

Министерство образования Российской Федерации
Донской государственный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

Задачи по дискретной математике

Ростов-на-Дону
2001

УДК 517

Составители: Баранов И. В. , Глушкова В.Н., Ларченко В.В.

Задачи по дискретной математике./ ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2001, 16 с.

Задания охватывают различные разделы исчисления высказываний математической логики. Предназначены для студентов всех специальностей, на которых изучается курс дискретной математики.

Печатается по решению методической комиссии факультета «Автоматизация и информатика»

© Издательский центр ДГТУ, 2001

1. Составить таблицы истинности для формул.

- | | |
|--|---|
| 1. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A \vee B})$ | 16. $(A \rightarrow B \vee C) \wedge \overline{A \wedge C} \rightarrow A$ |
| 2. $\overline{A} \leftrightarrow B$ | 17. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ |
| 3. $A \rightarrow \overline{B}$ | 18. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \wedge C) \vee A$ |
| 4. $\overline{A} \vee B$ | 19. $A \rightarrow (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C})$ |
| 5. $\overline{\overline{B} \leftrightarrow A}$ | 20. $\neg(A \rightarrow (\overline{B \wedge A})) \rightarrow A \vee C$ |
| 6. $\overline{\overline{A} \vee B}$ | 21. $A \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow \overline{A}$ |
| 7. $\overline{A \leftrightarrow \overline{B}}$ | 22. $(A \wedge \overline{B} \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| 8. $\overline{A \rightarrow \overline{B}}$ | 23. $A \wedge (B \vee \overline{A}) \wedge (\overline{B} \rightarrow A) \vee B$ |
| 9. $(A \wedge \overline{B}) \rightarrow B$ | 24. $(A \rightarrow B) \wedge \overline{A} \rightarrow \overline{B}$ |
| 10. $(A \vee \overline{B}) \rightarrow \overline{A}$ | 25. $\overline{A} \wedge B \rightarrow A \vee B$ |
| 11. $\overline{A} \rightarrow A \vee B$ | 26. $A \rightarrow B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$ |
| 12. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$ | 27. $A \rightarrow \neg(B \vee C)$ |
| 13. $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (\overline{B} \vee C))$ | 28. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ |
| 14. $A \rightarrow (B \vee C) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ | 29. $(A \vee B \rightarrow \overline{C}) \rightarrow A$ |
| 15. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge \overline{C})$ | 30. $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ |

2. Установить эквивалентность формул с помощью таблиц истинности .

- | | |
|---|--|
| 1. $A \vee B \wedge C$ и $(A \vee B) \wedge C$ | 16. $\overline{A \leftrightarrow B}$ и $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ |
| 2. $\overline{A} \vee \overline{B}$ и $\overline{A \wedge B}$ | 17. $(A \vee B) \wedge B$ и A |
| 3. $A \rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$ | 18. $A \vee (\overline{A} \vee \overline{B})$ и A |
| 4. $A \leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ | 19. $A \vee (\overline{A} \vee B)$ и A |
| 5. $A \leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \vee B)$ | 20. $A \wedge (\overline{A} \vee B)$ и B |
| 6. $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \wedge \overline{B}$ | 21. $A \wedge (A \vee \overline{B})$ и A |
| 7. $\overline{A} \vee \overline{B}$ и $A \rightarrow B$ | 22. $\overline{A} \wedge (\overline{A} \vee B)$ и B |

- | | |
|---|---|
| 8. $A \wedge B$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ | 23. $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ и A |
| 9. $A \vee B$ и $\overline{A} \vee B$ | 24. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и A |
| 10. $A \leftrightarrow B$ и $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \overline{B})$ | 25. $(\overline{A} \wedge B) \vee (A \vee \overline{B})$ и A |
| 11. $A \leftrightarrow B$ и $(A \rightarrow B) \wedge (\overline{A} \rightarrow \overline{B})$ | 26. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$ и B |
| 12. $\neg(A \leftrightarrow B)$ и $(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ | 27. $\overline{A} \wedge B \vee \overline{C} \wedge B$ и $B \wedge \overline{A \wedge C}$ |
| 13. $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$ и $(A \vee B) \wedge \overline{(A \wedge B)}$ | 28. $\overline{A} \wedge (A \vee B)$ и $\overline{A} \wedge B$ |
| 14. $(\overline{A} \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \overline{B})$ и $(\overline{B} \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow \overline{A})$ | 29. $\overline{A} \vee A \wedge B$ и $\overline{A} \vee B$ |
| 15. $(\overline{A} \leftrightarrow B)$ и $(A \leftrightarrow \overline{B})$ | 30. $A \vee B$ и $\overline{A \wedge B}$ |

3. Упростить формулы.

1. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \overline{p}$
2. $(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_3 \rightarrow A_1)$
3. $(A_1 \wedge A_3) \vee (A_1 \rightarrow \overline{A_3}) \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3)$
4. $\neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \overline{A}))$
5. $A \vee \neg(B \wedge \overline{C}) \vee \neg(\overline{A} \vee B \vee \overline{C})$
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \leftrightarrow \overline{A})$
7. $(A \rightarrow \overline{B} \wedge \overline{A}) \vee B$
8. $A_1 \wedge A_2 \wedge (A_3 \vee \overline{A_3})$
9. $A_1 \vee (A_2 \wedge \overline{A_1})$
10. $A_2 \wedge (A_1 \vee \overline{A_2})$
11. $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \overline{r})$
12. $(r \vee s \vee \overline{t}) \wedge r \wedge (p \vee \overline{s} \vee \overline{t})$
13. $s \vee (t \wedge s \wedge m)$
14. $(t \vee r \vee q) \wedge (s \vee \overline{s})$
15. $q \wedge (p \vee q) \wedge p$
16. $q \vee (p \vee \overline{p}) \vee (p \vee \overline{r}) \vee s$

17. $m \wedge (\bar{p} \vee m \vee s) \wedge t \wedge (t \vee \bar{q})$
18. $(d \vee \bar{a}\bar{d} \vee a) \downarrow \bar{d}$
19. $p \wedge \overline{(p \wedge q)}$
20. $c \vee \bar{c} \wedge b \vee \bar{c} \vee \bar{a}$
21. $\overline{((p \vee q) \wedge r)} \wedge \overline{(s \vee r)} \wedge \overline{(p \vee q \vee r)} \wedge t \wedge \bar{t}$
22. $(r \wedge s \wedge t) \vee (r \wedge t \wedge s) \vee s$
23. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow (q \wedge p))$
24. $\overline{p \rightarrow (q \wedge p)} \rightarrow p \vee r$
25. $p \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \bar{p}$
26. $p \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge ((\bar{q} \rightarrow p) \vee q)$
27. $r \vee (p \vee \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{q})$
28. $r \vee q \rightarrow (q \vee t)$
29. $p \wedge q \wedge (s \rightarrow (s \vee t))$
30. $\neg(A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_2 \rightarrow \bar{A}_1)$

4. Записать формулы в ДНФ и СДНФ.

- | | |
|--|---|
| 1. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ | 16. $(A \rightarrow (A \leftrightarrow B)) \wedge C$ |
| 2. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ | 17. $A \wedge (B \wedge C)$ |
| 3. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \rightarrow C$ | 18. $A \vee B \rightarrow C \wedge A$ |
| 4. $\overline{(A \wedge B)} \vee C$ | 19. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$ |
| 5. $A \wedge B \vee C \wedge B$ | 20. $((A \rightarrow B) \wedge C) \vee \bar{A} \wedge B$ |
| 6. $A \wedge B \vee \bar{C}$ | 21. $A \wedge B \rightarrow (\bar{B} \wedge B \rightarrow C)$ |
| 7. $A \wedge \bar{B} \rightarrow C$ | 22. $(A \wedge (A \vee B)) \wedge (\bar{B} \rightarrow A)$ |
| 8. $\overline{\bar{A}\bar{B}} \leftrightarrow \bar{A} \vee A \wedge B$ | 23. $A \vee B \rightarrow \overline{C \wedge B}$ |
| 9. $(A \leftrightarrow B) \wedge (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)$ | 24. $A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})$ |

10. $A \vee B \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})$
11. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$
12. $A \wedge (A \rightarrow B)$
13. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
14. $A \vee \bar{B} \rightarrow C \wedge B$
15. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow \bar{C}$

25. $A \vee B \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
26. $A \vee B \leftrightarrow \bar{A}$
27. $\overline{A \wedge \bar{B}} \leftrightarrow \bar{A}$
28. $\overline{(A \vee B)}(\overline{A \wedge B})$
29. $(\bar{A}\bar{B})(\overline{A \vee B})$
30. $\overline{(A \wedge B) \vee C}$

5. Записать формулы в приведенном виде (содержащем только операции \neg, \wedge, \vee над простыми переменными).

1. $A \vee \overline{B \vee C} \vee \bar{D}$
2. $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$
3. $(\bar{A} \rightarrow A \wedge B) \wedge C$
4. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge B$
5. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge D$
6. $(A \wedge B \wedge C) \rightarrow (\bar{A} \vee B) \rightarrow B \wedge \bar{C}$
7. $\overline{(A \rightarrow B)} \vee (C \vee D)$
8. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$
9. $\overline{A \leftrightarrow B} \vee \bar{A}$
10. $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$
11. $(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$
12. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$
13. $\overline{(A \wedge B)} \vee (A \rightarrow \bar{B})$
14. $A \vee \bar{B} \rightarrow \overline{C \vee A}$
15. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

16. $\overline{(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)} \wedge C$
17. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D$
18. $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$
19. $\overline{(A \wedge B) \rightarrow C}$
20. $A \leftrightarrow B \wedge C$
21. $\overline{(A \wedge \bar{B}) \wedge (C \wedge D)}$
22. $\overline{A \wedge B \wedge C \wedge D}$
23. $\overline{A \vee B \vee C \vee D}$
24. $(A \leftrightarrow B) \wedge (\overline{A \wedge B})$
25. $(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (A \rightarrow B)$
26. $\overline{\bar{A}\bar{B}} \vee (A \rightarrow B) \wedge A$
27. $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
28. $A \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B})$
29. $A \vee \bar{B} \rightarrow B \vee \bar{A}$
30. $\overline{A \rightarrow B \vee C}$

6. Построить полином Жегалкина для функций.

1. $f = (00101101)$

2. $(x_1 \downarrow x_2) | x_3$

3. $(x_1 \rightarrow x_2) \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow x_3)$

4. $(x_1 \rightarrow x_3)(x_2 \oplus x_3)$

5. $\overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2 x_3}$

6. $(z_1 \leftrightarrow z_2) \rightarrow z_3$

7. $f = (10101100)$

8. $f = (11000100)$

9. $(\overline{x_3} | x_2) \downarrow x_3$

10. $\overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$

11. $(x \vee y) \wedge \overline{x} \rightarrow y$

12. $x \rightarrow \overline{y}$

13. $(x \vee y) \rightarrow (\overline{x} \vee z)$

14. $x \wedge \overline{y} \rightarrow (\overline{y} \rightarrow x)$

15. $(x \vee y) \leftrightarrow (\overline{x} \rightarrow \overline{z})$

16. $(x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)$

17. $x \leftrightarrow y \leftrightarrow \overline{z}$

18. $x \wedge y \leftrightarrow x \wedge z$

19. $(x \rightarrow \overline{y}) \vee (\overline{x \vee y})$

20. $\overline{x \vee y}$

21. $\overline{x \rightarrow y \rightarrow \overline{x} \rightarrow \overline{z}}$

22. $\overline{(x \leftrightarrow y)(y \leftrightarrow z)}$

23. $(x \leftrightarrow y)(\overline{y \leftrightarrow z})$

24. $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (z \rightarrow (x \leftrightarrow \overline{z}))$

25. $(x \leftrightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow z)$

26. $\overline{(x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)}$

27. $\overline{(x \rightarrow y)}$

28. $\overline{(x \wedge y)(x \rightarrow y)}$

29. $(x \vee y)(\overline{x \leftrightarrow y})$

30. $x \leftrightarrow y$

7. Проверить самодвойственность функций.

1. $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$

2. $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$

3. (0001001001100111)

4. $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$

5. $(x_1 | \overline{x_2}) \downarrow x_2$

6. (01010101)

16. $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$

17. (1010)

18. $x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3}$

19. (0101)

20. $\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}$

21. $x_1 | x_2$

7. (10101010)

8. $xy \oplus yz$

9. $\overline{x \rightarrow y \vee z}$

10. (1001001100110110)

11. $\overline{xy} \vee \overline{y} \vee z$

12. (10101000)

13. $\overline{x \downarrow y} \vee x \rightarrow y$

14. (1010111100001010)

15. $x_1 x_2 \oplus x_2 x_3$

22. $x_1 x_2 \vee x_3$

23. $x \rightarrow y$

24. (10001110)

25. $\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2}$

26. $x_1 \oplus x_2 \overline{x_1}$

27. (0011)

28. $\overline{x_1} \rightarrow x_2$

29. (1100)

30. $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1 x_3$

8. Проверить монотонность функций.

1. $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$

2. (00110111)

3. $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1$

4. (01100111)

5. $\overline{\overline{x \vee y}}$

6. $(\overline{x} \rightarrow y) \vee xy$

7. (10011100)

8. (0000)

9. $x \leftrightarrow y$

10. $(\overline{x} \rightarrow y) \vee z$

11. (00110111)

12. $(\overline{x} \leftrightarrow y) \wedge xy$

13. $xy \oplus yz$

14. $\overline{\overline{x \vee y}}$

15. $\overline{\overline{x \rightarrow y}}$

16. (0011)

17. $xz(x \oplus z)$

18. $\overline{x} \rightarrow y$

19. $x \leftrightarrow \overline{y}$

20. $\overline{x} \rightarrow yz$

21. (1100)

22. $\overline{x} \mid \overline{y}$

23. (00011100)

24. $\overline{\overline{(x \vee y)z}}$

25. (00101111)

26. $(x \mid y) \rightarrow x \oplus z$

27. $x \vee \overline{y} \vee z$

28. $(x \vee y) \oplus z$

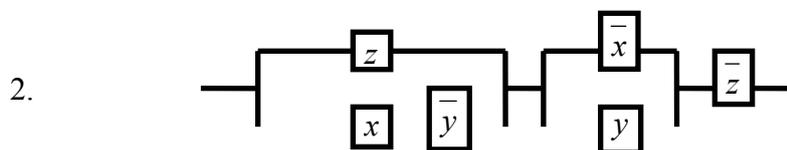
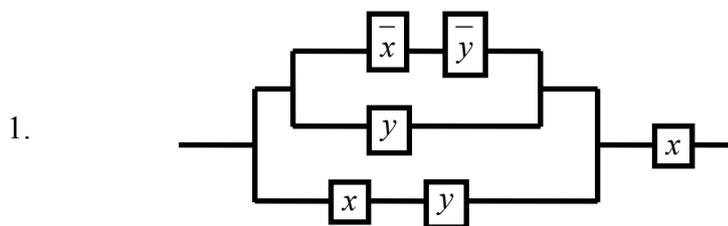
29. $x \mid \overline{y}$

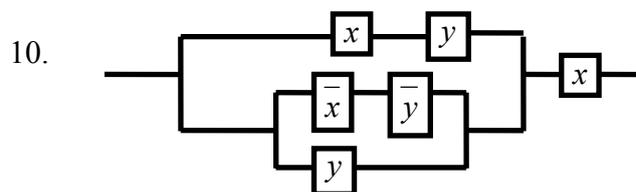
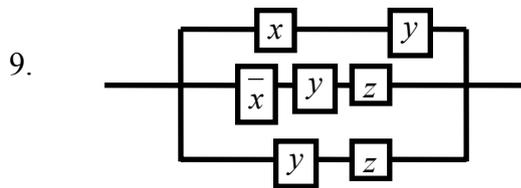
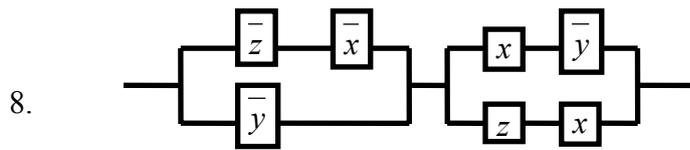
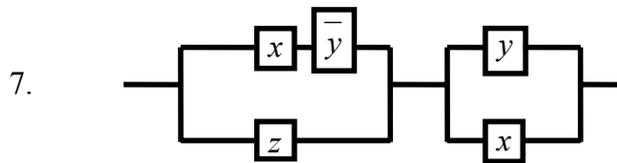
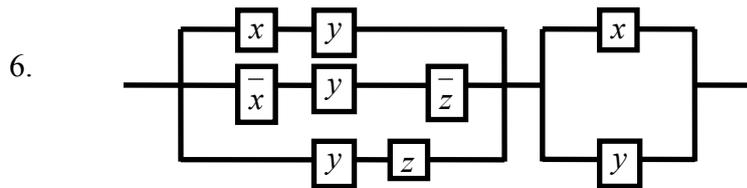
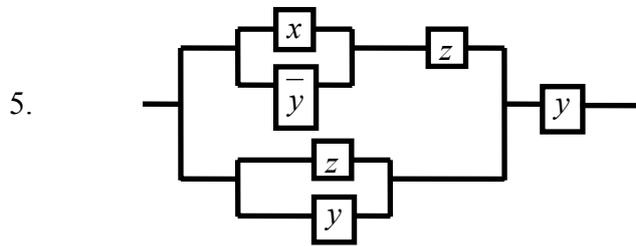
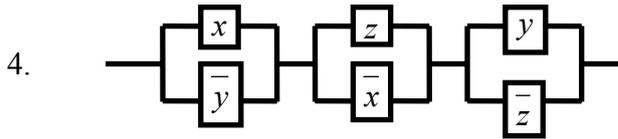
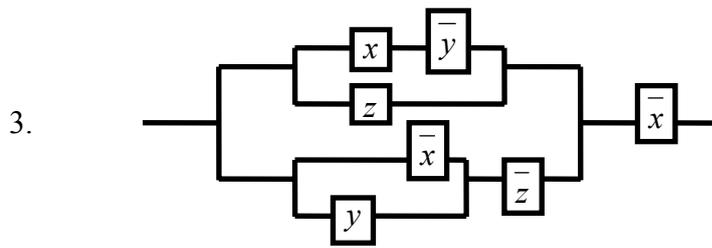
30. (1011)

9. Проверить полноту следующих систем.

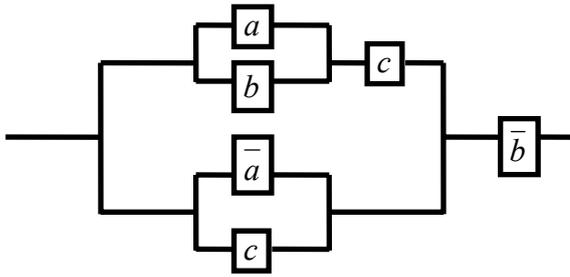
- | | |
|---|---|
| 1. $\{x_1 \rightarrow x_2, x_1 \rightarrow \bar{x}_2 x_3\}$ | 16. $\{\bar{x}_1 \oplus x_2, \bar{x}_2, x_1 \vee \bar{x}_2\}$ |
| 2. $\{\vee, \wedge\}$ | 17. $\{x_1 x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2\}$ |
| 3. $\{x_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \sim x_1 x_3\}$ | 18. $\{x_1 \rightarrow x_2, 0, x_1 \sim x_2\}$ |
| 4. $\{0, 1, x_1(x_2 \sim x_3) \vee \bar{x}_1(x_1 \oplus x_3)\}$ | 19. $\{x_1 \oplus x_2, \bar{x}_1\}$ |
| 5. $\{\bar{x}, (0010), (0100111001110001)\}$ | 20. $\{x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, 0, 1\}$ |
| 6. $\{\leftrightarrow, \neg\}$ | 21. $\{\rightarrow, \leftrightarrow, 0\}$ |
| 7. $\{\downarrow\}$ | 22. $\{x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow x_2\}$ |
| 8. $\{\leftrightarrow, \wedge\}$ | 23. $\{x \rightarrow \bar{y}, y, 0\}$ |
| 9. $\{ \}$ | 24. $\{\wedge, \rightarrow\}$ |
| 10. $\{\wedge, \neg\}$ | 25. $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ |
| 11. $\{\vee, \neg\}$ | 26. $\{\oplus, \rightarrow\}$ |
| 12. $\{x_1 \leftrightarrow \bar{x}_2, x_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$ | 27. $\{\wedge, \rightarrow\}$ |
| 13. $\{\bar{x}_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow \bar{x}_1 x_3\}$ | 28. $\{\oplus, \leftrightarrow\}$ |
| 14. $\{\bar{x}, (0001), (0010101001010001)\}$ | 29. $\{\neg x, (0010), (01011100011)\}$ |
| 15. $\{x_1 \rightarrow x_2, \bar{x}_1\}$ | 30. $\{x_1 \leftrightarrow x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$ |

10. Упростить схемы.

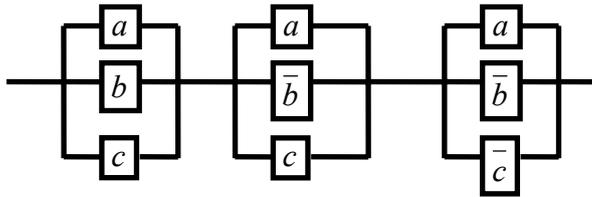




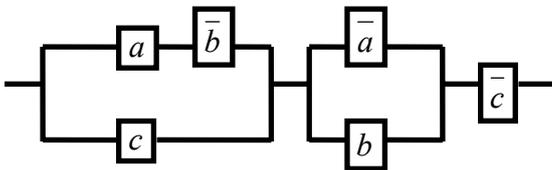
11.



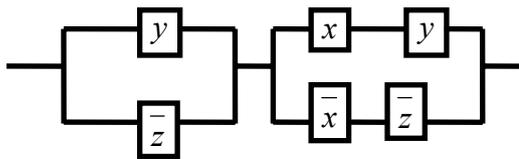
12.



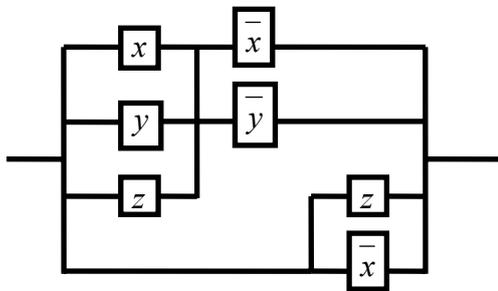
13.



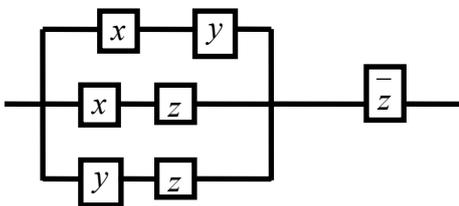
14.



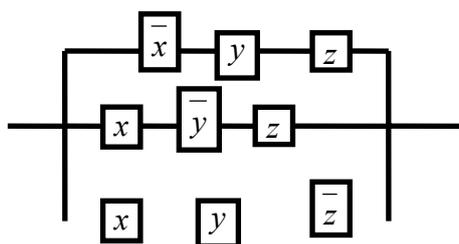
15.



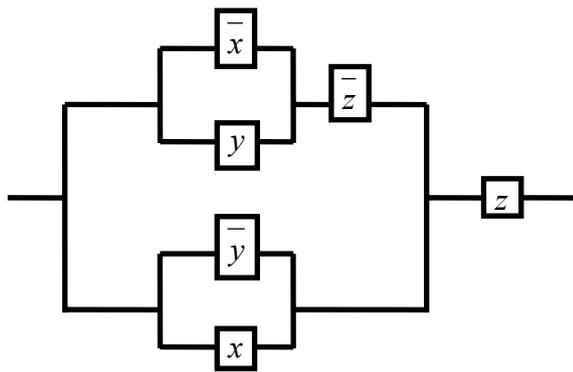
16.



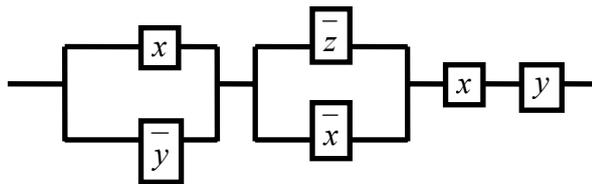
17.



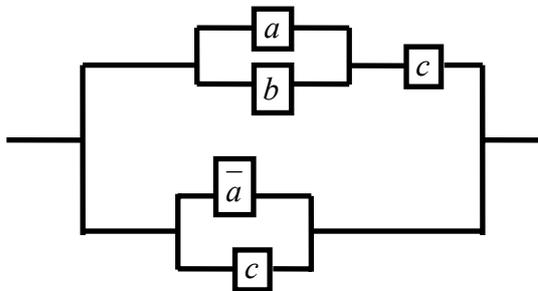
18.



19.



20.



Решение задач 30-го варианта.

1.30. Составим таблицу истинности для формулы $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$:

B	A	\overline{B}	\overline{A}	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

2.30. Проверим эквивалентность формул $A \vee B$ и $\overline{\overline{A \wedge B}}$, составив для них таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	\overline{B}	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{\overline{A \wedge B}}$
-----	-----	------------	----------------	-------------------------	------------------------------------

0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Формулы не эквивалентны, так как 3-й и 6-й столбцы таблицы не совпадают.

3.30. Для упрощения формулы используем правило исключения импликации: $A_1 \rightarrow A_2 = \bar{A}_1 \vee A_2$.

$$\begin{aligned} \neg(A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_2 \rightarrow \bar{A}_1) &= \overline{(\bar{A}_1 \vee A_2)} \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = (\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2) \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = \\ &= (A_1 \wedge \bar{A}_2) \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \wedge (A_1 \vee 1) \vee \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1. \end{aligned}$$

4.30. Используя законы логики приведем формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ к виду, содержащему только дизъюнкции элементарных конъюнкций. Полученная формула и будет искомой ДНФ:

$$\overline{(A \wedge B) \vee C} = \overline{(A \wedge B)} \wedge \bar{C} = (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge \bar{C} = (\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{C})$$

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$\overline{(A \wedge B) \vee C}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение “1”. Для каждой такой строки выпишем формулу, истинную на наборе переменных A, B, C данной строки: строка 1 – $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$; строка 3 – $\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$; строка 5 – $A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$. Дизъюнкция этих трех формул будет принимать значение “1” только на набо-

рах переменных в строках 1, 3, 5, а следовательно и будет искомой совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ): $(\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})$

5.30. Для того, чтобы записать формулу в приведенном виде, следует, пользуясь формулой $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$, исключить операцию импликации, а затем “опустить” операцию отрицания на простые переменные: $\overline{A \rightarrow B \vee C} = \overline{\bar{A} \vee (B \vee C)} = \overline{\bar{A}} \wedge \overline{B \vee C} = \overline{A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}}$.

6.30. *Способ 1.* (Метод неопределенных коэффициентов).

Составляем таблицу истинности для функции $x_1 \leftrightarrow x_2$

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Записываем полином Жегалкина с неизвестными коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_{12} для функции от двух переменных: $x_1 \leftrightarrow x_2 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$.

Подставляя в это разложение значения x_1 и x_2 из таблицы, определяем неизвестные коэффициенты:

Подставляя $x_1=0, x_2=0$, получаем: $1 = a_0$;

$$x_1=0, x_2=1 \text{ — } 0 = 1 \oplus a_2 \Rightarrow a_2=1;$$

$$x_1=1, x_2=0 \text{ — } 0 = 1 \oplus a_1 \Rightarrow a_1=1;$$

$$x_1=1, x_2=1 \text{ — } 1 = 1 \oplus a_{12} \Rightarrow a_{12}=0.$$

Полином Жегалкина имеет вид: $x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Способ 2. (Эквивалентные преобразования).

Сначала запишем СДНФ $\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2) | f(\sigma_1, \sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ эквивалентности:

$$\begin{aligned} x_1 \leftrightarrow x_2 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \{ \text{т.к. } x \vee y = x \oplus y \oplus xy \} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 x_2 = \{ \text{поскольку } \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 x_2 = 0 \} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = \{ \text{далее, } \bar{x} = 1 \oplus x, \text{ поэтому} \} \\ &= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) \oplus x_1 x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \end{aligned}$$

7.30. Сначала преобразуем исходную формулу:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1 x_3 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee x_1 x_3 = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 = x_1 (\bar{x}_2 \vee x_3);$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 (\bar{x}_2 \vee x_3). \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \overline{\bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)} = \overline{\bar{x}_1} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)} = x_1 \vee \overline{\bar{x}_2 x_3}. \text{ Пусть}$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$, тогда $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 1$, поэтому $f(x_1, x_2, x_3) \neq \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, следовательно функция f несамо двойственна.

8.30. Функция $f = (1011)$ немонотонная, т.к. $(00) < (01)$, но $f(0,0) > f(0,1)$.

9.30. Для доказательства полноты системы $\{x_1 \leftrightarrow x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$ необходимо проверить, что система содержит функцию не сохраняющую 0, функцию не сохраняющую 1, немонотонную функцию, несамо двойственную функцию и нелинейную функцию. Докажем полноту системы $\Sigma = \{x_1 \sim x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$. Обозначим $f_1(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ и выпишем ее таблицу истинности

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функция f_1 не сохраняет 0. Выясним, является ли f_1 само двойственной.

\bar{x}_1	\bar{x}_2	$\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$	$\bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

Т.к. $f_1(x_1, x_2) \neq \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, то f_1 несамо двойственна.

Функция $f_2(x) = \bar{x}$ немонотонная, и не сохраняет 1. Найдем полином Жегалкина для

$$f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$$

x_1	x_2	\bar{x}_1	\bar{x}_2	$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

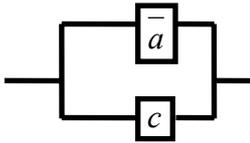
$$a_0 = 1; \quad 0 = 1 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 1; \quad 1 = 1 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 0; \quad 1 = 1 \oplus 1 \oplus a_{12} \Rightarrow a_{12} = 1;$$

Функция $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$ нелинейная. Согласно теореме о полноте Σ – полная система.

10.20. Составим функцию проводимости для схемы:

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \vee c) \vee [(a \vee b) \wedge c] = (\bar{a} \vee c) \vee [ac \vee bc] = \bar{a} \vee c \vee ac \vee bc = \bar{a} \vee c.$$

Полученной формуле соответствует схема:



Редактор: Литвинова А.А.

ЛР № 020639 от 26.04.96. В набор . В печать

Объём 1,0 усл. п.л. 0,7 уч.-изд. л. Офсет. Формат 60x84/16

Бумага тип № 3. Заказ № Тираж 200 Цена 5 р.

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:

344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.