определяются либо обстановкой испытания, либо задаются. Однако иногда результат проведенного эксперимента изменяет наши сведения о гипотезах, при которых могло произойти событие. Следовательно, гипотезам после испытания можно поставить в соответствие новые веро-

ятности, отличные от тех, которыми они характеризовались до эксперимента.

Задачу по определению апостериорных (после опыта) вероятностей сформулируем следующим образом.

В данном испытании событие A может наступить с одним из несовместных случайных исходов $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$, вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_i), \dots, P(H_n)$ которых известны. Известны также условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_i), \dots, P(A/H_n)$ наступления этого события при осуществлении каждого исхода. В произведенном испытании событие A наступило. Требуется найти вероятности $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_i/A), \dots, P(H_n/A)$ осуществления при этом какого-либо из исходов $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$.

Применяя в условиях данной задачи правило умножения вероятностей, получим

$$P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

или с учетом формулы полной вероятности (1.25)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

Полученное соотношение и называется *формулой Байеса*.

В условиях рассмотренной задачи исходы H_i , с одним из которых может произойти событие A , играют роль гипотез. Вероятности $P(H_i)$ по смыслу являются априорными (до опыта), а вероятности $P(H_i/A)$ — апостериорными вероятностями этих гипотез. Формула Байеса обеспечивает возможность пересчета первых во вторые, т. е. учета информации, полученной в результате произведенного испытания. Из этой формулы следует, что сумма всех апостериорных вероятностей равна единице.

Пример 1.7. В условиях примера 1.6 найти вероятность того, что принятое изделие является дефектным.

Решение.

При обозначениях событий, введенных в примере 1.6, используя формулу Байеса, находим

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{\sum_{i=1}^2 P(H_i)P(A / H_i)} = \frac{0,4 \cdot 0,05}{0,615} = 0,0326,$$

так что в условиях данного примера из каждых десяти тысяч принятых в среднем 326 изделий будут дефектными.

Пример 1.8. Наблюдения показали, что кредиты в коммерческих банках предоставляют: 10% — государственным учреждениям, 30% — другим банкам и 60% — физическим лицам. Вероятности невозврата кредита соответственно равны 0,01; 0,05 и 0,2. Определить полную вероятность невозврата кредита и вероятность невозврата кредита коммерческим банком.

Решение.

Полную вероятность невозврата кредита можно определить, используя выражение (1.25), в соответствии с которым

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A / H_i) = 0,1 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,136.$$

Используя формулу Байеса, находим вероятность невозврата кредита коммерческим банком

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,015}{0,136} \approx 0,11.$$

Пример 1.9. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй — 30%, на третьей — 50%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годных изделий: 95, 98 и 97%. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятности того, что это бракованное изделие сделано на первой, второй и третьей линиях.

Решение.

Обозначим через H_1, H_2, H_3 события, состоящие в том, что взятое изделие произведено соответственно на первой, второй и третьей линиях. Согласно условиям задачи $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,3$; $P(H_3) = 0,5$ и эти события образуют полную группу несовместных событий, т. е. сумма их вероятностей равна 1.

Обозначим через A событие состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным. Согласно условиям задачи

$$P(A/H_1) = 0,05; P(A/H_2) = 0,02; P(A/H_3) = 0,03;$$

Используя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A) = 0,05 \cdot 0,2 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,5 = 0,031.$$

Априорные вероятности того, что наугад взятое изделие изготовлено на первой, второй или третьей линии, равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5.

Допустим, что в результате контроля взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определим теперь апостериорные вероятности того, что это изделие изготовлено на первой, второй или третьей линиях. По формуле Байеса имеем

$$P(H_1 / A) = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,031} = \frac{10}{31} = 0,322,$$

$$P(H_2 / A) = \frac{0,02 \cdot 0,3}{0,031} = \frac{6}{31} = 0,194,$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0,03 \cdot 0,5}{0,031} = \frac{15}{31} = 0,484.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что является предметом теории вероятностей?
2. Дайте определение случайного события и приведите примеры.
3. Что называется суммой и произведением нескольких событий?

4. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.

5. Дайте определения достоверного и невозможного событий и приведите примеры.

6. Как определить частоту и вероятность наступления события?

7. Приведите формулировку аксиом А. Н. Колмогорова.

8. Что такое условная вероятность?

9. Каковы правила действий с вероятностями?

10. Приведите схему Бернулли.

11. Поясните суть формулы полной вероятности.

12. Поясните суть формулы Байеса.

Задачи для самостоятельного решения

1. Прибор состоит из трех последовательно включенных блоков. События A_i ($i = 1, 3$) означают исправность блоков. Выразить всеми возможными способами событие \bar{B} — отсутствие сигнала на выходе прибора через события A_i и \bar{A}_i .

2. Прибор состоит из трех параллельно включенных блоков. События A_i ($i = 1, 3$) означают исправность блоков. Выразить всеми возможными способами событие B — наличие сигнала на выходе прибора через события A_i и \bar{A}_i .

3. Каждая из четырех изготовленных деталей может оказаться годной (A_i) либо дефектной (\bar{A}_i). Выразить события, состоящие в том, что:

а) ровно три детали имеют дефект;

б) все детали годные;

в) хотя бы одна имеет дефект;

г) не более двух имеют дефект;

д) только вторая имеет дефект.

4. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, наугад вынимают 2 шара. Найти вероятности того, что:

а) оба шара белые;

б) оба шара черные;

в) шары разного цвета.

5. В коробке среди пятнадцати деталей имеются 5 бракованных. Определить вероятность того, что среди наугад взятых четырех деталей не менее двух окажутся неисправными.

6. В урне находятся 3 белых, 4 черных и 8 красных шаров. Из нее последовательно извлекают по одному шару. Определить вероятность того, что белый шар появится раньше черного.

7. При контроле качества продукции из каждой партии в 100 изделий проверяются случайным образом выбранные 50, и партия принимается, если в выборке оказалось не более одного дефектного изделия. Какова вероятность принять партию, содержащую 5 дефектных изделий?

8. В шкафу находятся 9 однотипных приборов. В начале опыта все они новые (ни разу не бывшие в употреблении). Для временной эксплуатации берут наугад три прибора, и после эксплуатации их возвращают в шкаф. Найти вероятность того, что после трехкратного выбора и эксплуатации не останется ни одного нового прибора.

9. Некто купил карточку Спортлото “6 из 49”. Найти вероятности того, что при заполнении карточки верно угаданы: а) 3 номера; б) 4 номера; в) 5 номеров; г) 6 номеров.

10. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что:

а) двигатель заработает при втором включении зажигания;

б) для запуска двигателя придется включить зажигание не более двух раз.

11. Блок, состоящий из трех элементов, выходит из строя при отказе первого элемента либо при одновременном отказе второго и третьего элементов. Вероятность отказа первого и третьего элементов равна 0,1, а второго — 0,2. Найти вероятность выхода блока из строя, если элементы отказывают независимо друг от друга.

12. Устройство состоит из двух блоков. Вероятность выхода из строя первого блока равна 0,6, а второго — 0,5. Определить вероятность выхода из строя обоих блоков, если вероятность выхода из строя хотя бы одного из них равна 0,9. Установить, зависимы ли выходы из строя блоков.

13. Вероятность того, что новорожденный доживет до 5 лет, равна 0,95; вероятность того, что он доживет до 60 лет, равна 0,6. Какова вероятность человеку, прожившему 5 лет, дожить до 60 лет?

14. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, наугад извлекают 2 шара, и, не глядя, откладывают в сторону. Затем вновь извлекают 2 шара. Определить вероятность того, что шары будут разного цвета.

15. В ящике находятся 10 деталей, 4 из которых имеют дефект. Из него последовательно с возвращением извлекают по одной детали до тех пор, пока не встретится деталь без дефекта. Какова вероятность того, что придется извлечь не более трех деталей.

16. Сколько партий вероятнее выиграть у равносильного противника:

а) три из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех из четырех или не менее пяти из восьми.

17. Для отражения атаки самолета планируется использовать три ракеты, стартующие с вероятностью 0,9. Каждая стартовавшая ракета поражает самолет с вероятностью 0,6. Какова вероятность поражения самолета?

18. Партия изделий содержит 5% брака. При каком объеме случайной выборки вероятность попадания в нее хотя бы одного бракованного изделия будет не менее 0,9?

19. Однотипные приборы поставляются двумя заводами, причем первый из них поставяет $\frac{2}{3}$ от общего количества. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени приборов, поставляемых первым заводом, равна 0,96, а вторым — 0,9. Определить вероятность того, что взятый наудачу прибор проработает заданное время.

20. В условиях задачи 19 определить вероятность того, что:

а) проработавший заданное время прибор поставлен вторым заводом;

б) отказавший прибор поставлен первым заводом.

21. Вероятность изготовления детали с дефектом равна 0,04. При контроле качества годная деталь принимается с веро-

ятностью 0,98, а дефектная — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что:

- а) наудачу выбранная деталь будет принята;
- б) принятая деталь оказалась негодной;
- в) не принятая деталь оказалась годной.

22. Ядра урана бомбардируются одновременно быстрыми и медленными нейтронами. Вероятность захвата ядром медленного нейтрона равна 0,8, а быстрого — 0,2. При захвате медленного нейтрона деление ядра происходит с вероятностью 0,3, а при захвате быстрого — с вероятностью 0,9. Определить вероятность деления ядра в таком эксперименте.

23. В условиях задачи 22 определить, какой нейтрон наиболее вероятно был захвачен ядром, если реакция деления произошла.

24. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 — подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

25. Микросхемы поставляются с трех заводов. Первый и третий поставляют по 25% всей продукции, а второй — 50%. Вероятности того, что микросхемы проработают заданное число часов, соответственно равны 0,9, 0,8, и 0,6. Определить вероятность того, что:

- а) взятая наугад микросхема проработает заданное число часов;
- б) с какого завода наиболее вероятно была поставлена микросхема, не проработавшая заданное число часов.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Случайные величины и их классификация

Случайной называется переменная величина, которая в результате испытания (реализации определенного комплекса условий) принимает одно из множества своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайными величинами являются, например:

1. Число попаданий в цель при ограниченном числе боеприпасов.
2. Число выстрелов до первого попадания в цель при неограниченном расходе боеприпасов.
3. Число дефектных изделий в партии готовой продукции.
4. Время безотказной работы элемента технической системы.
5. Отклонение точки падения снаряда от точки прицеливания.

По аналогии с обычными переменными различают *скалярные* и *векторные* случайные величины или системы случайных величин.

В приведенных выше примерах первые четыре случайные величины являются скалярными, а пятая — двумерным вектором (системой двух случайных величин: отклонения по дальности и боковому направлению).

Скалярные случайные величины в дальнейшем будем обозначать прописными буквами X, Y, Z , а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z (используя при необходимости цифровые индексы). Применительно к случайным векторам будем использовать обозначения $\{X, Y\}$, $\{X_1, X_2\}$, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

По характеру множества возможных значений различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. *Дискретной* называют случайную величину, множество возможных значений которой является конечным или бесконечным, но счетным, так что все они могут быть в каком-либо порядке

пронумерованы и представлены последовательностью, конечной — x_1, x_2, \dots, x_n или бесконечной — $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Иначе говоря, возможные значения дискретной случайной величины представляются точками: скалярной — на числовой оси, а векторной — в соответствующем n -мерном пространстве ($N \geq 2$). На практике наиболее часто встречаются дискретные случайные величины, принимающие только целочисленные значения. В приведенных выше примерах такими случайными величинами являются первые три.

Непрерывной называют случайную величину, множество возможных значений которой несчетно и сплошь заполняет какой-либо ограниченный или неограниченный интервал (область). В примерах, приведенных выше, непрерывными случайными величинами являются последние две.

2.2. Закон распределения случайной величины и формы его представления

2.2.1. Понятие распределения случайной величины

Для того чтобы описать любую случайную величину, необходимо, очевидно, задать множество ее возможных значений. Однако одного этого оказывается недостаточно. Например, дискретная случайная величина X представляет число попаданий в мишень при трех выстрелах начинающего стрелка, а дискретная случайная величина Y — число попаданий тоже при трех выстрелах, но стрелка высокой квалификации. Нетрудно видеть, что обе эти случайные величины имеют одно и то же множество возможных значений:

$$x_1 = y_1 = 0, x_2 = y_2 = 1, x_3 = y_3 = 2, x_4 = y_4 = 3,$$

но при многократном осуществлении испытаний (стрельб) одинаковые возможные значения будут появляться неодинаково часто (например, возможное значение $x_1 = 0$ будет иметь место значительно чаще, чем $y_1 = 0$, а возможное значение $x_4 = 3$ значительно реже, чем $y_4 = 3$).

Следовательно, для полного описания случайной величины наряду с заданием множества ее возможных значений требуется еще указать, как часто то или иное из них будет иметь место, т. е. какова его вероятность.

Поскольку в результате испытания случайная величина принимает обязательно одно, и только одно из своих возможных значений, то сумма их вероятностей равна единице (как сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу).

Для непрерывной случайной величины указать вероятность каждого из ее возможных значений нельзя хотя бы потому, что множество этих значений бесконечно и несчетно. Кроме того, как будет показано далее, вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Поэтому непрерывная случайная величина будет полностью охарактеризована в вероятностном смысле, если указать вероятность ее попадания в любой интервал возможных значений.

Под законом распределения случайной величины понимают соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями или интервалами возможных значений случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения случайной величины является ее исчерпывающей вероятностной характеристикой и может быть представлен в таких формах, как *функция вероятности, функция распределения и плотность распределения* (плотность вероятности).

2.2.2. Функция вероятности

Функция вероятности используется для описания распределений только дискретных случайных величин. Она задает однозначное отображение множества возможных значений x_i случайной величины на множество их вероятностей $p(x_i)$.

В такой форме закон распределения представляется либо аналитической формулой, позволяющей вычислить вероят-

ность каждого возможного значения величины, либо таблицей, в которой указываются все ее возможные значения и соответствующие им вероятности. Так, например, если случайная величина X является числом попаданий в цель при N независимых выстрелах с одинаковой вероятностью попадания p , то вероятности $p(x_i)$ всех ее возможных значений $x_i = 0, 1, \dots, N$ определяются формулой Бернулли, т. е.:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}, \quad (2.1)$$

которая, таким образом, непосредственно представляет распределение этой случайной величины.

Результаты расчетов по формуле (2.1) можно свести в табл. вида 2.1.

Таблица 2.1

x_i	0	1	2	...	N
$p(x_i)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$		$p(N)$

Подчеркнем, что сумма всех вероятностей $p(x_i)$ в такой таблице равна единице, т. е.:

$$\sum_{x_i=0}^N p(x_i) = 1.$$

Функцию вероятности иногда называют рядом распределения.

2.2.3. Функция распределения

Функцией распределения скалярной случайной величины X называется функция $F(x)$ аргумента x , которая при каждом x задает вероятность того, что данная случайная величина примет значение, меньшее x , т. е.:

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.2)$$

(при этом аргумент x не обязательно должен совпадать с возможными значениями случайной величины).

Функция распределения является универсальной формой, позволяющей представлять распределения случайных величин любого типа.

Для уяснения смысла функции распределения рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1. Построить график функции распределения дискретной случайной величины X , распределение которой задано табл. 2.2.

Таблица 2.2

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Заметим, что такое распределение имеет число попаданий в цель после трех независимых выстрелов с вероятностью попадания $p = 0,5$ при каждом из них.

Решение.

1. При $x = 0$ в соответствии с равенством (2.2) имеем:

$$F(0) = P(X < 0) = 0,$$

поскольку рассматриваемая случайная величина X не имеет возможных значений меньше нуля.

Очевидно, что по той же причине $F(x) = 0$ для $x < 0$.

2. При $x = 1$ согласно равенству (2.2)

$$F(1) = P(X < 1).$$

Из табл. 2.2 следует, что неравенство $X < 1$ выполняется в единственном случае — когда рассматриваемая случайная величина принимает возможное значение $x_1 = 0$. Следовательно,

$$F(1) = P(X < 1) = p(x_1) = 0,125. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что поскольку на интервале $0 < x \leq 1$ эта случайная величина возможных значений не имеет, $F(x) = 0,125$ для всех $0 < x \leq 1$.

3. При $x = 2$ на основе равенства (2.2)

$$F(2) = P(X < 2).$$

Обращаясь к табл. 2.2, видим, что неравенство $X < 2$ выполняется, если случайная величина X принимает либо значение $x_1 = 0$, либо значение $x_2 = 1$. Ввиду того, что такие исходы испытания являются несовместными,

$$F(2) = P(X < 2) = p(x_1) + p(x_2) = 0,125 + 0,375 = 0,5. \quad (2.4)$$

Отсутствие на интервале $1 < x < 2$ возможных значений рассматриваемой случайной величины позволяет заключить, что $F(x) = 0,5$ для всех $1 < x \leq 2$.

4. При $x = 3$ по определению

$$F(3) = P(X < 3),$$

а из таблицы 2.2 следует, что выполнение неравенства $X < 3$ имеет место при осуществлении какого-либо их трех несовместных исходов испытания: случайная величина X реализуется значением $x_1 = 0$, или значением $x_2 = 1$, или значением $x_3 = 2$, поэтому

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X < 3) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = \\ &= 0,5 + 0,375 = 0,875, \end{aligned} \quad (2.5)$$

причем $F(x) = 0,875$ для всех $2 < x \leq 3$, ибо на интервале $2 < x < 3$ рассматриваемая случайная величина возможных значений не имеет.

5. Рассуждая аналогично, приходим к выводу о том, что при любом $x > 3$ (например, при $x = 3,01$) неравенство $X < x$ выполняется, если осуществляется хотя бы один из четырех несовместных исходов испытания: случайная величина X принимает либо возможное значение $x_1 = 0$, либо возможное значение $x_2 = 1$, либо возможное значение $x_3 = 2$, либо возможное значение $x_4 = 3$, поэтому для любого $x > 3$

$$F(x) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = 0,875 + 0,125 = 1. \quad (2.6)$$

Результат является очевидным, поскольку рассматриваемая случайная величина при осуществлении испытания достоверно принимает значения меньше, чем любое $x > 3$.

График функции распределения, соответствующий условиям рассмотренного примера, представлен на рис. 2.1.

Из этого рисунка следует, что функция распределения дискретной случайной величины в промежутках между ее возможными значениями не изменяется. В точках, отвечающих

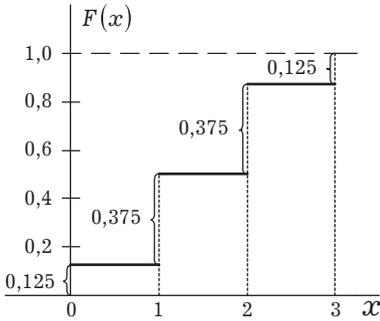


Рис. 2.1

возможным значениям, эта функция имеет разрывы, совершая скачки, которые равны вероятностям соответствующих возможных значений. Следовательно, она столь же информативна, как и функция вероятности, заданная табл. вида 2.1.

Обобщая результаты решения задачи в примере 2.1 (равенства (2.3)–(2.6)), можно заключить, что в общем случае функция распределения скалярной случайной величины определяется соотношением

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i), \quad (2.7)$$

где $p(x_i)$ — вероятности ее возможных значений.

Очевидно, что чем больше возможных значений имеет случайная величина, тем большим оказывается число скачков

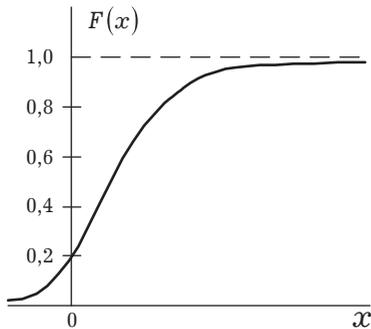


Рис. 2.2

соответствующей ей функции распределения, а, следовательно, тем меньшей величина каждого из них (сумма всех скачков равна единице). Следовательно, функция распределения непрерывной скалярной случайной величины, возможные значения которой сплошь заполняют тот или иной интервал, представляется непрерывной кривой (рис. 2.2).

Заметим, что поскольку вид функции $F(x)$ определяется распределением вероятностей на множестве возможных значений случайной величины, более правильным будет называть ее функцией распределения вероятностей.

Функция распределения скалярной случайной величины имеет следующие основные свойства:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, ибо ее значения являются вероятностями.

2. $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ как вероятность достоверного события.

$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ как вероятность невозможного события.

3. Если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$, т. е. функция распределения является неубывающей функцией аргумента.

В справедливости этого утверждения можно убедиться следующим образом. Введем в рассмотрение события (рис. 2.3):

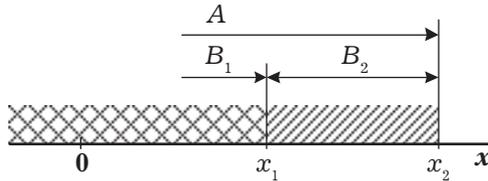


Рис. 2.3

A — выполнение неравенства $X < x_2$;

B_1 — выполнение неравенства $X < x_1$;

B_2 — выполнение неравенства $x_1 \leq X < x_2$.

Очевидно, что

$$A = B_1 + B_2,$$

причем события B_1 и B_2 несовместны. Поэтому

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2)$$

или

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (2.2), определяющее смысл функции распределения скалярной случайной величины, получим

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2), \quad (2.8)$$

а поскольку $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, заключаем, что

$$F(x_2) > F(x_1).$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал (полуоткрытый справа) равна разности значений функции распределения на концах этого интервала, т. е.:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad (2.9)$$

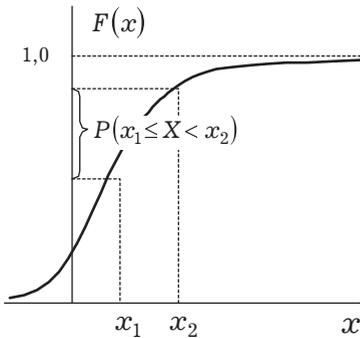


Рис. 2.4

что непосредственно вытекает из равенства (2.8) и иллюстрируется рис. 2.4.

Последнее из рассмотренных свойств функции распределения скалярной случайной величины позволяет заключить, что если эта случайная величина непрерывна, то вероятность ее попадания в какую-либо точку числовой оси равна нулю (в равенстве (2.9) следует принять $x_2 = x_1$). Иначе говоря, равной нулю оказывается вероятность

каждого возможного значения такой случайной величины. На первый взгляд это заключение кажется противоречащим здравому смыслу, поскольку в результате испытания одно из возможных значений любой случайной величины реализуется всегда. Однако в действительности никакого противоречия здесь нет: сделанный вывод означает лишь то, что при большом числе испытаний конкретное возможное значение x (равное, например, двум) непрерывная случайная величина X будет принимать крайне редко. Значительно чаще будут появляться, например, возможные значения, хотя бы немного отличающи-

еся от 2,0. Поэтому частота каждого возможного значения непрерывной случайной величины стабилизируется относительно нуля.

С учетом отмеченной особенности непрерывных скалярных случайных величин применительно к ним нестрогое равенство $x_1 \leq X$ в скобках левой части соотношения (2.9) можно заменять строгим, т. е. считать интервал от x_1 до x_2 открытым. Кроме того, из-за этой особенности нет смысла задавать распределение такой случайной величины вероятностями ее возможных значений. Речь может идти только о вероятностях ее появления в том или ином интервале, определение которых вполне обеспечивает функция распределения. Следовательно, и для непрерывных скалярных случайных величин она является исчерпывающе информативной.

2.2.4. Плотность распределения

Плотностью распределения скалярной случайной величины X называется функция $f(x)$ аргумента x , которая при каждом x равна пределу отношения вероятности попадания данной случайной величины на интервал Δx в окрестности точки x к длине этого интервала, когда она стремится к нулю, т. е.:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \quad (2.10)$$

если такой предел существует.

Из данного определения следует, что функция $f(x)$ по существу задает плотность вероятности в окрестности каждой точки числовой оси, поэтому более правильно называть ее плотностью распределения вероятностей.

Принимая во внимание соотношение (2.9), равенство (2.10) можно представить в виде

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

откуда следует, что

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2.11)$$

т. е. плотность распределения скалярной случайной величины есть производная от функции распределения $F(x)$ по аргументу x . Поэтому она как форма представления закона распределения применима только к случайным величинам непрерывного типа.

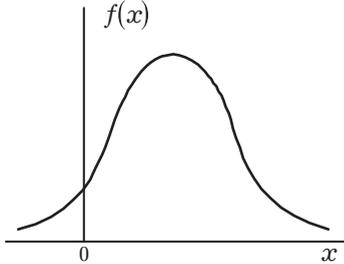


Рис. 2.5

График плотности распределения $f(x)$, соответствующий некоторой функции распределения $F(x)$, представлен на рис. 2.5.

Плотность распределения скалярной случайной величины имеет следующие основные свойства:

1. $f(x) \geq 0$ как предел отношения неотрицательной величины к положительной.

$$2. F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (2.12)$$

что непосредственно вытекает из равенства (2.11) и иллюстрируется рис. 2.6.

$$3. P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \text{ что вытекает из равенства (2.9) с}$$

учетом второго свойства плотности распределения и иллюстрируется рис. 2.7.

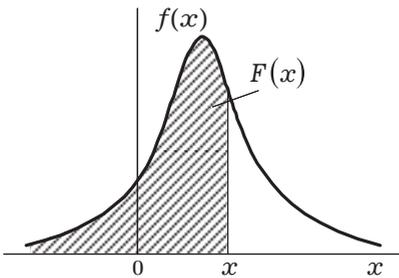


Рис. 2.6

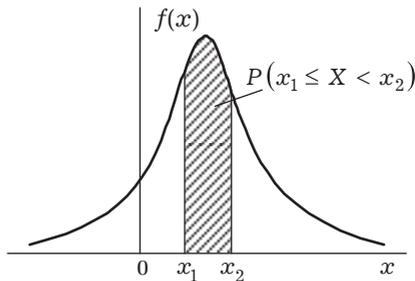


Рис. 2.7

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ как вероятность достоверного события (следовательно, площадь под кривой $f(x)$ любого вида равна единице).

Полезно отметить, что плотность распределения скалярной случайной величины имеет размерность, обратную размерности самой случайной величины (это непосредственно вытекает из соотношения (2.10), определяющего понятие плотности).

Третье из рассмотренных свойств позволяет заключить, что вероятность попадания непрерывной скалярной величины в бесконечно малую окрестность какой-либо точки числовой оси с точностью до бесконечно малых высших порядков определяется равенством

$$P(x \leq X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x,$$

правую часть которого принято называть элементом вероятности (для достаточно малых конечных интервалов Δx выполняется приближенное равенство, что иллюстрируется рис. 2.8).

$$P(x \leq X < x + \Delta x) \approx f(x)dx.$$

Поскольку плотность распределения непрерывной скалярной случайной величины обеспечивает возможность определения вероятностей ее попадания в любой интервал, она дает полную информацию о распределении такой случайной величины и при этом позволяет достаточно наглядно представлять его графически.

В заключение заметим, что функцию распределения случайной величины иногда называют интегральным, а плотность — дифференциальным законом распределения.

Применительно к скалярным случайным величинам обе эти функции принято задавать на всей числовой оси.

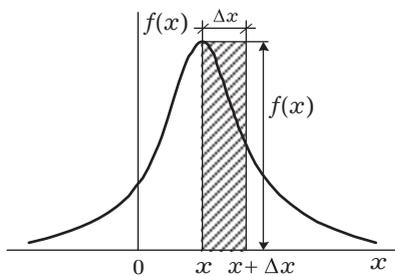


Рис. 2.8

2.3. Числовые характеристики скалярных случайных величин

Как уже было отмечено, исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является ее закон распределения, который полностью определяется, например, функцией распределения. Однако для решения прикладных задач часто оказывается достаточным описывать распределение случайной величины лишь в самых общих чертах, отражая его наиболее существенные особенности. Для этого используются специальные характеристики распределения (их называют также числовыми характеристиками случайной величины). Основные из таких характеристик дают представление о том, относительно какой точки группируются возможные значения случайной величины и какова степень их рассеивания, в связи с чем одни из них называют характеристиками положения, а другие — характеристиками рассеивания. Ниже эти характеристики рассматриваются применительно к скалярным случайным величинам.

2.3.1. Характеристики положения

В качестве числовых характеристик положения используются: *мода, медиана и математическое ожидание*.

Модой называют значение случайной величины, которому соответствует максимум функции вероятности или плотности распределения. Таким образом, мода (условимся обозначать ее символом M_0) дискретной случайной величины определяется из условия

$$P(X = M_0) = \max_{x_i} P(X = x_i), \quad (2.12)$$

а непрерывной — из условия

$$f(x = M_0) = \max_x f(x), \quad (2.13)$$

что иллюстрируется рис. 2.9 и рис. 2.10 (вертикальными линиями на рис. 2.10 представлены вероятности возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n).

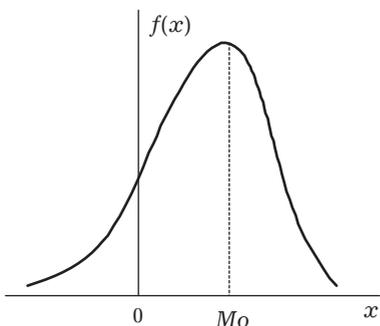


Рис. 2.9

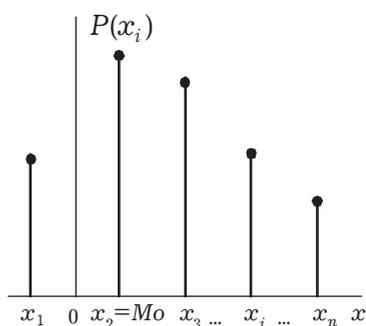


Рис. 2.10

Медианой случайной величины называется корень уравнения

$$F(x) = 0,5,$$

т. е. такая точка Me на числовой оси, для которой

$$P(X < Me) = P(X > Me) = 0,5. \quad (2.14)$$

Медиана непрерывной случайной величины определяется однозначно (рис. 2.11 и 2.12).

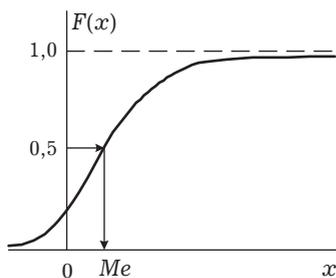


Рис. 2.11

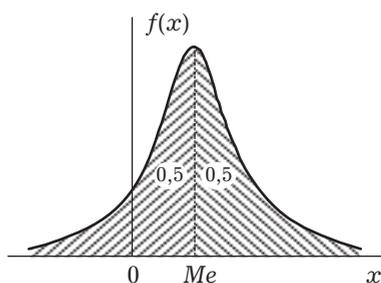


Рис. 2.12

Дискретная же случайная величина может либо вообще не иметь медианы (рис. 2.13), либо иметь бесконечное множество их (рис. 2.14), в связи с чем применительно к таким случайным величинам эта числовая характеристика на практике используется редко.

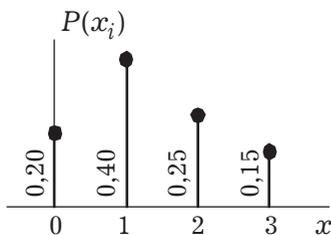


Рис. 2.13

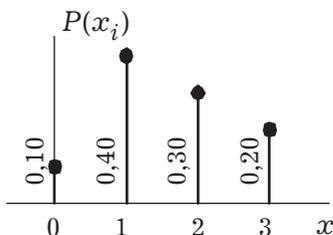


Рис. 2.14

Математическое ожидание является наиболее часто используемой числовой характеристикой положения.

Для дискретной случайной величины оно определяется как сумма произведений ее возможных значений на их вероятности, т. е. с помощью оператора

$$M[X] = \sum_{x_i} x_i p(x_i). \quad (2.15)$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание определяется оператором

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (2.16)$$

который по существу аналогичен оператору (2.15) с той лишь разницей, что здесь суммирование заменено интегрированием, а вероятность $p(x_i)$ — элементом вероятности $f(x)dx$ (заметим, что интеграл в правой части выражения (2.16) практически следует вычислять в пределах, определяющих интервал значений x , при которых плотность $f(x)$ отлична от нуля).

По смыслу *математическое ожидание* — это среднее значение случайной величины, а точнее — число m_x , около которого при достаточно большом количестве испытаний группируется среднее арифметическое ее реализовавшихся значений.

Действительно, пусть при осуществлении N испытаний, результаты которых представляются дискретной случайной величиной X с возможными значениями $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, каждое из этих значений реализовалось соответственно

$N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_n$ раз. Среднее арифметическое полученных результатов

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{x_i} x_i N_i$$

можно представить в виде

$$\bar{x} = \sum_{x_i} x_i p^*(x_i),$$

где $p^*(x_i) = \frac{N_i}{N}$ — частота появления при N испытаниях возможного значения x_i .

Сопоставляя полученное выражение с соотношением (2.15), нетрудно видеть, что их правые части отличаются лишь тем, что в первом возможные значения умножаются на свои вероятности, а во втором — на частоты. Отсюда, принимая во внимание, что при неограниченном увеличении числа испытаний частота стабилизируется относительно вероятности, можно прийти к заключению о справедливости данного выше толкования смысла математического ожидания.

Математическому ожиданию можно дать следующую механическую интерпретацию. Для дискретной случайной величины оно в соответствии с равенством (2.15) представляет центр масс системы, состоящей из невесомого (или однородного) стержня, в точках с абсциссами x_i которого сосредоточены массы $p(x_i)$. Для случайной величины непрерывного типа математическое ожидание, согласно соотношению (2.16), представляет абсциссу центра масс фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой $f(x)$.

Пример 2.2. В условиях примера 2.1 найти математическое ожидание случайной величины X — числа попаданий в цель после трех независимых выстрелов с вероятностью попадания $p = 0,5$ при каждом из них.

Решение.

Используя табл. 2.2, на основе оператора (2.15), получаем

$$m_x = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 = 1,5,$$

что соответствует механической интерпретации математического ожидания (распределение вероятностей на интервале от 0 до 3 симметрично относительно точки $x = 1,5$).

Полученный результат означает, что при достаточно большом числе таких стрельб в среднем в каждой из них будет получено полтора попадания в цель. Подчеркнем, что дробное значение математического ожидания в данном случае вполне правомерно, поскольку это значение — среднее.

Среди всех свойств математического ожидания, основные из которых будут рассмотрены ниже, выделим пока одно, состоящее в следующем. Если случайная величина Z является функцией случайной величины X , т. е. $Z = \varphi(X)$, а распределение аргумента X известно, то

$$M[Z] = \sum_{x_i} \varphi(x_i) p(x_i) \quad (2.17)$$

при дискретном аргументе и

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad (2.18)$$

при непрерывном.

Действительно, пусть $Z = \varphi(X) = X^2$, а аргументом X является дискретная случайная величина с возможными значениями x_1, x_2, x_3, x_4 , вероятности которых равны $p(x_1), p(x_2), p(x_3)$ и $p(x_4)$ соответственно (одна из таких случайных величин рассматривается в примере 2.1). Тогда возможные значения z_i случайной величины Z можно определить следующим образом:

$$z_1 = x_1^2, \quad z_2 = x_2^2, \quad z_3 = x_3^2, \quad z_4 = x_4^2.$$

При этом очевидно, что каждое из них будет появляться так же часто, как и соответствующее возможное значение x_i аргумента X . Следовательно, $p(z_1) = p(x_1)$, $p(z_2) = p(x_2)$, $p(z_3) = p(x_3)$, $p(z_4) = p(x_4)$ и, таким образом,

$$M[Z] = \sum_{z_i} z_i p(z_i) \quad (2.19)$$

эквивалентно соотношению (2.17).

2.3.2. Характеристики рассеивания

В качестве числовых характеристик рассеивания используются: дисперсия, среднее квадратическое (стандартное) отклонение, вероятностное (срединное) отклонение.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]. \quad (2.20)$$

В соответствии с соотношениями (2.17) и (2.18) дисперсия дискретной случайной величины вычисляется с помощью оператора

$$D[X] = \sum_{x_i} (x_i - m_x)^2 p(x_i), \quad (2.21)$$

а непрерывной — с помощью оператора

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.22)$$

Числовые значения дисперсий, получаемые на основе операторов (2.21) и (2.22), в дальнейшем будем обозначать символом D_x .

Пример 2.3. Найти дисперсию случайной величины в условиях примера 2.1.

Решение.

Используя табл. 2.2 и принимая во внимание, что для этой случайной величины $m_x = 1,5$, с помощью оператора (2.21), получаем

$$D_x = (0 - 1,5)^2 \cdot 0,125 + (1 - 1,5)^2 \cdot 0,375 + \\ + (2 - 1,5)^2 \cdot 0,375 + (3 - 1,5)^2 \cdot 0,125 = 0,75.$$

Дисперсия является одной из важнейших характеристик распределения, поскольку отражает основную особенность случайной величины — рассеивание ее возможных значений, причем достаточно “чутко” реагирует на различные оттенки в характере этого рассеивания. Для иллюстрации сказан-

ного ниже представлены (таблицами функции вероятности) распределения четырех дискретных случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4 , имеющих одинаковые математические ожидания $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = m_{x_4} = 1,5$, и приведены вычисленные значения их дисперсий:

$$X_1: \begin{array}{c|cccc} x_{1i} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(x_{1i}) & 0,20 & 0,30 & 0,30 & 0,20 \end{array}, \quad D_{x_1} = 1,05,$$

$$X_2: \begin{array}{c|cccc} x_{2i} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(x_{2i}) & 0,05 & 0,45 & 0,45 & 0,05 \end{array}, \quad D_{x_2} = 0,45,$$

$$X_3: \begin{array}{c|cccc} x_{3i} & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P(x_{3i}) & 0,20 & 0,30 & 0,30 & 0,20 \end{array}, \quad D_{x_3} = 2,65,$$

$$X_4: \begin{array}{c|cccc} x_{4i} & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P(x_{4i}) & 0,05 & 0,45 & 0,45 & 0,05 \end{array}, \quad D_{x_4} = 0,85.$$

Анализ этих данных позволяет заключить, что: при одинаковой длине интервала рассеивания большую дисперсию имеет та случайная величина, у которой крайние возможные значения более вероятны ($D_{x_1} > D_{x_2}$ и $D_{x_3} > D_{x_4}$); при увеличении длины рассеивания дисперсия может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, как при этом распределяются вероятности возможных значений случайной величины ($D_{x_3} > D_{x_1}$ и $D_{x_4} > D_{x_2}$, но $D_{x_4} < D_{x_1}$).

При практическом использовании дисперсии известным неудобством является то, что ее размерность равна квадрату размерности соответствующей случайной величины. Поэтому в приложениях чаще применяется другая числовая характеристика рассеивания — среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Средним квадратическим отклонением (его принято обозначать символом σ_x) называется положительный квадратный корень из дисперсии, т. е.:

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}. \quad (2.23)$$

Очевидно, что среднее квадратическое отклонение характеризует степень рассеивания возможных значений случайной

величины не хуже дисперсии, а его размерность совпадает с размерностью соответствующей случайной величины.

Заметим, что поскольку дисперсию связывают со средним квадратическим отклонением — соотношением (2.23), — ее обозначают иногда символом σ_x^2 .

Вероятное (срединное) отклонение используется в качестве числовой характеристики рассеивания применительно только к непрерывным случайным величинам, плотность распределения которых симметрична относительно вертикали, проходящей через точку математического ожидания. Для обозначения этой характеристики используются символы B_x (русское “вэ” от слова “вероятное”) или E_x .

Вероятным (срединным) отклонением называется половина интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который случайная величина попадает с вероятностью 0,5. Иначе говоря, вероятное (срединное) отклонение определяется из условия

$$P(|X - m_x| < B_x) = 0,5, \quad (2.24)$$

которое иллюстрируется рис. 2.15.

Возможность его использования в качестве характеристики рассеивания вытекает из того, что получаемая согласно условию (2.24) величина B_x однозначно определяется видом кривой $f(x)$ и поэтому хорошо “отслеживается” степень рассеивания случайной величины (рис. 2.16).

По своему смыслу вероятное (срединное) отклонение является характеристикой, позволяющей судить о том, из какого интервала будет принимать свои возможные значения случайная величина, в среднем, в половине всех ее наблюдений. Поэтому по информативности о степени рассеивания конкретной случайной величины оно более наглядно, чем дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Для сравнительной же оценки степени рассеивания нескольких случайных величин все три рассмотренные числовые характеристики одинаково удобны.

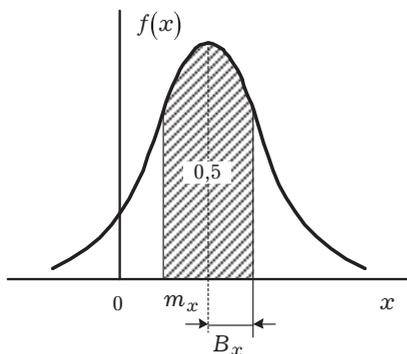


Рис. 2.15

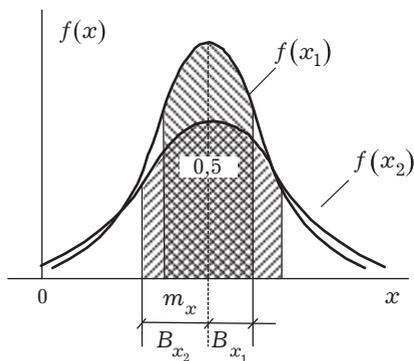


Рис. 2.16

2.3.3. Моменты случайной величины

Для описания распределения скалярной случайной величины в теории вероятностей может использоваться его механическая аналогия — распределение масс системы материальных точек, расположенных на одной прямой, при условии, что суммарная масса системы равна единице.

При описании распределения дискретной случайной величины можно представить, что массы, равные вероятностям $P(x_i)$, сосредоточены в точках возможных значений случайной величины. Механической аналогией распределения непрерывной случайной величины может служить такое распределение массы на прямой линии, при котором плотность массы в каждой точке равна плотности распределения $f(x)$ случайной величины в этой точке.

Подобная аналогия в описании распределения случайной величины позволяет трактовать ее математическое ожидание как координату центра масс системы материальных точек. Механическим аналогом дисперсии случайной величины является момент инерции системы материальных точек относительно центра масс. Чем больше степень сосредоточения массы около центра системы, тем меньше момент инерции системы и тем меньше дисперсия соответствующей случайной величины.

Механическая аналогия распределения случайной величины позволяет сделать некоторое обобщение понятия числовых характеристик путем введения моментов случайной величины.

В теории вероятностей широко используются начальные и центральные моменты случайной величины.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой величины:

$$a_k = M[X^k]. \quad (2.25)$$

С учетом зависимостей (2.17) и (2.18) получаем выражения для вычисления начального момента k -го порядка:

дискретной случайной величины

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k P(x_i), \quad (2.26)$$

непрерывной случайной величины

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx. \quad (2.27)$$

Из начальных моментов самостоятельное значение имеет момент первого порядка

$$a_1 = M[X], \quad (2.28)$$

который является математическим ожиданием случайной величины.

Начальные моменты высших порядков используются главным образом для вычисления центральных моментов.

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени соответствующей центрированной случайной величины

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]. \quad (2.29)$$

С учетом зависимостей (2.17) и (2.18) получим: для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k P(x_i), \quad (2.30)$$

для непрерывной случайной величины

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x) dx. \quad (2.31)$$

Из центральных моментов наибольшее значение имеет момент второго порядка

$$\mu_2 = M[(X - m_x)^2], \quad (2.32)$$

который является дисперсией случайной величины.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные. Например, второй центральный момент случайной величины (или ее дисперсия) может быть выражен через первый и второй начальные моменты:

$$\mu_2 = D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Из центральных моментов более высокого порядка находят применение моменты третьего и четвертого порядка.

Третий центральный момент используется для характеристики асимметрии распределения. Это объясняется тем, что для случайной величины, симметрично распределенной относительно своего математического ожидания, все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Если же распределение несимметрично, то нечетные центральные моменты отличны от нуля. За характеристику асимметрии принят центральный момент третьего порядка.

Для удобства переходят от момента третьего порядка к безразмерной характеристике, которая называется *коэффициентом асимметрии* и определяется по формуле

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}. \quad (2.33)$$

Говорят, что распределение имеет положительную асимметрию ($a_x > 0$), если мода распределения меньше математического ожидания ($Mo < m_x$), и наоборот ($a_x < 0$), если $Mo > m_x$.

Центральный момент четвертого порядка используется для характеристики островершинности или плосковершинности кривой плотности распределения. Безразмерная ха-

рактеристика островершинности распределения случайной величины называется *коэффициентом эксцесса*, или просто *эксцессом*, и определяется по формуле

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (2.34)$$

По значению C_x сравнивают кривую заданного распределения с кривой наиболее распространенного нормального распределения, которое принято за эталон и для которого

$$\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3, \text{ т. е. } C_x = 0.$$

Кривые распределений при $C_x > 0$ будут более островершинными по сравнению с кривой нормального распределения. Плосковершинные распределения имеют отрицательный эксцесс.

2.4. Основные теоретические распределения скалярных случайных величин

Реальные распределения большинства встречающихся на практике скалярных случайных величин достаточно хорошо представляются их моделями, которые называют теоретическими распределениями. Основные из этих распределений рассматриваются ниже.

Биномиальное распределение

Если распределение вероятностей на конечном множестве возможных значений x_i дискретной скалярной случайной величины X , определенном последовательностью чисел $0, 1, 2, \dots, N$, определяется формулой Бернулли, т. е.:

$$P(X = x_i) = C_N^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.35)$$

то это распределение называют биномиальным.

Из выражения (2.35) следует, что биномиальное распределение определяется двумя параметрами: N и p , причем можно показать, что они связаны с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X соотношениями

$$m_x = Np, D_x = Np(1 - p). \quad (2.36)$$

Биномиальному распределению подчиняется, например, число наступлений события при осуществлении испытаний в схеме Бернулли. В этом случае параметр N равен числу испытаний, а параметр p — вероятности наступления события в каждом из них.

Напомним, что значения вероятностей (2.35) табулированы и представлены в приложении 1 табл. 3.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона является предельным для биномиального при $N \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$, если, однако, $Np = \text{const} = m$.

Для распределения Пуассона функция вероятности имеет вид

$$P(X = x_i) = \frac{m^{x_i}}{x_i!} e^{-m}. \quad (2.37)$$

Множество возможных значений x_i представляется бесконечным рядом чисел 0, 1, 2, 3, ..., а особенностью параметра m является то, что он равен математическому ожиданию и дисперсии соответствующей случайной величины, т. е.:

$$m = m_x = D_x$$

(ввиду того, что распределение Пуассона типично для безразмерных случайных величин, такое равенство вполне правомерно).

Практически распределение Пуассона имеет место при конечном, но достаточно большом числе N испытаний в схеме Бернулли, когда вероятность близка к нулю, в связи с чем его называют иногда распределением редких событий.

Значения вероятностей (2.37) табулированы и представлены в приложении 1 табл. 6.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательным называют распределение непрерывной случайной величины X , которое задается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

или функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Графики плотности вероятности (2.38) и функции распределения (2.39) представлены на рис. 2.17 и 2.18 соответственно.

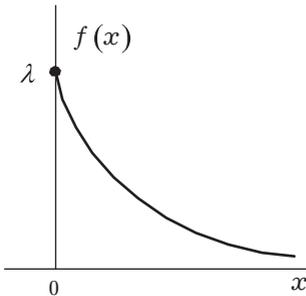


Рис. 2.17

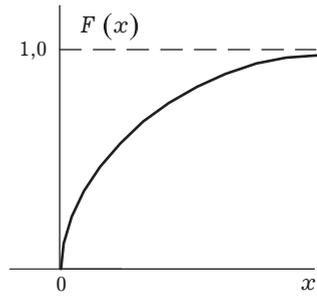


Рис. 2.18

Показательное распределение имеет единственный параметр λ , причем для этого распределения

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Данное распределение достаточно хорошо описывает распределение времени безотказной работы весьма обширного класса элементов технических систем, в связи с чем широко применяется при оценке их надежности.

Показательное распределение обладает важным свойством. Если случайная величина X имеет показательное распределение, а событие $X > x$ произошло, то случайная величина $Y = X - x$ имеет также показательное распределение с тем же самым параметром $\lambda = \frac{1}{m_x}$.

Это свойство означает, что если показательное распределение имеет случайная величина T — время безотказной рабо-

ты агрегата и если агрегат уже проработал нормально какое-то количество часов, то это никак не влияет на закон распределения оставшегося времени безотказной работы агрегата. Иначе говоря, если среднее время безотказной работы агрегата $m_t = 1000$ ч и если агрегат уже проработал 500 ч, то среднее время последующей работы этого агрегата опять-таки равно 1000 ч.

Равномерное распределение

Равномерным принято называть распределение непрерывной скалярной случайной величины X , если оно представляется плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{при } x > b, \end{cases} \quad (2.40)$$

так что соответствующая функция распределения определяется соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (2.41)$$

Графики функций (2.40) и (2.41) представлены на рис. 2.19 и 2.20.

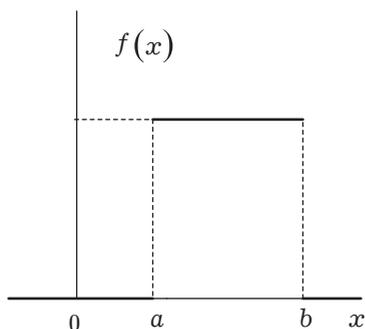


Рис. 2.19

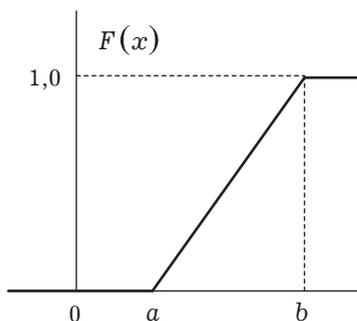


Рис. 2.20

Концы a и b интервала равномерного распределения являются его параметрами и определяют значения числовых характеристик этого распределения, причем

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.42)$$

При равномерном распределении случайной величины вероятность ее попадания в интервал от x_1 до x_2 , принадлежащий интервалу $[a, b]$, определяется формулой

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}, \quad (2.43)$$

которая может быть получена из соотношений (2.20) и (2.41). Таким образом, эта вероятность равна отношению длины рассматриваемого интервала к длине всего интервала распределения, т. е. не зависит от его положения внутри $[a, b]$.

В инженерной практике используются некоторые частные случаи равномерного распределения. Например, при моделировании случайных факторов на ЭВМ применяется равномерное распределение в интервале от 0 до 1, для которого (рис. 2.21)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

и следовательно, в соответствии с формулами (2.42)

$$m_x = \frac{1}{2}, \quad D_x = \frac{1}{12}. \quad (2.45)$$

Другой частный случай равномерного распределения используется при оценке точности технических измерений. Как известно, ошибка округления отсчета по шкале любого измерительного прибора до ближайшего деления с ценой $2L$ является случайной, а все ее значения равновозможны и по абсолютной величине не превышают L . Следовательно, эта ошибка имеет равномерное распределение в интервале от $a = -L$ до $b = +L$ (рис. 2.22), т. е.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2L}, & \text{при } |x| \leq L, \\ 0, & \text{при } |x| > L, \end{cases} \quad (2.46)$$

а из соотношений (2.42) следует, что ее числовые характеристики определяются равенствами

$$m_x = 0, D_x = \frac{L^2}{3}. \quad (2.47)$$

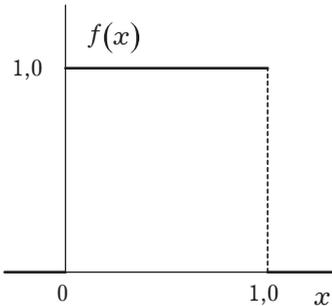


Рис. 2.21

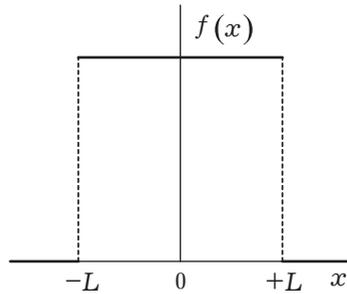


Рис. 2.22

Нормальное распределение

Нормальное распределение непрерывной скалярной случайной величины X определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.48)$$

где m_x — математическое ожидание;

σ_x — среднее квадратическое (стандартное) отклонение этой случайной величины;

или функцией распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.49)$$

графики которых представлены на рис. 2.23 и 2.24.

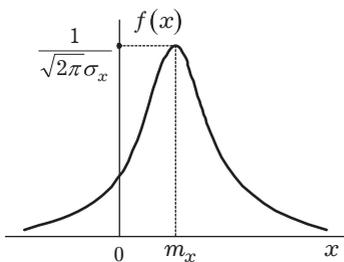


Рис. 2.23

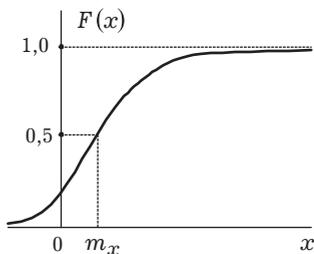


Рис. 2.24

Из соотношения (2.48) следует, что при нормальном распределении числовые характеристики m_x и σ_x являются его параметрами и, следовательно, полностью определяют это распределение.

Нормальное распределение присуще очень широкому кругу случайных величин, встречающихся в инженерной практике. Это объясняется тем, что для обширного класса случайных факторов объективно выполняются условия, в которых формируется именно нормальное распределение соответствующих случайных величин. Суть этих условий состоит в следующем: если какая-либо случайная величина по своей природе является суммой случайных слагаемых с ограниченными дисперсиями и распределенных как угодно, то распределение этой случайной величины будет тем ближе к нормальному, чем больше таких слагаемых она представляет. (Строгое доказательство сходимости распределения суммы случайных величин к нормальному составляет содержание центральной предельной теоремы теории вероятностей, доказанной А. М. Ляпуновым).

Известно, например, что рассеивание точек падения снаряда по дальности при стрельбе из артиллерийского орудия на постоянных установках прицельных устройств является следствием суммарного влияния большого числа случайных источников. Среди них можно указать фактическое положение ствола в момент выстрела, отклонения от номиналов начальной скорости снаряда, его веса и аэродинамических характеристик, а также отклонения реальных значений параметров атмосферы

ры от стандартных. Каждый из этих источников, в свою очередь, может быть представлен суммой составляющих его случайных компонентов, играющих примерно одинаковую роль в формировании рассеивания конечного результата — точки падения снаряда. Поэтому его распределение считается практически нормальным.

Практически нормальным можно считать и распределение других непрерывных случайных величин, являющихся результатом суммарного влияния большого числа случайных источников.

Необходимо отметить, что интеграл в правой части равенства (2.49) к элементарным функциям не сводится. Поэтому значения функции нормального закона распределения могут быть получены лишь путем численного интегрирования плотности (2.48), результаты которого для постоянного практического использования целесообразно табулировать. Очевидно, что соответствующая таблица должна иметь три входа: верхний предел интегрирования x и параметры m_x , σ_x , т. е. представляется слишком громоздкой. Оказывается, однако, что для решения практических задач достаточно составить только таблицу функции стандартного нормального распределения с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$, т. е. таблицу функции

$$F_T(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.50)$$

имеющую один вход — верхний предел интегрирования y (табл. 1 приложения 1).

Действительно, используя в интеграле (2.49) замену переменной интегрирования x на

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad (2.51)$$

и учитывая, что при такой замене $dt = \frac{dx}{\sigma_x}$, а верхний предел интеграла x следует заменить на $\frac{x - m_x}{\sigma_x}$, получим

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_T\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.52)$$

Таким образом, табличная функция (2.50) обеспечивает возможность вычисления значений функции нормального распределения с любыми значениями параметров m_x и σ_x . Поэтому с ее помощью можно, например, рассчитать вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в тот или иной интервал при заданных значениях m_x и σ_x . В самом деле, поскольку всегда эта вероятность равна разности значений функции распределения на границах интервала, т. е.:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

для рассматриваемого случая с учетом соотношения (2.52) имеем

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx,$$

откуда найдем

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_T\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - F_T\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.53)$$

Отметим, что значение табличной функции (2.50) при каждом значении ее аргумента y геометрически представляется площадью под кривой плотности

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2.54)$$

слева от точки y (рис. 2.25).

Поскольку эта кривая симметрична относительно нуля, площадь под ней слева от точки $-y$, равная $F_T(-y)$, одинакова с площадью справа от точки y . Вся же площадь под данной кривой, представляющей плотность распределения (нормального с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$), равна единице. Поэтому из рис. 2.25 следует, что

$$F_T(-y) = 1 - F_T(y). \quad (2.55)$$

Применительно к нормальному распределению составлена также таблица функции

$$\Phi_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.56)$$

которую называют функцией Лапласа (или интегралом вероятностей). Она является нечетной функцией своего аргумента, т. е.:

$$\Phi_T(-y) = -\Phi_T(y), \quad (2.57)$$

и геометрически представляется площадью под кривой (2.54) между точками $-y$ и y (рис. 2.26).

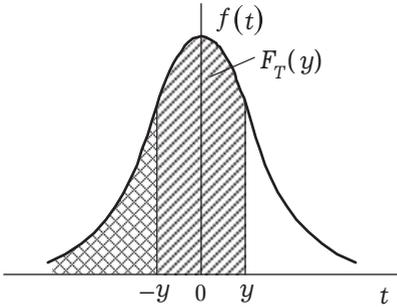


Рис. 2.25

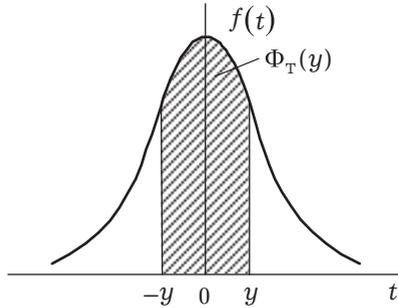


Рис. 2.26

Сопоставляя друг с другом рис. 2.25 и 2.26, нетрудно установить, что

$$F_T(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi_T(y).$$

Откуда находим

$$\Phi_T(y) = 2F_T(y) - 1. \quad (2.58)$$

Поэтому равенство (2.53) можно представить в виде

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \frac{1}{2} \left[\Phi_T \left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_2} \right) - \Phi_T \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_2} \right) \right]. \quad (2.59)$$

Таким образом, функция Лапласа может использоваться для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (при этом только всегда необходимо принимать во внимание соотношение (2.57)).

Функция Лапласа оказывается наиболее удобной при вычислении вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в интервал, симметричный относительно ее математического ожидания. Действительно, если обозначить длину такого интервала через $2L$, то в соответствии с рис. 2.27 его левая и правая границы будут определяться соотношениями $x_1 = m_x - L$ и $x_2 = m_x + L$. Поэтому по (2.59) с учетом (2.57), получим

$$\begin{aligned}
 P(|X - m_x| < L) &= P(m_x - L \leq X < m_x + L) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\Phi_T \left(\frac{L}{\sigma_x} \right) - \Phi_T \left(-\frac{L}{\sigma_x} \right) \right] = \Phi_T \left(\frac{L}{\sigma_x} \right). \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

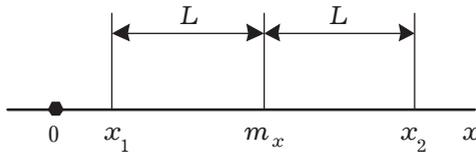


Рис. 2.27

В частности, если $L = 3\sigma_x$, то $P(|X - m_x| < L) = \Phi_T(3) = 0,9973$. Следовательно, при нормальном распределении случайной величины ее возможные значения практически достоверно (с вероятностью 0,9973) рассеиваются относительно математического ожидания в пределах, не превышающих три стандартных отклонения в каждую сторону. Это утверждение обычно называют правилом “трех сигм”.

С помощью табличной функции Лапласа можно установить соотношение между средним (вероятным) и стандартным отклонениями при нормальном распределении. Для этого,

очевидно, необходимо принять в равенстве (2.60) $L = B_x$ и положить определяемую им вероятность равной 0,5, т. е. найти соотношение $\frac{B_x}{\sigma_x}$ из условия $\Phi_T\left(\frac{B_x}{\sigma_x}\right) = 0,5$.

Отсюда с учетом (2.58) обратным интерполированием по табл. 2 приложения получаем

$$\frac{B_x}{\sigma_x} = 0,6745,$$

так что

$$B_x = 0,6745\sigma_x \approx \frac{2}{3}\sigma_x. \quad (2.61)$$

Это соотношение иногда представляют в виде

$$B_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x, \quad (2.62)$$

где $\rho = 0,4769$ — константа нормального распределения.

Распределение Релея

Случайная величина R подчиняется закону Релея, если плотность ее распределения определяется выражением

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \leq 0, \\ 2ar e^{-ar^2}, & \text{при } r > 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

где a — параметр распределения ($a > 0$).

Распределение Релея имеет случайная величина

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (2.64)$$

где X и Y — независимые нормально распределенные случайные величины, у которых дисперсии одинаковы, а математические ожидания равны нулю.

В этом случае параметр распределения

$$a = \frac{1}{2\sigma_r^2},$$

где $\sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Это распределение широко применяется в теории эффективности вооружения. Отклонение точки взрыва боеприпаса от

точки прицеливания (т. пр.) связано с абсциссой и ординатой этой точки соотношением вида (2.64) (рис. 2.28).

Поэтому, если систематические ошибки отсутствуют и рассеивание точки взрыва боеприпаса круговое ($\sigma_x = \sigma_y$), то это отклонение имеет распределение Релея.

В теории эффективности выражение для плотности распределения обычно записывают в несколько ином виде.

Если σ — стандартное отклонение кругового рассеивания боеприпасов относительно точки прицеливания, то $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ и

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \leq 0, \\ \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } r > 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

Функция распределения $F(r)$ случайной величины R , подчиняющейся закону Релея, определяется равенством

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } r > 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

а основные числовые характеристики m_r и D_r вычисляют по формулам

$$m_r = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma = 1,233\sigma, \quad (2.67)$$

$$D_r = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 = 0,4292\sigma^2. \quad (2.68)$$

Графики плотности и функции распределения изображены на рис. 2.29 и 2.30.

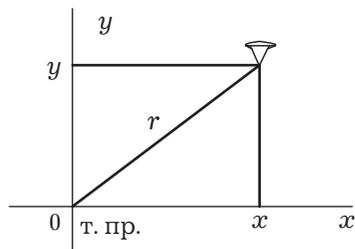


Рис. 2.28

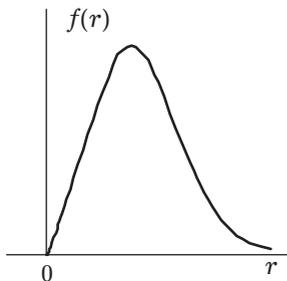


Рис. 2.29

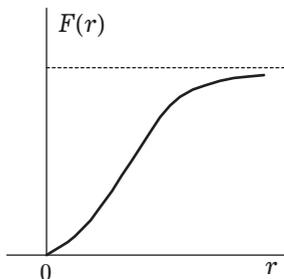


Рис. 2.30

Гамма-распределение

Случайная величина X имеет гамма-распределение, если плотность распределения определяется выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция;

α и β — параметры распределения ($\beta > 0$).

В частном случае, если параметр α принимает лишь целочисленные значения $k = 0, 1, 2, \dots$, то

$$\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k) = k!$$

и выражение для плотности распределения при $x > 0$ может быть переписано в виде

$$f(x) = \frac{x^k}{k!\beta^{k+1}} e^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (2.70)$$

Для гамма-распределения основные числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию определяют по формулам

$$m_x = \beta(\alpha + 1), D_x = \beta^2(\alpha + 1). \quad (2.71)$$

Гамма-распределение находит широкое применение в теории надежности. Оно используется при исследовании надеж-

ности аппаратуры в период ее приработки и работы в форсированных режимах.

Если плотность гамма-распределения определяется выражением (2.70), то говорят, что случайная величина X имеет распределение Эрланга k -го порядка. Показательное распределение является распределением Эрланга нулевого порядка. Если в выражении (2.70) положить $k = 0$, получим (2.38).

Одним из частных случаев гамма-распределения является χ^2 (хи-квадрат) — распределение с k степенями свободы, для которого плотность распределения определяется выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Формула (2.72) следует из (2.69) при $\beta = 2$, $\alpha = \frac{k}{2} - 1$, ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Если случайная величина X подчиняется χ^2 -распределению, то из (2.71) следует $m_x = 3k$, $D_x = 2k$.

χ^2 -распределение широко используется при статистической обработке и анализе результатов испытаний вооружения.

Распределение Стьюдента

Случайная величина X имеет распределение Стьюдента, если плотность распределения определяется выражением

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{k\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.73)$$

где k — целочисленный параметр, называемый числом степеней свободы.

Данное распределение широко используется при обработке результатов испытаний вооружения.

При неограниченном увеличении k ($k > 30$) плотность распределения Стьюдента приближается к плотности нормального распределения, т. е. для распределения Стьюдента нормальное распределение является предельным.

2.5. Распределение случайного вектора

Распределения векторных случайных величин представляются теми же основными формами, что и распределения скалярных. В дальнейшем ограничимся рассмотрением этих форм применительно лишь к двумерному случайному вектору (системе двух случайных величин).

Функция вероятности используется только для случайных векторов с дискретными компонентами и обычно задается таблицей, где указываются возможные значения x_i и y_j компонент X и Y случайного вектора $\{X, Y\}$, а также вероятности $p(x_i, y_j)$ всех пар этих значений (табл. 2.3).

Очевидно, что при этом

$$\sum_{x_i} \sum_{y_j} p(x_i, y_j) = 1.$$

Таблица 2.3

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$...	$p(x_i, y_1)$...	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$...	$p(x_i, y_2)$...	$p(x_n, y_2)$
...
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$...	$p(x_i, y_j)$...	$p(x_n, y_j)$
...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$...	$p(x_i, y_m)$...	$p(x_n, y_m)$

Функцией распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ называется функция $F(x, y)$ двух аргументов x и y , которая при каждой комбинации их значений задает веро-

ятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$, т. е.:

$$F(x, y) = P(X < x, y < Y). \quad (2.74)$$

Таким образом, функция распределения $F(x, y)$ задает вероятность того, что точка со случайными координатами X и Y (случайная точка $\{X, Y\}$) окажется где-либо в пределах бесконечного квадранта плоскости xOy , правая вершина которого имеет координаты x и y (рис. 2.31).

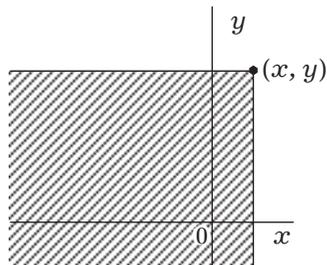


Рис. 2.31

Функция распределения случайного вектора $\{X, Y\}$ с дискретными компонентами связана с вероятностями $p(x_i, y_j)$ комбинацией их всевозможных значений соотношением

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p(x_i, y_j). \quad (2.75)$$

Она представляется в трехмерном пространстве ступенчатой (для случайного вектора $\{X, Y\}$ с дискретными компонентами) или гладкой поверхностью (для случайного вектора с непрерывными компонентами).

Основными свойствами функции распределения двумерного случайного вектора являются следующие:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, поскольку функция $F(x, y)$ представляется вероятностями.

$$2. F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1,$$

$$F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(y),$$

$$F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x),$$

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0, \quad (2.76)$$

в чем нетрудно убедиться, обращаясь к рис. 2.31.

3. Функция распределения $F(x, y)$ — неубывающая функция каждого из своих аргументов

$$\begin{aligned} F(x_2, y) &\geq F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1, \\ F(x, y_2) &\geq F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1, \\ F(x_2, y_2) &\geq F(x_1, y_1), \text{ если } x_2 > x_1 \text{ или } y_2 > y_1, \end{aligned}$$

что опять-таки следует из рис. 2.31.

4. Вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат $0x, 0y$ (рис. 2.32), равна алгебраической сумме значений функции распределения $F(x, y)$ в вершинах этого прямоугольника

$$\begin{aligned} P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y) = \\ F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - \\ - F(x, y + \Delta y) + F(x, y). \end{aligned} \quad (2.77)$$

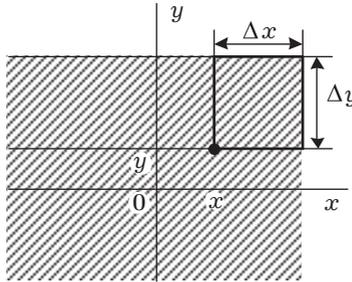


Рис. 2.32

Отсюда следует, что вероятность совпадения случайной точки $\{X, Y\}$ с любой точкой плоскости, как и вероятность ее попадания на любую линию этой плоскости, равна нулю.

Плотностью распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ называется функция $f(x, y)$ аргументов, которая определяется следующим образом:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}, \quad (2.78)$$

т. е. представляет собой предел отношения вероятности попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник со сторонами Δx и Δy , примыкающий к точке (x, y) , когда оба его размера стремятся к нулю (если такой предел существует).

С учетом соотношения (2.77) равенство (2.78) можно представить в виде

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (2.79)$$

что обеспечивает возможность нахождения плотности $f(x, y)$, если функция распределения $F(x, y)$ задана.

Геометрически плотность распределения $f(x, y)$ представляется поверхностью в трехмерном пространстве и используется применительно только к случайным векторам с непрерывными компонентами.

Плотность распределения двумерного случайного вектора имеет следующие основные свойства.

1. $f(x, y) \geq 0$ как предел отношения неотрицательной величины к положительной.

$$2. F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy, \quad (2.80)$$

что непосредственно вытекает из соотношения (2.79).

3. Вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в какую-либо область G на плоскости xOy определяется равенством

$$P(\{X, Y\} \in G) = \iint_G f(x, y) dx dy, \quad (2.81)$$

т. е., численно равна объему под поверхностью $f(x, y)$ над этой областью (рис. 2.33).

Отсюда следует, что с точностью до бесконечно малых высших порядков вероятность попадания случайной точки $\{X, Y\}$ в бесконечно малую окрестность точки (x, y) $P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y)$ на плоскости xOy определяется равенством

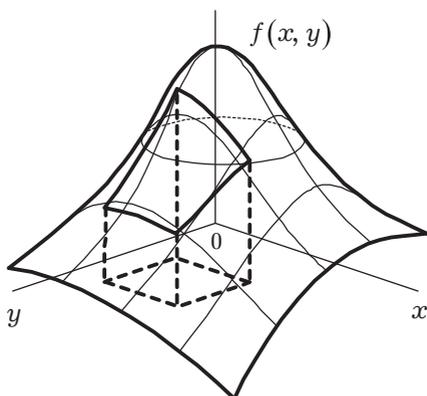


Рис. 2.33

$$P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y) = f(x, y)dx dy, \quad (2.82)$$

правую часть которого называют элементом вероятности.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ как вероятность достоверного события, так что весь объем под поверхностью плотности распределения равен единице.

Размерность плотности $f(x, y)$ обратна произведению размерностей компонент X и Y случайного вектора, что полезно иметь в виду при решении практических задач, связанных с нахождением плотностей распределения.

Функцию и плотность распределения двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ принято задавать на всей плоскости xOy .

2.6. Частные и условные распределения компонент случайного вектора

2.6.1. Частные распределения

Распределение одной или нескольких компонент, входящих в случайный вектор (систему случайных величин), называют частным распределением.

Частные распределения случайных величин, составляющих систему, весьма часто используются при решении практических задач. Например, если рассматривается система трех случайных величин $\{X, Y, Z\}$, то помимо частных распределений отдельных случайных величин рассматривают и частные распределения различных пар случайных величин $\{X, Y\}$, $\{X, Z\}$, $\{Y, Z\}$.

В дальнейшем рассмотрим частные распределения для системы двух случайных величин.

При известном распределении вектора $\{X, Y\}$ частные распределения определяются следующим образом. Предположим компоненты X и Y — дискретные случайные величины, совместное распределение которых задано табл. вида 2.3. Вероятности $p(x_i)$, $p(y_j)$ возможных значений компонент X и Y , которые представляют частные распределения каждой из них, определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} p(x_i) &= \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ p(y_j) &= \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Таким образом, вероятности возможных значений компоненты X получаются суммированием записанных в табл. 2.3 чисел по строкам, а вероятности возможных значений компоненты Y — суммированием этих чисел по столбцам.

Если распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано функцией распределения, то с учетом свойства функции распределения частные функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ следует определять из соотношений

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \\ F(y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Для вектора с непрерывными компонентами плотности $f(x)$ и $f(y)$ соответствующих частных распределений могут быть получены на основе равенства (2.11)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ и } f(y) = \frac{dF(y)}{dy}.$$

В случае, если распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано плотностью $f(x, y)$, то плотности $f(x)$ и $f(y)$ частных распределений его компонент могут быть получены из соотношений

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \\ f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Выражения (2.85) получены исходя из свойств плотности и функции распределения (равенства 2.79 и 2.80).

Из соотношений (2.85) следует, что геометрически плотность $f(x)$ частного распределения компоненты X при каждом значении аргумента x представляется площадью вертикального сечения фигуры, ограниченной поверхностью $f(x, y)$, причем секущая плоскость проходит через точку x перпендикулярно оси Ox (см. рис. 2.33). Аналогичную геометрическую интерпретацию дают и плотности $f(y)$ частного распределения компоненты Y .

Пример 2.4. Светящаяся точка может занять любое положение на экране осциллографа, который представляется кругом радиуса R . Найти распределения ее прямоугольных координат относительно центра экрана.

Решение.

По условиям задачи положение точки в произвольный момент времени описывается двумерным случайным вектором, компонентами которого являются ее текущие координаты X и Y в заданной системе координат. Плотность $f(x, y)$ распределения этого случайного вектора может быть получена следующим образом. Поскольку нахождение ее в окрестности любой точки круга радиуса R является равновозможным, то, используя геометрический способ определения вероятности, получим

$$P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{\pi R^2}.$$

Согласно соотношению (2.78) распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ описывается плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi R^2, & \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases} \quad (2.86)$$

представленной на рис. 2.34 (равномерное распределение в круге радиуса R с центром в начале координат).

Плотность $f(x, y)$ отлична от нуля для любого значения x при

$$-\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq +\sqrt{R^2 - y^2},$$

(рис. 2.35), а для любого значения y при

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{R^2 - x^2}.$$

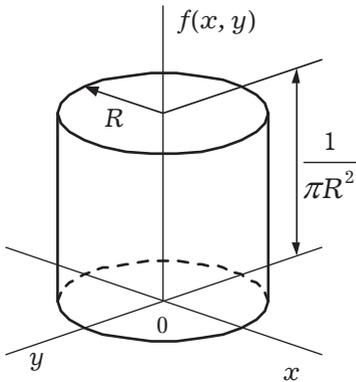


Рис. 2.34

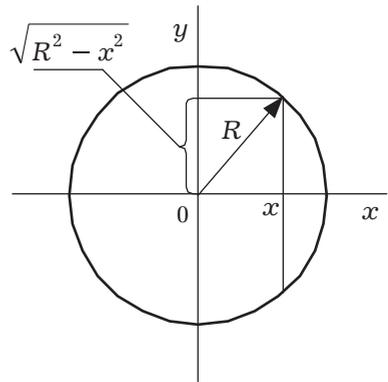


Рис. 2.35

Поэтому в соответствии с соотношением (2.85) можно записать

$$f(x) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}$$

и

$$f(y) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2}} dx = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2}.$$

Таким образом, обе компоненты случайного вектора $\{X, Y\}$ имеют одинаковые (по виду) частные распределения. Графики их плотностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, & \text{при } |x| \leq R, \\ 0, & \text{при } |x| > R, \end{cases} \quad (2.87)$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2}, & \text{при } |y| \leq R, \\ 0, & \text{при } |y| > R \end{cases} \quad (2.88)$$

представлены на рис. 2.36 (а и б).

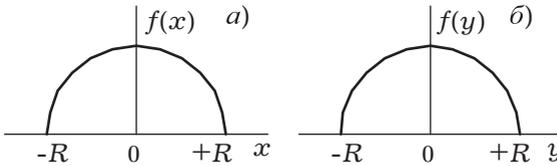


Рис. 2.36

2.6.2. Условные распределения. Стохастическая зависимость случайных величин

Распределение одной или нескольких входящих в систему случайных величин, найденное при условии, что другие входящие в систему случайные величины приняли определенные значения, называют условным распределением.

Условные распределения могут быть получены, если распределение случайного вектора (системы случайных величин) известно.

Если компоненты вектора $\{X, Y\}$ являются дискретными случайными величинами, то их условные распределения описываются вероятностями

$$P(x_i/y_j) = P(X = x_i/Y = y_j)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, при каждом $j = 1, 2, \dots, m$,

$$P(y_j/x_i) = P(Y = y_j/X = x_i)$$

для всех $j = 1, 2, \dots, m$, при каждом $i = 1, 2, \dots, n$.

Исходы испытания, заключающиеся в том, что $X = x_i$ и $Y = y_j$, являются случайными событиями. Распределение случайного вектора $\{X, Y\}$ задано вероятностями $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$. Поэтому, используя правило умножения вероятностей, можно записать

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \quad (2.89)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$ при каждом $j = 1, 2, \dots, m$,

$$p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

для всех $j = 1, 2, \dots, m$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$,

где $p(x_i)$, $p(y_j)$ — вероятности, представляющие частные распределения компонент X и Y .

Из соотношений (2.89) следует, что сумма вероятностей, представляющих то или иное условное распределение дискретных компонент случайного вектора, равна единице

$$\sum_{i=1}^n p(x_i/y_j) = 1 \text{ и } \sum_{j=1}^m p(y_j/x_i) = 1.$$

Для случайного вектора $\{X, Y\}$ с непрерывными компонентами условные распределения обычно задают соответствующими плотностями $f(x/y)$ и $f(y/x)$. Формулы для их определения могут быть получены заменой в левых и правых частях выражений (2.89) вероятностей $p(x_i/y_j)$, $p(y_j/x_i)$, $p(x_i, y_j)$, $p(x_i)$, $p(y_j)$ соответствующими элементами вероятностей, т. е. представлением в виде

$$f(x/y)dx = \frac{f(x, y)dxdy}{f(y)dy},$$

$$f(y/x)dy = \frac{f(x, y)dxdy}{f(x)dx},$$

откуда следует, что

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)},$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}.$$
(2.90)

Плотности условных распределений компонент случайного вектора обладают теми же свойствами, что и плотности безусловных (частных) распределений.

Функции условных распределений непрерывных компонент случайного вектора $\{X, Y\}$ при необходимости могут быть получены на основе соотношения (2.12) непосредственно из выражений (2.90)

$$F(x/y) = \frac{1}{f(y)} \int_{-\infty}^x f(x,y) dx,$$

$$F(y/x) = \frac{1}{f(x)} \int_{-\infty}^y f(x,y) dy.$$

Для условных распределений, как и для безусловных, могут быть определены соответствующие числовые характеристики.

Пример 2.5. Найти плотности условных распределений компонент случайного вектора $\{X, Y\}$ при исходных данных примера 2.4.

Решение.

В условиях данного примера плотность $f(x, y)$ случайного вектора $\{X, Y\}$ задана соотношениями (2.86), а плотности $f(x)$ и $f(y)$ частных распределений его компонент — соотношениями (2.87) и (2.88). Поэтому непосредственно по формулам (2.88) получаем

$$f(x/y) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}; \quad f(y/x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}},$$

т. е., любое из условных распределений каждой компоненты рассматриваемого случайного вектора является равномерным

типа (2.46). При этом длина интервала распределения компоненты $X(Y)$ определяется фиксированным значением компоненты $Y(X)$, играющим роль условия. Окончательно плотности условных распределений запишутся в виде

$$f(x/y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - y^2}}, & \text{при } |x| \leq \sqrt{R^2 - y^2}, \\ 0, & \text{при } |x| > \sqrt{R^2 - y^2}. \end{cases} \quad (2.91)$$

$$f(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}, & \text{при } |y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \\ 0, & \text{при } |y| > \sqrt{R^2 - x^2}. \end{cases} \quad (2.92)$$

Графики условных плотностей (2.91) при различных значениях y вместе с графиком соответствующей частной плотности (2.87) представлены на рис. 2.37.

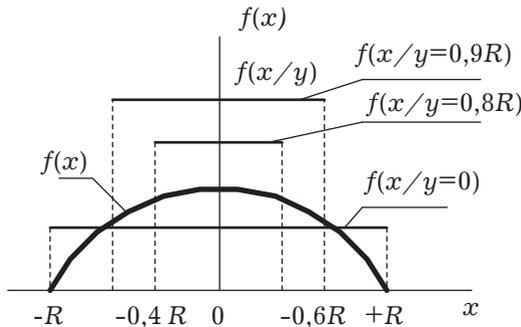


Рис. 2.37

Из рис. 2.37 видно, что условное распределение $f(x/y)$ зависит от того, какие значения принимает Y , причем оно не совпадает с частным распределением $f(x)$. Аналогичные выводы справедливы и для условного распределения $f(y/x)$ компоненты Y .

Полученный результат позволяет заключить, что случайные величины X и Y , составляющие систему $\{X, Y\}$, могут быть связаны особого типа зависимостью, которая проявляется в том, что одна из них “реагирует” на изменение другой измене-

нием своего распределения. Такую зависимость называют стохастической. При стохастической зависимости можно указать, какое распределение будет иметь одна из случайных величин при известном значении другой. Наличие стохастической зависимости между случайными величинами устанавливается на основе анализа их условных распределений.

Случайная величина X стохастически не зависит от случайной величины Y , если при любом фиксированном значении $Y = y$ ее условное распределение оказывается одинаковым и совпадает с частным распределением, т. е., если для дискретной случайной величины

$$p(x_i/y_j) = p(x_i) \quad (2.93)$$

при всех $y_j, j = 1, 2, \dots, m,$

а для непрерывной

$$f(x/y) = f(x) \quad (2.94)$$

при каждом y .

Невыполнение этих условий указывает на наличие стохастической зависимости случайной величины X от случайной величины Y . Стохастическая независимость, как и зависимость, всегда является взаимной (в дальнейшем слово “стохастическая” будем опускать).

Для независимых случайных величин справедливы равенства

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j), \quad (2.95)$$

если они дискретны, и

$$f(x, y) = f(x)f(y), \quad (2.96)$$

если непрерывны.

Применительно к независимым случайным величинам дискретного и непрерывного типа справедливо также равенство

$$F(x, y) = F(x)F(y). \quad (2.97)$$

Равенства (2.95), (2.96) и (2.97) являются формальными признаками независимости случайных величин.

2.7. Числовые характеристики векторных случайных величин

Основными числовыми характеристиками двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ являются математические ожидания m_x, m_y и дисперсии D_x, D_y (стандартные отклонения σ_x, σ_y) его компонент. При этом точка с координатами (m_x, m_y) на плоскости xOy определяет центр рассеивания случайной точки $\{X, Y\}$, а дисперсии D_x, D_y характеризуют степень ее рассеивания в направлении осей Ox и Oy . Однако они не отражают взаимного влияния случайных величин при их совместном рассмотрении, что вызывает необходимость введения дополнительных числовых характеристик.

Моменты распределения случайного вектора

Числовые характеристики случайного вектора вводятся через понятия начальных и центральных моментов.

Начальным моментом $(k + s)$ -го порядка системы $\{X, Y\}$ называется математическое ожидание произведения k -й степени случайной величины X на s -ю степень случайной величины Y

$$\alpha_{k,s} = M[X^k \cdot Y^s]. \quad (2.98)$$

В развернутом виде выражение для начального момента $(k + s)$ -го порядка случайного вектора $\{X, Y\}$ записывается:

для дискретного случайного вектора

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p(x_i, y_j); \quad (2.99)$$

для непрерывного случайного вектора

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy. \quad (2.100)$$

На практике наиболее употребительными начальными моментами являются моменты первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,0} &= M[X^1 \cdot Y^0] = M[X] = m_x, \\ \alpha_{0,1} &= M[X^0 \cdot Y^1] = M[Y] = m_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

Таким образом, начальные моменты первого порядка являются математическими ожиданиями входящих в систему случайных величин.

Центральным моментом $(k + s)$ -го порядка случайного вектора $\{X, Y\}$ называется математическое ожидание произведения k -й и s -й степеней соответствующих центрированных случайных величин

$$\mu_{k,s} = M[(X - m_x)^k (Y - m_y)^s]. \quad (2.102)$$

В развернутом виде формулы для центральных моментов $(k + s)$ -го порядка запишутся в виде:

для системы дискретных случайных величин

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p(x_i, y_j); \quad (2.103)$$

для системы непрерывных случайных величин

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy. \quad (2.104)$$

На практике наибольшее применение имеют центральные моменты второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \mu_{2,0} &= M[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0] = M[(X - m_x)^2] = D_x, \\ \mu_{0,2} &= M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2] = M[(Y - m_y)^2] = D_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Таким образом, рассмотренные центральные моменты второго порядка являются дисперсиями случайных величин, входящих в систему, и характеризуют индивидуальные рассеивания этих величин относительно центра распределения.

Кроме того к числу основных числовых характеристик двумерного случайного вектора относится еще один смешанный центральный момент второго порядка, называемый *моментом связи* $K_{x,y}$ (его называют также *корреляционным моментом* или *ковариацией*), который определяется следующим образом

$$\mu_{1,1} = K_{xy} = M[(X - m_x)^1 (Y - m_y)^1], \quad (2.106)$$

и может быть либо положительным, либо отрицательным.

Вычисляется момент связи с использованием выражения

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y)p(x_i, y_j), \quad (2.107)$$

если случайные величины X и Y дискретны, или выражения

$$K_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy, \quad (2.108)$$

если они непрерывны.

Момент связи является характеристикой частного случая стохастической зависимости — так называемой корреляционной зависимости или корреляции. Она проявляется в том, что при изменении одной случайной величины математическое ожидание другой изменяется по линейному закону в ту же сторону (если $K_{x,y} > 0$) или в противоположную (если $K_{x,y} < 0$). Иначе говоря, например, с возрастанием одной случайной величины другая в среднем при $K_{x,y} > 0$ тоже возрастает (линейно) — имеет место положительная корреляция, а при $K_{x,y} < 0$ уменьшается (опять-таки линейно) — имеет место отрицательная корреляция.

Случайные величины X и Y оказываются коррелированными, если они имеют общую случайную составляющую. Например,

$$\begin{aligned} X &= Z + U, \\ Y &= Z + V. \end{aligned}$$

Случайная величина Z , изменяясь в какую-либо сторону, будет изменять в ту же сторону случайные величины X и Y . Однако связь между ними проявится не как функциональная, так как на ней отражаются еще и рассеивания слагаемых U и V . В результате этого при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин X или Y другая будет увеличиваться (уменьшаться) лишь в среднем.

Чем в большей степени рассеивается общая составляющая Z по сравнению с составляющими U и V , тем теснее корреляционная связь между случайными величинами X и Y , и наоборот, при отсутствии рассеивания Z эти случайные величины становятся чисто независимыми.

Если компоненты X и Y случайного вектора $\{X, Y\}$ независимы, то они оказываются и некоррелированными. Обратное утверждение не всегда верно, поскольку некоррелированные случайные величины могут быть зависимыми. Это обусловлено тем, что распределение случайной величины является более полной ее вероятностной характеристикой, чем математическое ожидание. Такая особенность присуща, например, компонентам X и Y случайного вектора, рассмотренного в примерах 2.4 и 2.5. Как было показано, они стохастически независимы, но математические ожидания, соответствующие любому условному распределению каждой из них (см. рис. 2.37), равны нулю, т. е. не зависят от того, какие значения принимает другая, так что корреляция между X и Y отсутствует. И момент связи $K_{x,y}$ в условиях этих примеров оказывается равным нулю.

Наряду с моментом связи в качестве характеристики степени корреляции между случайными величинами используется коэффициент корреляции $r_{x,y}$, который определяется соотношением

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.109)$$

Эта характеристика обладает большей наглядностью относительно степени корреляции, чем момент связи, поскольку $|r_{x,y}| \leq 1$. Если случайные величины X и Y некоррелированы, то $r_{x,y} = 0$, а если они связаны линейной функциональной зависимостью, то $|r_{x,y}| = 1$ (знак $r_{x,y}$ одинаков со знаком $K_{x,y}$).

Следует отметить, что некоррелированными могут быть случайные величины, связанные друг с другом даже функциональной, но нелинейной зависимостью.

Числовые характеристики многомерного случайного вектора $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ задают совокупность математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ и матрицей $\|K_{x_i, x_j}\|$, элементами которой являются моменты связи всех возможных пар x_i, x_j его компонент. При этом, поскольку из определения момента связи (2.106) следует, что

$$K_{x,y} = K_{y,x}; K_{x,x} = D_x; K_{y,y} = D_y,$$

такую матрицу представляют в виде

$$\|K_{x_i, x_j}\| = \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1, x_2} & K_{x_1, x_3} & \dots & K_{x_1, x_n} \\ & D_{x_2} & K_{x_2, x_3} & \dots & K_{x_2, x_n} \\ & & D_{x_3} & \dots & K_{x_3, x_n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & D_{x_n} \end{vmatrix}$$

и называют корреляционной матрицей.

2.8. Нормальное распределение двумерного случайного вектора

Нормальное распределение двумерного случайного вектора $\{X, Y\}$ с некоррелированными компонентами X и Y определяются плотностью

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]. \end{aligned}$$

Следовательно

$$f(x, y) = f(x)f(y).$$

Таким образом, при отсутствии корреляции между нормально распределенными случайными величинами они оказываются независимыми.

Если компоненты X и Y двумерного вектора независимы и дисперсии (стандартные отклонения) одинаковы, т. е. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то нормальный закон распределения называют круговым. В этом случае плотность нормального закона распределения имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.110)$$

В приложениях наиболее часто встречаются задачи, сводящиеся к вычислению вероятности попадания нормально распределенной случайной точки $\{X, Y\}$ в прямоугольник (квадрат) или круг.

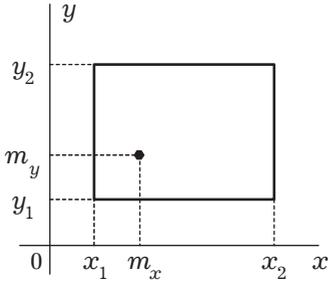


Рис. 2.38

Вероятность попадания в прямоугольник (квадрат) вычисляется наиболее просто, если его стороны параллельны осям координат $0x, 0y$ (рис. 2.38), а случайные величины X и Y независимы.

Тогда искомая вероятность представляется вероятностью совместного наступления двух независимых событий, одним из которых является выполнение неравенства $x_1 \leq X < x_2$, а другим — выполнение неравенства $y_1 \leq Y < y_2$. Поэтому в этом случае в соответствии с формулами (2.56) и (2.62) получим выражение

$$\begin{aligned}
 P &= P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = \\
 &= \left[F_T \left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x} \right) - F_T \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right) \right] \left[F_T \left(\frac{y_2 - m_y}{\sigma_y} \right) - F_T \left(\frac{y_1 - m_y}{\sigma_y} \right) \right] = \quad (2.111) \\
 &= \frac{1}{4} \left[\Phi_T \left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi_T \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right) \right] \left[\Phi_T \left(\frac{y_2 - m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi_T \left(\frac{y_1 - m_y}{\sigma_y} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Вероятность попадания в круг, центр которого совпадает с центром кругового нормального распределения, вычисляется аналитически. Для этого частного случая расчетная формула может быть получена следующим образом. Подставив (2.110) в (2.81), получим

$$P(\{XY \subset G\}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_G \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2}{2\sigma^2} \right] dx dy,$$

где область G — круг радиуса R с центром в точке (m_x, m_y) (рис. 2.39).

Перенос начала координат в точку (m_x, m_y) позволяет записать это выражение в виде

$$P(\{X, Y\} \subset G) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_G \exp\left[-\frac{x_1^2 + y_1^2}{2\sigma^2}\right] dx dy.$$

Перейдя от прямоугольных координат к полярным координатам r и φ , т. е. полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и учитывая, что $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ получим

$$\begin{aligned} P(\{X, Y\} \in G) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr d\varphi = \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Формула (2.112) определяет вероятность попадания нормально распределенной случайной точки в круг радиуса R , центр которого совмещен с центром кругового нормального распределения.

Если в качестве характеристики рассеивания используется вероятное (срединное) отклонение, то с учетом соотношения (2.65), формулу (2.112) после преобразований можно представить в следующем виде

$$P = 1 - \exp\{-\rho^2 k^2\}, \quad (2.113)$$

где

$$k = \frac{R}{B_{\Pi}}. \quad (2.114)$$

При круговом распределении двумерного случайного вектора в качестве характеристики рассеивания иногда используется круговое вероятное отклонение (КВО).

КВО называется радиус круга с центром в центре кругового нормального распределения, вероятность попадания в который равна 0,5.

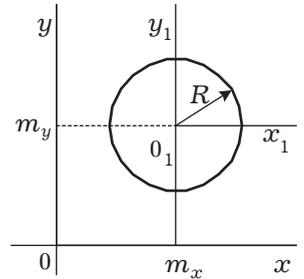


Рис. 2.39

Соотношение между KBO и вероятным (срединным) отклонением B_{Π} при нормальном распределении может быть получено из формулы (2.113). При вероятности $P = 0,5$ получим $k = 1,745617 \approx 1,75$. Отсюда на основе равенства (2.114) находим

$$KBO = 1,75B_{\Pi}, \quad (2.115)$$

затем получаем

$$KBO = 1,18\sigma. \quad (2.116)$$

Соотношения (2.115) и (2.116) широко используются в приложениях при сравнительном анализе характеристик точности производимой продукции.

Вопросы для самопроверки

1. Случайные величины (СВ) и их классификация.
2. Что такое распределение случайной величины?
3. Что такое функция вероятности СВ?
4. Что такое функция распределения?
5. Как построить график функции распределения дискретной СВ?
6. Каковы свойства функции распределения?
7. Что такое плотность распределения?
8. Каковы свойства плотности распределения?
9. Назовите характеристики положения СВ?
10. Назовите характеристики рассеивания СВ?
11. Каковы свойства математического ожидания СВ?
12. Каковы свойства дисперсии СВ?
13. Что характеризуют моменты СВ?
14. Назовите основные распределения СВ.
15. Что означает распределение случайного вектора?
16. Перечислите числовые характеристики векторных СВ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плотность распределения случайной величины X задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{при } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A и функцию распределения; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

2. Монету подбрасывают 4 раза. Найти выражение для функции распределения числа выпадений герба. Определить математическое ожидание и дисперсию числа выпадений герба.

3. При работе радиотехнического устройства время от времени возникают сбои. Число сбоев за сутки подчиняется закону Пуассона с параметром $m = 1,5$. Определить вероятности того, что:

- а) за двое суток не будет ни одного сбоя;
- б) в течение суток будет хотя бы один сбой;
- в) за неделю произойдет не менее трех сбоев.

4. Интенсивность отказов радиотехнического устройства равна $0,001$ 1/ч. Определить вероятность того, что устройство проработает более 500 ч.

5. Из скольких параллельно соединенных элементов должен быть собран блок, чтобы вероятность его безотказной работы в течение 100 ч была не менее 0,9, если время работы каждого элемента имеет показательное распределение с математическим ожиданием равным 200 ч?

6. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (2–8). Записать выражения для плотности и функции распределения. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

7. Измерение дальности до объекта сопровождается систематической и случайной ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону уменьшения дальности. Случайная ошибка подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 100 м. Определить:

- а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м;

б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинную.

8. Диаметр валиков, изготавливаемых на станке, распределен по нормальному закону с математическим ожиданием 50 мм и средним квадратическим отклонением 0,3 мм. Найти процент годных валиков, если бракуются валики, диаметр которых меньше 49,7 мм и больше 50,6 мм.

9. Монету подбрасывают 5 раз. Определить математическое ожидание и дисперсию числа выпадения герба и вероятность того, что герб выпадет:

- а) не менее трех раз;
- б) ровно три раза;
- в) не более трех раз;
- г) хотя бы один раз.

10. Сколько независимых выстрелов по цели надо произвести, чтобы математическое ожидание числа попаданий было равно 3, а дисперсия — 1,2.

11. Вероятность того, что любой из 300 абонентов позвонит на АТС в течение часа, равна 0,01. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

12. Аппаратура состоит из 2000 элементов, вероятность отказа каждого из них в течение суток равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если для этого достаточно отказа хотя бы одного элемента?

13. Станок-автомат при производстве деталей допускает 1% брака. Какова вероятность того, что среди 200 деталей окажется более 3 бракованных?

14. Черновик рукописи книги в 500 страниц содержит 500 опечаток. Какова вероятность того, что на странице не менее трех опечаток?

15. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых 10 дефектных, случайным образом выбраны 5 изделий для проверки их качества. Определить функцию вероятности числа дефектных изделий в выборке.

16. Определить вероятность того, что устройство проработает не более среднего времени безотказной работы.

17. Среднее время безотказной работы прибора составляет 500 ч. Определить вероятность того, что прибор проработает более 700 ч.

18. Из скольких параллельно соединенных элементов должен быть собран блок, чтобы вероятность его безотказной работы в течение 100 ч была не менее 0,9, если среднее время безотказной работы каждого элемента 200 ч?

19. Среднее время безотказной работы устройства равно 1000 ч. Определить вероятность того, что устройство проработает не более 1500 ч.

20. Среднее время безотказной работы устройства равно 1000 ч. Сколько часов устройство проработает с вероятностью не менее 0,95?

21. Процент брака продукции имеет нормальное распределение практически в пределах от 0,5 до 2,0. Определить вероятность получить в очередной партии продукции менее одного процента брака.

3. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

3.1. Общая характеристика задач исследования функций случайных аргументов

В экономической практике широко распространены задачи, связанные с необходимостью использования при их решении теоретико-вероятностного аппарата исследования функций случайных аргументов.

Функцией случайных аргументов называют такую случайную величину $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, возможные значения которой связаны с возможными значениями случайных аргументов функциональной зависимостью $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Областью задания функции является область возможных значений системы аргументов $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ [14, 16, 66].

Предположим, величина Y является функцией нескольких случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n :

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

и пусть известны характеристики случайных аргументов. В этом случае возникают две задачи: первая частная задача — определение числовых характеристик функции и вторая общая задача — нахождение закона распределения функции.

Аналогичные задачи имеют место и при рассмотрении функционального преобразования системы случайных величин:

$$Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n);$$

.....

$$Y_m = \varphi_m(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Математический аппарат исследования функций случайных аргументов в теории вероятностей разработан достаточно полно. Мы ограничимся рассмотрением лишь части этого аппарата, используемой при решении наиболее типичных задач оценки эффективности экономических или финансовых операций.

Наибольший интерес для практики имеет определение числовых характеристик функций. При решении этой задачи

не во всех случаях необходимо располагать законом распределения аргументов, а достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики аргументов. Предварительно рассмотрим ряд теорем о математических ожиданиях и дисперсиях, которые используются для построения методов определения числовых характеристик функций случайных аргументов.

3.2. Теоремы о числовых характеристиках случайных величин

Сформулируем без доказательства основные теоремы о числовых характеристиках случайных величин (доказательства этих теорем можно найти в [14, 16, 61, 66]). Содержание этих теорем определяет свойства математического ожидания и дисперсии, знание которых необходимо для решения широкого круга прикладных задач исследования функций случайных аргументов.

Теоремы о математических ожиданиях

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M[C] = C. \quad (3.1)$$

2. Математическое ожидание произведения постоянной величины C на случайную величину X равно произведению этой постоянной на математическое ожидание случайной:

$$M[CX] = CM[X], \quad (3.2)$$

т. е. постоянную можно выносить за знак математического ожидания.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i]. \quad (3.3)$$

Данное выражение справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Пример 3.1. Производится исследование отрасли, состоящей из n отдельных предприятий. Известны вероятности банкротства каждого предприятия p_1, p_2, \dots, p_n . Определить математическое ожидание числа несостоятельных предприятий.

Решение.

Введем в рассмотрение случайную величину X_i , принимающую одно из двух значений: 1, если i -е предприятие обанкротилось, или 0, если i -е — платежеспособно. Тогда случайная величина X — число обанкротившихся предприятий — равна сумме величин $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Математическое ожидание числа обанкротившихся предприятий будет равно

$$M[X] = \sum_{i=1}^n M[X_i].$$

Случайная величина X_i дискретного типа. Она принимает значение, равное единице, с вероятностью p_i и значение, равное нулю, с вероятностью $(1 - p_i)$. Поэтому

$$M[X_i] = 1 \cdot p_i + 0 \cdot (1 - p_i) = p_i,$$

а математическое ожидание числа обанкротившихся предприятий

$$M[X] = \sum_{i=1}^n p_i.$$

При $p_i = \text{const} = p$

$$M[X] = np.$$

Таким образом, математическое ожидание числа обанкротившихся предприятий равно сумме вероятностей банкротства каждого предприятия. В частном случае, когда вероятность банкротства каждого предприятия одинакова, математическое ожидание числа обанкротившихся предприятий равно произведению этой вероятности на число предприятий (в этом случае число обанкротившихся предприятий имеет биномиальное распределение).

4. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс момент связи этих величин:

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}. \quad (3.4)$$

Если случайные величины X и Y некоррелированы, то момент связи K_{xy} равен нулю и

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y]. \quad (3.5)$$

Для произвольного числа сомножителей математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n M[X_i]. \quad (3.6)$$

Теоремы о дисперсиях

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D[C] = 0. \quad (3.7)$$

2. Дисперсия произведения постоянной величины C на случайную величину X равна произведению квадрата постоянной величины на дисперсию случайной величины:

$$D[CX] = C^2 D[X], \quad (3.8)$$

т. е. постоянную величину можно выносить за знак дисперсии в квадрате.

3. Дисперсия суммы двух случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий и удвоенного момента связи:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \quad (3.9)$$

При произвольном числе слагаемых

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{x_i, x_j}, \quad (3.10)$$

а если они независимы (или хотя бы некоррелированы), то

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i]. \quad (3.11)$$

Покажем применение теорем о числовых характеристиках для решения некоторых практических задач.

1. Математическое ожидание разности любой случайной величины и ее математического ожидания всегда равно нулю:

$$M[X - m_x] = M[X] - M[m_x] = m_x - m_x = 0.$$

Отметим, что разность $X - m_x$ обычно называют центрированной случайной величиной.

2. Применяя первые три теоремы о математических ожиданиях, можно доказать справедливость более простой формулы для вычисления дисперсии случайной величины:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x^2] = \\ &= M[X^2] - 2m_x M[X] + M[m_x^2] = M[X^2] - m_x^2. \end{aligned}$$

3. Используя третью и четвертую теоремы о математических ожиданиях, можно показать, что момент связи двух случайных величин

$$\begin{aligned} X &= Z + U, \\ Y &= Z + V, \end{aligned}$$

где Z , U , и V — независимые случайные величины, равен дисперсии случайной величины Z (дисперсии их общей части):

$$K_{xy} = D_z.$$

4. Из второй теоремы о математических ожиданиях следует, что момент связи случайных величин

$$Y_1 = a_1 x_1 \text{ и } Y_2 = a_2 x_2 \tag{3.12}$$

определяется равенством

$$K_{y_1 y_2} = a_1 a_2 K_{x_1 x_2}, \tag{3.13}$$

которое получается в результате преобразований исходного выражения для $K_{y_1 y_2}$:

$$K_{y_1 y_2} = M[(Y_1 - m_y)(Y_2 - m_y)] = M[(a_1 X_1 - a_1 m_x)(a_2 X_2 - a_2 m_x)] =$$

$$= a_1 a_2 M[(X_1 - m_x)(X_2 - m_x)] = a_1 a_2 K_{x_1 x_2}.$$

5. Согласно первой и третьей теоремам о дисперсии с учетом очевидного равенства $K_{xx} = 0$ имеем

$$D[X + C] = D_x,$$

т. е. при добавлении к случайной величине любой постоянной ее дисперсия не изменяется.

6. Используя вторую теорему о математических ожиданиях и вторую теорему о дисперсиях применительно к так называемой центрированно-нормированной случайной величине

$$\overset{0}{X} = \frac{X - m_x}{\sigma_x}, \quad (3.14)$$

получим

$$M[\overset{0}{X}] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X - m_x] = 0;$$

$$D[\overset{0}{X}] = D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X - m_x] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X] = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание любой центрированно-нормированной случайной величины равно нулю, а ее дисперсия (стандартное отклонение) — единице.

Отметим, что замена переменной интегрирования (см. 2.51), использованная при рассмотрении табличной функции нормального распределения (2.50), равносильна преобразованию случайной величины X в соответствующую ей центрированно-нормированную случайную величину (3.14), т. е. линейному преобразованию.

Поскольку выражение (2.50) представляет функцию нормального распределения с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$, получается, что при нормальном распределении случайной величины ее линейное преобразование изменяет только значения параметров $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$, а не вид самого распределения. Сделанный вывод оказывается справедливым для любых распределений случайных величин и может быть обобщен следующей

формулировкой: при линейном преобразовании случайной величины вид ее распределения не изменяется.

3.3. Определение числовых характеристик функций случайных аргументов

Рассмотрим задачу определения числовых характеристик функций случайных аргументов в следующей постановке. Случайная величина Z является функцией системы случайных аргументов X_1, X_2, \dots, X_n . Вид функции $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и ее параметры известны, а числовые характеристики системы случайных величин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ заданы совокупностью значений математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ и корреляционной матрицей $\|K_{x_i x_j}\|$.

Требуется найти числовые характеристики m_z и D_z случайной величины Z .

Линейная функция

Если функция $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ линейна относительно своих аргументов, так что

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b, \quad (3.15)$$

то решение задачи получается в результате непосредственного применения теорем о числовых характеристиках.

Так, используя первые три теоремы о математических ожиданиях, из выражения (3.15) получаем

$$m_z = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b, \quad (3.16)$$

т. е. математическое ожидание линейной функции случайных аргументов представляется такой же функцией их математических ожиданий.

Дисперсия линейной функции вида (3.15) определяется формулой

$$D_z = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{x_i x_j}, \quad (3.17)$$

которая может быть получена из выражения (3.15) в результате применения теорем о дисперсиях с учетом того, что момент связи случайных величин (3.12) определяется равенством (3.13).

Если все аргументы линейной функции вида (3.15) независимы (или хотя бы некоррелированы), то из формулы (3.17) следует, что

$$D_Z = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i}. \quad (3.18)$$

Подробные выводы выражений (3.16, 3.17, 3.18) изложены в [14, 16, 37, 61, 66].

Нелинейная функция. Метод линеаризации

Применительно к функции $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, нелинейной относительно системы своих аргументов, решение задачи в сформулированной выше постановке может быть получено, как правило, лишь приближенно на основе метода линеаризации. Сущность метода линеаризации заключается в том, что нелинейную функцию заменяют некоторой линейной и затем по уже известным правилам находят числовые характеристики этой линейной функции, считая их приближенно равными числовым характеристикам нелинейной функции.

Сущность этого метода рассмотрим на примере функции одного случайного аргумента.

Если случайная величина Z является заданной функцией

$$Z = \varphi(X) \quad (3.19)$$

случайного аргумента X , то ее возможные значения z связаны с возможными значениями аргумента x функцией того же вида, т. е.

$$z = \varphi(x), \quad (3.20)$$

(например, если $Z = \sin X$, то $z = \sin x$).

Разложим функцию (3.20) в ряд Тейлора в окрестности точки $x = m_x$, ограничиваясь только первыми двумя членами разложения, и будем считать, что

$$z \approx \varphi(m_x) + \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x} (x - m_x),$$

где $\varphi(m_x)$ — значение функции (3.20) при $x = m_x$;

$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x}$ — значение производной функции (3.20) по аргументу x при $x = m_x$.

Такое допущение равносильно замене заданной функции (3.19) линейной функцией

$$Z = \varphi(m_x) + \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x} (X - m_x).$$

На основе теорем о математических ожиданиях и дисперсиях получим расчетные формулы для определения числовых характеристик m_z и D_z в виде

$$m_z = \varphi(m_x); \quad (3.21)$$

$$D_z = \left[\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x} \right]^2 D_x. \quad (3.22)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае стандартное отклонение σ_z следует вычислять по формуле

$$\sigma_z = \left[\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x} \right] \sigma_x. \quad (3.23)$$

(Модуль производной $\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{m_x}$ здесь берется потому, что она может быть и отрицательной.)

Применение метода линеаризации для нахождения числовых характеристик нелинейной функции

$$Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.24)$$

произвольного числа случайных аргументов приводит к расчетным формулам для определения ее математического ожидания, имеющим вид

$$m_z = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}); \quad (3.25)$$

$$D_z = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_m \right)^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_m \right) \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_m \right) K_{x_i x_j}, \quad (3.26)$$

где $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}}$ и $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{m_{x_j}}$ — частные производные от функции $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументам x_i и x_j соответственно, вычисленные с учетом знаков в точке $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$, т. е. путем замены всех входящих в них аргументов x_1, x_2, \dots, x_n их математическими ожиданиями.

Наряду с формулой (3.26) для определения дисперсии D_z можно использовать расчетную формулу вида

$$D_z = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \right) \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{m_{x_j}} \right) r_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \quad (3.27)$$

где $r_{x_i x_j}$ — коэффициент корреляции случайных аргументов x_i и x_j .

Применительно к нелинейной функции независимых (или хотя бы некоррелированных) случайных аргументов формулы (3.26) и (3.27) имеют вид

$$D_z = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \right)^2 D_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \right)^2 \sigma_{x_i}^2. \quad (3.28)$$

Формулы, основанные на линеаризации нелинейных функций случайных аргументов, позволяют определять их числовые характеристики лишь приближенно. Точность вычисления тем меньше, чем больше заданные функции отличаются от линейных и чем больше дисперсии аргументов. Оценить возможную ошибку в каждом конкретном случае не всегда удается.

Для уточнения результатов, полученных по данному методу, может быть использован прием, основанный на сохранении в разложении нелинейной функции не только линейных, но и некоторых последующих членов разложения (как правило, квадратичных).

Кроме того, числовые характеристики нелинейной функции случайных аргументов можно определять на основе предварительного отыскания закона ее распределения при заданном распределении системы аргументов. Однако нужно иметь

в виду, что аналитическое решение такой задачи часто оказывается слишком сложным. Поэтому для нахождения числовых характеристик нелинейных функций случайных аргументов широко используется метод статистического моделирования.

Основой метода является имитация серии испытаний, в каждом из которых путем моделирования получается определенная совокупность $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ значений случайных аргументов x_1, x_2, \dots, x_n из множества, отвечающего их совместному распределению. Полученные значения с помощью заданного соотношения (3.24) преобразуются в соответствующие значения z_i исследуемой функции Z . По результатам $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_k$ всех k таких испытаний искомые числовые характеристики вычисляются методами математической статистики.

Пример 3.2. Определить на основе метода линеаризации математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины

$$Z = \cos X,$$

если $m_x = \pi/3, \sigma = \pi/314 \approx \pi/314 \approx 10^{-2}$.

Решение.

1. По формуле (3.20) получаем

$$m_z = \cos(m_x) = \cos(\pi/3) = 0,5.$$

2. Используя таблицу производных элементарных функций, находим

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

и вычисляем значение этой производной в точке $x = m_x = \pi/3$:

$$\left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{m_x} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. По формуле (3.23) получаем

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^{-2} \text{ рад.}$$

Пример 3.3. Определить на основе метода линеаризации математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины

$$Z = \frac{X_1 X_2^2}{2},$$

если

$$m_{x_1} = 10; \quad m_{x_2} = 5; \quad \sigma_{x_1} = 10^{-2}; \quad \sigma_{x_2} = 2 \cdot 10^{-2}; \quad r_{x_1 x_2} = -625 \cdot 10^{-4}.$$

Решение.

1. По формуле (3.25) получаем

$$m_z = \frac{m_{x_1} m_{x_2}^2}{2} = \frac{10 \cdot 25}{2} = 125.$$

2. Запишем формулу (3.27) для функции двух случайных аргументов

$$D_z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \Big|_{m_{x_2}} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \Big|_{m_{x_1}} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \Big|_{m_{x_2}} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \Big|_{m_{x_1}} \right) r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}.$$

3. Находим частные производные от функции Z по аргументам X_1 и X_2 :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{x_2^2}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 x_2$$

и вычисляем их значения в точке (m_{x_1}, m_{x_2}) :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \Big|_{m_{x_2}} = \frac{m_{x_2}^2}{2} = \frac{25}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \Big|_{m_{x_1}} = m_{x_1} m_{x_2} = 10 \cdot 5 = 50.$$

4. Подставив полученные данные в формулу для расчета дисперсии Z , получим $D_z = 1$. Следовательно, и $\sigma_z = 1$.

Вопросы для самопроверки

1. Опишите постановку задачи определения числовых характеристик функций случайных аргументов.
2. Сформулируйте теоремы о математических ожиданиях.
3. Сформулируйте теоремы о дисперсиях.
4. Чему равны математическое ожидание и дисперсия линейной функции случайных аргументов?
5. В чем состоит сущность метода линеаризации при определении числовых характеристик функции случайных аргументов?
6. От чего зависит точность вычисления дисперсии нелинейной функции случайного аргумента?

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X имеет функцию вероятности

x_i	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,3	0,4

Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 2^X$.

2. Случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = 2 - 3X$. Определить:

- а) математическое ожидание и дисперсию величины Y ;
- б) момент связи и коэффициент корреляции случайных величин X и Y , если $m_x = -1$, $D_x = 4$.

3. Производится параллельное соединение двух сопротивлений с номинальным значением 900 Ом. Максимальное отклонение величины сопротивления от номинала 1%. Определить номинальное значение сопротивления такого соединения и его среднее квадратическое отклонение.

4. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $U = 3X - 2Y + 4Z - 5$, если

$$\begin{array}{lll} m_x = 4; & m_y = 2; & m_z = 1; \\ D_x = 4; & D_y = 1; & D_z = 9; \end{array}$$

$$r_{xy} = 0,5; \quad r_{xz} = 1; \quad r_{yz} = 0,5.$$

5. Определить характеристики силы тока в цепи $I = U/R$, если напряжение и сопротивление независимые случайные величины с характеристиками:

$$m_u = 220 \text{ В}; \quad \sigma_u = 5 \text{ В}; \quad m_r = 100 \text{ Ом}; \quad \sigma_r = 3 \text{ Ом}.$$

6. Определить характеристики мощности $W = I^2R$, выделяемой на сопротивлении, подключенному к источнику тока, если величины тока и сопротивления независимые случайные величины с характеристиками:

$$m_i = 5 \text{ А}; \quad m_r = 1000 \text{ Ом}; \quad \sigma_i = 0,1 \text{ А}; \quad \sigma_r = 10 \text{ Ом}.$$

7. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$Z = \frac{XY^2}{2},$$

если $m_x = 10; m_y = 5; \sigma_x = 0,01; \sigma_y = 0,01; r_{xy} = 0$.

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОДУКЦИИ

4.1. Общая характеристика статистических методов оценивания характеристик продукции и результатов ее применения

Эффективность применения образцов продукции зависит от большого числа случайных факторов. При оценивании эффективности случайные факторы учитывают с помощью их вероятностных характеристик (закона распределения либо числовых характеристик). Например, в качестве характеристик надежности принимают математическое ожидание времени (среднее время) безотказной работы, вероятность безотказной работы в течение времени T и др.

Вероятностные характеристики случайных факторов можно находить теоретическим путем с помощью математического аппарата теории вероятностей. Для применения этого аппарата

необходимо знать зависимости, связывающие случайные переменные, вероятностные характеристики которых необходимо найти, с переменными, вероятностные характеристики которых известны. Например, система состоит из n блоков (рис. 4.1).

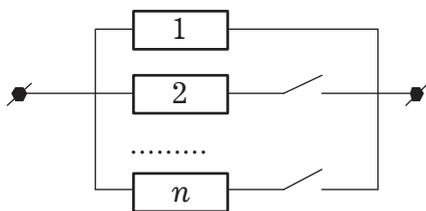


Рис. 4.1

Известны средние времена безотказной работы каждого блока $m_{t_1}, m_{t_2}, \dots, m_{t_n}$. Требуется определить среднее время безотказной работы системы.

В предположении, что переключающие устройства срабатывают мгновенно и безотказно, время безотказной работы системы будет равно

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n, \quad (4.1)$$

где T_i — время безотказной работы i -го блока.

Используя метод определения числовых характеристик функции случайных аргументов, можно найти среднее время безотказной работы системы

$$m_t = m_{t_1} + m_{t_2} + \dots + m_{t_n}.$$

Не вызывает существенных затруднений решение задачи определения закона распределения времени безотказной работы системы по известным законам распределения времени безотказной работы блоков и зависимости (4.1).

Однако в некоторых случаях установить зависимость между случайными переменными либо вообще не удастся, либо она оказывается настолько сложной, что применение аппарата теории вероятностей для решения подобных задач является затруднительным. Нельзя, например, чисто теоретическим путем установить продолжительность безотказной работы транзистора, микросхемы того или иного типа.

В этих случаях вероятностные характеристики находят экспериментальным путем, суть которого состоит в следующем. Многократно проводятся наблюдения исследуемого явления. Затем результаты наблюдений обрабатывают специальными математическими методами, которые позволяют приближенно определять искомые характеристики. Разработка таких методов составляет предмет математической статистики.

Математическая статистика — это прикладная наука, занимающаяся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений (испытаний) с целью изучения закономерностей массовых случайных явлений.

Наблюдения, осуществляемые в процессе эксперимента, могут заключаться в измерении какого-либо параметра исследуемого объекта либо в регистрации у него того или иного признака. В общем случае измеряемых параметров или регистрируемых признаков может быть несколько.

Эксперименты могут проводиться с реальным объектом либо с его моделью, адекватно описывающей процесс функционирования этого объекта.

Задачей проведения многих наблюдений является принятие решения относительно значений некоторых параметров (величин), характеризующих изучаемое явление или процесс. Если в процессе наблюдения непосредственно измеряется интересующий нас параметр, то говорят, что имеют место прямые измерения. Иногда интересующий нас параметр непосредственно измерить нельзя. В этом случае измеряется другая величина, с которой функционально связан интересующий нас параметр, и измерения называются косвенными.

После проведения наблюдений производят обработку их результатов. Смысл обработки результатов наблюдений заключается в получении сведений о свойствах изучаемого объекта. В наиболее общем виде можно говорить, что принимается определенное решение относительно этих свойств. Это решение может быть связано, например, с оцениванием конкретных значений характеристик (параметров), описывающих свойства объекта, проверкой предположений о нахождении этих характеристик в некоторых пределах, предположений о законах распределения наблюдаемых переменных и т. д.

Методы математической статистики используются при решении достаточно широкого круга задач. К числу таких наиболее часто встречающихся задач относятся:

- определение по результатам одинаковых независимых экспериментов частоты наступления случайного события и оценка на этой основе его вероятности;

- оценивание по результатам одинаковых независимых экспериментов законов распределения и основных числовых характеристик случайных величин (математического ожидания,

дисперсии, стандартного отклонения). Иногда оценивают и другие моменты распределения случайной величины. При наблюдении за системой двух случайных величин одновременно оценивают ковариацию (момент связи между ними) или коэффициент корреляции;

- определение неизвестных значений постоянных величин, неизвестных значений коэффициентов функций неслучайных аргументов при заданном виде этих функций;

- статистическая проверка гипотез о законах распределения или числовых характеристиках случайных величин;

- оценка влияния множества факторов на конечный результат и выбор наиболее важных факторов, а также исследование внутренней структуры результатов наблюдений (проверка однородности результатов и независимости испытаний).

4.2. Общая схема эксперимента

Рассмотрим общую схему эксперимента, в рамках которой можно описать методы решения перечисленных выше задач математической статистики.

Объект, на котором проводятся испытания, принято называть объектом экспериментального исследования (ОЭИ). Это может быть реальный объект, лабораторная установка, модель реального экономического объекта и т. п. Эксперимент заключается в наблюдении исследуемого явления в конкретных условиях. Учесть все условия при проведении эксперимента практически невозможно. Поэтому исследователь выбирает основные наиболее существенные факторы, определяющие исход эксперимента. Здесь под фактором будем понимать переменную, значения которой исследователь с той или иной степенью точности может контролировать в ходе эксперимента.

В качестве входных переменных на вход ОЭИ действует k контролируемых переменных (факторов) x_1, x_2, \dots, x_k (рис. 4.2).

Исследователь имеет возможность проводить эксперименты при определенных фиксированных значениях входных переменных. Совокупность значений переменных, при которых

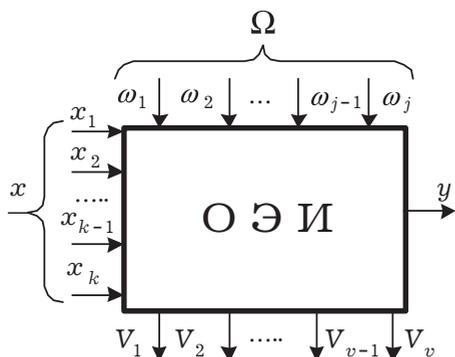


Рис. 4.2

проводятся испытания, составляет комплекс условий эксперимента.

На выходе ОЭИ в каждом испытании при фиксированных значениях входных переменных измеряется значение выходной переменной Y . В общем случае выходных переменных может быть несколько: Y_1, Y_2, \dots, Y_l .

Если значения переменной Y в каждом эксперименте

при реализации одного и того же комплекса условий (при одних и тех же значениях x_1, x_2, \dots, x_k) не меняются, то говорят, что эксперимент обладает идеальной воспроизводимостью. В этом случае в качестве математической модели эксперимента используют различные функциональные зависимости:

$$y = \eta(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Кроме входных переменных, на ОЭИ воздействует группа неконтролируемых факторов (вектор помех Ω), действие которых носит случайный характер. К неконтролируемым факторам относятся факторы, которые невозможно учесть и проконтролировать в ходе эксперимента (ошибки установки значений входных переменных, ошибки измерения выходной переменной и т. п.). В силу этого выходная переменная Y в каждом эксперименте при реализации одного и того же комплекса условий будет принимать различные значения, т. е. будет носить случайный характер. Модель эксперимента в данном случае будет иметь вид:

$$Y = \eta(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

где $\eta(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — регулярная составляющая, которую в статистике называют функцией отклика;

$\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — случайная ошибка результата наблюдения (эксперимента).

В общем случае распределение ошибки эксперимента зависит от комплекса условий. Считают, что ошибка эксперимента распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю ($M[\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_k)] = 0$). Поэтому

$$M[Y] = \eta(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Зависимость математического ожидания выходной переменной Y от входных переменных (x_1, x_2, \dots, x_k) называется *уравнением регрессии*.

На выходе ОЭИ наряду с основной выходной переменной Y часто приходится контролировать группу не основных выходных переменных V_1, V_2, \dots, V_k . На не основные выходные переменные обычно налагаются ограничения.

K-мерное пространство, координатами которого являются контролируемые переменные, называется факторным пространством. Система ограничений на не основные выходные переменные выделяет в факторном пространстве область эксперимента G .

Различают активные и пассивные эксперименты. Эксперимент будет активным, если имеется возможность не только контролировать входные переменные, но и управлять ими. В пассивном эксперименте исследователь не имеет возможности устанавливать значения входных переменных по своему усмотрению, т. е. управлять входными переменными.

4.3. Сущность выборочного метода

Особенностью методов математической статистики является то, что выводы и заключения, полученные на основе этих методов, относятся не к отдельным испытаниям, которые были произведены, а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках исследуемого явления в целом. Поэтому результат наблюдения в отдельном испытании следует рассматривать как один из возможных исходов, которые могли бы иметь место при многократном проведении испытания в одних и тех же условиях.

Совокупность всех мыслимых результатов наблюдений, которые могут быть получены в данных условиях, называют *генеральной совокупностью*. Различают конечные и бесконечные генеральные совокупности. Генеральная совокупность конечна, если содержит конечное число элементов. Бесконечная генеральная совокупность содержит бесконечное число элементов.

Например, производится сплошной контроль качества партии готовой продукции, содержащей N изделий. Испытание здесь заключается в извлечении одного изделия из партии и проверке его годности. Множество всех изделий образует генеральную совокупность, поскольку исход испытания состоит в появлении любого из N изделий (годного либо дефектного). В данном примере генеральная совокупность — конечная.

Если же предметом исследования является технологический процесс изготовления данного вида продукции, то генеральной совокупностью следует считать воображаемое бесконечное число изделий, которые могут быть изготовлены при данной технологии производства. Совокупность всех возможных отклонений точки падения снаряда от точки прицеливания при фиксированных условиях стрельбы также является примером бесконечной генеральной совокупности.

Задача обследования партии готовой продукции может состоять в оценке доли бракованных изделий или, что то же самое, в оценке вероятности извлечения бракованного изделия. Она может быть решена следующим образом. Провести обследование каждого изделия в партии и подсчитать число бракованных. Затем, используя классический способ определения вероятности, находят вероятность извлечения бракованного изделия (долю бракованных изделий в партии).

При сплошном контроле не возникает каких-либо трудностей при формировании статистического вывода.

На практике не всегда имеется возможность провести обследование всех элементов генеральной совокупности. Это обусловлено тем, что число элементов генеральной совокупности достаточно велико, чтобы провести сплошной контроль,

либо для регистрации наличия признака приходится разрушать обследуемый элемент.

В этих условиях прибегают к выборочному обследованию элементов генеральной совокупности. При этом методе обследуются не все элементы генеральной совокупности, а только некоторая часть из них. Выводы и рекомендации, сформулированные по результатам выборочного обследования, распространяются на всю генеральную совокупность.

Выборкой из генеральной совокупности называют совокупность результатов, полученных при непосредственном проведении испытаний. Число n элементов (результатов проведенных испытаний) является конечным и называется объемом выборки.

Если элементы выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, то выборку называют *однородной*.

В математической статистике предполагают, что выборки формируются при многократной реализации случайного эксперимента, результат которого точно предсказать невозможно. Поэтому такие выборки называют случайными.

Например, исследуется качество партии готовой продукции. С этой целью из партии случайным образом отбирают n изделий и определяют годность каждого из них. Так как в партии содержатся как годные, так и дефектные изделия, то результат обследования каждого изделия в выборке до проведения испытания следует рассматривать как случайную величину, которая принимает одно из двух возможных значений: ноль или единица:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если изделие годное;} \\ 1, & \text{если изделие дефектное.} \end{cases}$$

Таким образом, до проведения испытания результаты наблюдений представляют собой систему дискретных случайных величин:

$$\{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n\}.$$

После проведения испытания каждая из случайных величин X_i , $i = 1, n$ примет одно из двух возможных значений.

Предположим, что измеряемый в процессе испытания параметр является случайным, например, при контроле качества партии готовой продукции измеряется линейный размер детали. Результат измерения каждой из n деталей естественно считать как случайную величину, поскольку до проведения измерения нельзя предсказать численное значение размера детали, т. е. результаты измерений представляют собой систему непрерывных случайных величин:

$$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n\}.$$

После проведения измерений каждая из случайных величин Y_i примет одно из своих возможных значений и будет получена совокупность n значений:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}.$$

Результат каждого из n измерений постоянного параметра следует рассматривать случайным ввиду того, что измерения в реальных условиях сопровождаются ошибками. Ошибки измерений подразделяют на систематические и случайные.

Систематические ошибки — это составляющие общей ошибки измерений, обусловленные факторами, которые действуют одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. При повторных измерениях эти ошибки остаются неизменными, а если изменяются, то закономерно. Систематические ошибки, как правило, обусловлены погрешностями измерительных приборов (инструментальные ошибки) и несовершенством методов измерений (методические ошибки). Эти ошибки возможно выявить и исключить из результатов измерений.

Случайные ошибки — составляющие общей ошибки, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Причиной случайных ошибок являются неконтролируемые факторы, проявление которых неодинаково в каждом измерении и которые заранее не могут быть учтены. Случайные ошибки являются принципиально не выявляемыми и, следовательно, неустраняемыми.

Среди случайных ошибок особо следует выделить грубые ошибки. Причиной этих ошибок является неисправность приборов или неточности в действиях наблюдателя, связанные с неправильным чтением показаний измерительного прибора, с ошибками в записи результата измерения и т. д.

В дальнейшем при рассмотрении методов обработки результатов измерений будем считать, что при измерениях имеют место только случайные ошибки.

В статистике различают возвратные и безвозвратные выборки. Выборку называют *возвратной*, если извлеченный элемент после обследования перед извлечением следующего элемента снова возвращается в генеральную совокупность. Выборка — *безвозвратная*, если отобранный элемент после обследования не возвращается в генеральную совокупность.

Если выбираемые элементы извлекаются из всей генеральной совокупности по одному, то полученная выборка называется *простой*. В дальнейшем будем рассматривать только простые случайные выборки и называть их просто выборками.

С позиций теории вероятностей элементы случайной выборки рассматриваются как независимые случайные величины с одним и тем же законом распределения. Это означает, что для плотности вероятности результатов испытаний справедливо равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i).$$

По результатам выборочного обследования можно достаточно уверенно судить о свойствах генеральной совокупности только тогда, когда выборка является представительной (репрезентативной). Выборка — *представительная*, если она достаточно полно отражает свойства генеральной совокупности. Чтобы выборка была представительной, она должна удовлетворять следующим требованиям:

- элементы генеральной совокупности должны отбираться случайным образом;
- результаты испытаний в выборке должны быть независимыми;
- должен быть правильно определен объем выборки.

Выборки используются для решения выше перечисленных задач математической статистики. При этом элементы выборки используются, как правило, для образования новых случайных величин вида $S_i = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, называемых *статистиками*.

Примерами статистик являются:
выборочная сумма

$$S_1 = \sum_{i=1}^n X_i;$$

выборочное среднее

$$S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

и т. д.

Все свойства (характеристики) генеральной совокупности, полученные по данным выборки, называют *выборочными* или *статистическими* (в отличие от теоретических характеристик, изучаемых в теории вероятностей). Статистические характеристики в дальнейшем будем помечать индексом (звездочкой). Например,

$F^*(x)$ — статистическая функция распределения случайной величины X ;

m_x^* — статистическое математическое ожидание;

σ_x^* — статистическое стандартное отклонение и т. д.

Все выборочные характеристики являются функциями элементов выборки, т. е. статистиками.

В зависимости от объема выборки подразделяют на большие и малые. Существует несколько подходов к определению понятий большая и малая выборки. Так, например, в [12] используется следующий подход. Иногда при обработке результатов испытаний прибегают к группировке элементов выборки. При группировании количество информации, извлекаемой из выборки, обычно уменьшается. Это может привести к ухудшению качества (точности и достоверности) полученных результатов. Поэтому малой можно считать выборку, если при обработке ее методами, основанными на группировании эле-

ментов выборки, нельзя достичь заданного качества результатов. Наоборот, выборка является большой, если допускает группирование элементов без заметной потери количества информации.

При практических расчетах считают, что выборка имеет малый объем, если она содержит менее 50 элементов (иногда количество элементов ограничивают 15) [12].

Теоретической основой правомерности распространения статистических выводов, полученных по результатам ограниченного числа испытаний, на всю генеральную совокупность является закон больших чисел.

4.4. Понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимают ряд теорем, в которых доказывается сходимость по вероятности средних значений результатов большого числа наблюдений к некоторым постоянным величинам [5]. Смысл термина “сходимость по вероятности” состоит в следующем. Последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n сходится по вероятности к постоянной C , если вероятность того, что значения X_n будут сколь угодно близки к C , неограниченно приближается к единице при $n \rightarrow \infty$. Математически сходимость по вероятности записывается в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - c| \leq \varepsilon) = 1,$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Доказательство теорем дается в большинстве учебников по теории вероятностей и математической статистике. Поэтому ниже излагаются только их содержание и сущность.

Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины X , имеющей конечное математическое ожидание и дисперсию, при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Для противоположного события неравенство Чебышева примет вид

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon}. \quad (4.3)$$

Приведенные неравенства можно использовать для вычисления оценок вероятностей отклонения наблюдаемой случайной величины от своего математического ожидания, если ее закон распределения неизвестен.

Пример 4.1. Найти вероятность того, что случайная величина X , имеющая произвольный закон распределения, отклонится от своего математического ожидания меньше чем на величину $\pm 3\sigma_x$.

Решение.

По формуле (4.3) получим

$$P(|X - m_x| < 3\sigma_x) \geq 1 - \frac{D_x}{9\sigma_x^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Известно, что для нормального закона распределения существует “правило трех сигм”. Согласно этому правилу вероятность попадания случайной величины на интервал $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$ равна 0,997. Аналогичное правило существует и для случайных величин, распределение которых отлично от нормального. При этом вероятность данного события будет не ниже 8/9.

Теорема Чебышева

Предположим, производится n независимых измерений случайной величины X , имеющей конечную дисперсию D_x . Измерения равноточные и свободны от систематических ошибок. В этих условиях при неограниченном увеличении n среднее арифметическое результатов измерений \bar{x}_i случайной величины X сходится по вероятности к математическому ожиданию этой случайной величины:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (4.4)$$

Из равенства (4.4) следует, что при достаточно больших n существенные отклонения по абсолютной величине среднего арифметического результатов измерений от математического ожидания маловероятны. Данное утверждение является основанием того, что в качестве неизвестного значения математического ожидания m_x может быть принято среднее арифметическое результатов большого числа измерений случайной величины X .

Следует отметить, что теорема Чебышева справедлива и для среднего арифметического различных функций от результатов наблюдений скалярной случайной величины $\varphi(x_i)$, $i = 1, n$ или системы случайных величин $\psi(X_i, Y_i, Z_i, \dots)$, $i = 1, n$. При этом должно выполняться условие: аргументы X_i или одноименные элементы систем аргументов $\{X_i, Y_i, Z_i, \dots\}$ имеют один и тот же закон распределения, включая и параметры.

Например, $\varphi(x_i) = (X_i - m_x)^2$. С учетом того, что

$$M[\varphi(X_i)] = M[(X_i - m_x)^2],$$

в соответствии с равенством (4.4), можем записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 - D_x \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (4.5)$$

Предположим, что функция от результатов наблюдений системы двух случайных величин имеет вид

$$\psi(X_i, Y_i) = (X_i - m_x)(Y_i - m_y).$$

Математическое ожидание этой функции — момент связи результатов наблюдений двух случайных величин X и Y

$$M = [(X_i - m_x)(Y_i - m_y)] = K_{xy}.$$

Поэтому в соответствии с равенством (4.4) можем записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) - K_{xy} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (4.6)$$

Из равенств (4.5) и (4.6) следует, что при достаточно большом n в качестве неизвестных значений дисперсии D_x случайной величины X момента связи K_{xy} двух случайных величин X и Y могут быть приняты средние арифметические вида

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \text{ и } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y),$$

соответственно.

Теорема Бернулли

Данная теорема доказывает устойчивость частоты случайного события, что позволяет применять на практике статистический способ определения вероятности наступления события.

При неограниченном увеличении числа независимых испытаний n в одних и тех же условиях частота $P^*(A)$ наступления случайного события A сходится по вероятности к его вероятности P , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{n_i}{n} - P \right| < \varepsilon \right) = 1, \quad (4.7)$$

где n_i — число наступлений события в n испытаниях;

ε — сколь угодно малая положительная величина.

В соответствии с теоремой Бернулли при большом числе испытаний частоту наступления случайного события можно принять в качестве его вероятности.

В случае, если вероятность наступления случайного события в каждом испытании различна и равна P_j , $j = \overline{1, n}$, справедлива теорема Пуассона:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{n_i}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

т. е. частота события сходится по вероятности к среднему арифметическому значению вероятностей события в каждом испытании.

Центральная предельная теорема Ляпунова

Одной из задач при применении методов обработки результатов испытаний является выявление условий, определяющих справедливость априорных предположений о виде закона распределения исследуемой случайной величины.

Часто при обработке результатов испытаний принимается предположение о нормальном законе распределения исследуемой случайной величины. Однако не всегда можно применить нормальный закон распределения. Поэтому необходимо определить условия, когда можно выдвигать предположение о нормальном распределении и в каких случаях от него следует отказаться. Условия, при которых возникает нормальный закон распределения, определяют предельные теоремы теории вероятностей. Одной из основных среди этих теорем является теорема Ляпунова. Сущность данной теоремы сводится к следующему.

Закон распределения суммы независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых приближается к нормальному, если случайные величины, входящие в сумму, имеют дисперсии примерно одного и того же порядка, что и конечные математические ожидания. Требования равенства дисперсий означает, что влияние каждого слагаемого на сумму одинаково.

Таким образом, если

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

и случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n удовлетворяют указанным требованиям, то при достаточно большом n

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

где $m_x = \sum_{i=1}^n m_{xi}$ и $\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{xi}^2}$.

На практике теорему Ляпунова применяют и в случае, когда n сравнительно невелико. При $n \geq 8$ эту теорему можно применять при суммировании непрерывных случайных величин, имеющих одинаковые симметричные законы распределения с одинаковыми числовыми характеристиками. Если же суммируются случайные величины с различными несимметричными законами и различными числовыми характеристиками, то теоремой Ляпунова можно пользоваться только при числе слагаемых порядка сотни [12].

Вопросы для самопроверки

1. Что вынуждает отказаться от методов теории вероятностей и перейти к методам математической статистики?
2. Дайте определение понятию “математическая статистика”.
3. Какие задачи решаются методами математической статистики?
4. Что составляет комплекс условий эксперимента?
5. Какие требования предъявляются к ошибке эксперимента?
6. Какое уравнение называют уравнением регрессии?
7. Что называется факторным пространством?
8. В чем отличие активного эксперимента от пассивного?
9. В чем заключается особенность методов математической статистики?
10. Что называется генеральной совокупностью? Какие они бывают?
11. Что называется выборкой из генеральной совокупности? Какие требования к ней предъявляются и чем они обеспечиваются?
12. Что понимается под законом больших чисел?
13. В чем заключается смысл термина “сходимость по вероятности”?
14. Что доказывает неравенство Чебышева?
15. Что доказывают теорема Чебышева и теорема Бернулли?

16. В чем суть центральной предельной теоремы Ляпунова?

Задачи для самостоятельного решения

1. Среднее значение скорости ветра в данной местности равно 16 км/ч. С помощью первой формы неравенства Чебышева оценить вероятность того, что скорость ветра не превысит 80 км/ч.

2. Случайная величина X имеет математическое ожидание $m_x = 1$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = 0,2$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность неравенства $0,5 < X < 1,5$.

3. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что при ста бросаниях монеты частота выпадения герба отклонится от вероятности не более чем на 0,1, и сравнить с результатом, полученным при использовании центральной предельной теоремы Ляпунова.

4. Математическое ожидание скорости ветра на данной высоте равно 25 км/ч. Какие скорости ветра можно ожидать на этой высоте с вероятностью не менее 0,9. Использовать вторую форму неравенства Чебышева.

5. Среднее число солнечных дней в году в данной местности равно 75. Оценить вероятность того, что в течение года число солнечных дней не превысит 200.

5. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

5.1. Постановка задачи оценивания вероятностных характеристик случайных величин

Предположим, цель эксперимента состоит в определении вероятностных характеристик некоторой случайной величины X . При n независимых наблюдениях этой случайной величины получена случайная выборка $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Требуется по результатам ограниченного числа наблюдений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ выработать суждение о вероятностных характеристиках этой случайной величины.

Известно, что исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины является закон ее распределения. Поэтому одной из задач обработки результатов испытаний является построение закона распределения случайной величины (статистической функции или статистической плотности распределения) по экспериментальным данным.

Часто для описания случайной величины достаточно знания ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии, стандартного отклонения, других моментов). В этом случае возникает необходимость в определении по результатам испытаний значений этих характеристик.

Поскольку объем выборки ограничен, то методы математической статистики позволяют находить лишь приближенные значения указанных характеристик, т. е. их оценки.

При оценивании параметров в математической статистике используют два подхода: *точечное* и *интервальное* оценивание. При точечном оценивании по результатам испытаний находят число (точку на числовой оси), которое принимают в качестве приближенного значения оцениваемого параметра. Полученное число называют оценкой параметра. В дальнейшем оценку параметра Θ будем обозначать Θ^* и использовать символическую запись $\Theta^* \rightarrow \Theta$ (Θ^* является точечной оценкой параметра Θ). В частности, параметром Θ может быть матема-

тическое ожидание m_x , дисперсия D_x , стандартное отклонение σ_x , вероятность наступления случайного события P и другие параметры случайной величины.

Оценка случайного параметра Θ является функцией результатов испытаний, т. е. статистикой:

$$\Theta^* = S(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (5.1)$$

Следовательно, оценка Θ^* является случайной величиной с присущим ей законом распределения и числовыми характеристиками. Знание вероятностных характеристик позволяет выявить статистические свойства оценок, устанавливать их точность и на этой основе выбирать наилучшие оценки.

При интервальном оценивании определяют интервал, который с заданной вероятностью накрывает истинное значение оцениваемого параметра. Границы интервала являются функциями результатов испытаний. Поэтому в общем случае границы интервала, а, следовательно, и сам интервал, будут случайными:

$$S'(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \Theta \leq S''(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (5.2)$$

где $S'(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $S''(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — статистики, отличные от статистики (5.1) и в каждом конкретном случае определяемые соответствующими соотношениями.

В математической статистике рассматриваемый интервал принято называть *доверительным интервалом*, а вероятность, с которой он накрывает истинное значение параметра, — *доверительной вероятностью*.

Основное назначение доверительных оценок — характеризовать качество точечных оценок, определяемое их точностью и надежностью (достоверностью).

5.2. Основные требования к оценкам

Вид оценки каждой числовой характеристики выбирают один раз применительно к исследованию любой случайной величины. Эту выбранную оценку используют во всех случаях нахождения неизвестных значений данной числовой характеристики. Поэтому оценки выбирают так, чтобы при их массовом

применении обеспечивалась наибольшая точность определения числовых характеристик. Чтобы оценки имели такое свойство, к ним предъявляют соответствующие требования.

1. Оценка Θ_x^* параметра Θ_x должна быть *несмещенной*, т. е. математическое ожидание оценки должно быть равно истинному значению искомого параметра:

$$M[\Theta_x^*(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \Theta_x. \quad (5.3)$$

Достоинством несмещенной оценки является то, что получаемые с ее помощью значения искомого параметра группируются около действительного значения этого параметра и при массовом применении такой оценки в среднем будут равны этому значению. Применение несмещенных оценок обеспечивает отсутствие систематических ошибок определения неизвестных значений характеристик.

Если $M[\Theta_x^*] > \Theta_x$, то оценку Θ_x^* называют положительно смещенной, если $M[\Theta_x^*] < \Theta_x$, — отрицательно смещенной.

На практике иногда используют оценки, которые при малом объеме выборки n являются смещенными, но при увеличении n величина смещения стремится к нулю. Такие оценки называют *асимптотически несмещенными*. Оценка — асимптотически несмещенная, если выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[\Theta_x^*] = \Theta_x.$$

2. Оценка должна иметь минимальную дисперсию. Для одного и того же параметра можно подобрать не одну, а несколько несмещенных оценок. На рис. 5.1 показаны плотности вероятности $f(\Theta_x^*)$ трех несмещенных оценок параметра Θ_x , полученные при одном и том же объеме выборки n .

Как следует из рис. 5.1, $\Theta_{x_1}^*$, $\Theta_{x_2}^*$, $\Theta_{x_3}^*$ имеют разные дисперсии. Поэтому значения параметра Θ_x , полученные с помощью этих оценок, будут иметь различное рассеивание относительно истинного значения этого параметра. Очевидно, что наилучшей из оценок $\Theta_{x_1}^*$, $\Theta_{x_2}^*$, $\Theta_{x_3}^*$ является оценка с наименьшей дисперсией.

Отсюда вытекает, что одновременно с требованием несмещенности оценка должна удовлетворять еще одному требова-

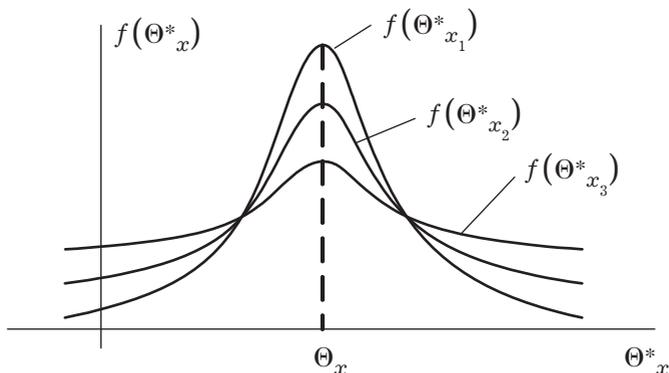


Рис. 5.1

нию. Необходимо, чтобы при данном числе испытаний оценка имела минимальную дисперсию. Несмещенная оценка, имеющая минимальную дисперсию, называется эффективной оценкой.

Минимальная дисперсия несмещенной оценки Θ_x^* определяется выражением

$$\min_{\Theta_x^*} D[\Theta_x^*] = \frac{1}{nI(\Theta_x^*; x)},$$

где n — объем выборки из генеральной совокупности;

$I(\Theta_x, x)$ — информационное количество Фишера.

$$I(\Theta_x; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\ln f(x, \Theta_x)}{\Theta_x} \right)^2 f(x, \Theta_x) dx,$$

где $f(x, \Theta_x)$ — плотность вероятности случайной величины X .

Выражение для минимальной дисперсии смещенной оценки записывается в виде [8]:

$$\min_{\Theta_x^*} D[\Theta_x^*] = \frac{\left(\frac{dM[\Theta_x^*]}{d\Theta_x} \right)^2}{nI(\Theta_x; x)}.$$

В качестве показателя эффективности оценки Θ_x^* параметра Θ_x используют меру эффективности e , равную отношению

минимально возможной величины дисперсии оценки к дисперсии данной конкретной оценки, ($0 \leq e \leq 1$). Очевидно, что для эффективной оценки $e = 1$. При сравнении по эффективности двух различных оценок $\Theta_{x_1}^*$ и $\Theta_{x_2}^*$ одного и того же параметра Θ_x часто в качестве показателя используют асимптотическую относительную эффективность оценки $\Theta_{x_2}^*$ по оценке $\Theta_{x_1}^*$ [8]:

$$e_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D[\Theta_{x_1}^*] / (M[\Theta_{x_1}^*])^2}{D[\Theta_{x_2}^*] / (M[\Theta_{x_2}^*])^2}.$$

Показатель асимптотической относительной эффективности означает, что для определения оценки $\Theta_{x_1}^*$ с такой же точностью, как и оценки $\Theta_{x_2}^*$, необходимо провести испытаний в e_a раз меньше.

3. Оценка должна быть *состоятельной*, т. е. сходиться по вероятности с увеличением числа испытаний к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\Theta_x^* - \Theta_x| < \varepsilon) = 1.$$

Состоятельная оценка должна быть асимптотически несмещенной, и с увеличением объема выборки дисперсия оценки должна уменьшаться. Поэтому в качестве состоятельности оценки можно принять одновременное выполнение двух равенств:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M[\Theta_x^*] &= \Theta_x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D[\Theta_x^*] &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, состоятельная оценка всегда асимптотически несмещенная и имеет минимальную дисперсию.

4. Желательно, чтобы оценка была *прочной* (робастной) или свободной (не зависящей) от распределения.

Часто до проведения исследований закон распределения случайной величины X неизвестен. Поэтому не ясно, какую оценку принять для параметра Θ_x . Целесообразно в этом случае воспользоваться оценкой, эффективность которой при некоторых распределениях может быть меньше единицы, но вид ее не меняется с изменением закона распределения.

5. Размерность оценки должна совпадать с размерностью оцениваемого параметра.

На практике получить оценку, удовлетворяющую всем перечисленным требованиям, удается не всегда. Поэтому необходимо анализировать те последствия, к которым приводят отступления от того или иного требования.

Оценки, удовлетворяющие указанным требованиям, могут быть получены различными методами. Поскольку в дальнейшем будут использоваться уже полученные оценки параметров, то здесь эти методы не рассматриваются. Они достаточно полно изложены в литературе по математической статистике.

5.3. Оценивание законов распределения случайных величин

Как было отмечено в п. 5.1, одной из задач статистической обработки результатов испытаний является установление вида закона распределения случайной величины. На первом этапе решения этой задачи по результатам произведенных испытаний строят статистические функцию и плотность распределения. Анализ полученных графиков и природы исследуемой случайной величины обычно позволяет выдвинуть гипотезу о виде закона ее распределения. Затем по результатам испытаний проверяют справедливость выдвинутой гипотезы.

В данном пункте рассмотрим только первый этап решения указанной задачи.

Результаты наблюдений значений, принятых случайной величиной X , удобно представить в виде табл. 5.1, называемой *простой статистической совокупностью*.

Таблица 5.1

Номер испытания	1	2	...	i	...	n
Результат	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n

Если результаты наблюдений упорядочить в порядке возрастания, то получаемая при этом таблица называется *вариационным рядом* (табл. 5.2). Элементы вариационного ряда на-

зываются *порядковыми (ранговыми) статистиками*. Номер элемента вариационного ряда называется *рангом*.

Таблица 5.2

Ранг элемента	1	2	...	r	...	n
Элемент ряда	x'_1	x'_2	...	x'_r	...	x'_n

$$x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_r \leq \dots \leq x'_n.$$

В случае, когда исследуемая случайная величина дискретного типа или результаты измерений округляются, результаты нескольких наблюдений могут совпадать. Из этого следует, что различные результаты наблюдений могут появляться в выборке с различной частотой, определяемой по формуле

$$P_k^* = \frac{n_k}{n} = P^*(X = x_k),$$

где n_k — число появлений в выборке результата x_k .

Вариационный ряд, представленный в форме табл. 5.3, принято называть *статистическим рядом*.

Таблица 5.3

x_k	x''_1	x''_2	...	x''_k	...	x''_N
n_k	n_1	n_2	...	n_k	...	n_N
P_k^*	P_1^*	P_2^*	...	P_k^*	...	P_N^*

По известному статистическому ряду строят статистическую (выборочную) функцию распределения $F^*(x)$ (рис. 5.2).

Ординаты функции $F^*(x)$ обычно определяют в точках, отвечающих полученным значениям результатов измерений x''_k , по формуле

$$F^*(x) = \sum_{x''_k < x} P^*(X = x''_k),$$

в которой суммирование распространяется на значения x''_k , меньшие x .

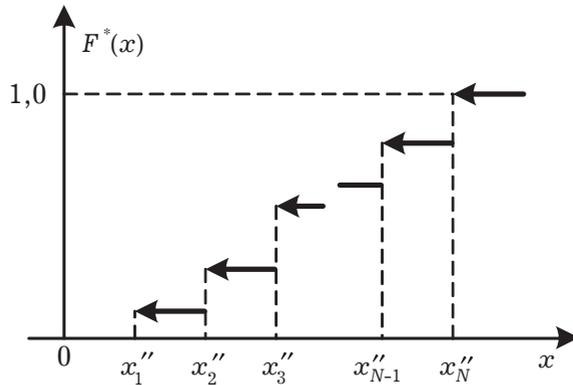


Рис. 5.2

Статистическая функция распределения является кусочно-непрерывной. Точками разрыва функции являются полученные значения x_i , а величина разрыва в каждой точке численно равна частоте соответствующего результата в выборке. Если каждое из значений x_i в выборке получено 1 раз, то величина разрыва в каждой точке одинакова и равна $1/n$.

Основанием применимости статистической функции распределения $F^*(x)$ для оценивания истинной функции распределения $F(x)$ служит закон больших чисел, в частности предельная теорема В. И. Гливенко. В соответствии с этой теоремой можно утверждать, что при увеличении объема выборки $F^*(x)$ сходится по вероятности к $F(x)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\max_x |F^*(x) - F(x)| < \varepsilon] = 1.$$

Таким образом, статистическая функция распределения $F^*(x)$ является состоятельной оценкой функции распределения $F(x)$. Кроме того, она является несмещенной асимптотически эффективной оценкой [8]. Поэтому при достаточно большом n функцию распределения случайной величины можно приближенно заменять ее выборочной функцией распределения.

Однако при большом объеме выборки построение статистической функции распределения путем определения ее значений для каждого из полученных результатов x_k'' является тру-

доемким (статистический ряд становится громоздким). В этом случае результаты наблюдений подвергают предварительной обработке, суть которой заключается в следующем. Весь диапазон полученных результатов от x_{\min} до x_{\max} разбивают на m интервалов. Затем определяют частоту попадания результатов измерений в каждый интервал по формуле

$$P_j^* = \frac{n_j}{n},$$

где n_j — число результатов измерений, попадающих в j -й интервал, включая его левую границу.

Число интервалов не должно быть слишком большим (в этом случае частоты подвергаются незакономерным колебаниям и статистический ряд становится невыразительным) или слишком малым (при этом описание случайной величины статистическим рядом становится грубым). Обычно выбирают 10–20 интервалов. Для ориентировочного определения числа интервалов можно пользоваться соотношениями $m \approx 5 \ln(n)$ или $m \approx \sqrt{n}$. При этом желательно, чтобы выполнялось условие $n_i \geq 5$.

Длины интервалов можно брать как одинаковыми, так и различными. Если имеет место значительная неравномерность распределения случайной величины, длины интервалов целесообразно брать различными.

В областях наибольшей изменчивости распределения интервалы должны быть более короткими. В случае, когда интервалы различные, обработка экспериментальных данных несколько усложняется.

Итогом предварительной обработки результатов наблюдений является статистический ряд распределения случайной величины (табл. 5.4).

Таблица 5.4

Интервалы	$x_{\min} \leq x < x_1$	$x_1 \leq x < x_2$...	$x_{j-1} \leq x < x_j$...	$x_{m-1} \leq x < x_{\max}$
n_j	n_1	N_2	...	n_j	...	n_m
P_j^*	P_1^*	P_2^*	...	P_j^*	...	P_m^*

Статистическую функцию распределения строят в виде ломаной линии с вершинами в граничных точках выбранных интервалов (см. рис. 5.2). Ординаты функции $F^*(x)$ в этих точках равны накопленным частотам:

$$\left. \begin{aligned} F^*(x_{\min}) &= 0 \\ F^*(x_1) &= P_1^* \\ F^*(x_2) &= P_1^* + P_2^* \\ &\dots\dots\dots \\ F^*(x_k) &= \sum_{j=1}^k P_j^* \\ &\dots\dots\dots \\ F^*(x_{\max}) &= \sum_{j=1}^m P_j^* = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Знание статистического ряда позволяет построить статистическую плотность распределения $f^*(x)$, график которой принято называть *гистограммой*. Гистограмму строят следующим образом. На каждом из выбранных интервалов как на основании строят прямоугольники, площадь которых равна частоте попадания полученных результатов наблюдений на данный интервал. Высоты прямоугольников определяют из соотношения

$$f^*(x_i) = \frac{P_i^*}{\Delta x_i} \quad (5.5)$$

и откладывают их по оси ординат.

Из изложенного принципа построения гистограммы следует, что ее площадь всегда равна единице.

Таким образом, статистическая плотность распределения представляет собой функцию, ординаты которой в пределах интервалов разбиения результатов наблюдений постоянны. С увеличением объема выборки и, следовательно, числа интервалов, гистограмма все более приближается к плотности распределения случайной величины и может использоваться для приближенного ее описания.

Построение статистической функции распределения и гистограммы рассмотрим на примере.

Пример 5.1. Для оценки точности показаний датчиков давления были произведены испытания 60 датчиков. При испытаниях каждым датчиком измерялось некоторое номинальное давление и определялась ошибка измерения δ_p как разность между показанием датчика и номиналом, выраженная в процентах номинала. В протокол испытаний записывались числа датчиков, ошибки измерений которыми оказались в пределах интервалов, равных 0,5%. Минимальное значение ошибки измерения оказалось равно -2,5%, а максимальное +3,0%. Результаты проведенных испытаний сведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число датчиков	1	3	5	9	11	9	8	6	4	3	1
Частоты в интервалах	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{1}{60}$

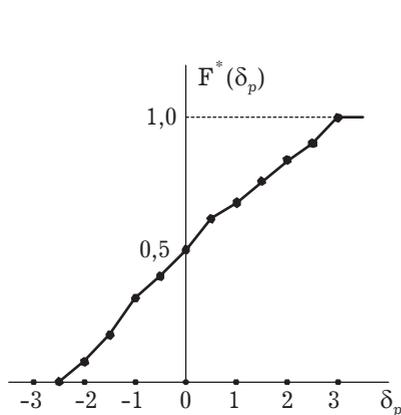


Рис. 5.3

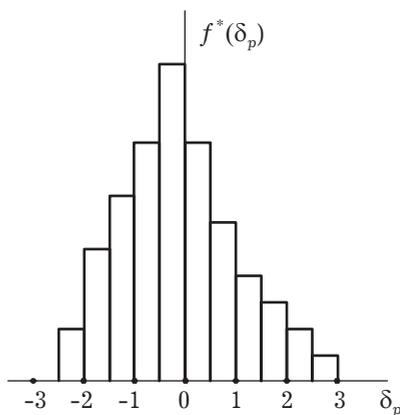


Рис. 5.4

Требуется построить статистические функцию и плотность распределения $F^*(\delta_p)$ и $f^*(\delta_p)$ ошибки измерения давления датчиками этого типа.

Решение.

1. Представляем результаты измерений в виде статистического ряда.

2. Рассчитываем по формулам (5.4) значения статистической функции распределения в точках, отвечающих границам выбранных интервалов.

3. Определяем высоты прямоугольников гистограммы (ординаты функции $f^*(\delta_p)$) для каждого интервала разбиения полученных результатов измерений, используя для этого формулу (5.5).

Результаты расчетов по пунктам 1, 2, 3 представлены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Правая граница интервала	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f^*(\delta_p)$	0	$\frac{2}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{2}{60}$
$F^*(\delta_p)$	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{38}{60}$	$\frac{46}{60}$	$\frac{52}{60}$	$\frac{56}{60}$	$\frac{59}{60}$	1

4. Строим графики статистических функций распределения (рис. 5.3) и плотности распределения (рис. 5.4).

Следует отметить, что неудачное разбиение на интервалы результатов измерений при составлении статистического ряда проявляется при построении гистограммы: она либо имеет “провалы”, либо оказывается невыразительной.

Полученные статистические функцию и плотность распределения аппроксимируют подобранным теоретическим законом. Затем проверяют гипотезу о согласованности теоретического и статистического законов распределения. Методы проверки гипотез о законах распределения изложены ниже, в п. 6.

5.4. Точечное оценивание числовых характеристик случайных переменных

5.4.1. Оценивание вероятности наступления случайного события

Данную задачу приходится решать, если результат эксперимента описывается случайным событием и в качестве характеристики свойства исследуемого объекта целесообразно принимать вероятность наступления некоторого события. Например, целью эксперимента является исследование надежности какой-либо системы. В качестве показателя надежности системы принята вероятность ее безотказной работы в течение определенного времени T . Для определения данного показателя планируется провести испытания n систем. Результат функционирования каждой системы можно описать случайным событием: за время T система не отказала, либо наступил ее отказ. Результаты испытания n систем рассматривают как выборку объема n из генеральной совокупности.

Необходимость решения аналогичных задач возникает при исследовании эффективности боевых действий с помощью имитационных моделей. В этом случае результаты n “прогнозов” модели на ЭВМ рассматривают как выборку из генеральной совокупности.

По результатам n испытаний подсчитывают число испытаний n_j , в которых наступило интересующее нас событие. Затем находят частоту наступления этого события

$$P^* = \frac{n_j}{n},$$

которую принимают в качестве его вероятности ($P^* \rightarrow P$).

Результат каждого отдельного испытания можно описать случайной переменной (дискретной случайной величиной)

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие наступило;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда число испытаний, в которых событие наступило, будет равно

$$n_1 = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.6)$$

а частота определяется выражением

$$P^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5.7)$$

Проанализируем свойство частоты P^* как оценки вероятности наступления случайного события.

1. Оценка P^* — несмещенная, так как математическое ожидание $M[P^*]$ равно истинному значению вероятности

$$\begin{aligned} M[P^*] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [1 \cdot P + 0 \cdot (1 - P)] = \frac{1}{n} \cdot nP = P. \end{aligned} \quad (5.8)$$

2. Поскольку согласно теореме Бернулли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|P^* - P| < \varepsilon) = 1,$$

т. е. частота P^* сходится по вероятности к вероятности P , то P^* — состоятельная оценка.

3. Дисперсия частоты P^* определяется выражением

$$D[P^*] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{P(1-P)}{n}. \quad (5.9)$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ дисперсия $D[P^*] \rightarrow 0$, то частота P^* — асимптотически эффективная оценка вероятности. Доказано, что при любом n дисперсия частоты (5.9) минимально возможная и, следовательно, P^* является вообще эффективной оценкой вероятности P .

Таким образом, частота наступления случайного события P^* является эффективной оценкой вероятности.

5.4.2. Оценивание математического ожидания случайной величины

Необходимость оценивания математического ожидания по результатам испытаний появляется в задачах, когда результат эксперимента описывается случайной величиной и показателем качества исследуемого объекта принято математическое ожидание этой случайной величины. Например, в качестве показателя надежности может быть принято математическое ожидание времени безотказной работы какой-либо системы, а при оценивании эффективности производства продукции — математическое ожидание числа годных изделий и т. д.

Задача оценивания математического ожидания формулируется следующим образом. Предположим, что для определения неизвестного значения случайной величины X предполагается произвести n независимых и свободных от систематических ошибок измерений X_1, X_2, \dots, X_n . Требуется выбрать наилучшую оценку математического ожидания.

Наилучшей и наиболее распространенной на практике оценкой математического ожидания является среднее арифметическое результатов испытаний

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.10)$$

называемое также *статистическим* или *выборочным средним*.

Покажем, что оценка m_x^* удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к оценке любого параметра.

1. Из выражения (5.10) следует, что

$$M[m_x^*] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = m_x,$$

т. е. оценка m_x^* — несмещенная оценка.

2. Согласно теореме Чебышева среднее арифметическое результатов испытаний сходится по вероятности к математическому ожиданию, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Следовательно, оценка (5.10) есть состоятельная оценка математического ожидания.

3. Дисперсия оценки m_x^* , равная

$$D[m_x^*] = D \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{D_x}{n}, \quad (5.11)$$

с ростом объема выборки n неограниченно убывает. Доказано, что если случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, то при любом n дисперсия (5.11) будет минимально возможной, а оценка m_x^* — эффективной оценкой математического ожидания. Знание дисперсии оценки позволяет вынести суждение относительно точности определения неизвестного значения математического ожидания с помощью этой оценки.

В качестве оценки математического ожидания среднее арифметическое используется в том случае, если результаты измерений равноточные (дисперсии $D[X_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ одинаковы в каждом измерении). Однако на практике приходится сталкиваться с задачами, в которых результаты измерений неравноточные (например, в процессе испытаний измерения производятся различными приборами). В этом случае оценка для математического ожидания имеет вид

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n C_i X_i}{\sum_{i=1}^n C_i}, \quad (5.12)$$

где $C_i = \frac{1}{D[X_i]}$ — вес i -го измерения.

В формулу (5.12) результат каждого измерения включается со своим весом C_i . Поэтому оценку результатов измерений m_x^* называют *средневзвешенной*.

Можно показать, что оценка (5.12) является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой математического ожидания. Минимальная дисперсия оценки определяется выражением

$$D[m_x^*] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n C_i}. \quad (5.13)$$

При проведении экспериментов с моделями на ЭВМ подобные задачи возникают в том случае, когда оценки находят по результатам нескольких серий испытаний и число испытаний в каждой серии различно. Например, проведены две серии испытаний объемом n_1 и n_2 , по результатам которых получены оценки $m_{x_1}^*$ и $m_{x_2}^*$. С целью повышения точности и достоверности определения математического ожидания результаты этих серий испытаний объединяют. Для этого следует воспользоваться выражением (5.12)

$$m_x^* = \frac{\sum_{j=1}^n C_j m_{x_j}^*}{\sum_{j=1}^n C_j}.$$

При вычислении коэффициентов C_i вместо дисперсий $D[X_i]$ подставляют их оценки, полученные по результатам испытаний в каждой серии.

Аналогичный подход используют и при определении вероятности наступления случайного события по результатам серий испытаний.

Для оценивания математического ожидания случайной величины X , кроме выборочного среднего, могут использоваться и другие статистики. Чаще всего для этих целей используют члены вариационного ряда, т. е. порядковые статистики $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r \leq \dots \leq x_n$, на базе которых строят оценки, удовлетворяющие основным из предъявляемых требований, а именно состоятельности и несмещенности.

Предположим, что вариационный ряд содержит $n = 2k$ членов. Тогда в качестве оценки математического ожидания может быть принято любое из средних:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{n-i+1}}{2}.$$

При этом k -е среднее

$$x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = Me^*$$

есть не что иное, как статистическая медиана распределения случайной величины X , поскольку имеет место очевидное равенство

$$P^*(x_i < Me^*) = P(x_i > Me^*).$$

Преимущество статистической медианы состоит в том, что она свободна от влияния аномальных результатов наблюдений, неизбежного при использовании первого среднего, т. е. среднего из наименьшего и наибольшего числа вариационного ряда.

При нечетном объеме выборки $n = 2k - 1$ статистической медианой является ее средний элемент, т. е. k -й член вариационного ряда $Me^* = x_k$.

Существуют распределения, у которых среднее арифметическое не является эффективной оценкой математического ожидания, например, распределение Лапласа. Можно показать, что для распределения Лапласа эффективной оценкой математического ожидания является выборочная медиана.

Доказано, что если случайная величина X имеет нормальное распределение, то при достаточно большом объеме выборки закон распределения статистической медианы близок к нормальному с числовыми характеристиками

$$\begin{aligned} M[Me^*] &= M[X], \\ D[Me^*] &= \frac{\pi}{2n} D_x \approx \frac{1,57}{n} D_x. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из сравнения формул (5.11) и (5.14) следует, что дисперсия статистической медианы в 1,57 раза больше дисперсии сред-

него арифметического. Следовательно, среднее арифметическое как оценка математического ожидания во столько же раз эффективнее статистической медианы. Однако из-за простоты вычислений, нечувствительности к аномальным результатам измерений (“засоренности” выборки) на практике в качестве оценки математического ожидания тем не менее используют статистическую медиану.

Следует отметить, что для непрерывных симметричных распределений математическое ожидание и медиана совпадают. Поэтому статистическая медиана может служить хорошей оценкой математического ожидания лишь при симметричном распределении случайной величины.

Для несимметричных распределений статистическая медиана Me^* имеет существенное смещение относительно математического ожидания, поэтому для его оценивания непригодна.

5.4.3. Оценивание дисперсии и стандартного отклонения случайной величины

На практике часто возникает необходимость определения оценок D_x^* и σ_x^* характеристик рассеивания D_x и σ_x результатов испытаний относительно математического ожидания случайной величины X . При решении этой задачи различают два случая: математическое ожидание случайной величины X известно и математическое ожидание неизвестно. Для вычисления оценок указанных характеристик используют выражения (статистики)

$$D_x^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2}, \quad (5.15)$$

где k — число степеней свободы:

$k = n$, если математическое ожидание известно;

$k = n - 1$, если математическое ожидание неизвестно.

При неизвестном математическом ожидании в формулы (5.15) вместо истинного значения m_x подставляют его оценку m_x^* , вычисленную по формуле (5.10).

Оценки дисперсии обладают необходимыми свойствами, т. е. они несмещенные, состоятельные и эффективные. Что касается оценок стандартного отклонения, то они являются отрицательно смещенными. Однако абсолютная величина смещения быстро уменьшается при увеличении числа испытаний (объема выборки) и уже при $n = 10$ не превышает 3% от σ_x . Оценка стандартного отклонения является состоятельной и асимптотически эффективной оценкой.

При большом объеме выборки n (например, при большом числе “прогонов” модели на ЭВМ) желательно так организовать процесс обработки результатов моделирования, чтобы оценки для искомых характеристик формировались постепенно по ходу моделирования, т. е. без специального запоминания всей информации. Так, например, для получения оценки вероятности наступления события при обработке результатов моделирования достаточно накапливать в памяти ЭВМ лишь число “успешных” реализаций, а не хранить результаты всех испытаний. Для оценки математического ожидания накапливают сумму возможных значений случайной величины $x_i = 1, 2, \dots, n$, которые она принимает в различных реализациях.

Непосредственное вычисление оценки дисперсии по формуле (5.15) нерационально, так как среднее значение m_x^* изменяется в процессе накопления значений x_i . Это приводит к необходимости запоминания всех n значений x_i . Поэтому более рационально организовать фиксацию результатов моделирования для вычисления оценки дисперсии с использованием следующей формулы:

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right].$$

Это значит, что для вычисления оценки дисперсии необходимо и достаточно накапливать две суммы: x_i и их квадратов x_i^2 .

5.4.4. Определение числовых характеристик случайных величин при большом объеме измерений

При очень большом числе результатов измерений (несколько десятков или сотен) определение числовых характеристик случайных величин с помощью оценок (5.10) и (5.15) требует громоздких вычислений. Поэтому в таких случаях часто используют упрощенный способ решения задачи. Сущность его заключается в том, что результаты измерений группируют по интервалам, т. е. представляют их в виде статистического ряда, а искомые числовые характеристики определяют с помощью оценок следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} m_x^* &= \sum_{j=1}^m x_{\text{ср}j} P_j^* ; \\ D_x^* &= \sum_{j=1}^m (x_{\text{ср}j} - m_x^*)^2 P_j^* = \sum_{j=1}^m x_{\text{ср}j}^2 P_j^* - m_x^{*2} , \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где m — число интервалов;

P_j^* — частота попадания результатов измерений в j -й интервал;

$x_{\text{ср}j}$ — координата середины j -го интервала.

Выражения (5.16) аналогичны выражениям (2.15) и (2.21), определяющим математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины. Разница состоит только в том, что здесь вероятности заменены частотами, а математическое ожидание m_x — статистическим средним m_x^* .

5.5. Интервальное оценивание числовых характеристик случайных величин

5.5.1. Понятие доверительной вероятности и доверительного интервала

При точечном оценивании получают лишь приближенные значения искомых параметров. Степень рассеивания этих значений относительно истинных характеризуется дисперсиями (стан-

дартными отклонениями) оценок. Однако знание этих дисперсий обычно оказывается недостаточным. Иногда требуется знать насколько значение истинного параметра, полученное с помощью оценки при том или ином объеме выборки, отличается от истинного значения данного параметра, т. е. какой является ошибка

$$\delta\Theta_x^* = \Theta_x^* - \Theta_x. \quad (5.17)$$

Из равенства (5.17) видно, что величина погрешности $\delta\Theta_x^*$ случайна, а истинное значение Θ_x неизвестно. Поэтому нельзя определить значение погрешности, даже зная оценку Θ_x^* . Относительно погрешности $\delta\Theta_x^*$ можно сделать суждение вероятностного характера. Такие суждения обычно делают на основе понятия доверительного интервала.

Под доверительным интервалом понимают случайный интервал, который с некоторой вероятностью α накрывает истинное значение искомого параметра:

$$\alpha = P(|\Theta_x^* - \Theta_x| < \gamma). \quad (5.18)$$

Вероятность α называют доверительной вероятностью. Она характеризует достоверность (надежность), а доверительный интервал длиной 2γ — точность определения неизвестного значения параметра Θ_x с помощью оценки Θ_x^* .

Поясним смысл доверительного интервала. С этой целью выражение (5.18) перепишем в виде

$$\alpha = P(\Theta_x^* - \gamma < \Theta_x < \Theta_x^* + \gamma). \quad (5.19)$$

Поскольку оценка Θ_x^* — величина случайная, то $\Theta_x^* - \gamma$ и $\Theta_x^* + \gamma$ также величины случайные, являющиеся границами интервала, который накрывает неизвестное значение оцениваемого параметра Θ_x .

Очевидно, что при фиксированной доверительной вероятности α , чем уже доверительный интервал (чем меньше его полуразмах γ), тем точнее будет оценен неизвестный параметр Θ_x . Чем больше доверительная вероятность α при фиксированной длине доверительного интервала, тем надежнее будет произведено оценивание параметра Θ_x .

Предположим, что для оценивания некоторого параметра Θ_x проведено n испытаний, по результатам которых получена точечная оценка Θ_x^* этого параметра. Затем найдены левая $(\Theta_x^* - \gamma)$ и правая $(\Theta_x^* + \gamma)$ границы интервала. Еще раз проводят n испытаний. По результатам этой серии испытаний вновь находят оценку Θ_x^* и строят доверительный интервал. Пусть произведено десять таких серий по n испытаний в каждой серии. Соответствующие доверительные интервалы нанесены на горизонтальные линии рис. 5.5.

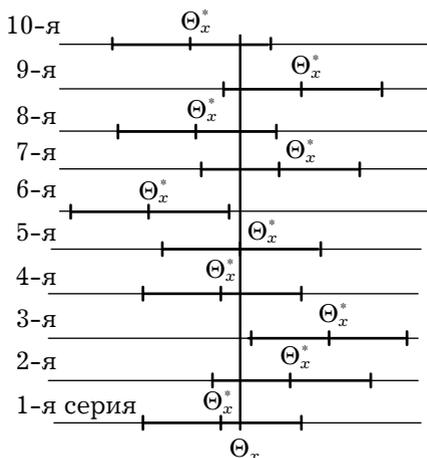


Рис. 5.5

Восемь интервалов из десяти накрыли точку Θ_x , а интервалы, полученные в 3-й и 6-й сериях, не накрыли Θ_x . Таким образом, частота события $|\Theta_x^* - \Theta_x| < \gamma$ равна 0,8. При увеличении числа серий по n испытаний в каждой частота указанного события будет устойчиво колебаться около доверительной вероятности α .

До сих пор рассматривался так называемый симметричный доверительный интервал, т. е. интервал, границы которого равноудалены от полученного значения оценки Θ_x^* . Однако в практике оценивания используют и несимметричные интервалы. У несимметричных интервалов левая граница удалена

от значения оценки на величину γ_2 , а правая — на γ_1 ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). Длина доверительного интервала равна $(\gamma_1 + \gamma_2)$. В этом случае выражение для доверительной вероятности запишем в виде

$$\alpha = P(\Theta_x^* - \gamma_2 < \Theta_x < \Theta_x^* + \gamma_1)$$

или

$$\alpha = P(-\gamma_2 < \Theta_x^* - \Theta_x < +\gamma_1). \quad (5.20)$$

Условию (5.20) при фиксированной вероятности α удовлетворяет бесчисленное множество пар значений γ_1 и γ_2 .

Предположим, что плотность распределения случайной величины $Y = \Theta_x^* - \Theta_x$ имеет вид, представленный на рис. 5.6.

На этом же рисунке показаны два интервала, соответствующие одной и той же вероятности

$$\int_{-\gamma_2'}^{\gamma_1'} f(y) dy = \int_{-\gamma_2''}^{\gamma_1''} f(y) dy.$$

Для устранения указанной неоднозначности используют два способа. Один из них основан на выборе таких значений γ_1 и γ_2 , при которых обеспечивается симметрия в распределении вероятности $(1 - \alpha)$, т. е. значений, удовлетворяющих условию

$$P(Y < \gamma_2) = P(Y \geq \gamma_1) = \frac{1 - \alpha}{2} \quad (5.21)$$

или

$$\int_{-\infty}^{-\gamma_2} f(y) dy = \int_{\gamma_1}^{+\infty} f(y) dy = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Такие значения γ_2 и γ_1 показаны на рис. 5.7 при несимметричном распределении случайной величины Y .

Доверительный интервал, выбранный таким способом, называют *центральным*.

Второй способ основан на выборе таких значений γ_1 и γ_2 , которые при данном уровне вероятности α обеспечивают симметрию границ доверительного интервала относительно оценки Θ_x^* . Сущность данного способа будет рассмотрена при интервальном оценивании стандартного отклонения.

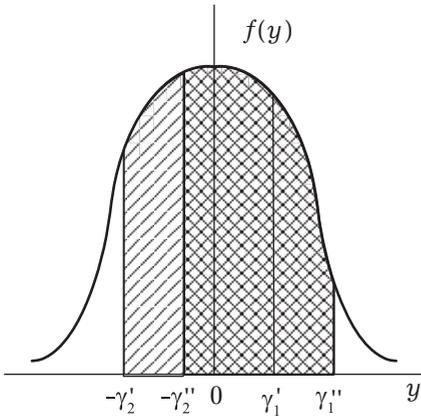


Рис. 5.6

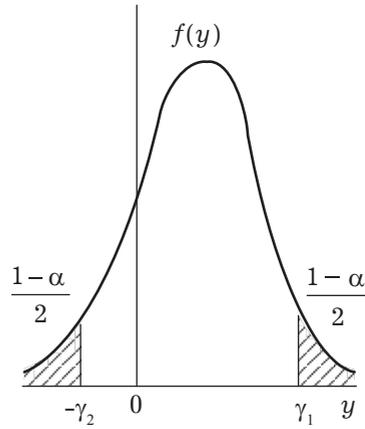


Рис. 5.7

При симметричном распределении Y центральный и симметричный доверительные интервалы при фиксированной вероятности совпадают.

При интервальном оценивании решаются следующие основные задачи:

- определение доверительного интервала при заданной доверительной вероятности и фиксированном числе испытаний;
- определение доверительной вероятности при заданном доверительном интервале и фиксированном числе испытаний;
- определение необходимого числа испытаний при заданных доверительной вероятности и доверительном интервале.

Решение указанных задач не вызывает затруднений, если известен закон распределения случайной величины $(\Theta_x^* - \Theta_x)$.

Рассмотрим методы решения задач интервального оценивания при определении вероятности наступления случайного события, математического ожидания и стандартного отклонения случайной величины, которые наиболее часто используются в качестве характеристик изделий и показателей эффективности их производства.

Иногда в силу ограниченности априорных сведений об исследуемом процессе либо из-за сложности вероятностных расчетов

установить закон распределения не удастся. В этом случае вначале приходится выдвигать соответствующие гипотезы относительно закона распределения оценки и проводить их проверку.

5.5.2. Оценивание вероятности наступления случайного события

Как было показано в п. 5.4.1, частота P^* , полученная по результатам n реализаций в соответствии с формулой (5.7), является эффективной оценкой вероятности P . В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей (теоремы Ляпунова) при большом n распределение частоты P^* описывается нормальным законом распределения с плотностью вероятности

$$f(P^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{P^*}} \exp\left(-\frac{(P^* - m_{P^*})^2}{2\sigma_{P^*}^2}\right). \quad (5.22)$$

При этом математическое ожидание и стандартное отклонение частоты определяются выражениями

$$m_{P^*} = P; \quad \sigma_{P^*} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}. \quad (5.23)$$

Рассмотрим случайную величину

$$Y = \frac{P^* - m_{P^*}}{\sigma_{P^*}}. \quad (5.24)$$

Поскольку случайная величина Y связана с частотой P^* линейной зависимостью, то она также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, т. е. $Y \in N(0,1)$. Поэтому при любом уровне вероятности α справедливо соотношение

$$\alpha = P(|P^* - P| < \gamma) = P\left(\left|\frac{P^* - P}{\sigma_{P^*}}\right| < \gamma\right) = \Phi_T(y_\alpha), \quad (5.25)$$

где $y = \frac{\gamma}{\sigma_{P^*}}$ — аргумент табличной функции Лапласа, при котором $\Phi_T(y) = \alpha$.

Соотношение (5.25) можно записать с использованием табличной функции нормального закона распределения

$$\frac{1+\alpha}{2} = P(|P^* - P| < \gamma) = P\left(\left|\frac{P^* - P}{\sigma_{P^*}}\right| < \gamma\right) = F_T(y_\alpha).$$

Таблицы функций $F_T(y)$ и $\Phi_T(y)$ можно найти в справочниках по математической статистике. Например, таблица значений функции нормального закона распределения содержится в табл. 1 приложения 1.

Напомним, что табличная функция нормального закона распределения и табличная функция Лапласа имеют вид

$$F_T(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{и} \quad \Phi_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

соответственно, и связаны между собой зависимостью

$$F_T(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi_T(y).$$

Неравенство

$$\left|\frac{P^* - P}{\sigma_{P^*}}\right| < y_\alpha$$

равносильно неравенству

$$-y_\alpha \sigma_{P^*} < P^* - P < y_\alpha \sigma_{P^*}$$

или неравенству

$$P^* - y_\alpha \sigma_{P^*} < P < P^* + y_\alpha \sigma_{P^*}.$$

Откуда вытекает, что интервал

$$I(P^* - y_\alpha \sigma_{P^*}; P^* + y_\alpha \sigma_{P^*}) \quad (5.26)$$

накрывает неизвестное значение P с вероятностью α .

Таким образом, для определения доверительного интервала при заданной доверительной вероятности α и фиксированном n необходимо:

- по результатам n испытаний по формуле (5.7) получить значение частоты P^* ;
- рассчитать значение стандартного отклонения

$$\sigma_{P^*} = \sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n}};$$

- по доверительной вероятности α из таблицы функции нормального закона распределения или функции Лапласа найти значение y_α ;
- рассчитать границы доверительного интервала по формуле (5.26).

На рис. 5.8 представлены зависимости границ доверительного интервала $P^* - y_\alpha \sigma_{P^*}$ и $P^* + y_\alpha \sigma_{P^*}$ от значения оценки P^* при фиксированных значениях α и n .

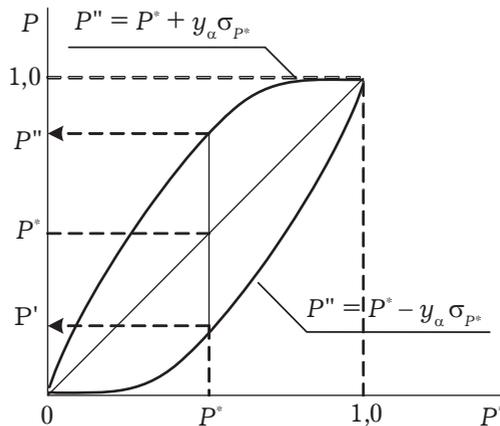


Рис. 5.8

Поскольку при вычислении оценки стандартного отклонения σ_{P^*} по формуле (5.23) вместо неизвестного значения вероятности P подставляют ее оценку P^* , полученную по результатам n испытаний, то оказывается случайным не только центр доверительного интервала, но и его длина.

Определение доверительной вероятности α при заданном доверительном интервале γ и фиксированном числе испытаний n производится в следующей последовательности:

- рассчитать значения оценок вероятности P^* и стандартного отклонения σ_{P^*} ;
- вычислить значение аргумента табличной функции нормального распределения или функции Лапласа

$$y_\alpha = \frac{\gamma}{\sigma_{P^*}} = \frac{\gamma\sqrt{n}}{\sqrt{P^*(1-P^*)}}; \quad (5.27)$$

- по значению y_α из таблицы функции нормального распределения или функции Лапласа найти вероятность α .

Если требуемые точность γ и достоверность α оценивания вероятности P заданы, то необходимое для их обеспечения число испытаний n_{mp} находится из уравнения (5.27)

$$n_{mp} \geq \frac{P^*(1-P^*)}{\gamma^2} y_\alpha^2, \quad (5.28)$$

где y_α находится из таблицы функции нормального распределения или функции Лапласа по известной доверительной вероятности α .

Из соотношения (5.28) видно, что при фиксированном значении α необходимое число испытаний обратно пропорционально квадрату допустимой абсолютной погрешности γ . Поэтому для определения вероятности P по частоте P^* с достаточной точностью и достоверностью требуется большое число испытаний. В табл. 5.7 приведены необходимые значения числа испытаний n_{mp} , обеспечивающие с доверительной вероятностью α требуемую точность γ оценивания различных значений вероятности P .

Таблица 5.7

P	γ			
	0,05	0,01	0,005	0,001
0,1 (0,9)	139	3458	13830	345744

P	γ			
	0,05	0,01	0,005	0,001
0,2 (0,8)	246	6147	24587	614656
0,3 (0,7)	323	8068	32270	806736
0,4 (0,6)	369	9220	36880	921984
0,5	385	9604	38416	960400

Из табл. 5.7 видно, что необходимое число испытаний растет не только с увеличением требуемой точности, но и с приближением истинного значения оцениваемой вероятности P к вероятности, равной 0,5. Это обусловлено тем, что дисперсия оценки P^* достигает максимального значения, равного $0,25/n$, именно при $P = 0,5$.

Поскольку в выражение (5.28) входит неизвестное значение вероятности P , то определение необходимого числа испытаний n_{mp} производят приближенно. Один из способов такого приближения состоит в оценке верхней границы необходимого числа испытаний на основе неравенства

$$n_{mp} \leq 0,25 \frac{y_{\alpha}^2}{\gamma^2},$$

которое получается с учетом того, что $\max\{P(1 - P)\} = 0,25$.

Другой способ заключается в реализации соотношения (5.28) путем последовательного уточнения частоты P^* и n , начиная с некоторого ориентировочного значения числа испытаний n_0 . После проведения n_0 числа испытаний это значение уточняют, заменяя в формуле (5.28) вероятность P полученным значением частоты P^* . Если при этом окажется, что новое значение n_1 не превышает n_0 , решение задачи заканчивается. Если же $n_1 > n_0$, то производят еще $(n_1 - n_0)$ испытаний, по результатам которых уточняют значение частоты, а по нему — значение необходимого числа испытаний. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет обеспечена заданная точность определения вероятности P .

5.5.3. Оценивание математического ожидания

При оценивании математического ожидания следует различать случаи большой ($n > 30$) и малой ($n \leq 30$) выборки при известной и неизвестной характеристиках рассеивания результатов испытаний. Рассмотрим последовательно эти случаи.

Случай большой выборки

Если объем выборки большой, то при любом распределении результатов моделирования распределение оценки математического ожидания (5.10) близко к нормальному с параметрами

$$M[m_x^*] = m_x, \quad \sigma_{m_x^*} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (5.29)$$

Предположим, что характеристика точности результатов измерений σ_x известна.

Тогда случайная величина

$$Y = \frac{m_x^* - m_x}{\sigma_{m_x^*}} \quad (5.30)$$

будет иметь также нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, т. е. $Y \in N(0,1)$.

Доверительная вероятность α будет определяться соотношением

$$\alpha = P(|m_x^* - m_x| < \gamma) = P\left(\left|\frac{m_x^* - m_x}{\sigma_{m_x^*}}\right| < \frac{\gamma}{\sigma_{m_x^*}}\right). \quad (5.31)$$

С учетом того, что случайная величина Y имеет нормальное распределение, соотношение (5.31) запишется в виде

$$\alpha = \Phi_T\left(\frac{\gamma}{\sigma_x} \sqrt{n}\right) \text{ или } \frac{1+\alpha}{2} = F_T\left(\frac{\gamma}{\sigma_x} \sqrt{n}\right). \quad (5.32)$$

Разрешив первое уравнение (5.32) относительно γ , получим

$$\gamma = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi_T^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha, \quad (5.33)$$

где $\Phi_T^{-1}(\alpha)$ — функция, обратная табличной функции Лапласа.

Интервал

$$I \left(m_x^* - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha, m_x^* + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} y_\alpha \right) \quad (5.34)$$

накрывает неизвестное значение m_x с вероятностью α . Длина интервала зависит только от уровня доверительной вероятности α и от стандартного отклонения $\sigma_{m_x^*}$ оценки m_x^* , с помощью которой определяется неизвестное значение m_x . Величина $\sigma_{m_x^*}$, как это следует из равенства (5.29), определяется числом измерений n и стандартным отклонением σ_x , характеризующим точность измерений. Таким образом, в рассматриваемом случае при фиксированных значениях α , n , σ_x длина доверительного интервала является постоянной. Случайным этот интервал оказывается потому, что центром его является оценка m_x^* , т. е. случайная величина.

Если же характеристика точности σ_x неизвестна, то вместо нее в формулы (5.29), (5.33), (5.34) подставляют оценку σ_x^* , полученную по результатам n измерений, что при большом n вполне допустимо. При этом доверительный интервал (5.34) имеет вид

$$I \left(m_x^* - \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} y_\alpha, m_x^* + \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} y_\alpha \right). \quad (5.35)$$

Этот интервал имеет не только случайный центр m_x^* , но и случайную длину, так как она является функцией оценки σ_x^* .

Определение доверительного интервала при известной доверительной вероятности α и фиксированном n производится в следующей последовательности:

- по результатам n испытаний получают оценки m_x^* и σ_x^* по формулам (5.10) и (5.14) соответственно;
- из таблицы функции нормального распределения или функции Лапласа по вероятности α находят значение y_α ;

- по формуле (5.35) рассчитывают границы доверительного интервала I .

Для определения доверительной вероятности α при известном доверительном интервале γ и фиксированном числе измерений n необходимо:

- по результатам n измерений по формуле (5.14) получить оценку σ_x^* ;

- вычислить значение $y_\alpha = \frac{\gamma}{\sigma_x^*} \sqrt{n}$;

- по величине y_α в таблице функции нормального распределения или функции Лапласа найти значение доверительной вероятности α .

Случай малой выборки

Если закон распределения результатов измерения нормальный, то оценка m_x^* будет иметь нормальное распределение при любом объеме выборки. Поэтому при известном значении σ_x доверительный интервал и доверительная вероятность определяются аналогично, как и в первом случае (при большом объеме выборки). Однако, если характеристика точности результатов измерений σ_x неизвестна, то при малом объеме выборки замена стандартного отклонения σ_x его оценкой σ_x^* может привести к грубым ошибкам. Поэтому для оценки точности и достоверности определения математического ожидания в этом случае используется нормированная разность

$$T = \frac{m_x^* - m_x}{\sigma_x^*} \sqrt{n}, \quad (5.36)$$

в которой оценка m_x^* определяется соотношением (5.10), а оценка σ_x^* — соотношением (5.14).

Поскольку знаменатель выражения (5.36) является случайной величиной, нормированная разность T оказывается распределенной по закону, отличному от нормального. Это распределение называют распределением Стьюдента.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}},$$

где $\Gamma(*)$ — гамма-функция;
 k — число степеней свободы.

Распределение Стьюдента имеет единственный параметр k , называемый числом степеней свободы

$$k = n - 1,$$

где n — число измерений, по результатам которых с помощью оценки (5.14) определяют неизвестное значение σ_x .

Кривая плотности распределения Стьюдента (рис. 5.9) симметрична относительно нуля и при $k > 30$ совпадает с кривой плотности нормального закона распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Этим и обусловлен тот факт, что при большом объеме выборки и неизвестной характеристике точности результатов измерений для определения доверительного интервала используют таблицу функции нормального распределения. При $k \leq 30$ ординаты плотности распределения Стьюдента при $|t| \rightarrow \infty$ уменьшаются медленнее, чем ординаты плотности нормального закона распределения.

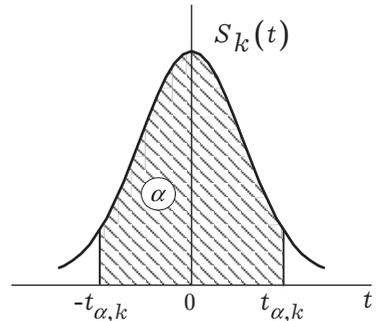


Рис. 5.9

Для распределения Стьюдента в приложении имеется табл. 8, в которой приведены значения $t_{\alpha,k}$, удовлетворяющие неравенству (см. рис. 5.9)

$$\alpha = P(|T| < t_{\alpha,k}) = 2 \int_0^{t_{\alpha,k}} f(t) dt. \quad (5.37)$$

Это позволяет в рассматриваемом случае определить симметричный доверительный интервал следующим образом. Не-

равенство $|T| < t_{\alpha,k}$ с учетом выражения (5.36) равносильно неравенству

$$m_x^* - t_{\alpha,k} \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} < m_x < m_x^* + t_{\alpha,k} \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, соотношение (5.37) может быть представлено в виде

$$\alpha = P(-t_{\alpha,k} < T < t_{\alpha,k}).$$

Таким образом, интервал

$$I \left(m_x^* - t_{\alpha,k} \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}}, m_x^* + t_{\alpha,k} \frac{\sigma_x^*}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.38)$$

накрывает неизвестное значение m_x с вероятностью α , т. е. является искомым доверительным интервалом.

Для определения граничных точек $t_{\alpha,k}$ можно воспользоваться таблицей функции распределения Стъюдента. Входами в таблицу являются число степеней свободы k и вероятность α .

Для определения математического ожидания с заданной точностью и достоверностью требуется вполне определенное число измерений n_{mp} .

Разрешив относительно n уравнение (5.33), получим

$$n_{mp} \geq \left(\frac{\sigma_x}{\gamma} y_\alpha \right)^2. \quad (5.39)$$

Для определения необходимого числа испытаний данную зависимость можно использовать:

- при любом необходимом числе реализаций, если распределение результатов измерений описывается нормальным законом и характеристика точности измерений σ_x известна;
- при большом необходимом числе реализаций ($n > 30$), если закон распределения результатов измерений произвольный и характеристика точности измерений σ_x неизвестна. В этом случае вместо σ_x в формуле (5.39) подставляется σ_x^* .

При малом необходимом числе испытаний в условиях, когда характеристика точности результатов измерений σ_x неиз-

вестна и вместо нее используют оценку σ_x^* , необходимый для определения математического ожидания объем выборки удовлетворяет неравенству

$$n_{mp} \geq \left(\frac{\sigma_x}{\gamma} t_{\alpha,k} \right)^2. \quad (5.40)$$

Поскольку правая часть неравенства (5.40) зависит от n (через $t_{\alpha,k}$ и σ_x^*), то необходимый объем выборки n_{mp} находят методом последовательных приближений и он равен наименьшему из значений n , обеспечивающих выполнение неравенства (5.40).

5.5.4. Оценивание стандартного отклонения

Ограничимся рассмотрением методики оценки стандартного отклонения с помощью доверительного интервала, отвечающего доверительной вероятности α , только для случая, когда результаты измерений описываются нормальным законом распределения.

Для определения границ доверительного интервала воспользуемся тем, что случайная величина

$$T = k \frac{\sigma_x^*}{\sigma_x} \quad (5.41)$$

имеет χ^2 (хи-квадрат) — распределение. Плотность распределения χ^2 имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}}, & \text{при } t > 0; \\ 0, & \text{при } t \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(*)$ — гамма-функция.

χ^2 (хи-квадрат) — распределение имеет один единственный параметр — число степеней свободы k . Причем, если при

известном математическом ожидании m_x используется оценка дисперсии в форме (5.14), то в (5.41) следует положить $k = n$. Если же дисперсия оценивается при неизвестном математическом ожидании, то число степеней свободы k следует принять равным $(n - 1)$. График плотности χ^2 -распределения показан на рис. 5.10.

Для χ^2 -распределения составлена табл. 13 в приложении 1, в которой приведены значения вероятностей

$$q = P(T \geq t_q) = \int_{t_q}^{\infty} f(t) dt. \quad (5.42)$$

С помощью этой таблицы находят два значения t_1 и t_2 , которые удовлетворяют условию

$$P(t_1 \leq T < t_2) = \alpha. \quad (5.43)$$

С учетом соотношения (5.41) неравенство

$$t_1 \leq T < t_2$$

запишем в виде

$$t_1 < k \frac{\sigma_x^{*2}}{\sigma_x^2} < t_2.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_1}}.$$

Поэтому выражение (5.43) запишем в виде

$$P\left(\sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_1}}\right) = \alpha.$$

Таким образом, интервал

$$I_{\alpha,k} \left(\sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_2}} < \sigma_x < \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_1}} \right) \quad (5.44)$$

накрывает искомое значение σ_x с вероятностью α .

Условию (5.43) удовлетворяет бесчисленное множество пар значений (t_1, t_2) . Для устранения неоднозначности доверительного интервала (5.44) используют отмеченные в п. 5.5.1 способы.

Границы центрального интервала выбирают из условия (см. рис. 5.11)

$$P(T > t_2) = P(T < t_1) = \frac{1 - \alpha}{2}. \quad (5.45)$$

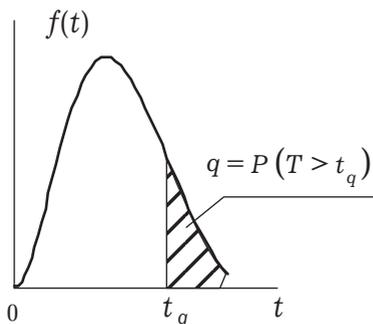


Рис. 5.10

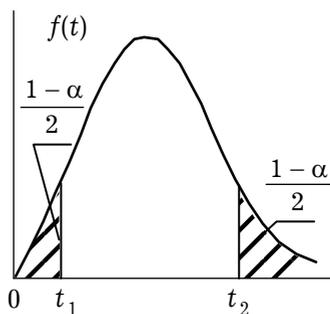


Рис. 5.11

Значение t_1 находят из таблицы χ^2 -распределения при заданном числе степеней свободы k и доверительной вероятности α из условия

$$q_1 = P(T > t_1) = 1 - \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 + \alpha}{2} \quad (5.46)$$

значение t_2 — из условия

$$q_2 = P(T > t_2) = \frac{1 - \alpha}{2}. \quad (5.47)$$

На рис. 5.11 показаны границы t_1 и t_2 и заштрихованы области, соответствующие вероятностям $P(T < t_1)$ и $P(T > t_2)$.

Таким образом, порядок работы при отыскании центрального доверительного интервала для стандартного отклонения следующий:

- вычисляют оценку σ_x^* стандартного отклонения σ_x ;
- определяют число степеней свободы k ;

- по доверительной вероятности α из (5.46) и (5.47) находят значения q_1 и q_2 , по которым входят в таблицу χ^2 -распределения с соответствующим числом степеней свободы, где отыскивают значения t_1 и t_2 ;

- вычисляют левую и правую границы доверительного интервала $I_{\alpha,k}$:

$$I_{\alpha,k}^{(л)} = \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_2}}, \quad I_{\alpha,k}^{(п)} = \sigma_x^* \sqrt{\frac{k}{t_1}}. \quad (5.48)$$

Из выражений (5.48) видно, что длина интервала является случайной, поскольку зависит от оценки σ_x^* . Кроме того, сам интервал оказывается несимметричным относительно σ_x^* . Для построения центрального доверительного интервала целесообразно использовать табл. 10 приложения, из которой получают два значения z_1 и z_2 . Умножив их на значение σ_x^* , получают левую и правую границы доверительного интервала. Входами в таблицу являются величины α и k . Достоинством центрального доверительного интервала является то, что при любых исходных данных его левая граница не может оказаться в отрицательной области. Подобная ситуация, как это будет показано ниже, в некоторых случаях может иметь место при использовании симметричного доверительного интервала.

Границы симметричного интервала выбирают следующим образом.

Значения t_1 и t_2 в выражении (5.44) принимают равными

$$t_1 = k \frac{\sigma_x^{*2}}{(\sigma_x^* + \gamma)^2}, \quad t_2 = k \frac{\sigma_x^{*2}}{(\sigma_x^* - \gamma)^2}. \quad (5.49)$$

В этом случае границы доверительного интервала определяются соотношениями

$$I_{\alpha,k}^{(л)} = \sigma_x^* - \gamma, \quad I_{\alpha,k}^{(п)} = \sigma_x^* + \gamma. \quad (5.50)$$

Значения γ определяют по табл. 12 приложения

$$\alpha = P(\sigma_x^* - \gamma < \sigma_x < \sigma_x^* + \gamma) = L(q, k), \quad (5.51)$$

составленной на основе χ^2 -распределения. Входом в таблицу является число степеней свободы k и величина q , определяемая по формуле

$$q = \gamma / \sigma_x^* \quad (5.52)$$

При определении доверительного интервала γ по заданным значениям α и k из таблицы $L(q, k)$ находят значение q . Границы доверительного интервала для σ_x определяют из равенств (5.50) при $\gamma = q\sigma_x^*$ или из равенств

$$I_{\alpha, k}^{(n)} = \sigma_x^* (1 - q), \quad I_{\alpha, k}^{(n)} = \sigma_x^* (1 + q). \quad (5.53)$$

Полученный доверительный интервал имеет случайный центр и случайную длину. Ошибка определения неизвестного значения стандартного отклонения σ_x на основе оценки σ_x^* с вероятностью α не превышает по абсолютной величине половины длины симметричного доверительного интервала, т. е. γ . Однако при таком построении доверительного интервала возможна казусная ситуация. Она возникает в том случае, если при небольшом числе измерений задают достаточно высокое значение доверительной вероятности α . Например, при шести измерениях и доверительной вероятности, равной 0,90, значение q равно 2,0. Это означает, что левая граница доверительного интервала оказывается в отрицательной области, хотя среднее квадратическое отклонение по своей сути отрицательные значения принимать не может. В связи с этим исследователь должен хорошо представлять себе плюсы и минусы того и другого варианта построения доверительного интервала. Отметим, что такая ситуация не возникает при построении доверительного интервала для математического ожидания в силу того, что используемые при этом распределения (нормальное или Стьюдента) являются симметричными.

Вопросы для самопроверки

1. Что является результатом точечного оценивания числовой характеристики случайной величины по результатам испытаний?

2. Что определяют при интервальном оценивании параметра?
3. Каково основное значение доверительных оценок?
4. Что подразумевает требование несмещенности оценки?
6. Как называется несмещенная оценка с минимальной дисперсией и почему?
7. Что означает требование состоятельности оценки?
8. В чем смысл прочной (робастной) оценки?
9. В чем заключается цель первого этапа обработки результатов испытаний?
10. Что называется вариационным рядом и рангом?
11. Поясните правила построения гистограммы и статистической функции распределения.
12. Какой переменной описывается результат каждого испытания?
13. Каким свойствам соответствует частота как оценка вероятности наступления случайного события?
14. Какие оценки математического ожидания случайной величины применяются при анализе результатов испытаний и в чем их отличие?
15. Какие статистики кроме выборочного среднего используются для оценивания математического ожидания?
16. В чем отличие оценивания характеристик рассеивания при известном и неизвестном математическом ожидании?
17. Как оцениваются числовые характеристики при большом числе испытаний?
18. Поясните сущность понятий доверительного интервала и доверительной вероятности.
19. Какие задачи решаются при интервальном оценивании?
20. Что должно быть известно для успешного решения этих задач?
21. Какому закону подчиняется частота наступления случайного события?
22. При каком значении вероятности наступления случайного события требуется наибольшее число испытаний для достижения требуемой точности и почему?

23. Какими таблицами необходимо пользоваться при интервальном оценивании математического ожидания и почему?

24. На основе какого распределения строится интервальное оценивание среднего квадратического отклонения?

25. В чем заключаются особенности центрального и симметричного доверительного интервала?

Задачи для самостоятельного решения

1. При измерении дальности до объекта получено два значения 3524 м и 3506 м. Определить приближенное значение расстояния до объекта и его среднее квадратическое отклонение, если точность измерения характеризуется средним квадратическим отклонением равным 10 м.

2. Точность определения дальности дальномером характеризуется средним квадратическим отклонением равным 10 м. Сколько нужно произвести измерений, чтобы среднее квадратическое отклонение в определении дальности не превосходило 2 м?

3. Расстояние до ориентира измерено тремя способами, которые характеризуются средними квадратическими отклонениями равными 75 м, 30 м и 15 м. Результаты измерений соответственно равны 3425 м, 3575 м и 3520 м. Найти:

а) приближенное значение расстояния;

б) вероятность того, что ошибка в определении расстояния не превысит 25 м.

4. В результате пяти равноточных измерений получены следующие значения измеряемой величины (м): 63, 57, 64, 66, 60. Найти:

а) приближенные значения расстояния и среднего квадратического отклонения, характеризующего способ измерения;

б) вероятности того, что ошибки определения расстояния среднего квадратического отклонения не превысят 5 м и 0,5 м.

5. Для оценки точности работы омметра произведено 5 измерений эталонного сопротивления, имеющего номинальное значение 1000 Ом. Результаты измерений оказались равными 1008, 1012, 986, 1018, 995 Ом. Систематической погрешности ом-

метр не имеет. Определить приближенное значение характеристики точности омметра.

6. При пяти испытаниях реактивного двигателя зафиксированы следующие значения секундного расхода топлива: 62,4; 60,9; 61,3; 62,1; 60,8 (кг/с). Найти:

а) приближенное значение и среднее квадратическое отклонение секундного расхода топлива;

б) границы доверительных интервалов для секундного расхода топлива и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности равной 0,95.

7. Деталь измерялась 16 раз. Величина среднего квадратического отклонения, полученная по результатам измерений, оказалась равной 1,4 мм. Найти границы доверительного интервала при доверительной вероятности равной 0,9.

8. Величина напряжения в сети определялась по результатам 40 измерений вольтметром, точность которого характеризуется средним квадратическим отклонением 0,4 В. Приближенное значение напряжения оказалось равным 221,4 В. Определить границы доверительного интервала для напряжения при доверительной вероятности 0,9.

9. Точность измерения напряжения характеризуется средним квадратическим отклонением равным 2 В. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что ошибка в определении напряжения не превышает по абсолютной величине 2 В?

10. При оценке начальной скорости пули получены ее следующие значения (м/с) 401,0; 402,7; 401,6; 400,5; 403,2; 400,6. Определить приближенное значение начальной скорости и ее среднего квадратического отклонения.

11. Сколько следует произвести независимых измерений неизвестного расстояния, чтобы ошибка определения его среднего квадратического отклонения не превышала $\pm 0,25\sigma_x^*$ при доверительной вероятности 0,9.

12. Точность измерения температуры в лаборатории характеризуется средним квадратическим отклонением 0,5°C. Сколько необходимо произвести независимых измерений, что-

бы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что ошибка в измерении температуры не превышает $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$?

13. По результатам 10 измерений определялось среднее квадратическое отклонение. Оно оказалось равным 15 м. Построить доверительный интервал при доверительной вероятности равной 0,95.

14. Произведено 5 равноточных измерений температуры горючего. Получены результаты: 21,6; 21,3; 21,5; 22,1; 21,8 $^{\circ}\text{C}$. Определить приближенное значение температуры горючего и среднее квадратическое отклонение, характеризующее точность прибора.

15. На контрольных испытаниях 16 приборов получены оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения времени безотказной работы, которые оказались равными 3000 часов и 20 часов, соответственно. Определить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения времени безотказной работы при доверительной вероятности 0,9.

16. Приближенное значение среднего квадратического отклонения получено по 10 измерениям эталона. Оно оказалось равным 15 м. Определить доверительную вероятность для доверительного интервала равного ± 3 м.

17. Приближенные значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения расхода топлива на 100 км пути автомобилем, полученные по 14 измерениям, составили 9,8 и 0,4 л, соответственно. Построить доверительные интервалы при доверительной вероятности равной 0,95.

6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

6.1. Сущность проверки статистических гипотез

Определение неизвестных значений параметров с помощью их оценок является начальным этапом статистического анализа результатов испытаний. Последующим его этапом может быть сравнение действительных значений параметров на основе полученных оценок этих параметров. Например, изготовлена пробная партия продукции. Десять образцов из этой партии прошли испытания на стенде. По результатам этих испытаний получена оценка математического ожидания среднего времени безотказной работы $m_{t_1}^*$. После проведения доработок десять образцов вновь подвергли испытаниям и также получили оценку математического ожидания среднего времени безотказной работы $m_{t_2}^*$. Требуется установить, изменилось ли действительное значение среднего времени безотказной работы. Решение данной задачи заключается в сравнении друг с другом истинных значений $m_{t_1}^*$ и $m_{t_2}^*$ среднего времени безотказной работы m_{t_1} и m_{t_2} по их оценкам $m_{t_1}^*$ и $m_{t_2}^*$.

Аналогичные задачи могут быть поставлены для сравнения истинных значений других числовых характеристик, истинного закона распределения случайного параметра с тем или иным теоретическим законом.

Во всех этих задачах суждения о соотношении истинных значений параметров вырабатывают на основе сравнения их оценок, которые, как известно, являются случайными величинами. Поэтому эти суждения носят вероятностный характер. Для решения таких задач разработан специальный метод, суть которого сводится к следующему. Отношения сравниваемых параметров выдвигается гипотеза. Затем проводятся испытания, по результатам которых проверяется справедливость выдвинутой гипотезы (гипотеза принимается либо отклоняется). Этот метод называют статистической проверкой гипотез. Он разработан в двух вариантах: *классический метод* и *метод последовательного анализа*.

Общий подход к решению задачи проверки гипотез включает в себя следующие этапы:

1. Выдвигается гипотеза о соотношении сравниваемых величин.

2. Выбирается показатель согласованности (ПС), который в дальнейшем будем обозначать буквой u .

3. Выбирается критерий проверки гипотезы (критерий согласия), т. е. правило, указывающее, при каких значениях ПС гипотеза принимается, а при каких — отклоняется.

4. В соответствии с принятым критерием все множество значений ПС разбивается на два подмножества таким образом, что при попадании возможного значения ПС в одно из этих подмножеств означает принятие гипотезы, а в другое — ее отклонение.

5. Проводятся испытания, по результатам которых вычисляется значение ПС. Определяется, к какому из подмножеств относится вычисленное значение ПС, на основании чего принимается решение о приеме или отклонении гипотезы.

Рассмотрим содержание каждого из указанных этапов.

В общем случае под гипотезой понимают любое предположение относительно какого-либо свойства изучаемого явления. При обработке результатов испытаний рассматривают гипотезы о виде закона распределения исследуемой переменной, о параметрах закона распределения и т. п. Поскольку такие гипотезы проверяют по результатам испытаний, то их называют статистическими.

Наряду с выдвинутой гипотезой, которую называют *нулевой* (основной) и обозначают H_0 , рассматривают несовместную с ней (одну или несколько) гипотезу, называемую *альтернативной* гипотезой. Альтернативную гипотезу обозначают H_1 . Например, проверяется предположение о том, что исследуемая переменная распределена по показательному закону. Это предположение выдвигается как нулевая гипотеза H_0 . Альтернативных к ней гипотез может быть выдвинуто несколько (переменная распределена не по показательному закону, переменная имеет какой-либо другой закон распределения).

Для записи нулевой и альтернативной гипотез используют специальное обозначение. Предположим, что нулевая гипотеза состоит в проверке предположения о равенстве математического ожидания случайной переменной X некоторому числу Θ , а альтернативная — математическое ожидание не равно Θ . Записывают гипотезы следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0 : m_x &= \Theta, \\ H_1 : m_x &\neq \Theta. \end{aligned}$$

Различают гипотезы простые и сложные. Гипотеза простая, если она содержит одно предположение. Например, $H_0 : m_x = 10$. Если гипотеза содержит конечное или бесконечное число предположений, то ее называют сложной. Например, гипотеза $m_x > 10$.

Эта гипотеза содержит бесконечное число гипотез вида

$$H_i : m_x = \Theta_i,$$

где Θ_i — любое число, превосходящее 10.

В качестве ПС выбирают случайную величину u , которая должна быть функцией гипотетических данных и данных результатов испытаний. Конкретный вид ПС может быть различным для различных гипотез.

Например, при проверке гипотезы о законе распределения случайной переменной X показатель согласованности задается в виде зависимости от гипотетической функции распределения $F(x)$ (функции распределения, выдвинутой в качестве нулевой гипотезы) и статистической функции распределения $F^*(x)$, полученной по результатам испытаний

$$u = \varphi [F(x), F^*(x)].$$

При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий двух случайных переменных X и Y показатель согласованности должен быть функцией оценок математических ожиданий и дисперсий, полученных по результатам испытаний

$$u = \psi(m_x^*, m_y^*, D_x^*, D_y^*)$$

Показатель согласованности должен удовлетворять следующим требованиям.

1. Закон распределения ПС должен зависеть от нулевой и альтернативной гипотезы.

2. Закон распределения должен быть известен полностью, включая и его параметры.

Наибольшее распространение получили ПС, распределенные по нормальному закону, законам хи-квадрат, Стьюдента, Фишера.

Следует отметить, что в литературе по математической статистике используют обозначение ПС различными буквами. Например, ПС, распределенный по нормальному закону, часто обозначают буквой Y или Z , по закону хи-квадрат — χ^2 , по закону Стьюдента — T , по закону Фишера — F .

3. Закон распределения ПС должен быть инвариантен к виду закона распределения исследуемой случайной переменной (не должен изменяться при смене закона распределения случайной переменной).

4. Закон распределения ПС должен быть критичен по отношению к проверяемой гипотезе. Это означает, что условные плотности распределения $f(u/H_0)$ и $f(u/H_1)$ должны существенно отличаться друг от друга.

Полученное по результатам испытаний значение ПС называют частным значением и обозначают u^* .

Для проверки гипотезы необходимо задать правило, на основе которого множество возможных значений ПС u^* разбивается на два подмножества: подмножество u_0 , при попадании значения ПС u^* в которое принимается гипотеза H_0 , подмножество u_1 , при попадании в которое значения u^* гипотеза H_0 отклоняется (принимается гипотеза H_1). Область, соответствующую подмножеству u_0 , называют *областью допустимых значений* (областью принятия гипотезы H_0), а область, соответствующую подмножеству u_1 — *критической областью ПС*.

Показатель согласованности представляет собой скалярную случайную величину. Поэтому допустимая и критическая области представляют интервалы возможных значений ПС и, следовательно, существует точка, которая их разделяет. Эту точку называют *критической точкой* (границей).

Кривые плотностей распределения ПС $f(u/H_0)$ и $f(u/H_1)$ могут располагаться друг относительно друга тремя различными способами (рис. 6.1):

- кривая плотности распределения $f(u/H_1)$ сдвинута относительно $f(u/H_0)$ только вправо (рис. 6.1 а);
- кривая плотности распределения $f(u/H_1)$ сдвинута относительно $f(u/H_0)$ только влево (рис. 6.1 б);
- сдвиг кривой плотности распределения $f(u/H_1)$ неизвестен, т. е. она может быть сдвинута относительно $f(u/H_0)$ как вправо, так и влево (рис. 6.1 в).

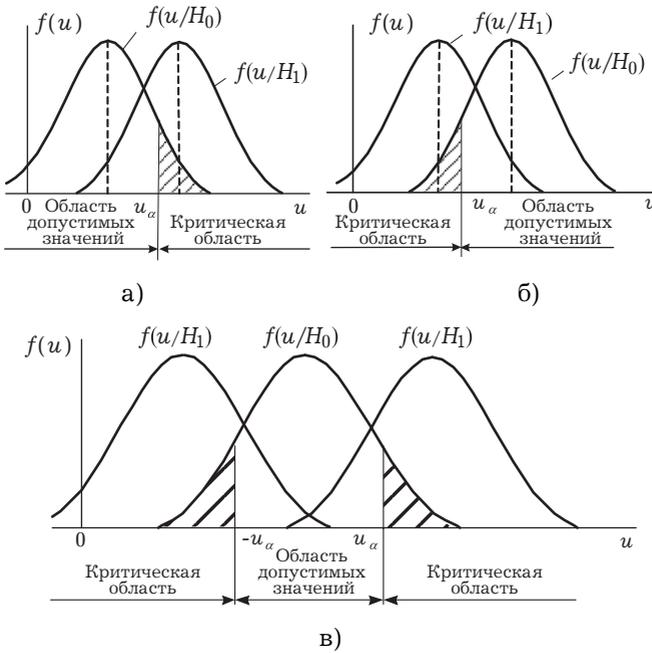


Рис. 6.1

Очевидно, что вид критической области для каждого способа должен быть различен. В первом случае выбирается *правосторонняя критическая область*, во втором — *левосторонняя* и в третьем — *двусторонняя*.

Правосторонняя критическая область определяется неравенством $u > u_\alpha$ левосторонняя — неравенством $u < -u_\alpha$ и двусторонняя — неравенствами $u > u_\alpha, u < -u_\alpha$, где $|u| > u_\alpha$.

Критические точки выбирают таким образом, чтобы при справедливой нулевой гипотезе H_0 вероятность попадания возможного значения ПС в критическую область была бы достаточно малой.

Следовательно, при справедливой H_0 попадание значения ПС в критическую область является весьма редким событием. Если теперь вычислить вероятность попадания значения ПС в критическую область в предположении, что справедлива H_1 , то она может оказаться больше аналогичной вероятности при условии справедливой H_0 . В этом случае при попадании значения ПС в критическую область следует отдать предпочтение альтернативной гипотезе H_1 .

Для определения границы, разделяющей область допустимых значений и критическую область, необходимо задать вероятность того, что значение ПС попадает в критическую область при справедливой H_0 , которую будем обозначать α . Вероятность α называют уровнем значимости критерия и принимают ее равной 0,01...0,05.

При известном законе распределения ПС можно найти его критические значения u_α из условия (см. рис. 6.1):

для правосторонней критической области

$$P(u \geq u_\alpha) = \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u / H_0) du = \alpha;$$

для левосторонней критической области

$$P(u < -u_\alpha) = \int_{-\infty}^{-u_\alpha} f(u / H_0) du = \alpha;$$

для двусторонней критической области

$$P(u < -u_\alpha) + P(u \geq u_\alpha) = \int_{-\infty}^{-u_\alpha} f(u / H_0) du + \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u / H_0) du = \alpha.$$

В последнем случае, как правило, выбирают симметрично расположенные критические точки, т. е.

$$P(u < -u_\alpha) = P(u \geq u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

В зависимости от вида закона распределения ПС критические точки находят по соответствующим таблицам.

При статистической проверке гипотез можно совершить два рода ошибок. *Под ошибкой первого рода понимают принятие решения об отклонении нулевой гипотезы в случае, когда в действительности она оказывается справедливой.* Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости критерия α . Действительно, при уровне значимости α вычисленное частное значение ПС u^* в среднем в $100 \cdot \alpha$ случаях из каждой сотни может оказаться в критической области при истинной H_0 .

Под ошибкой второго рода понимают принятие решения о справедливости нулевой гипотезы в случае, когда в действительности она оказывается неверной (справедлива в действительности H_1 , но она отклоняется). Вероятность ошибки второго рода обозначают β .

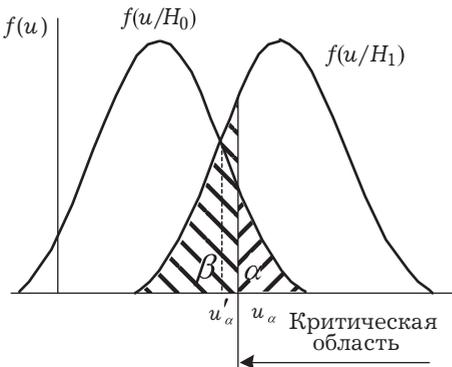


Рис. 6.2

Для уяснения сущности ошибок первого и второго рода на рис. 6.2 показаны условные плотности $f(u/H_0)$, $f(u/H_1)$ и правосторонняя критическая область с критической границей u_α .

Из определения ошибки первого рода следует, что ее вероятность численно равна вероятности попадания ПС u в критическую область при справедливой нулевой гипотезе

$$\alpha = \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u/H_0) du.$$

Чем меньше уровень значимости α , тем реже будет допускаться ошибка первого рода, т. е. отвергаться правильная гипотеза H_0 .

По смыслу вероятность ошибки второго рода численно равна вероятности попадания ПС в область допустимых значений при условии справедливой альтернативной гипотезы H_1 , т. е.:

$$\beta = \int_{-\infty}^{u_\alpha} f(u / H_1) du.$$

Как видно из рис. 6.2 уменьшение вероятности ошибки первого рода приводит к возрастанию ошибки второго рода, и наоборот.

Для уменьшения вероятности ошибки при принятии гипотезы критическую границу необходимо выбирать таким образом, чтобы сумма вероятностей ошибок первого и второго рода была минимальной. В случае, если показатель согласованности распределен по нормальному закону, то минимум суммы вероятностей ошибок α и β достигается при выборе критической границы в абсциссе точки пересечения кривых плотностей распределения $f(u/H_0)$ и $f(u/H_1)$ (на рис. 6.2 точка u'_ω). Однако не всегда такой подход к выбору критической границы u_α является целесообразным.

Часто при решении практических задач при выборе u_α исходят из анализа последствий от неверно принятого решения (“тяжести” последствий ошибок первого и второго рода для конкретной задачи). Например, если ошибка первого рода повлечет большие потери, а второго рода — малые, то целесообразно принять возможно меньшее значение α .

Критерий проверки гипотезы принято характеризовать мощностью показателя согласованности. *Под мощностью показателя согласованности понимают вероятность попадания ПС в критическую область при условии, если справедлива альтернативная гипотеза H_1 .* В соответствии с этим определением можно записать

$$1 - \beta = \int_{u_\alpha}^{\infty} f(u / H_1) du.$$

Из данного выражения видно, что мощность ПС — это есть вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Таким образом, для уменьшения ошибки второго рода критическую область надо выбирать так, чтобы мощность ПС при заданном уровне значимости была максимальной.

Следует отметить, что мощность ПС позволяет обоснованно подойти к выбору односторонних критических областей. Если характер альтернативной гипотезы неясен, то целесообразно в качестве критической выбирать двустороннюю симметричную область.

Для того чтобы одновременно уменьшить ошибки первого и второго рода, необходимо увеличивать объем выборки, по результатам которой проверяют гипотезу.

6.2. Методы проверки гипотез о законах распределения

6.2.1. Постановка задачи

При обосновании закона распределения случайной переменной по результатам испытаний обычно решают две задачи:

1. Выравнивание (сглаживание) полученного при испытании статистического ряда. При решении данной задачи подбирают теоретическую кривую распределения, которая выражает лишь существенные черты статистического распределения.

2. Проверка гипотезы о законе распределения. В результате решения устанавливают причины расхождения между подобранной теоретической кривой распределения и статистическим распределением. Расхождение может быть обусловлено либо случайными отклонениями, либо тем, что подобранная кривая плохо описывает статистическое распределение.

Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения, которая с той или иной точки зрения наилучшим образом описывает данное статистическое распределение. Выбранный в результате решения данной задачи теоретический закон распределения принимается в качестве нулевой гипотезы. Для ее решения используют

метод моментов, систему кривых К. Пирсона, систему кривых Н. А. Бородачева и ряд других методов.

Для выбора нулевой гипотезы может быть использована следующая методика. По результатам испытаний находят оценки коэффициентов асимметрии a_x^* и эксцесса e_x^*

$$a_x^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_x^*}; \quad e_x^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_x^*} - 3; \quad (6.1)$$

где σ_x^* — оценка стандартного отклонения исследуемой случайной переменной X ,

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n-1}};$$

μ_3^* (μ_4^*) — оценка центрального момента третьего (четвертого) порядка случайной переменной X

$$\mu_3^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^3; \quad \mu_4^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^4.$$

Доказано, что каждому закону распределения соответствует вполне определенное соотношение между коэффициентами асимметрии и эксцесса. На основе данного свойства строят диаграмму, на которой могут быть выделены точки, прямые и области, отвечающие соответствующему распределению. Такая диаграмма показана на рис. 6.3.

С помощью этой диаграммы можно приближенно определить гипотетический закон распределения, который следует выдвигать в качестве нулевой гипотезы. Для этого на диаграмму наносится точка с координатами (a_x^{*2}, e_x^*) , которые получены по формулам (6.1). Если она окажется вблизи от точки, прямой или области, соответствующей одному из распределений, то его и следует выдвигать в качестве нулевой гипотезы.

На диаграмме (рис. 6.3) выделены характерные точки, прямые и области, которые соответствуют следующим распределениям:

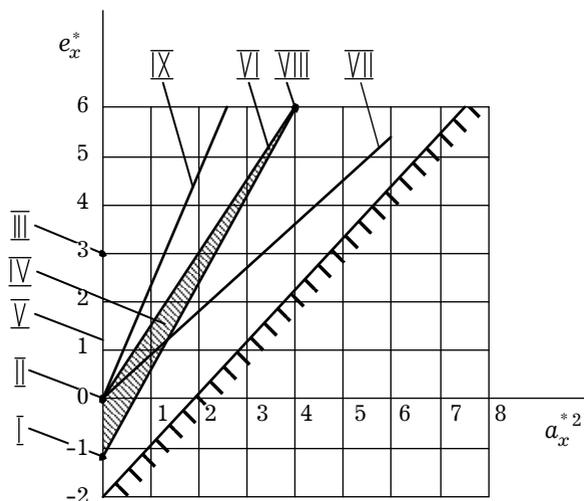


Рис. 6.3

точки с координатами:

(0; -1,2), (точка I) — равномерному;

(0, 0), (точка II) — нормальному;

(0, 3), (точка III) — распределению Лапласа;

(4, 6), (точка VIII) — показательному;

прямые:

V — Стьюдента;

VI — гамма-распределению;

VII — Пуассона;

IX — логарифмически-нормальному;

область IV — бета-распределению.

После выдвижения нулевой гипотезы приступают к решению второй задачи, т. е. к проверке справедливости выдвинутой гипотезы.

6.2.2. Проверка гипотез о законе распределения

Задача проверки гипотезы о законе распределения формулируется следующим образом.

Предположим, в результате испытания получена случайная выборка X_1, X_2, \dots, X_n . Для этой выборки подобран теоретический закон распределения, который представлен функцией распределения $F(x)$ либо плотностью распределения $f(x)$.

Требуется на основании анализа полученной выборки проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что исследуемая случайная переменная X подчинена выбранному закону распределения.

На практике наиболее часто для проверки нулевой гипотезы применяют методы А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова и К. Пирсона.

Эти методы отличаются друг от друга видом меры рассогласования между статистическим и теоретическим (выбранным в качестве нулевой гипотезы) законом распределения. В методах Колмогорова и Смирнова в качестве меры рассогласования используется функция разности между статистической функцией распределения $F^*(x)$ и функцией распределения $F(x)$ теоретического закона, т. е.:

$$d = \varphi_1[F^*(x) - F(x)], \quad (6.2)$$

а в методе Пирсона — функция разности между частотой P^* и вероятностью попадания P случайной переменной X в заданные интервалы, т. е.:

$$d = \varphi_2[P_j^* - P_j], \quad (6.3)$$

где j — номер интервала.

Рассмотрим содержание указанных методов проверки нулевой гипотезы.

Проверка гипотез методом А. Н. Колмогорова

При проверке гипотез данным методом в качестве показателя согласованности принимают случайную величину

$$u = \sqrt{n} \max |F^*(x) - F(x)|, \quad (6.4)$$

где n — объем выборки;

$F^*(x)$, $F(x)$ — статистическая и теоретическая функции распределения исследуемой случайной переменной X .

Независимо от вида закона распределения случайной переменной X функция распределения ПС при $n \rightarrow \infty$ имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 u^2). \quad (6.5)$$

В качестве критической области используется правосторонняя область, границу u_α которой определяют из условия

$$\alpha = P(u \geq u_\alpha) = 1 - P(u < u_\alpha) = 1 - F(u = u_\alpha),$$

т. е. она равна квантилю случайной величины u при аргументе

$$u_\alpha = F^{-1}(1 - \alpha), \quad (6.6)$$

где $F^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная функции распределения показателя согласованности.

Для определения u_α в соответствии с формулой (6.6) составлена специальная табл. 6.1.

Таблица 6.1

α	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
u_α	0,828	1,224	1,258	1,627	1,950

Проверка нулевой гипотезы методом А. Н. Колмогорова производится следующим образом.

1. По результатам испытаний строят статистическую функцию распределения $F^*(x)$ (рис. 6.4).

2. На том же графике строят функцию $F(x)$ теоретического закона распределения, принятого в качестве нулевой гипотезы.

3. По графику определяют максимальную величину модуля разности ординат статистической и теоретической функций распределения и вычисляют значение показателя согласованности u по формуле (6.4).

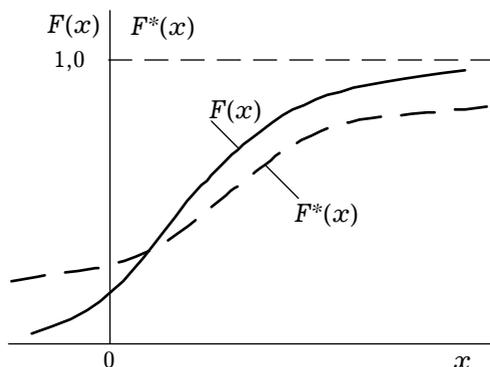


Рис. 6.4

4. Назначают уровень значимости критерия α и по табл. 15 приложения определяют критическое значение показателя согласованности u_α .

5. Проверяют справедливость выдвинутой гипотезы H_0 . Если выполняется неравенство $u \geq u_\alpha$, то гипотезу H_0 бракуют, в противном случае делают вывод, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о том, что исследуемая случайная переменная X подчинена закону распределения с функцией $F(x)$.

Достоинством метода А. Н. Колмогорова является его простота и отсутствие сложных расчетов. Однако для его применения необходимо знать не только вид теоретического закона распределения, но и его параметры. Кроме того, метод учитывает только максимальное отклонение статистической функции распределения от теоретической функции, а не закон изменения отклонения по всему размаху выборки.

Проверка гипотез методом Н. В. Смирнова

При проверке гипотезы данным методом в качестве меры рассогласования теоретического и статистического законов распределения принимается функция разности статистической и теоретической функции распределения. В качестве показателя согласованности используется среднее значение разности по всей области определения функции распределения.

Если исследуемая случайная переменная X непрерывного типа, то ПС определяется выражением

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} [F^*(x) - F(x)]^2 f(x) dx. \quad (6.7)$$

Для дискретной случайной величины выражение (6.7) запишется в виде:

$$u = \sum_{i=1}^n [F^*(x) - F(x)]^2 P_i, \quad (6.8)$$

где P_i — вероятность появления в выборке значения x_i .

На практике для удобства вычислений выражение (6.8) преобразуют к виду:

$$u = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F^*(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2. \quad (6.9)$$

Значения критической границы u_α в зависимости от уровня значимости критерия α приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

α	0,5	0,1	0,05	0,02	0,001
u_α	0,118	0,347	0,461	0,620	0,744

Они рассчитываются в соответствии с законом распределения ПС по формуле

$$u_\alpha = F^{-1}(1 - \alpha),$$

где $F^{-1}(*)$ — функция, обратная функции распределения показателя согласованности.

Проверка нулевой гипотезы методом Н. В. Смирнова производится в следующем порядке:

1. Вычисляют по результатам испытаний значение показателя согласованности u в соответствии с (6.9).

2. Назначают уровень значимости α и по табл. 6.2 определяют значение границы критической области u_α .

3. Проверяют справедливость нулевой гипотезы H_0 . Если выполняется неравенство $u > u_\alpha$, то гипотеза H_0 отклоняется. Если же $u \leq u_\alpha$, то делается вывод о том, что результаты испытания не противоречат гипотезе о распределении переменной X по предполагаемому закону с функцией $F(x)$.

Проверка гипотез методом К. Пирсона

В качестве меры расхождения теоретического и статистического законов распределения принята сумма квадратов разностей между частотой и вероятностью попадания исследуемой случайной переменной X в интервалы, на которые разбивается множество возможных значений этой переменной

$$u = \sum_{j=1}^m C_j (P_j^* - P_j)^2, \quad (6.10)$$

где m — число интервалов, на которые разбивается множество возможных значений при построении статистической функции распределения.

Коэффициенты C_j вводятся для того, чтобы учесть неравнозначность абсолютных значений разностей $(P_j^* - P_j)$ при различных значениях вероятности P_j . Поскольку одно и то же значение разности $(P_j^* - P_j)$ является малозначимым при большой вероятности P_j и представляет собой заметную величину, когда P_j мала.

К. Пирсон показал, что если коэффициенты C_j определять в соответствии с выражением

$$C_j = \frac{n}{P_j},$$

то при большом объеме выборки закон распределения случайной величины u , определяемой формулой (6.10), практически не зависит от вида закона распределения случайной переменной X и объема выборки n , а зависит только от числа интервалов m . При этом при увеличении n закон распределения случайной величины u приближается к χ^2 (хи-квадрат)-распределению с числом степеней свободы $k = m - 1$.

На практике в качестве ПС используют и случайную величину

$$u = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - nP_j)^2}{nP_j}, \quad (6.11)$$

где n_j — число результатов испытаний, попавших в j -й интервал;

P_j — вероятность попадания результата испытания в j -й интервал при теоретическом законе распределения исследуемой переменной X .

В зависимости от формы представления результатов испытаний (исходными данными для проверки гипотезы являются P_j^* или n_j) в качестве ПС принимают выражение (6.10) либо (6.11).

В дальнейшем будем рассматривать ПС вида (6.11).

Если параметры теоретического закона, который принят в качестве нулевой гипотезы, неизвестны, то вычисление вероятностей P_j не представляется возможным. Оказывается, что если при определении этих вероятностей вместо неизвестных значений параметров теоретического распределения $\Theta_{x_1}, \Theta_{x_2}, \dots, \Theta_{x_s}$ подставить соответствующие их оценки $\Theta_{x_1}^*, \Theta_{x_2}^*, \dots, \Theta_{x_s}^*$, полученные по результатам испытаний, то случайная величина

$$u = \sum_{j=1}^m \frac{[n_j - nP_j(\Theta_{x_1}^*, \Theta_{x_2}^*, \dots, \Theta_{x_s}^*)]^2}{nP_j(\Theta_{x_1}^*, \Theta_{x_2}^*, \dots, \Theta_{x_s}^*)} \quad (6.12)$$

при $n \rightarrow \infty$ также будет иметь χ^2 -распределение, но с числом степеней свободы

$$k = m - 1 - s, \quad (6.13)$$

где s — число неизвестных параметров теоретического закона распределения.

Так, например, для нормального закона распределения $s = 2$ (параметры — математическое ожидание и дисперсия), для показательного — $s = 1$ (параметр — коэффициент λ) и т. д.

Таким образом, для проверки нулевой гипотезы в качестве показателя согласованности принимают случайную величину (6.12). При этом неизвестные значения параметров теоретического распределения определяют с помощью статистических оценок.

При группировании результатов испытаний по интервалам для нахождения оценок математического ожидания и дисперсии обычно используют формулы

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m x_{\text{cpj}} n_j, \quad (6.14)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (x_{\text{cpj}}^2 n_j - m_x^{*2}), \quad (6.15)$$

где x_{cpj} — абсцисса середины j -го интервала.

В работе [5] показано, что в качестве критической целесообразно выбирать правостороннюю критическую область. Для выделения значений критической границы u_α можно использовать табл. 13 χ_α^2 (хи-квадрат)-распределения в приложении 1, входами в которую являются уровень значимости α и число степеней свободы k .

Проверка гипотезы методом К. Пирсона производится в следующей последовательности.

1. Результаты испытаний представляют в виде табл. 6.3.

Таблица 6.3

$I = [x_j, x_{j+1}]$	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_j, x_{j+1}	x_{m-1}, x_m
n_j	n_1	n_2	...	n_j	n_m

2. Находят оценки параметров теоретического закона распределения по результатам испытаний (формулы (6.14), (6.15)).

3. Определяют вероятности P_j попадания случайной величины X в соответствии с теоретическим законом распределения в j -й интервал.

$$P_j = P(x_j \leq x < x_{j+1}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx.$$

4. Рассчитывают значение показателя согласованности u по формуле (6.12).

5. По формуле (6.13) определяют число степеней свободы k для входа в таблицу χ^2 -распределения.

6. Назначают уровень значимости α и по таблицам χ^2 -распределения находят значение критической границы u_α . Входящими в таблицу служат уровень значимости α и число степеней свободы k .

7. Проверяется условие $u < u_\alpha$. Если оно выполняется, то расхождение между экспериментальным (статистическим) и теоретическим законами распределения несущественно (гипотеза H_0 принимается). В противном случае гипотеза H_0 бракуется.

Достоинством метода К. Пирсона является то, что его можно применять и в том случае, когда известен только вид теоретического распределения, но не известны параметры распределения.

В этом случае параметры распределения заменяются их оценками, полученными по результатам испытаний, а число степеней свободы χ^2 -распределения ПС уменьшается на число заменяемых параметров.

К недостаткам метода К. Пирсона относят следующее:

- метод применим при большом объеме выборки ($n \geq 100$), так как распределение ПС описывается χ^2 -распределением только при достаточно большом n ;
- достоверность выводов существенно зависит от способа разбиения выборки на интервалы. Число интервалов должно быть не менее 10, а количество попаданий исследуемой переменной X в любой из интервалов — не менее 5. Если это условие не выполняется, то интервалы объединяют.

Пример 6.1. Радиоактивное вещество наблюдалось в 1300 испытаниях, при каждом из которых регистрировалось число частиц, попавших в счетчик за один и тот же промежуток времени.

Результаты испытаний представлены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_j	31	102	191	258	266	205	136	68	22	13	8

Установить закон распределения числа частиц, выделяющихся при радиоактивном распаде за данный промежуток времени.

Решение.

Исходя из сущности рассматриваемого явления, предполагаем, что распределение числа частиц подчиняется закону Пуассона, и проверяем выдвинутую гипотезу с помощью соответствующего ПС.

1. По формуле (6.14) при $x_{срj} = j$ находим значение параметра a распределения Пуассона, соответствующее полученным результатам:

$$a^* = 3,855.$$

2. По формуле (6.13) определяем число степеней свободы ПС u , приняв $m = 11$ и $s = 1$,

$$k = 11 - 1 - 1 = 9.$$

3. Принимаем уровень значимости ПС $\alpha = 0,10$ и по табл. 13 приложения находим соответствующее критическое значение $u_\alpha = 14,067$.

4. Рассчитываем по формуле (6.12) значение ПС u^* , соответствующее результатам испытаний. При этом случайные величины N_j заменяем числами n_j , а вероятности $P_j(a^*)$ определяем с помощью таблицы (табл. 6 приложения) вероятностей распределения Пуассона при $m = a^*$ и $k = j = 0, 1, 2, \dots, 10$ (табл. 6.5).

Таблица 6.5

j	n_j	$P_j(a^*)$	$nP_j(a^*)$	$n_j - nP_j(a^*)$	$[n_j - nP_j(a^*)]^2$	$\frac{[n_j - nP_j(a^*)]^2}{nP_j(a^*)}$
0	31	0,023	29,9	1,1	1,2	0,0
1	102	0,084	109,2	-7,2	51,8	0,5
2	191	0,158	205,4	-14,4	207,4	1,0
3	258	0,200	260,0	-2,0	4,0	0,0
4	266	0,193	250,9	15,1	228,0	0,9
5	205	0,148	192,4	12,6	158,8	0,8
6	136	0,096	124,8	11,2	125,4	1,0
7	68	0,054	70,2	-2,2	4,8	0,1
8	22	0,027	35,1	-13,1	171,6	4,9

j	n_j	$P_j(a^*)$	$nP_j(a^*)$	$n_j - nP_j(a^*)$	$[n_j - nP_j(a^*)]^2$	$\frac{[n_j - nP_j(a^*)]^2}{nP_j(a^*)}$
9	13	0,012	15,6	-2,6	6,8	0,4
10	8	0,005	6,5	1,5	2,2	0,3
Σ	1300	1,0	—	—	—	$u = 9,9$

5. Сопоставляя значения $u = 9,9$ и $u_\alpha = 14,067$, приходим к выводу о том, что результаты испытаний не противоречат выдвинутой нами гипотезе о виде закона распределения.

6.3. Методы проверки гипотез о параметрах законов распределения

6.3.1. Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий

Предположим, что имеются две нормально распределенные случайные переменные X и Y , математические ожидания которых неизвестны. Над этими переменными производят соответственно n_1 и n_2 наблюдений, т. е. получают случайные выборки $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$. По этим выборкам находят оценки математических ожиданий

$$m_x^* = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad m_y^* = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i. \quad (6.16)$$

Требуется по полученным оценкам проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий m_x и m_y .

Такая задача ставится потому, что, как правило, оценки математических ожиданий оказываются различными. Это обусловлено тем, что отличны и оценки, и математические ожидания. Если математические ожидания одинаковы, то различие оценок вызвано случайными причинами.

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. m_x и m_y одинаковы, то различие в оценках m_x^* и m_y^* будет за счет

действия случайных причин. В противном случае это различие обусловлено отличием математических ожиданий.

При проверке гипотез о равенстве математических ожиданий следует различать два случая: в первом — точность результатов измерений известна (известны стандартные отклонения σ_x и σ_y), во втором — точность неизвестна.

Точность результатов измерений известна

При проверке нулевой гипотезы в этом случае в качестве показателя согласованности принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}. \quad (6.17)$$

Показатель согласованности (6.17) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, при условии, что справедлива нулевая гипотеза, и дисперсией, равной единице, т. е. $u \in N(0,1)$.

Критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы, которая может быть сформулирована тремя способами:

$$H_1 : m_x \neq m_y; \quad H_1 : m_x > m_y; \quad H_1 : m_x < m_y.$$

Рассмотрим методику проверки гипотезы H_0 для первого способа как наиболее часто встречающегося при решении практических задач

$$H_0 : m_x = m_y; \quad H_1 : m_x \neq m_y.$$

В этом случае строят двустороннюю критическую область так, чтобы вероятность попадания в нее значений ПС при предположении о справедливости H_0 была равна принятому уровню значимости $\alpha/2$ (рис. 6.5).

Наибольшая мощность критерия обеспечивается в том случае, когда левая и правая границы критической области выбраны так, что вероятность попадания ПС в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$, т. е.:

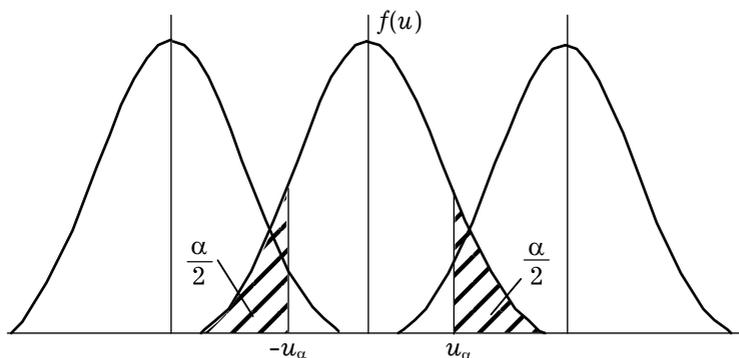


Рис. 6.5

$$P(u < u_\alpha) = P(u > u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

Вероятность попадания ПС в критическую область можно определить с использованием табличной функции Лапласа

$$P(|u| < u_\alpha) = 1 - F_T(u_\alpha) = \alpha \quad (6.18)$$

или табличной функции нормального закона распределения

$$P(|u| < u_\alpha) = 1 - F_T(u_\alpha) = 1 - \alpha/2.$$

Откуда находим

$$u_\alpha = \Phi_T^{-1}(1 - \alpha) \quad (6.19)$$

или

$$u_\alpha = F_T^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Из таблицы функции Лапласа или функции нормального закона распределения по аргументу $(1 - \alpha)$ или $(1 - \alpha/2)$ выбираем значение u_α .

Таким образом, проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий для рассматриваемого случая производится в следующей последовательности.

1. В соответствии с формулами (6.16) по результатам испытаний находят оценки математических ожиданий m_x^* , m_y^* .

2. По формуле (6.17) вычисляют значение показателя согласованности u .

3. Назначают уровень значимости α и по таблицам функции Лапласа или нормального закона распределения в соответствии с формулой (6.19) находят границы критической области u_α .

4. Проверяют условие $|u| < u_\alpha$. Если оно выполняется, то гипотезу H_0 принимают как справедливую, т. е. считают, что математические ожидания m_x и m_y равны. В противном случае гипотезу H_0 отклоняют.

Пример 6.2. Производится контрольный отстрел двух партий снарядов, причем из первой партии проверяется 10 снарядов, а из второй — 15. После обработки результатов отстрела получены оценки математических ожиданий отклонения точек падения снарядов от точки прицеливания по дальности: для первой партии $m_x^* = -0,8$ м, для второй — $m_y^* = -0,4$ м. Стандартные отклонения по дальности для снарядов первой и второй партий известны и соответственно равны 2 и 1,5 м. Необходимо проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий отклонения точек падения снарядов m_x и m_y .

Решение.

1. Выдвигаем нулевую и альтернативную гипотезы:

$$H_0 : m_x = m_y; H_1 : m_x \neq m_y.$$

2. Вычисляем значение показателя согласованности

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} = \frac{-0,8 - 0,4}{\sqrt{\frac{4}{10} + \frac{2,25}{12}}} = -1,62.$$

3. Задаемся уровнем значимости $\alpha = 0,05$ и по таблице функции Лапласа находим границу критической области $u_\alpha = 1,96$.

Так как $|u| < u_\alpha$, то нулевая гипотеза $m_x = m_y$ не противоречит данным контрольного отстрела.

Для задания альтернативной гипотезы по второму ($H_1 : m_x > m_y$) и третьему ($H_1 : m_x < m_y$) способу необходима

априорная информация о том, что математическое ожидание случайной переменной X больше или меньше математического ожидания случайной переменной Y . Сущность проверки нулевой гипотезы аналогична вышеописанной, но в этих случаях строят правостороннюю и левостороннюю критические области соответственно.

Определение границы u_α покажем на примере определения границы правосторонней критической области

$$P(u \geq u_\alpha) = \alpha. \quad (6.20)$$

Перепишем выражение (6.20) в виде

$$P(u_\alpha \leq u < \infty) = \frac{1}{2} \left[\Phi_T \left(\frac{\infty - m_u}{\sigma_u} \right) - \Phi_T \left(\frac{u_\alpha - m_u}{\sigma_u} \right) \right].$$

Поскольку $\Phi_T(\infty) = 1$ и $m_y = 0$, $\sigma_u = 1$, то

$$P(u \geq u_\alpha) = \frac{1}{2} (1 - \Phi_T(u_\alpha)) = \alpha.$$

Следовательно, $\Phi_T(u_\alpha) = 1 - 2\alpha$

и

$$u_\alpha = \Phi_T^{-1}(1 - 2\alpha).$$

Граница критической области u_α определяется по таблице функции Лапласа, входом в которую является величина $(1 - 2\alpha)$.

Аналогично определяется граница левосторонней критической области.

Описанный метод проверки гипотез можно применять, если случайные переменные X и Y распределены по нормальному закону и характеристики точности результатов измерений известны. При нарушении одного из этих предположений метод не применим.

Однако если объем выборок большой ($n \geq 30$), то распределение оценок математических ожиданий m_x^* и m_y^* приближенно можно считать нормальным. Следовательно, и показатель согласованности, в качестве которого принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}}{n_1} + \frac{\sigma_y^{*2}}{n_2}}}$$

будет иметь нормальное распределение. Проверку гипотезы можно проводить по описанной выше методике, но к полученным выводам следует относиться с осторожностью.

Точность результатов измерений неизвестна

Решать задачу проверки гипотезы в случае, если число измерений будет менее 30 ($n < 30$), то описанным выше методом нельзя, так как распределение ПС

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}}{n_1} + \frac{\sigma_y^{*2}}{n_2}}}$$

будет отлично от нормального.

Задачу проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий можно решить лишь при наличии дополнительной информации о соотношении дисперсий

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = a$$

В частном случае дисперсии случайных величин X и Y , σ_x^2 и σ_y^2 могут быть равны ($a = 1$).

Если соотношение дисперсий известно, то в качестве ПС принимают случайную величину

$$u = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{a(n_1 - 1)\sigma_x^{*2} + (n_2 - 1)\sigma_y^{*2}}} \sqrt{\frac{an_1n_2(n_1 + n_2 - 2)}{an_1 + n_2}}. \quad (6.21)$$

Данный показатель согласованности имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы

$$k = n_1 + n_2 - 2. \quad (6.22)$$

Аналогично, как и при проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий при известной точности результатов измерений, критическая область строится в зависимости от вида альтернативной гипотезы. Например, при

$$H_0 : m_x = m_y, H_1 : m_x \neq m_y$$

строят двустороннюю критическую область. Поскольку кривая плотности распределения Стьюдента симметрична относительно нуля, то критическая область является симметричной. Границы критической области $\pm u_\alpha$ могут быть определены либо с помощью таблицы распределения Стьюдента, в которой представлены значения вероятности

$$\alpha = 2 \int_0^{u_\alpha} f(u) du,$$

где $f(u)$ — плотность распределения Стьюдента, либо с помощью таблицы функции распределения Стьюдента (табл. 8 приложения).

Порядок проверки гипотезы такой же, как и при проверке гипотезы в случае, если точность результатов измерений известна.

6.3.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий

Задачи проверки гипотез о равенстве дисперсий приходится решать при сравнении точности приборов, методов измерений, погрешности показаний измерительных устройств и т. д.

Подобные задачи формулируются следующим образом. Предположим, имеются две нормально распределенные случайные величины X и Y , математические ожидания и дисперсии которых неизвестны.

При наблюдении за этими переменными получены случайные выборки (X_1, X_2, \dots, X_n) и (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , соответственно.

При обработке результатов наблюдений найдены оценки дисперсий

$$D_x^* = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_x^*)^2;$$

$$D_y^* = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - m_y^*)^2,$$

где m_x^* , m_y^* — оценки математических ожиданий случайных переменных X и Y .

По полученным оценкам D_x^* и D_y^* необходимо вынести суждение о равенстве истинных значений дисперсий D_x и D_y , т. е. проверить нулевую гипотезу $H_0 : D_x = D_y$.

Если нулевая гипотеза будет справедлива, то это означает, что выборочные оценки D_x^* и D_y^* представляют собой оценки одной и той же дисперсии, а их различие обусловлено случайными причинами. В противном случае различие дисперсий существенно.

В качестве показателя согласованности проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий принимают случайную величину

$$u = \frac{D_x^*}{D_y^*}. \quad (6.23)$$

Показатель согласованности (6.23) имеет распределение Фишера (F -распределение) с числами степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$. Известно, что распределение Фишера зависит только от значений чисел степеней свободы и не зависит от других параметров. Плотность распределения Фишера показана на рис. 6.6.

Для распределения Фишера составлена таблица (см. табл. 14 приложения) значений u_p (рис. 6.6), удовлетворяющих равенству

$$P = \int_{u_p}^{\infty} f(u) du \quad (6.24)$$

при различных комбинациях k_1 , k_2 и значениях вероятности P равных: 0,05 и 0,01.

Альтернативная гипотеза H_1 может быть задана тремя способами:

$$H_1 : D_x \neq D_y;$$

$$H_1 : D_x > D_y;$$

$$H_1 : D_x < D_y.$$

В зависимости от способа задания гипотезы H_1 имеют место особенности в определении границ критической области. Определение границы критической области рассмотрим в наиболее общем случае, когда альтернативная гипотеза задается в виде $H_1 : D_x \neq D_y$, т. е. необходимо построить двустороннюю критическую область. В этом случае при заданном уровне значимости необходимо определить два значения u_α : левое u_{α_1} и правое u_{α_2} (рис. 6.7).

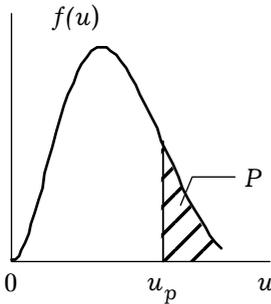


Рис. 6.6

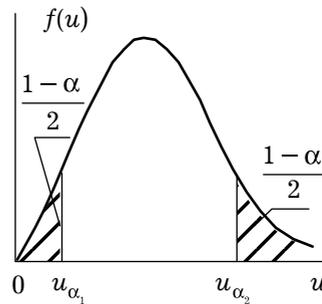


Рис. 6.7

Наибольшая мощность критерия проверки гипотезы обеспечивается тогда, когда вероятности попадания ПС в каждый из двух интервалов критической области будут одинаковы и равны $\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, при построении критической области должны выполняться следующие условия

$$P(u < u_{\alpha_1}) = P(u > u_{\alpha_2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Правая критическая точка u_{α_2} может быть найдена непосредственно из таблицы распределения Фишера, при этом входом в таблицу будут

$$P = \frac{\alpha}{2}, \quad k_1 = n_1 - 1, \quad k_2 = n_2 - 1.$$

Однако левых критических точек эта таблица не содержит и поэтому непосредственно по ним найти u_{α_1} невозможно, поскольку таблицы Фишера составлены лишь для малых значений вероятностей. Поэтому для проверки нулевой гипотезы с использованием ПС (6.23) используют следующий искусственный прием.

Если окажется, что $D_x^* > D_y^*$, то из таблицы вероятностей распределения Фишера находят значение u_p при числах степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ и $P = \frac{\alpha}{2}$. При этом значение ПС рассчитывают по формуле

$$u = \frac{D_x^*}{D_y^*}. \quad (6.25)$$

Если же $D_x^* < D_y^*$, то для вычисления ПС используют формулу

$$u = \frac{D_y^*}{D_x^*}, \quad (6.26)$$

а из таблицы вероятностей находят значение u_p при числах степеней свободы $k_1 = n_2 - 1$, $k_2 = n_1 - 1$ и $P = \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, значение ПС, отвечающее результатам наблюдений, получают, подставляя в числитель выражения (6.23) большее из значений оценок D_x^* и D_y^* .

Нулевую гипотезу отклоняют, если вычисленное значение ПС превзойдет выбранное таким образом значение u_p , т. е. если $u > u_p$. В противном случае гипотезу H_0 считают справедливой.

Описанный прием проверки нулевой гипотезы $H_0 : D_x = D_y$ позволяет отклонить или принять ее как в случае, когда $D_x^* < D_y^*$, так и в случае, когда $D_x^* > D_y^*$.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий проводится в следующей последовательности.

1. По результатам наблюдений находят оценки дисперсий D_x^* , D_y^* .

2. Вычисляют значение показателя согласованности по формуле (6.25) или (6.26) в зависимости от соотношения оценок дисперсий.

3. Задают уровень значимости α и находят по таблице вероятностей Фишера критическое значение показателя согласованности u_p . Входами в таблицу являются числа степеней свободы k_1, k_2 и $\frac{\alpha}{2}$.

4. Проверяют справедливость нулевой гипотезы. Если выполняется неравенство $u < u_p$, то нулевую гипотезу принимают. В противном случае ее отклоняют как несправедливую.

Показатель согласованности (6.23) можно использовать при сравнении дисперсий и в том случае, когда одна из них известна, т. е. для нее найдена не оценка, а точное значение.

При этом число степеней свободы закона распределения Фишера в числителе или знаменателе ПС следует устремить к бесконечности. В остальном методика проверки гипотезы остается прежней.

Пример 6.3. По результатам измерений при стендовых испытаниях десяти ЖРД определены числовые характеристики секундного расхода топлива, значения которых оказались равными:

$$m_x^* = 150,5 \text{ кг/с} \text{ и } \sigma_x^* = 2,1 \text{ кг/с}.$$

При летных испытаниях десяти ракет с двигателями той же партии получены значения числовых характеристик:

$$m_y^* = 149,6 \text{ кг/с} \text{ и } \sigma_y^* = 1,9 \text{ кг/с}.$$

Требуется установить, изменяются ли действительные значения числовых характеристик в зависимости от того, в каких условиях работают двигатели (на стенде или в полете), если для измерения секундного расхода при стендовых и летных испытаниях использовались однотипные датчики.

Решение.

1. Проверяем гипотезу о равенстве средних квадратических отклонений (дисперсий) секундного расхода топлива, для чего:

а) принимаем уровень значимости ПС равным 0,1 и по таблице F -распределения при числах степеней свободы $k_1 = k_2 = 9$ и $P = 0,05$ находим критическое значение $u_p = 3,18$;

б) по формуле (6.25), заменяя в ней D_x^* и D_y^* на σ_x^{*2} и σ_y^{*2} , вычисляем значение ПС u , отвечающее результатам испытаний:

$$u = (2,1/1,9)^2 = 1,22.$$

Поскольку вычисленное значение ПС оказывается в области допустимых значений при достаточно высоком уровне значимости, можно считать, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о равенстве средних квадратических отклонений секундного расхода топлива при работе двигателей на стенде и в полете.

2. Проверяем гипотезу о равенстве математических ожиданий секундного расхода топлива. Для этого, принимая во внимание результаты проверки гипотезы о равенстве дисперсий, используем ПС вида (6.21):

а) по формуле (6.22) вычисляем число степеней свободы показателя согласованности

$$k = 10 + 10 - 2 = 18;$$

б) принимаем уровень значимости ПС равным 0,1 и по таблице распределения Стьюдента при числе степеней свободы $k = 18$ находим критическое значение ПС $|u_\alpha| = 1,734$;

в) определяем значение ПС, отвечающее результатам испытаний

$$u = \frac{150,5 - 149,6}{\sqrt{(2,1)^2 \cdot 9 + (1,9)^2 \cdot 9}} \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot (10 + 10 - 2)}{10 + 10}} = 1,005.$$

Сопоставляя вычисленное значение ПС с критическим, приходим к выводу о том, что результаты испытаний не противоречат гипотезе о равенстве математических ожиданий секундного расхода топлива при работе двигателей на стенде и в полете.

6.4. Проверка гипотез методом последовательного анализа

6.4.1. Сущность метода последовательного анализа

В п. 6.2 и 6.3 были изложены методы проверки гипотез по классической схеме, когда все множество возможных значений ПС разбивалось на два подмножества (две области): область допустимых значений и критическую область (рис. 6.8).

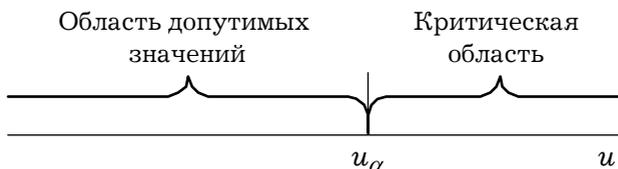


Рис. 6.8

Решение о принятии или отклонении нулевой гипотезы принимается в зависимости от того, в какую область попало вычисленное по результатам испытаний значение ПС.

Классическим методам присущи два недостатка:

- при малых объемах выборок принятие решения связано со значительной долей риска. Это обусловлено тем, что при уменьшении объема выборок увеличиваются вероятности ошибок первого и второго рода;

- не существует подходов к обоснованию оптимальных объемов выборок, что затрудняет планирование и проведение экспериментов.

Метод последовательного анализа, разработанный А. Вальдом, в некоторой степени свободен от этих недостатков. В отличие от классических методов в методе последовательного анализа вводится еще одна область — область продолжения испытаний (рис. 6.9).

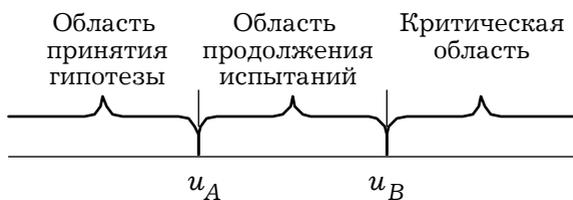


Рис. 6.9

При попадании значения ПС в эту область принимается решение о необходимости проведения еще одного испытания. Испытания проводятся до тех пор, пока не будет принято ре-

шение о принятии или отклонении нулевой гипотезы. Число испытаний в методе последовательного анализа заранее не фиксируется. Оно зависит от конкретных полученных результатов испытаний, т. е. число испытаний является случайным.

Предпочтительными критериями принятия или отклонения нулевой гипотезы должны быть такие, чтобы при фиксированных вероятностях ошибок первого и второго рода обеспечивался минимум математического ожидания необходимого объема выборки. При использовании таких критериев метод последовательного анализа оказывается более экономичным по сравнению с классическим, так как в среднем требует для реализации меньшего числа испытаний.

При проверке гипотез методом последовательного анализа выделяют два этапа:

- выбирают показатель согласованности $u(n)$;
- устанавливают решающее правило, в соответствии с которым после каждого испытания принимают одно из трех решений:

- нулевую гипотезу принять;
- нулевую гипотезу отклонить;
- провести еще одно испытание.

В качестве показателя согласованности при проверке гипотез данным методом принимают предложенный Вальдом последовательный показатель отношения вероятностей

$$u(n) = \frac{P_{1n}}{P_{0n}}, \quad (6.27)$$

где P_{0n} — вероятность появления результатов испытаний x_1, x_2, \dots, x_n при условии справедливости проверяемой гипотезы;

P_{1n} — вероятность появления этих результатов при условии, что проверяемая гипотеза неверна.

Проверяемая гипотеза принимается, если после n -го испытания выполняется условие

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad (6.28)$$

или отклоняется, если окажется, что

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \geq \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (6.29)$$

Если же вычисленное значение показателя согласованности после n -го испытания будет удовлетворять неравенству

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{P_{1n}}{P_{0n}} < \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad (6.30)$$

то проводят еще одно испытание. После проведения испытания вычисляют новое значение ПС и проверяют неравенства (6.28)–(6.30).

Такой пошаговый процесс проверки гипотезы продолжают до тех пор, пока не будет принято решение: проверяемая гипотеза принимается либо отклоняется.

Метод последовательного анализа в окончательном виде разработан для решения лишь отдельных задач статистической проверки гипотез. Рассмотрим некоторые из этих задач.

6.4.2. Проверка гипотезы о вероятности наступления события

Решение данной задачи рассмотрим на примере контроля качества готовой продукции по доле в ней дефектных изделий. Из партии готовой продукции по одному извлекают изделие и подвергают контролю. Изделие может оказаться годным или дефектным. Совокупность результатов испытаний за n шагов можно описать числом m дефектных изделий среди n подвергнутых контролю. Вероятность извлечения дефектного изделия из партии при большом ее объеме численно равна доле таких изделий в партии.

Введем обозначения:

P_0 — наибольшая доля дефектных изделий в партии, при которой партия считается еще годной;

P_1 — наименьшая доля дефектных изделий, при которой она считается уже не годной.

Последовательный показатель отношения вероятностей после n -го шага будет определяться выражением

$$u_n = \frac{C_n^m P_1^m (1-P_1)^{n-m}}{C_n^m P_0^m (1-P_0)^{n-m}} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^{n-m}. \quad (6.31)$$

С учетом (6.31) неравенства (6.28)–(6.30) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^{n-m} &\leq \frac{\beta}{1-\alpha}; \\ \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^{n-m} &\geq \frac{1-\beta}{\alpha}; \\ \frac{\beta}{1-\alpha} &< \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^m \left(\frac{1-P_1}{1-P_0} \right)^{n-m} < \frac{1-\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Прологарифмировав эти выражения, получим

$$\left. \begin{aligned} m &\leq a_n; \\ m &\geq r_n; \\ a_n &< m < r_n. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где

$$a_n = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + n \ln \frac{1-P_0}{1-P_1}}{\ln \frac{P_1}{P_0} - \ln \frac{1-P_1}{1-P_0}}; \quad (6.33)$$

$$r_n = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + n \ln \frac{1-P_0}{1-P_1}}{\ln \frac{P_1}{P_0} - \ln \frac{1-P_1}{1-P_0}}. \quad (6.34)$$

Значения a_n и r_n , которые принято называть приемочным и браковочным числами, при фиксированных P_0, P_1, α и β зависят только от n и могут быть вычислены заранее.

На практике решение такого типа задач обычно производят графически. В прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают номер шага испытания n , а по оси ординат — число бракованных изделий m , появившихся после n испытаний. Перед проведением испытаний рассчитывают коэффициенты уравнений (6.33) и (6.34) и проводят на графике соответствующие прямые a_n и r_n (рис. 6.10).

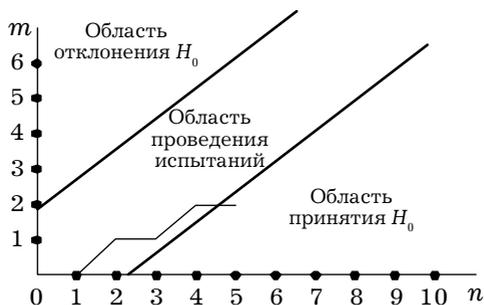


Рис. 6.10

Эти прямые выделяют на плоскости три области: область принятия гипотезы H_0 ; область отклонения гипотезы H_0 ; область продолжения испытаний.

При испытании после каждого его шага на график наносят точку с координатами (n, m) . В зависимости от того, в какую область попала точка, проверяемую гипотезу либо принимают, либо отклоняют, либо продолжают испытание.

На рис. 6.10 представлен случай, когда гипотеза после пятого шага испытаний оказалась принятой.

6.4.3. Проверка гипотезы о математическом ожидании

Предположим, что случайная переменная X распределена по нормальному закону с известной дисперсией σ_x^2 . Необходимо проверить гипотезу о том, что математическое ожидание этой переменной не превышает значения m'_x .

Гипотеза может быть проверена путем последовательного проведения испытания с регистрацией на каждом его шаге значений x_1, x_2, \dots, x_n , которые приняла случайная величина X .

Если граничные точки m_{x_0} и m_{x_1} областей принятия гипотезы, критической и продолжения испытаний, определены, а испытания независимы, вероятность получения совокупности результатов x_1, x_2, \dots, x_n при условии, что $m_x = m_{x_0}$ будет равна

$$P_{0n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_x^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{x_0})^2\right) (dx)^n,$$

а при условии, что $m_x = m_{x_1}$.

$$P_{1n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_x^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{x_1})^2\right) (dx)^n.$$

Следовательно, показатель согласованности проверки нулевой гипотезы запишется в виде

$$u_n = \frac{P_{1n}}{P_{0n}} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{x_1})^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{x_0})^2\right)}. \quad (6.35)$$

При выбранных значениях вероятностей ошибок первого α и второго β рода условия принятия, отклонения и продолжения испытаний будут определяться неравенствами

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &\leq a_n; \\ \sum_{i=1}^n x_i &\geq r_n; \\ a_n &< \sum_{i=1}^n x_i < r_n. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Приемочное и браковочное числа a_n и r_n в неравенствах (6.36) определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\sigma_x^2}{m_{x1} - m_{x0}} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + n \frac{m_{x1} + m_{x0}}{2}; \\ r_n &= \frac{\sigma_x^2}{m_{x1} - m_{x0}} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + n \frac{m_{x1} + m_{x0}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Задачу удобно решать с помощью графика, на котором одновременно проведены прямые a_n и r_n согласно уравнениям (6.37), а после каждого шага испытания наносится точка с координатами

$$\left(n, \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Вопросы для самопроверки

1. Поясните этапы проверки статистических гипотез классическим методом.

2. Что такое гипотеза и какие гипотезы вы знаете? В чем их отличие друг от друга?

3. Какие требования предъявляются к показателю согласованности?

4. Поясните сущность ошибок первого и второго рода.

5. Что понимают под мощностью показателя согласованности?

6. Какие задачи решают при обосновании закона распределения случайной переменной?

7. С помощью чего можно приближенно определить гипотетический закон распределения?

8. Сформулируйте задачу проверки гипотезы о виде закона распределения.

9. Какие методы проверки гипотезы о виде закона распределения вы знаете? В чем их суть?

10. Какие два случая выделяют при проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий?

11. Какова последовательность проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий?

12. В чем заключается особенность проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий при неизвестной точности измерений?

13. Какова последовательность проверки гипотезы о равенстве дисперсий?

14. В чем заключается принципиальное отличие проверки гипотез методом последовательного анализа от классического?

15. Какие этапы выделяют при проверке гипотез методом последовательного анализа?

16. Какая подготовительная работа должна быть проведена до начала проверки гипотез методом последовательного анализа?

Задачи для самостоятельного решения

1. Угол между двумя ориентирами измерялся осенью и весной. По результатам шести независимых измерений получены приближенные значения угла $42^{\circ}30'30''$ (осенью) и $42^{\circ}30'38''$ (весной). Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением равным $10''$. При $\alpha = 0,05$ установить, изменился ли угол за время, прошедшее между этими измерениями.

2. При стендовых испытаниях десяти ракетных двигателей были определены характеристики тяги двигателя: 280,5 кг, 0,8 кг. При летных испытаниях десяти ракет с двигателями той же партии получены значения тех же характеристик: 279,6 кг, 0,6 кг. При $\alpha = 0,05$ установить, изменяются ли характеристики тяги двигателя в зависимости от условий испытания.

3. Для контроля правильности работы станка-автомата произведены две выборки по 10 деталей в начале и в конце смены и измерены их диаметры. По результатам измерений получено: по первой выборке: 24,59 мм, 0,49 мм, по второй выборке: 24,55 мм, 0,96 мм. Определить, нуждается ли станок в наладке при $\alpha = 0,05$.

4. Два орудия произвели по 4 выстрела в одинаковых условиях. При этом получены дальности до точек падения снарядов

(в м): для 1-го орудия: 6929, 6946, 6925, 6920; для 2-го орудия: 6910, 6897, 6901, 6916. При $\alpha = 0,05$ установить, является ли расхождение в дальностях до средних точек падения снарядов различием баллистических свойств орудий.

5. Радиолокатор, точность работы которого характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 30 м, определяет дальность до корабля. Результаты двух измерений через некоторый промежуток времени оказались 15 220 и 15 110 м. При $\alpha = 0,05$ установить, приближается ли корабль к радиолокатору.

6. При контроле высоты орбиты космического аппарата через заданный промежуток времени получены следующие результаты (км) (табл. 6.6):

Таблица 6.6

1-я серия	201,58	200,00	199,75	197,38	200,58	200,41	198,54
2-я серия	200,90	198,09	200,06	198,46	197,92	200,76	200,82

При $\alpha = 0,05$ установить, изменилась ли высота орбиты.

7. Во время сезонного контроля геодезистами азимута контрольного направления были получены следующие результаты измерений (табл. 6.7):

Таблица 6.7

Осень	52°30'18"	52°30'21"	52°30'48"	52°30'31"	52°30'34"	52°30'26"
Весна	52°30'30"	52°30'29"	52°30'52"	52°30'37"	52°30'41"	52°30'33"

При $\alpha = 0,05$ установить, изменился ли азимут за прошедшее время.

8. Результаты 1000 измерений сопротивлений резисторов (Ом) приведены в табл. 6.8. Проверить гипотезу о нормальном законе распределения по методу Колмогорова при $\alpha = 0,1$.

Таблица 6.8

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы интервала	95-96	96-97	97-98	98-99	99-100	100-101	101-102	102-103	103-104	104-105
Число резисторов	2	14	68	170	236	284	148	60	14	4

9. Резерфордом и Гейгером в течение 2608 периодов по 7,5 с подсчитывалось число частиц, излучаемых радиоактивным объектом. В табл. 6.9 приведены результаты наблюдения числа интервалов времени, в течение которых в счетчик попало равное количество частиц. Используя метод Пирсона при $\alpha = 0,1$, проверить гипотезу о том, что число интервалов подчиняется закону Пуассона.

Таблица 6.9

Номер интервала	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол-во попаданий	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

10. По каждой из 100 мишеней произведено по 10 выстрелов. Фиксировались только попадания и промахи. Результаты стрельб приведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10

Число попаданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число мишеней	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о биномиальном распределении числа мишеней при $\alpha = 0,1$.

11. Семь монет подбрасывались одновременно 1536 раз и отмечалось число выпавших гербов. В табл. 6.11 приведены числа n случаев, когда число выпавших гербов было равно k .

Таблица 6.11

k	0	1	2	3	4	5	6	7
n	12	78	270	456	386	252	69	13

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о биномиальном распределении числа выпавших гербов при $\alpha = 0,05$.

12. В табл. 6.12 представлено появление цифр среди 800 первых десятичных знаков числа π .

Таблица 6.12

Цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Числа	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

Используя метод Пирсона проверить гипотезу о равномерном распределении цифр при $\alpha = 0,10$.

13. Отсчет десятых долей по шкале измерительного прибора оценивается приблизительно. В табл. 6.13 приведено 200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы.

Таблица 6.13

Цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Числа	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Используя метод Пирсона проверить гипотезу о равномерном распределении цифр при $\alpha = 0,05$.

14. В табл. 6.14 представлены результаты 228 измерений уровня чувствительности радиоаппаратуры (в микровольтах).

Таблица 6.14

Уровень	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
Кол-во	3	11	20	28	33	34	31	25	19	13	8	11

Используя метод Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении уровня чувствительности при $\alpha = 0,05$.

15. Результаты испытания 200 приборов на продолжительность работы (в ч) приведены в табл. 6.15.

Таблица 6.15

Время	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	3000	3300
	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
Кол-во	53	41	30	22	16	12	9	7	5	3	2

Используя метод Пирсона, проверить гипотезу о показательном (экспоненциальном) распределении времени безотказной работы прибора при $\alpha = 0,05$.

16. При контроле качества партии из 1000 изделий она должна быть принята, если содержит не более 10 дефектных изделий, и забракована, если содержит не менее 20 дефектных изделий.

Построить график для контроля качества партии методом последовательного анализа при уровнях вероятностей ошибок первого и второго рода, равных 0,1.

17. При контроле качества партии деталей она должна быть принята, если среднее значение отклонения от номинала окажется не более 1 мм, и забракована, если среднее значение отклонения от номинала окажется не менее 4 мм.

Построить график для контроля качества партии методом последовательного анализа при уровнях вероятностей ошибок первого и второго рода, равных 0,05 и 0,1, соответственно.

18. При контроле качества партии контрольно-измерительных приборов (омметров) она должна быть принята, если при измерении эталонного резистора с номинальным значением 1000 Ом среднее квадратическое отклонение измеренного значения не превысит 5%, и забракована, если среднее квадратическое отклонение превысит 10%.

Построить график для контроля качества партии методом последовательного анализа при уровнях вероятностей ошибок первого и второго рода, равных 0,05 и 0,1, соответственно.

Часть III

МЕТОДЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

7. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.1. Методы моделирования экономических систем

Понятие *модели* является ключевым в общей теории систем. Моделирование как мощный — а часто и единственный — метод исследования экономических систем и управления ими подразумевает замещение реального объекта другим — материальным или идеальным.

Важнейшими требованиями к любой модели являются ее адекватность изучаемому объекту в рамках конкретной задачи и реализуемость имеющимися средствами.

В системном анализе и эконометрике моделью объекта (системы, операции) называется материальная или идеальная (мысленно представимая) система, создаваемая и/или используемая при решении конкретной задачи с целью получения новых знаний об объекте-оригинале, адекватная ему с точки зрения изучаемых свойств и более простая, чем оригинал, в остальных аспектах.

Классификация основных методов моделирования (и соответствующих им моделей) представлена на рис. 7.1.

При исследовании экономических систем (ЭС) находят применение все методы моделирования, однако в этом разделе основное внимание будет уделено *семиотическим (знаковым) методам.*

Напомним, что *семиотикой* (от греч. — знак, символ) называют науку об *общих свойствах знаковых систем*, т. е. систем конкретных или абстрактных объектов (знаков), с каждым из которых сопоставлено некоторое значение. Примерами таких систем являются любые языки (естественные или искусственные, например, языки описания данных или моделирования), системы сигнализации в обществе и животном мире и т. п.



Рис. 7.1

Семиотика включает *три раздела*:

- *синтактика*;
- *семантика*;
- *прагматика*.

Синтактика исследует синтаксис знаковых систем безотносительно к каким-либо интерпретациям и проблемам,

связанным с восприятием знаковых систем как средств общения и сообщения.

Семантика изучает интерпретацию высказываний знаковой системы и с точки зрения моделирования объектов занимает в семиотике главное место.

Прагматика исследует отношение использующего знаковую систему к самой знаковой системе, в частности — восприятие осмысленных выражений знаковой системы.

Из множества семиотических моделей в силу наибольшего распространения, особенно в условиях информатизации современного общества и внедрения формальных методов во все сферы человеческой деятельности, выделим математические, которые отображают реальные системы с помощью математических символов. При этом, учитывая то обстоятельство, что мы рассматриваем методы моделирования применительно к исследованию систем в различных операциях, будем использовать общеизвестную методологию системного анализа, теории эффективности и принятия решений.

7.1.1. Математическая модель экономической системы

Задача построения математической модели ЭС может быть поставлена следующим образом [59]: для конкретной цели моделируемой операции с учетом имеющихся ресурсов построить операторы моделирования исхода операции и оценивания показателя ее эффективности. Формальная запись этой задачи имеет вид:

$$\langle \Lambda_0, \Theta_r; H, \Psi \rangle.$$

где Λ_0 — множество значений определенных и неопределенных факторов, характеризующих эффективность;

Θ_r — множество дополнительной информации о проблемной ситуации;

H — отображение, ставшее в соответствие множеству стратегий и факторов множество результатов;

Ψ — оператор соответствия “результат — показатель”.

Перед рассмотрением каждого из названных операторов приведем два важных определения.

Оператором в математике называют закон (правило), согласно которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие определенный элемент y множества Y . При этом множества X и Y могут иметь самую различную природу (если они представляют, например, множества действительных или комплексных чисел, понятие оператор совпадает с понятием функции).

Множество Z упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$, называется прямым произведением множеств X и Y и обозначается $X \cdot Y$. Аналогично, множество Z упорядоченных конечных последовательностей (x_1, x_2, \dots, x_n) , где $x_{i_c} \in X_{i_c}$, называется прямым произведением множеств X_1, X_2, \dots, X_n и обозначается $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$ [59].

Оператором моделирования исхода операции называется оператор H , устанавливающий соответствие между множеством Λ учитываемых в модели факторов, множеством U возможных стратегий управления системой (операцией) и множеством Y значений выходных характеристик модели

$$H: \Lambda \cdot U \xrightarrow{A_0, \Theta_m, R_s} Y,$$

где Θ_m, R_s — ресурсы на этапе моделирования исходов операции и учитываемые свойства моделируемой системы, соответственно.

Оператором оценивания показателя эффективности системы (операции) называется оператор Ψ , ставящий в соответствие множеству Y значений выходных характеристик модели множество W значений показателя эффективности системы

$$\Psi: Y \xrightarrow{A_0, \Theta_s, R_s} W,$$

где Θ_s — ресурсы исследователя на этапе оценивания эффективности системы.

Особо отметим, что построение приведенных операторов всегда осуществляется с учетом главного системного принципа

на — принципа цели. Кроме того, важным является влияние объема имеющихся в распоряжении исследователя ресурсов на вид оператора моделирования исхода H и состав множества U стратегий управления системой (операцией). Чем больше выделенные ресурсы, тем детальнее (подробнее) может быть модель и тем большее число стратегий управления может быть рассмотрено (из теории принятия решений известно, что первоначально множество возможных альтернатив должно включать как можно больше стратегий, иначе можно упустить наилучшую).

В самом общем виде математической моделью экономической системы (операции) называется множество

$$M = \langle U, \Lambda, H, Y, \Psi, W \rangle,$$

элементами которого являются рассмотренные выше множества и операторы.

Способы задания оператора Ψ и подходы к выбору показателя эффективности W рассматриваются в теории эффективности; методы формирования множества возможных альтернатив — в теории принятия решений.

Для двух классов задач показатель эффективности в явном виде не вычисляется:

- для задач так называемой *прямой оценки*, в которых в качестве показателей эффективности используются значения одной или нескольких выходных характеристик модели;
- для *демонстрационных задач*, в ходе решения которых для изучения поведения системы используются лишь значения ее выходных характеристик и внутренних переменных.

В таких случаях используют термин *математическое описание системы*, представляемое множеством

$$M' = \langle U, \Lambda, H, Y \rangle.$$

7.1.2. Классификация математических моделей

В качестве основного классификационного признака для математических моделей целесообразно использовать свойст-

ва операторов моделирования исхода операции и оценивания показателя ее эффективности [59].

Оператор моделирования исхода H может быть функциональным (т. е. заданным системой аналитических функций) или алгоритмическим (т. е. содержать математические, логические и логико-лингвистические операции, не приводимые к последовательности аналитических функций). Кроме того, он может быть детерминированным (когда каждому элементу множества $U \cdot \Lambda$ соответствует детерминированное подмножество значений выходных характеристик модели $\bar{Y} \subseteq Y$) или стохастическим (когда каждому значению множества $U \cdot \Lambda$ соответствует случайное подмножество $\tilde{Y} \subseteq Y$).

Оператор оценивания показателя эффективности Ψ может задавать либо *точечно-точечное преобразование* (когда каждой точке множества выходных характеристик Y ставится в соответствие единственное значение показателя эффективности W), либо *множественно-точечное преобразование* (когда показатель эффективности задается на всем множестве полученных в результате моделирования значений выходных характеристик модели).

В зависимости от свойств названных операторов все математические модели подразделяются на *три основных класса*:

- *аналитические;*
- *статистические;*
- *имитационные.*

Для *аналитических* моделей характерна *детерминированная функциональная связь между элементами множеств U , Λ , Y а значение показателя эффективности W определяется с помощью точечно-точечного отображения*. Аналитические модели имеют весьма широкое распространение. Они хорошо описывают качественный характер (основные тенденции) поведения исследуемых систем. В силу простоты их реализации на ЭВМ и высокой оперативности получения результатов такие модели часто применяются при решении задач *синтеза систем*, а также при *оптимизации вариантов применения* в различных операциях.

К *статистическим* относят математические модели систем, у которых связь между элементами множеств U , Λ , Y задается функциональным оператором H , а оператор Ψ является множественно-точечным отображением, содержащим алгоритмы статистической обработки. Такие модели применяются в тех случаях, когда результат операции является случайным, а конечные функциональные зависимости, связывающие статистические характеристики учитываемых в модели случайных факторов с характеристиками исхода операции, отсутствуют. Причинами случайности исхода операции могут быть случайные внешние воздействия; случайные характеристики внутренних процессов; случайный характер реализации стратегий управления. В статистических моделях сначала формируется представительная выборка значений выходных характеристик модели, а затем производится ее статистическая обработка с целью получения значения скалярного или векторного показателя эффективности.

Имитационными называются математические модели систем, у которых оператор моделирования исхода операции задается алгоритмически. Когда этот оператор является стохастическим, а оператор оценивания показателя эффективности задается множественно-точечным отображением, имеем классическую имитационную модель, которую более подробно рассмотрим в п. 7.2. Если оператор H является детерминированным, а оператор Ψ задает точечно-точечное отображение, можно говорить об определенном образом вырожденной имитационной модели.

На рис. 7.2 представлена классификация наиболее часто встречающихся математических моделей по рассмотренному признаку.

Важно отметить, что при создании аналитических и статистических моделей широко используются их гомоморфные свойства (способность одних и тех же математических моделей описывать различные по физической природе процессы и явления). Для имитационных моделей в наибольшей степени характерен изоморфизм процессов и структур, т. е. взаимно

однозначное соответствие элементов структур и процессов реальной системы элементам ее математического описания и, соответственно, модели.

Вид основных операторов		Н			
		Функциональный		Алгоритмический	
		детермин.	стохастич.	детермин.	стохастич.
Ψ	Множественно-точечное отображение	—	Статистические	—	Имитационные
	Точечно-точечное отображение	Аналитические	—	Имитационные	—

Рис. 7.2

Согласно [59] *изоморфизм* — соответствие (отношение) между объектами, выражающее *тождество их структуры (строения)*. Именно таким образом организовано большее число классических имитационных моделей. Названное свойство имитационных моделей проиллюстрировано рис. 7.3.

Имитационные модели являются наиболее общими математическими моделями. В силу этого иногда все модели называют имитационными:

- *аналитические модели*, имитирующие только физические законы, на которых основано функционирование реальной системы, можно рассматривать как *имитационные модели I уровня*;
- *статистические модели*, в которых, кроме того, имитируются случайные факторы, можно называть *имитационными моделями II уровня*;

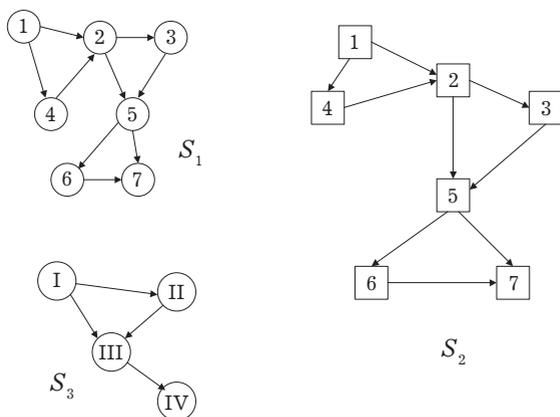


Рис. 7.3

S_1 — система-оригинал; S_2 — изоморфное отображение оригинала; S_3 — гомоморфное отображение оригинала.

• собственно *имитационные модели*, в которых еще имитируется и функционирование системы во времени, называют *имитационными моделями III уровня*.

Классификацию математических моделей можно провести и по другим признакам.

На рис. 7.4 представлена классификация моделей (прежде всего, аналитических и статистических) по зависимости переменных и параметров от времени.



Рис. 7.4

Динамические модели, в которых учитывается изменение времени, подразделяются на *стационарные* (в которых от времени зависят только входные и выходные характеристики) и *нестационарные* (в которых от времени могут зависеть либо параметры модели, либо ее структура, либо и то, и другое).

На рис. 7.5 показана классификация математических моделей еще по трем основаниям: по *характеру изменения переменных*; по *особенностям* используемого *математического аппарата*; по способу учета проявления случайностей.



Рис. 7.5. Классификация математических моделей

Имитационные модели, как правило, можно отнести к следующим типам:

- по характеру изменения переменных — к *дискретно-непрерывным* моделям;

- по математическому аппарату — к моделям *смешанного* типа;
- по способу учета случайности — к *стохастическим моделям общего вида*.

В заключение приведем классификацию математических моделей ЭС (в качестве классификационного признака используем масштаб моделируемых экономических процессов). Модели ЭС принято подразделять на три группы [11]:

- модели, достаточно точно отражающие одну сторону некоторого экономического процесса в системе сравнительно малого масштаба;
- модели, описывающие реальные процессы в ЭС малого и среднего масштаба, подверженные воздействию неопределенных (прежде всего — случайных) факторов;
- модели больших и очень больших (макрэкономических) систем: крупных торговых и экономических предприятий, объединений, концернов, отраслей экономики и экономики страны в целом.

Модели *первой группы* представляют собой простые соотношения между двумя-тремя переменными (как правило, алгебраические уравнения или системы уравнений). Классическим примером таких моделей служит *функция потребления* [42]:

$$\ln C = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln Y + \beta_2 \cdot \ln P,$$

где C — потребление некоторого пищевого продукта на душу населения в некотором году;

Y — реальный доход на душу населения в этом году;

P — индекс цен на этот продукт, скорректированный на общий индекс стоимости жизни;

β_i ($i = 0, 1, 2$) — константы (коэффициенты).

Разработка моделей *второй группы* требует принятия системы допущений, позволяющих формализовать влияние неопределенных факторов. В наибольшей степени это касается факторов стохастической природы (случайных событий, величин, векторов, функций, потоков и др.), что потребовало

создания технологии их моделирования (см. п. 7.3). В качестве примеров моделей этой группы приведем три класса моделей, используемых в экономических исследованиях для анализа и/или прогноза [4].

Модели временных рядов:

$$\text{тренда } y(t) = T(t) + \varepsilon_t,$$

где $T(t)$ — временной тренд заданного параметрического вида (например, линейный $T(t) = a + b \cdot t$);

ε_t — случайный (стохастический) компонент;

$$\text{сезонности } y(t) = S(t) + \varepsilon_t,$$

где $S(t)$ — периодический (сезонный) компонент;

ε_t — случайный (стохастический) компонент;

тренда и сезонности

$$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t \text{ (аддитивная) или}$$

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) + \varepsilon_t \text{ (мультипликативная).}$$

К моделям этого класса относят и более сложные модели — модели адаптивного прогноза, авторегрессии и скользящего среднего (ARIMA) и др. Все они объясняют поведение временного ряда только исходя из его предыдущих значений. Примеры применения: изучение и прогнозирование продаж железнодорожных билетов; спроса на автомобили; краткосрочного прогноза процентных ставок и т. п.

Регрессионные модели с одним уравнением

$$y = f(X, B) = f(x_1, x_2, \dots, x_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p),$$

где y — зависимая (объясняемая) переменная;

$x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ — независимые (объясняющие)

переменные;

$\beta_j (j = 1, 2, \dots, p)$ — коэффициенты.

Можно считать, что именно эти модели представляют наибольший интерес в эконометрических исследованиях. Примеры применения: изучение спроса на мороженое как функцию времени года, суток, температуры воздуха, среднего уровня доходов и т. п.; зависимости заработной платы от возраста, стажа, пола, образования и т. п.

Системы одновременных уравнений

Эти системы состоят не только из регрессионных уравнений, но и из тождеств, причем в них содержатся и объясняемые, и объясняющие переменные. Рассмотрим широко известную *модель спроса и предложения*:

$$\begin{cases} Q_D(t) = \beta_1 + \beta_2 \cdot P(t) + \beta_3 \cdot Y(t) + u_t, \\ Q_S(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot P(t) + \alpha_3 \cdot P(t-1) + \varepsilon_t, \\ Q_S(t) = Q_D(t), \end{cases}$$

где $Q_D(t)$ — спрос на товар в момент времени t ;

$Q_S(t)$ — предложение товара в момент времени t ;

$P(t)$ — цена товара в момент времени t ;

$Y(t)$ — доход в момент времени t .

Первое из приведенных уравнений системы называют уравнением *спроса*, второе — уравнением *предложения*, третье — уравнением *равновесия*. Цена товара $P(t)$ и спрос на товар $Q(t) = Q_D(t) = Q_S(t)$ определяются из уравнений системы (т. е. являются эндогенными переменными). Предопределенными переменными являются доход $Y(t)$ и значение цены товара в предыдущий момент времени $P(t-1)$.

К моделям рассматриваемой (второй) группы следует отнести и весьма широко применяемые *модели систем массового обслуживания*. Популярность этих моделей объясняется, прежде всего, наличием развитого математического аппарата теории массового обслуживания, содержащего многие формальные схемы описания различных реальных систем. Подробнее о некоторых практических применениях таких моделей самого разного уровня (моделей фирмы; бензоколонки; торговой точки; звена управления и др.) [см. 11, 12]. Весьма интересные модели важных и сложных процессов (прогнозирования в промышленности; управления трудовыми ресурсами и запасами; повышения надежности и улучшения ремонта оборудования и др.) описаны в [26]. Подробное описание большого количества моделей экономических систем дано в [19]. На наш взгляд, читателям, серьезно интересующимся ме-

неджментом в экономических системах, следует обязательно ознакомиться с [2, 5].

В качестве примера использования математической модели для анализа одного из сложнейших вопросов коммерции — ценообразования можно привести следующий: пусть требуется обосновать возможный подход к определению рыночной цены на некоторый программный продукт (заметим, что данная проблема остро стоит на нашем рынке). Для любого элемента программного обеспечения можно указать на две особенности:

- оригинальный программный продукт является авторским произведением и должен рассматриваться как интеллектуальная собственность;
- созданный программный продукт может быть легко размножен, причем расходы на размножение ничтожно малы по сравнению с расходами на разработку оригинала.

Таким образом, существуют два вида цен: цена на оригинал программы и цена на ее копию (легко провести аналогию с аудио- и видеопродукцией, картинками и т. п.). Все программы можно подразделить на уникальные (создаваемые по заказу и не предусматривающие тиражирование); специализированные (разрабатываемые для ограниченного контингента пользователей) и универсальные или рыночные (предназначенные для широкого потребления). В дальнейшем будем рассматривать именно универсальные программы и цены на них. Под рыночной ценой продукта будем понимать цену, устанавливаемую продавцом (автором программы или его представителем на рынке) на копию программного продукта, готовую к реализации. При этих допущениях первоначальные затраты на разработку программ являются постоянными и их вообще можно не рассматривать при определении рыночной цены. Действительно, сколько бы ни стоила разработка продукта, его цена определяется потребностью в программах данного типа; количеством потенциальных покупателей и их финансовыми возможностями; наличием конкурентов; качеством предлагаемого товара; известностью автора (фирмы-производителя) продукта; эффективностью рекламной кампании и т. п. Упростим рассмат-

риваемую ситуацию: пусть у нашего продукта нет аналогов (а, следовательно, и конкурентов); нам известны все потенциальные покупатели, а им — информация о нашем программном продукте; каждый покупатель готов купить одну копию нашей программы по любой цене, не превышающей его собственной предельной цены на данную программу. Итак, необходимо установить такую цену на программный продукт, чтобы сумма выручки от его продажи была максимальной. Подобная ситуация может быть описана оптимизационной экономической математической моделью вида:

$$Y = P \cdot K_p \rightarrow \max,$$

где Y — доход продавца;

P — искомая цена продукта;

K_p — количество копий, которые были проданы по цене P .

Очевидно, что количество проданных копий зависит от цены на продукт, и сложность заключается именно в определении вида этой зависимости (функции $K_p(P)$). Обозначим: P_0 — нижний предел рыночной цены, P_1 — верхний предел рыночной цены, назначаемые потенциальными покупателями (их, как правило, оценить возможно). Тогда наша модель дополняется ограничением $P_0 \leq P \leq P_1$.

На отрезке $[P_0, P_1]$ функция $K_p(P)$ является монотонно невозрастающей, и, более того, она кусочно постоянна и меняется тогда, когда цена достигает такого значения, при котором очередной потенциальный покупатель уже не может купить программу.

Пример 7.1. Пусть есть три группы покупателей, каждая из которых готова приобрести 100 копий программного продукта, причем их собственные предельные цены составляют 600, 1000 и 1500 руб., соответственно. Тогда возможны колебания цены в пределах от 600 до 1500 руб. Очевидно, при цене 600 руб. будет продано 300 копий (всем покупателям); при цене от 601 до 1000 руб. — 200 копий (покупателям второй и третьей групп); при цене от 1001 до 1500 руб. — 100 копий (покупателям третьей группы). Соответственно, доход для этих цен составит:

$$Y_0 = K \cdot P_0 = 300 \cdot 600 = 180\,000 \text{ руб.};$$

$$Y = K_p \cdot P = 200 \cdot 1000 = 200\,000 \text{ руб.};$$

$$Y_1 = K_{p_1} \cdot P_1 = 100 \cdot 1500 = 150\,000 \text{ руб.}$$

(вообще говоря, доход для второй цены рассчитать сложно, поэтому взята предельная цена для второй группы покупателей).

Если отказаться от допущений о неизменности цен во времени и равенстве их значений для различных групп покупателей, можно наметить два пути увеличения общей прибыли от продаж:

– установление значительной скидки для покупателей, не имеющих возможностей приобрести программу по рыночной цене (школ; вузов; государственных научно-исследовательских учреждений и т. п.) — в нашем примере при выделении первой группы покупателей в особый класс, для которого вводится скидка 50% от найденной нами цены (1000 рублей), прибыль увеличится на 50 000 руб. и составит 250 000 руб.;

– постепенное снижение цены на программный продукт — если считать, что нет инфляции и за время торговли реклама не устаревает, следует принять такой сценарий продаж: а) сначала установить предельную цену на программу P_1 и удерживать ее до тех пор, пока все покупатели третьей группы не приобретут интересующие их копии; б) затем снизить цену до следующего предельного значения, дав возможность купить программу всем покупателям второй группы; в) снизить цену до минимального порога P_0 , обеспечив копиями программ всех оставшихся покупателей (такой сценарий принесет продавцу максимальный для условий примера доход в 310 000 руб.).

Понятно, что приведенная модель имеет учебную (иллюстративную) направленность и не может быть непосредственно применена на практике. Вместе с тем учет в ней таких факторов, как неопределенность при нахождении потенциальных покупателей; переход к интервальным оценкам их собственных предельных цен; учет инфляции, нелегального копирования и устаревания рекламы; других неопределенных факторов (после чего данная модель станет полноценным представителем моделей второй группы) позволит использовать результаты

моделирования, например, при определении стратегии продаж на некоторый интервал времени.

7.2. Имитационные модели экономических систем

7.2.1. Методологические основы применения метода имитационного моделирования

В п. 7.1 было дано формальное определение имитационной модели с точки зрения свойств двух ее важнейших операторов: оператора моделирования исхода и оператора оценивания показателя эффективности. Приведем классическое вербальное определение имитационного моделирования и проведем его краткий анализ.

По Р. Шеннону (Robert E. Shannon — профессор университета в Хантсвилле, штат Алабама, США) *“имитационное моделирование — есть процесс конструирования на ЭВМ модели сложной реальной системы, функционирующей во времени, и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы”*.

Выделим в этом определении ряд важнейших обстоятельств, учитывая особенности применения метода для исследования экономических систем (ЭС).

Во-первых, *имитационное моделирование предполагает два этапа: конструирование модели на ЭВМ и проведение экспериментов с этой моделью*. Каждый из этих этапов предусматривает использование собственных методов. Так, на первом этапе весьма важно грамотно провести информационное обследование, разработку всех видов документации и их реализацию. Второй этап должен предполагать использование методов планирования эксперимента с учетом особенностей машинной имитации.

Во-вторых, в полном соответствии с системными принципами четко выделены две возможные цели имитационных экспериментов:

- либо *понять поведение исследуемой системы* (о которой по каким-либо причинам было мало информации) — потребность в этом часто возникает, например, при создании принципиально новых образцов продукции;

- либо *оценить возможные стратегии управления системой*, что также очень характерно для решения широкого круга экономико-прикладных задач.

В-третьих, с помощью имитационного моделирования *исследуют сложные системы*. Понятие “сложность” является субъективным и по сути выражает отношение исследователя к объекту моделирования. Укажем *пять признаков “сложности” системы*, по которым можно судить о ее принадлежности к такому классу систем:

- наличие *большого* количества взаимосвязанных и взаимодействующих элементов;

- *сложность* функции (функций), выполняемой системой;

- *возможность* разбиения системы на подсистемы (декомпозиции);

- наличие управления (часто имеющего иерархическую структуру), *разветвленной* информационной сети и *интенсивных* потоков информации;

- наличие взаимодействия с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных (неопределенных) факторов.

Очевидно, что некоторые приведенные признаки сами предполагают субъективные суждения (курсивом выделены особо сложные для интерпретации элементы). Вместе с тем становится понятным, почему значительное число экономических информационных систем (ЭИС) относят к сложным системам и, следовательно, применяют метод имитационного моделирования. Отметим, что последний признак требует развития методов учета случайных факторов (см. п. 7.3), т. е. проведения так называемой *стохастической имитации*.

В-четвертых, методом имитационного моделирования *исследуют системы, функционирующие во времени*, что опре-

делает необходимость создания и использования специальных методов (механизмов) управления системным временем.

Наконец, в-пятых, в определении прямо указывается на необходимость использования ЭВМ для реализации имитационных моделей, т. е. проведения машинного эксперимента (машинной имитации), причем в подавляющем большинстве случаев применяются цифровые машины.

Даже столь краткий анализ позволяет сформулировать вывод о целесообразности (а, следовательно, и необходимости) использования метода имитационного моделирования для исследования сложных человеко-машинных (эргатических) систем экономического назначения. Особо выделим наиболее характерные обстоятельства применения имитационных моделей:

- если идет процесс познания объекта моделирования;
- если аналитические методы исследования имеются, но составляющие их математические процедуры очень сложны и трудоемки;
- если необходимо осуществить наблюдение за поведением компонент системы в течение определенного времени;
- если необходимо контролировать протекание процессов в системе путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации;
- если особое значение имеет последовательность событий в проектируемых системах и модель используется для предсказания так называемых узких мест;
- при подготовке специалистов для приобретения необходимых навыков в эксплуатации новой техники;
- и, конечно, если имитационное моделирование оказывается единственным способом исследований из-за невозможности проведения реальных экспериментов.

До настоящего момента особое внимание в толковании термина “имитационное моделирование системы” было уделено первому слову. Однако не следует упускать из вида, что создание любой (в том числе и имитационной) модели предполагает, что она будет отражать лишь наиболее существенные с точки зрения конкретной решаемой задачи свойства объекта-

оригинала. Английский аналог этого термина — systems simulation — при дословном переводе непосредственно указывает на необходимость воспроизводства (симуляции) лишь основных черт реального явления (ср. с термином “симуляция симптомов болезни” из медицинской практики). Важно отметить еще один аспект: создание любой (в том числе и имитационной модели) есть процесс творческий (не случайно Р. Шеннон назвал свою книгу “Имитационное моделирование систем — искусство и наука”), и, вообще говоря, каждый автор имеет право на собственную версию модели реальной системы. Однако за достаточно длительное время применения метода накоплены определенный опыт и признанные разумными рекомендации, которыми целесообразно руководствоваться при организации имитационных экспериментов.

Укажем ряд *основных достоинств и недостатков* метода имитационного моделирования.

Основные достоинства:

- имитационная модель позволяет, в принципе, описать моделируемый процесс с *большой адекватностью*, чем другие;
- имитационная модель обладает *известной гибкостью варьирования структуры, алгоритмов и параметров* системы;
- применение ЭВМ *существенно сокращает продолжительность испытаний* по сравнению с натурным экспериментом (если он возможен), а также их *стоимость*.

Основные недостатки:

- *решение*, полученное на имитационной модели, *всегда носит частный характер*, так как оно соответствует фиксированным элементам структуры, алгоритмам поведения и значениям параметров системы;
- *большие трудозатраты* на создание модели и проведение экспериментов, а также обработку их результатов;
- если использование системы предполагает участие людей при проведении машинного эксперимента, на результаты может оказать влияние так называемый *хауторнский эффект* (закрывающийся в том, что люди, зная (чувствуя), что за ними наблюдают, могут изменить свое обычное поведение).

Итак, само использование термина “имитационное моделирование” предполагает работу с такими математическими моделями, с помощью которых *результат исследуемой операции нельзя заранее вычислить или предсказать, поэтому необходим эксперимент (имитация) на модели при заданных исходных данных.* В свою очередь, *сущность машинной имитации заключается в реализации численного метода проведения на ЭВМ экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложной системы в течение заданного или формируемого периода времени.*

Каждая имитационная модель представляет собой комбинацию шести основных составляющих:

- *компонентов;*
- *переменных;*
- *параметров;*
- *функциональных зависимостей;*
- *ограничений;*
- *целевых функций.*

Под *компонентами* понимают *составные части*, которые при соответствующем объединении образуют систему. Компоненты называют также *элементами системы* или ее *подсистемами*. Например, в модели рынка ценных бумаг компонентами могут выступать отделы коммерческого банка (кредитный, операционный и т. д.), ценные бумаги и их виды, доходы, котировка и т. п.

Параметры — это *величины*, которые исследователь (пользователь модели) *может выбирать произвольно, т. е. управлять ими.*

В отличие от них *переменные* могут принимать только значения, определяемые *видом данной функции*. Так, в выражении для плотности вероятности нормально распределенной случайной величины X

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где x — переменная;

m_x, σ_x — параметры (математическое ожидание и стандартное отклонение соответственно);

π, e — константы.

Различают *экзогенные* (являющиеся для модели *входными* и порождаемые *вне системы*) и *эндогенные* (возникающие *в системе* в результате воздействия внутренних причин) переменные. Эндогенные переменные иногда называют *переменными состояниями*.

Функциональные зависимости описывают поведение параметров и переменных в пределах компоненты или же выражают соотношения между компонентами системы. Эти соотношения могут быть либо *детерминированными*, либо *стохастическими*.

Ограничения — устанавливаемые пределы изменения значений переменных или ограничивающие условия их изменения. Они могут вводиться разработчиком (и тогда их называют *искусственными*) или определяться самой системой вследствие присущих ей свойств (так называемые *естественные* ограничения).

Целевая функция предназначена для измерения степени достижения системой желаемой (требуемой) цели и вынесения оценочного суждения по результатам моделирования. Эту функцию также называют функцией критерия. По сути, весь машинный эксперимент с имитационной моделью заключается в поиске таких стратегий управления системой, которые удовлетворяли бы одной из трех концепций ее рационального поведения: *оптимизации*, *пригодности* или *адаптивизации*. Если показатель эффективности системы является скалярным, проблем с формированием критерия не возникает и, как правило, решается *оптимизационная задача* — поиска стратегии, соответствующей максимуму или минимуму показателя. Сложнее дело обстоит, если приходится использовать векторный показатель. В этом случае для вынесения оценочного суждения используются методы принятия решений по векторному показателю в условиях определенности (когда в модели учитываются

только детерминированные факторы) или неопределенности (в противном случае).

При реализации имитационной модели, как правило, рассматриваются *не все* реально осуществляемые функциональные действия (ФД) системы, а только те из них, которые являются *наиболее существенными для исследуемой операции*. Кроме того, *реальные ФД аппроксимируются упрощенными действиями ФД'*, причем степень этих упрощений определяется уровнем детализации учитываемых в модели факторов. Названные обстоятельства порождают *ошибки имитации* процесса функционирования реальной системы, что, в свою очередь, обуславливает *адекватность модели объекту-оригиналу* и *достоверность* получаемых в ходе моделирования результатов.

На рис. 7.6 схематично представлен пример выполнения некоторых ФД в i -м компоненте реальной системы и ФД' в i -м компоненте ее модели.

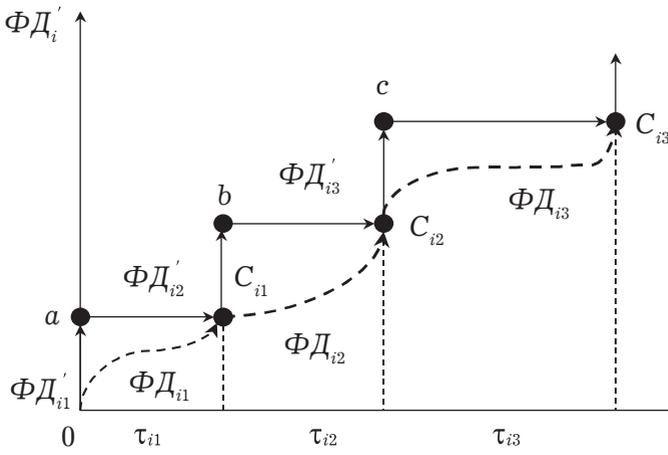


Рис. 7.6

В i -м компоненте реальной системы последовательно выполняются ΦD_{i1} , ΦD_{i2} , ΦD_{i3} , ... за времена τ_{i1} , τ_{i2} , τ_{i3} , ..., соответственно. На рис. 7.6 эти действия условно изображены пунктир-

ными (“непрямыми”) стрелками. В результате ФД наступают соответствующие события: $C_{i1}, C_{i2}, C_{i3} \dots$. В модели последовательность имитации иная: выполняется ФД' $i1$ при неизменном времени, наступает модельное событие a , после чего время сдвигается на величину τ_{i1} , инициируя наступление события C_{i1} и т. д. Иными словами, модельной реализации упрощенных ФД (ФД') соответствует ломаная $(0, a, C_{i1}, b, C_{i2}, d, C_{i3}, \dots)$. Отметим, что в принципе возможен и другой порядок моделирования: сначала сдвигать время, а затем инициировать наступление соответствующего события.

Очевидно, что в реальной системе в различных ее компонентах могут одновременно (параллельно) производиться функциональные действия и, соответственно, наступать события. В большинстве же современных ЭВМ в каждый из моментов времени можно обрабатывать лишь один алгоритм какого-либо ФД. Возникает вопрос: каким образом учесть параллельность протекания процессов в реальной системе без потери существенной информации о ней?

Для обеспечения имитации наступления параллельных событий в реальной системе вводят специальную глобальную переменную t_0 , которую называют модельным (системным) временем. Именно с помощью этой переменной организуется синхронизация наступления всех событий в модели ЭС и выполнение алгоритмов функционирования ее компонент. Принцип такой организации моделирования называется принципом квазипараллелизма.

Таким образом, при реализации имитационных моделей используют три представления времени:

- t_p — реальное время системы;
- t_0 — модельное (системное) время;
- t_m — машинное время имитации.

7.2.2. Классификация имитационных моделей

Имитационные модели принято классифицировать по четырем наиболее распространенным признакам:

- *типу* используемой ЭВМ;
- *способу взаимодействия* с пользователем;
- *способу управления системным временем (механизму системного времени);*
 - *способу организации квазипараллелизма (схеме формализации моделируемой системы).*

Первые два признака позволяют подразделить имитационные модели на совершенно понятные (очевидные) классы, поэтому их рассмотрение не займет много места.

По *типу* используемой ЭВМ различают *аналоговые, цифровые и гибридные имитационные модели*. В дальнейшем будем рассматривать *только цифровые модели*.

По *способу взаимодействия* с пользователем имитационные модели могут быть *автоматическими* (не требующими вмешательства исследователя после определения режима моделирования и задания исходных данных) и *интерактивными* (предусматривающими диалог с пользователем в том или ином режиме в соответствии со сценарием моделирования). Отметим, что моделирование сложных систем, относящихся, как уже отмечалось, к классу *эргатических систем*, как правило, требует применения *диалоговых* моделей.

Различают *два механизма системного времени*:

- задание времени с помощью *постоянных временных интервалов* (шагов);
- задание времени с помощью *переменных временных интервалов* (моделирование по особым состояниям).

При реализации первого механизма системное время сдвигается на один и тот же интервал (шаг моделирования) независимо от того, какие события должны наступать в системе. При этом наступление всех событий, имевших место на очередном шаге, относят к его окончанию. Так, для этого механизма считают, что событие A_1 наступило в момент окончания первого шага; событие A_2 — в момент окончания второго шага; события A_3, A_4, A_5 — в момент окончания четвертого шага (эти моменты показаны стрелками) и т. д. (рис. 7.7, а).

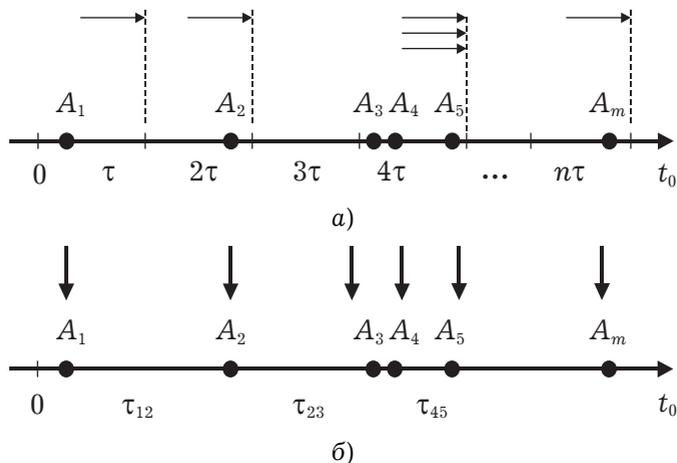


Рис. 7.7

При моделировании *по особым состояниям* системное время каждый раз изменяется на величину, соответствующую интервалу времени до планируемого момента наступления следующего события, т. е. события обрабатываются поочередно — каждое “в свое время”. Если в реальной системе какие-либо события наступают одновременно, это фиксируется в модели. Для реализации этого механизма требуется специальная процедура, в которой отслеживается время наступления каждого события и из них выделяется ближайшее по времени. Такую процедуру называют *календарем событий* (см. п. 7.2.3). На рис. 7.7, б стрелками обозначены моменты изменения системного времени.

Существует не столь распространенная разновидность механизма моделирования по особым состояниям, предусматривающая возможность изменения порядка обработки событий, так называемый *механизм моделирования с реверсированием (обращением) шага* по времени. Согласно этому механизму все события в системе разбиваются на два класса: *фазовые* и *простые*. К первым относят события, порядок моделирования которых нельзя изменить во избежание нарушения причинно-

следственных связей в моделируемой системе. Остальные события относят к простым. Таким образом, сначала моделируют очередное фазовое событие, а затем — все простые события до этого фазового, причем в произвольном порядке.

На рис 7.8 приведены перечисленные способы управления системным временем.

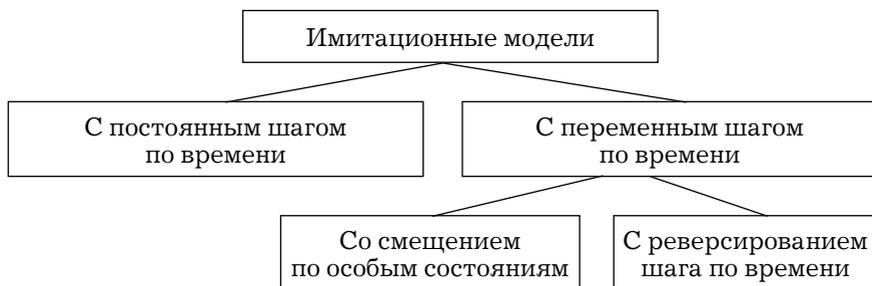


Рис. 7.8

Очевидно, что механизм системного времени с постоянным шагом легко реализуем: достаточно менять временную координату на фиксированный шаг и проверять, какие события уже наступили.

Метод фиксированного шага *целесообразно* применять в следующих случаях:

- события в системе появляются *регулярно*;
- число событий *велико*;
- все события являются для исследователя *существенными* (или заранее неизвестно, какие из них существенны).

Как уже отмечалось, механизм с переменным шагом по времени требует наличия специального программного средства, способного определять интервал временного сдвига до очередного особого состояния, что осложняет его реализацию.

Вопрос о том, каким механизмом системного времени воспользоваться, решается путем анализа достоинств и недостатков каждого применительно к конкретной модели и требует от разработчика высокой квалификации. В некоторых моделях

используют комбинированные механизмы системного времени в целях исключения недостатков.

Важнейшим классификационным признаком имитационных моделей является *схема формализации моделируемой системы*.

Наибольшее распространение получили пять способов:

- *просмотр активностей;*
- *составление расписания событий;*
- *управление обслуживанием транзактов;*
- *управление агрегатами;*
- *синхронизация процессов.*

Характеристика этих способов требует введения ряда понятий.

Основными составными частями модели ЭИС являются *объекты*, которые представляют компоненты реальной системы. Для задания свойств объектов используются *атрибуты (параметры)*. Совокупность объектов с *одним и тем же набором атрибутов* называют *классом объектов*. Все объекты подразделяют на *активные* (представляющие в модели те объекты реальной системы, которые способны функционировать самостоятельно и выполнять некоторые действия над другими объектами) и *пассивные* (представляющие реальные объекты, самостоятельно в рамках данной модели не функционирующие).

Работа (активность) представляется в модели набором операторов, выполняемых в течение некоторого времени и приводящих к изменению состояний объектов системы. В рамках конкретной модели любая работа рассматривается как *единый дискретный шаг* (возможно, состоящий из других работ). Каждая работа характеризуется временем выполнения и потребляемыми ресурсами.

Событие представляет собой *мгновенное изменение состояния некоторого объекта системы* (т. е. изменение значений его атрибутов). Окончание любой активности в системе является событием, так как приводит к изменению состояния объекта (объектов), а также может служить инициатором другой работы в системе.

Под процессом понимают логически связанный набор активностей, относящихся к одному объекту. Выполнение таких активностей называют фазой процесса. Различие между понятиями “активность” и “процесс” полностью определяется степенью детализации модели. Например, смена позиций мобильным объектом в одних моделях может рассматриваться как сложный процесс, а в других — как работа по изменению за некоторое время номера позиции. Процессы, включающие одни и те же типы работ и событий, относят к одному классу. Таким образом, моделируемую систему можно представить соответствующим числом классов процессов. Между двумя последовательными фазами (работами) некоторого процесса может иметь место любое число фаз других процессов, а их чередование в модели, собственно, и выражает суть квазипараллелизма.

В ряде случаев ФД компонент (объектов) реальной системы одинаковы, а общее их число ограничено. Каждое ФД можно описать простейшими работами, которые приводят лишь к изменению значений временных координат компонент системы. Взаимодействие такого рода активностей аналогично функционированию системы массового обслуживания. Однотипные активности объединяются и называются приборами массового обслуживания. Инициаторами появления событий в такой модели становятся заявки (транзакты) на обслуживание этими приборами.

В некоторых реальных системах ФД отдельных компонент тесно взаимодействуют друг с другом. Компоненты обмениваются между собой сигналами, причем выходной сигнал одной компоненты может поступать на вход другой, а сами ФД можно в явном виде описать математическими зависимостями. Если появление выходного сигнала таким образом определяется соответствующим набором “входов”, можно реализовать так называемый модульный принцип построения модели. Каждый из модулей строится по стандартной (унифицированной, типовой) структуре и называется агрегатом. С помощью агрегатов (на базе одной из типовых математичес-

ких схем описания объектов) можно решать весьма широкий круг задач.

Вернемся к характеристике *способов организации квазипараллелизма*.

Способ просмотра активностей применяется при следующих условиях:

- все ФД компонент реальной системы различны, причем для выполнения каждого из них требуется выполнение некоторых (своих) условий;
- условия выполнимости известны исследователю заранее и могут быть заданы алгоритмически;
- в результате ФД в системе наступают различные события;
- связи между ФД отсутствуют и они осуществляются независимо друг от друга.

В этом случае имитационная модель состоит из двух частей:

- множества активностей (работ);
- набора процедур проверки выполнимости условий инициализации активностей, т. е. возможности передачи управления на реализацию алгоритма этой активности.

Проверка *выполнимости условия инициализации* работы основана либо на анализе значений параметров и/или переменных модели, либо вычислении моментов времени, когда должно осуществляться данное ФД.

После выполнения каждой активности производится модификация системного времени для данного компонента и управление передается в специальный управляющий модуль, что и составляет суть имитации для этого способа организации квазипараллелизма.

Составление расписания событий применяется в тех случаях, когда реальные процессы характеризуются рядом достаточно строгих ограничений:

- различные компоненты выполняют *одни и те же* ФД;
- *начало выполнения* этих ФД определяются *одними и теми же условиями*, причем они известны исследователю и заданы алгоритмически;

- в результате ФД происходят *одинаковые события независимо друг от друга*;
- связи между ФД *отсутствуют*, а каждое ФД выполняется *независимо*.

В таких условиях имитационная модель по сути состоит из *двух процедур*:

- *проверки выполнимости событий*;
- *обслуживания (обработки) событий*.

Выполнение этих процедур *синхронизируется в модельном времени* так называемым *списковым механизмом планирования*. Процедура проверки выполнимости событий схожа с ранее рассмотренной для просмотра активностей (напомним, что окончание любой работы является событием и может инициализировать другую активность) с учетом того, что при выполнении условия происходит *не инициализация работы*, а *обслуживание (розыгрыш) события с последующим изменением системного времени* для данного компонента. Корректировка системного времени осуществляется календарем событий, о котором более подробно будет сказано ниже.

Условия применимости *транзактного способа организации квазипараллелизма* были приведены при определении понятия “транзакт”. Связь между приборами массового обслуживания устанавливается с помощью *системы очередей, выбранных способов генерации, обслуживания и извлечения транзактов*. Так организуется *появление транзактов, управление их движением, нахождение в очереди, задержки в обслуживании, уход транзакта из системы и т. п.* Событием в такой имитационной модели является *момент инициализации любого транзакта*. Типовыми структурными элементами модели являются *источники транзактов; их поглотители; блоки, имитирующие обслуживание заявок; управляющий модуль*. Имитация функционирования реальной системы производится путем *выявления очередной (ближайшей по времени) заявки, ее обслуживания, обработки итогов обслуживания (появления нового транзакта; поглощения заявки; изменения возможного времени поступления следующего транзакта и т. п.), изменения*

системного времени до момента наступления следующего события.

В случае построения имитационной модели с агрегатным способом организации квазипараллелизма особое внимание следует уделять оператору перехода системы из одного состояния в другое. Имитация производится за счет передачи управления от агрегата к агрегату при выполнении определенных условий формирования различных сигналов и их доставки адресату, отработки внешних сигналов, изменения состояния агрегата и т. п. При этом в управляющем модуле осуществляется временная синхронизация состояний всех агрегатов. Отметим, что выделение такого способа реализации квазипараллелизма является достаточно условным, так как квазипараллельная работа агрегатов системы может быть организована другими способами — активностями, планированием событий, взаимодействием транзактов, процессами. Иными словами, агрегатный способ, прежде всего, ориентирован на использование типовых математических схем (типовых агрегатов) для описания компонент системы и организации их взаимодействия одним из перечисленных способов.

Процессный способ организации квазипараллелизма применяется в следующих случаях [59]:

- все ФД компонент реальной системы различны;
- условия инициализации ФД также различны;
- в любой момент времени в данной компоненте может выполняться только одно ФД;
- последовательность ФД в каждом компоненте определена.

Принято считать, что процессный подход объединяет лучшие черты других способов: краткость описания активностей и эффективность событийного представления имитации. Процессным способом можно организовать имитацию ЭИС любой сложности, но особенно он эффективен в тех случаях, когда требуется высокий уровень детализации выполнения ФД, а сама имитационная модель используется для поиска “узких” мест в работе системы. При таком подходе особо важно соблю-

дение сходства структуры модели и объекта исследования. Имитационная модель представляет собой набор описаний процессов, каждое из которых описывает один класс процессов, и информационных и управляющих связей между компонентами модели. Каждой компоненте объекта моделирования соответствует свой процесс. Переход от выполнения одной активности к другой активности того же процесса считают изменением его состояния и называют активизацией процесса. Проверка выполнимости условий активизации процесса и появление событий осуществляется самим процессом. Процессный способ широко применяется в задачах моделирования проектируемых систем. Он позволяет реализовать многоуровневый модульный подход к моделированию, предусматривающий внесение в модель частичных изменений по результатам исследований, причем значение этого обстоятельства возрастает по мере роста размеров модели.

На рис. 7.9 представлена классификация способов организации квазипараллелизма.

Отметим, что в настоящее время для реализации всех перечисленных схем формализации моделируемой системы созданы специализированные программные средства, ориентированные на данный способ организации квазипараллелизма, что, с одной стороны, облегчает программную реализацию модели, но, с другой — повышает ответственность исследователя за правильность выбора соответствующей схемы.

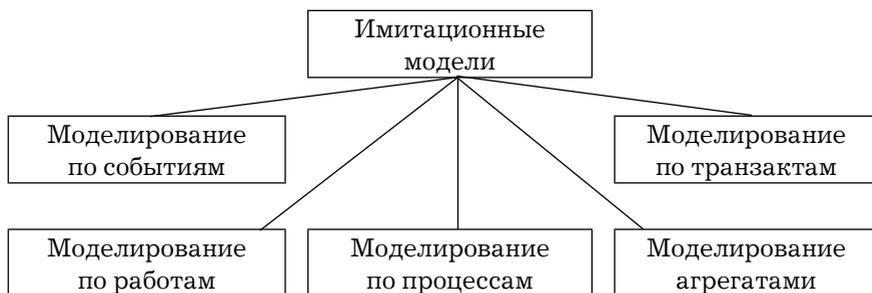


Рис. 7.9

Примеры использования метода имитационного моделирования для исследования экономических систем различного уровня (масштаба) и степени детализации рассматриваемых факторов заинтересованный читатель может найти в [12, 25, 26, 38, 45].

7.3. Технология моделирования случайных факторов

7.3.1. Генерация псевдослучайных чисел

Как уже отмечалось ранее, *имитационное моделирование ЭС*, как правило, предполагает *необходимость учета различных случайных факторов* — событий, величин, векторов (систем случайных величин), процессов.

В основе всех методов и приемов моделирования названных случайных факторов лежит *использование случайных чисел, равномерно распределенных на интервале [0; 1]*.

До появления ЭВМ в качестве генераторов случайных чисел применяли *механические устройства* — колесо рулетки, специальные игральные кости и устройства, которые перемещали фишки с номерами, вытаскиваемые вручную по одной.

По мере роста объемов применения случайных чисел для ускорения их моделирования стали обращаться к помощи *электронных устройств*. Самым известным из таких устройств был *электронный импульсный генератор, управляемый источником шума*, разработанный широко известной фирмой RAND Corporation. Фирмой в 1955 г. были выпущены книга, содержащая *миллион случайных чисел*, сформированных этим генератором, а также *случайные числа в записи на магнитной ленте*. Использовались и другие подобные генераторы — например, основанные на преобразовании естественного случайного шума при *радиоактивном распаде*. Все эти генераторы обладают *двумя недостатками*:

- во-первых, *невозможно повторно получить одну и ту же последовательность* случайных чисел, что бывает необходимо при экспериментах с имитационной моделью;

- во-вторых, *технически сложно реализовать физические генераторы*, способные длительное время выдавать случайные числа “требуемого качества”.

В принципе, можно заранее ввести полученные таким образом случайные числа в память машины и обращаться к ним по мере необходимости, что сопряжено с понятными негативными обстоятельствами — *большим* (причем неоправданным) *расходом ресурсов ЭВМ и затратой времени на обмен данными* между долгосрочной и оперативной памятью (особенно существенно для “больших” имитационных моделей).

В силу этого наибольшее распространение получили другие генераторы, позволяющие получать так называемых *псевдослучайные числа* (ПСЧ) с помощью *детерминированных рекуррентных формул*. Псевдослучайными эти числа называют потому, что фактически они, даже пройдя все тесты на случайность и равномерность распределения, остаются полностью детерминированными. Это значит, что если каждый цикл работы генератора начинается с одними и теми же исходными данными, то на выходе получаем одинаковые последовательности чисел. Это свойство генератора обычно называют *воспроизводимостью последовательности ПСЧ*.

Программные генераторы ПСЧ должны удовлетворять *следующим требованиям*:

- ПСЧ должны быть *равномерно распределены* на интервале $[0; 1]$ и *независимы*, т. е. случайные последовательности должны быть *некоррелированы*;

- *цикл генератора* должен иметь *возможно большую длину*;

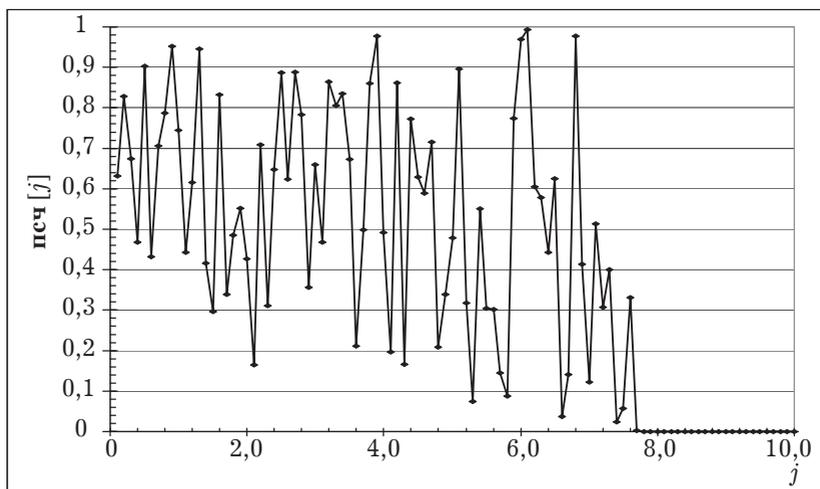
- последовательность ПСЧ должна быть *воспроизводима*;

- генератор должен быть *быстродействующим*;

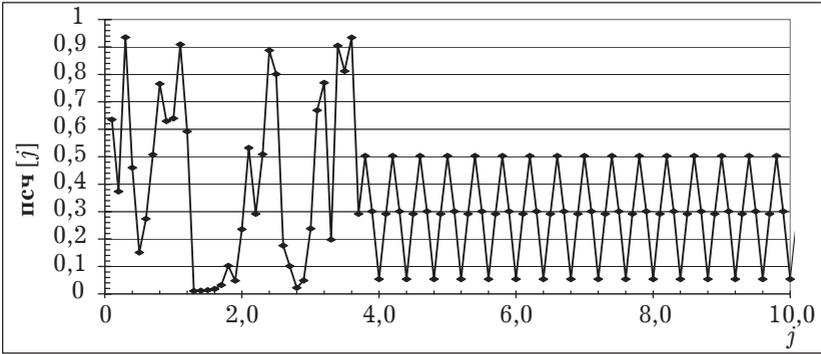
- генератор должен занимать *малый объем памяти*.

Первой расчетной процедурой генерации ПСЧ, получившей достаточно широкое распространение, можно считать *метод средних квадратов*, предложенный Д. фон Нейманом и Ф. Метрополисом в 1946 г. Сущность метода заключается в последовательном нахождении квадрата некоторого

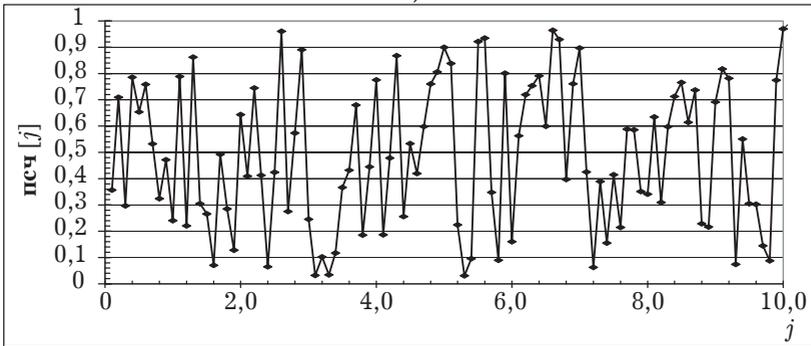
m -значного числа; выделении из него m средних цифр, образующих новое число, которое и принимается за очередное в последовательности ПСЧ; возведении этого числа в квадрат; выделении из квадрата m средних цифр и т. д. до получения последовательности требуемой длины. Как следует из описания процедуры метода, он весьма прост в вычислительном отношении и, следовательно, легко реализуем программно. Однако ему присущ очень серьезный недостаток — обусловленность статистических свойств генерируемой последовательности выбором ее корня (начального значения), причем эта обусловленность не является “регулярной”, т. е. трудно определить заранее, можно ли использовать полученные данным методом ПСЧ при проведении исследований. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 7.10, на котором представлены результаты генерации последовательности из ста ПСЧ при следующих исходных данных: число знаков $m = 4$; корни последовательности а) $X_0 = 2152$; б) $X_0 = 2153$; в) $X_0 = 3789$; г) $X_0 = 3500$.



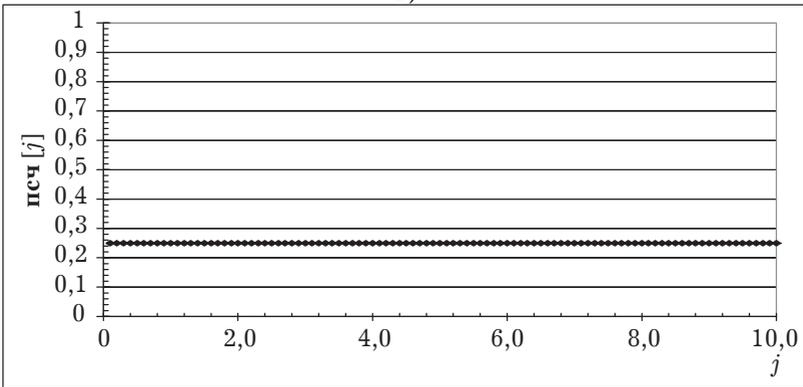
а)



б)



в)



г)

Рис. 7.10. Последовательности ПСЧ:

а) $X_0 = 2152$; б) $X_0 = 2153$; в) $X_0 = 3789$; г) $X_0 = 3500$

Из анализа рис. 7.10 видно, что при $X_0 = 2152$ уже с 78-го члена последовательности все ПСЧ принимают нулевые значения; при $X_0 = 2153$ начиная с 36-го значения, последовательность перестает быть случайной; при $X_0 = 3789$ первые 100 членов последовательности можно использовать в качестве ПСЧ (дальнейшее поведение последовательности ПСЧ требует дополнительных исследований); при $X_0 = 3500$ (2500; 4500 и т. д.) нулевые значения принимают все ПСЧ. Иными словами, *метод срединных квадратов не позволяет по начальному значению оценить качество последовательности ПСЧ, в частности, ее период.*

Мультипликативный метод

Основная формула мультипликативного генератора для расчета значения очередного ПСЧ по значению предыдущего имеет вид:

$$X_{i+1} = a \cdot X_i \pmod{m},$$

где a , m — неотрицательные целые числа (их называют *множитель* и *модуль*).

Как следует из формулы, для генерации последовательности ПСЧ необходимо задать начальное значение (корень) последовательности, множитель и модуль, причем *период (длина) последовательности P зависит от разрядности ЭВМ и выбранного модуля, а статистические свойства — от выбранного начального значения и множителя.* Таким образом, следует выбирать перечисленные величины так, чтобы по возможности максимизировать длину последовательности и минимизировать корреляцию между генерируемыми ПСЧ. В специальной литературе приводятся *рекомендации* по выбору значений параметров метода, использование которых обеспечивает (гарантирует) получение определенного количества ПСЧ с требуемыми статистическими свойствами (отметим, что данное замечание можно отнести ко всем конгруэнтным методам). Так, если для машины с двоичной системой счисления задать

$$m = 2^b, a = 8 \cdot T \pm 3 \cdot V,$$

где b — число двоичных цифр (бит) в машинном слове;

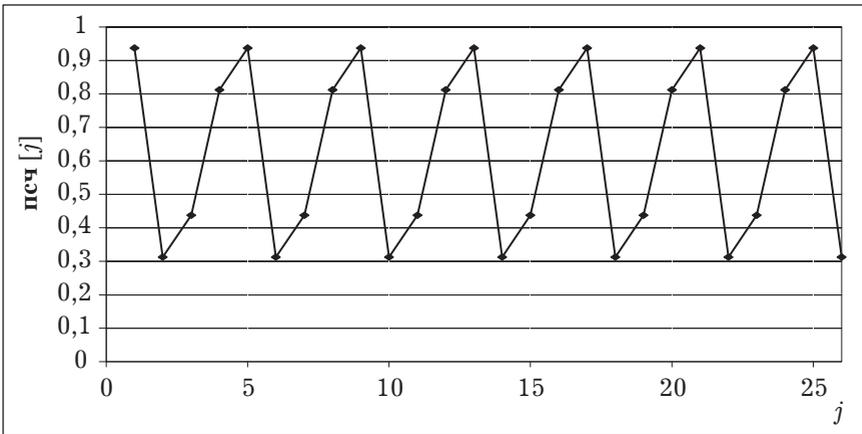
T — любое целое положительное число;

V — любое положительное нечетное число, получим последовательность ПСЧ с периодом, равным

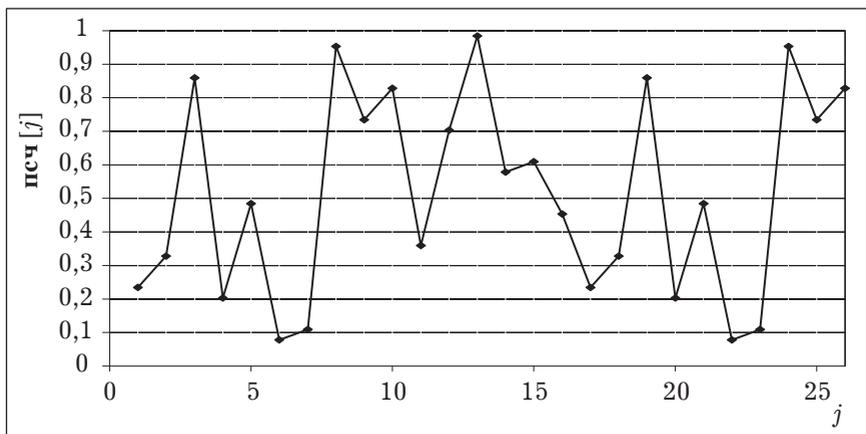
$$P = 2^{b-2} = \frac{m}{4}.$$

Заметим, что в принципе возможно за счет другого выбора модуля m увеличить длину последовательности до $P = m - 1$, частично пожертвовав скоростью вычислений [59]. Кроме того, важно, что получаемые таким образом ПСЧ оказываются нормированными, т. е. распределенными от 0 до 1.

На рис. 7.11 приведены последовательности ПСЧ, полученные по мультипликативному методу со следующими параметрами: $X_0 = 15$; $T = 3$; $V = 1$; а) $b = 4$; б) $b = 6$ (столь малые значения b объясняются стремлением проиллюстрировать работоспособность рекомендованных формул).



а)



б)

Рис. 7.11

Очевидно, что в первом случае длина последовательности до повторений равна 4, а во втором — 16 ПСЧ. Легко показать, что от выбора корня последовательности ее длина не зависит (при равенстве остальных параметров).

Аддитивный метод

Основная формула для генерации ПСЧ по *аддитивному методу* имеет вид:

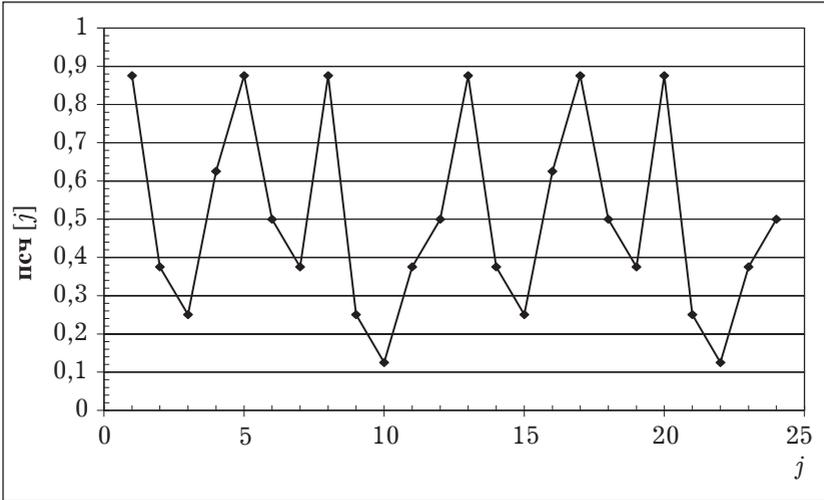
$$X_{i+1} = (X_i + X_{i-1}) \pmod{m},$$

где m — целое число.

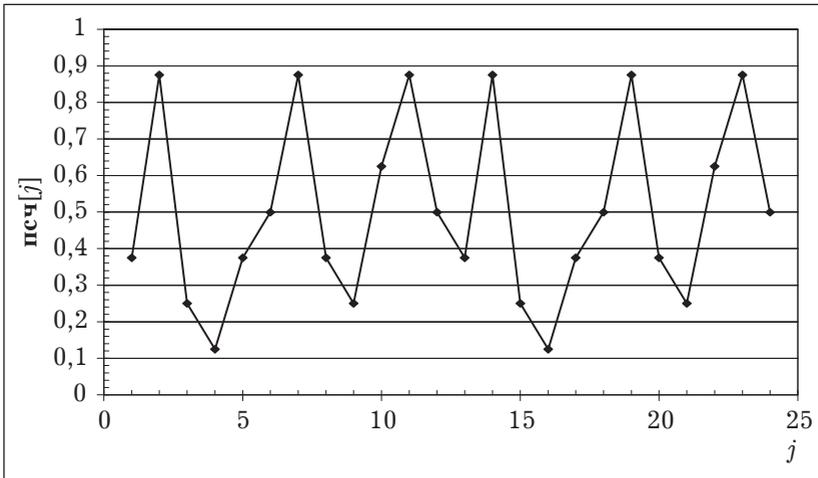
Очевидно, что для инициализации генератора, построенного по этому методу, необходимо помимо модуля m задать два исходных члена последовательности. При $X_0 = 0$; $X_1 = 1$ последовательность превращается в ряд Фибоначчи. Рекомендации по выбору модуля совпадают с предыдущим случаем; длину последовательности можно оценить по приближенной формуле

$$P = 2^{b+1} - 2(b - 1).$$

На рис. 7.12 приведены две последовательности ПСЧ, полученные при исходных данных: $b = 3$; а) $X_0 = 1; X_1 = 3$; б) $X_0 = 5; X_1 = 7$. В обоих случаях период последовательности ПСЧ равен 12.



а)



б)

Рис. 7.12

Смешанный метод

Данный метод несколько расширяет возможности мультипликативного генератора за счет введения так называемого коэффициента сдвига c . Формула метода имеет вид:

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \pmod{m}.$$

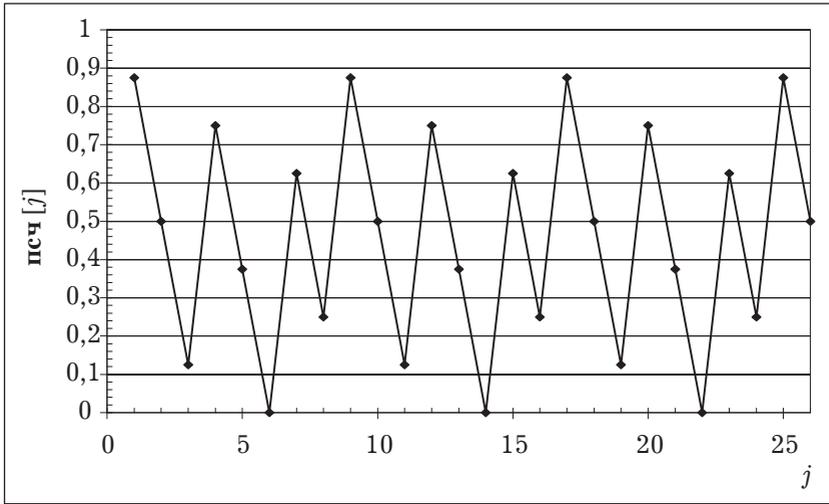
За счет выбора параметров генератора можно обеспечить максимальный период последовательности ПСЧ $P = 2^b$. На рис. 7.13 показаны две последовательности ПСЧ, полученные при следующих исходных данных: $X_0 = 7$; $c = 13$; $a = 9$; а) $b = 3$; б) $b = 4$. В первом случае длина последовательности равна 8, а во втором — 16 ПСЧ.

Разработано множество модификаций перечисленных конгруэнтных методов, обладающих определенными преимуществами при решении конкретных практических задач, а также рекомендаций по выбору того или иного метода. Для весьма широкого круга задач вполне удовлетворительными оказываются типовые генераторы ПСЧ, разработанные, как правило, на основе смешанного метода и входящие в состав стандартного общего программного обеспечения большинства ЭВМ. Специальным образом генерацию ПСЧ организуют либо для особо масштабных имитационных исследований, либо при повышенных требованиях к точности имитации реального процесса (объекта).

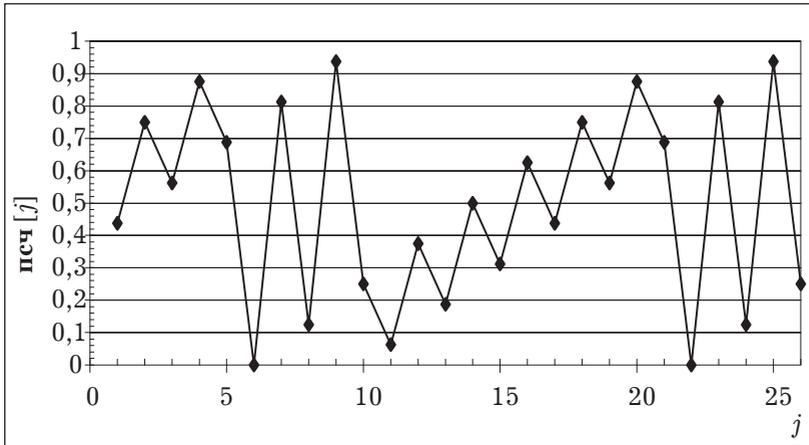
Подводя итог вышеизложенному, подчеркнем, что разработка конгруэнтных методов нередко осуществляется на основе эвристического подхода, основанного на опыте и интуиции исследователя. После модификации известного метода тщательно проверяют, обладают ли генерируемые в соответствии с новой формулой последовательности ПСЧ требуемыми статистическими свойствами, и в случае положительного ответа формулируют рекомендации по условиям ее применения.

7.3.2. Моделирование случайных событий

Как уже отмечалось, в теории вероятностей реализацию некоторого комплекса условий называют испытанием. Ре-



а)



б)

Рис. 7.13

зультат испытания, регистрируемый как факт, называют событием.

Случайным называют событие, которое в результате испытания может наступить, а может и не наступить (в отличие от достоверного события, которое при реализации данного комплекса наступает всегда, и невозможного события, которое при реализации данного комплекса условий не наступает никогда). Исчерпывающей характеристикой случайного события является вероятность его наступления. Примерами случайных событий являются отказы в экономических системах; объемы выпускаемой продукции каждым предприятием в каждый день; котировки валют в обменных пунктах; состояние рынка ценных бумаг и биржевого дела и т. п.

Моделирование случайного события заключается в определении (“розыгрыше”) факта его наступления.

Для моделирования случайного события A , наступающего в опыте с вероятностью P_A , достаточно одного случайного (псевдослучайного) числа R , равномерно распределенного на интервале $[0; 1]$. В случае попадания ПСЧ R в интервал $[0; P_A]$ событие A считают наступившим в данном опыте; в противном случае — не наступившим в данном опыте. На рис. 7.14 показаны оба исхода: при ПСЧ R_1 событие следует считать наступившим; при ПСЧ R_2 — событие в данном испытании не наступило. Очевидно, что чем больше вероятность наступления моделируемого события, тем чаще ПСЧ, равномерно распределенные на интервале $[0; 1]$, будут попадать в интервал $[0; P_A]$, что и означает факт наступления события в испытании.

Для моделирования одного из полной группы N случайных несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_N с вероятностями наступления $\{P_{A_1}, P_{A_2}, \dots, P_{A_N}\}$, соответственно, также достаточно одного ПСЧ R .

Напомним, что для таких случайных событий можно записать:

$$\sum_{i=1}^N P_{A_i} = 1.$$

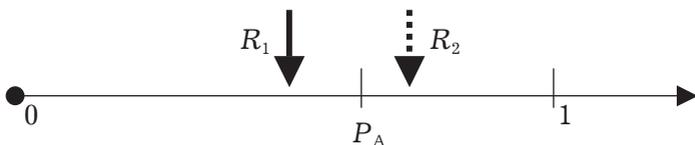


Рис. 7.14

Факт наступления одного из событий группы определяют исходя из условия принадлежности ПСЧ R тому или иному интервалу, на который разбивают интервал $[0; 1]$. Так, на рис. 7.15 для ПСЧ R_1 считают, что наступило событие A_2 . Если ПСЧ оказалось равным R_2 , считают, что наступило событие $A_{(N-1)}$.

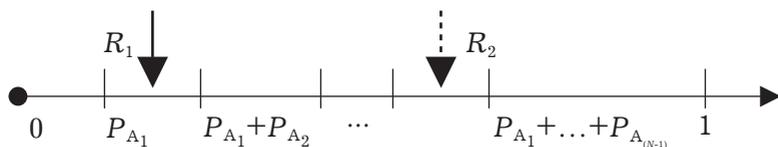


Рис. 7.15

Если группа событий не является полной, вводят *дополнительное (фиктивное) событие* $A_{(N+1)}$, вероятность которого определяют по формуле

$$P_{A_{N+1}} = 1 - \sum_{i=1}^N P_{A_i}.$$

Далее действуют по уже изложенному алгоритму для полной группы событий с одним изменением: если ПСЧ попадает в последний, $(N + 1)$ -й, интервал, считают, что *ни одно из N событий, составляющих неполную группу, не наступило*.

В практике имитационных исследований часто возникает необходимость моделирования *зависимых событий*, для которых вероятность наступления одного события оказывается зависящей от того, наступило или не наступило другое событие. В качестве одного из примеров зависимых событий приведем доставку груза потребителю в двух случаях: когда маршрут

движения известен и был поставщиком дополнительно уточнен, и когда уточнения движения груза не проводилось. Понятно, что вероятность доставки груза от поставщика к потребителю для приведенных случаев будет различной.

Для того чтобы провести моделирование двух зависимых случайных событий A и B , необходимо задать следующие *полные* и *условные* вероятности:

$$P(A); P(B); P(B/A); P(B/\bar{A}).$$

Заметим, что, если вероятность наступления события B при условии, что событие A не наступило, не задана, ее можно определить по формуле:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A) \cdot P(B/A)}{1 - P(A)}.$$

Существуют *два алгоритма* моделирования зависимых событий. Один из них условно можно назвать “*последовательным* моделированием”; другой — “*моделированием после предварительных расчетов*”.

Последовательное моделирование

Алгоритм последовательного моделирования представлен на рис. 7.16.

Несомненными достоинствами данного алгоритма являются его *простота* и *естественность*, поскольку зависимые события “разыгрываются” последовательно — так, как они наступают (или не наступают) в реальной жизни, что и является *характерной особенностью большинства имитационных моделей*. Вместе с тем алгоритм предусматривает тоекратное обращение к датчику случайных чисел (ДСЧ), что увеличивает время моделирования.

Моделирование после предварительных расчетов

Как легко заметить, приведенные на рис. 7.16 четыре исхода моделирования зависимых событий образуют *полную группу несовместных событий*. На этом основан алгоритм мо-

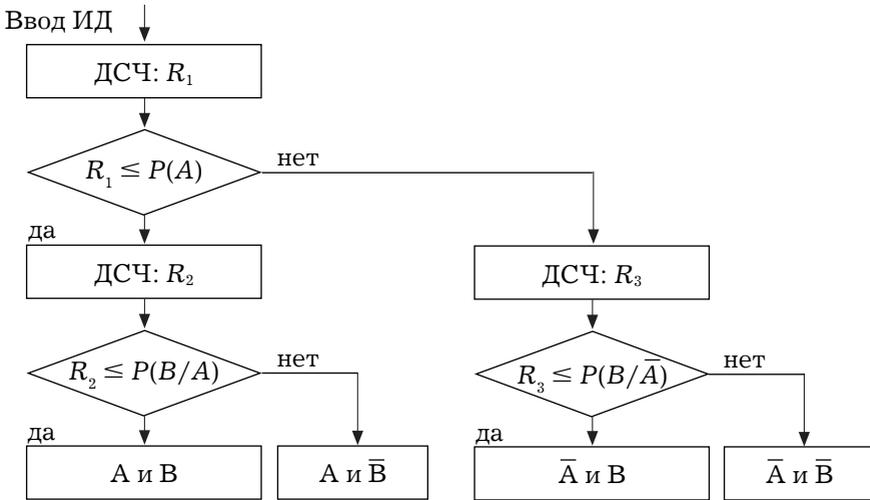


Рис. 7.16

делирования, предусматривающий *предварительный расчет* вероятностей каждого из исходов и “розыгрыш” факта наступления одного из них, как для любой группы несовместных событий (см. выше). Рис. 7.17 иллюстрирует разбиение интервала $[0; 1]$ на четыре отрезка, длины которых соответствуют вероятностям исходов наступления событий.

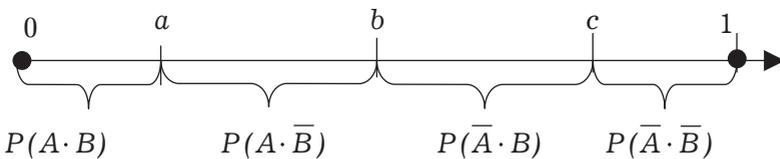


Рис. 7.17

На рис. 7.18 представлен алгоритм моделирования зависимых случайных событий. Данный алгоритм предусматривает *одно обращение* к датчику случайных чисел, что обеспечивает выигрыш во времени имитации по сравнению с “последовательным моделированием”, однако перед началом работы

алгоритма исследователь должен рассчитать и ввести вероятности реализации всех возможных исходов (естественно, эту несложную процедуру можно также оформить программно, но это несколько удлинит алгоритм).

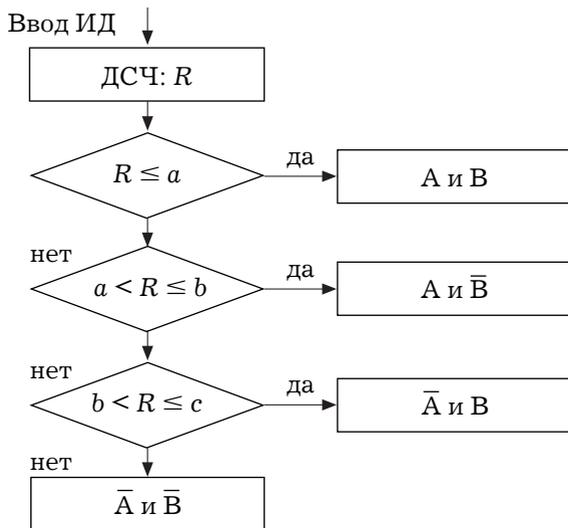


Рис. 7.18.

7.3.3. Моделирование случайных величин

В практике создания и использования имитационных моделей весьма часто приходится сталкиваться с *необходимостью моделирования важнейшего класса факторов — случайных величин (СВ) различных типов.*

Случайной называют *переменную величину*, которая в результате *испытания* принимает то или иное значение, причем заранее *неизвестно, какое именно.* При этом под *испытанием* понимают *реализацию некоторого (вполне определенного) комплекса условий.* В зависимости от множества возможных значений различают три типа СВ:

- *непрерывные;*

- дискретные;
- смешанного типа.

Исчерпывающей характеристикой любой СВ является ее закон распределения, который может быть задан в различных формах: функции распределения — для всех типов СВ; плотности вероятности (распределения) — для непрерывных СВ; таблицы или ряда распределения — для дискретных СВ.

В данном пункте изложены основные методы моделирования СВ первых двух типов как наиболее часто встречающихся на практике.

Моделирование непрерывных случайных величин

Моделирование СВ заключается в определении (“розыгрыше”) в нужный по ходу имитации момент времени конкретного значения СВ в соответствии с требуемым (заданным) законом распределения.

Наибольшее распространение получили три метода:

- метод обратной функции;
- метод исключения (Неймана);
- метод композиций.

Метод обратной функции

Метод позволяет при моделировании СВ учесть все ее статистические свойства и основан на следующей теореме: если непрерывная СВ y имеет плотность вероятности $f(y)$, то СВ x , определяемая преобразованием имеет равномерный закон распределения на интервале $[0; 1]$

$$x = \int_{-\infty}^y f(y) dy = F(y).$$

Данную теорему поясняет рис. 7.19, на котором изображена функция распределения СВ y .

Теорему доказывает следующая цепочка рассуждений, основанная на определении понятия “функция распределения” и условия теоремы:

$$F(x) = P(X < x) = P(Y < y) = F(y) = \int_{-\infty}^y f(y) dy = x.$$

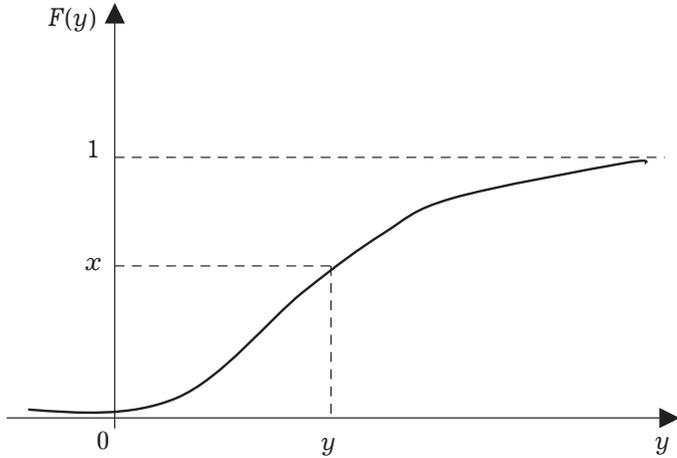


Рис. 7.19

Таким образом, получили равенство

$$F(x) = x,$$

а это и означает, что СВ x распределена равномерно в интервале $[0; 1]$.

Напомним, что в общем виде функция распределения равномерно распределенной на интервале $[a; b]$ СВ x имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Теперь можно попытаться найти *обратное преобразование* функции распределения $F^{-1}(x)$.

Если такое преобразование *существует* (условием этого является наличие первой производной у функции распределения), то алгоритм метода включает всего два шага:

– моделирование ПСЧ, равномерно распределенного на интервале $[0; 1]$;

– подстановка этого ПСЧ в обратную функцию и вычисление значения СВ y

$$x = F(y) \Rightarrow y = F^{(-1)}(x).$$

При необходимости эти два шага повторяются столько раз, сколько возможных значений СВ Y требуется получить.

Пример 7.1. Длина свободного пробега нейтрона в однородном веществе d ($d > 0$) имеет следующее распределение:

$$F(d) = 1 - e^{-\sigma_d d},$$

где σ_d — среднее квадратическое отклонение длины пробега.

Тогда формула для генерации возможного значения СВ d имеет вид:

$$d = -\frac{\ln(1-R)}{\sigma_d},$$

где R — ПСЧ, распределенное равномерно в интервале $[0; 1]$.

Простота метода обратной функции позволяет сформулировать такой вывод: *если обратное преобразование функции распределения СВ, возможные значения которой необходимо получить, существует, следует использовать именно этот метод.*

К сожалению, круг СВ с функциями распределения, допускающими обратное преобразование, не столь широк, что потребовало разработки иных методов.

Метод исключения (Неймана)

Метод Неймана позволяет из совокупности равномерно распределенных ПСЧ R_i по определенным правилам выбрать совокупность значений y_i с требуемой функцией распределения $f(y)$.

Алгоритм метода

1. Выполняется *усечение исходного распределения* таким образом, чтобы область возможных значений СВ Y совпадала с интервалом $[a, b]$.

В результате формируется плотность вероятности $f^*(y)$ такая, что

$$\int_a^b f^*(y) dy = 1.$$

Длина интервала $[a, b]$ определяется требуемой точностью моделирования значений СВ в рамках конкретного исследования.

2. Генерируется пара ПСЧ R_1 и R_2 , равномерно распределенных на интервале $[0; 1]$.

3. Вычисляется пара ПСЧ R_1^* и R_2^* по формулам

$$R_1^* = a + (b - a) \cdot R_1;$$

$$R_2^* = M \cdot R_2,$$

где $M = \max_{y \in [a; b]} f^*(y)$.

На координатной плоскости пара чисел $(R_1^*; R_2^*)$ определяет точку — например, точку Q_1 на рис. 7.20.

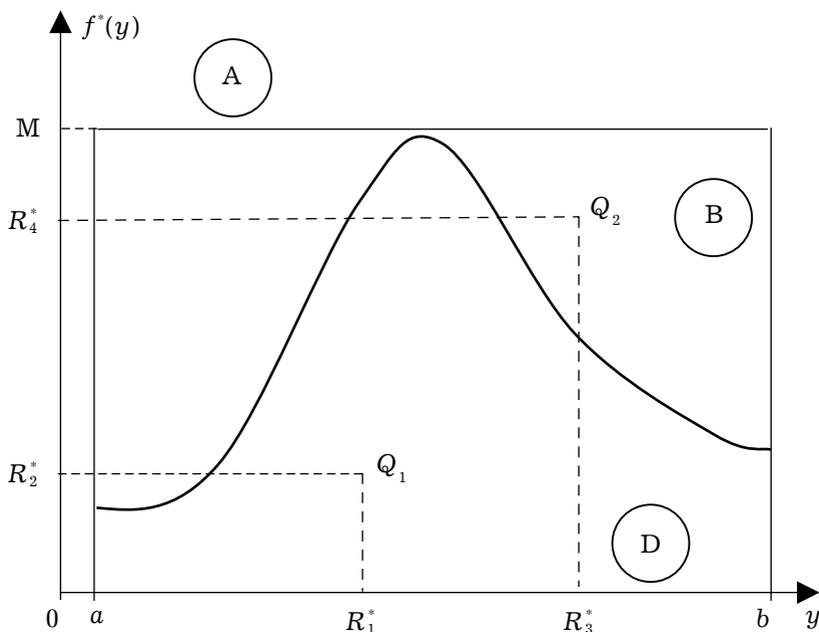


Рис. 7.20

A — прямоугольник, ограничивающий график плотности распределения моделируемой СВ; D — область прямоуголь-

ника A , находящаяся ниже графика $f^*(y)$; B — область прямоугольника A , находящаяся выше графика $f^*(y)$.

4. Если точка Q_1 принадлежит области D , считают, что получено первое требуемое значение СВ $y_1 = R_1^*$.

5. Генерируется следующая пара ПСЧ R_3 и R_4 , равномерно распределенных на интервале $[0; 1]$, после пересчета по п. 3 задающих на координатной плоскости вторую точку — Q_2 .

6. Если точка Q_2 принадлежит области B , переходят к моделированию следующей пары ПСЧ ($R_5; R_6$) и т. д. до получения необходимого количества ПСЧ.

Очевидно, что в ряде случаев (при попадании изображающих точек в область B) соответствующие ПСЧ с нечетными индексами не могут быть включены в требуемую выборку возможных значений моделируемой СВ, причем это будет происходить тем чаще, чем сильнее график $f^*(y)$ по форме будет “отличаться” от прямоугольника A . Оценить среднее относительное число q “пустых” обращений к генератору ПСЧ можно геометрическим методом, вычислив отношение площадей соответствующих областей (B и A):

$$S_A = M(b - a) = S_B + S_D = S_B + 1;$$

$$S_B = S_A - 1;$$

$$q = \frac{S_B}{S_A} = 1 - \frac{1}{S_A} = 1 - \frac{1}{M(b - a)}.$$

На рис. 7.21 показаны две функции плотности вероятности, вписанные в прямоугольники A и B , соответственно.

Первая функция соответствует β -распределению с параметрами $\eta = \Lambda = 2$. Вторая функция соответствует γ -распределению с параметрами $\Lambda = 0,5; \sigma = 1$.

Для первой функции $q \approx 0,33$; для второй — $q \approx 0,92$. Таким образом, для β -распределения метод Неймана почти в три раза эффективнее, чем для γ -распределения. В целом для многих законов распределения (особенно для островершинных и имеющих длинные “хвосты”) метод исключения приводит к боль-

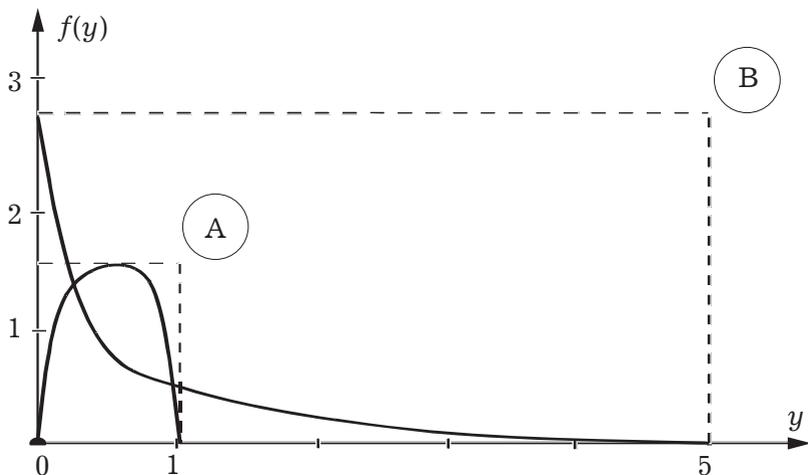


Рис. 7.21

шим затратам машинного времени на генерацию требуемого количества ПСЧ.

Главным достоинством метода Неймана является его универсальность — применимость для генерации СВ, имеющих любую вычислимую или заданную таблично плотность вероятности.

Метод композиции

Применение метода основано на теоремах теории вероятностей, доказывающих *представимость одной СВ композицией двух или более СВ, имеющих относительно простые, более легко реализуемые законы распределения*. Наиболее часто данным методом пользуются для генерации ПСЧ, имеющих нормальное распределение. Согласно *центральной предельной теореме* распределение СВ Y , задаваемой преобразованием

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^k R_i - \frac{k}{2} \right),$$

где R_i — равномерно распределенные на интервале $[0; 1]$ ПСЧ, при росте k неограниченно приближается к нормальному распределению со стандартными параметрами ($m_y = 0$; $\sigma_y = 1$).

Последнее обстоятельство легко подтверждается следующим образом. Введем СВ Z и найдем параметры ее распределения, используя соответствующие теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы СВ:

$$Z = \sum_{i=1}^k R_i;$$

$$M[Z] = m_z = M\left[\sum_{i=1}^k m_r\right] = \sum_{i=1}^k m_r = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} = \frac{k}{2};$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{\sum_{i=1}^k D_r} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{k}{12}}.$$

(Напомним, что при равномерном распределении в интервале $[0;1]$ СВ имеет параметры:

$$m_r = \frac{1}{2}; \quad D_r = \frac{1}{12}.$$

Очевидно, что

$$Y = \frac{Z - m_z}{\sigma_z},$$

как любая центрированно-нормированная СВ, имеет стандартные параметры.

Как правило, берут $k = 12$ и считают, что для подавляющего числа практических задач обеспечивается должная точность вычислений. Если же к точности имитации предъявляются особые требования, можно улучшить качество моделирования СВ за счет введения нелинейной поправки [59]:

$$y_{\text{мод}} = y(k) + \frac{1}{20 \cdot k} \cdot [y(k)^3 - 3 \cdot y(k)],$$

где $y(k)$ — возможное значение СВ Y , полученное в результате сложения, центрирования и нормирования k равномерно распределенных ПСЧ R_i .

Еще одним распространенным вариантом применения метода композиции является моделирование возможных значений СВ, обладающей χ^2 -распределением с n степенями свободы: для этого нужно сложить “квадраты” n независимых нормально распределенных СВ со стандартными параметрами.

Возможные значения СВ, подчиненной закону *распределения Симпсона* (широко применяемого, например, в радиоэлектронике), моделируют, используя основную формулу метода при $k = 2$. Существуют и другие приложения этого метода.

В целом можно сделать вывод о том, что *метод композиции применим и дает хорошие результаты* тогда, когда из теории вероятностей известно, *композиция каких легко моделируемых СВ позволяет получить СВ с требуемым законом распределения*.

Моделирование дискретных случайных величин

Дискретные СВ (ДСВ) достаточно часто используются при моделировании систем. *Основными методами* генерации возможных значений ДСВ являются:

- метод *последовательных сравнений*;
- метод *интерпретации*.

Метод последовательных сравнений

Алгоритм метода практически совпадает с ранее рассмотренным алгоритмом моделирования *полной группы несовместных случайных событий*, если считать номер события номером возможного значения ДСВ, а вероятность наступления события — вероятностью принятия ДСВ этого возможного значения. На рис. 7.22 показана схема определения номера возможного значения ДСВ, полученного на очередном шаге.

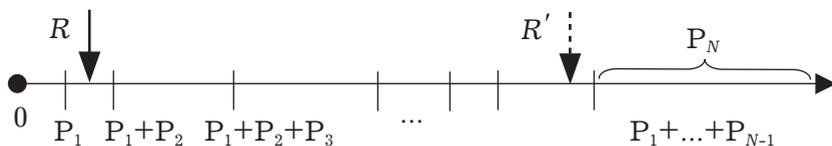


Рис. 7.22

Из анализа ситуации, показанной на рис. 7.22, для ПСЧ R , “попавшего” в интервал $[P_1; P_1 + P_2]$, следует сделать вывод, что ДСВ приняла свое *второе* возможное значение; а для ПСЧ R' — что ДСВ приняла свое $(N - 1)$ -е значение и т. д. Алгоритм последовательных сравнений можно улучшить (ускорить) за счет применения методов оптимизации перебора — дихотомии (метода половинного деления); перебора с предварительным ранжированием вероятностей возможных значений по убыванию и т. п.

Метод интерпретации

Метод основан на использовании *модельных аналогий* с *сущностью физических явлений*, описываемых моделируемыми законами распределения.

На практике метод чаще всего используют для моделирования *биномиального закона распределения*, описывающего число успехов в n *независимых* опытах с вероятностью *успеха* в *каждом* испытании p и вероятностью *неудачи* $q = 1 - p$.

Алгоритм метода для этого случая весьма прост:

- моделируют n равномерно распределенных на интервале $[0; 1]$ ПСЧ;
- подсчитывают число t тех из ПСЧ, которые меньше p ;
- это число t и считают возможным значением моделируемой ДСВ, подчиненной биномиальному закону распределения.

Помимо перечисленных существуют и другие методы моделирования ДСВ, основанные на специальных свойствах моделируемых распределений или на связи между распределениями.

7.3.4. Моделирование случайных векторов

Случайным вектором (системой случайных величин) называют *совокупность случайных величин, совместно характеризующих какое-либо случайное явление*:

где X_i — СВ с теми или иными законами распределения. Данный подпункт содержит материал по методам моделирова-

ния *непрерывных* случайных векторов (все компоненты которых представляют собой непрерывные СВ)

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Исчерпывающей характеристикой случайного вектора является совместная многомерная функция распределения его компонент $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или соответствующая ему совместная многомерная плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Проще всего моделировать случайный вектор с независимыми компонентами, для которого справедливо

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

т. е. *каждую* из компонент случайного вектора *можно моделировать независимо* от других в соответствии с ее “*собственной*” плотностью вероятности $f_i(x_i)$.

В случае, когда компоненты случайного вектора *статистически зависимы*, необходимо использовать специальные методы:

- метод *условных распределений*;
- метод *исключения (Неймана)*;
- метод *линейных преобразований*.

Метод условных распределений

Метод основан на *рекуррентном вычислении условных плотностей вероятностей* для каждой из компонент случайного вектора X с многомерной совместной плотностью вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для плотности распределения случайного вектора X можно записать:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2/x_1) \cdot f_3(x_3/x_2, x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n/x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1), \end{aligned}$$

где $f_1(x_1)$ — плотность распределения СВ X_1 ; $f_k(x_k/x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1)$ — плотность условного распределения СВ X_k при условии: $X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_{k-1} = x_{k-1}$.

Для получения указанных плотностей необходимо провести *интегрирование совместной плотности распределения случайного вектора в соответствующих пределах:*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1) = \int \dots \int_{S_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2, \dots, dx_n; \\ f_2(x_2 / x_1) = \int \dots \int_{S_2} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1)} dx_3 \dots dx_n; \\ \dots \\ f(x_n / x_{n-1}, \dots, x_1) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1) \cdot f(x_2 / x_1) \cdot \dots \cdot f(x_{n-1} / x_{n-2}, \dots, x_1)}, \end{array} \right.$$

$$S_i = \bigcup_{j=i+1}^n Q_j; \quad X_j \in Q_j; \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Порядок моделирования:

- моделировать значение x_1^* СВ X_1 по закону $f_1(x_1)$;
- моделировать значение x_2^* СВ X_2 по закону $f_2(x_2 / x_1^*)$;
- ...;
- моделировать значение x_n^* СВ X_n по закону $f_n(x_n / x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, \dots, x_1^*)$.

Тогда вектор $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и есть реализация искомого случайного вектора X .

Метод условных распределений (как и метод обратной функции для скалярной СВ) позволяет учесть *все статистические свойства случайного вектора*. Поэтому справедлив вывод: *если имеется возможность получить условные плотности распределения $f_k(x_k / x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1)$, следует пользоваться именно этим методом.*

Метод исключения (Неймана)

Метод является обобщением уже рассмотренного для СВ метода Неймана на случай n переменных. Предполагается, что все компоненты случайного вектора *распределены в конечных интервалах* $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если это не так, необходи-

мо произвести *усечение* плотности распределения для выполнения данного условия.

Алгоритм метода:

1. Генерируются $(n + 1)$ ПСЧ

$$R_1, R_2, \dots, R_n; R_f,$$

распределенных, соответственно, на интервалах

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]; [0, f_{\max}];$$

$$f_{\max} = \max \dots \max_{x_i \in [a_i, b_i]; i=1, 2, \dots, n} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2. Если выполняется условие:

$$R_f \leq f(R_1, R_2, \dots, R_n),$$

то вектор

$$(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

и есть искомая реализация случайного вектора.

3. Если данное условие не выполняется, переходят к первому пункту и т. д.

Рис. 7.23 содержит иллюстрацию данного алгоритма для двумерного случая.

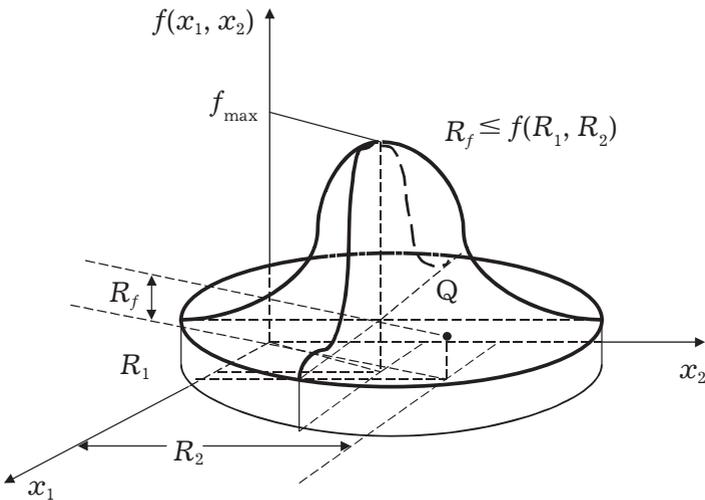


Рис. 7.23

Возврат к п. 1 алгоритма после “неудачного” моделирования n ПСЧ происходит тогда, когда $t \cdot Q$ окажется выше поверхности, представляющей двумерную плотность вероятности $f_1(x_1, x_2)$. Для случая, представленного на рисунке, в качестве (очередной) реализации двумерного случайного вектора следует взять пару ПСЧ (R_1, R_2) .

Среднюю относительную частоту “неудач” можно вычислить геометрическим способом, взяв отношение объемов соответствующих фигур.

Как уже отмечалось для одномерного случая, основным достоинством метода Неймана является его универсальность. Однако для плотностей вероятностей, поверхности которых имеют острые пики, достаточно часто будут встречаться “пустые” прогоны, когда очередные n ПСЧ бракуются. Этот недостаток тем существеннее, чем больше размерность моделируемого вектора (n) и длиннее требуемая выборка реализаций случайного вектора. На практике такие ситуации встречаются не слишком часто, поэтому метод исключений и имеет столь широкое распространение.

Метод линейных преобразований

Метод линейных преобразований является одним из наиболее распространенных так называемых корреляционных методов, применяемых в случаях, когда при моделировании непрерывного n -мерного случайного вектора достаточно обеспечить лишь требуемые значения элементов корреляционной матрицы этого вектора (это особенно важно для случая нормального распределения, для которого выполнение названного требования означает выполнение достаточного условия полного статистического соответствия теоретического и моделируемого распределений).

Идея метода заключается в линейном преобразовании случайного n -мерного вектора Y с независимыми (чаще всего — нормально распределенными) компонентами в случайный вектор X с требуемыми корреляционной матрицей и вектором математических ожиданий компонент.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом.

Дано: корреляционная матрица и математическое ожидание вектора X .

Требуется: найти такую матрицу B , которая позволяла бы в результате преобразования

$$Q = \|q_{ij}\| = \|M[(X_i - m_{x_i}) \cdot (X_j - m_{x_j})]\|;$$

$$M = (m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})^T$$

получить

$$X = B \cdot Y + M, \quad (7.1)$$

где Y — n -мерный вектор с независимыми нормально распределенными компонентами со стандартными параметрами;

X — вектор с требуемыми характеристиками.

Будем искать матрицу B в виде нижней треугольной матрицы, все элементы которой, расположенные выше главной диагонали, равны 0. Перейдем от матричной записи к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} b_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n1} b_{n2} b_{n3} \dots b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 - m_{x_1} = b_{11} \cdot Y_1; \\ X_2 - m_{x_2} = b_{21} \cdot Y_1 + b_{22} \cdot Y_2; \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n - m_{x_n} = b_{n1} \cdot Y_1 + b_{n2} \cdot Y_2 + \dots + b_{nn} \cdot Y_n. \end{cases} \quad (7.2)$$

Поскольку компоненты вектора Y независимы и имеют стандартные параметры, справедливо выражение:

$$M[Y_i \cdot Y_j] = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Почленно перемножив сами на себя и между собой соответственно левые и правые части уравнений системы (7.2) и взяв от результатов перемножения математическое ожидание, получим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} M[(X_1 - m_{x_1}) \cdot (X_1 - m_{x_1})] = M[b_{11} \cdot Y_1 \cdot b_{11} \cdot Y_1]; \\ M[(X_1 - m_{x_1}) \cdot (X_2 - m_{x_2})] = M[(b_{21} \cdot Y_1 + b_{22} \cdot Y_2) \cdot b_{11} \cdot Y_1]; \\ \dots \end{cases}$$

Как легко увидеть, в левых частях полученной системы уравнений — элементы заданной корреляционной матрицы Q , а в правых — элементы искомой матрицы B .

Последовательно решая эту систему, получаем формулы для расчета элементов b_{ij} :

$$b_{11} = \sqrt{q_{11}}; \quad b_{21} = q_{12} / \sqrt{q_{11}}; \quad b_{22} = \sqrt{q_{22} - \frac{q_{12}^2}{q_{11}}} \dots$$

Формула для расчета *любого элемента матрицы преобразования B* имеет вид:

$$b_{ij} = \frac{q_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot b_{jk}}{\sqrt{q_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}}; \quad 1 \leq j \leq i \leq n.$$

Таким образом, алгоритм метода линейных преобразований весьма прост:

- по заданной корреляционной матрице *рассчитывают значения коэффициентов матрицы преобразования B* ;
- *генерируют одну реализацию вектора Y* , компоненты которого независимы и распределены нормально со стандартными параметрами;

– полученный вектор *подставляют* в выражение (7.1) и *определяют очередную реализацию вектора X*, имеющего заданные корреляционную матрицу и вектор математических ожиданий компонент;

– *при необходимости* два предыдущих шага алгоритма *повторяют требуемое число раз* (до получения нужного количества реализаций вектора X).

В данном пункте рассмотрены *основные методы* генерации ПСЧ, равномерно распределенных на интервале [0; 1], и моделирования случайных событий, величин и векторов, часто используемые в практике имитационных исследований ЭС. Как правило, все *современные программные средства*, применяемые для реализации тех или иных имитационных моделей, *содержат встроенные генераторы равномерно распределенных ПСЧ*, что позволяет исследователю *легко моделировать любые случайные факторы*.

7.4. Основы организации имитационного моделирования

7.4.1. Этапы имитационного моделирования

Как уже отмечалось, *имитационное моделирование* применяют для исследования *сложных экономических систем*. Естественно, что и *имитационные модели оказываются достаточно сложными как с точки зрения заложенного в них математического аппарата, так и в плане машинной реализации*. При этом *сложность любой модели* определяется двумя факторами:

- *сложностью исследуемого объекта-оригинала;*
- *точностью, предъявляемой к результатам расчетов.*

Использование машинного эксперимента как средства решения сложных прикладных проблем, несмотря на присущие каждой конкретной задаче специфику, имеет *ряд общих черт (этапов)*. На рис. 7.24 представлены этапы применения математической (имитационной) модели (по взглядам академика А. А. Самарского).



Рис. 7.24

Каждому из показанных на рис. 7.24 этапов присущи собственные приемы, методы, технологии. В данном учебнике вопросы построения (разработки) математической модели, алгоритмизации и программирования (за исключением выбора языка) не рассматриваются. Отметим лишь, что все эти этапы носят ярко выраженный творческий характер и требуют от разработчика модели особой подготовки.

После того как имитационная модель реализована на ЭВМ, исследователь должен выполнить последовательность следующих этапов (их часто называют технологическими):

- испытание модели;
- исследование свойств модели;
- планирование имитационного эксперимента;
- эксплуатация модели (проведение расчетов).

Кратко охарактеризуем первые два этапа (изложение методов математической теории планирования эксперимента и организации проведения модельных расчетов и обработки их результатов выходят за рамки настоящего учебника).

Испытание имитационной модели

Испытание имитационной модели включает работы по четырем направлениям:

- задание *исходной информации*;
- *верификацию* имитационной модели;
- *проверку адекватности* модели;
- *калибровку* имитационной модели.

Задание исходной информации

Процедура задания исходной информации полностью определяется *типом моделируемой системы*:

- если моделируется *функционирующая (существующая)* система, проводят *измерение характеристик ее функционирования* и затем используют эти данные в качестве исходных при моделировании;
- если моделируется *проектируемая* система, проводят *измерения на прототипах*;
- если *прототипов нет*, используют *экспертные оценки параметров и переменных модели*, формализующих характеристики реальной системы.

Каждому из этих вариантов присущи собственные особенности и сложности. Так, проведение измерений на существующих и проектируемых системах требует применения *качественных измерительных средств*, а проведение экспертного оценивания исходных данных представляет собой *комплекс достаточно сложных процедур* получения, обработки и интерпретации экспертной информации.

Верификация имитационной модели

Верификация имитационной модели состоит в *доказательстве утверждений соответствия алгоритма ее функционирования цели моделирования путем формальных и неформальных исследований реализованной программы модели*.

Неформальные исследования представляют собой ряд *процедур*, входящих в автономную и комплексную отладку.

Формальные методы включают:

- использование специальных процессоров-“читателей” программ;
- замену стохастических элементов модели детерминированными;
- тест на так называемую непрерывность моделирования и др.

Проверка адекватности модели

Количественную оценку адекватности модели объекту исследования проводят для случая, когда можно определить значения отклика системы в ходе натурных испытаний.

Наиболее распространены три способа проверки:

- по средним значениям откликов модели и системы;
- по дисперсиям отклонений откликов;
- по максимальному значению абсолютных отклонений откликов.

Если возможность измерения отклика реальной системы отсутствует, оценку адекватности модели проводят на основе субъективного суждения соответствующего должностного лица о возможности использования результатов, полученных с использованием этой модели при выполнении им служебных обязанностей (в частности — при обосновании решений).

Калибровка имитационной модели

К калибровке имитационной модели приступают в случае, когда модель оказывается неадекватной реальной системе. За счет калибровки иногда удается уменьшить неточности описания отдельных подсистем (элементов) реальной системы и тем самым повысить достоверность получаемых модельных результатов.

В модели при калибровке возможны изменения трех типов:

- глобальные структурные изменения;
- локальные структурные изменения;
- изменение так называемых калибровочных параметров в результате реализации достаточно сложной итерационной

процедуры, включающей многократное построение регрессионных зависимостей и статистическую оценку значимости улучшения модели на очередном шаге.

При необходимости проведения некоторых локальных и особенно глобальных структурных изменений приходится *возвращаться к содержательному описанию* моделируемой системы и искать *дополнительную информацию* о ней.

Исследование свойств имитационной модели

После испытаний имитационной модели переходят к изучению ее свойств. При этом наиболее *важны четыре процедуры*:

- оценка *погрешности имитации*;
- определение *длительности переходного режима* в имитационной модели;
- оценка *устойчивости результатов* имитации;
- исследование *чувствительности* имитационной модели.

Оценка погрешности имитации, связанной с использованием в модели генераторов ПСЧ

Исследование качества генераторов ПСЧ проводится известными методами теории вероятностей и математической статистики (см. п. 3.3.1). *Важнейшим* показателем качества любого генератора ПСЧ является *период последовательности* ПСЧ (при требуемых статистических свойствах). В большинстве случаев о качестве генератора ПСЧ судят по *оценкам математических ожиданий и дисперсий отклонений компонент функции отклика*. Как уже отмечалось, для подавляющего числа практических задач стандартные (встроенные) генераторы дают вполне пригодные последовательности ПСЧ.

Определение длительности переходного режима

Обычно имитационные модели применяются для изучения системы в *типичных* для нее и *повторяющихся* условиях. В большинстве стохастических моделей требуется некоторое время T_0 для достижения моделью *установившегося состояния*.

Под *статистическим равновесием* или *установившимся состоянием* модели понимают такое состояние, в котором про-

тиводействующие влияния сбалансированы и компенсируют друг друга. Иными словами: модель находится в равновесии, если ее отклик не выходит за предельные значения.

Существуют *три* способа уменьшения влияния начального периода на динамику моделирования сложной системы:

- использование *длинных* прогонов, позволяющих получать результаты после заведомого выхода модели на установившийся режим;

- *исключение* из рассмотрения начального периода прогона;

- *выбор* таких начальных условий, которые ближе всего к типичным.

Каждый из этих способов не свободен от недостатков: “длинные прогоны” приводят к *большим затратам* машинного времени; при исключении из рассмотрения начального периода *теряется часть информации*; выбор типичных начальных условий, обеспечивающих быструю сходимость, как правило, *затруднен отсутствием достаточного объема исходных данных* (особенно для принципиально новых систем).

Для отделения переходного режима от стационарного у исследователя должна быть *возможность наблюдения за моментом входа контролируемого параметра в стационарный режим*. Часто используют такой метод: строят графики изменения контролируемого параметра в модельном времени и на нем выявляют переходный режим. На рис. 7.25 представлен график изменения k -го контролируемого параметра модели g_k в зависимости от модельного времени t_0 .

На рисунке видно, что, начиная со времени $t_{перех}$, этот параметр “вошел” в установившийся режим со средним значением \bar{g}_k .

Если построить подобные графики *для всех (или большинства существенных)* контролируемых параметров модели, определить для каждого из них длительность переходного режима и выбрать из них *наибольшую*, в большинстве случаев можно считать, что после этого времени *все интересующие исследователя параметры* находятся в установившемся режиме.

На практике встречаются случаи, *когда переходные режимы исследуются специально*. Понятно, что при этом ис-

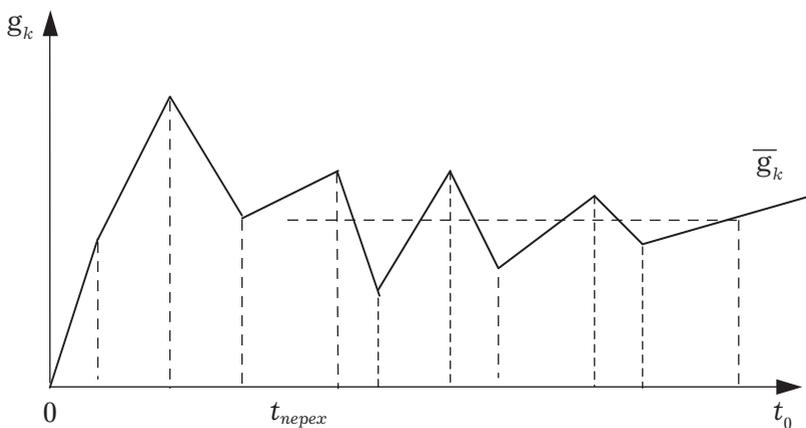


Рис. 7.25

пользуют *короткие* прогоны, исключают из рассмотрения *установившиеся* режимы и стремятся найти начальные условия моделирования, приводящие к *наибольшей* длительности *переходных* процессов. Иногда для увеличения точности результатов проводят *замедление* изменения системного времени.

Оценка устойчивости результатов имитации

Под *устойчивостью* результатов имитации понимают степень их *нечувствительности* к изменению входных условий. *Универсальной* процедуры оценки устойчивости нет. Практически часто находят дисперсию отклика модели Y по нескольким компонентам и проверяют, увеличивается ли она с ростом интервала моделирования. Если *увеличения дисперсии отклика* не наблюдается, результаты имитации считают *устойчивыми*.

Важная практическая рекомендация: чем ближе структура модели к структуре реальной системы и чем выше степень детализации учитываемых в модели факторов, тем шире область устойчивости (пригодности) результатов имитации.

Исследование чувствительности модели

Работы на этом этапе имеют два направления:

- установление *диапазона изменения отклика модели* при варьировании каждого параметра;
- проверка *зависимости отклика модели от изменения параметров внешней среды*.

В зависимости от диапазона изменения откликов Y при изменении каждой компоненты вектора параметров X определяется *стратегия планирования экспериментов* на модели. Если при *значительной амплитуде изменения* некоторой компоненты вектора параметров модели *отклик меняется незначительно*, то *точность* представления ее в модели *не играет существенной роли*.

Проверка зависимости отклика модели Y от изменений параметров внешней среды основана на *расчете соответствующих частных производных и их анализе*.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под термином “математическая модель системы (операции, процесса, объекта)”?
2. Как классифицируются имитационные модели?
3. Каковы достоинства и недостатки методов генерации случайных чисел?
4. В чем сущность конгруэнтных методов генерации псевдослучайных чисел?
5. Каков порядок моделирования неполной группы случайных событий?
6. Каков порядок моделирования зависимых случайных событий?
7. В чем сущность метода интерпретации? Случайные величины с какими законами распределения чаще всего моделируют этим методом?
8. Каковы порядок моделирования случайного вектора методом исключения (Неймана) и главные достоинства и недостатки этого метода?
9. В каких случаях осуществляется калибровка имитационной модели?

8. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

8.1. Общая характеристика методов статистического анализа результатов испытаний

Конечной целью обработки результатов испытаний является определение причинно-следственных связей, определяющих состояние и развитие изучаемого явления. Установление этих связей позволяет не только глубоко анализировать изучаемые явления, но и определять пути оптимального управления ими.

Для решения этой задачи разработаны соответствующие методы, которые получили название методов статистического анализа результатов наблюдений (испытаний), к числу которых относят методы дисперсионного, регрессионного, корреляционного, факторного анализа и др.

При получении и обработке результатов испытаний предполагается, что результат наблюдения Y зависит от одного или нескольких факторов x_1, x_2, \dots, x_m .

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (8.1)$$

При этом выделяют два типа факторов: качественные и количественные. Фактор является качественным, если его нельзя описать числовой характеристикой (числовым показателем). Например, тип прибора, которым производится измерение, условия производства и хранения исследуемого объекта, квалификация наблюдателя и т. д. Количественный фактор может быть описан числовой характеристикой. Например, температура, давление, переменные состояния исследуемого объекта и т. д.

Следует отметить, что количественный фактор можно рассматривать в форме качественного. Например, эксперимент производится при трех фиксированных значениях температуры, которую можно задать численно тремя значениями либо тремя уровнями, т. е. не рассматривать температуру как явную независимую переменную. В последнем случае она выступает

как качественная переменная, принимающая три различных уровня.

В процессе обработки результатов испытаний возникает необходимость получить ответ на следующие вопросы:

1. Справедливо ли предположение о зависимости результатов y от факторов x_1, x_2, \dots, x_m ?
2. Как оценить степень этой зависимости?
3. Как выделить среди факторов наиболее существенные?
4. Нельзя ли сократить число факторов, используемых при анализе?
5. Какой вид имеет причинно-следственная зависимость между факторами и результатом?
6. Как оценить действие тех или иных факторов?

Ответы на указанные вопросы могут быть получены с использованием методов статистического анализа результатов испытаний.

Так, например, ответы на вопросы 1–4 получают с помощью методов дисперсионного, корреляционного и факторного анализа, на вопрос 5 — методов регрессионного и корреляционного анализа, а на вопрос 6 — методов теории классификации и методов статистической теории распознавания образов.

Перечисленные методы статистического анализа ориентированы на различные типы факторов. В дисперсионном и факторном анализе все факторы должны быть качественными, в регрессионном анализе — количественными. В корреляционном анализе допустимо использование как количественных, так и качественных факторов.

С математической точки зрения формализация причинно-следственных связей между результатом y и факторами x_1, x_2, \dots, x_m сводится к определению зависимости (8.1.).

Постановка задачи анализа результатов испытаний и методы ее решения могут быть различными в зависимости от свойств факторов, функции и результатов. По своей природе факторы могут быть детерминированными либо случайными, зависимость между результатом y и факторами x_1, x_2, \dots, x_m может быть функциональной либо стохастической, результаты

испытания фиксируются с ошибками либо без ошибок. Различные сочетания свойств факторов, характера зависимости (8.1) и результатов испытания определяет многообразие постановок задач статистического анализа, некоторые из которых будут рассмотрены ниже.

8.2. Основы дисперсионного анализа

8.2.1. Сущность дисперсионного анализа

На практике приходится решать задачи по оценке влияния того или иного фактора или ряда факторов на среднюю характеристику интересующего исследователя признака. Например, при профилактическом осмотре какого-либо устройства возникла необходимость замены вышедшего из строя элемента. При этом необходимо обеспечить стабильность среднего времени безотказной работы элемента. На складе имеются несколько однотипных запасных элементов. Если эти элементы взяты из различных партий, только что поступивших с завода-изготовителя, а интересующая характеристика контролировалась одним и тем же оператором на одном и том же приборе, то средние времена безотказной работы элементов различных партий могут оказаться различными за счет влияния одного фактора — условий производства. Элементы различных партий могли храниться до поступления в ЗИП на различных складах.

В этом случае разброс среднего значения характеристики может быть обусловлен влиянием двух факторов — условий производства и хранения. Если же при этом элементы различных партий контролировались различными операторами на различных приборах, то причиной разброса среднего значения характеристики может оказаться влияние четырех факторов: условий производства, условий хранения, систематических погрешностей приборов и систематических погрешностей, допускаемых операторами.

Поскольку требуется стабильность среднего значения характеристики элемента, то необходимо оценить, насколько су-

ществственным является влияние того или иного из указанных факторов, чтобы рационально организовать снабжение запасными элементами и их контроль при профилактической замене. Решение подобных задач составляет предмет дисперсионного анализа.

Дисперсионный анализ (ДА) представляет собой совокупность методов статистической обработки результатов наблюдений, зависящих от различных одновременно действующих качественных факторов, и предназначен для анализа существенности влияния данных факторов на результаты наблюдений [12].

Методы дисперсионного анализа используют при решении следующих задач:

- определение дисперсий результатов наблюдений по различным факторам;
- выбор показателей и критериев для оценивания существенности влияния факторов;
- оценивание влияния факторов на результаты наблюдений;
- определение вклада данных факторов в формирование результатов наблюдений.

Сущность ДА состоит в том, что дисперсия результатов измерений по специальным правилам разбивается на независимые слагаемые. Каждое слагаемое характеризует влияние того или иного фактора на результаты измерений.

Предположим, на результат измерения случайной переменной Y оказывают влияние два фактора X_1 и X_2 . Математическое ожидание Y известно и равно $M[Y]$. Отклонение измеренных значений переменной Y от математического ожидания представляют в виде

$$Y - M[Y] = \alpha + \beta + \gamma, \quad (8.2)$$

где α — отклонение, вызванное действием фактора X_1 ;

β — отклонение, вызванное действием фактора X_2 ;

γ — отклонение, вызванное действием других неучтенных факторов.

Допустим, что α , β и γ — независимые случайные величины и дисперсии их известны. Тогда в соответствии с (8.2) дисперсия случайной переменной Y может быть представлена в виде суммы дисперсий отклонений, обусловленных действием исследуемых факторов

$$D[Y] = D[\alpha] + D[\beta] + D[\gamma]. \quad (8.3)$$

Сопоставляя дисперсию $D[\alpha]$ или $D[\beta]$ с дисперсией $D[\gamma]$, можно установить степень влияния фактора X_1 или X_2 на результат переменной Y по сравнению с неучтенными факторами, т. е. оценить существенность влияния данных факторов. Сравнивая дисперсии $D[\alpha]$ и $D[\beta]$ между собой, можно оценить степень влияния каждого из факторов X_1 или X_2 на результат измерения.

Дисперсионный анализ применим в условиях, когда результаты измерений распределены по нормальному закону с одинаковой неизменной дисперсией $D[\gamma]$.

В зависимости от количества и свойств факторов, свойств результатов наблюдений и особенностей организации процесса получения результатов выделяют несколько видов дисперсионного анализа. Ниже будет рассмотрено содержание только однофакторного дисперсионного анализа, знание которого позволяет овладеть всеми остальными видами ДА.

8.2.2. Однофакторный дисперсионный анализ

Задача однофакторного ДА формулируется следующим образом. На результат измерений переменной Y оказывает влияние единственный фактор, который может иметь несколько уровней. Например, измерения переменной Y производят t различными приборами. В данном случае имеет место лишь один фактор, влияющий на результат измерения — тип прибора. Для определения влияния данного фактора на результаты измерений необходимо сравнить между собой средние значения результатов, полученных с помощью различных приборов, и оценить существенность различий между этими средними,

т. е. проверить гипотезу, согласно которой математические ожидания $m_{y_1}, m_{y_2}, \dots, m_{y_m}$ результатов измерений одинаковы

$$m_{y_1} = m_{y_2} = \dots = m_{y_m}. \quad (8.4)$$

В частном случае при $m = 2$ эта задача может быть решена на основе показателя согласованности (6.21), рассмотренного в п. 6. Однако, если $m > 2$, то применение данного ПС не представляется возможным. Поэтому проверку гипотезы (8.4) производят методами ДА.

Задача однофакторного ДА формулируется следующим образом. Имеется единичный фактор X , который может иметь m уровней. При каждом i -м уровне фактора X проведено n_i измерений переменной Y и получены результаты y_{ij} ($i = 1, m; j = 1, n_i$). В общем случае число измерений при каждом уровне фактора X может быть различным, а их общее число будет равно

$$N = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Будем рассматривать частный случай, когда $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$, а общее число измерений $N = nm$.

Как правило, результаты измерений сводят в таблицу (табл. 8.1), которую называют матрицей результатов измерений $\|y_{ij}\|_{mn}$.

Таблица 8.1

Номер уровня фактора X	Номер измерения					
	1	2	...	j	...	n
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2n}
...
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{in}
...
m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mj}	...	y_{mn}

На основе анализа результатов измерений необходимо оценить, существенно ли влияние на них фактора X . Если это

влияние существенно, то следует определить уровни фактора, обуславливающие это влияние.

Результаты измерений, полученные при одном и том же уровне фактора, называют группой, все множество результатов измерений — совокупностью результатов измерений.

Введем обозначения:

- \bar{y} — общее математическое ожидание (математическое ожидание всей генеральной совокупности результатов измерений), оценка которого имеет вид

$$\bar{y}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{ij}; \quad (8.5)$$

- \bar{y}_{r_i} — групповое математическое ожидание (математическое ожидание i -ой группы), оценка которого имеет вид

$$\bar{y}_{r_i}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m Y_{ij}; \quad (8.6)$$

- \bar{y}_{m_i} — межгрупповое математическое ожидание (математическое ожидание генеральной совокупности результатов при j -м измерении), оценка которого имеет вид

$$\bar{y}_{m_j}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{ij}. \quad (8.7)$$

Результаты измерения в каждой группе Y_{ij} можно представить в виде

$$Y_{ij} = \bar{y}_{r_i} + \varepsilon_{ij}, \quad (8.8)$$

где ε_{ij} — ошибки измерения, обусловленные действием неучетных факторов.

Считают, что ошибки ε_{ij} распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ^2 и не коррелированы между собой.

В свою очередь групповое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$y_{r_i} = \bar{y} + a_i, \quad (8.9)$$

где a_i — величина, характеризующая эффект i -й группы.

С учетом равенства (8.9) выражение (8.8) переписется в виде

$$Y_{ij} = \bar{y} + a_i + \varepsilon_{ij}. \quad (8.10)$$

Данное уравнение называют моделью однофакторного дисперсионного анализа, которая может быть записана и в отклонениях

$$(Y_{ij} - \bar{y}) = (\bar{y}_{r_i} - \bar{y}) + \varepsilon_{ij}. \quad (8.11)$$

Из выражения (8.11) видно, что общее отклонение результатов измерений от математического ожидания генеральной совокупности $(Y_{ij} - \bar{y})$ раскладывается на отклонение $(\bar{y}_{r_i} - \bar{y})$, обусловленное действием фактора X , и ошибку ε_{ij} , обусловленную действием других неучтенных факторов.

Как уже отмечалось выше, сущность дисперсионного анализа состоит в разложении общей дисперсии на две составляющие. Одна составляющая дисперсии обусловлена действием исследуемого фактора X , другая — действием неучтенных факторов. Для решения этой задачи модель (8.11) с учетом выражения (8.8) перепишем в виде

$$(Y_{ij} - \bar{y}) = (\bar{y}_{r_i} - \bar{y}) + (y_{ij} - y_{r_i}). \quad (8.12)$$

Возведя в квадрат и просуммировав отклонения по всем N измерениям, получим модель ДА в мерах вариации

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^m n(\bar{y}_{r_i} - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i})^2. \quad (8.13)$$

В выражении (8.13) первое слагаемое называют факторной, а второе — остаточной вариациями.

Поскольку математические ожидания \bar{y} , \bar{y}_{r_i} неизвестны, то их заменяют соответствующими оценками (8.5) и (8.6). Поэтому выражение (8.13) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y}^*)^2 = \sum_{i=1}^m n(\bar{y}_{r_i}^* - \bar{y}^*)^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i}^*)^2. \quad (8.14)$$

Таким образом, общая вариация разложена на факторную и остаточную вариации. Эти вариации оценивают с помощью

соответствующих дисперсий, которые являются основой при проведении дисперсионного анализа.

8.2.3. Проверка существенности влияния фактора в однофакторном дисперсионном анализе

В ДА различают следующие виды дисперсий:

1. Общая дисперсия D_o , характеризующая рассеивание результатов испытания Y_{ij} относительно общего математического ожидания \bar{y} , т. е.

$$D_o = M[(Y_{ij} - \bar{y})]^2.$$

Выражение для оценки общей дисперсии при неизвестном \bar{y} имеет вид

$$D_o^* = \frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y}^*)^2. \quad (8.15)$$

2. Групповая дисперсия D_{r_i} , характеризующая рассеивание результатов испытаний Y_{ij} относительно группового математического ожидания \bar{y}_{r_i} , т. е.:

$$D_{r_i} = M[(Y_{ij} - \bar{y}_{r_i})^2], \quad i = \overline{1, m}.$$

Выражение для оценки общей дисперсии при неизвестном \bar{y}_{r_i} имеет вид

$$D_{r_i}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_{r_j} - \bar{y}_{r_i}^*)^2. \quad (8.16)$$

3. Межгрупповая дисперсия D_{mr} . Данная дисперсия характеризует рассеивание систематической вариации, т. е. различия результатов испытаний, обусловленные влиянием контролируемого фактора. Оценка для межгрупповой дисперсии может быть получена из соотношения

$$D_{mr}^* = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{r_i}^* - \bar{y}^*)^2. \quad (8.17)$$

4. Внутригрупповая дисперсия $D_{вр}$ характеризует рассеивание остаточной вариации, т. е. различия результатов испытаний,

обусловленные действием неучтенных факторов. Оценка данной дисперсии также может быть получена из соотношения

$$D_{\text{вр}}^* = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i}^*)^2. \quad (8.18)$$

Из сравнения выражений (8.16) и (8.18) видно, что внутригрупповая дисперсия с групповой связаны соотношением

$$D_{\text{вр}} = \frac{n}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m D_{r_i}. \quad (8.19)$$

Общая дисперсия связана с межгрупповой и внутригрупповой дисперсиями соотношением

$$D_o = D_{\text{мг}} + D_{\text{вр}}. \quad (8.20)$$

Доказательство справедливости данного равенства приводится в различных источниках, например, в [11].

Таким образом, общая дисперсия результатов испытаний разложена на две составляющие: межгрупповую дисперсию, характеризующую долю вариации, обусловленную действием контролируемого фактора, и внутригрупповую, характеризующую долю вариации результата, обусловленную действием других неучтенных факторов.

Соотношение (8.20) и является основой однофакторного дисперсионного анализа.

При однофакторном дисперсионном анализе, как правило, решают две задачи:

1. Проверку существенности влияния фактора X на результаты наблюдений.

2. Выявление уровня фактора, который влияет на результат наиболее существенным образом.

Решение первой задачи сводится к проверке гипотезы о равенстве внутригрупповых математических ожиданий. Действительно, если математические ожидания групп при различных уровнях фактора X окажутся равными, то влияние фактора несущественно.

Таким образом, выдвигается нулевая гипотеза

$$H_0 : y_{r_1} = y_{r_2} = \dots = y_{r_m}. \quad (8.21)$$

В качестве альтернативной выдвигается гипотеза

$$H_1 : y_{r_1} \neq y_{r_2} \neq \dots \neq y_{r_m}. \quad (8.22)$$

Если нулевая гипотеза окажется справедливой, то влияние фактора X считают несущественным, а отклонения в результатах испытаний объясняют действием других неучтенных факторов.

Для проверки нулевой гипотезы (8.21) в качестве показателя согласованности принимают величину

$$f = \frac{D_{\text{МГ}}^*}{D_{\text{вг}}^*}. \quad (8.23)$$

При справедливости нулевой гипотезы систематическое отклонения будет мало по сравнению со случайным отклонением, т. е. расхождение математических ожиданий будет обусловлено действием случайных факторов. Поэтому межгрупповая дисперсия будет достаточно мала по сравнению с дисперсией внутригрупповой.

Если H_0 не верна, то внутригрупповые математические ожидания (математические ожидания различных групп) будут сильно отличаться друг от друга и от общего математического ожидания.

Чем больше влияние фактора X , тем более существенным будет различие математических ожиданий. Это приведет к возрастанию систематического отклонения в выражении (8.17), а случайное отклонение при этом останется неизменным. В этом случае межгрупповая дисперсия будет увеличиваться, а внутригрупповая дисперсия останется постоянной.

Показатель согласованности имеет правостороннюю критическую область и подчинен закону распределения Фишера с $k_1 = m - 1$ и $k_2 = m(n - 1)$ степенями свободы. Следовательно, назначив уровень значимости по таблицам распределения Фишера (табл. 14 приложения 1) для соответствующих чисел степеней свободы k_1 и k_2 находят критическую границу f_α . Гипо-

теза H_0 принимается, если вычисленное значение показателя согласованности f по формуле (8.23) удовлетворяет условию

$$f \leq f_\alpha. \quad (8.24)$$

Если условие (8.24) не выполняется, то гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1 .

Следовательно, влияние фактора X существенно, если $f > f_\alpha$, в противном случае влияние фактора не существенно и различия в результатах наблюдений обуславливаются не фактором X , а другими неучтенными факторами.

Следует отметить, что при вычислении значения ПС по формуле (8.23) в числитель следует подставлять оценку дисперсии с большим значением, так как именно для данного случая составлены таблицы Фишера.

Особенность проведения ДА при неравном числе измерений в каждой группе ($n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_m$) определяется только спецификой оценки дисперсии. При неравном числе измерений оценки для дисперсий имеют следующий вид:

$$D_o^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}^*)^2;$$

$$D_{r_i}^* = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i}^*)^2;$$

$$D_{mr}^* = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{r_i}^* - \bar{y}^*)^2;$$

$$D_{вр}^* = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i}^*)^2,$$

где $N = \sum_{i=1}^m n_i$;

$$\bar{y}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij};$$

$$\bar{y}_{r_i}^* = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Если нулевая гипотеза H_0 будет отклонена, т. е. фактор X оказывает существенное влияние на результаты испытаний, то решают задачу выявления уровня фактора, который в максимальной степени влияет на эти результаты.

8.2.4. Выявление уровня фактора, влияющего на результаты испытаний

Сущность задачи выявления уровня фактора, в наибольшей степени влияющего на результаты испытания, состоит в определении группы результатов испытаний, которая является наиболее неоднородной по сравнению с другими группами (в решении вопроса о том, какой прибор или наблюдатель привели к отклонению гипотезы H_0). Для решения этой задачи разработан ряд методов, одним из которых является метод линейных контрастов, изложенный в работе [1].

В общем случае линейный контраст L представляет собой взвешенную сумму параметров a_1, a_2, \dots, a_t с весами c_k , сумма которых равна нулю, т. е.:

$$L = \sum_{k=1}^t c_k a_k \text{ и } \sum_{k=1}^t c_k = 0.$$

Если a_k^* является оценкой параметра a_k и известна оценка дисперсии D_a данной оценки, то оценка линейного контраста определяется выражением

$$L^* = \sum_{k=1}^t c_k a_k^*, \quad (8.25)$$

а оценка ее дисперсии — выражением

$$D_L^* = \sum_{k=1}^t c_k^2 D_a. \quad (8.26)$$

Применительно к модели ДА (8.11) в качестве параметра a_k выступает групповое математическое ожидание \bar{y}_{Γ_i} . Оценка группового математического ожидания $y_{\Gamma_i}^*$ определяется выражением (8.6), а ее дисперсия — выражением

$$D_{\bar{y}_{r_i}^*} = \frac{D_y^*}{n_i}, \quad (8.27)$$

D_y^* — оценка дисперсии ошибки, равная оценке внутригрупповой дисперсии, т. е.:

$$D_y^* = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_{r_i}^*)^2. \quad (8.28)$$

Поскольку оценки групповых математических ожиданий взаимно независимы, то оценка линейного контраста групповых математических ожиданий будет иметь вид

$$L^* = \sum_{i=1}^m c_i \bar{y}_{r_i}^*, \quad (8.29)$$

а оценка дисперсии

$$D_L^* = D_y^* \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} c_i^2. \quad (8.30)$$

Задача определения уровня фактора, явившегося причиной отклонения нулевой гипотезы H_0 , заключается в проверке ряда парных сравнений групповых математических ожиданий. Поскольку истинные значения групповых математических ожиданий неизвестны, то парные сравнения заменяются проверкой гипотез вида

$$H_0 : \bar{y}_{r_i} = \bar{y}_{r_j}.$$

Иллюстрацию метода линейных контрастов проведем на примере, когда имеют место три уровня фактора (например, измерения проводились тремя приборами). В данном случае необходимо проверить три гипотезы: нулевая гипотеза H_0 была отвергнута потому, что либо $y_{r_1} \neq y_{r_2}$, либо $y_{r_1} \neq y_{r_3}$, либо $y_{r_2} \neq y_{r_3}$.

Для проверки гипотезы

$$H_{01} : \bar{y}_{r_1} - \bar{y}_{r_2} = 0$$

по отношению к двусторонней альтернативе примем

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 1, -1, 0 \rangle.$$

Для проверки гипотезы

$$H_{02} : \bar{y}_{r_1} - \bar{y}_{r_3} = 0$$

по отношению к двусторонней альтернативе примем

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 1, 0, -1 \rangle.$$

Для проверки гипотезы

$$H_{03} : \bar{y}_{r_2} - \bar{y}_{r_3} = 0$$

по отношению к двусторонней альтернативе примем

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 0, 1, -1 \rangle.$$

Проверка гипотез осуществляется следующим образом. Для линейного контраста L определяется доверительный интервал, отвечающий доверительной вероятности α

$$I_\alpha = [L^* - \sigma_L^* \sqrt{k_1 f_\alpha}, L^* + \sigma_L^* \sqrt{k_2 f_\alpha}], \quad (8.31)$$

где L^* — значение оценки линейного контраста, вычисленное по формуле (8.29);

σ_L^* — оценка стандартного отклонения линейного контраста;

f_α — аргумент функции распределения Фишера, при котором выполняется неравенство $P(F > f_\alpha) = (1 - \alpha)$.

Величину f_α находят из таблиц распределения Фишера по соответствующим значениям чисел степеней свободы $k_1 = m - 1$, $k_2 = N - m$ и вероятности $P = (1 - \alpha)$.

Если этот интервал покрывает нуль (включает в себя нулевое значение), то делается вывод о том, что групповые математические ожидания практически не отличаются, в противном случае делается вывод о существенном различии математических ожиданий.

Сравнение математических ожиданий, для которых гипотеза H_0 отвергнута, с другими математическими ожиданиями позволяет выделить ту группу (тот уровень или несколько уровней) фактора X , которые послужили причиной отклонения гипотезы H_0 .

8.2.5. Примеры однофакторного дисперсионного анализа

Приводимые ниже примеры однофакторного ДА заимствованы в [12].

Пример 8.1. Наблюдаемая переменная Y измерена с помощью четырех разнотипных приборов, причем каждым прибором было осуществлено пять измерений. Результаты наблюдений представлены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Тип прибора	Номер измерения				
	1	2	3	4	5
1	8,2	8,3	7,9	8,1	7,6
2	8,1	7,5	8,3	8,0	7,8
3	7,9	8,4	8,2	8,1	7,7
4	7,8	8,0	7,6	8,2	8,3

Необходимо определить, существенно ли влияет тип прибора на результаты измерений. Ошибки измерений предполагаются подчиненными нормальному закону распределения, приборы имеют одинаковую погрешность измерения.

Решение.

Рассматривая тип прибора в качестве фактора, влияющего на результат измерений, данную задачу можно сформулировать как задачу однофакторного ДА с числом уровней фактора $m = 4$.

По выражениям (8.5) и (8.6) определим оценки общего и внутригрупповых математических ожиданий, необходимых для определения дисперсий:

$$\bar{y}^* = 8,0; \quad \bar{y}_{r_1}^* = 8,02; \quad \bar{y}_{r_2}^* = 7,94;$$

$$\bar{y}_{r_3}^* = 8,06; \quad \bar{y}_{r_4}^* = 7,98.$$

Полученные по выражениям (8.15), (8.17), (8.18) оценки общей, межгрупповой и внутригрупповой дисперсий соответственно равны:

$$D_o^* = 7,0 \cdot 10^{-2}; \quad D_{\text{мг}}^* = 1,0 \cdot 10^{-2}; \quad D_{\text{вг}}^* = 8,13 \cdot 10^{-2}.$$

Выдвигаем нулевую и альтернативную гипотезы в виде:

$$H_0: \bar{y}_{\Gamma_1} = \bar{y}_{\Gamma_2} = \bar{y}_{\Gamma_3} = \bar{y}_{\Gamma_4};$$

$$H_1: \bar{y}_{\Gamma_1} \neq \bar{y}_{\Gamma_2} \neq \bar{y}_{\Gamma_3} \neq \bar{y}_{\Gamma_4}.$$

Вычисляем значение ПС по формуле

$$f = \frac{D_{\text{вг}}^*}{D_{\text{мг}}^*} = \frac{8,13 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 10^{-2}} = 8,13.$$

При заданном уровне значимости $P = 0,05$ из таблицы закона распределения Фишера выбираем критическое значение показателя согласованности f_α . Входами в таблицу являются:

$$P = 1 - \alpha = 0,05, \quad k_1 = N - m = 16, \quad k_2 = m - 1 = 3.$$

Поскольку $f < f_\alpha$, то гипотеза H_0 принимается, т. е. тип прибора несущественно влияет на результаты наблюдений.

Пример 8.2. Прибор испытывается в трех различных условиях, причем при каждом типе условий проводится по четыре испытания. Результаты наблюдений представлены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Тип условий	Номер испытания			
	1	2	3	4
1	51	52	56	57
2	52	54	56	58
3	42	44	50	52

Необходимо оценить влияние на работу прибора условий проведения испытаний. Предполагается, что результаты наблюдений подчинены нормальному закону распределения с равными дисперсиями.

Решение.

Условия испытаний можно рассматривать как фактор с тремя уровнями и применить однофакторный ДА по аналогии с предыдущим примером.

По тем же самым зависимостям определим оценки общего и внутригрупповых математических ожиданий, необходимых для определения оценок дисперсий:

$$\bar{y}_{r_1}^* = 54, \quad \bar{y}_{r_2}^* = 55, \quad \bar{y}_{r_3}^* = 47, \quad \bar{y}^* = 52.$$

Оценки общей, межгрупповой и внутригрупповой дисперсии соответственно равны:

$$D_o^* = 24,18; \quad D_{\text{мг}}^* = 76; \quad D_{\text{вг}}^* = 12,7.$$

Выдвигаем нулевую и альтернативную гипотезы в виде:

$$H_0 : \bar{y}_{r_1} = \bar{y}_{r_2} = \bar{y}_{r_3};$$

$$H_1 : \bar{y}_{r_1} \neq \bar{y}_{r_2} \neq \bar{y}_{r_3}.$$

Вычисляем значение ПС по формуле

$$f = \frac{D_{\text{вг}}^*}{D_{\text{мг}}^*} = \frac{76}{12,7} \approx 6,0.$$

При заданном уровне значимости $\alpha = 0,95$ из таблицы закона распределения Фишера (табл. 14 приложения 1) выбираем критическое значение ПС $f_\alpha = 4,26$. Входами в таблицу являются

$$P = 1 - \alpha = 0,05, \quad k_1 = m - 1 = 2, \quad k_2 = m(n - 1) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Поскольку $f > f_\alpha$, то гипотезу H_0 о несущественности влияния условий на результаты работы прибора следует отклонить.

Определим с помощью метода линейных контрастов тип условий проведения испытаний, вызвавший отклонение гипотезы H_0 , т. е. условий, наиболее существенно повлиявших на результаты работы прибора.

Выдвинем следующие три нулевые гипотезы:

$$H_{01} : \bar{y}_{r_1} - \bar{y}_{r_2} = 0;$$

$$H_{02} : y_{r_2} - \bar{y}_{r_3} = 0;$$

$$H_{03} : \bar{y}_{r_1} - \bar{y}_{r_3} = 0.$$

Для гипотезы H_{01} контрасты определяются значениями:

$$c_1 = 1; c_2 = -1; c_3 = 0.$$

Следовательно

$$L^* = \sum_{i=1}^3 c_i \bar{y}_{r_i}^* = -1.$$

Определим доверительный интервал для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$

$$\begin{aligned} I_\alpha &= [L^* - \sigma_L^* \sqrt{k_1 f_\alpha}, L^* + \sigma_L^* \sqrt{k_2 f_\alpha}] = \\ &= [-1 - 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}; -1 + 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}] = [-8,36; 6,36]. \end{aligned}$$

Доверительный интервал накрывает нуль, поэтому групповые математические ожидания для первого и второго типов условий отличаются несущественно, т. е. не эти условия вызвали отклонение гипотезы H_{01} .

Для гипотезы H_{02} контрасты определяются значениями:

$$c_1 = 0; c_2 = 1; c_3 = -1.$$

Поэтому

$$L^* = 0 + 55 - 47 = 8,$$

а дисперсия контраста остается неизменной

$$D_L^* = 6,3 (\sigma_L^* = 2,52).$$

Доверительный интервал в данном случае

$$I_{0,95} = [8 - 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}; 8 + 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}] = [0,644; 15,356].$$

Доверительный интервал не накрывает нулевой точки, поэтому расхождение групповых математических ожиданий для второго и третьего типов существенно.

Наконец, для гипотезы H_{03} получаем:

$$c_1 = 1; c_2 = 0; c_3 = -1;$$

$$L^* = 54 + 0 - 47 = 7;$$

$$I_{0,95} = [7 - 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}; 7 + 2,52\sqrt{2 \cdot 4,26}] = [-0,356; 14,356].$$

Таким образом, причиной отклонения гипотезы H_0 является третье групповое математическое ожидание. Следовательно, условия испытаний третьего типа наиболее существенно влияют на качество работы прибора.

8.2.6. Особенности проведения двухфакторного дисперсионного анализа

Задачу двухфакторного ДА в общем случае формулируют следующим образом.

Имеются два фактора X_1 и X_2 . Каждый из этих факторов имеет соответственно m_1 и m_2 уровней. Для каждого из сочетаний уровней произведено наблюдение (в общем случае может быть несколько наблюдений) и получены результаты y_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m_1; j = 1, 2, \dots, m_2$).

На основе анализа результатов наблюдений необходимо оценить существенность влияния на них факторов X_1 и X_2 .

На практике задачи подобного типа возникают при контроле качества продукции несколькими лицами с помощью различных приборов. В качестве фактора X_1 выступают контролирующие лица, и они составляют уровни данного фактора. Вторым фактором X_2 являются приборы, а его уровнями — характеристики точности приборов. Полученные результаты наблюдений будут отличаться друг от друга. Эти отличия могут быть вызваны различной квалификацией контролирующих лиц (фактором X_1), отличием в приборах (различие типов, точности и т. п.) либо некоторыми другими неучтенными факторами.

Для упрощения терминологии изложения группирование результатов наблюдений по уровням фактора X_1 будем называть классификацией по фактору X_1 , а группирование результатов наблюдений по уровням фактора X_2 — классификацией по фактору X_2 .

Результаты наблюдений обычно представляют в виде табл. 8.4.

Таблица 8.4

Уровни фактора X_1	Уровни фактора X_2					
	1	2	...	j	...	m_2
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1m_2}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2m_2}
...
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{im_2}
...
m_1	$y_{m_1,1}$	$y_{m_1,2}$...	$y_{m_1,j}$...	y_{m_1,m_2}

Модель двухфакторного ДА имеет следующий вид

$$y_{ij} = \bar{y} + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}, \quad (8.32)$$

где \bar{y} — общее математическое ожидание;

a_i — эффект, обусловленный влиянием i -го уровня фактора X_1 ;

b_j — эффект, обусловленный влиянием j -го уровня фактора X_2 ;

y_{ij} — эффект, обусловленный влиянием i -го уровня фактора X_1 на результат, полученный при j -м наблюдении;

ε_{ij} — ошибка, обусловленная влиянием прочих неучтенных факторов.

Эффекты в (8.32) определяются выражениями:

$$a_i = \bar{y}_{1r_i} - \bar{y}, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (8.33)$$

где \bar{y}_{1r_i} — групповое математическое ожидание i -й группы классификации по фактору X_1 ;

$$b_j = \bar{y}_{2r_j} - \bar{y}, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (8.34)$$

где \bar{y}_{2r_j} — групповое математическое ожидание j -й группы классификации по фактору X_2 .

Предполагается, что ошибка ε_{ij} распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной D_y , причем ошибки не коррелированы между собой, а суммы эффектов y_{ij} по строкам и столбцам при одном наблюдении равны нулю.

В отклонениях выражение (8.32) запишется в виде

$$(Y_{ij} - \bar{y}) = (\bar{y}_{1r_i} - \bar{y}) + (\bar{y}_{2r_j} - \bar{y}) + (Y_{ij} - \bar{y}_{1r_i} - \bar{y}_{2r_j} + \bar{y}). \quad (8.35)$$

Если отклонения в (8.35) возвести в квадрат и просуммировать их по всем наблюдениям, то модель ДА в мерах отклонения преобразуется в эквивалентную модель в мерах вариации

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y})^2 &= m_2 \sum_{i=1}^{m_1} (\bar{y}_{1r_i} - \bar{y})^2 + m_1 \sum_{j=1}^{m_2} (\bar{y}_{2r_j} - \bar{y})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y}_{1r_i} - \bar{y}_{2r_j} + \bar{y})^2. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Таким образом, общая вариация разлагается на вариации, обусловленные действиями факторов X_1 , X_2 и прочих неучтенных факторов, соответственно.

Первую из этих вариаций называют факторной вариацией по фактору X_1 , вторую — факторной вариацией по фактору X_2 , а третью — остаточной вариацией.

Заменив в выражении (8.36) математические ожидания их оценками, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y}^*)^2 &= m_2 \sum_{i=1}^{m_1} (\bar{y}_{1r_i}^* - \bar{y}^*)^2 + m_1 \sum_{j=1}^{m_2} (\bar{y}_{2r_j}^* - \bar{y}^*)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y}_{1r_i}^* - \bar{y}_{2r_j}^* + \bar{y}^*)^2. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Как и в однофакторном ДА, для оценивания этих вариаций используются следующие дисперсии:

общая дисперсия D_o , оценка которой определяется выражением

$$D_o^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y}^*)^2, \quad (8.38)$$

где $N = m_1 \cdot m_2$ — общее число наблюдений;

$$\bar{y}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} Y_{ij}; \quad (8.39)$$

факторная дисперсия D_1 для первого фактора, оценка которой определяется выражением

$$D_1^* = \frac{m_2}{m_1 - 1} \sum_{i=1}^{m_2} (\bar{y}_{1r_i}^* - \bar{y}^*)^2, \quad (8.40)$$

где $\bar{y}_{1r_i}^*$ — оценка группового математического ожидания i -й группы классификации по фактору X_1

$$\bar{y}_{1r_i}^* = \frac{1}{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} Y_{ij}, \quad (8.41)$$

факторная дисперсия D_2 для первого фактора, оценка которой определяется выражением

$$D_2^* = \frac{m_1}{m_2 - 1} \sum_{j=1}^{m_2} (\bar{y}_{2r_j}^* - \bar{y}^*)^2, \quad (8.42)$$

где $\bar{y}_{2r_j}^*$ — оценка группового математического ожидания j -й группы классификации по фактору X_2

$$\bar{y}_{2r_j}^* = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} Y_{ij}; \quad (8.43)$$

остаточная дисперсия $D_{\text{ост}}$, оценка которой определяется выражением

$$D_{\text{ост}}^* = \frac{1}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (Y_{ij} - \bar{y}_{1r_i}^* - \bar{y}_{2r_j}^* + \bar{y}^*)^2. \quad (8.44)$$

Разложение общей дисперсии в данном случае имеет вид

$$D_o = D_1 + D_2 + D_{\text{ост}}. \quad (8.45)$$

Анализ существенности влияния факторов на результаты испытаний проводится, как и в однофакторном ДА.

При этом в двухфакторном ДА могут быть сформулированы две нулевые гипотезы:

– гипотеза о равенстве групповых математических ожиданий классификации по фактору X_1

$$H_{01}: \bar{y}_{1r_1} = \bar{y}_{1r_2} = \dots = \bar{y}_{1r_m};$$

H_{11} : не все \bar{y}_{1r_i} равны между собой;

– гипотеза о равенстве групповых математических ожиданий классификации по фактору X_2

$$H_{02}: \bar{y}_{2\Gamma_1} = \bar{y}_{2\Gamma_2} = \dots = \bar{y}_{2\Gamma_m};$$

H_{12} : не все $\bar{y}_{2\Gamma_j}$ равны между собой.

В качестве показателей согласованности при проверке указанных гипотез используют:

– для гипотезы H_{01}

$$f_1 = \frac{D_1^*}{D_{\text{ост}}^*}; \quad (8.46)$$

– для гипотезы H_{02}

$$f_2 = \frac{D_2^*}{D_{\text{ост}}^*}; \quad (8.47)$$

Порядок проверки нулевых гипотез аналогичен, изложенному в п. 8.2.4.

Если какая-либо из нулевых гипотез будет отклонена, то с помощью метода линейных контрастов можно определить уровень, из-за которого отклоняется нулевая гипотеза.

Разложение общей дисперсии (8.45) на составляющие позволяет решать и задачу определения степени влияния факторов X_1 и X_2 на результаты испытаний, т. е. оценить, одинаковы или нет являются эти влияния. С этой целью может быть проверена гипотеза вида

$$H_{03}: \bar{y}_{1\Gamma_1} = \bar{y}_{1\Gamma_2} = \dots = \bar{y}_{1\Gamma_m} = \bar{y}_{2\Gamma_1} = \bar{y}_{2\Gamma_2} = \dots = \bar{y}_{2\Gamma_m};$$

H_{13} : не все $\bar{y}_{1\Gamma_i}$, $\bar{y}_{2\Gamma_j}$ равны между собой.

При проверке данной гипотезы в качестве показателя согласованности выбирают отношения соответствующих факторных дисперсий

$$f_3 = \frac{D_1^*}{D_2^*}, \quad (8.48)$$

который подчиняется закону распределения Фишера с $(m_1 - 1; m_2 - 1)$ степенями свободы. Поэтому проверка гипотезы аналогична проверкам, описанным выше.

Вопросы для самопроверки

1. Что является конечной целью обработки результатов испытаний?
2. Какие два типа факторов выделяют при получении и обработке результатов испытаний? В чем их суть?
3. На какие вопросы стремятся получить ответы в процессе обработки результатов испытаний?
4. Какие методы применяются при обработке результатов испытаний?
5. Какие задачи решаются с применением метода дисперсионного анализа? Приведите пример.
6. Запишите и поясните модель однофакторного дисперсионного анализа.
7. На какие две составляющие раскладывают общую дисперсию?
8. Какие дисперсии различают в однофакторном дисперсионном анализе?
9. Какой показатель согласованности используется в дисперсионном анализе?
10. Что такое линейный контраст и как он используется для выявления значимых факторов?

Задачи для самостоятельного решения

1. Анализируется работа трех продавцов универсама по количеству обслуженных покупателей за смену в течение четырех дней. Результаты представлены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Продавец	Количество обслуженных покупателей за смену			
	1-я смена	2-я смена	3-я смена	4-я смена
№ 1	83	71	78	81
№ 2	69	64	76	72
№ 3	74	67	71	66

Влияет ли квалификация продавцов на количество обслуженных покупателей?

2. На контрольном занятии операторов ПЭВМ фиксировался объем вводимой информации (количество символов в минуту) в зависимости от ее сложности. Результаты представлены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Сложность информации	Объем вводимой информации			
	1-й оператор	2-й оператор	3-й оператор	4-й оператор
№ 1	123	141	128	134
№ 2	98	112	106	102
№ 3	92	104	97	108

Влияет ли уровень подготовки операторов на объем вводимой информации?

Влияет ли сложность информации на объем вводимой информации?

Выявить наиболее существенно влияющий фактор (уровень подготовки оператора или сложность вводимой информации).

3. Анализируется влияние типа вносимого минерального удобрения на урожайность зерновых культур в четырех хозяйствах с разным типом почвы. Результаты представлены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

Тип удобрения	Урожайность с гектара в центнерах			
	1-е хоз-во	2-е хоз-во	3-е хоз-во	4-е хоз-во
№ 1	24	31	33	38
№ 2	27	29	36	41
№ 3	22	26	34	35

Влияет ли тип удобрения на урожайность?

Влияет ли тип почвы в хозяйстве на урожайность?

Какой из рассматриваемых факторов оказывает наиболее существенное влияние?

9. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

9.1. Сущность регрессионного анализа

Регрессионный анализ (РА) представляет собой совокупность статистических методов обработки результатов испытаний, позволяющих в условиях стохастической зависимости выходной (изучаемой) переменной от входных (объясняющих) факторов, определять данную зависимость.

Рассматривают две модели регрессионного анализа [2, 3, 54]. В первой модели зависимая переменная Y — случайная переменная, а независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_k — не случайные переменные. Модель регрессионного анализа имеет вид

$$Y = \eta(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon. \quad (9.1)$$

Во второй модели как зависимая переменная Y , так и независимые переменные X_1, X_2, \dots, X_k являются случайными величинами, а функция отклика имеет вид

$$Y = \eta(X_1, X_2, \dots, X_k) + \varepsilon. \quad (9.2)$$

Исследования в рамках второй регрессионной модели проводят, как правило, с привлечением методов корреляционного анализа.

В дальнейшем будем рассматривать в основном методы регрессионного анализа применительно к первой модели. Для второй модели будем отмечать лишь специфику соответствующих методов исследования.

Сущность регрессионного анализа состоит в замене стохастической зависимости между переменными Y и x_1, x_2, \dots, x_k некоторой детерминированной зависимостью, которая достаточно хорошо аппроксимирует основные свойства исходной стохастической зависимости. В регрессионном анализе используется детерминированная форма причинно-следственной зависимости; форма, при которой устанавливается аналитическая зависимость между некоторой характеристикой случайной величины Y и независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_k . В качест-

ве такой характеристики в регрессионном анализе используется условное математическое ожидание выходной переменной Y при условии, что входные переменные x_1, x_2, \dots, x_k приняли определенные значения. Таким образом, сущность регрессионного анализа состоит в замене зависимостей вида (9.1) или (9.2) зависимостью вида

$$M[Y/x_1, x_2, \dots, x_k] = \eta(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (9.3)$$

Поскольку зависимость (9.3) называется уравнением регрессии, то это название и определило название методов, объединенных в регрессионном анализе.

В работе [3] приводится следующая классификация регрессионного анализа (рис. 9.1)



Рис. 9.1

По виду функциональной зависимости принято различать линейный регрессионный анализ, в котором функция $\eta(x_1, x_2, \dots, x_k)$ является линейной по параметрам (коэффициентам), т. е. имеет вид

$$M[Y / x_1, x_2, \dots, x_k] = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i, \quad (9.4)$$

и нелинейный, в котором данная функция нелинейна относительно коэффициентов b_i .

Порядок функциональной зависимости определяется по отношению к наивысшей степени независимой переменной. Например, модель регрессионного анализа третьего порядка имеет вид

$$M[Y/x] = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3. \quad (9.5)$$

Модель первого порядка описывается выражением (9.4).

По числу независимых переменных регрессионный анализ подразделяют на однофакторный, в котором только одна независимая переменная, и многофакторный, в котором число независимых переменных более одной. Например, модель (9.4) соответствует линейному многофакторному РА первого порядка, а модель (9.5) — линейному однофакторному РА третьего порядка.

Если имеется априорная информация о законах распределения случайных величин X_1, X_2, \dots, X_k , то регрессионный анализ опирается на непараметрические методы и называется непараметрическим.

Для установления зависимости (9.3) необходимо решить ряд задач, которые и составляют собственно регрессионный анализ. К их числу относят:

- 1) выбор класса функций, в рамках которого определяется зависимость между y и x_1, x_2, \dots, x_k ;
- 2) выбор подходящих значений коэффициентов, определяющих конкретный вид функции;
- 3) оценка точности аппроксимации зависимости (9.1) или (9.2) функций (9.3).

Необходимо отметить, что первая из перечисленных задач в рамках регрессионного анализа не решается. Методы регрессионного анализа позволяют только оценить насколько удачен этот выбор.

9.2. Задача регрессионного анализа

В соответствии с п. 8.1 регрессионный анализ позволяет дать ответ на 5-й вопрос, т. е. установить вид причинно-следственной зависимости между факторами и результатом (8.1).

Например, необходимо установить зависимость объема продажи продукции от интенсивности ведения рекламной кампании и вложенных в нее средств.

Вначале для простоты изложения предположим: выходная переменная Y является функцией одного параметра x . При N уровнях x проведены эксперименты и получено N средних значений Y . Требуется по результатам экспериментов оценить зависимость (8.1), которая в некотором смысле наилучшим образом отражала бы данные эксперимента.

Для наглядности и удобства анализа результатов эксперимента их представляют графически. Так, на рис. 9.2 показаны средние значения некоторой выходной переменной y , полученные при семи уровнях параметра x .

Зададимся целью построить график функции $y = \varphi(x)$ по полученным экспериментальным данным. Можно было бы, например, найти полином, график которого прошел бы через все экспериментальные точки. Известно, что через две точки можно провести прямую (полином первой степени), через три точки — параболу (полином второй степени), через N точек можно провести кривую, уравнение которой есть полином $(N - 1)$ -й степени. Однако построить график по всем экспериментальным точкам смысла не имеет. Это обусловлено случайным характером выходной переменной.

Если провести еще серию экспериментов при тех же уровнях x , то получим отличные от представленных на рис. 9.2 значения y .

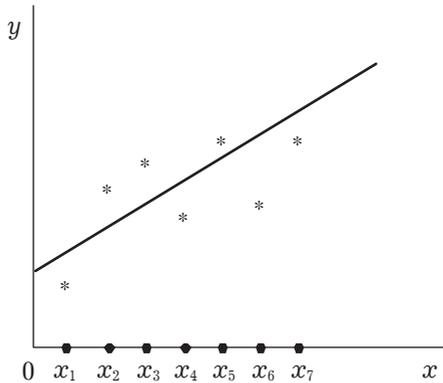


Рис. 9.2

Анализируя расположение точек на графике (рис. 9.2), можно предположить, что выходная переменная y растет с увеличением x по линейному закону:

$$y = b_0 + b_1x. \quad (9.6)$$

Тот факт, что экспериментальные точки не лежат на одной прямой, объясняется случайными отклонениями y от линейной зависимости. В данном случае удобно ввести следующую модель эксперимента:

$$y = b_0 + b_1x + \varepsilon,$$

где ε — случайная величина с нулевым математическим ожиданием, которую называют ошибкой эксперимента.

Качество эксперимента определяется дисперсией ошибки σ_ε^2

Если бы эта дисперсия была равна нулю, то эксперимент можно было бы считать идеальным. В этом случае все экспериментальные точки легли бы на прямую, описываемую уравнением (9.6), при условии, что зависимость y от x в действительности линейная.

Чем больше дисперсия σ_ε^2 , тем хуже эксперимент. Легко видеть, что дисперсия y равна дисперсии случайной величины ε , ибо в силу теоремы о дисперсии

$$\sigma_y^2 = \sigma^2[b_0 + b_1x + \varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2. \quad (9.7)$$

Величину σ_y^2 называют *дисперсией воспроизводимости*. Если эксперимент повторить при одном и том же уровне x , т. е. многократно воспроизводить одинаковый комплекс условий, то, очевидно, y будет каждый раз принимать разные значения. Разброс этих значений относительно математического ожидания $M[Y]$ характеризуется дисперсией σ_y^2 .

Будем полагать, что линейный вид зависимости установлен и не вызывает сомнений. Однако коэффициенты b_0 и b_1 неизвестны. Требуется их оценить с наибольшей точностью по экспериментальным данным, т. е. найти оценки b_0^* и b_1^* . Оценить коэффициенты b_0 и b_1 по результатам экспериментов позволяют методы регрессионного анализа (РА).

Для оценивания коэффициентов в регрессионном анализе в основном используется метод наименьших квадратов (МНК) [33, 54].

9.3. Метод наименьших квадратов

Сущность МНК можно проиллюстрировать рисунком 9.3.

Здесь показаны уровни входной переменной x и отвечающие им значения наблюдаемой в эксперименте переменной y . Кроме того, на рис. 9.3 изображен график зависимости (функции отклика), $y = \varphi(x)$. Для определенности на рисунке 9.4 показана линейная зависимость.

Коэффициенты b_0 и b_1 определяют положение прямой. При этом b_0 есть значение линейной функции в точке $x = 0$, а $b_1 = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой к оси x . Найдем отклонения экспериментальных точек y_i от линии $y = \eta(x)$:

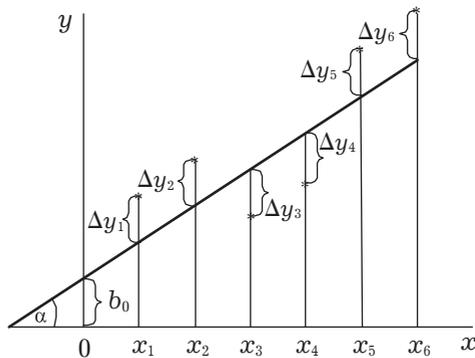


Рис. 9.3

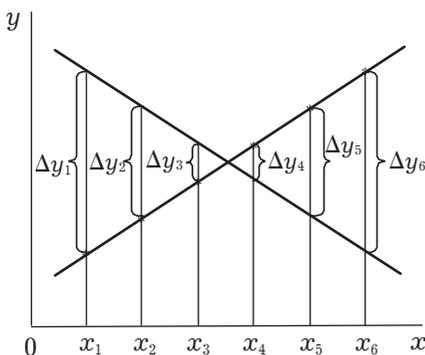


Рис. 9.4

$$\Delta y_i = y_i - \eta(x_i). \quad (9.8)$$

В случае линейной функции отклика (рис. 9.3)

$$\Delta y_i = y_i - b_0 - b_1 x_i. \quad (9.9)$$

Очевидно, коэффициенты b_0 и b_1 следует подобрать таким образом, чтобы отклонения $\Delta y_i (i = 1, 2, \dots, N)$ были как можно меньше. Казалось бы, что сумма всех отклонений достаточно полно характери-

зует степень соответствия функции отклика экспериментальным данным. Действительно, если все экспериментальные точки легли на линию $\varphi(x)$, то сумма всех отклонений будет равна нулю $\sum \Delta y_i = 0$. Ситуация, изображенная на рисунке 9.4, показывает несостоятельность такого подхода. Здесь сумма отклонений также равна нулю, но функция отклика совершенно не соответствуют результату эксперимента: большие отклонения взаимно погасились.

О близости функции отклика экспериментальным точкам можно судить по сумме абсолютных значений отклонений $\sum |\Delta y_i|$. Однако такой подход в большинстве случаев приводит к серьезным вычислительным трудностям, а полученные на этой основе оценки коэффициентов не всегда эффективны. Лучше использовать в качестве меры отклонения функции отклика от экспериментальных точек сумму квадратов отклонений этих точек от линии $\varphi(x)$, т. е.

$$Q = \sum_{i=1}^N \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - \eta(x_i)]^2. \quad (9.10)$$

При фиксированном числе точек N чем больше сумма квадратов отклонений Q , тем меньше график заданного вида $\eta(x)$ соответствует экспериментальным данным. Теперь можно сформулировать принцип, на котором основан МНК: *коэффициенты уравнения регрессии $\eta(x)$ следует подобрать таким*

образом, чтобы сумма квадратов отклонений Q функции отклика от экспериментальных точек была минимальной. С этой целью следует найти частные производные от Q по параметрам $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_s} = -2 \sum_{i=1}^N [y_i - \varphi(x_i)] \frac{\partial \varphi}{\partial b_s}, \quad s = \overline{0, m}. \quad (9.11)$$

Приравняв частные производные нулю и решив систему нормальных уравнений, получим $(m + 1)$ корней $b_0^*, b_1^*, \dots, b_m^*$, которые и будут оценками соответствующих коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m .

Покажем оценивание коэффициентов функции отклика на примере линейного уравнения (9.6). Составим сумму квадратов:

$$Q = \sum_{i=1}^N \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2. \quad (9.12)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b_0} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i), \\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i) \cdot x_i. \end{aligned}$$

Приравняв частные производные нулю, опустив (-2) и заменив b_0 на b_0^* , а b_1 на b_1^* , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N (y_i - b_0^* - b_1^* x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (y_i - b_0^* - b_1^* x_i) x_i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Раскроем скобки в левых частях уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i - N b_0^* - b_1^* \sum_{i=1}^N x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i - b_0^* \sum_{i=1}^N x_i - b_1^* \sum_{i=1}^N x_i^2 &= 0 \end{aligned} \right| \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^N x_i \\ N \end{array} \quad (9.13)$$

Решим эту систему линейных уравнений относительно неизвестных b_0^* и b_1^* . С этой целью вначале первое уравнение умножим на $-\sum x_i$, а второе — на N . Затем, сложив два уравнения, получим:

$$N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + b_1^* \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N b_1^* \sum_{i=1}^N x_i^2 = 0$$

Отсюда

$$b_1^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - N \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (9.14)$$

Значение b_0^* найдем из первого уравнения системы (9.13):

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - b_1^* \sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Подставив в это уравнение выражение для b_1^* , получим

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (9.15)$$

Теперь уравнение линейной регрессии можно записать в следующем виде:

$$y^* = b_0^* + b_1^* x,$$

где y^* — значение функции отклика, предсказанное по уравнению регрессии.

Выражения для определения коэффициентов уравнения регрессии существенно упрощаются, если начало координат по оси x перенести в центр эксперимента, т. е. $x_{1i} = x_i - x_{cp}$. В этом случае все суммы нечетных степеней x_{1i} будут равны нулю.

Поэтому выражения (9.14) и (9.15) принимают вид

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_{1i}^2 \right)}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2}, \quad (9.16)$$

$$b_1^* = \frac{N \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2}. \quad (9.17)$$

После проведения расчетов по определению коэффициентов уравнения регрессии необходимо вернуться к исходному значению фактора x .

В наиболее общем случае применения метода наименьших квадратов приходится иметь дело или с аппроксимирующими полиномами более высокой степени или/и зависимостью от нескольких факторов [2, 21, 29, 39]. При этом наиболее компактно методика определения коэффициентов уравнения аппроксимации может быть представлена с использованием матричной записи рассмотренных ранее выражений.

Например, если аппроксимирующая функция зависит от 2-х параметров и выбран полином 2-й степени, то в этом случае применения полиномиальной аппроксимации можно записать

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

В данном выражении применена система индексов при коэффициентах аппроксимации, практически не нуждающаяся в комментариях. По аналогичной схеме могут быть записаны выражения для более высоких степеней полинома или большего количества факторов.

Порядок определения коэффициентов аппроксимации в этом случае удобно представить с использованием правил матричной алгебры.

Матрица условий эксперимента называется X -матрицей независимых переменных

$$X = \|x_{ji}\| = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{K1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{K2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{KN} \end{vmatrix},$$

где j ($j = \overline{1, K}$) — номер столбца (номер независимой переменной);

i ($i = \overline{1, N}$) — номер опыта.

Каждая строка соответствует определенному комплексу условий эксперимента.

Результаты экспериментов запишем в виде вектора столбца

$$Y = \|y_i\| = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{vmatrix},$$

где y_i — значение основного выходного параметра при i -м комплексе условий (результат i -го опыта).

Введем вектор-столбец коэффициентов уравнения аппроксимации

$$B = \|b_j\| = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_K \end{vmatrix}.$$

Опуская промежуточные выкладки аппарата матричной алгебры, запишем окончательное выражение для определения коэффициентов уравнения аппроксимации

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

где X^T и $(X^T X)^{-1}$ — транспонированная и обратная матрицы, соответственно.

Метод наименьших квадратов может быть применен в задачах обычной аппроксимации функций, значения которой в отдельных точках заданы. В этом случае не ставится ста-

тистическая задача об оценке уравнения регрессии. Здесь ни о каком случайном характере исходных данных обычно речи не ведут, а ищут более простую приближенную функциональную зависимость одной переменной от других. В регрессионном анализе случайный характер наблюдаемой переменной существует.

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет вычислять коэффициенты функции отклика в виде полинома заданной степени. При этом составляют систему уравнений путем приравнивания нулю частных производных от суммы квадратов отклонений (9.11) по всем искомым коэффициентам полинома. Затем, решая полученную систему уравнений, находят оценки коэффициентов.

Необходимо отметить, что между оценками коэффициентов b_j^* , $j = 1, m$ имеет место стохастическая зависимость, т. е. оценки коэффициентов коррелированы $K[b_i^*, b_j^*] \neq 0$. Это обстоятельство в значительной мере затрудняет физическую интерпретацию коэффициентов. Полученную зависимость $y^* = \eta^*(x)$ имеет смысл использовать только для интерполяции, т. е. для предсказания значений выходной переменной внутри области эксперимента. Эта область может оказаться достаточно узкой. Предсказывать значения выходной переменной за пределами экспериментальной области, т. е. использовать полученную зависимость с целью экстраполяции, не удастся. Кроме того, возникают трудности вычислительного характера при решении системы уравнений (9.13).

Число уравнений в системе равно C_{d+k}^d . Как известно, число сочетаний C_{d+k}^d быстро растет с увеличением степени d полинома и числа k входных параметров. Поэтому с ростом d и k трудоемкость вычислений очень быстро растет. При оценке функции отклика часто приходится менять порядок полинома d . При этом меняется число членов полинома, и каждый раз все вычисления необходимо проводить заново.

Указанные трудности можно избежать, если условия проведения эксперимента заранее спланировать, т. е. использовать схему активного эксперимента. Эксперимент нужно пла-

нирывать таким образом, чтобы моменты связи любой пары оценок коэффициентов функции отклика были бы равны нулю, т. е. $K[b_i^*, b_j^*] = 0$. Приемы и правила оценивания коэффициентов функции отклика в рамках активного эксперимента изложены в [20, 61].

Коэффициент линейной регрессии b_1 в модели 2 регрессионного анализа тесно связан с коэффициентом корреляции r_{xy} . (Для модели 1 такой связи не существует, так как фактор x неслучаен и $r_{xy} = 0$.) Напомним, что коэффициент корреляции определяется выражением

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Так как

$$Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon; \quad M[Y] = b_0 + b_1 M[X],$$

то

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{M[(X - m_x)(Y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} = \\ &= \frac{M[(X - m_x)(b_0 + b_1 - b_0 - b_1 M[X])]}{\sigma_x \sigma_y} = \\ &= b_1 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x \sigma_y} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}; \quad b_1^* = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \end{aligned}$$

Перед тем как проводить РА необходимо оценить существование зависимости между X и Y с помощью методов корреляционного анализа.

МНК в модели 2 дает смещенные оценки коэффициентов регрессии. Для определения несмещенных оценок используют два пути:

1) исключение смещения за счет использования информации о корреляционных матрицах K_{x,x_j} , $K_{x,y}$

2) использование специальных методов определения коэффициентов регрессии (методы конфлюэнтного анализа).

В частности, принципа правдоподобия с учетом информации об ошибках измерения выходной переменной ε и входных переменных σ .

9.4. Предпосылки регрессионного анализа

Метод наименьших квадратов позволяет получить несмещенные, эффективные и состоятельные оценки b_j^* коэффициентов b_j в том случае, если выполняется ряд допущений. Эти допущения называют предпосылками регрессионного анализа:

1. Выходные переменные Y_1, Y_2, \dots, Y_N есть попарно независимые случайные величины. Независимость случайных величин ведет к отсутствию корреляции между ними. Таким образом, момент связи между любой парой Y_i и Y_j ($i, j = \overline{1, N}$) равен нулю $K_{y_i, y_j} = 0$. Случайные величины Y_1, Y_2, \dots, Y_N имеют нормальное распределение. Напомним, что при нормальном распределении отсутствие корреляции между двумя случайными величинами является необходимым и достаточным условием их независимости.

2. Дисперсия воспроизводимости σ_y^2 однородна по всему факторному пространству. Это значит, что случайные величины Y_1, Y_2, \dots, Y_N имеют одинаковую дисперсию, т. е.

$$\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_2}^2 = \dots = \sigma_{y_N}^2 = \sigma_y^2.$$

3. Входные переменные (факторы) x являются неслучайными переменными, т. е. их дисперсия равна нулю ($\sigma_x^2 = 0$). Однако в практике точно установить фактор на определенный уровень, как правило, не удастся. Поэтому иногда можно считать факторы случайными переменными, дисперсия которых значительно меньше дисперсии воспроизводимости, т. е. $\sigma_x^2 \ll \sigma_y^2$.

4. В своей совокупности входные переменные x_1, x_2, \dots, x_N линейно независимы. Это значит, что нельзя одну из этих переменных представить в виде линейной комбинации других переменных.

5. Функция отклика линейна по параметрам.

6. Вид функции отклика известен, т. е. уравнение известно с точностью до параметров.

На практике довольно трудно выполнить все перечисленные условия. Часто некоторые предпосылки могут быть нарушены. Поэтому необходимо отчетливо представлять себе последствия таких нарушений. Так, если результаты эксперимента Y_1, Y_2, \dots, Y_N между собой зависимы ($K_{y_i, y_j} \neq 0$), то использовать регрессионный анализ нельзя.

В случае, если результаты эксперимента Y_1, Y_2, \dots, Y_N имеют распределение, отличное от нормального, то регрессионный анализ можно использовать, но МНК в этом случае не гарантирует получения эффективных оценок параметров.

Если дисперсия воспроизводимости неоднородна, то нельзя статистическими методами установить соответствие полученной функции отклика опытным данным (проверить гипотезу об адекватности модели эксперимента). Без такой проверки функция лишается практического смысла.

Линейная параметризация есть необходимое условие регрессионного анализа. Однако иногда по своей физической природе функция отклика не допускает линейной параметризации. В этом случае нередко удается некоторым преобразованием привести функцию к линейному по параметрам виду.

Часто исследователю неизвестен вид функции отклика. В этом случае последовательно подбирают функцию нужного вида. При этом обычно рассматривают полиномы различных степеней. Вначале выдвигается гипотеза о линейной функции отклика, т. е. полагают, например,

$$\eta(x) = b_0 + b_1x.$$

Затем оценивают коэффициенты b_0 и b_1 и проверяют адекватность выбранной модели.

Если гипотеза о линейной зависимости отвергается, то выдвигается гипотеза о параболическом виде функции отклика, например,

$$\eta(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

Заново оценивают методом наименьших квадратов коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 и проверяют адекватность модели. Если и эта гипотеза отвергается, то переходят к анализу более сложного уравнения третьей степени и т. д. до тех пор, пока не будет получена адекватная модель.

9.5. Статистический анализ уравнения регрессии

Формирование уравнения регрессии и последующий статистический анализ этого уравнения являются двумя составными частями регрессионного анализа. Полученное уравнение регрессии по опытным данным без статистического анализа остается лишь статистической гипотезой и, как всякая гипотеза, требует проверки.

Целью статистического анализа уравнения регрессии являются:

1. Проверка выполнимости некоторых предпосылок регрессионного анализа. В частности, проверка однородности дисперсии воспроизводимости, проверка независимости результатов эксперимента Y_1, Y_2, \dots, Y_N и т. п.

2. Проверка адекватности регрессионной модели, т. е. степени соответствия функции отклика опытным данным.

3. Оценка эффектов факторов и их взаимодействий, т. е. оценка вкладов факторов в величину отклика.

4. Оценка способности уравнения регрессии предсказывать значения функции отклика при различных сочетаниях уровней факторов, т. е. в различных точках факторного пространства, в которых опыты не ставились.

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости

Однородность дисперсии воспроизводимости является одной из основных предпосылок регрессионного анализа.

Если в каждой точке факторного пространства (при каждом сочетании уровней входных переменных) поставлено по одному эксперименту, то в общем случае дисперсию воспроизводимости оценить нельзя. Поэтому при неизвестной дисперсии

σ_y^2 в каждой точке проводят n_i опытов, по результатам которых находят оценку дисперсии воспроизводимости в точке x_i

$$\sigma_i^{*2}\{Y\} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - m_{yi}^*)^2, \quad (9.18)$$

где

$$m_{yi}^* = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}.$$

Предположим теперь, что в N точках факторного пространства x_1, x_2, \dots, x_N поставлено более чем по одному эксперименту. В каждой из этих точек найдены оценки дисперсий воспроизводимости по формуле (9.18)

$$\sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \dots, \sigma_N^{*2}.$$

При этом число степеней свободы для оценки дисперсии воспроизводимости в точке x_i равно $k_i = n_i - 1$. Затем проверяется гипотеза об однородности дисперсии воспроизводимости по всему факторному пространству. Если дисперсия воспроизводимости однородна, то можно найти усредненную по всем N точкам факторного пространства оценку дисперсии воспроизводимости

$$\sigma_y^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^N k_i \sigma_i^{*2}}{\sum_{i=1}^N k_i}. \quad (9.19)$$

В случае, когда в каждой точке x_i проведено одинаковое число экспериментов, т. е. $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n$, формула (9.19) примет следующий вид:

$$\sigma_y^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (y_{ij} - m_{yi}^*)^2}{N(n-1)}. \quad (9.20)$$

Число степеней свободы для усредненной оценки дисперсии (9.19) равно

$$k = \sum_{i=1}^N k_i.$$

Для проверки однородности дисперсии в практике регрессионного анализа используются три метода.

1. Проверка однородности дисперсии методом Снедекора-Фишера.

Из ряда оценок дисперсии воспроизводимости σ_1^{*2} , σ_2^{*2} , ..., σ_N^{*2} выбирают наибольшую σ_{\max}^{*2} и наименьшую σ_{\min}^{*2} . Из выбранных двух оценок составляют F -отношение

$$F = \frac{\sigma_{\max}^{*2}}{\sigma_{\min}^{*2}}. \quad (9.21)$$

При выбранном уровне значимости α по числу степеней свободы h_1 и h_2 для σ_{\max}^{*2} и σ_{\min}^{*2} соответственно из таблицы F -распределения (табл. 14 приложения 1) выбирают значение границы критической области f_α . Вычисленное по формуле (9.21) значение показателя согласованности f^* сравнивают с табличным значением f_α . Если $f^* < f_\alpha$, то гипотеза об однородности дисперсии воспроизводимости принимается.

Действительно, если незначимо отличаются крайние оценки дисперсии, то тем более незначимо различие между промежуточными оценками. Нулевая гипотеза об однородности дисперсии должна быть отвергнута в случае $f^* > f_\alpha$.

Данный метод прост, но недостаточно надежен. С ростом числа точек факторного пространства, в которых ставятся опыты, возрастает вероятность получить большую разницу между σ_{\max}^{*2} и σ_{\min}^{*2} при однородной дисперсии воспроизводимости, т. е. допустить ошибку первого рода (ошибочно забраковать нулевую гипотезу).

2. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости методом Кохрена.

Данный метод применим при условии, что число опытов в каждой из N точек факторного пространства одинаково, т. е. $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n$.

Как и в первом случае из ряда оценок дисперсии воспроизводимости σ_1^{*2} , σ_2^{*2} , ..., σ_N^{*2} находят максимальную оценку σ_{\max}^{*2} . Затем формируют показатель согласованности в виде

$$u = \frac{\sigma_{\max}^{*2}}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^{*2}}. \quad (9.22)$$

При заданном уровне значимости α из таблицы распределения Кохрена [9] находят граничное значение показателя согласованности u_α . Нулевая гипотеза об однородности дисперсии воспроизводимости не отвергается, если вычисленное значение показателя согласованности по формуле (9.22) не превысит значение u_α , т. е. $u^* < u_\alpha$.

Метод Кохрена достаточно надежен, но применимость его ограничена, поскольку он требует одинакового числа опытов во всех точках.

3. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости методом Бартлета.

Проверка однородности дисперсии методом Бартлета осуществляется в следующем порядке.

В каждой точке факторного пространства, где ставились опыты, находят оценки дисперсий $\sigma_1^{*2}, \sigma_2^{*2}, \dots, \sigma_N^{*2}$.

Затем находят усредненную оценку дисперсии $\sigma_y^{*2}[Y]$ по формуле (9.19) или (9.20).

Рассчитывается значение показателя согласованности:

$$u^* = \frac{1}{c} \left[h \lg \sigma_y^{*2}[Y] - \sum_{i=1}^N h_i \lg \sigma_i^{*2} \right], \quad (9.23)$$

где $c = 0,4343 \left[1 - \frac{1}{3(N_1 - 1)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i} - \frac{1}{h} \right) \right]$;

$h = \sum_{i=1}^N k_i$ — число степеней свободы для усредненной оценки дисперсии воспроизводимости;

$N_1 = \sum_{i=1}^N n_i$ — общее число опытов.

Бартлет показал, что распределение показателя согласованности (9.23) приближенно можно описать χ^2 (хи-квадрат) распределением с числом степеней свободы $(N - 1)$.

При заданном уровне значимости α в таблице χ^2 (хи-квадрат) распределения находят граничное значение u_α . С ним сравнивают вычисленное по формуле (9.23) значение показателя согласованности u^* . Если $u^* < u_\alpha$, то гипотеза об однородности дисперсии воспроизводимости не отвергается. В противном случае ($u^* > u_\alpha$) полагают, что дисперсия неоднородна.

Метод Бартлетта надежен и не требует одинакового числа опытов в каждой точке. Однако он более чувствителен к нарушению нормальности распределения результатов эксперимента Y , чем метод Фишера.

После установления однородности дисперсии воспроизводимости усредненную оценку дисперсии (9.19) или (9.20) можно использовать в качестве оценки дисперсии воспроизводимости эксперимента σ_y^2 . В экспериментальной практике не редки случаи, когда дисперсия воспроизводимости известна еще до начала эксперимента. В этой ситуации проводить проверку однородности дисперсии вышеназванными методами не имеет смысла.

Проверка адекватности регрессионной модели

Центральной задачей анализа уравнения регрессии является проверка адекватности модели. Только в рамках адекватной модели можно делать определенные выводы и принимать обоснованные решения. Неадекватная модель практической полезностью почти не обладает. Напомним, что *под адекватностью модели понимают степень соответствия модели тому реальному процессу, для описания которого она вводится.* (В нашем случае степень соответствия уравнения регрессии опытными данными.)

Для проверки адекватности уравнения регрессии необходимо, чтобы число степеней свободы было больше нуля. Число степеней свободы k определяется как разность между числом точек, в которых ставились эксперименты N , по которым оценивают коэффициенты b_j , и числом этих коэффициентов $m + 1$. Таким образом, $k = N - m - 1$.

При отрицательном числе степеней свободы $k < 0$, т. е. при ($N < m + 1$) метод наименьших квадратов не может быть ис-

пользован. При $k = 0$ уравнение регрессии может быть получено, однако статистический анализ этого уравнения провести нельзя, ибо для проверки адекватности модели не остается степеней свободы. При $k > 0$ остаются степени свободы для проверки адекватности регрессионной модели.

Проверка адекватности регрессионной модели основана на сравнении рассеивания экспериментальных значений наблюдаемой переменной относительно линии регрессии с рассеиванием этих значений относительно своих математических ожиданий. Рассеивание экспериментальных значений относительно математического ожидания характеризуется дисперсией воспроизводимости σ_y^2 . Для характеристики рассеивания опытных точек относительно линии регрессии используют остаточную сумму квадратов отклонений экспериментальных значений выходной переменной от линии регрессии:

$$S_R = \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2, \quad (9.24)$$

где y_i — значение выходной переменной, полученное в i -м эксперименте;

y_i^* — значение выходной переменной, полученное по уравнению регрессии.

Очевидно, чем больше эта сумма, тем больше рассеивание экспериментальных точек относительно линии регрессии. Однако величина остаточной суммы зависит еще и от количества экспериментов N . Даже при сравнительно небольших отклонениях y_i от y_i^* за счет увеличения числа слагаемых N можно получить большое значение S_R . Если разделить S_R на число степеней свободы $k = N - m - 1$, то величина S_R уже не будет зависеть от числа экспериментов. Величину остаточной суммы S_R , отнесенную к одной степени свободы, называют остаточной дисперсией (или дисперсией адекватности) и обозначают σ_R^2 . Таким образом

$$\sigma_R^2 = S_R / k. \quad (9.25)$$

Остаточная дисперсия σ_R^2 характеризует рассеивание экспериментальных точек относительно линии регрессии.

Для сопоставления рассеивания экспериментальных точек относительно линии регрессии с рассеиванием этих точек относительно своих математических ожиданий следует сравнить остаточную дисперсию σ_R^2 с дисперсией воспроизводимости σ_y^2 . С этой целью используется F -отношение Снедекора-Фишера:

$$F(k_1, k_2) = \frac{\sigma_R^2}{\sigma_y^2}. \quad (9.26)$$

Задаваясь определенным уровнем значимости α (обычно назначают $\alpha = 0,1; 0,02$), по числу степеней свободы $k_1 = N - m - 1$ для вычисленной остаточной дисперсии и k_2 — для дисперсии воспроизводимости входят в таблицы F -распределения. Проверяемая гипотеза об адекватности уравнения регрессии не отвергается, если

$$f^*(k_1, k_2) < f_\alpha(k_1, k_2).$$

В противном случае регрессионную модель считают неадекватной. Число степеней свободы k_2 для дисперсии воспроизводимости определяется исходя из формул, по которым оценивалась эта дисперсия.

Подробно методика проверки гипотез о равенстве дисперсий изложена в п. 6.3.2. При этом числа степеней свободы k_1 и k_2 выбирают следующим образом. Если остаточная дисперсия σ_R^2 оказалась больше дисперсии воспроизводимости σ_y^2 , то принимают $k_1 = N - m - 1$ и k_2 , равное числу степеней свободы, при котором получена оценка дисперсии воспроизводимости.

Если же большим оказалось значение дисперсии воспроизводимости, то принимают k_1 , равное числу степеней свободы для дисперсии воспроизводимости, и $k_2 = N - m - 1$. При вычислении значения F -отношения в числитель дроби всегда подставляют большую оценку дисперсии и гипотезу о равенстве дисперсий отвергают, если окажется, что $f^* > f_\alpha$.

Оценка эффектов факторов и их взаимодействий

После проведения проверки адекватности регрессионной модели переходят к оценке вкладов факторов в величину от-

клика и их взаимодействий, т. е. проверяют значимость коэффициентов регрессии. Необходимость этого определяется тем, что при использовании метода наименьших квадратов были получены оценки b_i^* теоретических коэффициентов регрессии b_i . Коэффициенты b_i отражают эффекты или вклады факторов в величину отклика. Если $b_i = 0$, то фактор x_i не влияет на величину отклика и может быть исключен из уравнения регрессии. Однако в силу наличия случайных факторов оценка коэффициента b_i^* может быть отличной от нуля. Следовательно, для принятия решения об исключении какого-либо фактора из уравнения регрессии необходимо проверить статистическую гипотезу о равенстве соответствующего коэффициента нулю, т. е. $H_0 : b_i = 0$ против альтернативы $H_0 : b_i \neq 0$. В случае неотвержения нуль-гипотезы фактор x_i можно исключить из регрессионной модели, тем самым, упростив ее.

Статистическую проверку нуль-гипотезы проводят с использованием t -критерия Стьюдента:

$$t^* = \frac{b_i^*}{\sigma^*[b_i^*]}.$$

Вычисленное значение t^* сравнивают с табличным значением t_α при заданном уровне значимости α . Если выполняется неравенство $t^* < t_\alpha$, то нуль-гипотеза не отвергается и фактор x_i может быть исключен из уравнения регрессии.

Значимость коэффициента регрессии можно установить с помощью доверительного интервала. По заданной доверительной вероятности α и по числу степеней свободы, при котором оценивалась дисперсия воспроизводимости, в таблицах распределения Стьюдента находят величину t_α и строят доверительный интервал:

$$[b_i^* - \gamma; \quad b_i^* + \gamma],$$

где $\gamma = t_\alpha \cdot \sigma^*[b_i^*]$.

Коэффициент считают незначимым, если построенный доверительный интервал накрывает нуль. Методика построения доверительных интервалов описана в п. 5.5.

При вычислении доверительного интервала для коэффициентов уравнения регрессии необходимо знание дисперсии оценки этих коэффициентов.

На примере линейной регрессионной модели получим зависимости для дисперсий оценок коэффициентов

$$y^* = b_0^* + b_1^* x$$

Оценку коэффициента b_1 (9.14) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} b_1^* &= \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N x_{cp}^2 \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i - x_{cp} \sum_{i=1}^N y_i \right) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2 \right]^{-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp}) y_i = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_N y_N, \end{aligned}$$

$$\text{где } k_i = \frac{x_i - x_{cp}}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}; \quad i = \overline{1, N}, \quad x_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Тогда дисперсия оценки коэффициента $b_1 \sigma^2[b_1^*]$ будет равна

$$\begin{aligned} \sigma^2[b_1^*] &= \left(\sum_{i=1}^N k_i^2 \right) \sigma_y^2 = \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2 \right]^{-2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2 \sigma_y^2 = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2 \right]^{-1} \sigma_y^2. \end{aligned}$$

Вычислим дисперсию оценки $\sigma^2[b_0^*]$ коэффициента b_0 :

$$b_0^* = y^* - b_1^* x.$$

Оценки y^* и b_1^* некоррелированы, так как $\sum_{i=1}^N k_i = 0$.

Поэтому

$$\sigma^2[b_0^*] = \sigma^2[y^*] + x^2 \sigma^2[b_1^*]$$

или

$$\sigma^2[b_0^*] = \frac{\sigma_y^2}{N} + \frac{x^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2} \sigma_y^2 = \sigma_y^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{x^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2} \right].$$

Доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии при заданной доверительной вероятности α запишутся в виде

$$b_1^* - \frac{t_\alpha \sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}} < b_1 < b_1^* + \frac{t_\alpha \sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}};$$

$$b_0^* - t_\alpha \sigma_y \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{x^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}} < b_0 < b_0^* + t_\alpha \sigma_y \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{x^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}}.$$

Проверку значимости коэффициентов регрессии такими методами можно проводить только в том случае, когда оценки коэффициентов регрессии некоррелированы между собой.

В общем случае при неортогональном планировании коэффициенты уравнения регрессии между собой зависимы. Доверительный интервал какого-либо фактора зависит от значения, которое приняли остальные коэффициенты регрессии. Это в значительной мере затрудняет интерпретацию модели.

Момент связи оценок коэффициентов линейной регрессии можно вычислить по формуле

$$K_{b_0^* b_1^*} = M[(b_0^* - b_0)(b_1^* - b_1)] = \frac{x \sigma_y^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

При ортогональном планировании дисперсия оценок коэффициентов уравнения линейной регрессии $\sigma^2[b_j^*]$ одинакова и равна

$$\sigma^2[b_j^*] = \frac{\sigma_y^2}{N}.$$

Оценка точности предсказанного отклика

Завершающим этапом статистического анализа регрессии является оценка точности предсказанного отклика.

По полученному уравнению регрессии можно предсказать значение функции отклика в любой точке факторного пространства. При этом, однако, необходимо помнить о том, что y^* есть случайная величина. Следовательно, точность предсказанного отклика необходимо характеризовать дисперсией $\sigma^2[y^*]$ (дисперсией предсказанного отклика).

В простейшем случае (полином первого порядка одного аргумента), используя теоремы о дисперсии линейной функции случайных аргументов, можно получить выражение для дисперсии предсказанного отклика:

$$\sigma^2[y^*] = \sigma^2[b_0^* + b_1^*x].$$

Если предположить, что дисперсия воспроизводимости однородна по всему факторному пространству и начало координат перенесено в центр эксперимента, то

$$\sigma^2[y^*] = \frac{\sigma_y^2}{N} + \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2} x^2, \quad (9.27)$$

где $\sigma^2[b_0^*] = \frac{\sigma_y^2}{N}$, $\sigma^2[b_1^*] = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

Из этой формулы следует, что дисперсия предсказанного отклика минимальна в центре проведения эксперимента и зависит от целого ряда моментов.

Во-первых, от положения в факторном пространстве точки x , в которой предсказывается отклик. С удалением от центра эксперимента дисперсия предсказанного отклика возрастает.

Во-вторых, от неправильного выбора вида функции отклика, что приводит к существенным ошибкам в предсказании функции отклика.

В-третьих, от дисперсии воспроизводимости σ_y^2 эксперимента, поскольку она определяет дисперсию коэффициентов уравнения регрессии $\sigma^2[b_i^*]$. Очевидно, чем хуже эксперимент (больше дисперсия воспроизводимости), тем больше будет дисперсия предсказанного отклика.

В-четвертых, от расположения точек x_i в факторном пространстве, в которых ставились опыты. Влияние расположения экспериментальных точек на точность предсказания рассматривается в теории планирования эксперимента.

В-пятых, от способа оценивания коэффициентов уравнения регрессии. Метод наименьших квадратов приводит к эффективным оценкам параметров при нормальном распределении Y . Однако при других распределениях Y этот метод может привести к неэффективному оцениванию. Например, при распределении Y по закону Лапласа следует воспользоваться методом наименьших модулей. Неэффективное оценивание параметров регрессионной модели увеличивает дисперсию предсказанного отклика.

В-шестых, от общего числа опытов N , по результатам которых оценивается уравнение регрессии. Чем больше число опытов, тем более точно можно оценить коэффициенты уравнения регрессии и, следовательно, более точно предсказать отклик.

Для иллюстрации применения метода регрессионного анализа рассмотрим пример.

Пример 9.1. При изучении термической чувствительности самолетного тормозного твердотопливного двигателя измеряли его тягу на стенде при различных значениях температуры топлива. Результаты испытаний сведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Температура [°C]	-60	-40	-20	0	+20	+40	+60
Тяга [кг]	340	400	440	430	520	570	550

Дисперсия воспроизводимости эксперимента была известна и характеризовалась величиной $\sigma_y^2 = 529 \text{ кг}^2$. Требуется построить уравнение регрессии и провести его статистический анализ.

Решение.

Рассмотрим линейную зависимость тяги двигателя от температуры. По выражениям (9.16) и (9.17) получим оценки коэффициентов уравнения регрессии с учетом того, что в рассматриваемом примере $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \frac{3250}{7} = 464,3, \quad b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \frac{21000}{11200} = 1,875.$$

Запишем уравнение линейной регрессии

$$y^* = 464,3 + 1,875x$$

По полученной зависимости можно предсказывать тягу двигателя при различных значениях температуры топлива в пределах диапазона, в котором проводились испытания.

Однако для того чтобы быть уверенным в практической пригодности полученного уравнения регрессии необходимо провести его статистический анализ.

1. Проверим значимость коэффициентов уравнения регрессии. Значимость коэффициента b_0 , оцененная с помощью $b_0^* = 464,3$ не вызывает сомнений. Поэтому проверим значимость коэффициента b_1 . Для этого рассчитаем дисперсию оценки этого коэффициента по выражению

$$\sigma^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \right] = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{529}{11200} = 0,047.$$

Рассчитаем значение показателя согласованности Стьюдента

$$t = \frac{b_1^*}{\sigma[b_1^*]} = \frac{1,875}{\sqrt{0,047}} = 8648,73.$$

Полученное значение показателя согласованности в связи с его большой величиной нет необходимости сравнивать с табличным значением.

2. Проверим адекватность полученной регрессионной модели, для чего рассчитаем значение остаточной дисперсии

$$\sigma_R^2 = \frac{S_R}{k} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2}{k} = \frac{3596,4}{5} = 719,2.$$

Получим расчетное значение показателя согласованности Фишера

$$f = \frac{\sigma_R^2}{\sigma_y^2} = \frac{719,2}{529} = 1,36.$$

Из таблиц распределения Фишера находим критические значения показателя согласованности при числе степеней свободы, равных $k_1 = 5$, $k_2 = \infty$, и вероятности ошибки первого рода равной $\alpha = 0,1$ и $0,01$.

$$f_{0,1,5,\infty} = 2,21; f_{0,01,5,\infty} = 3,02.$$

Как видим, в том и другом случае расчетное значение показателя согласованности меньше критического. Следовательно, полученная регрессионная модель признается адекватно отражающей реальную зависимость тяги двигателя от температуры топлива.

3. Оценим точность модели эксперимента, которая определяется дисперсией предсказанного отклика $\sigma^2[y^*]$. Для проведения расчета воспользуемся выражением (9.27).

$$\sigma^2[y^*] = \frac{\sigma_y^2}{N} + \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2} x^2 = \frac{529}{7} + \frac{529}{11200} x^2 = 75,57 + 0,047x^2.$$

Полученное выражение для дисперсии предсказанного отклика свидетельствует о том, что точность предсказания результатов с помощью полученной модели минимальна в центре проведения эксперимента $\sigma^2[y = 0] = 75,57$ и убывает по мере удаления от него по параболической зависимости.

Как было показано выше, при статистическом анализе уравнения регрессии для проверки его адекватности реальному процессу необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсии воспроизводимости и остаточной дисперсии.

Однако в некоторых случаях определить дисперсию воспроизводимости и, следовательно, проверить ее однородность не представляется возможным, так как в каждой точке факторного пространства получено только по одному результату. Например, получены статистические данные в различных отраслях экономики с разбивкой по некоторым временным интервалам и необходимо провести их обработку для принятия соответствующих решений. Метод наименьших квадратов позволяет получить уравнение регрессии в соответствии с выбранной функцией отклика.

Как же в таком случае оценить практическую значимость полученной модели? Ответ на этот вопрос может быть получен с привлечением аппарата корреляционного анализа [Общая теория статистики: Учебник / под ред. Башиной О. Э., Спирина А. А. — М.: Финансы и статистика, 2003.]. Правомерность его применения оправдана лишь в тех случаях, когда изучаемая связь переменных не слишком существенно отстоит от функциональной (жесткой) связи.

Проверка практической значимости моделей осуществляется с использованием показателей тесноты связи между вход-

ной и выходной переменными. При анализе тесноты этой связи применяют следующие показатели вариации:

1) *общая дисперсия* выходной переменной σ_y^2 , отражающая совокупное влияние всех факторов

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{ср}})^2;$$

2) *факторная дисперсия* выходной переменной $\sigma_{y^*}^2$, отражающая влияние только независимой переменной

$$\sigma_{y^*}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^* - y_{\text{ср}})^2.$$

Отклонения в этой формуле характеризуют разброс значений y_i^* , полученных по уравнению регрессии от их общего математического ожидания;

3) *остаточная дисперсия* σ_ε^2 , отражающая разброс выходной переменной от всех остальных (неконтролируемых) факторов, кроме независимой переменной

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2.$$

Отклонения в этой формуле характеризуют разброс фактических значений y_i от значений, полученных по уравнению регрессии y_i^* .

Соотношение между факторной и общей дисперсиями характеризует меру тесноты связи между независимой и выходной переменными

$$R^2 = \frac{\sigma_{y^*}^2}{\sigma_y^2}.$$

Показатель R^2 называется *индексом детерминации* (причинности). Он выражает долю факторной дисперсии в общей дисперсии, т. е. характеризует, какая часть общей вариации выходной переменной объясняется влиянием входной переменной.

При функциональной (однозначной) связи значения y_i^* полностью совпадают с соответствующими значениями y_i , тогда

$\sigma_\varepsilon^2 = 0$. При отсутствии связи изменения x_i никак не отражаются на изменении y_i^* . В этом случае $\sigma_{y^*}^2 = \sigma_{y'}^2$, а при наличии корреляционной связи $\sigma_{y^*}^2 < \sigma_{y'}^2$.

С учетом теоремы сложения дисперсий

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y^*}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

получают формулу для расчета показателя тесноты связи — *индекса корреляции*

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}}.$$

Для оценки значимости индекса корреляции применяют показатель согласованности Фишера

$$f_R = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot \frac{N - s}{s - 1},$$

где s — число коэффициентов в уравнении регрессии.

Входами в таблицу при заданном уровне вероятности ошибки первого рода α служат величины $k_1 = s - 1$ и $k_2 = N - s$. Если $f_R > f_{\alpha, k_1, k_2}$, то величина индекса корреляции признается значимой.

Практическую ценность полученной *линейной модели* можно оценить с использованием индекса корреляции, в этом случае называемого коэффициентом корреляции

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \right]}}.$$

Для проверки значимости коэффициента корреляции применяют показатель согласованности Стьюдента

$$t_r = r_{xy} \sqrt{\frac{N - 2}{1 - r_{xy}^2}}.$$

Если вычисленное значение показателя согласованности окажется больше критического, то коэффициент корреляции признается значимым.

При значениях индекса корреляции менее 0,7 значение индекса детерминации будет менее 0,5. Это означает, что влияние факторного признака (независимой переменной x) оказывается меньше, чем влияние остальных неучтенных факторов. Полученные в таком случае модели не имеют практического значения.

Показатели вариации выходной переменной используются при выборе адекватного (наиболее соответствующего) эмпирическим данным уравнения регрессии. Именно от адекватности полученного уравнения регрессии зависит правильность практических выводов.

Наибольшее распространение получили два подхода к выбору наиболее подходящего уравнения регрессии на основе анализа остаточной дисперсии выходной величины и средней ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - y_i^*|}{y_i}$$

Рассмотрим конкретный пример, заимствованный из упомянутого учебника.

Пример 9.2. Имеется информация по однотипным предприятиям торговли о сроках эксплуатации типового оборудования и затратах на его ремонт (табл. 9.2).

Таблица 9.2

№ предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Срок эксплуатации [лет]	4	5	5	6	8	10	8	7	11	6
Затраты [тыс. руб.]	1,5	2,0	1,4	2,3	2,7	4,0	2,3	2,5	6,6	1,7

В целях нормирования расходования средств произвести синтезирование адекватной экономико-математической модели и осуществить выбор наиболее адекватной из трех:

- линейная функция $y = b_0 + b_1 x$;
- логарифмическая функция $b_0 + b_1 \lg x$;
- показательная функция $y = b_0 b_1^x$.

Решение.

Как принято при использовании регрессионного анализа, построение адекватной модели целесообразно начать с наиболее простой — линейной модели по выражениям:

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2},$$

$$b_1^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - N \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Используя эти выражения, получим оценки коэффициентов регрессии

$$b_0^* = -1,576; \quad b_1^* = 0,611.$$

Таким образом, получаем уравнение регрессии в виде

$$y_i^* = -1,576 + 0,611 x_i.$$

Смысловое содержание полученной модели состоит в том, что она характеризует изменение математического ожидания выходной переменной при вариации независимой входной переменной x .

Проведем статистический анализ полученной регрессионной модели.

Проверка значимости коэффициентов регрессии производится с использованием показателя согласованности Стьюдента. Выдвигаем гипотезы:

$$H_0 : b_i = 0;$$

$$H_0 : b_i \neq 0.$$

Определяем расчетные значения показателя согласованности:

а) для коэффициента b_0

$$t_{b_0} = b_0^* \frac{\sqrt{N-2}}{\sigma_\varepsilon^*},$$

где $N = 10$ — количество значений независимой переменной,

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i^* - y_i)^2}{N}},$$

среднее квадратическое отклонение выходной переменной y_i от линии регрессии;

б) для коэффициента b_1

$$t_{b_1} = b_1^* \frac{\sqrt{N-2}}{\sigma_\varepsilon^*} \sigma_x^*,$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{cp})^2}{N}},$$

среднее квадратическое отклонение независимой переменной от своего среднего значения. Эта оценка является смещенной. Для получения несмещенной оценки необходимо в знаменателе поставить величину $N - 1$.

Полученные значения показателей согласованности сравниваются с критическим значением $t_{\alpha,k}$, взятым из таблицы распределения Стьюдента с учетом принятого уровня значимости α и числа степеней свободы k . Коэффициенты уравнения регрессии признаются значимыми, если фактическое значение показателя согласованности больше критического

$$t_{b_0} > t_{\alpha,k} < t_{b_1}$$

Результаты промежуточных расчетов помещены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

№ пр	x_i	y_i	y_i^2	y_i^*	$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2$	$x_i - x_{cp}$	$(x_i - x_{cp})^2$
1	4	1,5	2,25	0,868	0,632	0,399	-3	9
2	5	2,0	4,00	1,479	0,521	0,271	-2	4
3	5	1,4	1,96	1,479	-0,079	0,006	-2	4
4	6	2,3	5,29	2,090	0,210	0,044	-1	1
5	8	2,7	7,29	3,312	-0,612	0,374	1	1
6	10	4,0	16,00	4,534	-0,534	0,285	3	9
7	8	2,3	5,29	3,312	-1,012	1,024	1	1
8	7	2,5	6,25	2,700	-0,200	0,040	0	0
9	11	6,6	43,56	5,145	1,455	2,117	4	16
10	6	1,7	2,89	2,090	-0,390	0,152	1	1
Σ	70	27,0	94,78	27,009		4,712		46

Определяем значение среднего квадратического отклонения выходной переменной y_i от линии регрессии

$$\sigma_{\varepsilon}^* = \sqrt{\frac{4,712}{10}} = 0,69.$$

Определяем значение показателя согласованности Стьюдента

$$t_{b_0} = \frac{1,576\sqrt{10-2}}{0,69} = 6,46.$$

Определяем значение среднего квадратического отклонения независимой переменной от своего среднего значения

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{46}{10}} = 2,14.$$

Определяем значение показателя согласованности Стьюдента

$$t_{b_1} = \frac{0,611\sqrt{10-2} \cdot 2,14}{0,69} = 5,36.$$

При $\alpha = 0,05$ и $k = 10 - 2 = 8$ (число коэффициентов равно 2) получаем табличное критическое значение $t_{\alpha, k} = 2,306$.

Поскольку условие $t_{b_0} > t_{\alpha, k} < t_{b_1}$ выполняется, то полученные коэффициенты уравнения регрессии следует признать значимыми (существенно отличающимися от нуля).

Произведем оценку практической значимости линейной модели с использованием коэффициента корреляции

$$r_{xy} = \frac{217,1 - \frac{70 \cdot 27}{10}}{\sqrt{\left(536 - \frac{70^2}{10}\right) \left(94,78 - \frac{27^2}{10}\right)}} = 0,89.$$

Оценку значимости коэффициента корреляции проведем с использованием показателя согласованности Стьюдента

$$t_r = 0,89 \sqrt{\frac{10-2}{1-0,89^2}} = 3,69.$$

Критическое значение, полученное из таблицы Стьюдента, равно 2,306, меньше расчетного. Следовательно, коэффициент корреляции является значимым. Из значения $r^2 = 0,792$ следует, что 79,2% общей вариации выходной величины объясняется влиянием факторного признака. Поэтому линейная модель может быть использована для практических целей.

Рассмотрим возможность применения логарифмической модели $b_0 + b_1 \lg x$.

Параметры данной модели определяются по формулам, аналогичным рассмотренным ранее для линейной модели с заменой x_i на $\lg x_i$:

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i \lg x_i\right) \left(\sum_{i=1}^N \lg x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^N y_i\right) \left(\sum_{i=1}^N (\lg x_i)^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^N \lg x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^N (\lg x_i)^2},$$

$$b_1^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)\left(\sum_{i=1}^N \lg x_i\right) - N \sum_{i=1}^N y_i \lg x_i}{\left(\sum_{i=1}^N \lg x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^N (\lg x_i)^2}.$$

Результаты промежуточных расчетов помещены в табл. 9.4.

Таблица 9.4

№ пр	x_i	y_i	$\lg x_i$	$(\lg x_i)^2$	$y_i \lg x_i$	y_i^*	$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2$	y_i^2
1	4	1,5	0,60206	0,36248	0,90309	0,65	0,85	0,7225	2,25
2	5	2,0	0,69897	0,48856	1,39794	1,54	0,46	0,2116	4,00
3	5	1,4	0,69897	0,48856	0,97856	1,54	-0,14	0,0196	1,96
4	6	2,3	0,77815	0,60552	1,78975	2,27	0,03	0,0009	5,29
5	8	2,7	0,90309	0,81557	2,43834	3,42	-0,72	0,5184	7,29
6	10	4,0	1,0	1,0	4,0	4,31	-0,31	0,0961	16,00
7	8	2,3	0,90309	0,81557	2,07711	3,42	-1,12	1,2544	5,29
8	7	2,5	0,84510	0,71419	2,11275	2,89	-0,39	0,1521	6,25
9	11	6,6	1,04139	1,08450	6,87319	4,70	1,90	3,6100	43,56
10	6	1,7	0,77815	0,60552	1,32286	2,27	-0,57	0,3249	2,89
Σ	70	27	8,24897	6,98047	23,8936	27,01		6,9105	94,78

С использованием итоговых данных табл. 9.4 рассчитываем значения коэффициентов

$$b_0^* = -4,9027 \text{ и } b_1^* = 9,2166.$$

Следовательно, уравнение регрессии имеет вид

$$y_i^* = -4,9027 + 9,2166 \lg x_i.$$

Проведем проверку значимости коэффициентов уравнения регрессии. По итоговым данным табл. 9.4 определяем

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{6,9105}{10}} = 0,83.$$

Далее вычисляем расчетные значения показателя согласованности Стьюдента

$$t_{b_0} = \frac{-4,9027\sqrt{10-2}}{0,83} = 16,7;$$

$$t_{b_1} = \frac{9,217\sqrt{10-2}}{0,83} \cdot 2,14 = 67,2.$$

Сравнив расчетные значения показателя согласованности с критическим (2,306), получаем $t_{b_0} > t_{\alpha, k} < t_{b_1}$. Следовательно, вычисленные значения коэффициентов уравнения регрессии являются значимыми.

Оценка практической значимости нелинейной модели проводится с использованием индекса корреляции R . Для этого вначале по итоговым данным табл. 9.4 определяют общую дисперсию

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - y_{\text{ср}}^2 = \frac{94,78}{10} - \left(\frac{27}{10}\right)^2 = 2,19.$$

При известной $\sigma_\varepsilon^2 = 0,83^2 = 0,691$ определяем индекс корреляции R

$$R = \sqrt{1 - \frac{0,691}{2,19}} = \pm 0,827.$$

Полученное значение индекса корреляции свидетельствует о том, что связь между независимой переменной x и выходной переменной y достаточно высокая.

Оценка значимости индекса корреляции R проводится с использованием показателя согласованности Фишера

$$f_R = \frac{0,827^2}{1 - 0,827^2} \cdot \frac{10 - 2}{2 - 1} = 17,3.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k_1 = 2 - 1 = 1$ и $k_2 = 10 - 2 = 8$ получаем критическое значение $f_{\alpha, k_1, k_2} = 5,32$. Так как $f_R > f_{\alpha, k_1, k_2}$, делаем вывод о значимости показателя тесноты связи.

Значение индекса детерминации $R_2 = 0,827^2 = 0,684$ свидетельствует о том, что 68,4% общей вариации объясняется вариацией фактора x . Поэтому логарифмическая модель может быть признана пригодной для практических целей.

Рассмотрим возможность использования показательной функции $y = b_0 b_1^x$.

Для определения коэффициентов уравнения регрессии предварительно прологарифмируем показательную функцию

$$\lg y = \lg b_0 + x \lg b_1.$$

В этом случае выражения для проведения расчетов коэффициентов уравнения регрессии примут вид

$$\lg b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^N \lg y_i - \lg b_1 \sum_{i=1}^N x_i}{N};$$

$$\lg b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \lg y_i - x_{\text{cp}} \sum_{i=1}^N \lg y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - x_{\text{cp}} \sum_{i=1}^N x_i}.$$

Результаты промежуточных расчетов помещены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

№ пр	x_i	y_i	x_i^2	$\lg y_i$	$x_i \lg y_i$	y_i^*	$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2$
1	4	1,5	16	0,17609	0,70436	1,36	0,14	0,0196
2	5	2,0	25	0,30103	1,50515	1,64	0,36	0,1296
3	5	1,4	25	0,14613	0,73065	1,64	-0,24	0,0576
4	6	2,3	36	0,36173	2,17038	1,99	0,31	0,0961
5	8	2,7	64	0,43136	3,45088	2,93	-0,23	0,0529
6	10	4,0	100	0,60206	6,02060	4,31	-0,31	0,0961
7	8	2,3	64	0,36173	2,89384	2,93	-0,63	0,3969
8	7	2,5	49	0,39794	2,78558	2,41	0,09	0,0081
9	11	6,6	121	0,81954	9,01494	5,23	1,37	1,8769
10	6	1,7	36	0,23045	1,38270	1,99	-0,29	0,0841
Σ	70	27,0	536	3,82806	30,65908	26,43		2,8179

По итоговым данным табл. 9.5 определяем коэффициенты уравнения регрессии

$$\lg b_1^* = \frac{30,65908 - 7 \cdot 3,82806}{635 - 7 \cdot 70} = 0,08397 \text{ или } b_1^* = 1,2133;$$

$$\lg b_0^* = \frac{3,82806 - 0,08397 \cdot 70}{10} = -0,20498 \text{ или } b_0^* = 0,6238.$$

Получаем уравнение регрессии в виде

$$y_i^* = 0,6238 + 1,2133 \cdot x_i.$$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии в начале определяем

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{2,8179}{10}} = \pm 0,53.$$

Значения показателя согласованности Стьюдента равны:

$$t_{b_0} = \frac{0,6238 \sqrt{10-2}}{0,53} \approx 3,34;$$

$$t_{b_1} = \frac{1,2133 \sqrt{10-2} \cdot 2,14}{0,53} = 7,35.$$

Сравнив расчетные значения показателя согласованности с критическим (2,306), получаем $t_{b_0} > t_{\alpha,k} < t_{b_1}$. Следовательно, вычисленные значения коэффициентов уравнения регрессии являются значимыми.

Оценка практической значимости нелинейной модели проводится с использованием индекса корреляции R . При $\sigma_y^2 = 2,19$ и $\sigma_\varepsilon^{*2} = 0,53^2 = 0,281$ определяем

$$R = \sqrt{1 - \frac{0,281}{2,19}} \approx \pm 0,93.$$

Полученное значение индекса корреляции свидетельствует о том, что связь между независимой переменной x и выходной переменной y очень высокая.

Оценка значимости индекса корреляции R проводится с использованием показателя согласованности Фишера

$$f_R = \frac{0,93^2}{1-0,93^2} \cdot \frac{10-2}{2-1} = 51,2.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числах степеней свободы $k_1 = 2 - 1 = 1$ и $k_2 = 10 - 2 = 8$ получаем критическое значение $f_{\alpha, k_1, k_2} = 5,32$. Так как $f_R > f_{\alpha, k_1, k_2}$, делаем вывод о значимости показателя тесноты связи.

Значение индекса детерминации $R^2 = 0,93^2 = 0,865$ свидетельствует о том, что 86,5% общей вариации объясняется вариацией фактора x . Поэтому полулогарифмическая модель может быть признана пригодной для практических целей.

Таким образом, все три модели следует признать имеющими практическую значимость. Осталось решить вопрос о том какую же из рассмотренных моделей следует признать наиболее адекватной. Для ответа на этот вопрос необходимо проанализировать и сравнить величину остаточной дисперсии каждой из них.

Расчеты с использованием данных табл. 9.3, 9.4, 9.5 дали следующие результаты (табл. 9.6).

Таблица 9.6

	Модель	Остаточная дисперсия
1. Линейная	$y = -1,576 + 0,611x$	0,480
2. Логарифмическая	$y = -4,9027 + 9,2166 \lg x$	0,691
3. Показательная	$y = 0,6238 \cdot 1,2133^x$	0,282

Следовательно, предпочтение должно быть отдано модели на основе показательной функции.

Ответим на тот же вопрос на основе анализа средней ошибки аппроксимации ϵ_{cp} (табл. 9.7).

Таким образом, предпочтение вновь должно быть отдано показательной модели, имеющей минимальную ошибку аппроксимации.

Таблица 9.7

№ пр	y_i	Линейная модель		Логарифмическая модель		Показательная модель	
		$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2 / y_i$	$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2 / y_i$	$y_i - y_i^*$	$(y_i - y_i^*)^2 / y_i$
1	1,5	0,632	0,4210	0,85	0,5667	0,14	0,0933
2	2,0	0,521	0,2610	0,46	0,2300	0,36	0,1800
3	1,4	0,079	0,0560	0,14	0,1000	0,24	0,1714
4	2,3	0,210	0,0910	0,03	0,0130	0,31	0,1348
5	2,7	0,612	0,2270	0,72	0,2667	0,23	0,0852
6	4,0	0,534	0,1330	0,31	0,0775	0,31	0,0775
7	2,3	1,012	0,4400	1,12	0,4469	0,63	0,2739
8	2,5	0,200	0,0080	0,39	0,1660	0,09	0,0360
9	6,6	1,455	0,2200	1,90	0,2879	1,37	0,2075
10	1,7	0,390	0,2290	0,57	0,3353	0,29	0,1706
Σ	27		2,1580		0,2520		1,4302
Средняя ошибка аппроксимации		21,58%			25,2%		14,3%

9.6. Спецификация регрессионной модели

Одним из базовых предположений построения качественной модели является правильная (хорошая) спецификация уравнения регрессии. Правильная спецификация уравнения регрессии означает, что оно в целом верно отражает соотношение между изучаемой переменной и объясняющими факторами, участвующими в модели. Это является необходимой предпосылкой дальнейшего качественного оценивания регрессионной модели.

Неправильный выбор функциональной формы или набора объясняющих переменных называется *ошибками спецификации*, основными типами которых являются.

1. *Отбрасывание значимой переменной.* Суть данной ошибки и ее последствия наглядно иллюстрируются следующим примером. Пусть теоретическая модель, отражающая рассматриваемую экономическую зависимость, имеет вид

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \varepsilon.$$

Данной модели соответствует следующее эмпирическое уравнение регрессии:

$$y^* = b_0^* + b_1^*X_1 + b_2^*X_2.$$

Исследователь по каким-то причинам (недостаток информации, поверхностное знание о предмете исследования и т. п.) считает, что на переменную Y реально воздействует лишь переменная X_1 . Он ограничивается рассмотрением модели

$$Y = \gamma_0 + \gamma_1X_1 + v. \quad (9.28)$$

При этом он не рассматривает в качестве объясняющей переменную X_2 , совершая ошибку отбрасывания существенной переменной.

Пусть эмпирическое уравнение регрессии, соответствующее теоретическому уравнению (9.28), имеет вид

$$y^* = \gamma_0^* + \gamma_1^*X_1. \quad (9.29)$$

Последствия данной ошибки достаточно серьезны. Оценки, полученные с помощью МНК по уравнению (9.29), являются смещенными ($M[\gamma_0^*] \neq b_0$, $M[\gamma_1^*] \neq b_1$) и несостоятельными даже при бесконечно большом числе испытаний. Следовательно, возможные интервальные оценки и результаты проверки соответствующих гипотез будут ненадежными.

2. Добавление незначимой переменной. В некоторых случаях в уравнения регрессии включают слишком много объясняющих переменных, причем не всегда обоснованно. Например, теоретическая модель имеет следующий вид

$$Y = \gamma_0 + \gamma_1X_1 + \varepsilon.$$

Пусть исследователь подменяет ее более сложной моделью:

$$Y = \gamma_0 + \gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 + \varepsilon, \quad (9.30)$$

добавляя при этом не оказывающую реального воздействия на Y объясняющую переменную X_2 . В этом случае совершается ошибка добавления несущественной переменной.

Последствия данной ошибки будут не столь серьезными, как в предыдущем случае. Оценки γ_0, γ_1 коэффициентов, найденные для модели (9.30), остаются, как правило, несмещенными ($M[\gamma_0^*] = b_0, M[\gamma_1^*] = b_1$) и состоятельными. Однако их точность уменьшится, увеличивая при этом стандартные ошибки, т. е. оценки становятся неэффективными, что отразится на их устойчивости. Данный вывод логически вытекает из расчета дисперсий оценок коэффициентов регрессии для этих уравнений:

$$\sigma_{b_i^*}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}; \quad \sigma_{\gamma_i^*}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 (1 - r_{12}^2)}.$$

Здесь $r_{x_1 x_2}$ — коэффициент корреляции между объясняющими переменными X_1 и X_2 .

Следовательно, $\sigma_{b_i^*}^2 \leq \sigma_{\gamma_i^*}^2$, причем знак равенства возможен лишь при $r_{x_1 x_2} = 0$.

Увеличение дисперсии оценок может привести к ошибочным результатам проверки гипотез относительно значений коэффициентов регрессии, расширению интервальных оценок.

3. *Выбор неправильной функциональной формы.* Суть ошибки проиллюстрируем следующим примером. Пусть правильная регрессионная модель имеет вид

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Любая другая зависимость с теми же переменными, но имеющая другой функциональный вид, приводит к искажению истинной зависимости. Например, в следующих уравнениях

$$\ln Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \varepsilon, \quad Y = c_0 + c_1 \ln X_1 + c_2 \ln X_2 + u$$

совершена ошибка выбора неправильной функциональной формы уравнения регрессии. Последствия данной ошибки будут весьма серьезными. Обычно такая ошибка приводит либо к получению смещенных оценок, либо к ухудшению статистических свойств оценок коэффициентов регрессии и других показателей качества уравнения. В первую очередь это вызвано нарушением условий Гаусса-Маркова для отклонений. Прогнозные качества модели в этом случае очень низки.

При построении уравнений регрессии, особенно на начальных этапах, ошибки спецификации допускаются довольно часто из-за поверхностных знаний об исследуемых экономических процессах, или из-за недостаточно глубоко проработанной теории, или из-за погрешностей сбора и обработки статистических данных при построении эмпирического уравнения регрессии. Важно уметь обнаружить и исправить эти ошибки. Сложность процедуры обнаружения определяется типом ошибки и нашими знаниями об исследуемом объекте.

Если в уравнении регрессии имеется одна несущественная переменная, то она обнаружит себя по низкой t -статистике. В дальнейшем эту переменную исключают из рассмотрения.

Если в уравнении несколько статистически незначимых объясняющих переменных, то следует построить другое уравнение регрессии без этих незначимых переменных. Затем с помощью F -статистики сравниваются коэффициенты детерминации для первоначального и дополнительного уравнений регрессий

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - m - 1}{k},$$

где n — число наблюдений;

m — число объясняющих переменных в первоначальном уравнении;

k — число отбрасываемых из первоначального уравнения объясняющих переменных.

Возможные рассуждения и выводы для данной ситуации приведены в п. 6.7.2.

Однако проведение указанных проверок имеет смысл лишь при правильном подборе вида (функциональной формы) уравнения регрессии, что можно осуществить, если согласовать его с теорией. Например, при построении кривой Филлипса, устанавливающей зависимость между заработной платой Y и безработицей X , является обратной. Возможны следующие модели:

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon, \quad \beta < 0;$$

$$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + \varepsilon, \quad \beta < 0;$$

$$Y = \alpha + \beta \frac{1}{X + \gamma} + \varepsilon, \quad \beta > 0;$$

$$Y = \alpha + \alpha^{\beta X} + \varepsilon, \quad \beta < 0.$$

Отметим, что выбор модели далеко не всегда осуществляется однозначно и в дальнейшем требуется сравнивать модель как с теоретическими, так и с эмпирическими данными, и совершенствовать ее. Напомним, что при определении качества модели обычно анализируются следующие параметры:

- а) скорректированный коэффициент детерминации R ;
- б) t -статистики;
- в) статистика Дарбина-Уотсона DW ;
- г) согласованность знаков коэффициентов с теорией;
- д) прогнозные качества (ошибки) модели.

Если все эти показатели удовлетворительны, то данная модель может быть предложена для описания исследуемого реального процесса. Если же какая-либо из описанных выше характеристик не является удовлетворительной, т. е. основания сомневаться в качестве данной модели (неправильно выбрана функциональная форма уравнения; не учтена важная объясняющая переменная; имеется объясняющая переменная, не оказывающая значимого влияния на зависимую переменную).

9.7. Регрессионные модели с гетероскедастичными остатками

Как уже отмечалось, одной из ключевых предпосылок регрессионного анализа является условие постоянства дисперсии воспроизводимости

$$\sigma^2[\varepsilon_1] = \sigma^2[\varepsilon_2] = \dots = \sigma^2[\varepsilon_n] = \sigma^2.$$

Выполнимость данной предпосылки называется *гомоскедастичностью* (постоянством дисперсии воспроизводимости), невыполнимость — *гетероскедастичностью* (непостоянством дисперсии воспроизводимости).

На практике гетероскедастичность встречается не так уж и редко. Зачастую есть основания считать, что вероятностные распределения случайных отклонений ε_i при различных наблюдениях будут различными. Это не означает, что случайные отклонения обязательно будут большими при определенных наблюдениях и малыми — при других, но это означает, что априорная вероятность такого явления велика, поэтому важно понимать суть его последствия.

На рис. 9.5 приведены два примера линейной зависимости потребления C от дохода I :

$$C = b_0 + b_1 I + \varepsilon.$$

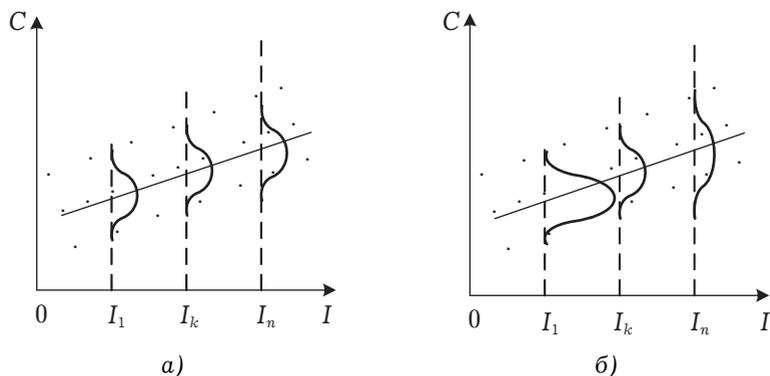


Рис. 9.5

В обоих случаях с ростом дохода растет среднее значение потребления. Но если на рис. 9.5, а дисперсия потребления остается одной и той же для различных уровней дохода, то на рис. 9.5, б при аналогичной зависимости среднего потребления от дохода дисперсия потребления не остается постоянной, а увеличивается с ростом дохода. Фактически это означает, что во втором случае субъекты с бóльшим доходом в среднем потребляют больше, чем субъекты с меньшим доходом, и, кроме того, разброс в их потреблении более существен для большего уровня дохода. Люди с бóльшим доходом имеют бóльший простор для его распределения.

Реалистичность данной ситуации не вызывает сомнений. Разброс значений потребления вызывает разброс точек наблюдения относительно линейной зависимости, что и определяет дисперсию воспроизводимости (случайных отклонений).

Проблема гетероскедастичности характерна для перекрестных данных и довольно редко встречается при рассмотрении временных рядов. Это можно объяснить следующим. При перекрестных данных учитываются экономические субъекты (потребители, домохозяйства, фирмы, отрасли, страны и др.), имеющие различные доходы, размеры, потребности и т. д. В этом случае возможны проблемы, связанные с эффектом масштаба. Во временных рядах обычно рассматриваются одни и те же показатели в различные моменты времени (например, ВВП, чистый экспорт, темпы инфляции и т. д. в определенном регионе за определенный период времени). Однако при увеличении (уменьшении) рассматриваемых показателей с течением времени может возникнуть проблема гетероскедастичности.

Как отмечалось, при рассмотрении классической линейной регрессионной модели МНК дает наилучшие линейные несмещенные оценки лишь при выполнении ряда предпосылок, одной из которых является постоянство дисперсии воспроизводимости (гомоскедастичность): $\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma_2$ для всех наблюдений ($i = 1, n$).

При невыполнимости данной предпосылки (при гетероскедастичности) последствия применения МНК будут следующими.

1. Оценки коэффициентов по-прежнему останутся несмещенными и линейными.

2. Оценки не будут эффективными (т. е. они не будут иметь наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками данного параметра). Они не будут даже асимптотически эффективными. Увеличение дисперсии оценок снижает вероятность получения максимально точных оценок.

3. Дисперсии оценок коэффициентов будут рассчитываться со смещением. Смещенность появляется вследствие того, что не объясненная уравнением регрессии дисперсия

$$\sigma_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - m - 1},$$

где m — число учитываемых переменных;

e_i — отклонения экспериментальных точек от уравнения регрессии ($e_i = y_i - y_i^*$); которая используется при вычислении оценок дисперсий всех коэффициентов, не является более несмещенной.

4. Вследствие вышесказанного все выводы, получаемые на основе соответствующих t - и F -статистик, а также интервальные оценки будут ненадежными. Следовательно, статистические выводы, получаемые при стандартных проверках качества оценок, могут быть ошибочными и приводить к неверным заключениям по построенной модели. Вполне вероятно, что средние квадратические отклонения коэффициентов будут занижены, а следовательно, t -статистики будут завышены. Это может привести к признанию статистически значимыми коэффициентов, таковыми на самом деле не являющихся.

Причину неэффективности оценок МНК при гетероскедастичности легко пояснить следующим примером парной регрессии.

Из рис. 9.6 видно, что для каждого конкретного значения x_i переменная Y принимает значение y_i из некоторого множества, имеющего свое распределение, отличное одно от другого в силу непостоянства дисперсий (сравните распределения для значений y_1 и y_n).

По МНК минимизируется сумма квадратов отклонений

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2.$$

Но в этом случае каждое конкретное значение e_i^2 в данной сумме имеет одинаковый "вес" вне зависимости от того, получено оно из распределе-

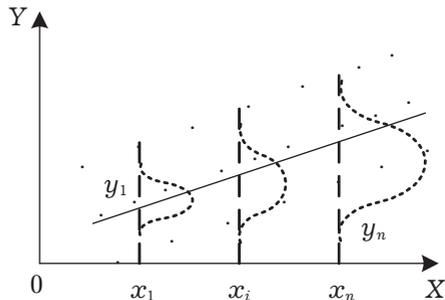


Рис. 9.6

ния с маленькой дисперсией (например, e_i^2) или с большой (например, e_n^2). Но это противоречит логике, так как точка, полученная из распределения с меньшей дисперсией, более точно определяет направление линии регрессии.

Поэтому она должна иметь больший “вес”, чем точка из распределения с большей дисперсией. Следовательно, методы оценивания, учитывающие “веса” точек наблюдений, позволяют получать более точные (эффективные) оценки. Учет “весов” точек характерен, например, для метода взвешенных наименьших квадратов, рассмотренного ниже.

В ряде случаев, зная характер данных, появление проблемы гетероскедастичности можно предвидеть и попытаться устранить этот недостаток еще на этапе выбора вида функции отклика. Однако значительно чаще эту проблему приходится решать после построения уравнения регрессии.

Обнаружение гетероскедастичности в каждом конкретном случае является довольно сложной задачей, так как для знания дисперсий отклонений $\sigma^2[\varepsilon_i]$ необходимо знать распределение СВ Y , соответствующее выбранному значению x_i . На практике часто для каждого конкретного значения x_i определяется единственное значение y_i , что не позволяет оценить дисперсию СВ Y для данного x_i .

Естественно, не существует какого-либо однозначного метода определения гетероскедастичности. Однако к настоящему времени для такой проверки разработано довольно большое число тестов и критериев для них. Рассмотрим наиболее популярные и наглядные из них: графический анализ отклонений, тест ранговой корреляции Спирмена, тест Парка, тест Глейзера, тест Голдфелда-Квандта.

Использование графического представления отклонений позволяет определиться с наличием гетероскедастичности. В этом случае по оси абсцисс откладываются значения x_i переменной x (либо линейной комбинации переменных $y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_m x_m$), а по оси ординат либо отклонения e_i , либо их квадраты e_i^2 ($i = 1, n$). Примеры таких графиков приведены на рис. 9.7.

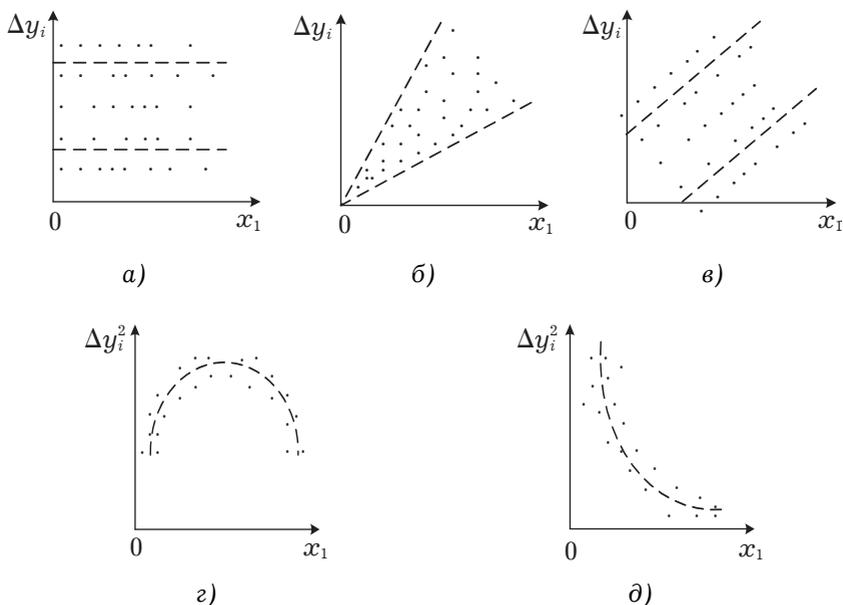


Рис. 9.7

На рис. 9.7, а все отклонения e_i^2 находятся внутри полуполосы постоянной ширины, параллельной оси абсцисс. Это говорит о независимости дисперсий e_i^2 от значений переменной x и их постоянстве, т. е. в этом случае выполняются условия гомоскедастичности.

На рис. 9.7, б-д наблюдаются некоторые систематические изменения в соотношениях между значениями x_i переменной x и квадратами отклонений e_i^2 . На рис. 9.7, в отражена линейная, г — квадратичная, д — гиперболическая зависимости между квадратами отклонений и значениями входной переменной x . Другими словами, ситуации, представленные на рис. 9.7, б-д, отражают большую вероятность наличия гетероскедастичности для рассматриваемых статистических данных.

Отметим, что графический анализ отклонений является удобным и достаточно надежным в случае парной регрессии. При множественной регрессии графический анализ возмо-

жен для каждой из входных переменных x_j ($j = \overline{1, m}$), отдельно. Чаще же вместо входных переменных x_j по оси абсцисс откладывают значения \hat{y}_i ($i = \overline{1, n}$), получаемые из эмпирического уравнения регрессии. Поскольку по уравнению множественной линейной регрессии \hat{y}_i является линейной комбинацией x_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$), то график, отражающий зависимость e_i^2 от \hat{y}_i , может указать на наличие гетероскедастичности аналогично ситуациям на рис. 9.7, б-д. Такой анализ наиболее целесообразен при большом количестве входных переменных.

При использовании теста ранговой корреляции Спирмена предполагается, что дисперсия отклонения будет либо увеличиваться, либо уменьшаться с увеличением значений x . Поэтому для регрессии, построенной по МНК, абсолютные величины отклонений e_i и значения x_i будут коррелированы. Значения x_i и e_i ранжируются (упорядочиваются по величинам). Затем определяется коэффициент ранговой корреляции:

$$r_{x,e} = d_i \frac{k(x_i, e_i)}{\sigma_x \sigma_y},$$

где d_i — разность между рангами e_i и x_i , ($i = \overline{1, n}$),
 n — число наблюдений.

Например, если x_{20} является 25-м по величине среди всех наблюдений x , а e_{20} является 32-м, то $d_i = 25 - 32 = -7$.

Доказано, что если коэффициент корреляции $r_{x,e}$ для генеральной совокупности равен нулю, то статистика

$$t = \frac{r_{x,e} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,e}^2}} \quad (9.31)$$

имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$.

Следовательно, если наблюдаемое значение статистики, вычисленное по формуле (9.18), превышает $t_{\alpha, k}$, (определяемое по таблице критических точек распределения Стьюдента), то необходимо отклонить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции $r_{x,e}$, а, следовательно, и об отсутствии гетеро-

скедастичности. В противном случае гипотеза об отсутствии гетероскедастичности принимается.

Если в модели регрессии больше чем одна входная переменная, то проверка гипотезы может осуществляться с помощью t -статистики для каждой из них отдельно.

Р. Парк предложил тест определения гетероскедастичности, дополняющий графический метод некоторыми формальными зависимостями. Предполагается, что дисперсия $\sigma_i^2 = \sigma^2(e_i)$ является функцией i -го значения x_i входной переменной. Парк предложил следующую функциональную зависимость:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^\beta e^{v_i}.$$

Прологарифмировав данное выражение, получим;

$$\ln \sigma_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln x_i + v_i.$$

Так как дисперсии σ_i^2 обычно неизвестны, то их заменяют оценками квадратов отклонений e_i^2 .

При реализации теста Парка выделяют следующие этапы:

1. Строится уравнение регрессии

$$y_i^* = b_0^* + b_1^* x_i.$$

2. Для каждого наблюдения определяются

$$\ln e_i^2 = \ln (y_i - y_i^*)^2.$$

3. Строится уравнение регрессии

$$\ln e_i^2 = \alpha + \beta^* \ln x_i + v_i,$$

где $\alpha = \ln \sigma^2$.

В случае множественной регрессии зависимость строится для каждой входной переменной.

4. Проверяется статистическая значимость коэффициента β на основе статистики $t = \beta^* / \sigma_{\beta^*}$. Если коэффициент β статистически значим, то это означает наличие связи между $\ln e_i^2$ и $\ln x_i$, т. е. гетероскедастичности в статистических данных.

Отметим, что использование в критерии Парка конкретной функциональной зависимости может привести к необоснованным выводам (например, коэффициент β статистически не зна-

чим, а гетероскедастичность имеет место). Возможна еще одна проблема. Для случайного отклонения v_i в свою очередь может иметь место гетероскедастичность. Поэтому критерий Парка дополняется другими тестами.

Тест Глейзера по своей сути аналогичен тесту Парка и дополняет его анализом других (возможно, более подходящих) зависимостей между дисперсиями отклонений σ_i^2 и значениями переменной x_i . По данному методу оценивается регрессионная зависимость модулей отклонений $|e_i|$ (тесно связанных с σ_i^2) от $x|e_i|$. При этом рассматриваемая зависимость моделируется следующим уравнением регрессии:

$$|e_i| = \alpha + \beta x_i^k + v_i.$$

Изменяя значения k , можно построить различные регрессии. Обычно $k = -1, -0,5, 0,5, 1$. Статистическая значимость коэффициента β в каждом конкретном случае фактически означает наличие гетероскедастичности. Если для нескольких регрессий коэффициент β оказывается статистически значимым, то при определении характера зависимости обычно ориентируются на лучшую из них.

Отметим, что так же, как и в тесте Парка, в тесте Глейзера для отклонений v_i может нарушаться условие гомоскедастичности. Однако во многих случаях предложенные модели являются достаточно хорошими для определения гетероскедастичности.

В случае **теста Голдфелда-Квандта** также предполагается, что стандартное отклонение $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$ пропорционально значению x_i переменной x в этом наблюдении, т. е. $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2$, $i = 1, n$. Предполагается, что ε_i имеет нормальное распределение и отсутствует автокорреляция остатков.

Тест Голдфелда-Квандта состоит в следующем:

1. Все n наблюдений упорядочиваются по величине x .
2. Вся упорядоченная выборка после этого разбивается на три подвыборки размерностей k , $(n - 2k)$, k , соответственно.
3. Оцениваются отдельные регрессии для первой подвыборки (k первых наблюдений) и для третьей подвыборки (k пос-

ледних наблюдений). Если предположение о пропорциональности дисперсий отклонений значениям x верно, то дисперсия регрессии по первой подвыборке (сумма квадратов отклонений $S_1 = \sum_{i=1}^k e_i^2$ будет существенно меньше дисперсии регрессии по третьей подвыборке (суммы квадратов отклонений $S_3 = \sum_{i=n-k+1}^n e_i^2$).

4. Для сравнения соответствующих дисперсий строится следующая F -статистика:

$$F = \frac{S_3 / (k - m - 1)}{S_1 (k - m - 1)} = \frac{S_3}{S_1}, \quad (9.32)$$

где $(k - m - 1)$ — число степеней свободы соответствующих выборочных дисперсий;

m — количество входных переменных в уравнении регрессии.

При сделанных предположениях относительно случайных отклонений построенная F -статистика имеет распределение Фишера с числами степеней свободы

$$h_1 = h_2 = k - m - 1.$$

5. Если $f^* = S_3 / S_1 > f_\alpha = F_{\alpha; h_1; h_2}$, то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности отклоняется (здесь α — выбранный уровень значимости).

Естественным является вопрос, какими должны быть размеры подвыборок для принятия обоснованных решений? Для парной регрессии Голдфелд и Квандт предложили следующие пропорции: $n = 30, k = 11$; $n = 60, k = 22$.

Для множественной регрессии данный тест обычно проводится для той входной переменной, которая в наибольшей степени связана с σ_i . При этом k должно быть больше, чем $(m + 1)$. Если нет уверенности относительно выбора переменной x_i , то данный тест может осуществляться для каждой из входных переменных.

Этот же тест может быть использован при предположении об обратной пропорциональности между σ_i и значениями входной переменной. При этом статистика Фишера примет вид

$$F = S_1 / S_3.$$

Как отмечалось, гетероскедастичность приводит к неэффективности оценок, несмотря на их несмещенность. Это может обусловить необоснованные выводы по качеству модели. Поэтому при установлении гетероскедастичности возникает необходимость преобразования модели с целью устранения данного недостатка. Вид преобразования зависит от того, известны или нет дисперсии σ_i^2 отклонений ε_i ($i = 1, n$).

9.8. Метод взвешенных наименьших квадратов (МВНК)

Данный метод применяется при известных для каждого наблюдения значениях σ_i^2 . В этом случае можно устранить гетероскедастичность, разделив каждое наблюдаемое значение на соответствующее ему значение дисперсии. В этом суть метода взвешенных наименьших квадратов.

Для простоты изложения опишем МВНК на примере линейной модели

$$Y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i. \quad (9.33)$$

Разделим обе части уравнения (9.33) на известное $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = b_0 \frac{1}{\sigma_i} + b_1 \frac{x_i}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}.$$

Положив

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = Y_i^*, \quad \frac{x_i}{\sigma_i} = x_i^*, \quad \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = v_i, \quad \frac{1}{\sigma_i} = z_i,$$

получим уравнение регрессии без свободного члена, но с дополнительной объясняющей переменной z и с “преобразованным” отклонением v :

$$Y_i^* = b_0 z_i + b_1 x_i^* + v_i.$$

При этом для v_i выполняется условие гомоскедастичности. Действительно,

$$\sigma_i^2[v_i] = M\{v_i - M[v_i]\}^2 = M[v_i^2] - M^2[v_i].$$

Так как по предпосылке МНК $M[\varepsilon_i] = 0$, то $M[v_i] = \frac{1}{\sigma_i^2} M[\varepsilon_i] = 0$ и тогда

$$\begin{aligned}\sigma_i^2[v_i] &= M[v_i^2] = M\left[\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}\right] = \frac{1}{\sigma_i^2} M[\varepsilon_i^2] = \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2} M[\varepsilon_i - M[\varepsilon_i]]^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 = 1 = \text{const.}\end{aligned}$$

Следовательно, для преобразованной модели выполняются соответствующие предпосылки МНК. В этом случае оценки, полученные по МНК, будут наилучшими линейными несмещенными оценками.

Таким образом, МВНК включает следующие этапы:

1. Значения каждой пары наблюдений (x_i, y_i) делят на известную величину σ_i . Тем самым, наблюдениям с наименьшими дисперсиями придаются наибольшие “веса”, а с максимальными дисперсиями — наименьшие “веса”. Действительно, наблюдения с меньшими дисперсиями отклонений будут более значимыми при оценке коэффициентов регрессии, чем наблюдения с большими дисперсиями. Учет этого факта увеличивает вероятность получения более точных оценок.

2. По МНК для преобразованных значений $\left(\frac{1}{\sigma_i}, \frac{x_i}{\sigma_i}, \frac{y_i}{\sigma_i}\right)$ строится уравнение регрессии без свободного члена с гарантированным качеством оценок.

Для применения МВНК необходимо знать фактические значения дисперсий σ_i^2 отклонений. На практике такие значения известны крайне редко. Следовательно, чтобы применить МВНК, необходимо сделать реалистические предположения о значениях σ_i^2 .

Например, может оказаться целесообразным предположить, что дисперсии σ_i^2 отклонений ε_i пропорциональны значениям x_i (рис. 9.8, а) или значениям (рис. 9.8, б).

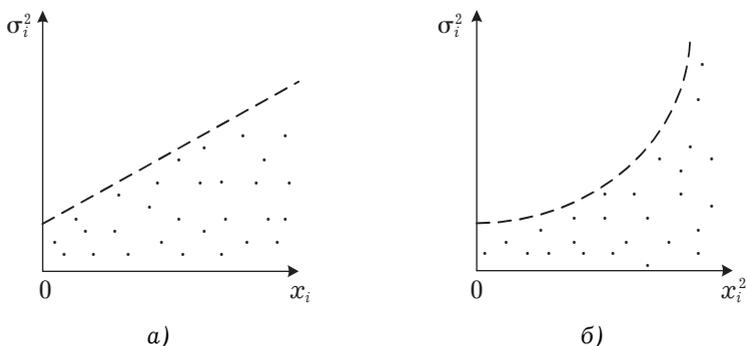


Рис. 9.8

Дисперсии σ_i^2 пропорциональны x_i (рис. 9.8, а)

$\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i$, где σ^2 — коэффициент пропорциональности.

Тогда уравнение (9.33) преобразуется делением его левой и правой частей на $\sqrt{x_i}$:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{x_i}} = \frac{b_0}{\sqrt{x_i}} + b_1 \frac{x_i}{\sqrt{x_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_i}} \Rightarrow \frac{Y_i}{\sqrt{x_i}} = b_0 \frac{1}{\sqrt{x_i}} + b_1 \sqrt{x_i} + v_i.$$

Несложно показать, что для случайных отклонений

$$v_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_i}}$$

выполняется условие гомоскедастичности. Следовательно, для регрессии применим обычный МНК. Действительно, в силу выполнимости предпосылки

$$\sigma_i^2 = \sigma^2[\varepsilon_i] = \sigma^2 x_i$$

имеем:

$$\sigma^2[v_i] = \sigma^2 \left[\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_i}} \right] = \frac{1}{x_i} \sigma^2[\varepsilon_i] = \frac{1}{x_i} \sigma^2 x_i = \sigma^2 = const.$$

Таким образом, оценив по МНК коэффициенты b_0 и b_1 , затем возвращаются к исходному уравнению регрессии.

Если в уравнении регрессии присутствует несколько объясняющих переменных, можно поступить следующим образом. Вместо конкретной объясняющей переменной X_i используется исходное уравнение множественной линейной регрессии

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_m X_m,$$

т. е. фактически линейная комбинация объясняющих переменных. В этом случае получают следующую регрессию:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{\hat{y}_i}} = b_0 \frac{1}{\sqrt{\hat{y}_i}} + b_1 \frac{x_{i1}}{\sqrt{\hat{y}_i}} + \dots + b_m \frac{x_{im}}{\sqrt{\hat{y}_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\hat{y}_i}}. \quad (9.34)$$

Иногда из всех объясняющих переменных выбирается наиболее подходящая исходя из графического представления.

В случае, если зависимость σ_i^2 от x_i целесообразнее выразить не линейной функцией, а квадратичной (рис. 9.8, б), то соответствующим преобразованием будет деление уравнения регрессии на x_i .

$$\frac{Y_i}{x_i} = b_0 \frac{1}{x_i} + b_1 + \frac{\varepsilon_i}{x_i} \Rightarrow \frac{Y_i}{x_i} = b_0 \frac{1}{x_i} + b_1 + v_i,$$

где $v_i = \frac{\varepsilon_i}{x_i}$.

По аналогии с вышеизложенным несложно показать, что для отклонений v_i будет выполняться условие гомоскедастичности. После определения по МНК оценок коэффициентов b_0 и b_1 для уравнения возвращаются к исходному уравнению.

Отметим, что для применения описанных выше преобразований весьма значимы знания об истинных значениях дисперсий отклонений σ_i^2 либо предположения, какими эти дисперсии могут быть. Во многих случаях дисперсии отклонений зависят не от включенных в уравнение регрессии объясняющих переменных, а от тех, которые не включены в модель, но играют существенную роль в исследуемой зависимости. В этом случае они должны быть включены в модель. В ряде случаев для устранения гетероскедастичности необходимо изменить

спецификацию модели (например, линейную на логлинейную, мультипликативную на аддитивную и т. п.).

В заключение отметим, что наличие гетероскедастичности не позволяет получить эффективные оценки, что нередко приводит к необоснованным выводам по их качеству. Обнаружение гетероскедастичности является достаточно трудоемкой проблемой, и для ее решения разработано несколько методов (тестов). В случае установления наличия гетероскедастичности ее корректировка также является достаточно серьезной проблемой. Одно из возможных решений — метод взвешенных наименьших квадратов (при этом необходимы определенная информация либо обоснованные предположения о величинах дисперсий отклонений).

На практике имеет смысл применить несколько методов определения гетероскедастичности и способов ее корректировки (преобразований, стабилизирующих дисперсию).

9.9. Нелинейные регрессионные модели и их линеаризация

Во многих практических случаях моделирование экономических зависимостей линейными уравнениями дает вполне удовлетворительные результаты и может использоваться для анализа и прогнозирования. Однако в силу многообразия и сложности экономических процессов ограничиться рассмотрением лишь линейных регрессионных моделей невозможно. Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными уравнениями регрессии, безусловно, не даст положительного результата. Например, при рассмотрении спроса Y на некоторый товар от цены X данного товара в ряде случаев можно ограничиться линейным уравнением регрессии: $y = b_0 + b_1x$. Здесь b_1 характеризует абсолютное изменение y (в среднем) при единичном изменении x . Если же мы хотим проанализировать эластичность спроса по цене, то приведенное уравнение не позволит это осуществить. В этом случае целесообразно рассмотреть так называемую *логарифмическую модель*.

При анализе издержек Y от объема выпуска продукции X наиболее обоснованной является *полиномиальная* (точнее, кубическая) *модель*.

При рассмотрении производственных функций линейная модель является нереалистичной. В этом случае обычно используются степенные модели. Например, широко известность имеет *производственная функция Кобба-Дугласа*

$$V = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (9.35)$$

где V — объем выпуска продукции;

K и L — затраты капитала и труда соответственно;

A , α и β — параметры модели.

Достаточно широко применяются в современном эконометрическом анализе и многие другие модели, в частности, обратная и экспоненциальная зависимости.

Построение и анализ нелинейных моделей имеют свою специфику. Приведенные выше рассуждения и примеры дают основания для более детального рассмотрения возможных нелинейных моделей. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением нелинейных моделей, допускающих сведение их к линейным. Обычно это так называемые линейные относительно параметров модели. Для простоты изложения и графической иллюстрации будем рассматривать модели парной регрессии с последующим естественным переходом к моделям множественной регрессии.

9.9.1. Логарифмические модели

Пусть некоторая экономическая зависимость моделируется формулой

$$y = ax^{\beta}, \quad (9.36)$$

где α и β — параметры модели, подлежащие определению.

Эта функция может отражать зависимость спроса y на продукцию (услуги) от ее цены x (в данном случае $\beta < 0$) или от дохода x (в данном случае $\beta > 0$; при такой интерпретации

переменных x и y функция (9.36) называется функцией Энгеля. Функция (9.36) может отражать также зависимость объема выпуска продукции y от использования ресурса x (производственная функция), в которой $0 < \beta < 1$, а также ряд других зависимостей.

Модель (9.36) не является линейной функцией относительно x (производная зависимой переменной y по x , указывающая на изменение y по отношению к изменению x , будет зависеть от x : $\frac{dy}{dx} = \alpha\beta x^{\beta-1}$, т. е. не будет константой, что присуще только нелинейным моделям). Стандартным и широко используемым подходом к анализу функций данного рода в эконометрике является логарифмирование по экспоненте (по основанию $e = 2,71828\dots$). Такие логарифмы называются натуральными логарифмами и обозначаются $\ln x$, $\ln y$.

Прологарифмировав обе части (9.36), имеем:

$$\ln y = \ln a + \beta \ln x. \quad (9.37)$$

После замены $\ln a = b_0$, выражение (9.37) примет вид:

$$\ln y = b_0 + b_1 \ln x. \quad (9.38)$$

С целью статистической оценки коэффициентов b_0 и b_1 добавим в модель случайную погрешность ε и получим так называемую двойную логарифмическую модель (и входная, и выходная переменные заданы в логарифмическом виде):

$$\ln Y = b_0 + b_1 \ln x + \varepsilon. \quad (9.39)$$

Не являясь линейным относительно x и y , данное уравнение является линейным относительно $\ln x$ и $\ln y$, а также относительно параметров b_0 и b_1 . Вводя замену $z = \ln y$, выражение (9.39) можно переписать в виде:

$$Z = b_0 + b_1 \ln x + \varepsilon. \quad (9.40)$$

Модель (9.40) является линейной моделью, подробно рассмотренной ранее. Если все необходимые предпосылки классической линейной регрессионной модели для (9.40) выполнены,

то по МНК можно определить наилучшие линейные несмещенные оценки коэффициентов b_0 и b_1 .

Отметим, что коэффициент b_1 определяет эластичность переменной y по переменной x , т. е. процентное изменение y для данного процентного изменения x . Действительно, продифференцировав левую и правую части (9.38) по x , получим:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = b_1 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow b_1 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = E_x(y). \quad (9.41)$$

Коэффициент b_1 является константой, указывая на постоянную эластичность. Поэтому зачастую двойная логарифмическая модель называется моделью постоянной эластичности. Суть полученных выводов наглядно представлена на рис. 9.9.

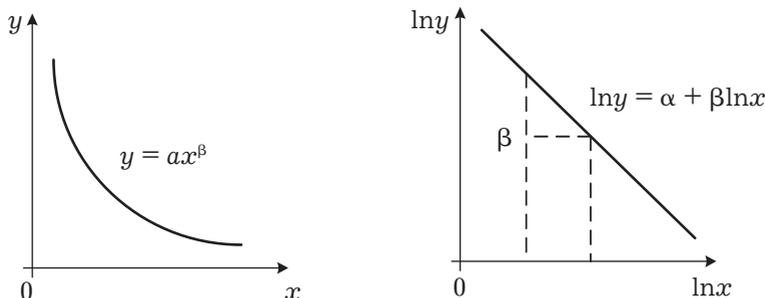


Рис. 9.9

Заметим, что в случае парной регрессии обоснованность использования логарифмической модели проверить достаточно просто. Вместо получаемых наблюдений (x_i, y_i) рассматриваются наблюдения $(\ln x_i, \ln y_i, i = 1, n)$. Вновь полученные точки наносятся на корреляционное поле. Если их расположение соответствует прямой линии, то произведенная замена удачна и использование логарифмической модели обосновано.

Данная модель легко обобщается на большее число переменных. Например,

$$\ln Y = b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \varepsilon. \quad (9.42)$$

В выражении (9.42) коэффициенты b_0 и b_1 являются эластичностями переменной Y по переменным x_1 и x_2 , соответственно. Нередко данная модель используется при анализе производственных функций. Например, хорошо известна производственная функция Кобба-Дугласа (9.35).

После логарифмирования обеих частей уравнения (9.35) получим:

$$\ln V = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (9.43)$$

Здесь α и β — коэффициенты эластичности выпуска продукции по затратам капитала и труда соответственно. Сумма этих коэффициентов является таким важным экономическим показателем, как отдача от масштаба. При $\alpha + \beta = 1$ говорят о постоянной отдаче от масштаба (во сколько раз увеличиваются затраты ресурсов, во столько же раз увеличивается выпуск). При $\alpha + \beta < 1$ имеет место убывающая отдача от масштаба (увеличение объема выпуска меньше увеличения затрат ресурсов). При $\alpha + \beta > 1$ — возрастающая отдача от масштаба (увеличение объема выпуска больше увеличения затрат ресурсов).

9.9.2. Полулогарифмические модели

Модели вида

$$\ln y = b_0 + b_1 x; \quad (9.44)$$

$$y = b_0 + b_1 \ln x. \quad (9.45)$$

называются полулогарифмическими моделями.

Такие модели обычно используют в тех случаях, когда необходимо определять темп роста или прироста каких-либо экономических показателей. Например, при анализе банковского вклада по первоначальному вкладу и процентной ставке, при исследовании зависимости прироста объема выпуска от относительного (процентного) увеличения затрат ресурса, бюджетного дефицита от темпа роста валового национального продукта, темпа роста инфляции от объема денежной массы и т. д.

9.9.3. Логлинейная модель

Рассмотрим зависимость, хорошо известную в банковском и финансовом анализе

$$y_t = y_0(1 + r)^t, \quad (9.46)$$

где y_0 — начальная величина переменной y (например, первоначальный вклад в банке);

r — сложный темп прироста величины y (процентная ставка);

y_t — значение величины y в момент времени t (вклад в банке в момент времени t). Модель (9.46) легко сводится к полулогарифмической модели (9.44). Действительно, прологарифмировав (9.46), имеем:

$$\ln y_t = \ln y_0 + t \ln(1 + r). \quad (9.47)$$

Введем обозначения:

$$\ln y_0 = b_0, \ln(1 + r) = b_1.$$

Тогда уравнение (9.47) примет вид:

$$\ln Y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t. \quad (9.48)$$

В (9.48) использовано дополнительно случайное слагаемое ε_t (в силу возможной изменчивости процентной ставки).

Полулогарифмическая модель (9.44) легко сводится к линейной модели заменой $z = \ln y_t$.

Коэффициент b_1 в модели (9.44) имеет смысл темпа прироста переменной y по переменной x , т. е. характеризует отношение относительного изменения y к абсолютному изменению x . Действительно, продифференцировав (9.44) по x , имеем:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{dy/y}{dx} = \frac{\text{относительное изменение } y}{\text{абсолютное изменение } x}.$$

Умножив b_1 на 100, получим процентное изменение переменной y (темп прироста переменной y). Поэтому полулогарифмическая модель (9.44) обычно используется для измере-

ния темпа прироста экономических показателей. Заметим, что из соотношения $b_1 = \ln(1 + r)$ определяется темп прироста r показателя y :

$$1 + r = e^{b_1} \Rightarrow r = e^{b_1} - 1. \quad (9.49)$$

Отметим, что коэффициент b_1 в (9.48) определяет мгновенный темп прироста, а r в (9.49) определяет обобщенный (так называемый, сложный) темп прироста. Поэтому в общем случае они отличаются друг от друга.

9.9.4. Линейно-логарифмическая модель

Рассмотрим так называемую линейно-логарифмическую модель

$$y = b_0 + b_1 \ln x. \quad (9.50)$$

Она сводится к линейной модели заменой $x_1 = \ln x$. В данной модели коэффициент b_1 определяет изменение переменной y вследствие единичного относительного прироста x (например, на 1%), т. е. характеризует отношение абсолютного изменения y к относительному изменению x . Действительно, продифференцировав (9.50), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= b_1 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow b_1 = \frac{dy}{dx/x} = \frac{\text{абсолютное изменение } y}{\text{относительное изменение } x} \Rightarrow \\ \Rightarrow dy &= b_1 \frac{dx}{x} \Rightarrow \Delta y \approx b_1 \cdot \frac{\Delta x}{x}. \end{aligned}$$

Умножив последнее соотношение на 100, получим абсолютный прирост y при процентном изменении x . Таким образом, если x изменилось на 1% (0,01), то y изменилось на 0,01 — b_1 .

Модель (9.45) используется обычно в тех случаях, когда необходимо исследовать влияние процентного изменения независимой переменной на абсолютное изменение зависимой переменной.

Например, если положить $y = \text{ВВП}$ (валовой внутренний продукт), а $x = M$ (денежная масса), то получим следующую формулу:

$$y = b_0 + b_1 \ln M,$$

из которой следует, что, если увеличить предложение денег M на 1%, то y в среднем вырастет на $0,01 b_1$.

9.9.5. Обратная модель

Модель вида

$$y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} \quad (9.51)$$

называется обратной моделью. Эта модель сводится к линейной заменой $x_1 = 1/x$. Данная модель обычно применяется в тех случаях, когда неограниченное увеличение переменной x асимптотически приближает зависимую переменную y к некоторому пределу (в данном случае к b_0). В зависимости от знаков b_0 и b_1 возможны ситуации, изображенные на рис. 9.10.

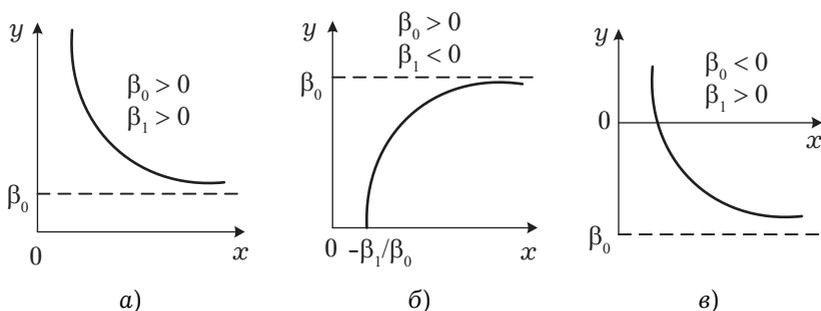


Рис. 9.10

График на рис. 9.10, а может отражать зависимость между объемом выпуска x и средними фиксированными издержкам y . График на рис. 9.10, б — зависимость между доходом x и спросом на блага y (например, на товары первой необходимости либо товары относительной роскоши). Это так называемые функции Торн-

квиста (в этом случае $x = -b_1/b_0$ минимально необходимый уровень дохода). Важным приложением графика, изображенного на рис. 9.10, в, является кривая Филлипса, отражающая зависимость между уровнем безработицы x в процентах и процентным изменением заработной плат y . При этом точка пересечения кривой с осью $0x$ определяет естественный уровень безработицы.

9.9.6. Степенная модель

Степенная функция вида

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \quad (9.52)$$

часто отражает ту или иную экономическую зависимость. Например, кубическая функция

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (9.53)$$

в микроэкономике моделирует зависимость общих издержек (TC) от объема выпуска (Q) (рис. 9.11, а).

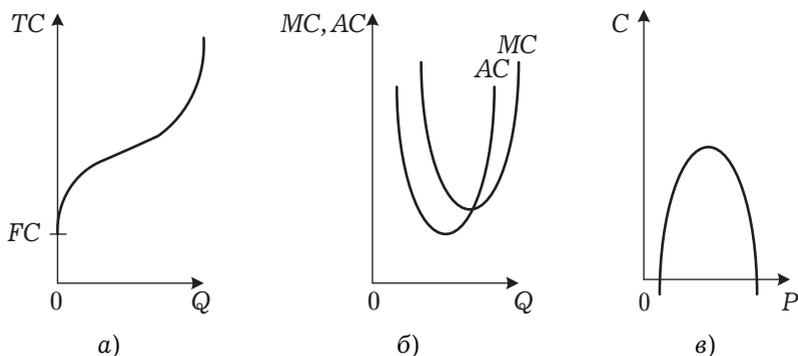


Рис. 9.11

Аналогично квадратичная функция

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (9.54)$$

может отражать зависимость между объемом выпуска (Q) и средними (AC) либо предельными (MC) издержками (рис. 9.11, б);

или между расходами на рекламу (C) и прибылью (P) (рис. 9.11, в) и т. д.

Как и ранее рассмотренные модели, модель (9.52) является нелинейной относительно коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m , однако, ее можно свести к линейной регрессионной модели. Заменяя x на x_1, x^2 на x_2, \dots, x^m на x_m , получаем вместо (9.52) модель множественной линейной регрессии с m переменными x_0, x_1, \dots, x_m

$$y = b_0 + b_1x + b_2x_2 + \dots + b_mx_m. \quad (9.55)$$

9.9.7. Показательная модель

Показательная функция

$$y = b_0e^{b_1x} \quad (9.56)$$

также достаточно широко применяется в эконометрическом анализе. Наиболее важным ее приложением является ситуация, когда анализируется изменение переменной y с постоянным темпом прироста во времени. В этом случае переменная x символически заменяется переменной t :

$$y = b_0e^{b_1t}. \quad (9.57)$$

Данная функция путем логарифмирования ($\ln e^{b_1t} = b_1t$) сводится к логлинейной модели (9.48):

$$\ln y = \ln b_0 + b_1t. \quad (9.58)$$

Заметим, что в общем виде показательная функция имеет вид

$$y = b_0\alpha^{b_1x}, \quad (9.59)$$

где α — произвольная положительная константа ($\alpha \neq 1$).

Но данная функция сводится к (9.56) вследствие тождества

$$\alpha^{b_1x} = e^{b_1x \ln \alpha}.$$

Ряд экономических показателей моделируется через функции, являющиеся композицией перечисленных функций, что

позволяет также свести их к линейным. Например, широко известна производственная функция Кобба-Дугласа с учетом научно-технического прогресса имеет вид:

$$V = AK^\alpha L^\beta e^{\gamma t}. \quad (9.60)$$

Прологарифмировав данную функцию, получим соотношение:

$$\ln V = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma t, \quad (9.61)$$

которое сводится к линейному заменами

$$\alpha = \ln A, k = \ln K, l = \ln L, y = \ln V.$$

9.10. Оценки коэффициентов нелинейных регрессионных моделей

9.10.1. Оценки коэффициентов параболы второго порядка

Предположим, что для изображения экспериментальной зависимости y от x выбрана квадратическая функция (парабола второго порядка)

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Используя метод наименьших квадратов, определим выражения для искоемых коэффициентов b_0, b_1, b_2 .

Сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции от экспериментальных данных имеет вид:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)^2.$$

Воспользовавшись вышеизложенной методикой определения коэффициентов, возьмем частные производные от данного выражения по каждому из коэффициентов, и полученные выражения приравняем нулю.

После элементарных преобразований получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Ее решение может быть

получено с помощью определителей или последовательным исключением неизвестных. В большинстве случаев это решение громоздко и требует трудоемких вычислений, но оно может быть значительно упрощено, если выполняется уже упоминавшееся условие о переносе начала координат в центр эксперимента. В этом случае все суммы нечетных степеней аргумента равны нулю. В результате решения полученной системы уравнений получим выражения для определения коэффициентов аппроксимации

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2};$$

$$b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2};$$

$$b_2^* = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2}.$$

9.10.2. Определение коэффициентов функций, отличных от полинома

Опытным путем установлено, что кроме полиномиальных функций для аппроксимации зависимостей экономических показателей наиболее часто встречающимися являются следующие функции:

- гипербола (обратная функция) $y = b_0 + b_1/x$;
- квадратичная функция $y = b_0 + b_1\sqrt{x}$;
- логарифмическая функция $y = b_0 + b_1 \ln x$;

- экспоненциальная функция $y = \exp(b_0 + b_1 x)$.

Последовательно рассмотрим порядок определения коэффициентов в каждом конкретном случае, имея в виду, что порядок расчета коэффициентов для линейной функции и полинома второго порядка (параболы) был подробно рассмотрен выше.

Гипербола

В том случае, когда в качестве аппроксимирующей зависимости предполагается использовать гиперболическую зависимость вида:

$$y = b_0 + b_1/x,$$

выражения для определения коэффициентов имеют следующий вид:

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \frac{1}{x_i} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}},$$

$$b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - n \sum_{i=1}^n y_i \frac{1}{x_i}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}.$$

Квадратичная функция

В случае использования квадратичной функции вида

$$y = b_0 + b_1 \sqrt{x}$$

для аппроксимации реального процесса в результате применения общего подхода метода наименьших квадратов, получим следующие выражения для определения коэффициентов аппроксимации

$$b_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sqrt{x_i} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i};$$

$$b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} - n \sum_{i=1}^n y_i \sqrt{x_i}}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Логарифмическая функция

$$y = b_0 + b_1 \ln x$$

Данная функция отличается от линейной только тем, что независимая переменная входит под знак логарифма. Этим и определяются выражения для расчета коэффициентов аппроксимации

$$b_0^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \ln x_i \right) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2};$$

$$b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \sum_{i=1}^n y_i \ln x_i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}.$$

Экспоненциальная функция

$$y = \exp(b_0 + b_1 x).$$

В результате логарифмирования данная функция превращается в линейную, для которой уже были определены выражения для определения коэффициентов аппроксимации

$$y_1 = \ln y = b_0 + b_1 x.$$

Таким образом, если известны выражения для определения коэффициентов аппроксимации линейной функции, то для получения значений экспоненциальной функции необходимо и достаточно полученные результаты вычислений подставить в экспоненциальную функцию.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой регрессионный анализ (РА)?
2. В чем принципиальное отличие двух моделей РА?
3. Что является главной задачей РА?
4. Какой эксперимент называется идеальным?
5. В чем заключается сущность метода наименьших квадратов (МНК)?
6. Что обеспечивает перенос начала координат в центр эксперимента?
7. Перечислите предпосылки РА.
8. В чем заключается статистический анализ уравнения регрессии?
9. Перечислите и кратко охарактеризуйте методы, которые применяют для проверки однородности дисперсии воспроизводимости.
10. Приведите примеры ошибок спецификации моделей. К чему они приводят?
11. Какие параметры анализируют при определении качества регрессионных моделей?
12. Что называется гетероскедастичностью? К каким последствиям она приводит?
13. Перечислите этапы проверки наличия гетероскедастичности в тестах Парка и Голдфелда-Квандта.
14. В каких случаях применяют метод наименьших взвешенных квадратов (МНК)?
15. Какие виды моделей наиболее часто используются при анализе экономических процессов?

16. С помощью каких приемов различные нелинейные модели сводят к линейным?

Задачи для самостоятельного решения

1. При исследовании влияния температуры на точность суточного хода хронометра получены результаты, приведенные в табл. 9.8.

Таблица 9.8

$t^{\circ}\text{C}$	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0
Δc	2,20	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

Нанести полученные результаты на координатное поле и рассчитать коэффициенты уравнения регрессии (полином второй степени).

2. Электрическое сопротивление сантиметра нити накаливания из молибдена в зависимости от температуры характеризуется данными, приведенными в табл. 9.10.

Таблица 9.10

t°, K	1178	1286	1489	1830	1988	2132	2289
$\rho, \mu, \text{Ом} \cdot \text{см}$	28,94	32,09	37,72	47,92	52,70	57,32	61,97

Нанести полученные результаты на координатное поле и рассчитать коэффициенты уравнения линейной регрессии.

3. Проводились измерения пройденного расстояния свободного падения тела с интервалом в 1/30 секунды. Результаты приведены в табл. 9.11.

Таблица 9.11

$t, \text{с}$	1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	6/30	7/30	8/30	9/30	10/30
$h, \text{см}$	11,86	15,67	20,60	26,69	33,71	41,93	51,13	61,49	72,90	85,44

Нанести полученные результаты на координатное поле и рассчитать коэффициенты уравнения регрессии (полином второй степени).

10. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

10.1. Сущность корреляционного анализа

Механизм потребления и спроса на продукцию или услуги компаний определяется сложной системой экономических, социальных и других факторов, которые формируют конкретный уровень их потребления и определяют параметры его развития в перспективе. Каждый из факторов, подлежащий анализу, оказывает на показатели результативности работы компании не одинаковое влияние. В реальном мире многие явления происходят в обстановке действия многочисленных факторов, влияние каждого из которых ничтожно, а число их велико. В этом случае связь теряет свою однозначность, и изучаемая физическая система переходит не в строго определенное состояние, а в одно из возможных для нее состояний. В этом случае может идти речь о так называемой стохастической (вероятностной) связи, которая состоит в том, что одна случайная переменная реагирует на изменение другой изменением своего среднего значения. Поэтому важной задачей изучения и прогнозирования положения компании на рынке товаров и услуг является выявление, отбор и оценка степени влияния различных факторов и выявление наиболее значимых факторов из всей их совокупности.

При изучении влияния факторов и моделировании состояния любой сложной системы необходимо использовать системный подход [4], обеспечивающий получение наиболее достоверных результатов прогнозирования, например, спроса на продукцию или услуги компании.

Для решения задач подобного класса достаточно широкое применение нашли методы корреляционного и регрессионного анализа. Корреляционный анализ (КА) позволяет выявить наиболее значимые факторы и установить степень их влияния на показатели, характеризующие экономическое положение компании (в первую очередь это объем производства продукции и получаемый доход от ее реализации).

Корреляционный анализ [1, 3, 6, 8] представляет собой совокупность методов статистической обработки результатов экспериментов (наблюдений), зависящих от различных одновременно действующих факторов и предназначенных для анализа существенности влияния данных факторов на результаты экспериментов (наблюдений).

Сущность КА состоит в определении коррелированности результатов наблюдений с исследуемыми факторами и оценке на этой основе существенности влияния этих факторов на результаты наблюдений.

Как известно, характеристикой статистической зависимости между случайными переменными является коэффициент корреляции, оценка которого и позволяет судить о степени данной зависимости. Таким образом, КА представляет собой, по существу, совокупность методов исследования свойств системы случайных величин.

Знание стохастической зависимости между случайными переменными позволяет решать целый ряд задач по прогнозированию. Однако, поскольку понятие стохастической зависимости относится к осредненным условиям, прогнозы не могут быть признаны безошибочными.

С учетом вышесказанного применение корреляционного анализа позволяет решать следующие задачи:

- определение наличия связи между выходной переменной и факторами;
- определение вида (линейная или нелинейная) связи между выходной переменной и входными факторами;
- определение величины (силы, тесноты) связи между выходной величиной и факторами;
- оценивание существенности влияния факторов на результаты наблюдений.

Особенностью КА является то, что его методы позволяют установить не только существенность влияния фактора X на результаты наблюдения Y , но и степень этого влияния. Решение данного вопроса определяется типом стохастической зависимости между выходной переменной и факторами.

10.2. Классификация методов корреляционного анализа

Классификация видов КА определяется свойствами результатов наблюдений, свойствами факторов и свойствами стохастической зависимости между ними.

По количеству результатов наблюдения выходной переменной КА подразделяются:

- на скалярный (одномерный);
- векторный (многомерный).

По количеству факторов, влияющих на выходную переменную:

- на однофакторный;
- многофакторный (множественный) КА.

По форме стохастической зависимости:

- на линейный;
- нелинейный.

10.3. Однофакторный корреляционный анализ

Наиболее простым случаем однофакторного КА является случай, когда исследуется зависимость между двумя величинами (одномерный комплекс). Некоторый объект наблюдения характеризуется двумя параметрами, один из которых интерпретируется как фактор X , а другой — как результат Y . Над объектом проводится N наблюдений, в результате которых получают N пар значений (x_i, y_i) (например, из генеральной совокупности $\{X, Y\}$ взята случайная выборка объема N). Результаты наблюдений могут быть представлены либо в табличной форме (корреляционная таблица), либо в графической форме (поле корреляции).

Корреляционная таблица (табл. 10.1) строится в том случае, когда число наблюдений велико, либо возможно появление повторяющихся пар значений (x_i, y_i) . Она представляет собой таблицу, где номера строк соответствуют номерам повторяющихся значений фактора X или же номерам интервалов, на которые разбивается весь диапазон изменений результата Y .

В ячейках таблицы записывают числа l_{ij} появления пар (x_i, y_j) , отвечающих условиям формирования соответствующей ячейки.

Таблица 10.1

$y \backslash x$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	m
y_1	l_{11}	l_{12}	...	l_{1i}	...	l_{1k}	m_1
y_2	l_{21}	l_{22}	...	l_{2i}	...	l_{2k}	m_2
...
y_j	l_{j1}	l_{j2}	...	l_{ji}	...	l_{jk}	m_j
...
y_t	l_{t1}	l_{t2}	...	l_{ti}	...	l_{tk}	m
n	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k	N

В строке n записаны числа появления в выборке значений x_i ($i = \overline{1, k}$), а в столбце m — значений y_j ($j = \overline{1, t}$).

$$N = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{j=1}^t m_j.$$

В качестве точечных оценок неизвестных параметров двумерного закона распределения берутся соответствующие статистики:

- оценки математических ожиданий

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i n_i; \quad m_y^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^t y_j m_j; \quad (10.1)$$

- оценки дисперсий

$$\sigma_x^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - m_x^{*2}; \quad \sigma_y^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^t y_j^2 m_j - m_y^{*2}; \quad (10.2)$$

- оценки коэффициента корреляции

$$r^* = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^t x_i y_j l_{ij} - m_x^* m_y^*}{\sigma_x \sigma_y}; \quad (10.3)$$

– оценки коэффициентов регрессии y на x и x на y

$$r_{yx}^* = r^* \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}; \quad r_{xy}^* = r^* \frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*}; \quad (10.4)$$

– оценки уравнений регрессии

$$\begin{aligned} M[y/x] &= m_y^* + r_{yx}^*(x - m_x^*); \\ M[x/y] &= m_x^* + r_{xy}^*(y - m_y^*). \end{aligned} \quad (10.5)$$

В случае, если объем выборки мал, то оценки характеристик находят по несгруппированным данным (x_i, y_i) . Так, например, оценки математических ожиданий и дисперсий имеют вид:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i; \quad m_y^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^t y_j; \quad (10.6)$$

$$\sigma_x^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 - m_x^{*2}; \quad \sigma_y^{*2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^t y_j^2 - m_y^{*2}. \quad (10.7)$$

Кроме табличного полезно графическое изображение результатов наблюдения в виде поля корреляции, представляющее собой совокупность точек (x_i, y_i) в прямоугольной системе координат xOy . Такое представление позволяет в первом приближении сформулировать предположение о форме и величине корреляционной связи.

В одномерном однофакторном КА предполагается, что результат Y зависит только от X , причем зависимость эта стохастическая или корреляционная.

Пример 10.1. В табл. 10.2 представлены выборочные данные об основных фондах (X) и объемах продукции (Y) 50 предприятий некоторой отрасли промышленности. Найти оценки параметров корреляционной модели и записать уравнение регрессии Y на X (зависимость условного математического ожидания объема валовой продукции).

Решение.

Точечные оценки математических ожиданий m_x^* и m_y^* определяем по формулам

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_{cp_i} n_{x_i}; \quad m_y^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m y_{cp_j} n_{y_j}, \quad (10.8)$$

где x_{cp_i} , y_{cp_j} — координаты середины i -го, j -го интервалов по осям x и y , соответственно;

n_{x_i} , n_{y_j} — число предприятий, попадающих в i -й, j -й интервалы;

k , m — число интервалов по осям x и y ;

N — общее число предприятий.

Таблица 10.2

Валовая продукция (млн руб.) (y)	Основные фонды предприятий промышленности (млн руб.) (x)					Кол-во предприятий. n_{y_j}
	0-1,4	1,4-2,8	2,8-4,2	4,2-5,6	5,6-7,0	
0,0-0,8	1	3				4
0,8-1,6		4	6			10
1,6-2,4			10	8		18
2,4-3,2			5	9	1	15
3,2-4,0					3	3
Кол-во предприятий. n_{x_i}	1	7	21	17	4	50

Подставляя в формулы (10.8) данные из табл. 10.2 и производя вычисления, получим

$$m_x^* = 3,95 \text{ млн руб.}; \quad m_y^* = 2,05 \text{ млн руб.}$$

Оценки дисперсий σ_x^{*2} и σ_y^{*2} , коэффициента корреляции r^* получим по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x^{*2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_{cp_i}^2 n_{x_i} - m_x^{*2}; \\ \sigma_y^{*2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m y_{cp_j}^2 n_{y_j} - m_y^{*2}; \\ r^* &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_{cp_i} y_{cp_j} n_{ij} - m_x^* m_y^*}{\sigma_x^* \sigma_y^*}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

После вычислений по формулам (10.9) получим

$$\sigma_x^{*2} = 1,52, \quad \sigma_y^{*2} = 0,68, \quad r^* = 0,80.$$

Уравнение регрессии запишется в виде:

$$\hat{y} = M[Y / X] = m_y^* + \beta_{yx}^*(x - m_x^*), \quad (10.10)$$

где $\beta_{yx}^* = r^* \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}$ — коэффициент регрессии.

Проведя расчеты по формуле (10.10), получим

$$\hat{y} = 2,05 + 0,80\sqrt{0,68 / 1,52}(x - 3,95) = 0,532x - 0,043.$$

Графическое представление уравнения регрессии показано на рис. 10.1.

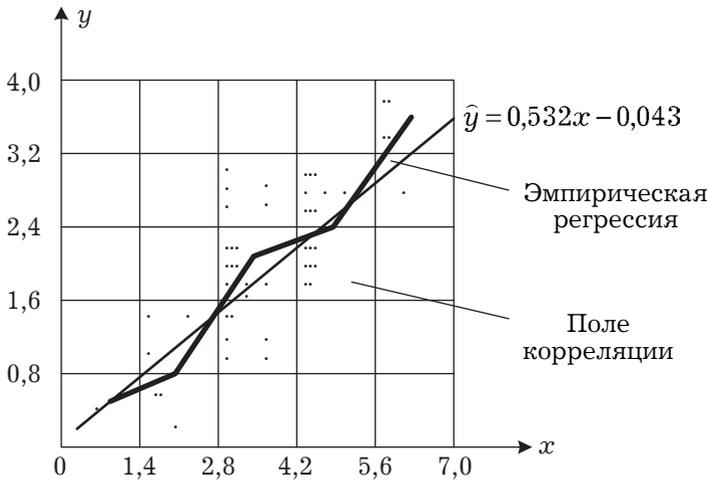


Рис. 10.1

10.4. Анализ тесноты связи

Особенностью КА по сравнению с дисперсионным анализом является то, что методы КА позволяют установить не только существенность влияния фактора X на результаты на-

блюдения Y , но и степень тесноты этого влияния. Решение данного вопроса определяется типом статистической зависимости между Y и X .

Если эта связь является линейной, то, как известно, мерой линейной зависимости служит коэффициент корреляции.

Если величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции равен нулю, если же X и Y связаны *линейной* функциональной зависимостью, то модуль коэффициента корреляции равен единице. Следовательно, коэффициент корреляции показывает степень близости связи двух величин к линейной стохастической зависимости.

На практике для оценивания коэффициента корреляции по результатам испытаний используют следующую статистику

$$r_{xy}^* = \frac{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - m_y^*)^2}}. \quad (10.11)$$

Так как данная оценка определяется на основе выборочной совокупности результатов наблюдений, то для обеспечения необходимой достоверности результата анализа требуется ее проверка, которая включает в себя два этапа:

- проверку значимости (существенности) коэффициента корреляции;
- определение точности и надежности полученной оценки.

Проверка значимости коэффициента корреляции состоит в следующем. Так как вычисленное значение r_{xy}^* является лишь приближенной оценкой действительного, но неизвестного значения, то его отличие от нуля не означает наличия действительной стохастической зависимости. Возникает необходимость проверки гипотезы о том, что действительное значение коэффициента корреляции равно нулю $H_0 : r_{xy} = 0$.

Если эта гипотеза будет отвергнута, то коэффициент корреляции значим, а величины X и Y коррелированы, в противном случае говорят об отсутствии корреляционной связи.

В качестве показателя согласованности при проверке гипотезы H_0 используется показатель вида

$$u = \frac{r_{xy}^* \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^{*2}}}, \quad (10.12)$$

подчиняющийся закону распределения Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

Процедура проверки гипотезы H_0 состоит в следующем: по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$ по таблице распределения Стьюдента определяют критическое значение $t_{\alpha, k}$, и, если вычисленное значение показателя согласованности превзойдет это значение, то гипотеза H_0 отвергается и признается наличие существенной стохастической связи между величинами X и Y .

Еще раз подчеркнем, что коэффициент корреляции характеризует лишь степень приближения зависимости между результатом Y и фактором X к линейной функциональной зависимости. Чем ближе его абсолютное значение к единице, тем ближе стохастическая зависимость к функциональной и, следовательно, тем более значимо влияние фактора X на результаты наблюдений Y .

В первом приближении коэффициент корреляции может быть использован и для оценивания степени нелинейной зависимости, если она несущественно отличается от линейной. Так, если величина коэффициента корреляции превышает 0,8, то можно с достаточной степенью уверенности полагать, что независимо от типа связи между X и Y она достаточно тесна и целесообразно более детально исследовать ее форму.

10.5. Многофакторный корреляционный анализ

В многофакторном корреляционном анализе изучается зависимость одного (одномерный КА) или нескольких (многомерный КА) результатов от нескольких факторов.

Вначале рассмотрим одномерный многофакторный корреляционный анализ и затем для сравнения — особенности мно-

гомерного КА, так как отличия его от одномерного несущественны.

Основной моделью, в рамках которой решаются задачи многофакторного анализа, является линейная модель вида

$$y_k = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j x_{jk} + \varepsilon_k, \quad (10.13)$$

где ε_k — ошибка наблюдения.

При проведении многофакторного корреляционного анализа решаются следующие задачи:

- оценивание наличия и тесноты связи между результатом Y и каждым фактором X_i ;

- оценивание тесноты связи между результатом Y и фактором X_i при фиксированных значениях остальных факторов.

Особенностью многофакторного корреляционного анализа является то, что рассмотренные выше коэффициент корреляции и корреляционное отношение не содержат достаточно полной информации о взаимосвязи величин Y и X_i , в связи с чем возникает необходимость использования ряда других показателей, а именно:

- полных парных коэффициентов корреляции;
- частных коэффициентов корреляции;
- множественных коэффициентов корреляции.

Это объясняется тем, что в многофакторном, а, тем более, в многомерном случаях взаимосвязи между переменными существенно усложняются и коэффициент корреляции между двумя переменными может не соответствовать действительности. Например, корреляция между Y и X_i может быть обусловлена их зависимостью от X_k , в то время как при фиксированном значении X_k эти величины являются стохастически независимыми. Поэтому при изучении связи между этими величинами необходимо исключить влияние X_k , т. е. найти тесноту связи между Y и X_i при фиксированном значении X_k .

Многообразие связей между переменными находит отражение в частных и множественных коэффициентах корреляции. Если имеется совокупность с m признаками, то взаи-

мозависимость между ними можно описать корреляционной матрицей Q_m , состоящей из парных коэффициентов корреляции

$$Q_m = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (10.14)$$

где r_{jk} — парные коэффициенты корреляции;
 m — порядок матрицы.

В случае многомерной корреляции зависимости между признаками более многообразны и сложны, чем в двумерном случае. Одной корреляционной матрицей нельзя полностью описать зависимости между признаками. Поэтому необходимо использовать частные коэффициенты корреляции. Частный коэффициент корреляции, так же как и парный коэффициент корреляции, изменяется в пределах от -1 до $+1$. В общем виде, когда система состоит из m признаков, частный коэффициент корреляции k -го порядка может быть найден из корреляционной матрицы. Например, при $m = 5$ и $k = 2$ необходимо определить частный коэффициент корреляции $r_{12,45}$, т. е. как факторы 1 и 2 связаны с факторами 4 и 5. При этом фактор номер 3 не учитывается (фиксируется). В этом случае из исходной матрицы Q_5 необходимо вычеркнуть третью строку и третий столбец.

Формула для определения частного коэффициента корреляции имеет вид:

$$R_{ij, 1, 2, \dots, m} = q_{ij} / (q_{ii} \cdot q_{jj})^{1/2}, \quad (10.15)$$

где q_{ij} , q_{ii} , q_{jj} — алгебраические дополнения к соответствующим элементам корреляционной матрицы.

Часто представляет интерес оценить связь одного из признаков со всеми остальными. Это можно сделать с помощью множественного, или совокупного, коэффициента корреляции, который также вычисляется с использованием корреляционной матрицы

$$R_{j, 1, 2, \dots, m} = (1 - |q_m|/q_{jj})^{1/2}, \quad (10.16)$$

где $|q_m|$ — определитель корреляционной матрицы, составленной из парных коэффициентов корреляции;

q_{jj} — алгебраическое дополнение к элементу r_{jj} .

При проведении многофакторного корреляционного анализа решаются следующие задачи:

– оценивание наличия и тесноты связи между результатом Y и каждым фактором X_i ;

– оценивание тесноты связи между результатом Y и фактором X_i при фиксированных значениях остальных факторов.

Пример 10.2. После качественного анализа факторов, влияющих на положение компании на рынке телекоммуникационных услуг, для проведения количественного анализа были оставлены следующие факторы X_i :

X_1 — количество сданных в аренду скоростных каналов, шт.;

X_2 — количество каналов доступа в Интернет, шт.;

X_3 — курс доллара США по отношению к рублю, руб.;

X_4 — средний тариф на аренду одного канала, руб.;

X_5 — доля каналов, приходящаяся на банковские структуры, шт.

В качестве выходных величин Y_i , характеризующих положение компании, приняты две величины:

Y_1 — общее количество каналов сданных в аренду, шт.;

Y_2 — доход компании, руб.

Данные по указанным величинам за два года приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1625	2,9	255	192	22,77	648,4	45,0
1596	2,7	245	197	22,84	627,7	44,0
1574	2,5	242	194	24,18	593,0	43,0
1577	2,47	248	193	24,23	630,8	42,8
1577	2,43	256	195	24,44	589,6	42,65

Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1572	2,4	259	195	24,22	588,1	42,5
1559	2,37	257	197	24,19	581,9	42,85
1550	2,33	262	205	24,75	577,5	43,15
1531	2,3	263	214	25,08	572,9	43,5
1508	2,27	269	217	26,09	573,5	44,0
1481	2,24	277	228	26,43	556,4	44,5
1469	2,2	280	233	26,72	574,5	45,0
1492	2,22	280	228	28,55	557,2	44,7
1539	2,24	290	243	28,76	540,7	44,3
1585	2,25	308	263	28,81	526,5	44,0

С использованием пакета прикладных программ были проведены расчеты матрицы коэффициентов парной корреляции. Результаты расчетов приведены в табл. 10.4.

Таблица 10.4

	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y_1	1	0,79	-0,43	-0,49	-0,58	0,57	-0,39
Y_2	0,79	1	-0,66	-0,69	-0,79	0,87	-0,035
X_1	-0,43	-0,66	1	0,97	0,91	-0,83	0,50
X_2	-0,49	-0,69	0,97	1	0,93	-0,84	0,53
X_3	-0,58	-0,79	0,91	0,93	1	-0,88	0,43
X_4	0,57	0,87	-0,83	-0,84	-0,88	1	-0,15
X_5	-0,39	-0,035	0,50	0,53	0,43	-0,15	1
m^*	1543,6	2,35	266,9	214,5	25,66	577,9	43,6
σ^*	41,4	0,14	18,5	21,9	1,94	28,7	0,85

В двух последних строках табл. 10.4 помещены значения выборочных средних и выборочных средних квадратических отклонений, необходимые для построения уравнения линейной регрессии.

Анализ корреляционной матрицы осуществляется по следующему правилу. Если коэффициент парной корреляции между факторами окажется близким к 1 (по крайней мере, превысит значение 0,9), то это означает, что наблюдается эффект мультиколлинеарности и исключению из рассмотрения подлежит тот фактор, который имеет наименьший коэффициент парной корреляции с выходной переменной (общим количеством каналов, сданных в аренду Y_1 , или доходом компании Y_2) [1, 5].

Руководствуясь данным правилом, для дальнейшего рассмотрения имеет смысл оставить два фактора X_3 — курс доллара по отношению к рублю и X_4 — средний тариф на аренду одного канала. Фактор X_5 — доля каналов на банковские структуры — может быть исключен ввиду малости значения коэффициента парной корреляции.

С использованием выражений (10.13 и 10.15) были получены уравнения регрессии

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 1404 - 12,38x_3 + 0,82x_4; \\ \hat{y}_2 &= 1,36 - 0,057x_3 + 0,004x_4.\end{aligned}\tag{10.17}$$

Сопоставление действительных значений величин Y_1 и Y_2 с предсказанными по уравнениям (10.17) показали незначительные расхождения в пределах одного года (не более 3%), что говорит о приемлемом качестве модели для использования при интерполяции. Однако основная задача разработки регрессионной модели заключалась в использовании ее для целей экстраполяции. Как показывает проведенный анализ, полученная модель не может быть использована для целей прогноза в связи с существенной нелинейностью величин Y_1 и Y_2 .

Для определения прогнозных значений, характеризующих положение компании на рынке телекоммуникационных услуг в данной ситуации целесообразно использовать методы анализа временных рядов, регрессионного анализа (с построением полиномиальных моделей второй и, возможно, более высокой степени) [2, 7, 9]. Эти методы могут быть использованы для среднесрочного прогноза.

10.6. Автокорреляция

Автокорреляция (последовательная корреляция) определяется как корреляция между значениями наблюдаемой переменной, упорядоченными во времени или в пространстве. Автокорреляция может быть положительной и отрицательной.

Среди основных причин, вызывающих появление автокорреляции, можно выделить:

- неучет в модели какого-либо важного фактора (входной переменной) либо неправильный выбор вида функции отклика (это приводит к отклонениям экспериментальных точек от линии регрессии, что может обусловить автокорреляцию);
- цикличность значений экономических показателей;
- усреднение статистических данных по интервалам;
- запаздывание изменения значений экономических показателей по отношению к изменению экономических условий.

Автокорреляция при ее игнорировании ухудшает прогнозные качества регрессионной модели. Наличие автокорреляции можно установить с помощью методов ранговой корреляции.

Наиболее известным методом обнаружения автокорреляции является метод Дарбина-Уотсона. Статистика (показатель согласованности) u Дарбина-Уотсона приводится во всех специальных прикладных компьютерных программах и имеет вид:

$$u = \frac{\sum_{i=2}^n (\Delta y_i - \Delta y_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2},$$

где Δy_i и Δy_{i-1} — случайные отклонения экспериментальных значений исследуемой выходной переменной от линии регрессии соответственно в точках i и $i - 1$.

С выборочным коэффициентом корреляции между соседними наблюдениями статистика Дарбина-Уотсона связана следующим соотношением

$$u = 2(1 - r^*).$$

Очевидно, что если выборочный коэффициент корреляции r^* окажется близким к нулю (отсутствии автокорреляции), то значение показателя согласованности u будет близко к двум. Близость показателя согласованности к нулю свидетельствует о наличии положительной автокорреляции, к четырем — отрицательной.

Для статистики Дарбина-Уотсона существуют два пороговых значения u_g и u_n , зависящие от числа испытаний, числа входных переменных и уровня значимости критерия α .

Решение о наличии или отсутствии автокорреляции принимается по общим правилам, изложенным в гл. 6.

Весь диапазон возможных значений показателя согласованности u разбивается на следующие области принятия решений (рис. 10.2):

1) $u_g < u^* < 4 - u_g$ — область принятия нулевой гипотезы об отсутствии автокорреляции;

2) $u_n < u^* < u_g$ или $4 - u_g < u^* < 4 - u_n$ — области неопределенности;

3) $0 < u^* < u_n$ — область принятия альтернативной гипотезы о наличии положительной автокорреляции;

4) $4 - u_n < u^* < 4$ — область принятия альтернативной гипотезы об отрицательной автокорреляции.

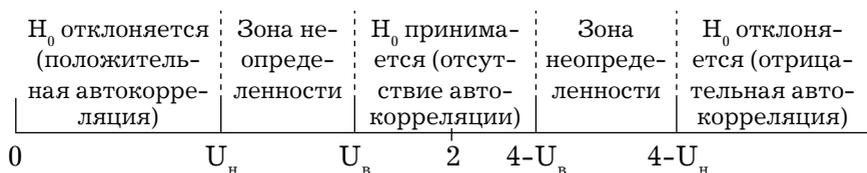


Рис. 10.2

Для определения пороговых значений u_g и u_n составлены таблицы для уровней значимости критерия $\alpha = 0,01; 0,025; 0,05$.

Недостатками метода Дарбина-Уотсона являются: наличие области неопределенности; метод позволяет выявить наличие корреляции только между результатами соседних наблю-

дений, а также то, что таблицы для определения критических значений показателя согласованности составлены для объемов выборки не менее 15. Несмотря на это, метод Дарбина-Уотсона наиболее часто применяют на практике.

Для проверки наличия автокорреляции используют и другие методы, например, тест серий, Q-тест Льюинга-Бокса и др.

Известно, что основной причиной наличия случайного отклонения в уравнении регрессии являются несовершенные знания о причинах и взаимосвязях, определяющих то или иное значение выходной переменной. Поэтому свойства случайных отклонений, в том числе и автокорреляция, в первую очередь зависит от выбора вида функции отклика и состава входных переменных (факторов). Так как автокорреляция чаще всего вызывается неправильным выбором модели, то прежде всего необходимо скорректировать саму эту модель. Возможно, автокорреляция вызвана отсутствием в модели некоторого важного фактора. Следует попытаться определить данный фактор и учесть его в уравнении регрессии либо попробовать изменить вид функции отклика (например, линейную на логлинейную, линейную на гиперболическую и т. д.).

Если все разумные процедуры изменения вида модели исчерпаны, а автокорреляция имеет место, то можно предположить, что она обусловлена какими-то внутренними свойствами входной переменной.

Таким образом, в силу ряда причин (ошибок спецификаций, инерционности рассматриваемых зависимостей и др.) в регрессионных моделях может иметь место корреляционная зависимость между выходными переменными Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Это нарушает одну из фундаментальных предпосылок регрессионного анализа. Вследствие этого оценки, полученные на основе МНК, перестают быть эффективными. Это делает ненадежными выводы по значимости коэффициентов регрессии и по качеству самого уравнения. Поэтому достаточно важным является умение определить наличие автокорреляции и устранить это нежелательное явление.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается сущность корреляционного анализа?
2. Какие задачи решает корреляционный анализ?
3. Что отражается в корреляционной таблице?
4. Что характеризует коэффициент корреляции? В каких пределах он изменяется?
5. С какой целью проводится проверка значимости коэффициента корреляции?
6. Поясните сущность явления мультиколлинеарности.
7. Что такое автокорреляция? Какие причины ее вызывают?

Задачи для самостоятельного решения

1. Произведено 60 испытаний прочности хлопкового волокна, результаты которых приведены в табл. 10.5, где x — некоторая условная величина, обратно пропорциональная толщине волокна (“номер” волокна), а y — предельная нагрузка в граммах.

Таблица 10.5

$x \backslash y$	4100	4300	4500	4700	4900	5100	5300	5500
6,75	—	1	—	—	—	—	—	—
6,25	1	2	2	1	—	—	—	—
5,75	—	1	3	4	2	3	—	—
5,25	—	3	5	7	1	1	—	—
4,75	—	—	2	5	5	3	2	—
4,25	—	—	—	—	1	2	2	—
3,75	—	—	—	—	—	—	—	1

Определить коэффициент корреляции величин x и y .

Записать уравнение линейной регрессии y по x .

Охарактеризовать зависимость y от x .

2. Результаты 80 измерений случайной величины Y при пяти фиксированных значениях величины X представлены в табл. 10.6.

Таблица 10.6

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
1	—	—	—	2	4
2	—	—	3	4	6
3	—	1	8	3	2
4	—	2	9	6	—
5	3	5	7	2	—
6	8	4	1	—	—

Определить коэффициент корреляции величин x и y .

Записать уравнение линейной регрессии y по x .

Охарактеризовать зависимость y от x .

3. Результаты 26 измерений случайной величины Y при семи фиксированных значениях величины X представлены в табл. 10.7.

Таблица 10.7

$y \backslash x$	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54
23	2	—	—	—	—	—	—
24	—	—	4	—	—	—	—
24,5	—	3	2	—	—	—	—
25	—	—	—	1	—	—	—
25,5	—	—	—	—	1	—	—
26	—	2	—	1	—	2	—
26,5	—	—	1	—	1	—	—
27	—	—	—	—	1	—	2
28	—	—	—	—	—	3	—

Определить коэффициент корреляции величин x и y .

Записать уравнение линейной регрессии y по x .

Охарактеризовать зависимость y от x .

4. *Задание на группу.* Задание содержит базовый вариант, исходные данные которого каждый обучаемый с использованием датчика (таблицы) случайных чисел превращает в

индивидуальное задание. Если снятое с датчика число $> 0,5$, то число из исходных данных базового задания умножается на 1,1. В противном случае — делится на 1,1. И так с каждым числом из базового задания. Неизменными остаются только даты (1998–2005).

Базовое задание:

Имеется выборка значений 3-х микроэкономических показателей: объем промышленного производства, объем розничного товарооборота и объем инвестиций в основной капитал. Все значения показателей есть доля в процентном выражении по отношению к 1997 г. (табл. 10.8).

Таблица 10.8

Факторы \ годы	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Розничный товарооборот	88,00	102,74	86,55	104,83	80,36	77,18	79,00	91,30
Инвестиции в основн. капитал	85,00	51,00	44,90	34,10	30,70	25,20	23,90	22,30
Промышленное производство	83,64	68,55	59,00	46,64	45,18	43,36	44,18	50,71

Требуется:

– оценить значение коэффициента корреляции между объемом инвестиций в основной капитал и объемом промышленного производства, а также значение коэффициента корреляции между объемом инвестиций в основной капитал и розничным товарооборотом;

– оценить значение коэффициента корреляции между объемом промышленного производства (X) и розничным товарооборотом (Y) и с его использованием получить и построить график уравнения линейной регрессии Y по X ;

– для всех 3-х макропоказателей рассчитать статистику Дарбина-Уотсона и сделать содержательные выводы о наличии и характере автокорреляции.

11. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

11.1. Общая характеристика метода экспертных оценок

В настоящее время в экономике, в частности, при обработке результатов эконометрического исследования, широкое применение нашел метод экспертных оценок, применяемых в тех областях экономических знаний, где невозможно провести оценку характеристик объекта (экономической системы) какими-либо способами.

На рис. 11.1 представлено место экспертизы среди всех возможных источников и способов получения информации, используемых в исследованиях экономических систем.

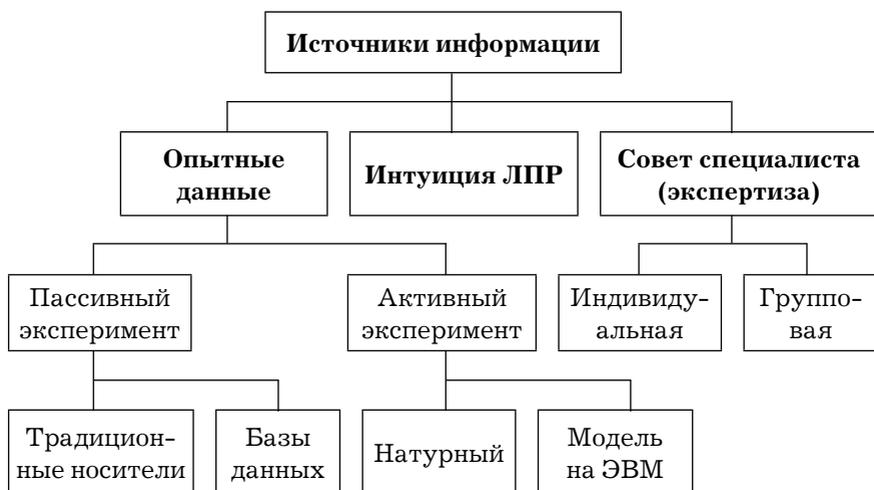


Рис. 11.1

Под методом экспертных оценок понимают комплекс логических и математических процедур, направленных на получение от специалистов информации, ее анализ и обобщение с це-

лью подготовки и выбора рациональных решений [13]. Сущность этого метода заключается в проведении высококвалифицированными специалистами интуитивно-логического анализа проблемы с качественной или количественной оценкой суждений и формальной обработкой результатов. Комплексное использование интуиции, логического мышления и соответствующего математического аппарата позволяет получить эффективное решение поставленной проблемы. Метод экспертных оценок отличается от традиционной экспертизы наличием научной организации всех этапов экспертизы и применением математического аппарата как при организации экспертизы, так и при обработке и анализе полученной информации. К совету знающих специалистов (экспертов) прибегают в тех случаях, когда задача является нетрадиционной, не допускает проведения натурального либо машинного эксперимента, но у лица, принимающего решения (ЛПР), имеется достаточный ресурс времени для обоснования соответствующих вариантов действий.

Экспертиза может проводиться на самых различных этапах эконометрического исследования: начальном цикле исследований, которому предшествует детальный анализ существа проблемы; систематизации полученных при таком анализе сведений, что позволяет целенаправленно и планомерно организовывать экспертизу, ориентированную на получение новой информации в необходимой форме; последнем, наиболее формальном шаге эконометрического анализа. Полученная и обработанная экспертная информация используется в дальнейшем в рамках выбранной процедуры выработки решений.

Метод экспертных оценок как научный инструмент анализа неформализуемых проблем в нашей стране и за рубежом широко применяется при решении самых различных проблем, связанных с планированием развития экономики страны и отрасли, созданием современных информационных технологий и т. д. [44, 56].

Целесообразно выделять два класса проблем, решаемых экспертным путем [46]. К первому классу относятся проблемы, для решения которых имеется достаточная информационная

база. Поэтому основная трудность в их решении состоит в эффективном использовании этой базы, т. е. в правильном подборе экспертов, рациональной организации процедуры их опроса и применении оптимальных математических методов обработки результатов. При этом методы опроса и обработки основываются на том, что эксперт обобщает значительный объем переработанной им информации, а групповое мнение, рассчитанное как некое обобщенное мнение, учитывающее мнения отдельных экспертов, близко к “истине”. Эти допущения позволяют применять для обработки экспертных оценок специальные математические методы.

Ко второму классу относятся проблемы, для решения которых информационная база недостаточна. При анализе таких проблем весьма трудно найти соответствующих экспертов, получить от них информацию в том или ином виде и, особенно, обработать ее с учетом зачастую сильно расходящихся мнений экспертов.

Как следует из рис. 11.1, различают индивидуальную и групповую экспертизы.

Простейшим способом получения экспертной информации является учет мнения одного специалиста — *индивидуальная экспертиза*. Индивидуальная экспертиза, как правило, используется для решения уникальных проблем, относящихся ко второму классу, и реализуется следующими основными методами:

- интервью (заключается в опросе эксперта по заранее сформулированным вопросам);
- аналитических докладных записок (состоит в самостоятельной работе эксперта над анализом информации по рассматриваемой проблеме);
- сценария (предполагает установление логической последовательности развития событий и прогнозирование результатов рассматриваемых процессов).

Очевидным недостатком индивидуальной экспертизы является присущий ей методический субъективизм и исключительная зависимость результатов от компетентности единственного эксперта.

При решении проблем первого класса целесообразно привлекать по возможности не одного, а нескольких специалистов, т. е. организовывать *групповую экспертизу*. К преимуществам групповой экспертизы следует отнести возможность разностороннего анализа проблемы и частое включение (попадание) в групповую решение “истинной” оценки. Можно считать, что в определенной степени увеличение числа экспертов призвано придать экспертизе более объективный характер, хотя и в этом случае приходится учитывать следующие недостатки:

- сложность процедуры получения информации;
- возможность давления авторитетов в группе;
- сложность формирования обобщенного (группового) мнения;
- возможность проявления эффекта коллективной ответственности, позволяющей экспертам принимать рискованные решения и др.

В процессе подготовки и проведения групповой экспертизы можно выделить следующие этапы:

- формулировка цели и постановка задачи исследования;
- разработка метода получения экспертной информации и способов ее обработки;
- формирование экспертной группы;
- проведение экспертизы;
- сбор, обработка и анализ полученной информации;
- интерпретация полученных результатов и формирование вариантов рекомендаций.

На рис. 11.2 данные этапы представлены для случая, когда мнения экспертов получают в ходе проведения анкетирования.

При решении важных практических задач организация экспертизы начинается с подготовки и издания руководящего документа, в котором формулируется цель работы, указываются сроки ее выполнения, задачи и состав группы управления, ее права и обязанности, устанавливается материальное и финансовое обеспечение работ. Для подготовки такого документа и руководства всей работой назначается руководитель экспертизы. Группа управления организует проведение экспертизы,



Рис. 11.2

причем оформление результатов ее работы осуществляется в виде отчета, который после обсуждения и одобрения представляется на утверждение в соответствующие инстанции.

На начальном этапе при постановке задачи исследования обосновывается целесообразность получения экспертной информации и намечаются пути использования ожидаемых результатов. Вопросы выбора методов получения и обработки экспертной информации решаются в соответствии со спецификой поставленной задачи и с учетом выделенных ресурсов и времени.

При составлении экспертных групп пользуются соображениями здравого смысла, учитывая цели экспертизы, ограни-

ченность ресурсов и требования, обусловленные выбранными методами получения и обработки информации от экспертов. Вначале намечаются специалисты, которые по своим профессиональным качествам могут быть привлечены к работе в роли экспертов. При поиске таких экспертов обычно используются общепринятые документальные показатели, отражающие профессиональный уровень специалиста (должность, ученая степень и звание, количество опубликованных научных работ и др.), а также его прежнее участие в экспертизах. Документальная характеристика часто дополняется взаимной оценкой экспертов. При этом в число “потенциальных” экспертов включаются специалисты, рекомендованные несколькими ранее выявленными экспертами, ранее активно проводившими экспертизу.

Важно, чтобы кандидат в экспертную группу имел широкий кругозор и эрудицию. Компетентность эксперта есть степень его квалификации в определенной области знаний, которая определяется на основе анализа его профессиональной деятельности, широты кругозора по перспективам развития рассматриваемой проблемы.

В зависимости от профессиональной подготовки эксперта (должность, ученое звание, степень) ему приписывают [13] определенный балл. В табл. 11.1 приведены баллы оценок профессиональных качеств эксперта, работающего в научно-исследовательской организации крупной фирмы. Такая информация позволяет произвести предварительный отбор и ранжирование кандидатов по их компетентности.

Таблица 11.1

Балльные оценки профессиональных качеств экспертов

Занимаемая должность	Специалист без степени	Кандидат наук	Доктор наук	Академик, член-корреспондент
Инженер, старший инженер	1	–	–	–

Занимаемая должность	Специалист без степени	Кандидат наук	Доктор наук	Академик, член-корреспондент
Младший научный сотрудник	1	1,5	–	–
Старший научный сотрудник	–	2,25	3,0	–
Заведующий лабораторией, сектором, руководител ь группы	2,0	3,0	4,0	6,0
Зав. отделом, зам. заведующего отделом	2,0	3,75	5,0	7,5
Ведущий руководитель комплекса, управления	3,0	4,5	6,0	9,0
Ген. директор, зам. ген. директора	4,0	6,0	8,0	12,0

Далее решается вопрос о численном составе экспертной группы, когда количество привлекаемых к работе экспертов зависит от их квалификации и не должно превышать предела, диктуемого ограничениями финансового, временного и организационного характера. Кроме того, состав группы должен быть таким, чтобы были обеспечены по возможности равное представительство специалистов различных направлений, существующих в исследуемой области, и охват всех организаций, имеющих профессиональное отношение к рассматриваемой задаче.

Затем осуществляется формирование группы путем выделения тех экспертов, которые являются наиболее компетентными с точки зрения конкретной решаемой задачи. Для предварительной оценки компетентности экспертов рассчитывают коэффициент их компетентности, представляющий собой сумму баллов, приписываемых эксперту в зависимости от его документальных показателей и данных самооценки (касающихся

производственного опыта, знания экономической литературы по решаемому вопросу и др.). Эти баллы берутся из специальных таблиц. При другом подходе коэффициенты компетентности вычисляются на основе матрицы, составленной по результатам взаимной оценки экспертов.

В экспертную группу включаются те эксперты, для которых коэффициент компетентности не ниже некоторого порогового значения. Это значение устанавливается таким, чтобы обеспечить набор группы из числа тех потенциальных экспертов, которые действительно смогут участвовать в ее работе. При проведении экспертиз целесообразно использовать такую обобщенную характеристику эксперта, как достоверность его суждений. Количественно достоверность эксперта оценивают дробью N_u/N , где N_u — число случаев, когда эксперт дал решение, приемлемость которого подтвердилась практикой, N — общее число случаев участия эксперта в решении задачи.

К сожалению, даже самый квалифицированный эксперт может проявить себя некомпетентным в конкретной экспертизе как в силу причин стохастического характера, так и из-за отсутствия стимулов в работе данной группы. Поэтому возникает проблема оценки компетентности экспертов на основе анализа информации, полученной от него и других членов экспертной группы в данной экспертизе.

В качестве примера приведем вариант организации экспертизы вариантов масштабных решений (уровня Федеральных целевых программ, Программ развития отрасли и т. п.). При Правительстве РФ на постоянной основе работает Экспертный совет. При появлении необходимости проведения экспертизы в состав экспертной группы включаются специалисты из Экспертного совета и, как правило, по одному человеку из нескольких организаций, непосредственно не заинтересованных в результате экспертизы. Возглавляет экспертную группу в большинстве случаев независимый эксперт, а организует работу специалист из Экспертного совета. Аналогично проводятся экспертизы кандидатских и докторских диссертаций, материалов для присвоения ряда ученых званий и т. п.

Сбор и обработка экспертной информации осуществляются согласно разработанным (выбранным) для этих целей методам. Практически для сбора информации составляются соответствующие документы (например, специальные анкеты), а при ее обработке и анализе в случае необходимости может использоваться ПЭВМ. Содержательный анализ и интерпретация обработанных результатов осуществляются с учетом специфики решаемой проблемы в соответствии с задачами, которые ставились перед экспертизой.

Типичные ошибки, приводящие к некачественной экспертизе и негативному пониманию результатов экспертного оценивания в эконометрике:

- преувеличение возможностей экспертного оценивания;
- нечеткая постановка задачи перед экспертами;
- излишнее стремление оставаться в рамках одной экспертной процедуры и увлечение количественными оценками и свертками, а также некорректная обработка и интерпретация результатов экспертизы;
- недостаточная информированность экспертов о конкретном объекте экспертизы и использование некомпетентных экспертов;
- противоречивость, несогласованность и неточность экспертных оценок при коллективной экспертизе;
- конформизм и конъюнктурность экспертов.

11.2. Классификация методов получения экспертной информации

Квалифицированное применение метода экспертных оценок в существенной степени зависит от выбранного способа сбора и обработки ответов целенаправленно сформированной группы специалистов. Существует большое количество методов получения экспертной информации. Классификация этих методов приведена на рис. 11.3.

Методы коллективной работы экспертной группы предполагают получение обобщенного мнения в ходе совместного об-

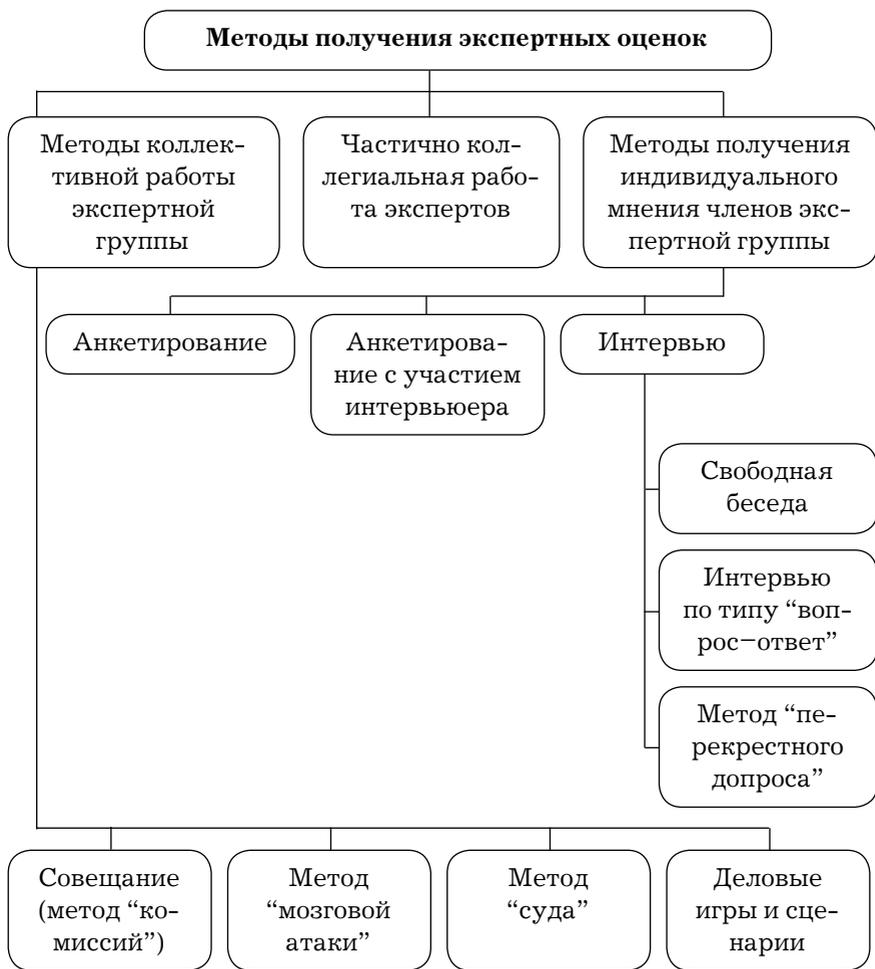


Рис. 11.3

суждения и решения поставленной задачи всеми экспертами. Первые три метода — совещания, “суда” и “мозговой атаки” — основаны на коллективном обсуждении решаемой задачи, а деловые игры — на совместной работе коллектива специалистов, за каждым членом которого закреплены определенные обязанности в соответствии с заранее составленными правилами и

программой. Деловые игры, широко используемые в экономике, предназначены в основном для выяснения поведения специалистов в исследуемой обстановке, а также для их обучения.

Самым простым и традиционным является метод комиссий. Он предполагает проведение совещания или же общей дискуссии с целью выработки единого коллективного мнения. Количество участников может быть от 3 до 10 и более. Достоинства этого метода состоят в том, что каждый член группы может не только высказать свое мнение, но и защитить его с необходимой аргументацией, а также критиковать мнения других экспертов. Тщательное обсуждение уменьшает возможность ошибок. Однако на совещании может победить мнение какого-либо участника в силу его авторитета, служебного положения, блестящих ораторских способностей, высокой активности и т. п. Этот недостаток присущ и методу “суда”, при использовании которого работа экспертной группы осуществляется подобно ведению судебного процесса, где роли “судей” (“заседателей”) исполняют члены группы управления, а в качестве “прокурора” и “защитников” выступают эксперты. “Свидетелями” являются различные факты, результаты экспериментов, доводы экспертов. Использование такого метода особенно целесообразно при наличии нескольких группировок экспертов, каждая из которых придерживается своей точки зрения.

Метод “мозговой атаки” (“мозгового штурма”, “коллективной генерации идей”) основан на предположении, что если выдвигать большое число самых разнообразных идей и предложений по решению поставленной проблемы, то среди них обязательно окажется одна или даже несколько ценных. Сущность метода состоит в том, что задачи выдвижения новых идей и их анализа полностью разделены, поэтому образуются две группы — генераторов идей и аналитиков. В состав первой включаются эрудированные, с богатым воображением люди, специалисты из смежных областей. Для создания непринужденной обстановки лучше собирать людей примерно одинакового служебного и общественного положения. Заседанием группы генераторов идей руководит ведущий, основной задачей кото-

рого является всемерное поощрение инициативы и творчества, свободы высказывания предложений и полное недопущение критики. Все выступления фиксируются и впоследствии тщательно анализируются группой аналитиков — специалистов по профилю решаемой проблемы.

Этот метод целесообразно использовать в критических ситуациях дефицита творческих решений. Однако реализация всех методов коллективного получения экспертной информации обычно связана с различными трудностями организационного характера, так как собрать вместе многих ведущих специалистов практически далеко не всегда возможно. Поэтому в настоящее время все чаще используются методы опроса, заключающиеся в получении коллективного мнения на основе совместной обработки индивидуальных мнений членов экспертной группы, опрашиваемых независимо друг от друга. Существуют два основных вида опроса — интервью и анкетирование. Третий является промежуточным: в нем сочетаются идеи первых двух. Специфической особенностью интервью является то, что исследователь и эксперт находятся в непосредственном контакте. Исследователь ведет беседу, стараясь получить ответы на заранее сформулированные вопросы.

Условно выделяют три формы организации бесед. Первые две из них, очевидно, характеризуются своими названиями. Третья осуществляется с участием нескольких интервьюеров и проводится по принципу перекрестного допроса в судебном расследовании. Интервьюеры, получая необходимую информацию, проверяют непротиворечивость и последовательность рассуждений эксперта.

Прямой контакт интервьюера и эксперта создает определенный психологический климат, позволяющий получать сведения, малодоступные анкетному опросу. Однако при этом на результаты большое влияние могут оказать личность интервьюера, а также способность эксперта к контакту, быстрота его мышления и другие психологические факторы. Кроме того, при беседе эксперт обычно не в состоянии рассматривать и анализировать проблему в целом.

Метод анкетного опроса заключается в том, что эксперту предлагается для заполнения специальная анкета, содержащая заранее составленный набор вопросов. В зависимости от свободы предоставляемой эксперту при выборе варианта ответа, вопросы бывают открытого и закрытого типа. При вопросе открытого типа эксперт свободен в выборе формулировки ответа. Вопросы закрытого типа содержат в своей формулировке варианты возможных ответов, один из которых и должен выбрать эксперт. С точки зрения возможности получения сопоставимых результатов анкетирования наиболее предпочтительны вопросы закрытого типа.

В приведенной классификации выделена группа методов частично коллегиальной работы экспертов. Сущность их состоит в том, что информация собирается методом опроса коллективных экспертов. Такие методы позволяют сочетать преимущества коллективной работы и опроса.

В рассмотренную классификацию не вошли комплексные процедуры экспертизы, осуществляемые в несколько туров. Одним из наиболее известных методов анкетирования подобного рода является метод Дельфи, разработанный в начале 60-х гг. прошлого столетия американской компанией РЭНД Корпорейшн, который предусматривает полный отказ от личных контактов экспертов и обеспечение их информацией, включая и обмен информацией между ними после каждого тура опроса при сохранении анонимности оценок, аргументации и критики.

В первом туре опроса эксперты дают свои ответы, не аргументируя их. Полученные ответы обрабатываются и выделяются средние и крайние мнения. Во втором туре опроса эксперты, ознакомленные с этими мнениями, вновь отвечают на вопросы, но, уже объясняя, почему они изменили или же, напротив, не изменили своих мнений. Новые ответы вновь обрабатываются, проводится следующий тур и т. д. Практика показывает, что после трех-четырёх туров ответы экспертов стабилизируются, и это говорит о нецелесообразности дальнейшего проведения экспертизы. В итоге образуется одна или две группы существен-

но различных мнений. Наличие двух групп указывает на существование двух различных подходов к проблеме, что может быть вызвано, например, наличием двух научных школ. Но даже в этом случае опрос является полезным, так как позволяет отчетливо выявить позиции сторон и их аргументацию, что необходимо для дальнейшего углубленного исследования проблемы.

11.3. Типы шкал и методы моделирования предпочтений экспертов

В группе задач, решаемых с помощью метода экспертного оценивания, можно выделить три основных типа:

- оценка имеющихся объектов (например, оценивание варианта программы развития фирмы по принятому критерию);
- построение объектов (например, формирование множества финансовых планов организации для последующего выбора);
- построение объектов и их оценка (например, формирование перечня показателей уровня развития предприятия, конструирование их шкал и оценка стратегий (исходов) развития предприятия по тем или иным критериям).

Рассмотрим наиболее употребительные в практике принятия решений типы шкал: номинальную (или классификационную), порядковую, интервалов, отношений, разностей, абсолютную [48].

Номинальная шкала используется для описания принадлежности элементов к определенным классам. Всем элементам одного и того же класса присваивается одно и то же число, а элементам разных классов — разные числа. Допустима любая замена чисел для обозначения классов, лишь бы это было взаимнооднозначное преобразование и каждый класс получил бы свое число. Это обстоятельство и определяет множество допустимых преобразований номинальной шкалы как множество всех взаимнооднозначных функций. Эта шкала наименее совершенная.

Порядковые шкалы используются для измерения упорядочения элементов по одному или нескольким признакам. Они

позволяют установить, что один элемент лучше, важнее, предпочтительнее другого или равноценен другому. Порядковая шкала отражает лишь порядок следования элементов и не дает возможности сказать, на сколько или во сколько раз один элемент предпочтительнее другого. Иными словами, в этой шкале нельзя определить меру степени предпочтительности.

Шкала интервалов применяется для отображения величины различия между характеристиками элементов. Она позволяет указать, на сколько один элемент отличается от другого в принятых единицах измерения. Интервальная шкала может иметь произвольные начало отсчета и масштаб. Множество допустимых преобразований данной шкалы составляют все линейные преобразования. Основным свойством шкалы интервалов является сохранение отношения длин интервалов. Частными случаями шкалы интервалов являются шкала отношений (нулевое начало отсчета) и шкала разностей (произвольное начало отсчета и единичный масштаб), а также абсолютная шкала (нулевое начало отсчета и единичный масштаб отсчета).

Номинальная и порядковая шкалы относятся к качественным шкалам. Шкалы интервалов, отношений, разностей и абсолютная относятся к количественным шкалам, которые позволяют установить количественные соотношения между элементами.

Для количественных шкал справедливы аксиомы арифметики. Шкала считается тем более совершенной, чем уже множество допустимых преобразований. С этой точки зрения самой совершенной является абсолютная шкала, наименее совершенной — номинальная.

В зависимости от существа или важности того или иного элемента и его характеристик могут быть использованы разные шкалы. Однако при выборе шкалы необходимо учитывать, какие действия в дальнейшем предполагается производить с оценками по выбранной шкале. Напомним, что осмысленные арифметические действия можно производить лишь над оценками, имеющими количественную шкалу.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь задач первого из трех указанных типов, так как именно на их решение ориентированы существующие математические методы анализа и обработки экспертной информации.

Задача получения экспертных оценок путем выявления (моделирования, выражения) предпочтений экспертов заключается в следующем.

На множестве предъявления

$$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_m\}$$

эксперт может реализовать свою систему предпочтений в важности (значимости) каждого объекта, т. е. вынести относительно любой пары объектов (d_i, d_j) , $i = 1, 2, \dots, m$ одно из трех суждений:

- первый объект предпочтительнее второго — $d_i \succ d_j$;
- второй объект предпочтительнее первого — $d_i \prec d_j$;
- объекты равны по предпочтительности — $d_i \approx d_j$.

К системе (модели) предпочтений эксперта обычно предъявляются следующие требования:

- полнота (связность), т. е. запрет на суждения, отличные от указанных выше (“не знаю”, “не могу сравнить объекты” и т. п.);

- направленность (транзитивность), т. е. выполнение правила — если один объект предпочтительнее другого, а другой — третьего, то и первый объект должен быть предпочтительнее третьего

- устойчивость на период использования модели предпочтений, т. е. проведения данной экспертизы:

$$d_i \succ d_k; d_k \succ d_j \Rightarrow d_i \succ d_j.$$

Множество основных способов выражения предпочтений экспертов можно разбить на три группы:

- элементарные суждения;
- способы непосредственного оценивания;
- бинарные отношения.

Элементарные суждения

Напомним, что элементарными суждениями принято называть качественные оценки объектов, полученные в порядковых и номинальных шкалах, к которым относятся:

- группировка (сортировка, классификация);
- балльное оценивание;
- ранжирование;
- попарные сравнения;
- множественные сравнения.

Группировка (сортировка, классификация) состоит в том, что представленное множество предъявления разбивают на l классов и эксперт последовательно относит предлагаемые ему объекты к одному из этих классов. Внутри одного класса все объекты считаются равнопредпочтительными. Получаемые при группировке оценки объектов имеют номинальную (классификационную) шкалу. Таким образом, группировка заключается в установлении для каждого объекта из множества предъявления следующего соответствия:

$$d_i \Rightarrow K_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Примеры применения данного способа в различных сферах жизни: “заслуженный мастер спорта”; “водитель второго класса”; “малое предприятие”; “действительный государственный советник Российской Федерации первого класса” и т. п.

$$d_i \Rightarrow K_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Балльное оценивание заключается в том, что каждому элементу из множества предъявления D ставят в соответствие по определенным (заранее известным всем экспертам и неизменным во время данной экспертизы) правилам число (балл), характеризующее субъективное мнение эксперта о предпочтительности данного объекта.

Балльные оценки выбирают из специальной балльной шкалы, имеющей определенное число градаций (делений). Очевидно, что чем больше число градаций (так же, как и в сортировке,

число классов), тем точнее и сложнее измерение предпочтительности объекта

$$d_i \Rightarrow b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Примерами *балльных оценок* являются оценки студентов в вузе по четырехбалльной шкале с градациями (оценками) 2, 3, 4 и 5. В балльных шкалах часто производятся экспертные оценки: эксперты баллами характеризуют свои субъективные мнения о предпочтительности объектов, оценивая, например, их товарный вид или удобство в обращении. Обычно значения (градации) балльной шкалы представляют собой ряд чисел, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии. Балльную шкалу принято считать промежуточной между качественными и количественными шкалами, поскольку само измерение носит выраженный качественный характер, а обработка оценок часто ведется количественными методами (например, таким образом, подсчитываются средние баллы или формируется обобщенное мнение группы экспертов).

Ранжирование (упорядочение) — это представление объектов из множества предъявления D в виде последовательности в порядке убывания их предпочтительности с точки зрения какого-либо свойства или нескольких свойств (такое расположение объектов называется ранжировкой). При этом допускается указание на равноценность некоторых поставленных рядом объектов (в этом случае ранжирование называется нестрогим). Если же указывать на равноценность объектов нельзя, то ранжирование называется строгим. Ранжирование часто представляют как оценку в ранговой шкале, т. е. рангом объекта, а можно считать номер места, которое он занимает в строгой ранжировке, или “осредненный” номер при нестрогом ранжировании:

$$d_i \Rightarrow r_i \text{ или } d_i \Rightarrow r_i^c.$$

Первая часть данной записи соответствует строгому ранжированию. В этом случае в качестве рангов используются натуральные числа. Если же ранжирование нестрогое, в качестве

рангов применяются действительные числа (так называемые стандартизованные ранги). При ранжировании следуют двум правилам: более предпочтительному объекту ставят меньший (большой) ранг; равные по важности объекты должны иметь равные ранги. Если объект, стоящий на первом месте в ранжировке, имеет наименьший ранг, ранжирование называют прямым. Если этому объекту присвоен наибольший ранг, ранжирование называют обратным.

Например, пусть руководитель фирмы четверых своих сотрудников ранжировал по их исполнительности так:

$$\langle d_2 \rangle d_1 \approx d_3 \rangle d_4 \rangle.$$

Это означает, что самым исполнительным является сотрудник, занимающий в списке фирмы второе место; за ним идут равные по исполнительности подчиненные, фамилии которых стоят в списке организации на первом и третьем местах; последний (четвертый) наименее исполнительен. При прямом ранжировании второй сотрудник получает ранг 1; первый и третий сотрудники — стандартизованные ранги по 2,5 каждый; четвертому сотруднику присваивается ранг 4. Если использовать обратное ранжирование, ранги распределятся следующим образом: второму сотруднику — 4; первому и третьему — по-прежнему 2,5; четвертому — 1. Два замечания: выбор прямого или обратного ранжирования для измерения предпочтений экспертов определяется, как правило, не научными (с этой точки зрения они абсолютно равноправны), а иными (например, традиционными) соображениями. Так, на флоте традиционно капитан 1-го ранга “важнее” капитана 3-го ранга. Вместе с тем слесарь 6-го разряда, видимо, более подготовленный специалист, нежели слесарь 2-го разряда.

Попарное сравнение состоит в указании более предпочтительного объекта в каждой паре или их равноценности. Иногда разрешается указывать на несравнимость объектов, тогда нарушается выполнение требования связности, что, вообще говоря, весьма нежелательно, поскольку крайне затрудняет математическую обработку результатов такой экспертизы.

Результаты попарного сравнения удобно представлять в виде квадратной матрицы, на пересечении строки i и столбца j которой ставится 1, если объект i предпочтительнее объекта j , 0 — если объект j предпочтительнее объекта i , $1/2$ — если объекты одинаковы по предпочтительности, и прочерк (—), если объекты несравнимы. Представленная ниже матрица показывает, например, что объект a предпочтительнее, чем объект b , объект b предпочтительнее объекта c , а объекты a и c несравнимы:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ a \left\| \begin{array}{ccc} 1/2 & 1 & — \\ 0 & 1/2 & 1 \\ — & 0 & 1/2 \end{array} \right\| \\ b \\ c \end{array}.$$

(Заметим, что на главной диагонали матрицы находятся оценки, равные $1/2$, что указывает на равную предпочтительность каждого элемента самому себе).

Метод попарного сравнения применяется обычно, чтобы выявить предпочтения “в чистом виде”. Это объясняется тем, что он в отличие от ранее изложенных не навязывает эксперту никаких специальных условий. Например, если a предпочтительнее b , а b предпочтительнее c , то при оценивании в классификационной, балльной или порядковой шкале обязательно в силу требования транзитивности должно быть выполнено условие: a предпочтительнее c . Парное сравнение выполнения такого рода условий заранее не предполагает, и поэтому считается, что качественно сравнить объекты в парах гораздо легче, чем выразить предпочтения в других шкалах. Поэтому принято считать, что попарное сравнение — самый простой и надежный способ выявления предпочтений эксперта.

Множественные сравнения представляют собой дальнейшее развитие и обобщение попарных сравнений, когда эксперту последовательно предлагают наборы из нескольких объектов, а в каждом наборе объекты надо упорядочить или же указать лучший среди них.

Способы непосредственного оценивания

Попарное выражение предпочтений как доли суммарной интенсивности заключается в том, что эксперт указывает не только на то, что один элемент множества предпочтительнее другого, но и на то, как суммарная интенсивность (степень) предпочтения распределяется между рассматриваемыми элементами. Обычно мера суммарной интенсивности, приходящаяся на два сравниваемых элемента, принимается равной 1. Пусть у генерального директора фирмы имеется три варианта финансового договора (a ; b ; c) и он организует экспертное оценивание этих вариантов. При использовании данного способа эксперт как бы “делит” суммарную 1 на доли для каждой пары вариантов, например, 0,6 — первому и 0,4 — второму или 0,7 — первому и 0,3 — третьему. Результаты оценивания записывают в соответствующую матрицу:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ a \left\| \begin{array}{ccc} 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,5 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{array} \right. \\ b \\ c \end{array}.$$

Заметим, что по главной диагонали этой матрицы располагаются 0,5, а сумма элементов, симметричных относительно главной диагонали, равна 1 (это означает, что необходимо сравнить лишь пары элементов, располагающиеся над (или под) главной диагональю; для остальных пар элементов справедливо следующее соотношение: $a_{ij} = 1 - a_{ji}$).

Попарное выражение предпочтений как доли относительной интенсивности предусматривает, что эксперт не только указывает на то, что один элемент предпочтительнее другого, но оценивает, во сколько раз первый элемент превосходит по важности второй. Оценки a_{ij} предпочтительности эксперт выбирает из специальной, как правило, балльной шкалы с заданным числом градаций (сам способ поэтому часто называют “попарное сравнение с градациями”). Часто используется семибалльная шкала:

$a_{ij} = 1$, если сравниваемые в паре элементы равнопредпочтительны;

$a_{ij} = 3$, если у эксперта имеются некоторые основания считать, что i -й элемент важнее j -го;

$a_{ij} = 5$, если у эксперта имеются достаточно веские основания считать, что i -й элемент важнее j -го;

$a_{ij} = 7$, если у эксперта имеются все основания считать, что i -й элемент важнее j -го (такая оценка соответствует абсолютному превосходству i -го элемента над j -м).

Оценки эксперта для каждой пары объектов записываются в матрицу. Порядок заполнения матрицы таков: по главной диагонали располагают 1. Затем, слева направо и сверху вниз, начиная с пары объектов (d_1, d_2) выставляют соответствующие оценки, причем только в том случае, когда i -й элемент предпочтительнее j -го или они равноценны. В противном случае оценка не выставляется и переходят к следующей паре. Для незаполненных пар оценка определяется по правилу:

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}.$$

Вообще говоря, в качестве оценок можно использовать и другие (промежуточные) числа из приведенной шкалы — например, 4 или 6, если эксперта по каким-либо причинам не удовлетворяют основные градации.

Выражение предпочтений коэффициентами относительной важности заключается в том, что каждому элементу из множества предъявления эксперт ставит в соответствии действительное число, выражающее мнение эксперта относительно важности данного элемента среди других:

$$d_i \Rightarrow \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

На коэффициенты относительной важности обычно накладывают два ограничения:

- неотрицательности $\alpha_i \geq 0$;
- нормировки $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Очевидно, что данный способ предъявляет весьма высокие требования к компетентности экспертов, особенно при достаточно большом числе объектов в множестве предъявления ($m > 3$). Поэтому для определения коэффициентов относительной важности применяют либо специальные способы (например, способ частот обратных рангов), либо изложенные выше применительно к этой задаче (например, балльное оценивание или попарные сравнения с градациями).

Выражение предпочтений субъективными вероятностями используется в случаях, когда эксперты имеют дело с необходимостью учета неопределенных факторов (прежде всего, поведенческих и природных), влияющих на оценку объектов из множества предъявления. Суть способа заключается в том, что эксперт для каждого объекта устанавливает следующее соответствие:

$$d_i \Rightarrow P(d_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

где $P(d_i)$ — оценка экспертом субъективной вероятности реализации некоторого комплекса неопределенных условий развития оцениваемых ситуаций (например, природных условий проведения транспортной операции по доставке каких-либо товаров или финансовых условий реализации программ развития фирмы при наличии конкурентов).

Свое название субъективные вероятности (в отличие от “настоящих”) получили в силу абсолютной субъективности их определения экспертами. На субъективные вероятности налагают те же ограничения, что и на коэффициенты относительной важности — неотрицательности и нормировки. Особенно часто этот способ применяется на этапе анализа экономической обстановки, прогнозировании развития ситуаций с учетом природных факторов, оценки шансов на благоприятный исход действий и т. п. Так, субъективные вероятности реализации того или иного комплекса природных условий могут быть подсчитаны на основе их строгой прямой ранжировки экспертом по следующей формуле:

$$P(d_i) = \frac{r(d_i)}{\sum_{i=1}^n r(d_i)},$$

где $r(d_i)$ — ранг i -го состояния природы.

Если известны шансы на реализацию некоторых ситуаций (например, шансы на успех некоторой коммерческой сделки оцениваются, как 3 к 1), субъективная вероятность такого события равна

$$P(d_i) = \frac{\text{шанс } (d_i)}{\sum_{i=1}^n \text{шанс } (d_i)},$$

где *шанс* (d_i) — шанс i -го исхода (для нашего примера субъективная оценка успеха сделки равна $P(d_i) = P(\text{успеха}) = \frac{3}{3+1} = 0,75$).

Методически присущий данному способу субъективизм экспертов делает необходимым учет ряда обстоятельств:

- эксперт переоценивает вероятности маловероятных событий и недооценивает вероятности весьма правдоподобных событий;
- эксперт склонен считать событие тем более вероятным, чем легче вспоминает примеры подобных событий;
- эксперт гораздо выше оценивает вероятность выигрыша, чем вероятность проигрыша;
- эксперт часто не принимает во внимание объем оцениваемой выборки;
- эксперт зачастую независимые события рассматривает как зависимые и др.

Именно наличием 1-го и 3-го обстоятельств можно объяснить стремление многих людей участвовать в различного рода лотереях и конкурсах. 2-е из приведенных обстоятельств объясняет столь широкое представительство трансляций всякого рода розыгрышей лотерей на телевидении. Последнее служит “математической” основой для всех существующих систем игры (например, “зачеркивать” в карточках “Спортлото” те номера, которые “давно не выпадали”, хотя при наличии “правильного” лототрона вероятность появления конкретного шара в очередном розыгрыше не зависит от предыстории).

Бинарные отношения

Для математического описания предпочтений широко используются бинарные отношения [48]. Бинарными отношениями можно непосредственно представить результаты оценки предпочтений, выполненные по любому из разобранных выше способов. Вообще бинарные отношения могут быть использованы и практически применяются для описания связей самого различного характера между объектами произвольной природы

$$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_m\}.$$

Напомним, что отношение — это математическое понятие для обозначения подмножества прямого произведения некоторых множеств:

$$R \subseteq M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_n.$$

Будем по-прежнему считать, что дано множество представления D .

Рассмотрим множество всех упорядоченных пар объектов (d_i, d_j) из множества D . Данное множество представляет собой прямое произведение множества D само на себя:

$$D \cdot D.$$

Бинарным отношением R на множестве объектов D называется подмножество прямого произведения множества представления D само на себя:

$$R \subseteq D \cdot D.$$

Факт принадлежности упорядоченной пары объектов (d_i, d_j) отношению R будем обозначать $(d_i, d_j) \in R$ или $d_i R d_j$. Если же объекты (d_i, d_j) отношением R не связаны, то этот факт записывают так: $(d_i, d_j) \notin R$.

Поскольку отношение есть подмножество специального вида, то и задавать отношение можно теми же способами, что и любое другое множество:

- перечислением всех элементов отношения;
- указанием общего свойства элементов отношения;

- графом;
- матрицей смежности (таблицей);
- подмножеством точек в декартовой системе координат.

Пусть коммерческая фирма состоит из должностных лиц трех категорий — генерального директора (ГД, d_1), его заместителя (ЗГД, d_2) и n их подчиненных ($\Pi_i, d_i, i = 3, 4, \dots, n + 2$). Требуется задать отношение подчиненности R на множестве сотрудников фирмы D .

Если воспользоваться первым способом задания отношения, получим:

$$R = \{(ГД, ЗГД); (ГД, \Pi_1), \dots, (ГД, \Pi_n); (ЗГД, \Pi_1), \dots, (ЗГД, \Pi_n)\}.$$

Очевидно, что таким образом целесообразно задавать отношения на множествах предъявления малой размерности.

Указание общего свойства элементов отношения приведет к такой записи:

$$(d_i, d_j) \in R$$

$$R = \{(d_i, d_j) \Leftrightarrow d_i \in D, d_j \in D; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; d_i \text{ старше по должности } d_j\}.$$

При табличном способе отношение задается специальной матрицей — матрицей смежности, каждая строка и каждый столбец которой соответствуют некоторому объекту, а на пересечении i -й строки и j -го столбца ставится 1, если $(d_i, d_j) \in R$, и 0 в противном случае.

	ГД	ЗГД	$\Pi_1 \dots \Pi_n$
ГД	0	1	1 ... 1
ЗГД	0	0	1 ... 1
Π_1	0	0	0 ... 0
·	·	·	·
·	·	·	·
Π_n	0	0	0 ... 0

Отношение R можно задать и в виде графа, т. е. совокупности точек (вершин), изображающих элементы множества D и соединенных стрелками (дугами) по такому правилу: если $(d_i, d_j) \in R$, то проводится стрелка из d_i в d_j . Иногда вместо точек используют круги или прямоугольники. Граф отношения подчинения для рассматриваемого примера подчинения представлен на рис. 11.4.

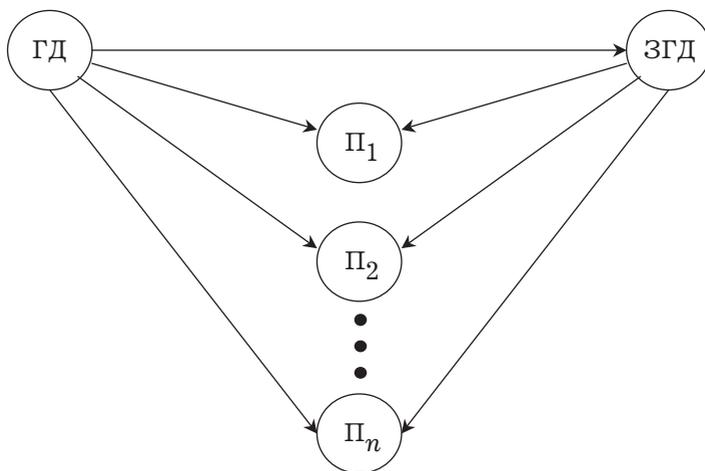


Рис. 11.4

Свойства бинарных отношений

1. Рефлексивность — отношение R называется рефлексивным, если для любого элемента из множества предъявления выполняется соотношение: $d_i R d_j$. На графе отношения, обладающего данным свойством, каждая вершина имеет петлю, а в матрице смежности на главной диагонали находятся 1.

2. Антирефлексивность — отношение R называется антирефлексивным, если оно может выполняться только для несовпадающих элементов, т. е. из соотношения $d_i R d_j$ следует, что $i \neq j$. На графе такого отношения нет петель, а в матрице смежности на главной диагонали стоят 0.

3. Симметричность — отношение R называется симметричным, если из соотношения $d_i R d_j$ следует, что выполняется и обратное соотношение: $d_j R d_i$. При наличии данного свойства на графе отношения каждой стрелке соответствует стрелка в обратном направлении, а в матрице смежности элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны: $d_{ij} = d_{ji}$.

4. Асимметричность — отношение R называется асимметричным, если из двух соотношений $d_i R d_j$ и $d_j R d_i$ по меньшей мере одно невыполнимо. На графе такого отношения две вершины могут соединяться только одной стрелкой, а для матрицы смежности справедливо соотношение $d_{ij} \cdot d_{ji} = 0$.

5. Антисимметричность — отношение R называется антисимметричным, если оба соотношения $d_i R d_j$ и $d_j R d_i$ выполняются одновременно только при $i = j$. На графе такого отношения две вершины могут соединяться только одной стрелкой, но у каждой вершины обязательно должны быть петли. В матрице смежности справедливо соотношение:

$$d_{ij} \cdot d_{ji} = 0, \text{ если } i \neq j.$$

6. Связность — отношение R называется связным (полным, линейным, совершенным), если для двух любых несовпадающих элементов справедливо хотя бы одно из двух соотношений: $d_i R d_j$ или $d_j R d_i$ для $i \neq j$. На графе связного отношения каждая вершина соединена стрелкой с остальными вершинами.

7. Транзитивность — отношение R называется транзитивным, если из соотношений $d_i R d_j$ и $d_j R d_k$ следует $d_i R d_k$. На графе транзитивного отношения, если одна вершина соединена стрелкой с другой вершиной “через третью”, то должна быть стрелка, непосредственно соединяющая первую и третью вершины.

Приведем несколько примеров отношений с различными свойствами. Отношение “больше” на множестве действительных чисел антирефлексивно, асимметрично, транзитивно, но не связно в отличие от отношения “быть не меньше” на том же множестве, которое рефлексивно, антисимметрично, транзи-

тивно и связно. Отношение “быть родным братом” на множестве мужчин симметрично, но не транзитивно. Отношение “быть ниже ростом” на множестве людей антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

При проведении экспертиз широкое применение находят специальные отношения, обладающие фиксированным набором рассмотренных свойств.

Эквивалентностью называют симметричное, рефлексивное, транзитивное отношение. Если последнее свойство отсутствует, имеем другое отношение — толерантность. С помощью этих специальных отношений задается классификация (сортировка).

Строгим порядком называют транзитивное, антисимметричное, рефлексивное и связное отношение. Таким отношением задается строгое ранжирование. Нестрогое ранжирование задается так называемым квазипорядком — транзитивным и рефлексивным отношением. Если к этим свойствам добавить связность, получим связный квазипорядок, которым задаются балльное оценивание, выражение предпочтений с помощью субъективных вероятностей и коэффициентов важности.

11.4. Методы обработки и анализа экспертных оценок

Основными задачами обработки и анализа экспертных оценок являются следующие:

- оценка степени согласованности мнений экспертов;
- получение коллективного (обобщенного) мнения экспертной группы;
- выделение подгрупп экспертов с “близкими” мнениями;
- оценка и учет компетентности экспертов.

Эти задачи, кроме последней, перечислены в той последовательности, как они должны практически решаться. Действительно, прежде чем получать обобщенное мнение, следует убедиться в достаточно высокой согласованности мнений экспертов. Если такой согласованности нет, то “осреднение” всех мнений противоречило бы исходной предпосылке о том, что

ответы экспертов лишь случайно и независимо отклоняются от некоторой истинной единственно правильной точки зрения, которую и надлежит выявить при экспертизе. При этом обобщенное мнение будет неустойчивым в том смысле, что небольшие изменения обрабатываемого материала (например, исключение оценок нескольких экспертов или же добавление новых) могут значительно его изменить.

Поэтому при невысокой согласованности мнений экспертов вначале следует выделить наиболее оригинальные из них и разбить экспертную группу на подгруппы экспертов с близкими мнениями. Общее мнение необходимо получать для каждой из таких подгрупп “осреднением” мнений ее членов. После этого необходимо провести содержательный анализ полученных результатов и выяснить причины наличия нескольких точек зрения. Оценки и учет компетентности экспертов следует проводить до или в процессе выработки решения.

11.4.1. Оценка согласованности мнений экспертов

Обработка и анализ ранжировок

Рассмотрим методы анализа экспертных оценок, получаемых в результате *ранжирования* m заданных объектов из множества предъявления

$$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_m\}.$$

Каждый эксперт располагает эти объекты по убыванию или возрастанию интенсивности проявления некоторого признака. Как уже указывалось, полученные таким путем упорядоченные наборы объектов называют ранжировками. Каждой ранжировке соответствует вполне определенный квазипорядок R на множестве объектов D . Этот квазипорядок можно задать одним из рассмотренных выше способов. Рассмотрим случай, когда каждый эксперт все объекты ранжирует строго. В теории и практике экспертного оценивания рангом r_j объекта d_j при прямом ранжировании принято считать номер места, которое он занимает в строгой ранжировке. Например, для ранжировки

$\langle d_2, d_3, d_1 \rangle$ имеем $r_2 = 1, r_3 = 2, r_1 = 3$. Понятно, что ранг r_j показывает, что впереди d_j стоит объект d_{j-1} . Сумма всех рангов $r_1 + r_2 + \dots + r_m$ равна $m(m + 1)/2$ (как сумма арифметической прогрессии $1 + 2 + \dots + m$).

Оценка согласованности мнений 2-х экспертов

Ранжировки, указанные разными экспертами, редко полностью совпадают, поэтому необходимо оценить степень соответствия (согласованности, согласия) мнений двух экспертов. В статистике зависимость между двумя переменными характеризуется коэффициентом корреляции. Применительно к рассматриваемому случаю оценки согласованности двух ранжировок такой коэффициент должен обладать следующими свойствами:

- если обе ранжировки полностью совпадают, т. е. если каждый объект занимает в них одно и то же место, то коэффициент равен $+1$;

- если одна ранжировка противоположна другой, т. е. в одной из них объекты расположены в обратном порядке по сравнению с другой, то коэффициент равен -1 ;

- в остальных случаях значение коэффициента лежит между предельными значениями, причем возрастание его от -1 до $+1$ в некотором смысле характеризует увеличивающееся согласие между двумя ранжировками.

Вид коэффициента корреляции зависит от того, как конкретизируется третье из указанных требований. В практике проведения экономических экспертиз наиболее распространенными являются коэффициенты ранговой корреляции Кендалла (τ) и Спирмена (ρ) [29, 30].

Выясним, как определяется первый из этих коэффициентов.

Рассмотрим ранжировки 2-х экспертов: $\langle d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1m} \rangle$ и $\langle d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2m} \rangle$. Возьмем какую-либо пару объектов d_l, d_t . Если в обеих ранжировках порядок расположения этих объектов совпадает (например, l -й объект стоит впереди t -го), то пару d_l, d_t называют согласованной. В противном случае пара является несогласованной.

Известно, что из m объектов можно выбрать всего $C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}$ различных пар. Если обозначить через S^+ число согласованных, а через S^- — число несогласованных пар, то чем больше число S^+ , тем выше согласованность ранжировки. Заметим, что сумма согласованных и несогласованных пар равна общему возможному их числу, т. е. C_m^2 . Естественно степень согласованности мнений экспертов нужно оценивать разностью $S_r = S^+ - S^-$, при этом ее знак указывает, каких пар больше — согласованных или несогласованных. Нормирование этой разности общим числом возможных пар обеспечит выполнение третьего требования к коэффициенту согласованности, т. е. нахождение его в пределах от -1 до $+1$. Первые два требования выполняются по условиям введения коэффициента. Итак, коэффициент Кендалла рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{S^+ - S^-}{C_m^2} = \frac{2S_r}{m(m-1)}.$$

В частности, если ранжировки совпадают, то $S^+ = C_m^2$, $S^- = 0$ и $S_r = C_m^2$, а коэффициент $\tau = 1$. Если же одна ранжировка обратна другой, то $S^+ = 0$, $S^- = C_m^2$ и $S_r = -C_m^2$, и коэффициент Кендалла $\tau = -1$.

В качестве примера рассмотрим следующие две ранжировки семи экономических объектов

$$\langle d_7, d_2, d_6, d_1, d_5, d_3, d_4 \rangle;$$

$$\langle d_2, d_7, d_6, d_3, d_1, d_5, d_4 \rangle.$$

Выпишем все возможные пары объектов ($C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$), рассортировав их по типам:

согласованные пары:

$$\begin{array}{ll} d_1, d_2 & d_3, d_4 \\ d_1, d_4 & d_3, d_6 \\ d_1, d_5 & d_3, d_7 \\ d_1, d_6 & d_4, d_5 \\ d_1, d_7 & d_4, d_6 \end{array}$$

несогласованные пары:

$$\begin{array}{l} d_1, d_3 \\ d_2, d_7 \\ d_3, d_5 \end{array}$$

согласованные пары:

$$\begin{array}{ll} d_2, d_3 & d_4, d_7 \\ d_2, d_4 & d_5, d_6 \\ d_2, d_5 & d_5, d_7 \\ d_2, d_6 & d_6, d_7 \end{array}$$

Следовательно, для ранжировок

$$S_r = 18 - 3 = 15 \text{ и } \tau = \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 6} = \frac{5}{7} \approx 0,71,$$

т. е. степень согласованности экспертов достаточно высокая.

Существует другой способ определения числа согласованных пар. Для тех же ранжировок, что и в предыдущем примере, ранги объектов представлены в табл. 11.2:

Таблица 11.2

Исходная таблица рангов объектов

Э/d	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
Эксперт 1	4	2	6	7	5	3	1
Эксперт 2	5	1	4	7	6	3	2

Переставив столбцы в табл. 11.2 таким образом, чтобы у 1-го эксперта ранги располагались по возрастанию — получим табл. 11.3.

Таблица 11.3

Итоговая таблица рангов объектов

Э/d	d_7	d_2	d_6	d_1	d_5	d_3	d_4
Эксперт 1	1	2	3	4	5	6	7
Эксперт 2	2	1	3	5	6	4	7

Понятно, что S^+ равно числу таких пар рангов r_i, r_j , где $r_i < r_j$, которые в последней строке табл. 11.3 расположены в возрастающем порядке.

Первым в третьей строке стоит 2. Правее него имеется пять превосходящих его чисел. Правее 1 — также пять чисел, каждое из которых больше 1. Правее 3 стоит четыре числа, и каждое из них больше 3. Правее 5 — всего два превосходящих его числа, правее 6 — одно и правее 4 — тоже одно. Поэтому $S^+ = 5 + 5 + 4 + 2 + 1 + 1 = 18$, $S^- = 21 - 18 = 3$, и в итоге получаем уже известный результат: $\tau = 0,71$.

Если мнения двух экспертов близки, то указанные ими ранжировки будут мало отличаться от “истинной” и коэффициент корреляции окажется высоким. Однако практически рассуждения приходится вести в обратном порядке, а о близости мнений судить по корреляции ранжировок, которые эти мнения выражают.

Для решения поставленного вопроса используется подход, связанный с проверкой статистических гипотез. Предположим, что хотя бы один из экспертов полностью некомпетентен и независимо от другого случайным образом с одинаковой вероятностью $\frac{1}{m!}$ указывает одну из $m!$ возможных строгих ранжировок m объектов. При справедливости этого допущения или нулевой гипотезы H_0 коэффициент τ является случайной величиной. Распределение оказывается симметричным относительно математического ожидания $M[\tau] = 0$, причем, чем больше по абсолютной величине возможное значение τ , тем меньше вероятность получить это значение. Поскольку нас интересует вероятность получения больших значений, то критическая область, соответствующая уровню значимости α , задается неравенством $t \geq t_\alpha$. Однако с целью некоторого упрощения вычислений используют равносильное неравенство $S_r \geq S_\alpha$.

Проверка справедливости нулевой гипотезы производится обычным порядком при помощи специальных таблиц, данных в приложении 1. Эти таблицы дают значения вероятности $\alpha = P(S_r \geq S_\alpha)$ при различных значениях m и S_r . При $m > 10$ распределение τ весьма близко к нормальному с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D = \frac{1}{18} m(m-1)(2m+5)$$

и можно использовать таблицы функции Лапласа F_τ стандартного нормального распределения $N(0, 1)$, так как

$$\alpha = 1 - F_\tau \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_n} \right).$$

Для рассмотренных выше ранжировок было получено достаточно высокое значение $\tau = 0,71$, причем $S_r = 15$. Табличное значение вероятности $\alpha = P(S_r \geq 15) = 0,015$. Эта вероятность весьма незначительна, поэтому можно считать, что мнения экспертов действительно хорошо согласованы (т. е. высокая согласованность мнений экспертов, скорее всего, неслучайна).

Коэффициент ранговой корреляции ρ Спирмен определил по обычно используемой в теории вероятностей формуле для расчета коэффициента корреляции дискретных случайных величин (см. п. 2.6):

$$\rho = \frac{K_{12}}{\sqrt{D_1 \cdot D_2}};$$

$$K_{12} = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^m [(r_{1i} - r_{cp}) \cdot (r_{2i} - r_{cp})];$$

$$D_1 = D_2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^m (r_{1i} - r_{cp})^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^m (r_{2i} - r_{cp})^2;$$

$$r_{cp} = \frac{m+1}{2}.$$

Для упрощения расчетов обычно используют другую формулу, полученную в результате алгебраических преобразований:

$$\rho = 1 - \frac{6}{m \cdot (m^2 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^m (r_{1i} - r_{2i})^2 = 1 - \frac{6 \cdot S_\rho}{m \cdot (m^2 - 1)},$$

где $S_\rho = \sum_{j=1}^m (r_{1i} - r_{2i})^2$.

Как и всякий статистический коэффициент корреляции, ρ изменяется от -1 до $+1$. Равенство $\rho = +1$ имеет место при полном совпадении ранжировок, равенство $\rho = -1$ — когда ранжировки противоположны друг другу.

Проверка значимости согласованности двух ранжировок с использованием ρ осуществляется в том же общем порядке, который был описан выше. При справедливости нулевой гипотезы распределение ρ симметрично относительно $M[\rho] = 0$, причем с ростом абсолютной величины возможного значения ρ вероятность его получения падает. Поэтому критическая область определяется неравенством $\rho \geq \rho_\alpha$. При небольших m (до 10) пользуются таблицами вероятностей $P(S_\rho \geq S)$, учитывая, что

$$\alpha = P(S_\rho \geq S) = 1 - Pr(S_\rho \geq S_\alpha + 2),$$

а при $m > 10$ можно исходить из того, что распределение величины

$$t = \rho \sqrt{\frac{m-2}{1-\rho^2}}$$

весьма близко к распределению Стьюдента с $(m-2)$ степенями свободы. При $m > 30$ распределение ρ практически совпадает с нормальным, имеющим нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $\frac{1}{m-1}$.

Вернемся к последнему выше рассмотренному примеру. В табл. 11.4 приведены данные для расчета коэффициента Спирмена.

Таблица 11.4

Исходные ранжировки и данные для расчета коэффициента ρ

r/d	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
r_{1i}	4	2	6	7	5	3	1
r_{2i}	5	1	4	7	6	3	2
$r_{1i} - r_{2i}$	-1	1	2	0	-1	0	-1
$(r_{1i} - r_{2i})^2$	1	1	4	0	1	0	1

Просуммировав значения в последней строчке, получим $S_p = 8$ и

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 8}{7(49 - 1)} \approx 0,86.$$

Табличное значение вероятности α , получаемой как вероятности выполнения неравенства

$$S_p \geq 2 + 8 = 10,$$

равно 0,0062, так что гипотезу о независимости мнений экспертов следует отвергнуть.

Мерой согласованности двух ранжировок может служить не только тот или иной коэффициент ранговой корреляции, но и расстояние d между квазипорядками, соответствующими этим ранжировкам. Расстояние d с рассмотренными выше коэффициентами корреляции соотносится так

$$\tau = 1 - \frac{2d}{m(m-1)}.$$

Следовательно, если оценку согласованности ранжировок осуществлять при помощи расстояния d , то проверку значимости степени согласованности можно проводить при помощи статистики τ .

Оценка согласованности мнений n экспертов

Пусть перед каждым из n членов экспертной группы поставлена задача строго ранжировать m объектов из некоторого множества предъявления D . В результате опроса будет получено n строгих ранжировок этих объектов. Полученные ранжировки можно представить соответствующими последовательностями рангов:

$$\begin{aligned} &< r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1m} >, \\ &< r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2m} >, \\ &\dots\dots\dots, \\ &< r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nm} >. \end{aligned}$$

Здесь r_{ij} — ранг, присвоенный объекту d_j i -м экспертом.

Степень согласованности мнений всех экспертов можно выразить через оценки близости мнений для отдельных пар экспертов, т. е. при помощи коэффициентов ранговой корреляции τ или ρ .

Поскольку из экспертной группы можно выбрать всего $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ различных пар экспертов, то степень согласованности группы можно оценить средними значениями $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$.

$$\bar{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < k} \tau_{ik};$$

$$\bar{\rho} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < k} \rho_{ik}.$$

Чем выше согласованность мнений всех экспертов, тем больше значения введенных коэффициентов. В частности, если мнения экспертов полностью совпадают, т. е. каждый из них указал одну и ту же ранжировку, то $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$ принимают свое наибольшее значение, равное 1. Вообще говоря, можно вычислить и дисперсии парных коэффициентов корреляции, которые также будут характеризовать степень групповой согласованности мнений.

Однако вычислять средние значения $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$ ранговых коэффициентов и тем более их дисперсии весьма трудоемко, поэтому для оценки согласованности экспертов пользуются специальными показателями, называемыми коэффициентами конкордации (согласованности). Наиболее известным является коэффициент конкордации Кендалла W , который вводится следующим образом [30]:

$$W = \frac{12 \cdot S_w}{n^2 \cdot m \cdot (m^2 - 1)},$$

$$\text{где } S_w = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_{ij} - \frac{n \cdot (m+1)}{2} \right)^2.$$

По физическому смыслу коэффициент конкордации Кендалла представляет собой некоторую обобщенную дисперсию S_w раз-

броса мнений экспертов относительно среднего мнения $\frac{n \cdot (m+1)}{2}$,
 нормированную своим наибольшим значением $\frac{n^2 \cdot m \cdot (m^2 - 1)}{12}$.

Коэффициент конкордации Кендалла меняется в пределах от 0 (или близкого к 0 значения в зависимости от четности и нечетности m и n) — в случае наименьшей согласованности мнений, до 1 — в случае абсолютной согласованности. Обратите внимание: при оценке согласованности мнений нескольких экспертов понятие “противоположности” мнений теряет свой смысл, столь характерный для возможной “полярности” мнений двух экспертов.

Пример 11.1. Десять экспертов ранжировали по значимости следующие четыре показателя, характеризующие эффективность инвестиционных проектов: d_1 — объем инвестиций, d_2 — срок окупаемости, d_3 — чистый дисконтированный доход, d_4 — рентабельность инвестиций. Результаты ранжирования сведены в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Результаты ранжирования четырех показателей

Эксперты	Объекты			
	d_1	d_2	d_3	d_4
\mathcal{E}_1	4	2	1	3
\mathcal{E}_2	3	1	2	4
\mathcal{E}_3	1	2	3	4
\mathcal{E}_4	3	1	2	4
\mathcal{E}_5	3	2	4	1
\mathcal{E}_6	3	4	1	2
\mathcal{E}_7	3	1	2	4
\mathcal{E}_8	2	1	3	4
\mathcal{E}_9	2	4	1	3
\mathcal{E}_{10}	3	2	1	4

Поскольку $S_w = 118$, то $W = 0,236$. Так как число экспертов достаточно велико (больше семи), то вычислим $\chi^2 = m(n - 1)W = 10 \cdot 3 \cdot 0,236 = 7,08$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$, по таблице функции χ^2 -распределение для $n - 1 = 3$ степеней свободы находим $\chi_{0,05}^2 \approx 7,8$, так что $\chi_{0,05}^2 > 7,08$. Следовательно, нулевую гипотезу отклонять нет оснований, т. е. получено, что степень согласованности мнений экспертов $W = 0,236$ не только мала, но и незначима (это означает, что либо для решаемой задачи информационная база недостаточна, либо — если информационная база достаточна — в экспертную группу включены некомпетентные специалисты, чьи оценки показателей эффективности инвестиционных проектов по каким-то причинам весьма различаются).

Оценку согласованности мнений экспертов можно также произвести, подсчитав среднее расстояние \bar{d} между парами квазипорядков R_i , соответствующих полученным ранжировкам (подобно тому подходу, который рассматривался применительно к получению осредненных коэффициентов $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$). Напомним, что в качестве расстояния d между бинарными отношениями R', R'' часто используют метрику Хемминга, определяемую как количество порязрядных несовпадений элементов соответствующих матриц смежности этих отношений:

$$d(R', R'') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |r'_{ij} - r''_{ij}|.$$

Обработка и анализ балльных и точечных оценок

Пусть перед каждым экспертом была поставлена задача: непосредственно оценить заданные объекты d_1, d_2, \dots, d_m в указанной балльной шкале. Тогда в результате опроса экспертной группы, включающей n членов, будет получена совокупность чисел:

$$\begin{aligned} &< b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m} >; \\ &< b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m} >; \\ &\dots\dots\dots; \\ &< b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm} >, \end{aligned}$$

где b_{ij} — число баллов, приписанное экспертом i объекту d_j .

Как уже отмечалось, балльная шкала является промежуточной между порядковой и интервальной. Специальных методов обработки оценок, полученных в подобного рода промежуточных шкалах, пока не создано. Поэтому при обработке балльных оценок поступают следующим образом. Если имеется уверенность, что все эксперты пользуются единой балльной шкалой (одинаково понимают “цену балла”), как это бывает, например, при наличии специальных эталонов, то балльная шкала приближается к интервальной, и балльные оценки обрабатывают как количественные (о чем будет сказано ниже). В противном случае балльные оценки считают качественными, объекты ранжируют в соответствии с оценками каждого эксперта и затем обрабатывают полученные n ранжировок методами, изложенными в этом пункте. Однако и в первом случае целесообразно дважды обработать балльные оценки — как количественные и как качественные. Согласованность результатов, полученных при обоих подходах, будет свидетельствовать о том, что эти результаты действительно основаны на исходных данных, а не на способах их обработки.

Если считать, что оценки количественные, то в соответствии с исходным допущением о том, что разница в ответах экспертов объясняется случайными независимыми флюктуациями относительно некоторых “истинных” величин, для обработки экспертных данных можно использовать обычные статистические методы точечного оценивания (см. гл. 5). Каждому объекту d_j следует приписать средний балл:

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Эти оценки и принимаются в качестве групповых. Согласованность мнений экспертов можно характеризовать дисперсиями балльных оценок, приписываемых отдельным объектам. Оценки таких дисперсий вычисляются по известным формулам (см. п. 5.4.3).

При положительных балльных оценках часто используют так называемые вариации и полагают, что согласованность

экспертов удовлетворительная, если все $v_j < 0,3$, и хорошая, если все $v_j < 0,2$.

Выделение “оригинальных” экспертов на основе их “нестандартных” баллов можно производить известными статистическими методами проверки аномальности результатов наблюдений.

Аналогичным образом обрабатываются и точечные оценки, полученные в различных *количественных* шкалах. Заметим, что для точечных оценок широко применяется интервальное оценивание (см. п. 5.5), позволяющее по результатам обработки указать интервал изменения оцениваемого параметра, в который “истинное” значение попадет с заданной вероятностью. Кроме того, аппарат статистики дает возможность оценить “аномальность” оценок некоторых экспертов, о чем речь пойдет ниже.

Обработка и анализ попарных сравнений

Рассмотрим названную задачу применительно к обработке результатов *попарного сравнения с градациями*. Как отмечалось, оценки попарной предпочтительности элементов множества предъявления из заданной (фиксированной) шкалы эксперт помещает в квадратную матрицу оценивания размерностью $m \times m$. Поскольку попарное сравнение, вообще говоря, не требует соблюдения транзитивности, для обработки применяют итерационный метод Зейделя, позволяющий сначала оценить коэффициенты относительной важности каждого элемента множества предъявления, а затем по ним установить их ранжировку. Алгоритм метода заключается в следующем [48].

Шаг 0. Все объекты считаются равноценными: $k = 0$;

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{1}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Шаг 1. Коэффициенты относительной важности пересчитываются по формуле

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \alpha_j^{(0)}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \alpha_j^{(0)}} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

По сути, на первом шаге производится суммирование оценок построчно, а каждый коэффициент относительной важности рассчитывается путем деления на “сумму сумм” — общую сумму оценок, выставленных экспертом.

Шаг k . Расчет коэффициентов относительной важности k -го приближения производится по рекуррентной формуле

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \alpha_j^{(k-1)}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot \alpha_j^{(k-1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Возможны два условия остановки алгоритма — либо заданное (требуемое) число шагов, либо достижение заданной (требуемой) точности вычислений:

1. $k = k_{mp}$;

2. $\max_{i=1, 2, \dots, n} \left| \alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon_{mp}$

Метод Зейделя сходится весьма быстро — за 2–3 итерации, поэтому чаще используют 1-е условие прекращения вычислений. Итоговую ранжировку объектов определяют путем установления двойного соответствия: сначала ранжируют коэффициенты относительной важности, начиная с самого большого и далее, ставя ранги от 1 до m ; затем по полученным рангам переходят к ранжировке объектов множества предъявления. В общем случае таким образом определяется нестрогая ранжировка.

Изложенное поясним примером. Пусть эксперт оценил попарную предпочтительность пяти экономических объектов и составил матрицу оценивания (табл. 11.6).

Таблица 11.6

Объекты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_1	1	5	3	3	
d_2		1		5	

Окончание табл. 11.6

Объекты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_3		3	1	3	
d_4				1	
d_5	3	5	3	7	1

После вычисления значений незаполненных клеток матрицы получим (табл. 11.7):

Таблица 11.7

Объекты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_1	1	5	3	3	1/3
d_2	1/5	1	1/3	5	1/5
d_3	1/3	3	1	3	1/3
d_4	1/3	1/5	1/3	1	1/7
d_5	3	5	3	7	1

Результаты применения метода Зейделя для данного случая таковы (табл. 11.8):

Таблица 11.8

Объекты	$\alpha_i^{(0)}$	$\alpha_i^{(1)}$	$\alpha_i^{(2)}$	$\alpha_i^{(3)}$	$\alpha_i^{(4)}$	$\alpha_i^{(5)}$
d_1	0,20	0,26	0,28	0,26	0,26	0,26
d_2	0,20	0,14	0,09	0,09	0,10	0,09
d_3	0,20	0,16	0,15	0,14	0,15	0,15
d_4	0,20	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05
d_5	0,20	0,40	0,44	0,45	0,45	0,45

Очевидно, что уже после 2-й итерации коэффициенты относительной важности практически остаются неизменными. На основании этих коэффициентов получаем итоговую ранжировку:

$$d_5 \succ d_1 \succ d_3 \succ d_2 \succ d_4.$$

Подобным образом обрабатывают и результаты традиционного (классического) попарного сравнения, используя (учитывая весьма низкую точность измерения предпочтительности) только результаты первой итерации. (Часто так поступают и при попарном сравнении с градациями, особенно в условиях отсутствия вычислительных задач, реализующих более точные алгоритмы).

11.4.2. Обобщение мнений экспертов

К решению этой задачи можно приступить лишь при достаточно высокой и статистически значимой согласованности мнений членов экспертной группы. В противном случае требуется дополнительная обработка (см. п. 11.4.3).

Один из подходов к решению этой задачи состоит в том, чтобы групповой считать ранжировку, наиболее тесно коррелированную с n обрабатываемыми ранжировками.

Другой подход к рассматриваемой задаче состоит в том, чтобы групповую ранжировку искать как медиану индивидуальных.

Наиболее простым в вычислительном отношении является метод “сумм рангов” [48], и поэтому он значительно шире распространен на практике. Данный метод заключается в суммировании рангов объектов множества предъявления, выставленных каждым экспертом, и определении групповой (обобщенной) ранжировки на основе суммарных рангов. Групповая ранжировка может оказаться нестрогой даже при использовании каждым экспертом строгого ранжирования.

Пример 11.2. Получены строгие обратные ранжировки 5-ти объектов десятью экспертами (табл. 11.9):

Таблица 11.9

Эксперты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
Θ_1	4	3	5	1	2
Θ_2	3	4	5	1	2

Эксперты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
\mathfrak{E}_3	5	4	3	2	1
\mathfrak{E}_4	4	5	3	1	2
\mathfrak{E}_5	2	5	4	3	1
\mathfrak{E}_6	3	5	4	1	2
\mathfrak{E}_7	5	2	4	3	1
\mathfrak{E}_8	4	2	5	3	1
\mathfrak{E}_9	4	3	2	5	1
\mathfrak{E}_{10}	3	5	4	2	1
Сумма	37	38	39	22	14

Тогда обобщенная ранжировка может быть представлена в следующем виде:

$$d_3 \succ d_2 \succ d_1 \succ d_4 \succ d_5.$$

Заметим, что можно использовать и прямое ранжирование, но тогда групповая ранжировка, естественно, будет обратной:

$$d_5 \succ d_4 \succ d_1 \succ d_2 \succ d_3.$$

Поэтому так важно при постановке задачи перед экспертной группой четко определить конкретный способ выражения предпочтений каждым экспертом.

Определение групповых ранжировок при использовании других способов выражения предпочтений экспертов также основано на осреднении соответствующих оценок (балльных, точечных, непосредственных числовых) и построении на основе средних результатов обобщенной ранжировки.

Еще раз подчеркнем: подобным образом получать обобщенное мнение экспертов можно только в случае высокой и значимой согласованности мнений отдельных членов группы. Применение такого подхода при значительном расхождении частных мнений может привести к абсурдным результатам. Проиллюстрируем это таким примером. Пусть два эксперта выдали строгие ранжировки 5-и объектов (табл. 11.10).

Таблица 11.10

Эксперты	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
\mathcal{E}_1	5	4	3	2	1
\mathcal{E}_2	1	2	3	4	5
Сумма	6	6	6	6	6

Поскольку, очевидно, эти ранжировки свидетельствуют о противоположности мнений экспертов, оба ранговых коэффициента корреляции равны -1 . Если же, несмотря на это, попытаться использовать суммарные ранги, то результат должен быть интерпретирован так: “оба эксперта считают все объекты равными по предпочтению”. Но это совершенно неверно — ни один из экспертов так не считает! Следовательно, совершенно несколько ошибок при обработке и анализе результатов экспертизы: не учтена оценка согласованности мнений экспертов; неверно выбран способ обобщения мнений и, вследствие этого, результаты неправильно интерпретированы.

11.4.3. Выделение подгрупп экспертов с близкими мнениями

При слабой степени согласованности мнений группы экспертов следует провести содержательный анализ причин такого расхождения мнений, наиболее распространенными причинами являются:

- наличие в группе экспертов с нестандартными (оригинальными) мнениями;
- приверженность экспертов позиций “своей” научной школы;
- отстаивание личных, ведомственных, корпоративных, национальных, политических и т. п. интересов и др.

Если для выявления мнений экспертов использовалось ранжирование элементов множества предъявления, в такой ситуации целесообразно выделить отдельные, наиболее отличающиеся от всех остальных ранжировки, и выяснить вопрос о том, не распадается ли экспертная группа на несколько подгрупп, каж-

дая из которых придерживается своей точки зрения. Если это так, то для каждой из подгрупп следует получить “среднюю” ранжировку, применив тот или иной из рассмотренных методов.

Строго научно обоснованных методов решения задачи о выделении “нестандартных” ранжировок и разделении экспертной группы на подгруппы пока не создано. Практически рекомендуется “нестандартными” считать ранжировки, которые достаточно “далеко” находятся от групповой, а подгруппы выделять так, чтобы согласованность входящих в них экспертов была достаточно высока и ранжировки, выражающие мнения этих подгрупп, были далеки друг от друга. В качестве меры удаления часто используют метрику Жемминга для соответствующих квазипорядков.

В случае использования других способов выражения предпочтений экспертов для выявления оригинальных (противоречивых) мнений применяют классические традиционные статистические методы — прежде всего интервальное оценивание, оценивая статистическую значимость выхода какой-либо оценки за границы заданного доверительного интервала (как правило, для этого используют таблицы нормального распределения или распределения Стьюдента).

В случае значительного расхождения мнений экспертов целесообразно применение комплексных экспертных процедур (например, метода Дельфи).

В качестве примера приведем вариант выделения группы экспертов с оригинальными мнениями применительно к использованию точечных оценок. Пусть семь экспертов оценивали ожидаемую прибыль Π от внедрения нового торгового оборудования (в тыс. у. е.) (табл. 11.11).

Таблица 11.11

Эксперты	\mathcal{E}_1	\mathcal{E}_2	\mathcal{E}_3	\mathcal{E}_4	\mathcal{E}_5	\mathcal{E}_6	\mathcal{E}_7
Оценка	74	72	50	75	70	74	73

Средняя оценка прибыли для группы составляет $\Pi_{cp} = 69,7$ ед.; среднее квадратическое отклонение (СКО) оценки

составляет 8,845 ед., что, очевидно, свидетельствует о значительном рассогласовании мнений экспертов. Причина этого — оригинальное мнение 3-го эксперта. Статистическая проверка оценки 3-го эксперта показывает, что при доверительной вероятности 0,05 данную оценку можно считать аномальной (нестандартной), поскольку по таблице распределения Стьюдента для этих условий при параметре закона $t_{\alpha} = \frac{P_3 - P_{\text{ср}}}{\text{СКО}} = 2,2$ значение вероятности составляет 0,04, что меньше принятой.

Обработка мнений экспертов без оценки 3-го специалиста дает следующие результаты: $P'_{\text{ср}} = 73$ ед., $\text{СКО}' = 18$ ед., табличное значение параметра закона Стьюдента при доверительной вероятности 0,95 составляет 2,6, полуразмах доверительного интервала равен $\frac{2,6 \cdot 1,8}{\sqrt{6}} = 1,91$ ед. Следовательно, можно считать, что по мнению шести экспертов истинное значение оценки ожидаемой прибыли находится в интервале от 71,09 до 74,91 ед. при весьма высокой согласованности их мнений.

Окончательный результат данной экспертизы следует представить заказчику таким образом:

- по мнению семи экспертов оценка ожидаемой прибыли составит 69,7 ед., причем мнения экспертов весьма существенно расходятся (СКО оценки составляет 8,845 ед.);

- причиной столь значительного рассогласования мнений является оригинальное мнение 3-го эксперта, считающего, что следует ожидать прибыль в размере 50 ед.;

- по мнению 6-ти экспертов (без учета мнения 3-го) ожидаемая прибыль с вероятностью 0,95 составит от 71,09 до 74,91 ед. при высокой согласованности мнений в группе.

Подчеркнем: ни в коем случае не следует отбрасывать оригинальные (аномальные) мнения каких-либо экспертов. Окончательное решение по результатам экспертизы может выносить только ее заказчик (возможно, для этого ему понадобится дополнительная информация, в том числе полученная по результатам другой (повторной) экспертизы).

11.4.4. Оценка и учет компетентности экспертов

Пока при изложении материала мы предполагали, что квалификация всех экспертов в группе примерно одинакова. Однако практически выполнить условие равной компетентности экспертов удастся далеко не всегда. Поэтому в общем случае при обработке и анализе экспертных оценок может возникнуть необходимость оценки и учета компетентности опрашиваемых экспертов [48].

Как уже указывалось, компетентность экспертов может оцениваться как до проведения опроса, так и в ходе обработки полученных результатов экспертизы. Если тем или иным способом получены коэффициенты компетентности экспертов λ_i , то их можно использовать при обработке как относительные “веса” мнений соответствующих экспертов. Данный подход проиллюстрируем применительно к балльному оцениванию. В этом случае в качестве групповых балльных оценок применяются следующие зависимости:

$$b_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При этом предполагается, что коэффициенты компетентности нормированы:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Однако предпочтительнее оценивать компетентность экспертов непосредственно по результатам конкретной экспертизы в процессе обработки полученных оценок.

Предположим, что каждый из трех экспертов оценил значение двух мероприятий d_1 и d_2 для решения некоторой финансовой проблемы. Полученные нормированные балльные оценки сведем в табл. 11.12.

Алгоритм расчетов весьма схож с алгоритмом обработки оценок по методу попарных сравнений с градациями, изложенному выше. Вначале считаем, что все эксперты равнокомпетентны:

Нормированные балльные оценки

Ξ/i	d_1	d_2
Ξ_1	0,7	0,3
Ξ_2	0,3	0,7
Ξ_3	0,2	0,8

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим средние оценки мероприятий:

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{3}(0,7 + 0,3 + 0,2) = 0,4;$$

$$b_2^{(1)} = \frac{1}{3}(0,3 + 0,7 + 0,8) = 0,6.$$

Теперь пересчитаем коэффициенты компетентности экспертов с учетом полученных оценок $b_1^{(1)}$ и $b_2^{(1)}$, суммируя оценки каждого эксперта и “взвесив” их средними оценками объектов:

$$0,7 \cdot b_1^{(1)} + 0,3 \cdot b_2^{(1)} = 0,46;$$

$$0,3 \cdot b_1^{(1)} + 0,7 \cdot b_2^{(1)} = 0,54;$$

$$0,2 \cdot b_1^{(1)} + 0,8 \cdot b_2^{(1)} = 0,56.$$

Разделив полученные числа на их сумму, равную 1,56, получим уточненные коэффициенты компетентности:

$$\lambda_i^{(1)} = (0,29; 0,35; 0,36).$$

Смысл проделанного преобразования заключается в том, что для эксперта, который дал большую оценку мероприятию, получившему большую “взвешенную” сумму баллов, коэффициент компетентности увеличивается значительно.

Далее делается второй шаг — вычисляются новые средние оценки $b_j^{(2)}$ с использованием $\lambda_i^{(1)}$, а затем последние вновь уточняются при помощи $b_j^{(2)}$ и т. д.

Получим необходимые расчетные формулы для общего случая. При этом воспользуемся матричной записью, введя вектор-строки

$$\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}), \quad b^{(k)} = (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_n^{(k)})$$

и сведя их в матрицу

$$B = \left\| b_{ij} \right\|.$$

Теперь можно записать рекуррентные соотношения:

$$b^{(k)} = \lambda^{(k-1)} B;$$

$$\lambda^{(k)T} = \frac{1}{\chi^{(k)}} B b^{(k)T}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (11.1)$$

где $\chi^{(k)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^{(k)}$, а символом T обозначена операция транспонирования.

Напомним, что на нулевом шаге ($k = 0$) в качестве начального используется вектор:

$$\lambda^{(0)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

В теории неотрицательных матриц доказано, что процесс, осуществляемый согласно указанному алгоритму, — сходящийся. Условие сходимости состоит в том, чтобы матрица B была неразложима, т. е. перестановками строк или столбцов неприводима к виду:

$$B = \left\| \begin{array}{cc} C & 0 \\ 0 & D \end{array} \right\|.$$

Условие неразложимости практически вполне оправданно: если матрица B разложима, то это означает, что эксперты и объекты как бы распадаются на две никак не связанные подгруппы: каждая подгруппа экспертов оценивает только “свои” объекты. Разумеется, нет никакого смысла совместно обрабатывать две несвязанные совокупности оценок.

Практически значения $x_j^{(k)}$ и $\lambda_i^{(k)}$ стабилизируются за два-три шага. Это служит сигналом к окончанию процесса. Установившиеся значения $x_j^{(k)}$ можно считать итоговыми оценками объектов, а $\lambda_i^{(k)}$ — окончательными коэффициентами компетентности экспертов.

Для иллюстрации вернемся к нашему примеру. В нем:

$$B = \begin{Bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{(Tk)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

На первом шаге получаем:

$$b^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) B = (0,4; 0,6);$$

$$Bb^{(1)T} = B \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,46 \\ 0,54 \\ 0,56 \end{Bmatrix}; \quad \chi^{(1)} = 1,56;$$

$$\Lambda^{(1)} = (0,29; 0,35; 0,36).$$

На втором шаге получаем

$$\Lambda^{(2)} = (0,29; 0,35; 0,36),$$

что свидетельствует о том, что процесс вычисления коэффициентов компетентности уже сошелся.

Следовательно, компетентность экспертов характеризуется коэффициентами (0,29; 0,35; 0,36).

В заключение отметим, что на практике оценку компетентности экспертов с помощью рассмотренного подхода провести тем сложнее, чем выше рассогласованность их мнений. Кроме того, эта процедура осложняется необходимостью учета психологических, эмоциональных и т. п. свойств экспертов, особенно если предполагается привлекать этих специалистов к последующим экспертизам.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение метода экспертного оценивания.
2. В каких случаях говорят, что информационная база для проведения экспертизы недостаточна? Приведите пример.
3. Вспомните этапы проведения экспертизы.
4. Вспомните классификацию методов извлечения экспертной информации.
5. Почему сначала выбирают метод извлечения экспертной информации, а лишь потом формируют экспертную группу?
6. В чем заключается интерпретация результатов экспертизы? В каком виде итоги экспертизы представляются заказчику?
7. Вспомните группы способов выражения предпочтений экспертов.
8. Дайте определение бинарного отношения.
9. В чем заключаются такие свойства бинарных отношений, как рефлексивность, транзитивность и связность? Приведите примеры.
10. Вспомните этапы обработки и анализа экспертной информации.
11. Для чего проводится оценка согласованности мнений экспертов?
12. В чем смысл статистической проверки коэффициентов согласованности?
13. Каковы подходы к формированию обобщенного (группового) мнения экспертов?
14. Каким образом выделяют группы экспертов с “близкими” мнениями?
15. С какой целью и каким образом оценивают компетентность экспертов?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аглицкий И. С.* Рыночная цена на программный продукт / Программные продукты и системы. 1991. № 4.
2. *Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В.* Классификация многомерных наблюдений. — М.: Статистика, 1974.
3. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика / Исследование зависимостей. — М.: Финансы и статистика, 1985.
4. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: ЮНИТИ, 1998.
5. *Акофф Р.* Акофф о менеджменте / Пер. с англ. / Под ред. Л. А. Волковой. — СПб.: Питер, 2002.
6. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов / Пер. с англ. — М., Мир, 1976.
7. *Бабешко Л. О.* Коллокационные модели прогнозирования в финансовой сфере. — М.: Экзамен, 2000.
8. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
9. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.
10. *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960.
11. *Варфоломеев В. И.* Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. — М.: Финансы и статистика, 2000.
12. *Варфоломеев В. И.* Имитационное моделирование экономических систем. — М.: МГУК, 1997.
13. *Варфоломеев В. И., Воробьев С. Н.* Принятие управленческих решений: Учеб. пособие для вузов. — М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2001.

14. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1964.
15. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 1998.
16. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961.
17. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.
18. *Гусаров В. М.* Статистика. — М.: ЮНИТИ, 2002.
19. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА М., 2001.
20. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ / Пер. с англ. — Кн. 1. — М.: Финансы и статистика, 1986, Кн. 2. — М.: Финансы и статистика, 1987.
21. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — М.: Статистика, 1973.
22. *Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И.* Многомерные статистические методы. — М.: Финансы и статистика, 1998.
23. *Елисеева И. И.* Эконометрика. — М.: Финансы и статистика, 2002.
24. *Елисеева И. И., Юзбашева М. М.* Общая теория статистики. — М.: Финансы и статистика, 1999.
25. *Емельянов А. А., Власов Е. А.* Имитационное моделирование в экономических информационных системах. — М.: МЭСИ, 1996.
26. Исследование операций: В 2-х томах. Т. 2. Модели и применения / Пер. с англ. / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. — М.: Мир, 1981.
27. *Карасев А. И., Кремер Н. Ш., Савельева Т. Н.* Математические методы и модели в планировании. — М.: Экономика, 1987.
28. *Катышев П. К., Пересецкий А. А.* Сборник задач к начальному курсу эконометрики. — М.: Дело, 1994.
29. *Кендалл Дж., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976.
30. *Кендалл Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

31. *Кильдишев Г. С., Френкель А. А.* Анализ временных рядов и прогнозирование. — М.: Статистика, 1973.
32. *Кокс Д., Хинкли Д.* Теоретическая статистика. — М.: Мир, 1978.
33. *Королев Ю. Г.* Метод наименьших квадратов в социально-экономических исследованиях. — М.: Статистика, 1980.
34. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.
35. *Кремер Н. Ш. и др.* Исследование операций в экономике. — М.: ЮНИТИ, 2002.
36. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ЮНИТИ, 2000.
37. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А.* Эконометрика. — М.: ЮНИТИ, 2002.
38. *Лабскер Л. Г. и др.* Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера. — М.: МЭСИ, 1998.
39. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1962.
40. *Лукашин Ю. П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. — М.: Статистика, 1979.
41. *Льюис К. Д.* Методы прогнозирования экономических показателей. — М.: Финансы и статистика, 1986.
42. *Магнус Я. Р., Катъшев П. К., Пересецкий А. А.* Эконометрика: Начальный курс. — М.: ЮНИТИ, 2000.
43. Методология исчисления показателей социально-экономического развития на макроуровне / Сборник научных трудов МЭСИ, 1991.
44. *Мыльник В. В.* Системы управления. — М.: Экономика и финансы, 2002.
45. *Нейлор Т.* Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. — М.: Мир, 1975.
46. *Панкова Л. А.* Организация экспертизы и анализ экспертной информации. — М.: Наука, 1984.

47. *Пасхавер И. С.* Средние величины в статистике. — М.: Статистика, 1979.
48. *Подиновский В. В.* Математическая теория выработки решений в сложных ситуациях. — М.: МО СССР, 1984.
49. Практикум по эконометрике / Под ред. И. И. Елисеевой. — М.: Финансы и статистика, 2001.
50. Проблемы компьютеризации и статистической обработки данных / Отв. ред. В. Г. Болтянский, М., 1989 (Сборник трудов ВНИИ системных исследований, вып. 3)
51. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.
52. *Райфа Г., Шлейффер Р.* Прикладная теория статистических решений. — М.: Статистика, 1977.
53. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. — М.: Наука, 1968.
54. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
55. *Сиськов В. И.* Корреляционный анализ в экономических исследованиях. — М.: Статистика, 1975.
56. *Трояновский В. М.* Математическое моделирование в менеджменте. — М.: РДЛ, 2000.
57. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Статистический анализ данных на компьютерах / Под ред. В. Э. Фигурнова. — М.: Инфра-М, 1998.
58. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. — М.: ЮНИТИ, 1999.
59. *Уткин В. Б., Балдин К. В.* Информационные системы в экономике: Учебник для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр “Академия”, 2004.
60. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Пер. с англ. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
61. *Ферстер Э., Ренц Б.* Методы корреляционного и регрессионного анализа / Пер. с нем. — М.: Финансы и статистика, 1982.
62. *Хеннан Э.* Анализ временных рядов / Пер. с англ. — М.: Наука, 1964.

63. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. — М.: Мир, 1973.
64. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. — М.: Статистика, 1977.
65. Четыркин Е. М., Калихман И. Л. Вероятность и статистика. — М.: Финансы и статистика, 1982.
66. Чуев Ю. В., Михайлов Ю. Б., Кузьмин В. И. Прогнозирование количественных характеристик процессов. — М.: Сов. радио, 1975.
67. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М., 1998.
68. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.

СПИСОК ТАБЛИЦ

1. Значения функции $F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.
2. Значения функции Лапласа $\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
3. Значения функции $P(X = k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$.
4. Значения функции $P_N(X = k) = \sum_{i=0}^k C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$.
5. Значения вероятности $P_N(X \geq 1) = 1 - (1-p)^N$.
6. Распределение Пуассона $P(k, m) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$.
7. Значения вероятности $P(X \leq k) = \sum_{k=0}^n \frac{m^k}{k!} e^{-m}$.
8. Значения t_α из выражения $\alpha = 2 \int_0^{t_\alpha} S(t, k) dt$.
9. Значения коэффициента q для построения доверительного интервала $(1-q)\sigma_x^* < \sigma_x < (1+q)\sigma_x^*$.
10. Значения множителей z_1 и z_2 для построения доверительного интервала $z_1\sigma_x^* < \sigma_x < z_2\sigma_x^*$.
11. Значения вероятностей $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2)$.
12. Значения функции $L(q, k)$.
13. Критические значения $\chi_\alpha^2(k, q)$.
14. Критические значения f_α для распределения Фишера при $p = 0,05$ и $0,01$.
15. Распределение Дарбина-Уотсона.

Значения функции $F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,9	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
-2,8	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
-2,7	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
-2,6	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
-2,5	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
-2,4	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006
-2,3	0,011	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008
-2,2	0,014	0,014	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011
-2,1	0,018	0,017	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,057	0,057	0,056
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,093	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,151	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,443	0,440	0,436	0,432	0,429	0,425
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464

Окончание табл. 1

<i>y</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,568	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,913
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,930	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,967	0,968	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999

Значения функции Лапласа $\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

<i>y</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,008	0,016	0,024	0,032	0,040	0,056	0,064	0,072	0,080
0,1	0,080	0,088	0,096	0,103	0,111	0,119	0,127	0,135	0,143	0,151
0,2	0,159	0,166	0,174	0,182	0,190	0,197	0,205	0,213	0,221	0,228
0,3	0,236	0,243	0,251	0,259	0,266	0,274	0,281	0,289	0,303	0,303
0,4	0,311	0,318	0,326	0,333	0,340	0,347	0,354	0,362	0,369	0,376
0,5	0,383	0,390	0,397	0,404	0,411	0,418	0,425	0,431	0,438	0,445
0,6	0,451	0,458	0,465	0,471	0,478	0,484	0,491	0,497	0,504	0,510
0,7	0,516	0,522	0,528	0,535	0,541	0,547	0,553	0,559	0,565	0,570
0,8	0,576	0,582	0,588	0,593	0,599	0,605	0,610	0,616	0,621	0,627
0,9	0,632	0,637	0,642	0,648	0,653	0,658	0,663	0,668	0,673	0,678
1,0	0,683	0,688	0,692	0,697	0,702	0,706	0,711	0,715	0,720	0,724
1,1	0,729	0,733	0,737	0,742	0,746	0,750	0,754	0,758	0,762	0,766
1,2	0,770	0,774	0,778	0,781	0,785	0,789	0,792	0,796	0,799	0,803
1,3	0,806	0,810	0,813	0,816	0,820	0,823	0,826	0,829	0,832	0,835
1,4	0,838	0,841	0,844	0,847	0,850	0,853	0,856	0,859	0,861	0,864
1,5	0,866	0,867	0,871	0,874	0,876	0,879	0,881	0,884	0,886	0,888
1,6	0,890	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,905	0,907	0,909
1,7	0,911	0,913	0,914	0,916	0,918	0,920	0,922	0,923	0,925	0,927
1,8	0,928	0,930	0,931	0,933	0,934	0,936	0,937	0,939	0,940	0,941
1,9	0,943	0,944	0,945	0,946	0,948	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953
2,0	0,954	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
2,1	0,964	0,965	0,966	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,971	0,971
2,2	0,972	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978
2,3	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983
2,4	0,984	0,984	0,984	0,985	0,985	0,986	0,986	0,986	0,987	0,987
2,5	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990
2,6	0,990	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993
2,7	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995
2,8	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,9	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997

Таблица 3

Значения функции $P(X = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}$

N	k \ p	p						
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	0 (2)	0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1 (1)	0,1098	0,0950	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
	2 (0)	0,0001	0,0025	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0 (3)	0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1 (2)	0,0294	0,1354	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
	2 (1)	0,0003	0,0071	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
	3 (0)	0,0000	0,0001	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250
4	0 (4)	0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1 (3)	0,0388	0,1715	0,2916	0,4096	0,4116	0,3456	0,2500
	2 (2)	0,0006	0,0135	0,0486	0,1536	0,2646	0,3456	0,3750
	3 (1)	0,0000	0,0005	0,0036	0,0256	0,0756	0,1536	0,2500
	4 (0)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625
5	0 (5)	0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1 (4)	0,0480	0,2037	0,3280	0,4096	0,3601	0,2592	0,1563
	2 (3)	0,0010	0,0214	0,0729	0,2048	0,3087	0,3456	0,3125
	3 (2)	0,0000	0,0011	0,0081	0,0512	0,1323	0,2304	0,3125
	4 (1)	0,0000	0,0000	0,0005	0,0064	0,0284	0,0768	0,1563
	5 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0024	0,0102	0,0312
6	0 (6)	0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1 (5)	0,0571	0,2321	0,3543	0,3933	0,3025	0,1866	0,0938
	2 (4)	0,0014	0,0306	0,0984	0,2458	0,3240	0,3110	0,2344
	3 (3)	0,0000	0,0021	0,0146	0,0819	0,1852	0,2765	0,3124
	4 (2)	0,0000	0,0001	0,0012	0,0154	0,0595	0,1382	0,2344
	5 (1)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0102	0,0369	0,0938
	6 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0041	0,0156
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	k \ p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
		7	0 (7)	0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,0824
1 (6)	0,0659		0,2573	0,3720	0,3670	0,2471	0,1307	0,0547
2 (5)	0,0020		0,0406	0,1240	0,2752	0,3176	0,2613	0,1641
3 (4)	0,0000		0,0036	0,0230	0,1147	0,2269	0,2903	0,2734
4 (3)	0,0000		0,0002	0,0025	0,0287	0,0972	0,1935	0,2734
5 (2)	0,0000		0,0000	0,0002	0,0043	0,0250	0,0774	0,1641
6 (1)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0004	0,0036	0,0172	0,0547
7 (0)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0078
8	0 (8)	0,9927	0,6634	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
	1 (7)	0,0746	0,2793	0,3826	0,3355	0,1977	0,0896	0,0312
	2 (6)	0,0026	0,0515	0,1488	0,2936	0,2965	0,2090	0,1094
	3 (5)	0,0001	0,0054	0,0331	0,1468	0,2541	0,2787	0,2188
	4 (4)	0,0000	0,0004	0,0046	0,0459	0,1361	0,2323	0,2734
	5 (3)	0,0000	0,0000	0,0004	0,0092	0,0467	0,1287	0,2188
	6 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0100	0,0413	0,1094
	7 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0079	0,0312
8 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039	
9	0 (9)	0,9135	0,6303	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0019
	1 (8)	0,0830	0,2985	0,3874	0,3020	0,1557	0,0605	0,0176
	2 (7)	0,0034	0,0629	0,1722	0,3020	0,2668	0,1613	0,0703
	3 (6)	0,0001	0,0077	0,0447	0,1762	0,2668	0,2508	0,1641
	4 (5)	0,0000	0,0006	0,0074	0,0661	0,1715	0,2508	0,2461
	5 (4)	0,0000	0,0000	0,0008	0,0165	0,0735	0,1672	0,2461
	6 (3)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0027	0,0210	0,0743	0,1641
	7 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0039	0,0212	0,0703
	8 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0035	0,0176
9 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0019	
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	k \ p	p						
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	0 (10)	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
	1 (9)	0,0913	0,3151	0,3874	0,2684	0,1211	0,0403	0,0098
	2 (8)	0,0042	0,0746	0,1937	0,3020	0,2335	0,1209	0,0439
	3 (7)	0,0001	0,0105	0,0574	0,2013	0,2668	0,2150	0,1172
	4 (6)	0,0000	0,0010	0,0112	0,0881	0,2001	0,2508	0,2051
	5 (5)	0,0000	0,0001	0,0015	0,0264	0,1029	0,2007	0,2460
	6 (4)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0055	0,0368	0,1115	0,2051
	7 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0090	0,0425	0,1172
	8 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0106	0,0439
	9 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0098
10 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	
11	0 (11)	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0198	0,0036	0,0005
	1 (10)	0,0995	0,3293	0,3835	0,2362	0,0932	0,0266	0,0054
	2 (9)	0,0050	0,0867	0,2131	0,2953	0,1998	0,0887	0,0268
	3 (8)	0,0002	0,0137	0,0710	0,2215	0,2568	0,1774	0,0805
	4 (7)	0,0000	0,0014	0,0158	0,1107	0,2201	0,2365	0,1611
	5 (6)	0,0000	0,0001	0,0025	0,0388	0,1321	0,2207	0,2257
	6 (5)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0097	0,0566	0,1471	0,2257
	7 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0173	0,0701	0,1611
	8 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0037	0,0234	0,0805
	9 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0052	0,0268
	10 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0054
11 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	$k \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
		12	0 (12)	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0138
1 (11)	0,1075		0,3413	0,3766	0,2062	0,0712	0,0174	0,0029
2 (10)	0,0058		0,0988	0,2301	0,2835	0,1678	0,0639	0,0161
3 (9)	0,0002		0,0173	0,0852	0,2662	0,2397	0,1419	0,0537
4 (8)	0,0000		0,0137	0,0213	0,1329	0,2312	0,2128	0,1209
5 (7)	0,0000		0,0014	0,0038	0,0532	0,1585	0,2270	0,1934
6 (6)	0,0000		0,0001	0,0005	0,0155	0,0792	0,1766	0,2256
7 (5)	0,0000		0,0000	0,0001	0,0033	0,0291	0,1009	0,1934
8 (4)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0005	0,0078	0,0420	0,1209
9 (3)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0125	0,0537
10 (2)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0025	0,0161
11 (1)	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0029
12 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	
13	0 (13)	0,8775	0,5134	0,2542	0,0550	0,0097	0,0013	0,0001
	1 (12)	0,1152	0,3512	0,3672	0,1787	0,0540	0,0113	0,0016
	2 (11)	0,0070	0,1109	0,2448	0,2680	0,1388	0,0453	0,0095
	3 (10)	0,0003	0,0214	0,0997	0,2457	0,2181	0,1107	0,0349
	4 (9)	0,0000	0,0028	0,0277	0,1535	0,2337	0,1845	0,0873
	5 (8)	0,0000	0,0003	0,0055	0,0691	0,1803	0,2213	0,1571
	6 (7)	0,0000	0,0000	0,0008	0,0230	0,1030	0,1967	0,2095
	7 (6)	0,0000	0,0000	0,0001	0,0058	0,0442	0,1312	0,2095
	8 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0142	0,0656	0,1571
	9 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0034	0,0243	0,0873
	10 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0065	0,0349
	11 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0095
	12 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016
13 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Продолжение табл. 3

N	k \ p	p						
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
14	0 (14)	0,8687	0,4877	0,2288	0,0440	0,0068	0,0008	0,0001
	1 (13)	0,1229	0,3594	0,3558	0,1539	0,0407	0,0073	0,0008
	2 (12)	0,0081	0,1229	0,2570	0,2501	0,1134	0,0317	0,0056
	3 (11)	0,0003	0,0259	0,1142	0,2501	0,1943	0,0845	0,0222
	4 (10)	0,0000	0,0037	0,0349	0,1720	0,2290	0,1549	0,0611
	5 (9)	0,0000	0,0004	0,0078	0,0860	0,1963	0,2066	0,1221
	6 (8)	0,0000	0,0000	0,0013	0,0322	0,1262	0,2066	0,1833
	7 (7)	0,0000	0,0000	0,0002	0,0092	0,0619	0,1574	0,2095
	8 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0232	0,0918	0,1833
	9 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0066	0,0408	0,1221
	10 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0136	0,0611
	11 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0033	0,0222
	12 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0056
	13 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008
14 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	
15	0 (15)	0,8001	0,4633	0,2059	0,0352	0,0048	0,0005	0,0000
	1 (14)	0,1303	0,3558	0,3432	0,1319	0,0305	0,0047	0,0005
	2 (13)	0,0092	0,1348	0,2669	0,2390	0,0916	0,0219	0,0032
	3 (12)	0,0004	0,0307	0,1285	0,1700	0,0634	0,0634	0,0139
	4 (11)	0,0000	0,0048	0,0428	0,2186	0,1268	0,1268	0,0417
	5 (10)	0,0000	0,0006	0,0105	0,2061	0,1859	0,1859	0,0916
	6 (9)	0,0000	0,0000	0,0019	0,1472	0,2066	0,2066	0,1527
	7 (8)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0811	0,1771	0,1771	0,1964
	8 (7)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0347	0,1181	0,1181	0,1964
	9 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0116	0,0612	0,0612	0,1527
	10 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0030	0,0245	0,0245	0,0916
	11 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0074	0,0074	0,0417
	12 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0016	0,0139
	13 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0003	0,0032
	14 (1)	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005
15 (0)	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

N	k \ p	p						
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
20	0 (20)	0,8180	0,3585	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
	1 (19)	0,1652	0,3774	0,2102	0,0577	0,0068	0,0005	0,0000
	2 (18)	0,0158	0,1887	0,2852	0,1369	0,0278	0,0031	0,0002
	3 (17)	0,0010	0,0596	0,1901	0,2053	0,0716	0,0124	0,0011
	4 (16)	0,0000	0,0133	0,0898	0,2182	0,1304	0,0350	0,0046
	5 (15)	0,0000	0,0022	0,0319	0,1746	0,1789	0,0746	0,0148
	6 (14)	0,0000	0,0003	0,0089	0,1091	0,1916	0,1244	0,0370
	7 (13)	0,0000	0,0000	0,0020	0,0546	0,1643	0,1659	0,0739
	8 (12)	0,0000	0,0000	0,0003	0,0222	0,1144	0,1797	0,1201
	9 (11)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0074	0,0654	0,1597	0,1602
	10 (10)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0308	0,1171	0,1762
	11 (9)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0120	0,0710	0,1602
	12 (8)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0039	0,0355	0,1201
	13 (7)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0146	0,0739
	14 (6)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0049	0,0370
	15 (5)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0148
	16 (4)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0046
	17 (3)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011
	18 (2)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19 (1)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20 (0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
		0,99	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Значения функции

N	$k \backslash p$		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9100	0,8400	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,7840	0,6480	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9992	0,9730	0,9360	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,2401	0,1296	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,6517	0,4752	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9163	0,8208	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9919	0,9744	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0312
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,5282	0,3370	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8369	0,6826	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9692	0,9130	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9976	0,9898	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1176	0,0467	0,0156
	1		0,9986	0,9672	0,8857	0,6554	0,4202	0,2333	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,7443	0,5443	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9295	0,8208	0,6562
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9891	0,9590	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9959	0,9444
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица 4

$$P_N(X = k) = \sum_{i=0}^k C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$$

N	k \ p	p					
		0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
2	0	0,1600	0,0900	0,0400	0,0100	0,0025	0,0001
	1	0,6400	0,5100	0,3600	0,1900	0,0975	0,0199
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,0640	0,0270	0,0080	0,0010	0,0001	0,0000
	1	0,3520	0,2160	0,1040	0,0280	0,0072	0,0003
	2	0,7840	0,6570	0,4880	0,2710	0,1426	0,0297
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,0256	0,0081	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,1792	0,0837	0,0272	0,0037	0,0005	0,0000
	2	0,5248	0,3483	0,1908	0,0523	0,0140	0,0006
	3	0,8704	0,7599	0,5904	0,3439	0,1855	0,0394
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005	0,0000	0,0000
	2	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086	0,0012	0,0000
	3	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815	0,0226	0,0001
	4	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095	0,2262	0,0490
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,0041	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0410	0,0109	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,1792	0,0705	0,0170	0,0013	0,0001	0,0000
	3	0,4557	0,2557	0,0989	0,0158	0,0022	0,0000
	4	0,7667	0,5798	0,3446	0,1143	0,0328	0,0015
	5	0,9533	0,8824	0,7378	0,4686	0,2649	0,0585
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
7	0	0,9321	0,6984	0,4783	0,2097	0,0824	0,0280	0,0078
	1	0,9980	0,9557	0,8503	0,5767	0,3294	0,1586	0,0625
	2	1,0000	0,9963	0,9743	0,8520	0,6471	0,4199	0,2266
	3	1,0000	0,9999	0,9973	0,9667	0,8740	0,7102	0,5000
	4	1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9712	0,9037	0,7734
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9962	0,9812	0,9375
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9922
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,0576	0,0168	0,0039
	1	0,9973	0,9427	0,8131	0,5033	0,2553	0,1064	0,0352
	2	0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,5518	0,3154	0,1445
	3	1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8059	0,5941	0,3633
	4	1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9420	0,8263	0,6367
	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9887	0,9502	0,8554
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9915	0,9648
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9961
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0404	0,0101	0,0020
	1	0,9965	0,9287	0,7748	0,4362	0,1960	0,0705	0,0195
	2	0,9999	0,9915	0,9470	0,7382	0,4628	0,2318	0,0898
	3	1,0000	0,9993	0,9917	0,9144	0,7297	0,4826	0,2539
	4	1,0000	0,9999	0,9991	0,9804	0,9012	0,7334	0,5000
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9747	0,9006	0,7461
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9957	0,9750	0,9102
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9962	0,9805
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
7	0	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0188	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0963	0,0287	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,2898	0,1260	0,0334	0,0027	0,0002	0,0000
	4	0,5801	0,3529	0,1481	0,0257	0,0038	0,0000
	5	0,8414	0,6706	0,4233	0,1497	0,0444	0,0020
	6	0,9720	0,9176	0,7903	0,5217	0,3017	0,0679
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0085	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0498	0,0113	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,1737	0,0580	0,0104	0,0004	0,0000	0,0000
	4	0,4059	0,1941	0,0563	0,0050	0,0004	0,0000
	5	0,6846	0,4482	0,2031	0,0381	0,0058	0,0000
	6	0,8936	0,7447	0,4967	0,1869	0,0572	0,0027
	7	0,9832	0,9424	0,8322	0,5695	0,3366	0,0773
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
9	0	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0250	0,0043	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0994	0,0253	0,0031	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,2666	0,0988	0,0196	0,0009	0,0000	0,0000
	5	0,5174	0,2703	0,0856	0,0083	0,0006	0,0000
	6	0,7682	0,5372	0,2618	0,0530	0,0086	0,0001
	7	0,9295	0,8040	0,5638	0,2252	0,0712	0,0034
	8	0,9899	0,9596	0,8658	0,6126	0,3698	0,0865
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	0	0,9044	0,5988	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010
	1	0,9958	0,9139	0,7361	0,3758	0,1493	0,0464	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,3828	0,1673	0,0547
	3	1,0000	0,9999	0,9917	0,8791	0,6496	0,3823	0,1719
	4	1,0000	1,0000	0,9991	0,9672	0,8497	0,6331	0,3770
	5	1,0000	1,0000	0,9998	0,9936	0,9526	0,8338	0,6230
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9894	0,9452	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9877	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
11	0	0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0198	0,0036	0,0005
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1130	0,0302	0,0059
	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,6171	0,3127	0,1189	0,0327
	3	1,0000	0,9985	0,9815	0,8389	0,5696	0,2963	0,1133
	4	1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,7897	0,5328	0,2744
	5	1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9218	0,7535	0,5000
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9784	0,9006	0,7256
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9957	0,9707	0,8867
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9941	0,9673
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9941
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	0	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,1662	0,0474	0,0064	0,0002	0,0000	0,0000
	5	0,3669	0,1503	0,0033	0,0016	0,0001	0,0000
	6	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128	0,0010	0,0000
	7	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702	0,0115	0,0001
	8	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639	0,0861	0,0043
	9	0,9939	0,9718	0,8926	0,6513	0,4013	0,0956
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
11	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0059	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0293	0,0043	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0994	0,0216	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,2465	0,0782	0,0116	0,0003	0,0000	0,0000
	6	0,4672	0,2103	0,0504	0,0228	0,0000	0,0000
	7	0,7037	0,4304	0,1611	0,0185	0,0002	0,0000
	8	0,8811	0,6873	0,3826	0,0896	0,0022	0,0002
	9	0,9698	0,8870	0,6779	0,3026	0,0196	0,0052
	10	0,9964	0,9802	0,9141	0,6862	0,1184	0,1047
11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
12	0	0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0138	0,0022	0,0002
	1	0,9939	0,8817	0,6590	0,2749	0,0850	0,0196	0,0032
	2	0,9997	0,9805	0,8891	0,5583	0,2528	0,0834	0,0193
	3	0,9999	0,9978	0,9744	0,7946	0,4925	0,2253	0,0730
	4	1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,7237	0,4382	0,1938
	5	1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,8822	0,6652	0,3872
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9961	0,9614	0,8418	0,6128
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9905	0,9427	0,8062
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9847	0,9270
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9972	0,9807
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9968
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
13	0	0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0097	0,0013	0,0001
	1	0,9927	0,8645	0,6214	0,2336	0,0637	0,0126	0,0017
	2	0,9997	0,9754	0,8661	0,5016	0,2025	0,0579	0,0112
	3	1,0000	0,9968	0,9658	0,7473	0,4206	0,1686	0,0461
	4	1,0000	0,9996	0,9935	0,9009	0,6543	0,3530	0,1334
	5	1,0000	0,9999	0,9991	0,9700	0,8346	0,5744	0,2905
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9376	0,7712	0,5000
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9818	0,9023	0,7095
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9960	0,9679	0,8666
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9922	0,9539
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9888
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
12	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0028	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0153	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0573	0,0095	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1582	0,0386	0,0039	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,3348	0,1178	0,0194	0,0005	0,0000	0,0000
	7	0,5618	0,2763	0,0726	0,0043	0,0002	0,0000
	8	0,7747	0,5075	0,2054	0,0256	0,0022	0,0000
	9	0,9166	0,7472	0,4416	0,1109	0,0196	0,0002
	10	0,9804	0,9150	0,7251	0,3410	0,1184	0,0062
	11	0,9978	0,9862	0,9313	0,7176	0,4596	0,1136
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
13	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0078	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0321	0,0040	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0977	0,0182	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,2288	0,0624	0,0070	0,0001	0,0000	0,0000
	7	0,4256	0,1654	0,0300	0,0009	0,0000	0,0000
	8	0,6470	0,3457	0,0991	0,0065	0,0003	0,0000
	9	0,8314	0,5794	0,2527	0,0342	0,0031	0,0000
	10	0,9421	0,7975	0,4984	0,1339	0,0245	0,0003
	11	0,9874	0,9363	0,7664	0,3787	0,1354	0,0072
	12	0,9987	0,9903	0,9450	0,7458	0,4867	0,1225
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	k \ p							
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
14	0	0,8687	0,4877	0,2288	0,0440	0,0068	0,0008	0,0001
	1	0,6199	0,8471	0,5846	0,1979	0,0475	0,0081	0,0009
	2	0,9997	0,9700	0,8416	0,4480	0,1608	0,0398	0,0065
	3	1,0000	0,9959	0,9569	0,6982	0,3552	0,1243	0,0287
	4	1,0000	0,9996	0,9908	0,8702	0,5842	0,2793	0,0898
	5	1,0000	1,0000	0,9985	0,9561	0,7805	0,4858	0,2120
	6	1,0000	1,0000	0,9998	0,9884	0,9067	0,6924	0,3953
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9976	0,9685	0,8499	0,6047
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9917	0,9417	0,7880
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9825	0,9102
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9961	0,9713
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9935
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
15	0	0,8601	0,4633	0,2059	0,0352	0,0048	0,0005	0,0000
	1	0,9904	0,8291	0,5490	0,1671	0,0353	0,0052	0,0005
	2	0,9996	0,9639	0,8159	0,3980	0,1268	0,0271	0,0037
	3	1,0000	0,9946	0,9444	0,6482	0,2969	0,0905	0,0176
	4	1,0000	0,9994	0,9873	0,8558	0,5155	0,2173	0,0592
	5	1,0000	1,0000	0,9978	0,9390	0,7216	0,4032	0,1509
	6	1,0000	1,0000	0,9997	0,9819	0,8689	0,6098	0,3036
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9958	0,9500	0,7869	0,5000
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9848	0,9050	0,6964
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9964	0,9662	0,8491
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9906	0,9408
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
14	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0039	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0175	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0583	0,0083	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1501	0,0315	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,3076	0,0933	0,0116	0,0002	0,0000	0,0000
	8	0,5141	0,2195	0,0438	0,0015	0,0000	0,0000
	9	0,7207	0,4158	0,1298	0,0092	0,0004	0,0000
	10	0,8757	0,6448	0,3081	0,0441	0,0042	0,0000
	11	0,9602	0,8392	0,5520	0,1584	0,0300	0,0003
	12	0,9919	0,9525	0,8021	0,4154	0,1530	0,0084
	13	0,9992	0,9932	0,9560	0,7712	0,5123	0,1312
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
15	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0094	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0338	0,0036	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003	0,0000	0,0000
	9	0,5968	0,2784	0,0610	0,0022	0,0000	0,0000
	10	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127	0,0006	0,0000
	11	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556	0,0055	0,0000
	12	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841	0,0362	0,0004
	13	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510	0,1710	0,0096
	14	0,9995	0,9952	0,9648	0,7941	0,5367	0,1399
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Продолжение табл. 4

N	$k \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
20	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000
	1	0,9831	0,7359	0,3918	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000
	2	0,9990	0,9246	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002
	3	1,0000	0,9842	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013
	4	1,0000	0,9975	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059
	5	1,0000	0,9997	0,9888	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207
	6	1,0000	1,0000	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577
	7	1,0000	1,0000	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9790	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

N	k \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
		0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000
	11	0,4044	0,1133	0,0100	0,0000	0,0000	0,0000
	12	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004	0,0000	0,0000
	13	0,7500	0,3120	0,0867	0,0024	0,0000	0,0000
	14	0,8744	0,5836	0,1958	0,0112	0,0003	0,0000
	15	0,9490	0,7625	0,3703	0,0432	0,0026	0,0000
	16	0,9840	0,8929	0,5885	0,1330	0,0159	0,0000
	17	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231	0,0755	0,0010
	18	0,9995	0,9924	0,9308	0,6082	0,2642	0,0169
	19	1,0000	0,9992	0,9885	0,8784	0,6415	0,1821
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица 5

Значения вероятности $P_N(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^N$

$p \backslash N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
0,10	0,190	0,271	0,344	0,410	0,469	0,552	0,570	0,613	0,651	0,718
0,12	0,226	0,359	0,400	0,472	0,536	0,591	0,640	0,684	0,722	0,784
0,14	0,260	0,364	0,453	0,530	0,595	0,652	0,701	0,743	0,779	0,836
0,16	0,294	0,407	0,502	0,582	0,649	0,705	0,752	0,792	0,825	0,877
0,18	0,328	0,449	0,548	0,629	0,696	0,751	0,796	0,832	0,862	0,908
0,20	0,360	0,488	0,590	0,672	0,738	0,790	0,832	0,866	0,893	0,931
0,22	0,392	0,525	0,630	0,729	0,775	0,824	0,863	0,893	0,917	0,949
0,24	0,422	0,561	0,666	0,746	0,807	0,854	0,889	0,915	0,936	0,963
0,26	0,452	0,595	0,700	0,778	0,836	0,887	0,910	0,933	0,951	0,973
0,28	0,482	0,627	0,731	0,806	0,861	0,900	0,928	0,948	0,963	0,981
0,30	0,510	0,657	0,760	0,832	0,882	0,918	0,942	0,960	0,972	0,986
0,32	0,538	0,686	0,786	0,855	0,901	0,933	0,954	0,969	0,979	0,990
0,34	0,564	0,712	0,810	0,875	0,917	0,945	0,964	0,976	0,984	0,992
0,36	0,590	0,738	0,832	0,893	0,931	0,956	0,972	0,982	0,988	0,994
0,38	0,616	0,762	0,852	0,908	0,943	0,965	0,978	0,986	0,992	0,995
0,40	0,640	0,784	0,870	0,922	0,953	0,972	0,983	0,990	0,994	0,997
0,42	0,664	0,805	0,887	0,934	0,962	0,978	0,987	0,993	0,996	0,998
0,44	0,686	0,824	0,902	0,945	0,969	0,983	0,990	0,995	0,997	0,999
0,46	0,708	0,843	0,915	0,954	0,975	0,987	0,993	0,996	0,999	0,999
0,48	0,730	0,859	0,927	0,962	0,980	0,990	0,995	0,997	0,999	0,999
0,50	0,750	0,875	0,938	0,969	0,984	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999
0,52	0,770	0,889	0,947	0,975	0,988	0,994	0,998	0,999	0,999	0,999
0,54	0,788	0,903	0,955	0,979	0,991	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999
0,56	0,806	0,915	0,963	0,984	0,993	0,997	0,999	0,999	0,999	0,999
0,58	0,824	0,926	0,969	0,987	0,995	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999

$p \backslash N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
0,60	0,840	0,936	0,974	0,990	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
0,62	0,856	0,945	0,979	0,992	0,997	0,999				
0,64	0,870	0,953	0,983	0,994	0,998					
0,66	0,884	0,961	0,987	0,995	0,998					
0,68	0,898	0,967	0,990	0,997	0,999					
0,70	0,910	0,973	0,992	0,998						
0,72	0,922	0,978	0,994	0,998						
0,74	0,932	0,982	0,995	0,999						
0,76	0,942	0,986	0,997							
0,78	0,952	0,989	0,998							
0,80	0,960	0,992	0,998							
0,82	0,968	0,994	0,999							
0,84	0,974	0,996								
0,86	0,980	0,997								
0,88	0,986	0,998								
0,90	0,990	0,999								
0,92	0,994									
0,94	0,996									
0,96	0,998									
0,98	0,999									

Таблица 6

$$\text{Распределение Пуассона } P(k, m) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

$k \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,610	0,549	0,497	0,449	0,410	0,368
1	0,090	0,164	0,222	0,268	0,300	0,329	0,348	0,360	0,366	0,368
2	0,005	0,016	0,033	0,054	0,076	0,099	0,122	0,144	0,165	0,184
3		0,002	0,003	0,007	0,013	0,020	0,028	0,038	0,049	0,061
4				0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,015
5							0,001	0,001	0,002	0,003

Окончание табл. 6

$k \backslash m$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,271	0,224	0,146	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,004	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9		0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10		0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11			0,002	0,008	0,022	0,045	0,072	0,097	0,114
12			0,001	0,003	0,013	0,026	0,048	0,073	0,095
13				0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14					0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15					0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16						0,001	0,004	0,011	0,022
17							0,002	0,006	0,013
18							0,001	0,003	0,007
19								0,001	0,004
20									0,002

Таблица 7

$$\text{Значения вероятности } P(X \leq k) = \sum_{k=0}^n \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

$k \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,606	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	0,999	0,999	0,999	0,992	0,986	0,978	0,968	0,953	0,937	0,920
3				0,999	0,998	0,998	0,994	0,991	0,988	0,981
4					0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,996
5								0,999	0,999	0,999

Окончание табл. 7

$k \backslash m$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,099	0,055	0,029
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130
7	0,998	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220
8	0,999	0,996	0,992	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333
9		0,999	0,997	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458
10			0,999	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583
11				0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697
12				0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792
13				0,999	0,996	0,983	0,966	0,926	0,864
14					0,999	0,943	0,983	0,959	0,917
15						0,976	0,992	0,978	0,951
16						0,990	0,996	0,989	0,973
17						0,996	0,998	0,995	0,986
18						0,999	0,999	0,998	0,993
19								0,999	0,997
20									0,998

Таблица 8

Значения t_α из выражения $\alpha = 2 \int_0^{t_\alpha} S(t, k) dt$

$k \backslash \alpha$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,510	1,000	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	636,6
2	0,142	0,445	0,816	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,60
3	0,137	0,424	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,94
4	0,134	0,414	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,408	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,404	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,402	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,399	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,398	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,397	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,396	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,395	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,394	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,393	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,393	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,392	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,392	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,392	0,688	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,391	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,391	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	0,127	0,390	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,495	2,787	3,725
30	0,127	0,389	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,388	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,386	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,386	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,385	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Значения коэффициента q для построения
 доверительного интервала $(1-q)\sigma_x^* < \sigma_x < (1+q)\sigma_x^*$

$k \backslash \alpha$	0,80	0,90	0,95	0,99
2	1,125	2,083	3,400	8,500
3	0,730	1,270	1,938	4,200
4	0,563	0,941	1,382	2,700
5	0,475	0,765	1,100	2,000
6	0,416	0,652	0,921	1,650
7	0,380	0,576	0,800	1,393
8	0,356	0,516	0,713	1,225
9	0,329	0,476	0,650	1,094
10	0,304	0,442	0,596	0,920
12	0,276	0,388	0,518	0,840
14	0,252	0,357	0,468	0,740
16	0,236	0,325	0,422	0,671
18	0,222	0,297	0,390	0,600
20	0,210	0,282	0,370	0,567
25	0,187	0,247	0,317	0,485
30	0,172	0,226	0,276	0,425
35	0,156	0,207	0,256	0,400
40	0,146	0,193	0,242	0,375
45	0,139	0,184	0,228	0,350
50	0,133	0,174	0,212	0,331
60	0,132	0,155	0,193	0,283
70	0,112	0,144	0,180	0,250
80	0,103	0,138	0,167	0,236
90	0,096	0,131	0,151	0,230
100	0,092	0,125	0,146	0,200

Таблица 10

Значения множителей z_1 и z_2 для построения доверительного интервала $z_1\sigma_x^* < \sigma_x < z_2\sigma_x^*$

k	$\alpha = 0,90$		$\alpha = 0,95$		$\alpha = 0,98$		$\alpha = 0,99$	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
1	0,510	15,95	0,446	31,91	0,388	79,79	0,356	159,6
2	0,578	4,42	0,521	6,28	0,466	9,97	0,434	14,12
3	0,620	2,92	0,566	3,73	0,514	5,11	0,483	6,47
4	0,649	2,37	0,599	2,87	0,549	3,67	0,519	4,40
5	0,672	2,09	0,624	2,45	0,576	3,00	0,546	3,48
6	0,690	1,92	0,644	2,20	0,597	2,62	0,569	2,98
7	0,705	1,80	0,661	2,04	0,616	2,38	0,588	2,66
8	0,718	1,71	0,675	1,92	0,631	2,20	0,604	2,44
9	0,729	1,65	0,688	1,83	0,645	2,08	0,618	2,28
10	0,739	1,59	0,699	1,75	0,656	1,98	0,630	2,15
11	0,748	1,55	0,708	1,70	0,667	1,90	0,641	2,06
12	0,755	1,52	0,717	1,65	0,677	1,83	0,651	1,98
13	0,762	1,49	0,725	1,61	0,685	1,78	0,660	1,91
14	0,769	1,46	0,732	1,58	0,693	1,73	0,669	1,85
15	0,775	1,44	0,739	1,55	0,700	1,69	0,676	1,81
16	0,780	1,42	0,745	1,52	0,707	1,66	0,683	1,76
17	0,785	1,40	0,750	1,50	0,713	1,63	0,690	1,73
18	0,790	1,38	0,756	1,48	0,719	1,60	0,696	1,70
19	0,794	1,37	0,760	1,46	0,725	1,58	0,702	1,67
20	0,798	1,36	0,765	1,44	0,730	1,56	0,707	1,64
21	0,802	1,35	0,769	1,43	0,734	1,54	0,712	1,62
22	0,805	1,34	0,773	1,42	0,739	1,52	0,717	1,60
23	0,809	1,33	0,777	1,40	0,743	1,50	0,722	1,58
24	0,812	1,32	0,781	1,39	0,747	1,49	0,726	1,56
25	0,815	1,31	0,784	1,38	0,751	1,47	0,730	1,54
30	0,828	1,27	0,799	1,34	0,768	1,42	0,748	1,48
40	0,847	1,23	0,821	1,28	0,792	1,34	0,774	1,39
50	0,861	1,20	0,837	1,24	0,810	1,30	0,793	1,34
100	0,897	1,13	0,879	1,16	0,858	1,19	0,845	1,22

Таблица 11

Значения вероятностей $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2)$

$\chi_\alpha^2 \backslash k$	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18
1	0,910	0,963	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000
2	0,736	0,849	0,920	0,960	0,981	0,992	0,996	0,999	1,000	1,000
3	0,558	0,700	0,809	0,885	0,934	0,964	0,981	0,996	0,999	1,000
4	0,406	0,549	0,677	0,780	0,857	0,911	0,947	0,983	0,998	0,999
5	0,287	0,416	0,544	0,660	0,758	0,834	0,891	0,958	0,992	0,999
6	0,199	0,306	0,424	0,540	0,647	0,740	0,815	0,916	0,980	0,996
7	0,136	0,220	0,321	0,429	0,537	0,637	0,725	0,858	0,958	0,990
8	0,092	0,156	0,238	0,333	0,434	0,534	0,629	0,785	0,924	0,979
9	0,061	0,109	0,174	0,253	0,342	0,437	0,532	0,703	0,878	0,960
10	0,040	0,075	0,125	0,189	0,265	0,350	0,440	0,616	0,820	0,932
11	0,027	0,051	0,088	0,139	0,202	0,276	0,358	0,529	0,753	0,894
12	0,017	0,035	0,062	0,101	0,151	0,213	0,285	0,444	0,679	0,847
13	0,011	0,023	0,043	0,072	0,112	0,163	0,224	0,369	0,602	0,792
14	0,007	0,016	0,030	0,051	0,082	0,122	0,173	0,301	0,526	0,662
15	0,005	0,010	0,020	0,036	0,059	0,091	0,132	0,241	0,451	0,592
16	0,003	0,007	0,014	0,025	0,042	0,067	0,100	0,191	0,382	0,523
17	0,002	0,004	0,010	0,017	0,030	0,049	0,074	0,150	0,319	0,456
18	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,035	0,055	0,116	0,263	0,392
19	0,001	0,002	0,004	0,008	0,015	0,025	0,040	0,088	0,214	0,333
20	0,000	0,001	0,003	0,006	0,010	0,018	0,029	0,067	0,172	0,279
21	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007	0,013	0,021	0,050	0,137	0,232
22	0,000	0,000	0,001	0,002	0,005	0,009	0,015	0,038	0,108	0,191
23	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,011	0,028	0,084	0,155
24	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,020	0,065	0,125
25	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,015	0,050	0,100
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,012	0,037

Таблица 12

Значения функции $L(q, k)$

$k \backslash q$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
1	0,097	0,193	0,289	0,379	0,458	0,520	0,556	0,579	0,599	0,617
2	0,147	0,290	0,423	0,538	0,623	0,675	0,707	0,734	0,759	0,779
3	0,184	0,359	0,515	0,636	0,714	0,759	0,792	0,819	0,842	0,861
4	0,214	0,414	0,583	0,703	0,774	0,815	0,847	0,872	0,893	0,910
5	0,241	0,461	0,637	0,752	0,816	0,856	0,885	0,908	0,926	0,940
6	0,264	0,501	0,681	0,791	0,849	0,886	0,913	0,933	0,948	0,959
7	0,286	0,536	0,717	0,821	0,874	0,908	0,932	0,950	0,963	0,972
8	0,305	0,567	0,748	0,845	0,895	0,926	0,948	0,963	0,974	0,981
9	0,323	0,595	0,774	0,865	0,911	0,940	0,960	0,972	0,981	0,987
10	0,340	0,620	0,797	0,882	0,925	0,951	0,968	0,979	0,986	0,991
12	0,371	0,664	0,833	0,909	0,946	0,968	0,980	0,988	0,993	0,996
14	0,399	0,701	0,862	0,929	0,960	0,978	0,988	0,993	0,996	0,998
16	0,425	0,733	0,885	0,944	0,971	0,985	0,992	0,996	0,998	0,999
18	0,448	0,760	0,903	0,955	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999	0,999
20	0,470	0,784	0,918	0,964	0,984	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000
25	0,518	0,832	0,944	0,979	0,992	0,997	0,999	1,000	1,000	
30	0,559	0,867	0,962	0,988	0,996	0,999	1,000			
35	0,597	0,893	0,969	0,990	0,997	0,999				
40	0,628	0,913	0,978	0,994	0,999	1,000				
45	0,657	0,929	0,984	0,996	0,999					
50	0,682	0,942	0,988	0,998	0,999					
60	0,726	0,960	0,993	0,999	1,000					
70	0,762	0,972	0,996	1,000						
80	0,792	0,980	0,998							
90	0,818	0,986	0,999							
100	0,840	0,990	0,999							
150	0,914	0,998	1,000							
200	0,951	1,000								
250	0,972									
500	0,998									
1000	1,000									

Критические значения $\chi^2_\alpha(k, q)$

$k \backslash \alpha$	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99
1	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635
2	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210
3	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345
4	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277
5	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086
6	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812
7	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475
8	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090
9	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666
10	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209
11	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725
12	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217
13	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688
14	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141
15	19,311	22,362	24,996	27,488	30,578
16	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000
17	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409
18	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805
19	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191
20	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566
22	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289
24	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980
26	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642
28	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278
30	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892
35	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342
40	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691
45	52,729	57,505	61,656	65,410	69,957
50	58,164	63,167	67,505	71,420	76,154
100	111,67	118,50	124,34	129,56	135,81

Таблица 14

Критические значения f_α для распределения Фишера

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
При $p = 0,05$										
1	161,4	199,5	215,6	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,84	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,99	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,00	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,21	2,13	2,08	2,04
60	4,00	3,15	2,74	2,52	2,37	2,23	2,17	2,10	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,12	2,03	1,99	1,94
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,10	2,00	1,96	1,90
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,97	1,91	1,87
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83

Продолжение табл.14

$k_2 \backslash k_1$	12	15	20	24	30	40	50	100	200	∞
1	243,9	245,9	248,0	249,0	250,1	251,1	252,0	253,2	253,8	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50
3	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,71	5,67	5,65	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,40	4,38	4,37
6	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,28	3,25	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,97	2,95	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	2,91	2,84	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,57	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,46	2,43	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,41	2,37	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,24	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,25	2,20	2,17	2,13
15	2,47	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,13	2,10	2,07
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,94	1,89	1,84
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,70	1,66	1,62
40	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,60	1,54	1,51
50	1,96	1,88	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,54	1,49	1,45
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,45	1,39
100	1,86	1,78	1,69	1,66	1,59	1,54	1,50	1,42	1,36	1,26
150	1,81	1,74	1,64	1,61	1,54	1,48	1,44	1,34	1,28	1,18
200	1,79	1,70	1,61	1,56	1,49	1,43	1,39	1,27	1,21	1,14
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,21	1,15	1,00

Критические значения f_α для распределения Фишера

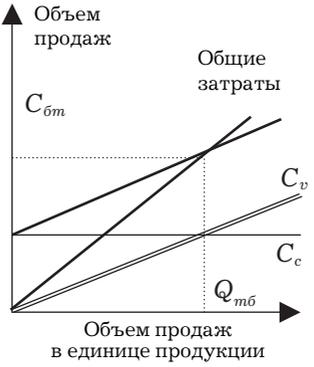
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
При $p = 0,01$										
1	4052	4999	5403	5625	5754	5859	5928	5981	6022	6056
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,27	10,16	10,05
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	3,96	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,93
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,04	2,89	2,80	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,85	2,72	2,62	2,53
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,78	2,64	2,52	2,44
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,74	2,60	2,47	2,39
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

$k_2 \backslash k_1$	12	15	20	24	30	40	50	100	200	∞
1	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6200	63	63	6366
2	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	27,05	26,87	26,69	26,60	26,51	26,41	26,36	26,24	26,18	26,12
4	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,74	13,70	13,60	13,52	13,46
5	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,25	9,16	9,08	9,02
6	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,10	7,01	6,93	6,88
7	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,87	5,76	5,69	5,65
8	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	4,98	4,91	4,86
9	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,44	4,37	4,31
10	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,16	4,12	4,04	3,97	3,91
11	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,82	3,73	3,66	3,60
12	4,15	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,58	3,50	3,42	3,36
13	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,42	3,38	3,30	3,23	3,17
14	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,23	3,15	3,07	3,00
15	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,09	3,01	2,93	2,87
20	3,09	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,56	2,48	2,42
30	2,70	2,70	2,62	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,09	2,01
40	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,97	1,88	1,80
50	2,58	2,43	2,28	2,21	2,12	2,03	1,98	1,89	1,78	1,68
60	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,89	1,77	1,68	1,60
100	2,39	2,24	2,11	2,01	1,92	1,85	1,78	1,69	1,61	1,39
150	2,28	2,13	2,00	1,92	1,83	1,76	1,68	1,60	1,38	1,27
200	2,22	2,07	1,94	1,84	1,76	1,67	1,52	1,39	1,26	1,21
∞	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,41	1,28	1,19	1,00

Приложение 2

СИСТЕМА ОСНОВНЫХ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
1	Показатели ликвидности		
1.1	Коэффициент текущей ликвидности	$K_{тл} = \frac{C_{ок}}{C_{ко}}$	$C_{ок}$ — оборотный капитал; $C_{ко}$ — стоимость краткосрочных обязательств (КО)
1.2	Коэффициент быстрой ликвидности	$K_{бл} = \frac{(C_{ок} - C_{тма})}{C_{ко}}$	$C_{тма}$ — стоимость товарно-материальных затрат; $K_{бл}$ отражает способность предприятия платить по КО из оборотного капитала
1.3	Коэффициент баланса товарно-материальных запасов (ТМЗ)	$K_{бтмз} = \frac{C_{тмз}}{(C_{ок} - C_{ко})}$	$K_{бтмз}$ характеризует способность предприятия платить по КО в зависимости от объема товарно-материальных запасов (ТМЗ)
1.4	Коэффициент покрытия краткосрочных обязательств товарно-материальными запасами	$K_{пко} = \frac{C_{ко}}{C_{тма}}$	$K_{пко}$ характеризует превышение КО над ТМЗ

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
2	Показатели (характеристики) финансовой структуры		
2.1	Коэффициент общей платежеспособности	$K_{onc} = \frac{C_{зк}}{C_{ан}}$	$C_{зк}$ — сумма задолженности по кредитам; $C_{ан}$ — стоимость активов предприятия
2.2	Коэффициент текущей платежеспособности	$K_{mn} = \frac{C_{кю}}{C_{ан}}$	K_{mn} — показывает соотношение между задолженностью по КЮ и активами предприятия
2.3	Коэффициент общей кредитоспособности	$K_{ок} = \frac{C_{зк}}{C_{ан} - C_{зк} - C_{на}}$	$C_{на}$ — стоимость нематериальных активов (торговая марка, патент, репутация)
2.4	Показатели безубыточности	 <p>График зависимости объема продаж от объема продаж в единице продукции. Показаны линии для общих затрат ($C_{бт}$), переменных затрат (C_v) и постоянных затрат (C_c). Точка безубыточности ($Q_{тб}$) определяется пересечением линии общих затрат и линии переменных затрат.</p>	Показатели связаны с точкой безубыточности, т. е. объемом продаж, соответствующим безубыточной деятельности предприятия

Продолжение таблицы

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
а) выпуск одного вида продукции			
2.4.1	Объем продаж в единицах продукции, соответствующий точке безубыточности	$Q_{mб} = \frac{C_c}{P_1 - C_{v1}}$	P_1 — цена единицы продукции; C_{v1} — переменные затраты на единицу продукции; C_v — переменные затраты; C_c — постоянные затраты
2.4.2	Объем продаж в денежных единицах, соответствующий точке безубыточности	$C_{mб} = Q_{mб} \cdot P_1 =$ $= \frac{C_c}{P_1 - C_{v1}} \cdot P_1$	
б) выпуск n видов продукции:			
2.4.3	Объем продаж в единицах продукции	$Q_{mб} = \sum_{i=1}^n Q_{mбi}$	i — номер вида продукции
2.4.4	Объем продаж в стоимостном выражении	$C_{mб} = \sum C_{mбi}$	
3.	Показатели эффективности		
3.1.	Коэффициент оборачиваемости ликвидных активов	$K_{ола} = \frac{C_{чп}}{C_{да} + C_{ра}}$	$C_{чп}$ — объем продаж за вычетом торговых скидок и возвратов по рекламациям (чистые продажи); $C_{дс}$ — объем имеющихся денежных средств; $C_{ра}$ — стоимость имеющихся рыночных акций

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
3.2.	Коэффициент оборачиваемости товарно-материальных запасов	$K_{от.мз} = \frac{C_{чп}}{C_{т.мз}}$	
3.3	Коэффициент оборачиваемости активов	$K_{oa} = \frac{C_{чп}}{C_{ан}}$	
4.	Показатели рентабельности (прибыльности)		
4.1	Коэффициент прибыльности	$K_{np} = \frac{\Pi_{нд}}{C_{чп}}$ $\Pi_{нд} = C_{чп} - C_{сс} - C_{ам} - C_{туур}$	$\Pi_{нд}$ — прибыль от производственной деятельности; $C_{сс}$ — себестоимость продукции; $C_{ам}$ — стоимость амортизации; $C_{туур}$ — стоимость торгово-управленческих расходов
4.2	Коэффициент эксплуатационных затрат	$K_{зз} = \frac{C_{чп} - \Pi_{нд}}{C_{чп}}$	Издержки на единицу продаж
4.3	Коэффициент рентабельности	$K_p = \frac{\Pi_ч}{C_{чп}}$	$\Pi_ч$ — чистая прибыль; $C_{чп}$ — чистая прибыль на единицу продаж
4.4	Показатель покрытия процента	$K_{nn} = \frac{\Pi_{нд}}{I_{нс} C_{он} I_{об}}$	$I_{нс}$ — процентная ставка по облигациям; $C_{он}$ — стоимость облигации нарицательная; $N_{об}$ — количество облигаций

Продолжение таблицы

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
4.5	Показатель покрытия дивидендов по привилегированным акциям	$K_{ндна} = \frac{П_ч}{I_{на} C_{нач} N_{на}}$	$I_{на}$ — процентная ставка по привилегированным акциям; $C_{нач}$ — нарицательная стоимость привилегированной акции; $N_{на}$ — количество привилегированных акций
4.6	Доход в расчете на обыкновенную акцию	$K_{доа} = \frac{П_ч - I_{оа} C_{оа} N}{N_{оа}}$	$N_{оа}$ — количество обыкновенных акций; $C_{оа}$ — стоимость обыкновенной акции; $I_{оа}$ — процентная ставка по обыкновенным акциям
4.7	Отношение курса акций к доходу	$K_{ка/\delta} = \frac{C_{ак}}{K_{доа}}$	$C_{ак}$ — курс акций; $K_{доа}$ — доход АО
4.8	Выплачиваемый дивиденд на единицу курсовой стоимости акций	$d_1 = \frac{d}{C_{ак}}$	d — дивиденд на обыкновенную акцию
5.	Показатели отдачи		
5.1	Коэффициент возвратности на капитал	$K_{вк} = \frac{П_ч}{C_{ан} - C_{зк}}$	$C_{зк}$ — сумма задолженности по кредитам; $C_{ан}$ — стоимость активов предприятия. Возврат средств на единицу капитала
5.2	Коэффициент возвратности на чистые активы	$K_{вча} = \frac{П_ч}{C_{ан} - C_{кк}}$	Возврат средств на единицу чистых активов

№ п/п	Наименование	Расчетная формула	Комментарии
6.	Показатели стоимости ценных бумаг предприятия		
6.1	Чистая балансовая стоимость облигации	$C_{\text{бо}} = \frac{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}}}{N_{\text{об}}}$	$N_{\text{об}}$ — количество облигаций
6.2	Чистая балансовая стоимость привилегированной акции	$C_{\text{бна}} = \frac{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}} - C_{\text{до}}}{N_{\text{на}}}$	
6.3	Чистая балансовая стоимость обыкновенных акций	$C_{\text{боа}} = \frac{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}} - C_{\text{до}} - C_{\text{нна}} N_{\text{на}}}{N_{\text{оа}}}$	$C_{\text{нна}}$ — нарицательная стоимость привилегированной акции
7.	Показатели капитализации		
7.1	Удельный вес облигаций	$d_{\text{o}} = \frac{C_{\text{он}} N_{\text{об}}}{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}}}$	$C_{\text{он}}$ — стоимость облигации нарицательная
7.2	Удельный вес привилегированных акций	$d_{\text{на}} = \frac{C_{\text{нна}} N_{\text{на}}}{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}}}$	$C_{\text{нна}}$ — стоимость привилегированной акции
7.3	Удельный вес обыкновенных акций	$d_{\text{оа}} = \frac{C_{\text{ноа}} N_{\text{оа}} + K_{\text{и}} + P_{\text{нкр}}}{C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}}}$ $d_{\text{оа}} = 1 - d_{\text{на}} - d_{\text{o}}$	$C_{\text{ноа}}$ — нарицательная стоимость обыкновенной акции; $K_{\text{и}}$ — избыточный капитал; $P_{\text{нкр}}$ — прибыль, полученная к распределению
7.4	Совокупная капитализация	$K_{\text{с}} = C_{\text{он}} N_{\text{об}} + C_{\text{нна}} N_{\text{на}} + C_{\text{ноа}} N_{\text{оа}} + P_{\text{нкр}} =$ $= C_{\text{ан}} - C_{\text{на}} - C_{\text{ко}}$	

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

“А”

Автокорреляция — наличие зависимости между последующими и предшествующими уровнями динамического ряда; корреляционная зависимость между последовательными значениями уровней временного ряда.

Автоматизация — применение машин, машинной техники и технологий с целью облегчения человеческого труда, вытеснения его ручных форм, повышения его производительности. Автоматизация производства призвана устранить физически тяжелый, монотонный труд, переложив его на плечи машин. Автоматизация управления направлена на использование компьютеров и других технических средств обработки и передачи информации в управлении производством, экономикой.

Агрегирование — преобразование модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений — агрегированную модель, дающую приближенное по сравнению с исходной описание изучаемого объекта или процесса.

Адаптация — способность целенаправленного приспособляющегося поведения системы в сложных средах, а также сам процесс такого приспособления.

Адаптивная структура — организационная структура, позволяющая гибко реагировать на изменения в окружающей среде и тем самым принципиально отличающаяся от механи-

ческой (или бюрократической) структуры. Она называется также органической структурой.

Адаптивность — закономерность, связанная с приспособлением системы к изменяющимся внешним и внутренним параметрам ее существования; изменение в программе маркетинга с целью приспособления фирмы к переменным условиям конъюнктуры рынка.

Адекватная модель — модель, для которой ряд возмущений ε_i будет удовлетворять основным предпосылкам регрессионного анализа.

Ажур — состояние бухгалтерского учета, когда все счетные записи делаются в день совершения хозяйственной операции, в более широком смысле — когда учетно-вычислительные работы выполняются в установленные сроки, и все операции регистрируются немедленно после их совершения.

Актив — 1) совокупность имущества и денежных средств, принадлежащих предприятию, фирме, компании (здания, сооружения, машины и оборудование, материальные запасы, банковские вклады, вложения в ценные бумаги, патенты, авторские права и др.), в которые вложены средства владельцев, хозяев. Активы принято делить на материальные (осязаемые) и нематериальные (неосязаемые); к последним относятся интеллектуальный продукт, патенты, долговые обязательства других предприятий, особые права на использование ресурсов; 2) актив баланса — часть бухгалтерского баланса предприятия, отражающая в денежном выражении материальные и нематериальные ценности, принадлежащие предприятию, их состав и размещение; 3) превышение доходов над расходами.

Активные счета — счета, предназначенные для учета хозяйственных средств по их составу и размещению.

Актuariй — специалист в области страховой математической статистики по технике страхования, занимающийся расчетом страховых взносов, премий и т. д.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} — есть произведение соответствующего минора M_i , умноженного на минус единицу в степени $(i + j)$; где i — номер строки матрицы, j — номер столбца матрицы.

Алгоритм — система правил, определяющая содержание и последовательность операций, переводящих исходные данные в конечный результат. Свойства алгоритма — детерминированность, результативность и массовость.

Альтернативная или конкурирующая гипотеза — гипотеза, которая является логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Анализ — важная функция управления, осуществляемая как на макроуровне (на уровне народного хозяйства данной страны или мирового хозяйства), так и на микроуровне (на уровне отдельного предприятия и его подразделений). В условиях рыночной экономики своевременное проведение квалификационного А. является обязательной предпосылкой выработки эффективных управленческих решений, неременным условием достижения успеха в данной сфере деятельности.

Любой экономический анализ представляет собой:

- расчленение изучаемого явления на отдельные элементы и нахождение (выбор) показателей (индикаторов), характеризующих состояние и динамику каждого элемента;
- сравнение численных значений выбранных показателей со значениями базового периода (с другими периодами), с показателями других аналогичных объектов (с развитием других сторон, других предприятий, товаров и др.); с нормативным (эталонным) уровнем;
- формулирование выводов, служащих основой для принятия эффективных решений.

Анализ баланса — аналитическая оценка позиций баланса и счета прибылей и убытков с целью определения кредитоспособности, финансового положения и надежности компании.

Анализ затрат и результатов — использование балансовых таблиц, в которых зафиксированы и подытожены затраты на производство основных видов экономического продукта и результатов в виде объема производства, выпуска этого продукта. Такой анализ позволяет выявить уровень общих, полных, затрат на производство продукта, установить взаимосвязи между разными отраслями и секторами экономики. Подобный анализ используется в качестве исследовательского инструмента, а также в прогнозных, предплановых обоснованиях, расчетах.

Анализ риска — направление научных исследований, быстро развивающихся по мере усложнения современных технических систем, включает анализ “древа ошибок”, событий, ошибок риска.

Анализ хозяйственной деятельности — одна из ветвей экономического анализа, связанная с изучением производственной, финансовой, торговой деятельности предприятий, фирм, домашних хозяйств. Такой анализ направлен на выявление величины изменения во времени экономических показателей, характеризующих производство, обращение, потребление продукции, товаров услуг, эффективность использования ресурсов, качество производимого продукта. В ходе анализа выявляются причины и возможные последствия наблюдаемых, изучаемых факторов.

Арендная плата — вид платежа за имущество, предоставленное на условиях аренды. В случае аренды отдельных объектов основных фондов включается в себестоимость продукции равными долями в течение срока действия договора аренды.

Ассортимент — состав, разновидность, набор видов продукции, товаров, услуг, изготавливаемых в производстве или находящихся в продаже. А. (номенклатура) подразделяется на групповой и развернутый, которые различаются по степени детализации.

“Б”

База данных — объективная форма представления и организации совокупности данных, систематизированных таким образом, чтобы эти данные могли быть найдены и обработаны с помощью электронных вычислительных машин; совокупность специальным образом организованных данных и связей между ними.

Базисная прибыль — ожидаемая прибыль отчетного года; используется для расчета базовой рентабельности при распределении прибыли аналитическим методом на планируемый год по объединениям, предприятиям, изготавливающим широкий ассортимент изделий, когда не известны количество и себестоимость по номенклатурным позициям.

Баланс — равновесие, система показателей, характеризующая состояние взаимосвязанных величин. Баланс составляется на определенную дату и представляет таблицу, состоящую из двух частей, например, актива и пассива. Показатели обеих частей баланса должны быть равны. Баланс составляется в рамках отдельного предприятия, отрасли, народного хозяйства.

“Белый шум” — простейший пример временного ряда, у которого математическое ожидание равно нулю, а ошибки ε_t некоррелированы. Возмущения (ошибки) ε_t в классической линейной регрессионной модели образуют “белый шум”, а в случае нормального распределения — *нормальный (гауссовский) белый шум*.

“В”

Вариационный ряд — групповая таблица, построенная по количественному признаку, сказуемое которой показывает число единиц в каждой группе.

Вариации размах — разность между максимальным и минимальным значением признака ряда распределения случайной величины.

Вектор — упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где x_i — i -я компонента вектора x .

Венчурные предприятия — предприятия малого бизнеса, занятые научными исследованиями, инженерными разработками, созданием и внедрением нововведений, в том числе по заказам крупных фирм и государственным субконтрактам. К ним примыкает широкий спектр предприятий, занятых маркетингом, инжинирингом, рекламой, оказывающих консультативные услуги, помогающих в финансировании (фирмы венчурного капитала).

Вероятностная (стохастическая или статистическая) зависимость — зависимость между двумя случайными величинами, причем каждому значению одной из них соответствует определенное (условное) распределение другой.

Вероятность $P(A)$ события A — численная мера степени объективной возможности появления этого события; отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу равновозможных исходов (классическое определение вероятности).

Вероятность условная — вероятность события при условии наступления в данном испытании другого события, обозначается следующим образом: $P(A/B)$.

Взвешенный метод наименьших квадратов — применяется для отыскания параметра b и представляет собой обобщенный метод наименьших квадратов для модели с гетероскедастичностью, когда ковариационная матрица возмущений есть диагональная матрица.

Временной (динамический) ряд, или ряд динамики — выборка наблюдений, в которой важны не только сами наблюдаемые значения случайных величин, но и порядок их следования друг за другом. Чаще всего упорядоченность обусловлена тем, что экспериментальные данные представляют собой серию наблюдений одной и той же случайной величины в последовательные моменты времени. В этом случае динамический ряд называется *временным рядом*. При этом предполагается, что тип распределения наблюдаемой случайной величины остается одним и тем же (например, нормальным), но параметры его меняются в зависимости от времени. В экономике под *временным рядом* подразумевается последовательность наблюдений некоторого признака в последовательные моменты времени. Отдельные наблюдения называются *уровнями ряда*.

Выборка из генеральной совокупности — совокупность результатов, полученная при непосредственном проведении испытаний; часть единиц генеральной совокупности, подлежащей непосредственному наблюдению. Число элементов выборки является конечным и называется объемом выборки.

Выборочный частный коэффициент корреляции — это отношение алгебраического дополнения A_{ij} , умноженного на минус единицу, к корню квадратному из произведения алгебраических дополнений элементов r_{ij} и r_{ji} матрицы выборочных коэффициентов корреляции.

“Г”

Генеральная совокупность — совокупность всех мыслимых результатов наблюдения, которые могут быть получены в

данных условиях. Различают конечные, содержащие конечное число элементов, и бесконечные, содержащие бесконечное число элементов, генеральные совокупности.

Генератор случайных чисел — специальная программа на ЭВМ, моделирующая псевдослучайные числа, имеющие вероятностное распределение на отрезке $[0,1]$.

Гибкая автоматизация — автоматизация процессов изготовления изделий быстро изменяющейся номенклатуры небольшими и средними партиями, для которых характерно объединение модулей на основе ЭВМ (оборудование с числовым программным управлением или ЧПУ, оснащенное гибкими роботами для манипулирования предметами труда и инструментом); использование оборудования для автоматической транспортировки и складского хранения, контроль качества с использованием ЭВМ, эффективное управление производством.

Гипотеза — ситуация, в которой проводится опыт, происходит или не происходит, о которой высказываются некоторые предположения, при которых опыт протекает уже более просто.

Гипотеза статистическая — различного рода предположения относительно характера или параметров распределения случайной переменной, которые можно проверить, опираясь на результаты наблюдений в случайной выборке.

Гетероскедастичность модели — свойство дисперсии остатков ε , когда для каждого значения фактора X_i остатки ε имеют различную дисперсию; приводит к смещенности оценок коэффициентов регрессии, “портит” многие результаты статистического анализа и, как правило, требует устранения; неравенство дисперсий возмущений (ошибок) регрессии: $\sum \varepsilon_j \neq \sigma^2 E_n$.

Гистограмма — график статистической плотности распределения случайной величины.

Гомоскедастичность модели — свойство постоянства дисперсий ошибок регрессии ε для каждого значения X_i ; равенство дисперсий возмущений (ошибок) регрессии: $\sum \varepsilon_j = \sigma^2 E_n$.

Градиент функции в точке M — это вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным данной функции в точке M . Указывает направления наискорейшего роста функции и максимальную скорость роста равную модулю градиента.

Грант — целевое льготное финансирование работ инновационного характера. Под термином “грант” для целей налогообложения понимаются средства, предоставляемые безвозмездно иностранными благотворительными организациями предприятиям и организациям в денежной или натуральной форме на проведение научно-исследовательских, опытно-конструкторских работ, обучение, лечение и другие цели с последующим отчетом об их использовании.

Группировка — расчленение, при котором группы образуются из элементов, качественно однородных в определенном отношении.

“Д”

Декомпозиция — процедура системного анализа, заключающаяся в разбиении целого на части с целью их детального изучения.

“Дерево целей” — структурированная, построенная по иерархическому принципу (распределенная по уровням, ранжированная) совокупность целей экономической системы, программы плана, в которой выделены генеральная цель (“вершина дерева”), подчиненные ей подцели первого, второго и последующего уровней (“ветви дерева”).

Дефиниция (от лат. definitio — определение) — краткое определение понятия, отражающее существенные признаки предмета или явления; толкование слова.

Диверсификация — разнообразие, разностороннее развитие; инвестирование денег в различные ценные бумаги или вклад финансов в различные производства с целью уменьшения среднего риска.

Дисконтирование — приведение экономических показателей разных лет к сопоставимому по времени виду с помощью коэффициентов дисконтирования, основанных на вычислении сложных процессов.

Дискретная случайная величина — множество возможных значений случайной величины, возможные значения которых конечны или счетны.

Дисперсия $D(X)$ случайной величины X — математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания. Дисперсия характеризует отклонение (разброс, рассеяние, вариацию) значений случайной величины относительно среднего значения.

Дисперсионный анализ — совокупность методов статистической обработки результатов наблюдения, зависящих от различных одновременно действующих качественных факторов. Предназначен для анализа существенности влияния данных факторов на результаты наблюдений. Выделяют несколько видов дисперсионного анализа: однофакторный, двухфакторный и многофакторный.

Доверительная вероятность — характеризует достоверность (надежность) определения неизвестного значения параметра с помощью оценки параметра.

Доверительный интервал — случайный интервал, который с некоторой вероятностью α накрывает истинное значение искомого параметра.

Дробная реплика — часть полного факторного эксперимента, в котором используется только часть всех возможных комбинаций управляемых факторов при планировании экспериментов.

“Ж”

Жизненный цикл товара — определенный период времени, в течение которого товар обладает жизнеспособностью на рынке и обеспечивает достижение целей продавца. От жизненного цикла товара непосредственно зависит уровень прибыли продавца (производителя) на каждой из его стадий: 1) внедрения товара на рынок; 2) роста объема продаж вследствие признания товаро-покупателями; 3) зрелости, характеризуемой максимальной прибылью; 4) насыщения рынка товаром; 5) спада объема продаж и прибыли. Для каждого товара характерен собственный жизненный цикл, продолжительностью от нескольких месяцев до нескольких лет.

“З”

Зависимая переменная — в регрессионной модели некоторая переменная Y , являющаяся функцией регрессии с точностью до случайного возмущения.

Задача — предписанная работа, совокупность работ или часть работы, которые должны быть выполнены заранее установленным способом в установленные сроки.

Задачи регрессионного анализа — установление формы зависимости между переменными, оценка функции регрессии, оценка неизвестных значений (прогноз значений) зависимой переменной.

Закон больших чисел — общий принцип, согласно которому, по формулировке академика А. Н. Колмогорова, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит (при некоторых весьма общих условиях) к результату, почти не зависящему от случая. Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Закон распределения случайной величины — всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

“И”

Идентификация временного ряда — построение для ряда остатков адекватной ARMA-модели, т. е. такой ARMA-модели, в которой остатки представляют собой “белый шум”, а все регрессоры значимы. Такое представление не единственное, например, один и тот же ряд может быть идентифицирован и с помощью AR-модели, и с помощью MA-модели. В этом случае выбирается наиболее простая модель.

Идентифицируемый структурный параметр — структурный параметр, который может быть однозначно оценен с помощью косвенного метода наименьших квадратов. Уравнение идентифицируемо, если идентифицируемы все входящие в него структурные параметры.

Изоморфизм — точное соответствие соотношения закономерностей подсистем и элементов одной системы свойствам подсистем и элементов другой системы.

Индекс — относительная величина, характеризующая изменение уровней сложных социально-экономических показателей во времени, в пространстве или по сравнению с планом;

показатель изменения уровня результативной величины под влиянием изменений индексируемой величины, т. е. той величины, изменение которой изучается в данном конкретном случае с помощью индекса.

Индекс базисный — получают путем сопоставления с уровнем какого-либо одного периода, принятого за базу сравнения.

Индекс Доу-Джонсона — обобщающий ежедневный показатель деловой активности и рыночной конъюнктуры, рассчитываемый фондовой биржей как математическое ожидание курсов акций и других ценных бумаг ведущих компаний.

Индекс рентабельности — отношение приведенных доходов к приведенным на эту же дату инновационным расходам.

Индекс сводный — отражает изменение по всей совокупности элементов сложного явления.

Индекс цепной — получают путем сопоставления текущих уровней с предшествующим, т. е. база сравнения непрерывно меняется.

Инжиниринг — сфера деятельности по проработке вопросов создания объектов промышленности, инфраструктуры и др., прежде всего в форме предоставления на коммерческой основе различных инженерно-консультативных услуг. К основным видам инжиниринга относятся услуги проектного, предпроектного, послепроектного характера, а также рекомендательные услуги по эксплуатации, управлению, реализации выпускаемой продукции.

Инновационное лаго — это период времени между появлением новшества и воплощением его в нововведение (инновацию).

Иностранные инвестиции — позволяют иностранным бизнесменам создавать предприятия на территории другой страны с правом полного хозяйствования. Направлены на создание в другой стране нового предприятия и оснащения его основным капиталом либо на выкуп контрольного пакета иностранной фирмы.

Инструкция — собрание правил, регламентирующих финансово-хозяйственную деятельность предприятий и организаций; нормативный акт, издаваемый руководителями центральных и местных органов в пределах их компетенции на основании и во исполнение законов, указов, постановлений и распоряжений Правительства и актов вышестоящих органов государственного управления; указания о порядке выполнения работ в той или иной области экономики, техники и др.

Интегральный эффект (чистый приведенный эффект) — один из важнейших показателей оценки эффективности инноваций. Определяется как разность между результатами и инновационными затратами за расчетный период, приведенный к определенному, обычно начальному, году.

Интервальная оценка параметра Θ — числовой интервал, который с заданной вероятностью α накрывает неизвестное значение параметра Θ . Такой интервал называется *доверительным*, а вероятность α — *доверительной вероятностью* или *надежностью оценки*.

Интерполяция — нахождение по имеющимся данным за определенный период времени некоторых недостающих значений признака внутри этого периода.

Информация — факты, данные, наблюдения, расширяющие знания о предмете; сведения, которыми обмениваются люди, люди и технические устройства, технические устройства между собой, обмен сигналами в животном и растительном мире, передача признаков от клетки к клетке, от организма к организму.

Испытание — наблюдение того или иного явления (события) при осуществлении определенного комплекса условий (наблюдение того же явления в других условиях считается другим испытанием).

Исследование операций — научная дисциплина, объединяющая разнообразные задачи, связанные с проблемой принятия решений, и использующая общую методологию анализа этих задач; применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности.

“К”

Категории (от греч. *kategoria* — высказывание; признак) — наиболее общие и фундаментальные понятия, отражающие существенные, всеобщие свойства и отношения явлений действительности и познания.

Квалиметрия — наука о способах измерения и количественной оценки качества продукции и услуг.

Квантиль уровня q (или q -квантиль) — такое значение x_q случайной величины, при котором функция ее распределения принимает значение, равное q .

Квартиль — значения признака, которые делят ранжированный ряд на четыре равные по численности части.

Классификация — научный метод, заключающийся в дифференциации всего множества объектов и последующее их объединение в определенные группы на основе какого-либо признака.

Классическая нормальная линейная модель множественной регрессии — модель, в которой зависимая переменная возмущения и объясняющие переменные удовлетворяют пред-

посылкам регрессионного анализа и предпосылке о невырожденности матрицы значений объясняющих переменных.

Ковариация (или корреляционный момент) K_{xy} случайных величин X и Y — математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий, т. е.:

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Кодирование — замена текстовых данных в документе цифровыми обозначениями; шифровка банковской информации для защиты от мошенничества.

Компьютеризация — процесс использования средств электронной вычислительной и микроэлектронной техники в различных сферах жизнедеятельности общества.

Контролинг — инструмент планирования и учета анализа состояния дел для принятия решений на базе компьютеризированной системы сбора и обработки информации на предприятии, фирме.

Концепция — определенный способ понимания, трактовки какого-либо предмета, явления, процесса, основная точка зрения на них, руководящая идея для их систематического освещения. Под К. также понимают ведущий замысел, конструктивный принцип различных видов деятельности.

Коррелограмма — это график выборочной автокорреляционной функции.

Корреляции теория — математико-статистическая теория, изучающая зависимости вариации признака от окружающих условий.

Корреляционная статистическая зависимость — соотношение, соответствие, зависимость между двумя случайными переменными, при этом каждому значению одной случайной

переменной соответствует определенное условное математическое ожидание (среднее значение) другой.

Корреляционный анализ — раздел математической статистики, изучающий взаимную зависимость случайных величин.

Косвенный метод наименьших квадратов — применяется, если разрешить систему уравнений относительно Y так, чтобы в правых частях уравнений оставались только экзогенные переменные X , после чего к полученным уравнениям применяется обычный метод наименьших квадратов для получения оценки некоторых выражений исходных параметров, из которых затем можно найти оценки и самих параметров.

Коэффициент авторегрессии — представляет собой коэффициент корреляции между соседними возмущениями или коэффициент автокорреляции.

Коэффициент вариации — показатель относительной колеблемости, отношение среднего квадратического отклонения случайной величины к ее математическому ожиданию.

Коэффициент детерминации — одна из наиболее эффективных оценок адекватности регрессионной модели, мера качества уравнения регрессии (или, как говорят, мера качества подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям y_i), характеристика прогностической силы анализируемой регрессионной модели. Коэффициент детерминации характеризует долю вариации зависимой переменной, обусловленной регрессией или изменчивостью объясняющих переменных; чем ближе он к единице, тем лучше регрессия описывает зависимость между объясняющими и зависимой переменными.

Коэффициент корреляции — показатель тесноты связи, отношение корреляционного момента двух случайных величин к произведению их средних квадратических отклонений.

Коэффициент корреляции двух случайных величин — величина, рассчитываемая по наблюдениям над двумя случайными величинами и характеризующая степень их связи; отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент частной эластичности — предел отношения относительного частного приращения функции к относительному приращению этой переменной.

“Л”

Лаг — смещение во времени изменения одного показателя по сравнению с изменением другого.

Лаг временной — направление и продолжительность отставания уровней одного из взаимосвязанных временных рядов от уровней другого ряда.

Лаговые переменные — переменные, взятые в предыдущий момент времени и выступающие в качестве эндогенных и экзогенных переменных.

Линейное программирование — раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации в планировании и управлении.

Линии регрессии (или кривые регрессии) — графики функций регрессии или просто регрессии Y по X и X по Y .

Линии регрессии нормально распределенных случайных величин — прямые линии, т. е. нормальные регрессии случайных величин всегда линейны.

Логарифмически нормальное распределение — его имеют такие непрерывные случайные величины, логарифм которых подчинен нормальному закону распределения.

Логистика — наука о планировании, организации, управлении, контроле и регулировании движения материальных и информационных потоков в пространстве и во времени от их первичного состояния до конечного потребителя.

“М”

Маржинальные (предельные) величины — величины, соответствующие экстремальному (максимальному или минимальному) своему значению (например, MR — предельный доход при прогрессивной системе налогообложения).

Математика — наука, изучающая величины, количественные отношения и пространственные формы; наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математическое ожидание или среднее значение $M[X]$ случайной величины X — значение случайной величины, около которого при достаточно большом количестве испытаний группируется среднее арифметическое ее реализовавшихся значений.

Математическая статистика — прикладная наука, занимающаяся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений (испытаний) с целью изучения закономерностей массовых случайных явлений.

Матрица — прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Различают следующие виды матриц: вектор-столбец, вектор-строка, квадратная диагональная, нулевая, единичная, обратная и транспонированная.

Медиана — среднее значение ранжированного ряда распределения. Положение медианы определяется ее номером $N_{Me} = \frac{n+1}{2}$, где n — число единиц совокупности.

Метод — способ теоретического исследования или практического осуществления чего-нибудь; способ действовать, поступать каким-нибудь образом, прием.

Метод испытания — установленные технические правила проведения испытаний.

Метод наименьших квадратов — метод обработки статистических наблюдений, основанный на гипотезе нормальности ошибок измерения; применяется в корреляционном и регрессионном анализе; неизвестные параметры b_0 и b_1 выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических значений y_i от значений \hat{y}_i , найденных по уравнению регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1x$, была минимальной:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1x_i - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Метод скользящих средних — метод выравнивания (сглаживания) временного ряда, т. е. выделения неслучайной составляющей. Основан на переходе от начальных значений членов ряда к их средним значениям на интервале времени, длина которого определена заранее. При этом сам выбранный интервал времени “скользит” вдоль ряда.

Метод уменьшения мультиколлинеарности — из двух объясняющих переменных, имеющих высокий коэффициент корреляции (больше 0,8), одну переменную исключают из рассмотрения. При этом, какую переменную оставить, а какую удалить из анализа, решают в первую очередь на основании экономических соображений. Если с экономической точки зрения ни одной из переменных нельзя отдать предпочтение, то оставляют ту из двух переменных, которая имеет больший коэффициент

корреляции с зависимой переменной. Другой метод устранения или уменьшения мультиколлинеарности заключается в переходе от несмещенных оценок, определенных по методу наименьших квадратов, к смещенным оценкам, обладающим, однако, меньшим рассеянием относительно оцениваемого параметра.

Методика — 1) совокупность методов, приемов практического выполнения чего-либо, например, методика научного исследования; 2) учение о методах преподавания той или иной науки.

Методология — учение о научном методе познания; принципы и способы организации теоретической и практической деятельности; совокупность методов, применяемых в какой-нибудь науке.

Минор элемента a_{ij} — определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Многомерная (n -мерная) случайная величина (или система случайных величин, n -мерный вектор) — упорядоченный набор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ случайных величин.

Многоугольник или полигон распределения вероятностей — ломаная, получаемая соединением точек, которые соответствуют значениям случайной величины (ось абсцисс) и их вероятностям (ось ординат).

Мода — значение случайной величины, которому соответствует максимум функции вероятности или плотности распределения; наиболее часто встречающееся значение признака в ряде распределения.

Моделирование имитационное — воспроизведение с помощью ЭВМ поведения исследуемой системы и ее описание по результатам процесса имитации.

Модель — преднамеренно упрощенная схема (имитация) некоторой части реальной действительности, с помощью которой исследователь получает рекомендации к решению реальных проблем; система элементов, воспроизводящих определенные стороны, связи, функции объекта исследования.

Модель математическая — модель, при описании которой используется язык математики; формализованное описание с помощью математического аппарата взаимосвязей между элементами изучаемой системы.

Модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева, модель “затраты-выпуск”) — объем конечной продукции каждой отрасли (Y) равен произведению разности единичной матрицы и матрицы прямых материальных затрат ($E - A$) на матрицу валовой продукции каждой отрасли (X): $Y = (E - A)X$.

Мониторинг — средства и методы контроля и наблюдения за ходом каких-либо процессов или коммерческой деятельности предприятия, осуществляемое предпринимателем с целью стабилизации параметров производства.

Мощность (или функция мощности) критерия — вероятность не допустить ошибку второго рода, т. е. отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна.

Мультиколлинеарность — высокая взаимная коррелированность объясняющих переменных. Мультиколлинеарность может проявляться в функциональной (явной) и стохастической (скрытой) формах.

Мультипликативность — отдельные эффекты системы обладают свойством умножения, а не сложения.

“Н”

Наблюдение — общенаучный метод исследования, который предполагает целенаправленную систематическую визуальную фиксацию исследователем различных явлений. Наблюдение тесно связано с демонстрацией как методом обучения в вузе.

Надежность — свойство технического объекта (прибора, устройства, машины), заключающееся в его способности выполнять заданные функции, сохраняя свои основные характеристики (при определенных условиях эксплуатации) в установленных пределах. Надежность означает безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость.

Неаддитивность — появление нового качества системы, возникающее в результате интеграции отдельных элементов или подсистем в единое целое.

Неидентифицируемые параметры — существует бесконечное множество их возможных значений, приводящих к одной и той же приведенной форме.

Неидентифицируемый структурный параметр — структурный параметр, значение которого невозможно получить, даже зная точные значения параметров приведенной формы.

Неидентифицируемые уравнения — уравнения, содержащие неидентифицируемые параметры.

Нелинейные регрессионные модели — производственные функции (зависимости между объемом производственной продукции и основными факторами производства — трудом, капиталом и т. п.), функции спроса (зависимость между спросом на товары или услуги и их ценами или доходом) и другие.

Непрерывная случайная величина — случайная величина, функция распределения которой непрерывна в любой точ-

ке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек; множество возможных значений случайной величины бесконечно или несчетно.

Несмещенная оценка $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ — оценка $\tilde{\Theta}$ параметра Θ при условии, что ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т. е. $M(\tilde{\Theta}_n) = \Theta$.

Нормально распределенные случайные величины — случайные величины, которые некоррелированы и независимы.

“О”

Обобщенная регрессионная модель — модель, в которой ковариации и дисперсии объясняющих переменных могут быть произвольными.

Обратная матрица — матрица, умноженная на исходную матрицу, в результате дающая единичную.

Объект изучения статистики — общество во всем многообразии его форм и проявлений. Но общество, протекающие в нем процессы и закономерности развития изучают и другие общественные науки: экономическая теория (политическая экономия), экономика промышленности, сельского хозяйства, социология и др. При этом каждая из этих наук находит в этом объекте свой специфический аспект изучения — предмет познания.

Объясняемая и объясняющая переменные — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной — возникает, например, в случае, когда при каждом фиксированном значении неслучайной независимой переменной

соответствующие значения случайной переменной подвержены случайному разбросу за счет действия ряда неконтролируемых факторов. При этом зависимую переменную называют *функцией отклика, объясняемой, выходной, результирующей, эндогенной переменной, результативным признаком*, а независимую переменную — *объясняющей, входной, предсказывающей, предикторной, экзогенной переменной, фактором, регрессором, факторным признаком*.

Операция — совокупность целенаправленных действий, объединенных единым замыслом и направленных на достижение определенных целей.

Определитель (или детерминант) квадратной матрицы n -го порядка — число, обозначаемое $|A_n|$ и определяемое по специальным правилам в зависимости от порядка матрицы. Определитель квадратной матрицы n -го порядка может быть вычислен с помощью разложения по элементам строки или столбца согласно теореме Лапласа.

Оценка несмещенная — математическое ожидание оценки должно быть равно истинному значению искомого параметра.

Оценка $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ — всякая функция результатов наблюдений над случайной величиной X (иначе статистикой), с помощью которой судят о значениях параметра Θ .

Оценка эффективная — несмещенная оценка, имеющая минимальную дисперсию.

Оценка состоятельная — оценка сходится по вероятности с увеличением числа испытаний к оцениваемому параметру.

“П”

Парадигма (от греч. *paradeigma* — пример, образец) — 1) теория, способ действия, модель, образец решения исследо-

вательских задач в данный период (смена образовательной парадигмы — изменение, преобразование системы образования); 2) совокупность основных положений и принципов, лежащих в основе той или иной теории, определяющих конкретное научное исследование (знание), обладающих специфическим категориальным аппаратом и признанных на данном этапе.

Парето оптимальное решение — лучшим инвестиционным проектом является тот проект, для которого не существует другого проекта, не уступающего рассматриваемому проекту по всем показателям, а хотя бы по одному превосходящему его.

Планирование экспериментов — математическая теория экстремальных экспериментов, позволяющая выбирать оптимальную стратегию исследования при неполном знании процесса.

Плотность вероятности (плотность распределения или просто плотность) $f(x)$ непрерывной случайной величины X — производная ее функции распределения.

Плотность вероятности (плотность распределения или совместная плотность) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) — вторая смешанная частная производная ее функции распределения, т. е.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Показатель — обобщенный количественный параметр социально-экономических явлений и процессов в единстве с их качественными характеристиками.

Понятие — логически оформленная общая мысль о предметах или явлениях действительности, отображающая их общие и специфические признаки, связи и отношения.

Предикторная переменная — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Предмет статистики — размеры и количественные соотношения качественно определенных социально-экономических явлений, закономерности их связи и развития в конкретных условиях места и времени. Свой предмет статистика изучает методом обобщающих показателей.

Предсказывающая переменная — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Проблема (от греч. *problema* — задача) — сложный теоретический или практический вопрос, требующий изучения, разрешения; в науке — противоречивая ситуация, выступающая в виде противоположных позиций в объяснении какого-либо явления, объектов, процессов и требующая адекватной теории для ее разрешения.

Проблема спецификации модели включает два типа задач: выбор структуры уравнения модели, определение набора объясняющих переменных.

Проверить значимость уравнения регрессии — значит установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания зависимой переменной. Проверка значимости уравнения регрессии производится на основе дисперсионного анализа. В математической статистике дисперсионный анализ рассмотрен как самостоятельный инструмент (метод) статистического анализа. В данном случае он применяется как вспомогательное средство для изучения качества регрессионной модели.

Программа (от греч. programma — объявление, распоряжение, указ) — 1) план деятельности, работ; 2) изложение содержания и целей деятельности политической партии, организации или отдельного деятеля; 3) краткое изложение содержания учебного предмета; 4) упорядоченная последовательность действий для ЭВМ, реализующая алгоритм решения некоторой задачи.

Пространственная выборка — набор показателей экономических переменных, полученных в данный момент времени; серия из n независимых наблюдений $(p + 1)$ -мерной случайной величины $(x_1 \dots x_p; Y)$.

Процедура сглаживания экспериментальных данных — состоит из двух этапов: определяется параметрическое семейство, к которому принадлежит искомая функция $M_x(Y)$ (рассматриваемая как функция от значений объясняющих переменных X). Это может быть множество линейных функций, показательных функций и т. д.; находятся оценки параметров этой функции с помощью одного из методов математической статистики.

“р”

Распределение χ^2 (хи-квадрат) с k степенями свободы — распределение суммы квадратов k независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону.

Регрессии уравнение — уравнение линии, вокруг которой группируются точки корреляционного поля, указывающей основное направление и тенденцию связи.

Регрессионный анализ — раздел математической статистики, изучающий характер связи между случайными переменными; совокупность статистических методов обработки результатов экспериментов, позволяющих в условиях стохастической зависимости выходной переменной от входных параметров определить данную зависимость.

Регрессия — функция, оценивающая характер связи между случайными и переменными величинами.

Реинжиниринг — эффективное управление в теории менеджмента, заключающееся во внедрении инженерного проектирования в сфере бизнеса.

Репрезентативность (представительность) выборки — достаточно полное отражение свойств генеральной совокупности. Должна удовлетворять следующим требованиям:

- элементы генеральной совокупности выбираются случайным образом;
- независимость результатов испытаний в выборке;
- определенный (правильный) подбор объема выборки.

Регрессор — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Результирующая переменная или результативный признак — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Риск — выражается вероятностью получения таких неблагоприятных результатов, как потеря прибыли и возникновение убытков; вероятность возникновения убытков или недополучения доходов по сравнению с прогнозируемым вариантом; возможная опасность потерь.

Робастная оценка — оценка, которая в наихудшем случае имеет наименьшую дисперсию:

$$\max_{f_x} D_{f_x} \hat{\Theta} = \min_{\hat{\Theta}}$$

Робастность — свойство статистической оценки не сильно реагировать на возможные отклонения от рассматриваемой модели.

Ряд динамики — числовые значения статистического показателя, представленные во временной последовательности; ряд, расположенный в хронологической последовательности значений статистических показателей.

“С”

Сверхидентифицируемый структурный параметр — структурный параметр, которому косвенный метод наименьших квадратов дает несколько различных его оценок. Можно также сказать, что это параметр, для которого существует несколько способов выражения через коэффициенты приведенной формы.

Сезонная компонента — отражает повторяемость экономических процессов в течение не очень длительного периода (года, иногда месяца, недели и т. д., например, объем продаж товаров или перевозок пассажиров в различные времена года).

Сертификат соответствия — документ, изданный в соответствии с правилами системы сертификации. Подтверждает полное соответствие продукции, процесса или услуги конкретному стандарту или другому нормативному документу.

Сертификация — деятельность по подтверждению соответствия продукции определенным стандартам и техническим условиям и выдача документов, подтверждающих это соответствие.

Сетевой график — полная графическая модель комплекса работ, направленных на выполнение единого задания, в которой (модели) определяется логическая взаимосвязь. Последовательность работ и взаимосвязь между ними. Элементами сетевого графика являются работа и событие.

Симплекс-метод — метод решения канонических задач линейного программирования, заключающийся в нахождении

исходного базисного решения с последующим улучшением до достижения оптимального решения.

Синергизм — однонаправленность действий, происходящих в определенной системе, результатом чего является повышение конечного эффекта; существенное увеличение эффективности компаний, образовавшихся после слияния мелких компаний.

Система — целенаправленный комплекс взаимосвязанных элементов любой природы и отношений между ними; взаимодействующий информационный комплекс, характеризующийся многими причинно-следственными взаимодействиями (К. Уотт); сущность, которая состоит из взаимосвязанных частей (Р. Акофф).

Система регрессионных уравнений и тождеств — особенностью этой системы является то, что каждое из уравнений системы, кроме своих “объясняющих” переменных, может включать объясняемые переменные из других уравнений. Таким образом, мы имеем не одну зависимую переменную, а набор зависимых (объясняемых) переменных, связанных уравнениями системы. Такую систему называют также *системой одновременных уравнений*. Подчеркиваем тот факт, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и независимые в других.

Система управления — 1) совокупность действий, необходимых для согласованной деятельности людей; 2) совокупность звеньев, осуществляющих управление, и связей между ними. Звенья С.У.: линейные, функциональные, линейно-функциональные, функционально-линейные. К числу показателей, по которым можно оценить С.У. или проектировать ее преобразование, относят следующие: состав и структура функций дифференциации управленческой деятельности, звенья С.У. и их распределение по ступеням иерархии, величины звеньев, распределение полномочий, информационное обеспечение управ-

ления, связи и их информационная нагрузка, квалификационные требования.

Системный анализ — совокупность приемов и методов, направленных на выдвижение альтернативных вариантов решения сложных экономических задач. Предполагает рассмотрение проблемы с наличия цели и самой системы, согласование целей подсистем с общей целью системы.

Системный подход — метод, рассматривающий связи и целостности сложных систем. Три этапа С.П.: 1) определяется сфера, уточняются область и масштабы деятельности субъекта управления, устанавливаются адекватные сферы, области и масштабы деятельности, информационные потребности; 2) осуществляются необходимые исследования (системный анализ); 3) разрабатываются альтернативные варианты решения определенных проблем и делается выбор оптимального варианта по каждой задаче (применяются экспертные оценки, в том числе независимая экспертиза). Управление на основе С.П. призвано обеспечивать и совершенствовать структурное и функциональное единство системы, вскрывать и устранять препятствия на пути к цели, ассимилировать или нейтрализовать возмущающие воздействия как внутри системы, так и вне ее.

Ситуация — совокупность обстоятельств, положение, обстановка.

След квадратной матрицы — сумма ее диагональных элементов.

Случайная величина — переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно — заранее не известно). Более строго случайная величина X определяется как функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий).

Случайная компонента — отражает влияние не поддающихся учету и регистрации случайных факторов.

Случайная ошибка — составляющая общей ошибки, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Событие — результат испытания, который регистрируется как факт.

Событие достоверное — событие, которое обязательно наступает в данном испытании. $P(U) = 1$.

Событие невозможное — событие, заведомо не наступающее в данном испытании. $P(V) = 0$.

События независимые — факт наступления или ненаступления одного из них не изменяет вероятность другого, т. е. $P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$.

События противоположные — два несовместных события, составляющих полную группу.

Совместимость — взаимосвязанность элементов и подсистем одной системы с элементами и подсистемами других систем.

Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение или стандарт) σ_x случайной величины X — арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии. Характеризует степень рассеивания возможных значений случайной величины не хуже дисперсии, а его размерность совпадает с размерностью соответствующей случайной величины.

Среднее линейное отклонение — отношение суммы модуля разности между текущим значением индивидуального при-

знака и средней арифметической этого признака к количеству значений индивидуальных признаков.

Статистика — данный термин в настоящее время употребляется в четырех значениях:

1) комплекс учебных дисциплин, обладающих определенной спецификой и изучающих количественную сторону массовых явлений и процессов в неразрывной связи с их качественным содержанием — учебный предмет в высших и средних специальных учебных заведениях;

2) отрасль практической деятельности (“статистический учет”) по сбору, обработке, анализу и публикации массовых цифровых данных о самых различных явлениях и процессах общественной жизни; эту деятельность на профессиональном уровне осуществляет государственная статистика — Государственный комитет по статистике Российской Федерации и система его учреждений, организованных по административно-территориальному признаку, а также ведомственная статистика (на предприятиях, в объединениях, ведомствах, министерствах);

3) совокупность цифровых сведений, характеризующих состояние массовых явлений и процессов общественной жизни; статистические данные, представляемые в отчетности предприятий, организаций, отраслей экономики, а также публикуемые в сборниках, справочниках, периодической прессе, которые являются результатом статистической работы;

4) статистические методы (в том числе методы математической статистики), применяемые для изучения социально-экономических явлений и процессов;

Статистика как наука представляет собой целостную систему научных дисциплин: теория статистики, экономическая статистика и ее отрасли, социально демографическая статистика и ее отрасли.

Итак, статистика — комплекс учебных дисциплин, обеспечивающих овладение методологией статистического исследования массовых социально-экономических явлений и процессов с

целью выявления закономерностей их развития в конкретных условиях места и времени.

Статистика экономическая — разрабатывает и анализирует синтетические показатели, включая такие макроэкономические показатели, как валовое национальное богатство (ВНБ), валовой национальный доход (ВНД), валовой внутренний продукт (ВВП), валовой национальный продукт (ВНП) и др., отражающие состояние национальной экономики, структуру, пропорции, взаимосвязь отраслей и элементов общественного воспроизводства; рассматривает особенности размещения производительных сил, состав и использование материальных, трудовых и финансовых ресурсов; наконец, осуществляет построение и анализ общей макростатистической модели рыночной экономики в виде системы национальных счетов (СНС). Отрасли экономической статистики — статистика промышленности, сельского хозяйства, строительства, транспорта, связи, труда, природных ресурсов, охраны окружающей среды и т. д. — разрабатывают и изучают статистические показатели развития соответствующих отраслей.

Статистика социально-демографическая — формирует и анализирует систему показателей, комплексно характеризующих различные стороны социальных условий и образа жизни населения; ее отрасли — статистика населения, политики, культуры, здравоохранения, науки, просвещения, права и т. д. Задачей всех отраслевых статистик является разработка статистических показателей соответствующих отраслей.

Статистическая вероятность — относительная частота (частность) $W(A)$ появления события A в n произведенных испытаниях.

Статистическая гипотеза — любое предположение о виде или параметре неизвестного закона распределения.

Статистический критерий или статистический тест — правило, по которому нулевая гипотеза отвергается или принимается.

Стационарный временной ряд — временной ряд, вероятностные свойства которого не изменяются во времени.

“Т”

Теория (от греч. *theoria* — рассмотрение, исследование) — высшая форма научного мышления, система понятий, категорий, законов, отражающая существенные свойства, связи и отношения предметов и явлений действительности. Т. составляет основной структурный элемент науки, связывая в единое целое факты, проблемы, гипотезы, методы познания и др.

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений массового характера независимо от их конкретной природы. Методы теории вероятностей являются дополнением детерминистского метода, значительно расширяют возможности наук, позволяют изучать явления с учетом присущих им элементов случайности.

Теория Доу — методика анализа фондовой конъюнктуры, основанная на прогнозе движения индексов Доу-Джонса.

Теория статистики — наука о наиболее общих принципах и методах статистического исследования социально-экономических явлений. Она разрабатывает понятийный аппарат и систему категорий статистической науки, рассматривает методы сбора, сводки, обобщения и анализа статистических данных, т. е. общую методологию статистического исследования массовых общественных процессов.

Тренд — главная квадратическая тенденция изменения некоторой величины y по ее временному ряду y_1, y_2, \dots, y_n ; плавно меняющаяся компонента, описывающая чистое влияние долго-

временных факторов, т. е. длительную (“вековую”) тенденцию изменения признака (например, рост населения, экономическое развитие, изменение структуры потребления и т. п.).

Трехшаговый метод наименьших квадратов — представляет собой процедуру одновременного оценивания уравнений как внешне не связанных. При достаточно большом числе итераций оценки трехшагового метода наименьших квадратов совпадают с оценками максимального правдоподобия.

“у”

Уровень значимости — малое значение вероятности попадания критерия в критическую область при условии справедливости гипотезы, что появление этого события может расцениваться как следствие существенного расхождения выдвинутой гипотезы и результатов выборки. Принимают обычно равным 0,05 или 0,01.

Уровень ряда динамики — статистический показатель, характеризующий изучаемый объект.

Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины (X, Y) — это ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

Уровень значимости критерия — вероятность допустить ошибку первого рода, т. е. отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна.

“Ф”

Фактор или факторный признак — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Фиктивные (манекенные) переменные — в качестве манекенных переменных обычно используются дихотомические (бинарные, булевы) переменные, которые принимают всего два значения: “0” или “1” (например, значение такой переменной Z_1 по фактору “пол”: $Z_1 = 0$ для работников женщин и $Z_1 = 1$ — для мужчин).

Функциональная зависимость — каждому значению одной переменной соответствует вполне определенное значение другой (например, скорость свободного падения в вакууме в зависимости от времени и т. д.).

Функция отклика — см. односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Функция правдоподобия — функция, выражающая плотность вероятности (вероятность) совместного появления результатов выборки x_1, x_2, \dots, x_n :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = \varphi(x_1, \Theta) \varphi(x_2, \Theta) \dots \varphi(x_i, \Theta) \dots \varphi(x_n, \Theta),$$

или

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = \prod_{i=1}^n \varphi(x_i, \Theta).$$

Функция производственная — функция, выражающая зависимость объема выпуска от затрат ресурсов. Функция Кобба-Дугласа $f(K, L) = CK^\alpha L^\beta$, где C, α, β — постоянные коэффициенты; K — производственные фонды, отражающие затраты капитала; L — людские ресурсы, отражающие затраты труда.

Функция распределения случайной величины X — функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x .

Функция распределения n -мерной случайной величины (X_1, X_2, \dots, X_n) — функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выражающая ве-

роятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$, т. е. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$.

Функция регрессии или просто регрессия Y по X — функция от x , которая представляет собой условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$, т. е. $M_x(Y)$.

Функция регрессии или просто регрессия X по Y — функция от y , которая представляет собой условное математическое ожидание случайной величины X при $Y = y$, т. е. $M_y(X)$.

“Ц”

Целевая функция — функция в экстремальных задачах, минимум или максимум которой необходимо найти.

Целочисленное программирование — раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна.

Цикл — повторяющаяся последовательность изменения деловой активности, состоящая из четырех фаз: подъема, кризиса, депрессии, оживления.

Циклическая компонента — отражает повторяемость экономических процессов в течение длительных периодов (например, влияние волн экономической активности Кондратьева, демографических “ям”, циклов солнечной активности и т. п.).

“Ч”

Частота наступления событий (частость) — отношение числа $N(A)$ испытаний, в которых оно имело место, к общему их числу N .

Числовые характеристики — числа, в сжатой форме выражающие наиболее существенные черты распределения случайной величины.

“Э”

Экзогенные переменные — переменные, задаваемые извне, см. также односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Экстраполяция — нахождение значения признака за пределами анализируемого периода.

Эластичность функции или коэффициент эластичности $E_x(y)$ — предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$.

Эндогенные переменные — переменные, которые формируются внутри функционирования объекта, см. также односторонняя зависимость случайной переменной от одной (или нескольких) неслучайной независимой переменной.

Эконометрика — раздел математики, занимающийся разработкой и применением статистических методов для измерений взаимосвязей между экономическими параметрами (С. Фишер); это единство трех составляющих — статистики, экономической теории и математики (Р. Фриш); совокупность методов и моделей, позволяющих на базе экономической теории, экономической статистики и математико-статистического инструментария придавать количественные выражения качественным зависимостям (С. А. Айвазян); телескоп и микроскоп для изучения окружающего экономического мира (Ц. Гриллихес); “сплав” трех компонент: экономической теории, статистических и математических методов; адаптация методов математической статистики для количественной формулировки, статистической проверки и возможного опровержения выводов и результатов экономической теории, выраженных в математической форме.

Эконометрическая модель — позволяет объяснить поведение эндогенных переменных в зависимости от значений

экзогенных и лаговых эндогенных переменных (иначе — в зависимости от predetermined, т. е. заранее определенных, переменных).

Экономика — совокупность производственных отношений, соответствующих данной ступени развития производительных сил общества, господствующий способ производства в обществе; организация, структура и состояние хозяйственной жизни или какой-нибудь отрасли хозяйственной деятельности; научная дисциплина, изучающая какую-нибудь отрасль производственной, хозяйственной деятельности.

Экономическая эффективность — соотношение между результатами и затратами, произведенными для достижения этих результатов.

Экономический анализ — наука, изучающая результаты производственно-хозяйственной деятельности предприятия и его структурных подразделений на основе показателей плана, учета, отчетности и других источников информации.

Экспертные оценки — основанные на суждениях спекулянтов количественные или порядковые оценки процессов и явлений, не поддающиеся непосредственному измерению.

Эмерджентность (интегративность) — появление у системы свойств, которые не присущи ни одному из составляющих ее элементов.

Этапы эконометрического анализа — постановочный, априорный, этап параметризации, информационный, этапы идентификации и верификации модели.

Эффект — показатель (результат), характеризующий величину выгоды применения систем управления.

Эффективная оценка $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ — несмещенная оценка $\tilde{\Theta}_n$ параметра Θ , имеющая наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра Θ , вычисленных по выборкам одного и того же объема n ; степень соответствия полученного результата экономической операции.

Главный редактор — *А. Е. Илларионова*
Редактор — *Н. Л. Юдина*
Художник — *В. А. Антипов*
Верстка — *Н. В. Байкова*
Корректор — *А. Ф. Пилунова*
Ответственный за выпуск — *О. Б. Юсова*

Учебное издание

Эконометрика

Под ред. проф. **В. Б. Уткина**

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 14.09.2011. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 35,25.
Тираж 1000 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347
Тел./факс: (499) 182-01-58, 182-11-79, 183-93-01
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис;
<http://www.dashkov.ru>

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ»,
140006, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел.: 554-21-86