

Министерство путей сообщения РФ
Департамент кадров и учебных заведений
**САМАРСКИЙ ИНСТИТУТ
ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО
ТРАНСПОРТА**

Кафедра информатики и информационных систем

Методические указания

по дисциплине «Дискретная математика» для студентов дневной и заочной формы
обучения по специальности 071900 «Информационные системы в технике и
технологиях»

Составители: Никищенко С.А.

Смышляев В.А.

Юшков С.А.

Припутников А.П.

Самара 2002

УДК 519.1

Методические указания по дисциплине «Дискретная математика» для студентов дневного и заочного обучения по специальности «Информационные системы в технике и технологиях». – Самара: СамИИТ, 2002. – 20 с.

Утверждено на заседании кафедры ИИС 11.2001., протокол № .

Печатается по решению редакционно-издательского совета института.

Данные методические указания предназначены для изучения теоретического материала по дисциплине «Дискретная математика» для студентов специальности «Информационные системы в технике и технологиях». В первой части рассмотрены вопросы теории множеств, во второй – теории графов. Приведены примеры решения задач.

Составители: Никищенко Сергей Алексеевич, к.т.н., доцент кафедры ИИС,
Смышляев Валерий Анатольевич, к.т.н., доцент кафедры ИИС,
Юшков Сергей Анатольевич, к.п.н., доцент кафедры ИИС,
Припутников Алексей Петрович, аспирант.

Рецензенты: Сараев Леонид Александрович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой
«Высшая математика и информатика» СамГУ,
Васин Николай Николаевич, д.т.н., профессор, зав. кафедрой
«Телекоммуникации на железнодорожном транспорте» СамГАПС.

Редактор: Егорова И.М.

Введение

1. Теория множеств

- 1.1. Множество, элемент множества, пустое множество
- 1.2. Равенство множеств. Подмножество. Мощность множества.
Универсальное множество. Дополнение множества
- 1.3. Операции над множествами
- 1.4. Свойства операций над множествами
- 1.5. Отображение множеств
- 1.6. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества

2. Теория графов

- 2.1. Определение и способы представления графа
- 2.2. Свойства элементов графа
- 2.3. Матрица инцидентности
- 2.4. Понятие полноты
- 2.5. Виды графов
- 2.6. Части, суграфы и подграфы
- 2.7. Маршруты, цепи и циклы

Список литературы

ВВЕДЕНИЕ

В основе компьютеризации всех сфер человеческой деятельности лежит моделирование различных предметных областей. Простой и эффективный язык конструирования моделей предоставляет дискретная математика. Одним из наиболее плодотворных её разделов в этом применении является реляционная алгебра, изучающая свойства бинарных отношений. Не случайно такое широкое применение в информатике получили базы данных реляционного типа.

Помимо построения баз данных и знаний дискретная математика эффективно применяется для решения многочисленных оптимизационных задач связанных с перебором вариантов. К ним относятся, в частности, задачи планирования и оперативного управления, а в более широком смысле – любые задачи, связанные с принятием решений в человеко-машинных системах.

Развитие теории графов связано с решением таких практических задач для географических, механических, электрических, а затем и информационных объектов, в которых на первый план, в отличие от классического анализа непрерывных величин, выдвигаются рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Множество, элемент множества, пустое множество

В математике **множеством** называют совокупность, набор каких-либо предметов (объектов). Предметы, составляющие множество, называются его **элементами**. То, что элемент a входит в множество A , записывается так: $a \in A$ (читается: a есть элемент множества A , или: a принадлежит множеству A). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A . Термин "множество" употребляется независимо от того, много или мало в этом множестве элементов. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом \emptyset .

Примерами пустых множеств могут служить:

- а) множество действительных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2+1=0$;
- б) множество треугольников, сумма углов которых отлична от 180° .

Множество можно задать перечислив все его элементы. Например, множество сотрудников, работающих в отделе финансовой отчетности, задается перечислением фамилий в ведомости. Такое множество содержит конечное число элементов. Однако не всякое конечное множество можно задать перечислением. Множество шпал на железнодорожных путях тоже конечные, но попробуйте их перечислить. Тем более нельзя перечислить все элементы бесконечного множества. Так, множество всех цифр конечное и их легко перечислить: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. А вот множество всех целых чисел, составленных из этих цифр, бесконечное и их уже не перечислишь.

1.2. Равенство множеств. Подмножество. Мощность множества.

Универсальное множество. Дополнение множества

Множество A *содержится* в множестве B (множество B *включает* множество A), если каждый элемент A есть элемент B :

$$A \subset B := x \in A \Rightarrow x \in B.$$

В этом случае A называется **подмножеством** B , B – **надмножеством** A . Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется **собственным** подмножеством B . Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество \emptyset и само множество A , $\forall A \emptyset \subset A$.

Приведем примеры подмножеств:

- а) множество слесарей в локомотивном депо есть подмножество множества всех сотрудников локомотивного хозяйства;
- б) множество жителей Самары является подмножеством множества жителей России.

Если одновременно с отношением $A \subset B$ имеет место отношение $B \subset A$, то $A=B$. То есть, если одновременно A есть подмножество B и B есть подмножество A , то такие два множества **равны**:

$$A=B := A \subset B \& B \subset A.$$

Мощность множества A обозначается как $|A|$. Для конечных множеств мощность это число элементов. Например, $|\emptyset|=0$, но $|\{\emptyset\}|=1$. Если $|A|=|B|$, то множества A и B называются **равномощными**.

Введенные отношения наглядно иллюстрируются с помощью так называемых диаграмм Венна. *Диаграмма Венна* – это замкнутая линия, внутри которой расположены элементы данного множества, а снаружи – элементы, не принадлежащие этому множеству. Например, диаграмма множества $V = \{*, +, \oplus\}$ изображена на рис.1.

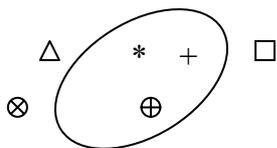


Рис. 1

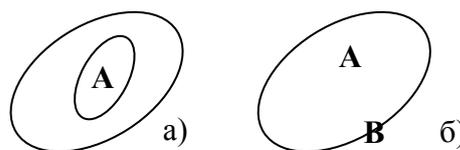


Рис. 2

Отношение $A \subset B$ изображено с помощью диаграмм на рис. 2 а) и б).

Пусть нам дано какое-либо множество E . Мы будем рассматривать всевозможные подмножества данного множества E . Исходное множество E в таком случае называют **универсальным множеством**. В качестве примера возьмем множество железнодорожных вагонов. В это множество входят подмножества пассажирских и грузовых вагонов; среди грузовых вагонов есть подмножества цистерн, крытых вагонов, полувагонов и т.д. Множество всех вагонов – это универсальное множество, содержащее в себе различные подмножества вагонов. Этих подмножеств очень много. Если универсальное множество E состоит из n элементов, то число всех подмножеств множества E равно 2^n .

Пусть множество A есть некоторое подмножество универсального множества E . Тогда множество \bar{A} , состоящее из всех элементов множества E , не принадлежащих множеству A , называется **дополнением множества A** . Например, если A – множество всех женщин в отделе статистики, то дополнением \bar{A} является множество всех мужчин того же отдела. Если $E = \{\text{целые числа}\}$, $A = \{\text{четные числа}\}$, то $\bar{A} = \{\text{нечетные числа}\}$.

1.3. Операции над множествами

1. **Объединением C двух множеств A и B** называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B . Обозначают это так: $C = A \cup B$. Союз "или" здесь неразделительный, то есть не исключается возможность одновременной принадлежности некоторых элементов и множеству A , и множеству B . При этом такие элементы зачисляются в объединение C только один раз. Иными словами, в объединение входят все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств. Объединение часто называется суммой множеств. Объединение трех и более множеств определяется аналогично. На рисунках 3 и 4 заштрихованные множества – это объединения двух и трех множеств, соответственно.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

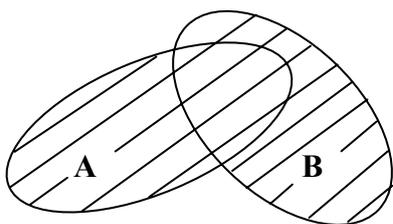


Рис. 3

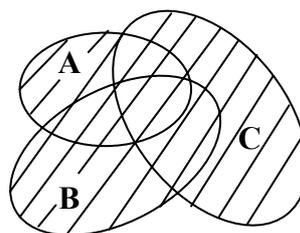


Рис. 4

Примеры. а) Обозначим через A множество успевающих студентов в группе, через B множество девушек в этой группе и через C множество неуспевающих парней.

Тогда $A \cup B \cup C$ является множеством всех студентов этой группы. Множества A и B имеют общие элементы – успевающих девушек.

б) Обозначим через A множество локомотивов, через B множество пассажирских локомотивов. Тогда $A \cup B$ есть множество A , то есть $A \cup B = A$.

2. **Пересечением** C двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B одновременно. Обозначают это так: $C = A \cap B$. Иными словами, пересечение образовано всеми общими элементами данных множеств. Аналогично определяется пересечение трех и более множеств. На рисунках 5 и 6 заштрихованные множества – это пересечения двух и трех множеств, соответственно.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \& x \in B\}.$$

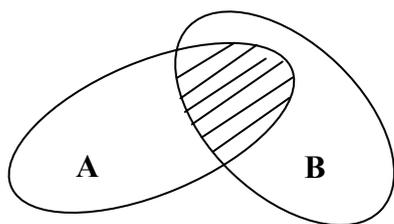


Рис. 5

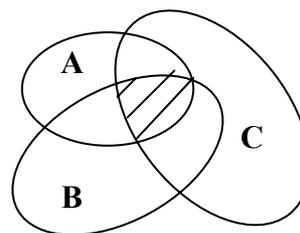


Рис. 6

Пример. Пусть A – множество парней, обучающихся в институте, а B – множество всех студентов 4-го курса. Тогда пересечение $A \cap B$ – множество парней, которые учатся на 4 курсе.

3. **Разностью** C двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A , не входящих в B . Обозначают это так: $C = A \setminus B$. Таким образом, из множества A достаточно удалить общие элементы множеств A и B , то есть все элементы множества $A \cap B$, чтобы получить разность $A \setminus B$. На рисунках 7, 8, и 9 для разных случаев заштрихованные множества – это разность $A \setminus B$ двух множеств.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \& x \notin B\}.$$

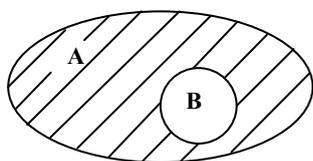


Рис. 7

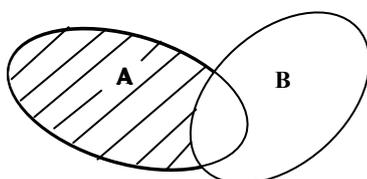


Рис. 8

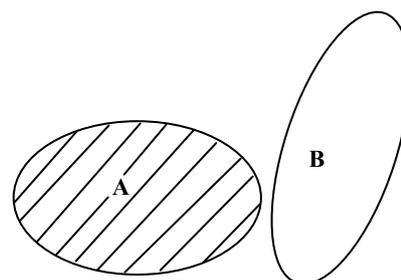


Рис. 9

Примеры. а) Если A – множество всех студентов 3-го курса института, а B – множество всех девушек, которые учатся в институте, то $A \setminus B$ – множество всех парней, которые обучаются на 3-м курсе.

б) Разностью множества четных чисел и множества целых чисел является пустое множество.

Симметрическая разность:

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \& x \notin B) \vee x \notin A \& x \in B\}.$$

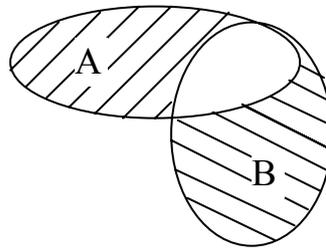


Рис. 10

Дополнение:

$$\bar{A} := \{x \mid x \notin A\}.$$

Операция дополнения подразумевает некоторый универсум U : $\bar{A} = U \setminus A$.

1.4. Свойства операций над множествами

Пусть задан универсум U . Тогда для множеств A , B и C принадлежащих U выполняются следующие свойства:

1. *идемпотентность:*

$$A \cup A = A,$$

$$A \cap A = A;$$

2. *коммутативность;*

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A;$$

3. *ассоциативность:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

4. *дистрибутивность;*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

5. *поглощение;*

$$(A \cap B) \cup A = A,$$

$$(A \cup B) \cap A = A;$$

6. *свойства нуля:*

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$

7. *свойства единицы:*

$$A \cup U = U,$$

$$A \cap U = A;$$

8. *инволютивность:*

$$\overline{\bar{A}} = A;$$

9. *законы де Моргана:*

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

10. *свойства дополнения:*

$$A \cup \bar{A} = U,$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

11. выражение для разности:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

На рисунке 10 заштриховано пересечение множества A с множеством $B \cup C$, а на рисунке 11 – объединение двух пересечений $A \cap B$ и $A \cap C$.

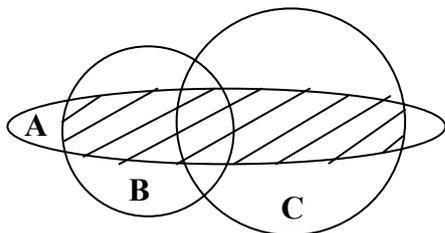


Рис. 10

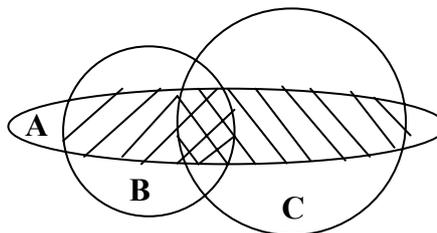


Рис. 11

На рисунке 12 заштриховано объединение множеств A и $B \cap C$. На рисунке 13 штриховкой с наклоном вправо показано множество $A \cup B$, а штриховкой с наклоном влево – множество $A \cup C$. В результате то множество, на котором штриховки наложились друг на друга, представляет собой пересечение множеств $A \cup B$ и $A \cup C$.

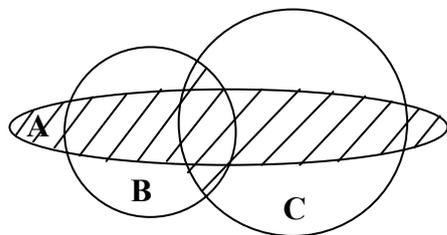


Рис. 12

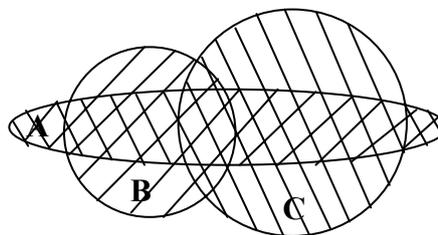


Рис. 13

1.5. Отображение множеств

1. Рассмотрим два множества A и B . Если каждому элементу a множества A некоторым способом поставлен в соответствие один элемент b множества B , то говорят, что задано **отображение множества A в множество B** . Записывают это так: $f: A \rightarrow B$ или $b=f(a)$. Через f обозначают то отображение (правило), по которому это соответствие устанавливается. С помощью диаграмм Венна это изображается так:

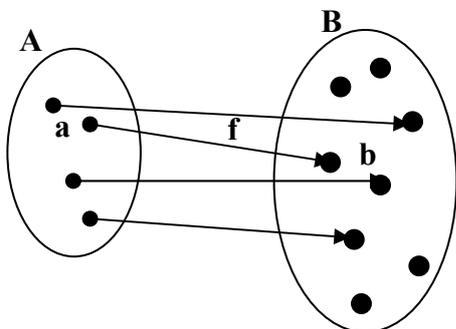


Рис. 14

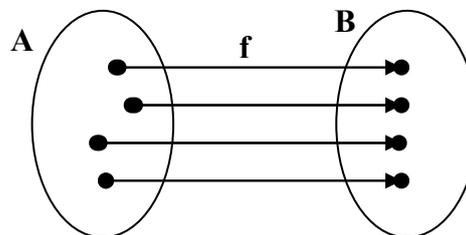


Рис. 15

Пример. Рассмотрим два множества: A – множество студентов в группе и B – множество стульев в аудитории. Когда начинается урок, то каждый студент садится на стул. Тем самым устанавливается отображение множества A в множество B . При этом часть стульев может остаться незанятой (см. рисунок 14).

Если же каждый элемент множества B соответствует какому-либо элементу множества A , то говорят, что **множество A отображается на множество B** (см. рисунок

15).

В примере так будет, если все стулья окажутся занятыми (т.е. количество студентов и количество стульев одинаковое).

Между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие (взаимно-однозначное отображение)**, если каждому элементу a из A поставлен в соответствие один элемент b из B , и при этом соответствию каждый элемент b из B соответствует одному и только одному элементу a из A . С помощью диаграмм взаимно-однозначное соответствие изображено на рисунке 15.

2. Предположим теперь, что множества A и B – числовые. Например, какие-либо интервалы, конечные или бесконечные. В этом случае одно множество будем обозначать буквой D и его элементы $x: x \in D$; другое множество обозначим через Φ , а его элементы $y=y \in \Phi$.

Отображение числового множества D в числовое множество Φ называют **функцией** (числовой функцией) и записывают это так: $y=f(x)$. Множество D называют **областью определения**, а элемент x – **аргументом**. Множество Φ называют **областью значений**, а элемент y – **функцией (значением функции)**.

1.6. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества

1. Два множества называют **эквивалентными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Проще всего проверить эквивалентность конечных множеств. Для двух конечных множеств взаимно-однозначное соответствие можно установить лишь в случае, когда они имеют одинаковое количество элементов. Поэтому конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют поровну элементов. Для бесконечных множеств не имеет смысла говорить о числе элементов. Однако и среди бесконечных множеств можно найти эквивалентные.

2. Бесконечные множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, называются **счетными множествами**. Иными словами, если элементы бесконечного множества можно перенумеровать, то такое множество называется счетным. Самым простым примером счетного множества является само множество \mathbb{N} натуральных чисел.

Сформулируем основные теоремы о счетных множествах.

Теорема 1. Каждое бесконечное подмножество A счетного множества B счетно.

Теорема 2. Объединение конечного или счетного множества счетных множеств счетно.

3. Не все бесконечные множества счетные, существуют и такие, элементы которых нельзя перенумеровать. Простейшим примером такого множества является множество всех точек конечного интервала, например, интервала $(0, 1)$. В этом множестве содержится счетное подмножество. В качестве такого подмножества можно указать, например числовую последовательность $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$. Но точек в интервале

$(0, 1)$ "намного" больше, чем точек этой последовательности. Точнее говоря, множество точек интервала $(0, 1)$ несчетно, то есть нельзя установить взаимно-однозначного соответствия между множеством точек интервала $(0, 1)$ и множеством натуральных чисел \mathbb{N} .

2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1. Определение и способы представления графа

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества *вершин*) и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V (E – множество *ребер*). На исходном множестве X элементов, называемых в теории графов **вершинами** или **узлами**, задается множество пар вида (x_i, x_j) , называемых **ребрами** или **дугами**. Вершины изображаются кружками, а дуги – линиями произвольной кривизны. Вершина x_i , называется **началом** дуги, а x_j – ее **концом**. Направленность дуги от начала к концу помечается стрелкой. Мощности множества вершин и дуг обозначаются соответственно через $|V|=n$ и $|E|=m$.

Таким образом, граф G можно определить как совокупность множеств вершин V и дуг E , между которыми определено отношение **инцидентности**, причем каждый элемент $e \in E$ инцидентен ровно двум элементам $v_i, v_j \in V$.

Граф является универсальным средством представления любых конечных дискретных объектов. В частности, графы применимы для наглядного представления как различного рода структур, так и операций.

Пример. Построить схему Красноярской железной дороги

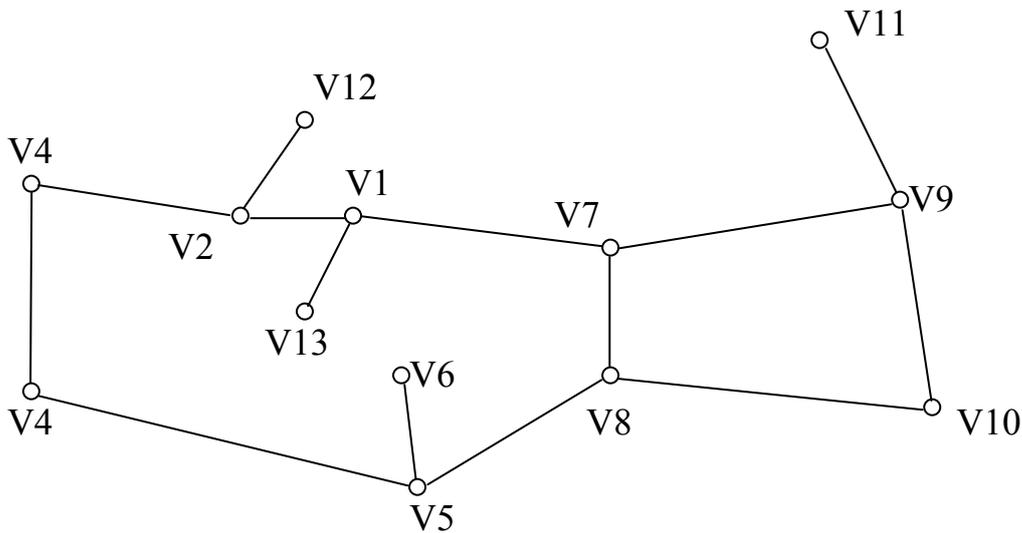


Рис. 16

- | | |
|---------------------------------|---------------------------|
| V1 – станция Красноярск; | V8 – станция Саянская; |
| V2 – станция Бугач; | V9 – станция Решоты; |
| V3 – станция Ачино; | V10 – станция Юрты; |
| V4 – станция Красная сопка; | V11 – станция Карабула; |
| V5 – станция Ташеба; | V12 – станция Коркина; |
| V6 – станция Черногорские копи; | V13 – станция Дивногорск. |
| V7 – станция Уяр; | |

2.2. Свойства элементов графа

К элементам графа относятся вершины и дуги, поэтому наряду с выражениями $v \in V$ и $e \in E$ допускаются выражения $v \in G$ и $e \in G$.

Вершины и дуги в графе связаны отношением инцидентности $R_H \subseteq E \times V$. Дуга (u, v) **инцидентна** (adjacent) вершинам u и v . При этом она является **выходящей** (исходящей) из вершины u и **входящей** (заходящей) в вершину v . Отношение инцидентности ne

зависит от направленности дуг.

Количественно отношение инцидентности для вершины u выражается числом $\rho^+(u)$ заходящих в нее дуг и числом $\rho^-(u)$ исходящих из нее дуг, называемых соответственно **полустепенями захода** и **исхода**. Их сумма образует **степень** $\rho(u)$ или $deg(u)$ вершины u :

$$\rho(u) = \rho^+(u) + \rho^-(u).$$

Вершине u **смежна** вершина v , если существует дуга (u, v) . Отношение смежности *зависит* от направленности дуг.

Число дуг, инцидентных двум вершинам u и v , характеризует их **кратность** $\rho(u, v)$:

$$\rho(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если нет дуги } (u, v), \\ 1, & \text{если есть одна дуга } (u, v) \\ > 1, & \text{если есть несколько дуг } (u, v)_1, \dots, (u, v)_j. \end{cases}$$

Примеры степени вершины и кратности дуги изображены на рис. 17.

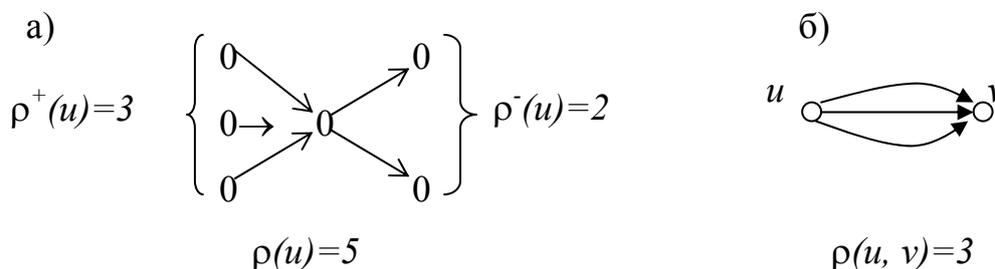


Рис. 17

Имеют место два особых случая для элементов графа:

- 1) вершина u с $\rho(u)=0$ называется **изолированной**;
- 2) дуга (u, u) называется **петлей**.

2.3. Матрица инцидентности

Матрица инцидентности A_{II} представляет отношение $E \times V$ и имеет размерность $m \times n$. Строкам матрицы A_{II} соответствуют дуги графа, а столбцам – вершины. В транспонированной матрице A_{II}^T они меняются местами: $V \times E$, $n \times m$. Матрица инцидентности A_{II} строится по следующему правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\rho(v_i, v_j) & \text{для пары } ((v_i, v_j), v_i), \\ \rho(v_i, v_j) & \text{для пары } ((v_i, v_j), v_j), \\ \alpha, & \text{для пары } ((v_i, v_j), v_i), (\alpha \neq 1, 0, -1); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В каждой строке матрицы A_{II} отличны от 0 только два элемента, соответствующие началу и концу дуги (дуг). Минусом будем помечать начало дуги. Случай α имеет место для петли в вершине v_i .

Примеры. а) Матрица инцидентности для схемы Красноярской железной дороги имеет вид

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13
V1		1					1						1
V2	1		1									1	
V3		1		1									
V4			1		1			1					
V5				1		1		1					
V6					1								
V7	1							1	1				
V8					1		1			1			
V9							1			1	1		
V10								1	1				
V11									1				
V12		1											
V13	1												

б) Матрица инцидентности A_{II} для графа G , изображенного справа от нее, имеет вид:

$$A_{II} = \begin{array}{l} (v_1, v_2) \\ (v_2, v_3) \\ (v_3, v_4) \\ (v_4, v_1) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \\ \left| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \end{array}$$

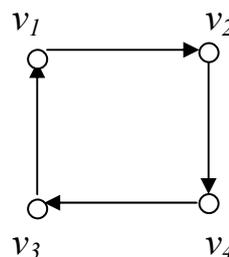


Рис. 18

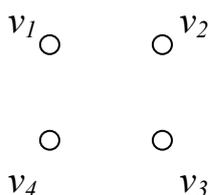
2.4. Понятие полноты

Для графа понятие полноты определяется относительно множества дуг E .

1. Нуль или **нулевая** полнота имеет место при $E = \emptyset$. Ей соответствует *нуль-граф* (рис. 19,а) или *нуль-отношение* $R \subset X \times X = \emptyset$, ($x \not\sim y$). Оно интерпретируется как "быть несравнимым".

2. Единица или **единичное** отношение Δ (быть равным) представляется диагональю двумерного множества E : $\Delta = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V\}$. Ему соответствует граф, все вершины которого изолированы и имеют петли (рис. 19,б).

а)



б)

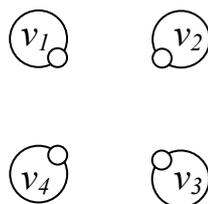


Рис. 19

3. **Универсальное** или полное отношение $X \times X = X^2$ – это *декартово* произведение множества X на себя. Оно выражается *полным* графом. Различают следующие виды универсального отношения:

а) **полное** $X \times X$ (с единицей) или *полный* граф G_p с петлями и двунаправленными

связями (рис. 20,а). Оно интерпретируется как "быть сравнимым со всеми и с собой";

б) **слабополое** $(X \times X) \setminus \Delta$ (без единицы) или *полный* граф G_p без петель (рис. 20,б). Оно интерпретируется как "быть сравнимым со всеми, но не с собой";

в) **однонаправленное** универсальное отношение – это бинарное отношение, наличие в котором дуги (v_i, v_j) исключает присутствие дуги (v_j, v_i) противоположной направленности $v_i, v_j \in V$ (рис. 20,в).

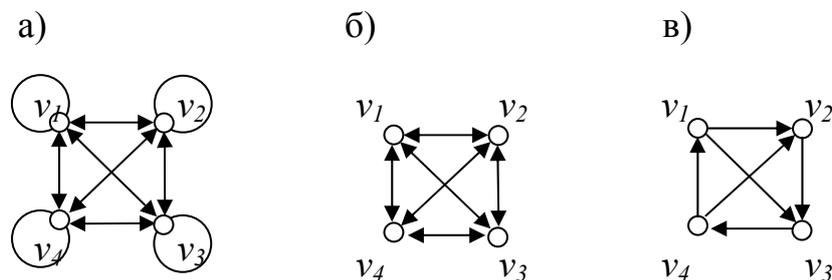


Рис. 20

2.5. Виды графов

Графы классифицируются относительно свойств их элементов.

1. По наличию ориентации дуг графы делятся:

на **ориентированные**, или **орграфы**, для двух любых вершин u и v выполняется условие $(u, v) \neq (v, u)$, т.е. стрелка направлена в одну сторону: $\forall (u, v) \in E [(u, v) \neq (v, u)]$;

на **неориентированные**, или **неорграфы**, для двух любых вершин u и v выполняется условие $(u, v) = (v, u)$, т.е. стрелки направлены в разные стороны: $\forall (u, v) \in E [(u, v) = (v, u)]$.

Неориентированные дуги называются **рёбрами** и представляются линиями без стрелок. Граф, имевший и дуги, и ребра, называется **смешанным**. Он сводится к орграфу заменой каждого ребра на 2 дуги противоположной направленности.

Каждому орграфу можно поставить в соответствие неорграф, заменив дуги первого ребрами, т.е. лишив их ориентации. Такой неорграф называется **соотнесённым**.

2. Относительно кратности дуг графы делятся:

на графы с **одиночными** ребрами, где для любых двух вершин u и v выполняется условие $\rho(u, v) \leq 1$, т.е. число рёбер не более одного: $\forall (u, v) \in E \rho(u, v) \leq 1$;

на **мультиграфы**, содержащие **кратные** ребра – с $\rho(u, v) \geq 1$.

3. Относительно структуры дуг графы делятся:

на графы с **простыми** ребрами;

на **гиперграфы** $H=(V, E)$, ребра которых инцидентны более, чем двум вершинам, т.е. сами являются графами. В примере, изображенном на рис. 21,а, $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E=\{(1, 2, 3, 4), (3, 5, 6)\}$.

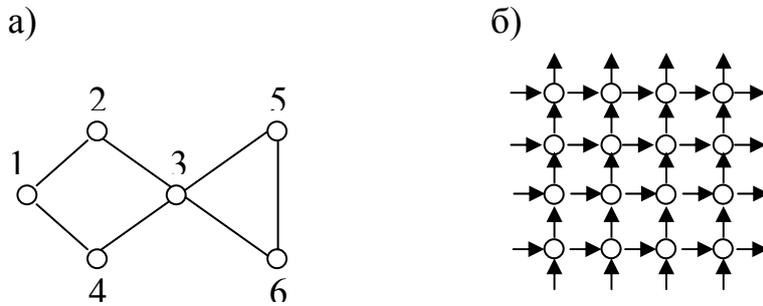


Рис. 21

4. Относительно регулярности структуры графы делятся: на нерегулярные или обычные; на регулярные, или однородные (рис. 21,б).

Однородный граф имеет степень 3, если для всех $u \in V$ $\rho(u)=3$. Для ориентированного однородного графа $\rho^+(u)=\rho^-(u)=3, u \in V$.

$$m = \sum_{i=1}^n \rho^+(v_i) = \sum_{i=1}^n \rho^-(v_i) = 3 * n$$

5. Относительно точек пересечения на плоскости графы делятся на **плоские** (планарные) и **неплоские**.

Граф $G=(V, E)$ называется плоским, если он может быть нарисован на плоскости (или сфере) таким образом, что произвольные две дуги графа не пересекаются друг с другом.

Надо различать плоские графы от нарисованных неплоских графов, для которых возможно устранить пересечения дуг.

На рис. 22,а изображен граф, нарисованный как неплоский. На рис. 22,б он представлен как плоский за счет другого начертания ребра (1, 3). Последний называют также **картой графа**.

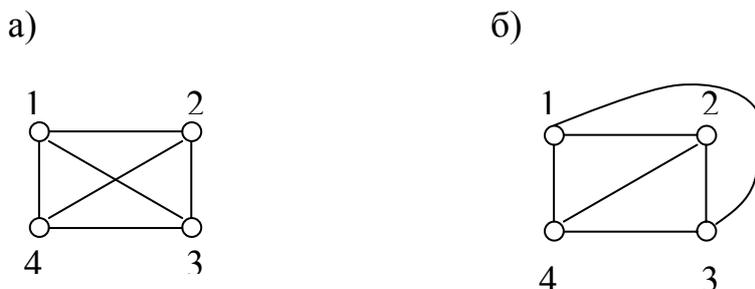


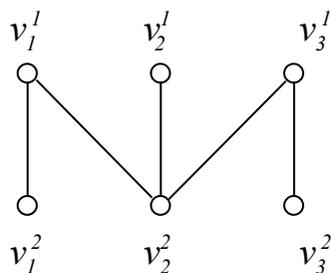
Рис. 22

Граф G может быть преобразован в **реберный** и **двудольный**.

Вершины реберного графа G_l , соответствуют ребрам исходного графа G (m вершин), а каждое его ребро соединяет вершины, которым в исходном графе соответствуют ребра, инцидентные одной вершине.

Двудольный граф $K(V_1 \cup V_2, E)$ содержит два подмножества вершин $V_1, V_2 \subset V$, $|V_1|=n_1, |V_2|=n_2$, причем $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и каждая дуга (ребро) графа соединяет вершины, принадлежащие только разным подмножествам (рис. 23,а).

а)



б)

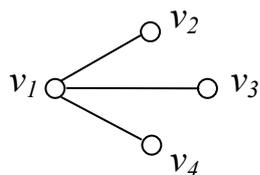


Рис. 23

Все вершины *полного* двудольного графа K_{n_1, n_2} , принадлежащие подмножествам V_1 , и V_2 , попарно соединены ребрами (дугами).

Граф, вершина v_i которого имеет степень $\rho(v_i)=n-1$, а остальные – $\rho(v_i)=1$, называется **звёздным** (рис. 23,б).

Граф с обозначенными (пронумерованными) вершинами называется **помеченным**. Пометка служит не только для идентификации вершин и дуг, но может также задавать семантику предметной области.

Примером помеченного графа является граф переходов конечного автомата, вершины которого интерпретируются внутренними, а дуги – входными (выходными) состояниями автомата.

Граф, каждой вершине которого сопоставлен *вес* c_i , называется графом со *взвешенными* вершинами.

Граф, каждому ребру которого e_j сопоставлен *вес* c_i , называется графом со *взвешенными* ребрами.

Полностью взвешенный граф имеет все вершины и дуги (ребра) *взвешенными*. Веса вершин и дуг имеют количественную меру.

Понятие "вес" интерпретируется в зависимости от контекста задачи. Например для вершин, оно может означать стоимость обработки, потенциал, высоту и т.д., а для дуг – стоимость транспортировки, величину тока, расстояние и т.д. В задачах многокритериальной оптимизации вершине и дуге может сопоставляться более чем один вес.

2.6. Части, суграфы и подграфы

Части графа именуется в направлении усиления их свойств в следующей последовательности: **часть** → **суграф** → **нулевой суграф** → **покрывающий суграф** → **остов** → **подграф (клика)** → **звездный подграф**.

1. Граф H является **частью** графа G ($H \subset G$), если вершины графа H включают в себя вершины части G : $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Примеры графа и его части приведены на рис. 24,а, б.

2. Если множества вершин графа G и его части H совпадают: $V(H)=V(G)$, то такая часть графа называется **суграфом** (рис. 24,в). Если $E(H)=\emptyset$, то *суграф* является **нулевым**.

3. Суграф, каждой вершине которого инцидентна хотя бы одна дуга, ($\forall v_i \in N \exists e_j \in N (e_j \text{ adj } v_i)$) называется **покрывающим**. В нем нет изолированных вершин (рис. 24,г).

4. Покрывающий суграф с минимальным числом ребер называется **остовом** или стягивающей сетью (рис. 24,д).

5. Часть N графа G , сохраняющая все дуги, инцидентные выделенным вершинам графа G , называется **подграфом**, порожденным графом G (рис. 24,е).

6. Полный подграф N графа G называется **кликкой** (рис. 24, ж). *Каждый подграф полного графа является кликой.*

7. Подграф, образованный выделением одной вершины $v_i \in G$ и всех смежных с нею вершин, называется **звездным** (рис. 24,з).

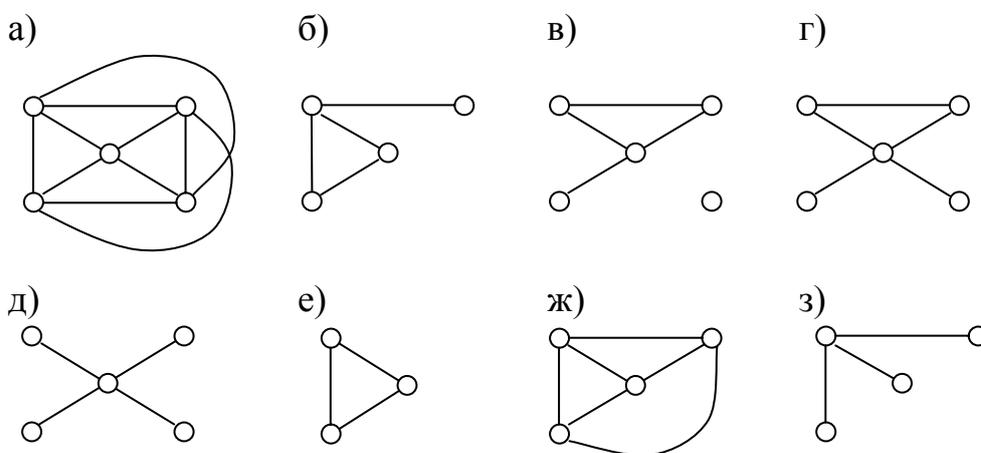


Рис. 24

2.7. Маршруты, цепи и циклы

Маршрут или **путь** – это такая последовательность дуг $(e_1, \dots, e_i, \dots, e_l)$, что каждые 2 соседних дуги имеют общую, инцидентную им вершину, причем e_1 – первая дуга, а e_l – последняя дуга маршрута $l \leq m$. В неорграфе маршрут выражается через последовательность ребер, поскольку направленность маршрута несущественна. Дуга e_i может встречаться в маршруте более одного раза.

Поскольку каждая дуга графа может быть представлена парой смежных вершин, маршрут может выражаться через последовательность попарно смежных вершин, число которых на 1 больше числа дуг: $(v_1, \dots, v_j, \dots, v_{l+1})$. Здесь *началом* v_1 маршрута является вершина, инцидентная e_1 , и не инцидентная e_l , а *концом* v_{l+1} маршрута – вершина, инцидентная e_l и не инцидентная e_{l-1} . **Внутренние** (*промежуточные*) вершины инцидентны дугам маршрута. Начало (конец) маршрута может оказаться внутренней вершиной, если она входит в маршрут более одного раза.

Пример. Выразить маршруты μ соединяющие вершины v_1 и v_3 графа G , через дуги и вершины (рис. 25).

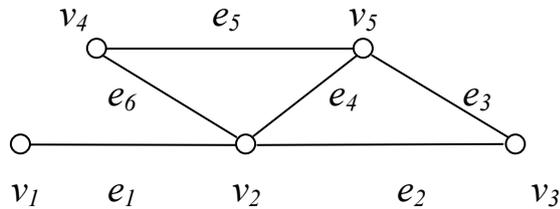


Рис. 25

$$\mu_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_2) = (v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_3);$$

$$\mu_2 = (e_1, e_4, e_5, e_6, e_2) = (v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3);$$

$$\mu_3 = (e_1, e_2) = (v_1, v_2, v_3).$$

Маршруты μ_1 и μ_2 , соединяющие вершины v_1 и v_3 , включают одинаковое число дуг (вершин), но различаются их составом. От маршрута μ_3 их отличает *число* входящих в них дуг (вершин), называемое **длиной** маршрута l .

Если пара вершин (v_i, v_j) является элементом бинарного отношения R^2 , то последовательность вершин $(v_1, \dots, v_j, \dots, v_{l+1})$, представляющая собой маршрут μ длины l , можно считать элементом $l+1$ -арного отношения R^{l+1} .

В графе $G=(V, E, C)$ со взвешенными дугами (ребрами) маршруту μ сопоставляется **вес**: $c(\mu) = \sum_{i=1}^l c_i$, где c_i – вес дуги e_i .

Как следует из примера, маршруты различаются как длиной (μ_1, μ_3), так и перечнем входящих в них дуг (μ_1, μ_2).

Цепью называется маршрут, в котором все дуги различны (μ_2).

Простой называется цепь, в которой все вершины различны (μ_3).

Циклическим называется маршрут с $v_l = v_{l+1}$. Он может содержать повторяющиеся дуги (вершины).

Циклом называется замкнутая цепь.

Простым называется цикл, у которого все вершины различны.

Участком маршрута (e_1, \dots, e_l) называется его часть: $(e_i, \dots, e_j) \subset (e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_l)$.

2.8. Деревья

Деревья являются простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в программировании. Граф без циклов называется **ациклическим**, или **лесом**. Связанный ациклический граф называется (**свободным**) **деревом**.

Ориентированным деревом (или **ордеревом**, или **корневым деревом**) называется оргграф со следующими свойствами:

1. существует единственный узел, полуступень которого равна 0. Он

называется **корнем** дерева;

2. полуступень всех остальных узлов равна 1;
3. каждый узел достижим из корня.

На рис. 27 приведены диаграммы всех различных ориентированных деревьев с 4 узлами.

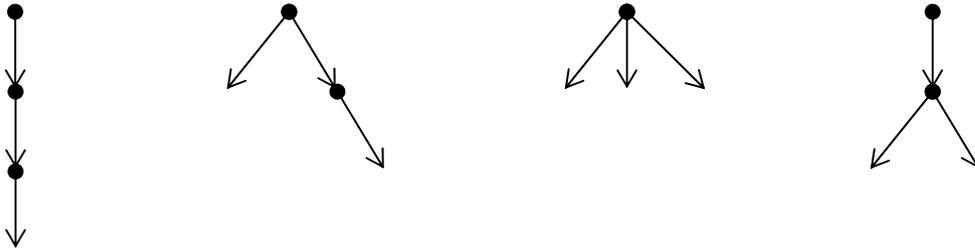


Рис. 27

Бинарное дерево – это конечное множество узлов, которое либо пусто, либо состоит из корня и двух непересекающихся бинарных деревьев – левого и правого. Бинарное дерево не является упорядоченным деревом. На рис. 28 приведены две диаграммы деревьев, которые изоморфны как упорядоченные, ориентированные и свободные деревья, но не изоморфны как бинарные деревья.



Ордеревое называется **выровненным**, если все узлы, степень которых меньше 2, располагаются на одном или двух последних уровнях. На рис. 29 приведены диаграммы выровненного (слева) и невыровненного (справа) деревьев.

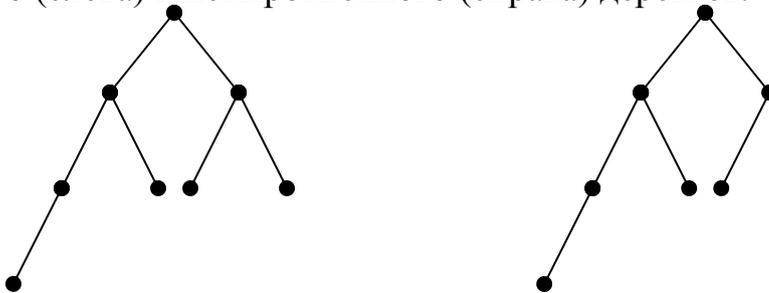


Рис. 29

(Бинарное) дерево называется **подровненным деревом**, или **АВЛ-деревом** (Адельсон-Вельский и Ландис), или **сбалансированным деревом**, если для любого узла высота левого и правого поддеревьев отличается не более чем на 1. на рис. 30 приведена диаграмма максимально несимметричного сбалансированного дерева, в котором для всех узлов высота левого поддерева ровно на 1 больше высоты правого поддерева.

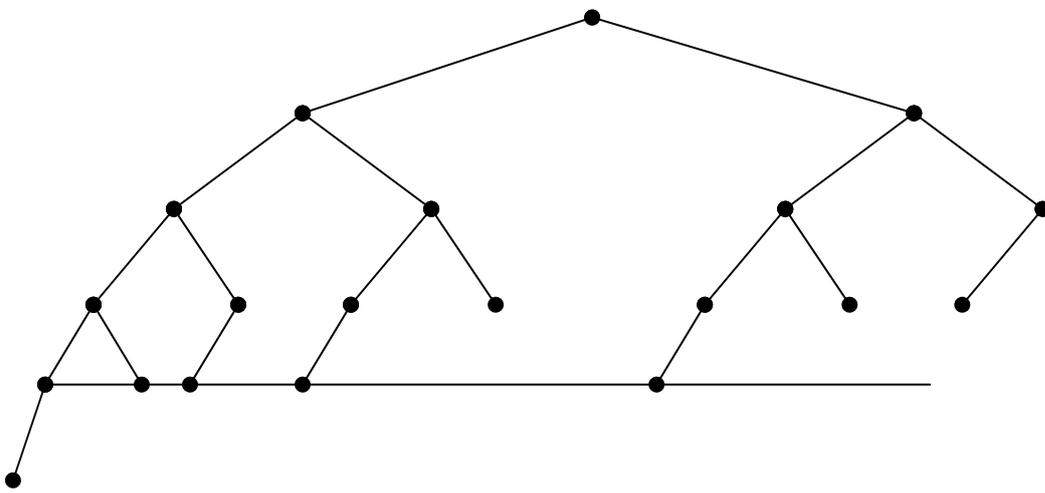


Рис. 30

Список литературы

1. Математика. Базовый курс. Юнита 1. Элементы математической логики. Теория множеств. Функции/ Под ред. Н.М. Пилипенко. – М.: СГИ, 2000. – 104 с.
2. Микони С.В. Элементы дискретной математики: Учебное пособие. – СПб: ПГУПС, 1999. – 125 с.
3. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков – СПб: Питер, 2001. – 304 с.: ил.
4. Задания к выполнению контрольных работ по курсу «Дискретная математика». – Самара: СамИИТ, 2001. – 8 с.
5. Колмогоров А.Н. и др. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 256 с.