Министерство образования Российской Федерации

Воронежский государственный университет

Булгакова И.Н., Федотенко Г.Ф.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Часть 2

Учебное пособие
для студентов по специальности

Прикладная математика и информатика (010200)
Прикладная информатика в юриспруденции (351400)
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (351500)

Операция замыкания. Основные замкнутые классы.

Воронеж
2004

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ ВГУ 16 декабря 2003 года, протокол № 3.

Булгакова И.Н., Федотенко Г.Ф. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения: Учеб. пособие. — Воронеж: Из-во ВГУ, 2004. — 62 с.

Рецензент: д. ф.-м. н., профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета ВГУ Сильченко Ю.Т.

Данная работа содержит краткое изложение курса лекций по дисциплине «Дискретная математика», читаемому на факультете ПММ. Пособие содержит примеры, демонстрирующие использование изложенной теории для решения конкретных задач. Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Для закрепления материала в конце параграфов приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть также использованы для проведения практических занятий.

Учебное пособие подготовлено на кафедре математических методов исследования операций факультета ПММ Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов 1 курса д/о и в/о, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика», а так же будет полезна всем, изучающим дискретную математику.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители: Булгакова Ирина Николаевна
Федотенко Галина Федоровна
Редактор: Тихомирова О.А.

4. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

4.1 Высказывания. Операции над высказываниями. Формулы алгебры высказываний. Таблицы истинности

Под высказыванием понимают любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Восклицательное или вопросительное предложения не являются высказываниями. Будем обозначать высказывания латинскими буквами: $\boldsymbol{A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots x, y, z, \ldots}$. Логическое значение высказывания «*истина*» («*ложь*») обозначим цифрой «1» (цифрой «0»).

Например, предложения:

1. «Москва — столица России» — истинное высказывание.
2. «Число 3 больше 6» — ложное высказывание.

Предложения:

1. «Который час?»
2. «Докажите теорему Ферма».
3. «Да здравствует мир на Земле!»

не являются высказываниями.

1. ***Операция дизъюнкция*** (логическое сложение) $\vee$ — читается «или». Переводится с латыни как «разъединяю».

Дизъюнкцией двух высказываний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется высказывание $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$, и ложно, когда оба высказывания $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ ложны.

2. ***Операция конъюнкция*** (логическое умножение) $\boldsymbol{\&}$ ($\wedge$) читается: «и». Переводится с латыни как «связываю».

Конъюнкцией двух высказываний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется высказывание $\boldsymbol{A \& B}$, которое истинно тогда и только, когда истинны одновременно $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, и ложно, когда хотя бы одно из них ложно.

3. ***Операция импликация*** (следования) $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$. Читается «если $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{B}$» («из $\boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{B}$»).

Импликацией двух высказываний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется высказывание $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, которое ложно, когда $\boldsymbol{A}$ истинно и $\boldsymbol{B}$ ложно, и истинно во всех остальных случаях.

4. ***Операция эквиваленция*** $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A \sim B}$). Читается: «$\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{B}$».

Эквиваленцией двух высказываний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называют высказывание $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$, которое истинно тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одновременно истинны или одновременно ложны, и ложно во всех остальных случаях.

Таблица истинности для этих операций такова:

A	B	$A\vee B$	$A\& B$	$A\rightarrow B$	$A\leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

5. ***Операция отрицание*** $\overline{A}$ (или $\rceil A$). Читается: «не A».

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\overline{A}$, которое истинно, если A ложно, и ложно, если A истинно.

Таблица истинности для $\overline{A}$ имеет вид:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Рассмотрим еще три логические операции, определяемые через основные логические операции.

6. ***Штрих Шеффера*** $A|B$ (читается «A несовместно с B»): $A|B = \overline{A\& B}$.

Штрихом Шеффера двух высказываний A и B называется высказывание $A|B$, которое ложно только тогда, когда оба высказывания истинны, и истинно в остальных случаях.

7. ***Стрелка Пирса (штрих Лукасевича)*** $A\downarrow B$ (читается «ни A, ни B»): $A\downarrow B = \overline{A\vee B}$.

Стрелкой Пирса двух высказываний A и B называется высказывание $A\downarrow B$, которое истинно только тогда, когда оба высказывания ложны, и ложно в остальных случаях.

8. ***Сложение «по модулю два»:*** $A\oplus B = \overline{A\leftrightarrow B}$.

Сложением «по модулю два» двух высказываний A и B называется высказывание $A\oplus B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A и B одновременно ложны или одновременно истинны, и истинно в остальных случаях.

A	B	$A\|B$	$A\downarrow B$	$A\oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Отметим, что все операции, кроме импликации, симметричны.

Из этих простых (элементарных) высказываний строятся составные (сложные) высказывания.

Формулой алгебры логики высказываний называется всякое составное высказывание, которое получается комбинированием конечного числа указанных выше основных операций (Ú**,&,**®**,** « **,** ù **).** Для любых формул можно построить ***таблицу истинности***.

Таблицей истинности формулы называется сводная таблица всех значений входящих в нее высказываний и соответствующих значений самой формулы. Таблица содержит $2^{\boldsymbol{n}}$ строк, где $\boldsymbol{n}$ — число простых высказываний.

Формула $\boldsymbol{U}$ называется ***тождественно истинной***, или ***тавтологией*** (записывается $\boldsymbol{U}$ ° 1), если для всех наборов значений входящих в нее переменных (высказываний) она принимает значение 1 («истинно»).

Формула $\boldsymbol{U}$ называется ***тождественно ложной***, или ***противоречием*** (записывается $\boldsymbol{U}$ ° 0), если для всех наборов значений входящих в нее переменных (высказываний) она принимает значение 0 («ложь»).

Заметим, что отрицание любой тавтологии есть противоречие: $\left(\overline{\boldsymbol{U} \text{ ° } 1}\right)$ ° 0. Все остальные формулы называются ***выполнимыми***.

Пример 1 . Следующие высказывания записать формулами. Составить для них таблицы истинности.

a) Если Джон умен, а Джим глуп, то Джон получает приз.

b) Джон получает приз в том и только том случае, если Джон умен или если Джим глуп.

c) Если Джим глуп, и Джону не удается получить приз, то Джон не умен.

Решение. Обозначим простые высказывания буквами:

$\boldsymbol{A}$ — Джон умен;

$\boldsymbol{B}$ — Джим глуп;

$\boldsymbol{C}$ — Джон получает приз.

Тогда составные высказывания запишем в виде формул:

a) $(\boldsymbol{A} \,\&\, \boldsymbol{B})$ ® $\boldsymbol{C}$;

b) $\boldsymbol{C}$ « $(\boldsymbol{A}$ Ú $\boldsymbol{B})$;

c) $(\boldsymbol{B} \,\&\, \overline{\boldsymbol{C}})$ ® $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Составим соответствующие им таблицы истинности:

a)

A	*B*	*C*	*A & B*	(*A & B*) ® *C*
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

b)

A	*B*	*C*	*A* Ú *B*	*C* « (*A* Ú *B*)
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

c)

A	*B*	*C*	$\overline{C}$	$B \& \overline{C}$	$\overline{A}$	($B \& \overline{C}$) ® $\overline{A}$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Заметим, что здесь $\boldsymbol{n} = 3$ простых высказываний. Поэтому таблицы истинности содержат $2^n = 8$ строк.

Приведем таблицу перевода некоторых (наиболее часто встречающихся) выражений естественного языка на символический язык алгебры логики высказываний.

Форма высказывания естественного языка	Соответствующая формула языка алгебры логики
Не $\boldsymbol{A}$; неверно, что $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ не имеет места	$\overline{\boldsymbol{A}}$
$\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$; как $\boldsymbol{A}$, так и $\boldsymbol{B}$; не только $\boldsymbol{A}$, но и $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ вместе с $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$, несмотря на $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$, в то время как $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{AB}$ или $\boldsymbol{A}$ & $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}$, но не $\boldsymbol{B}$; не $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}$ или $\boldsymbol{A}$ & $\overline{\boldsymbol{B}}$
$\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ или оба	$\boldsymbol{A}$ Ú $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}$ либо $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$, разве что $\boldsymbol{B}$; либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$; не $\boldsymbol{A}$, разве что не $\boldsymbol{B}$; либо не $\boldsymbol{A}$, либо не $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$, но не оба	$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}$ Ú $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$
либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{A}$, разве что $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{C}}$ Ú $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{BC}$
либо $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, либо $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{AB}\overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{D}}$ Ú $\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{CD}$
если $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ только, если $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ достаточно для $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ только при условии, что $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B}$ необходимо для $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$, значит $\boldsymbol{B}$; для $\boldsymbol{B}$ достаточно $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ влечет $\boldsymbol{B}$; для $\boldsymbol{A}$ необходимо $\boldsymbol{B}$; все $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}$; из $\boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B}$ тогда, когда $\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ ® $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}$ эквивалентно $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$, если и только если $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ необходимо и достаточно для $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ « $\boldsymbol{B}$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Переведите на язык алгебры логики следующие высказывания:
   a) Если светит солнце, то для того, чтобы не было дождя и достаточно, чтобы дул ветер.
   b) Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.

c) Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.
d) Если ветра нет, то для дождя необходима пасмурная погода.
e) Если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет. Но дождь идет. Значит, нет ветра.
f) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра.
g) Если для солнечной погоды необходимо отсутствие дождя, то для того, чтобы пошел дождь, достаточно, чтобы погода была пасмурной и безветренной.

Указание: для перевода на язык алгебры логики необходимо каждый раз предварительно выделить элементарные высказывания. Например: «светит солнце» можно обозначить буквой С, «дует ветер» — буквой В, «идет дождь» – буквой Д, «погода пасмурная» — буквой П.

2. Установите, истинно или ложно высказывание:
   a) $2 \in \{\boldsymbol{x} \mid 2\boldsymbol{x}^3 - 3\boldsymbol{x}^2 + 1 = 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\}$;
   b) $-3 \in \left\{\boldsymbol{x} \mid \frac{\boldsymbol{x}^3 - 1}{\boldsymbol{x}^2 + 2} < -2, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\right\}$;
   c) $3 \in \left\{\frac{2\boldsymbol{n}+1}{3\boldsymbol{n}-2} \mid \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}\right\}$;
   d) $\{1\} \in \boldsymbol{N}$;
   e) $\{1\} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$, где $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$ — множество всех подмножеств множества $\boldsymbol{N}$;
   f) $\{1, -1, 2\} \subset \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - 1 = 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}\}$;
   g) $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - 1 = 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}\} \subset \{1, -1, 2\}$;
   h) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$;
   i) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

3. Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ обозначают высказывания:
   $\boldsymbol{p}$ — «Я учусь в школе»,
   $\boldsymbol{q}$ — «Я люблю математику».

   Прочтите следующие высказывания:

   a) $\overline{\boldsymbol{p}}$;
   b) $\overline{\overline{\boldsymbol{p}}}$;
   c) $\boldsymbol{p} \,\&\, \boldsymbol{q}$;
   d) $\overline{\boldsymbol{p} \,\&\, \boldsymbol{q}}$.
   e) $\boldsymbol{p} \,\&\, \overline{\boldsymbol{q}}$;
   f) $\overline{\boldsymbol{p}} \,\&\, \boldsymbol{q}$;
   g) $\overline{\boldsymbol{p}} \,\&\, \overline{\boldsymbol{q}}$;

4. Пусть x, x', y, y' означают соответственно «7 — простое число», «7 — составное число», «8 — простое число», «8 — составное число»:
   a) какие из предложений $x \,\&\, y,\ x \,\&\, y',\ x' \,\&\, y,\ x \,\&\, y'$ истинны и какие ложны ?;
   b) то же с заменой конъюнкций на дизъюнкцию;
   c) то же для предложений $\bar{x}, \bar{y}, \overline{x'}, \overline{y'}$.

5. Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

   a) $p \to p$;
   b) $p \vee \bar{p}$;
   c) $\overline{p \wedge \bar{p}}$;
   d) $p \leftrightarrow \bar{p}$;
   e) $\bar{p} \to p$;
   f) $p \leftrightarrow p$;
   g) $(p \vee p) \to p$;
   h) $\overline{p \,\&\, (p \leftrightarrow \bar{p})}$;
   i) $(p \to p) \vee \bar{p}$;
   j) $p \leftrightarrow p \,\&\, (\bar{p} \to p \,\&\, p)$;
   k) $p \vee (p \leftrightarrow \bar{p})$;
   l) $\overline{p \to \bar{p}}$;
   m) $\overline{p \leftrightarrow \bar{p}}$;
   n) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$.

6. Составить таблицы истинности для формул:
   a) $\bar{x} \vee \bar{y}$;
   b) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$;
   c) $(x \wedge y) \vee z$;
   d) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$;
   e) $(x \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \wedge \bar{z})$;
   f) $((x \to z) \leftrightarrow \neg y) \downarrow x$;
   g) $(x \to (z \vee \bar{y})) \oplus \bar{x}$;
   h) $(z \,|\, (\neg y) \to z) \to (x \,\&\, y)$;
   i) $\overline{xyz \,|\, (\bar{x} \vee \bar{y})} \to z$;
   j) $((x \downarrow y) \downarrow z) \leftrightarrow (x \oplus \bar{y})$;
   k) $((xyz) \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (z \,|\, y)$
   l) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

7. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:
   a) $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \,\&\, y}}$;
   b) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;
   c) $(x \to y) \vee (y \to x)$;
   d) $x \to (x \vee y)$;
   e) $\overline{xy} \leftrightarrow (x \,|\, y)$;
   f) $(x \to y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$;
   g) $(x \oplus y) \leftrightarrow \overline{(x \leftrightarrow y)}$;
   h) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow (x \downarrow y)$;
   i) $(x \to y) \to ((z \to y) \to ((x \vee y) \to z))$
   j) $(x \to y) \oplus (x \to z)$.

8. a) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

b) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значениях $\bar{x} \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow \bar{y}$?
c) Известно, что x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликации $\bar{x} \wedge y \to z$; $\bar{x} \to (y \vee z)$?
d) Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{x \to y} \to y$; $(x \to y) \to z$?

9. Найдите логические значения x и y, при которых выполняются равенства:
   a) $(1 \to x) \to y = 0$;
   b) $x \vee y = \bar{x}$.

4.2 Равносильные формулы.
Основные равносильности алгебры высказываний

Две формулы алгебры логики U_1 и U_2 называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения (0 или 1) при одинаковых наборах значений входящих в них высказываний (пишут $U_1 \equiv U_2$).

Например, формулы $U_1 = A \to B$, $U_2 = \bar{A} \vee B$ — равносильные формулы:
$A \to B \equiv \bar{A} \vee B$, т.к. U_1 и U_2 либо одновременно 0, либо одновременно 1 при любом наборе значений высказываний, входящих в эти формулы.

A	B	$A \to B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Имеет место
Теорема: $U_1 \equiv U_2$ тогда и только тогда, когда $(U_1 \leftrightarrow U_2) \equiv 1$ **(доказать!).**

Равносильность формул можно доказывать либо с ***помощью таблиц истинности***, либо ***методом равносильных*** (эквивалентных) ***преобразований***, используя основные равносильности алгебры логики высказываний. Основные равносильности также применяются для ***упрощения формул***, для приведения формул к заданному виду.

Основные равносильности алгебры высказываний

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ — закон двойного отрицания;
2. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ — закон исключения третьего;
3. $A \& \overline{A} \equiv 0$ — закон противоречия;
4. $\left.\begin{array}{l} A \vee A \equiv A \\ A \& A \equiv A \end{array}\right\}$ — закон идемпотентности;
5. $\begin{array}{l} A \vee 0 \equiv A;\ A \vee 1 \equiv 1; \\ A \& 0 \equiv 0;\ A \& 1 \equiv A; \end{array}$
6. $\left.\begin{array}{l} A \& (B \vee A) \equiv A \\ A \vee (B \& A) \equiv A \end{array}\right\}$ — закон поглощения;
7. $\left.\begin{array}{l} A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \\ A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C \end{array}\right\}$ — закон ассоциативности;
8. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ — первый дистрибутивный закон;
9. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ — второй дистрибутивный закон;
10. $\left.\begin{array}{l} \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \& \overline{B} \\ \overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \end{array}\right\}$ — законы де Моргана;
11. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B;$
12. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A) \equiv (\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee A);$
13. $A \leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \& \overline{B}) \vee (A \& B);$
14. $A \oplus B \equiv \overline{A \leftrightarrow B};$
15. $A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B};$
16. $A \mid B = \overline{A \& B}.$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

a) $x \& (y \rightarrow z) = (x \& y) \rightarrow (x \& z)$; b) $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$;

c) $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$; d) $x \to (y \leftrightarrow z) = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$;

e) $x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$; f) $x \,\&\, (y \leftrightarrow z) = (x \,\&\, y) \leftrightarrow (x \,\&\, z)$;

g) $x \to (y \oplus z) = (x \to y) \oplus (x \to z)$; h) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$.

2. Используя основные равносильности, доказать равносильность формул ***U*** и ***B***, когда:
   a) $U = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}$; $B = z \to xy$;
   b) $U = (x \to y) \to (x\bar{y} \oplus (x \leftrightarrow y))$; $B = x\bar{y} \vee \bar{y}x$;
   c) $U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z)$; $B = y \to (x \to z)$;
   d) $U = (x \mid y \to z) \vee (x \to z)$; $B = (x \to y) \vee z$;
   e) $U = \left(\left(\bar{z} \vee y\right)^{-} x\right) \leftrightarrow \bar{x}z$; $B = xyz \oplus yz \oplus 1$;
   f) $U = ((x \vee y) \leftrightarrow z) \mid xyz$; $B = xyz \oplus 1$.

3. Выразить все основные операции:
   a) через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
   b) через конъюнкцию и отрицание;
   c) через дизъюнкцию и отрицание;
   d) через импликацию и отрицание.

4. a) Выразить отрицание импликации через основные операции так, чтобы отрицания стояли только над простыми высказываниями.
   b) Выразить операцию дизъюнкция через импликацию.

5. Доказать, что операция отрицания не может быть выражена через основные операции (бинарные) над высказываниями.

6. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или в кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? В ответе отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях.

4.3 Решение логических задач с помощью алгебры высказываний

Условие логической задачи записываем в виде формулы алгебры высказываний, вводя соответствующие обозначения для простых высказываний, сформулированных в задаче. Далее с помощью равносильных преобразований упрощаем формулу (составное высказывание). В результате получаем более простую словесную формулировку упрощенной формулы, на основании которой даем ответ на вопрос задачи.

Пример 1. На вопрос: «Кто из трех студентов готовился к экзамену?» получен верный ответ — «Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров, но неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров». Кто готовился к экзамену?

Решение. Обозначим простые высказывания «готовился к экзамену Иванов» (Петров, Сидоров) соответственно буквами A (B, C). Тогда условие задачи можно записать в виде формулы:

$$(A \to C)\&(\overline{B \to C}),$$

т.к. составные высказывания $(A \to C)$ и $(\overline{B \to C})$ («Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров» и «Неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров») выполняются одновременно и поэтому они должны быть соединены логической связкой **&** («и»). Выполняя равносильные преобразования, получим

$$(A \to C)(\overline{B \to C}) = (\overline{A} \vee C)(\overline{\overline{B} \vee C}) = (\overline{A} \vee C)(\overline{\overline{B}} \& \overline{C}) = \overline{A}B\overline{C} \vee BC\overline{C} = \overline{A}B\overline{C}.$$

Теперь читаем формулу: «Не готовился Иванов и не готовился Сидоров и готовился Петров к экзамену».

Ответ: К экзамену готовился Петров.

Пример 2. «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегрэ. Есть новости?
- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жусье считает, что или Этьен убийца или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем позвонила ….
- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Какой вывод сделал Мегрэ?

Решение. Введем следующие элементарные высказывания:

$$A \equiv \{\textit{Франсуа был пьян}\},$$
$$B \equiv \{\textit{Этьен убийца}\},$$
$$C \equiv \{\textit{Франсуа лжет}\},$$
$$D \equiv \{\textit{Убийство произошло после полуночи}\}.$$

Инспектора комиссара Мергэ установили, что:

$$A \to (B \vee C) \equiv 1,$$

$$\boldsymbol{B} \vee \left(\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{D}\right) \equiv \mathbf{1},$$
$$\boldsymbol{D} \to \left(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}\right) \equiv \mathbf{1}.$$

Рассмотрим конъюнкцию этих трех сложных высказываний и упростим ее:
$$\left(\boldsymbol{A} \to \left(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}\right)\right) \wedge \left(\boldsymbol{B} \vee \left(\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{D}\right)\right) \wedge \left(\boldsymbol{D} \to \left(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}\right)\right) \equiv \mathbf{1}.$$
Используя формулу $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{u}} \vee \boldsymbol{v}$, освободимся от импликации:
$$\left(\overline{\boldsymbol{A}} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}\right) \wedge \left(\boldsymbol{B} \vee \left(\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{D}\right)\right) \wedge \left(\overline{\boldsymbol{D}} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}\right) \equiv \mathbf{1}.$$
Применим второй дистрибутивный закон к первому и третьему множителям
$$\left(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vee \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{D}}\right)\left(\boldsymbol{B} \vee \overline{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{D}\right) \equiv \mathbf{1}.$$
Раскрывая скобки по первому дистрибутивному закону дважды и применяя закон поглощения $\boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u}$, получим
$$\boldsymbol{B} \vee \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{DC} \vee \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{D}} \equiv \mathbf{1}.$$
Так как $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0}$, то окончательно имеем:
$$\boldsymbol{B} \vee \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{DC} \equiv \mathbf{1}.$$

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи, Франсуа лгал. Но комиссару Мергэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т.е. что
$$\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \overline{\boldsymbol{C}} = \mathbf{1}$$
или
$$\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{C} = \mathbf{0},$$
и, следовательно, результат, вытекающий из показаний инспекторов,
$$\boldsymbol{B} \vee \left(\overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{D} \wedge \boldsymbol{C}\right) = \mathbf{1},$$
при этом условии дает
$$\boldsymbol{B} \vee \mathbf{0} = \mathbf{1}, \text{ т.е. } \boldsymbol{B} = \mathbf{1}.$$

Ответ: Убийство совершил Этьен.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:
   1) Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев — 7-ой».
   2) Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев — 8-ой».
   3) Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин — 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

2. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:
   1) Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Новозыбкова».
   2) Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров – из Трубчевска».
   3) Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Дятькова».
   4) Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов — из Жуковки».
   5) Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове».

   Откуда приехал каждый из школьников, если одно из утверждений верно, а другое ложно?

3. Семья, состоящая из отца $\boldsymbol{A}$, матери $\boldsymbol{B}$ и трех дочерей $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:
   1) Когда отец $\boldsymbol{A}$ смотрит передачу, то мать $\boldsymbol{B}$ делает то же.
   2) Дочери $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, обе или одна из них, смотрят передачу.
   3) Из двух членов семьи — мать $\boldsymbol{B}$ и дочь $\boldsymbol{C}$ – смотрят передачу одна и только одна.
   4) Дочери $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ или обе смотрят, или обе не смотрят.
   5) Если дочь $\boldsymbol{E}$ смотрит передачу, то отец $\boldsymbol{A}$ и дочь $\boldsymbol{D}$ делают то же.

   Кто из членов семьи в этот вечер смотрел передачу?

4. На вопрос «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ — «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

5. Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:
   1) Если первый сдал, то и второй сдал.
   2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
   3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
   4) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

6. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то Коля либо ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду. Если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

7. Четыре студентки, имена которых начинаются буквами ***A***, ***E***, ***C***, ***P***, посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:
   1) Понедельник — день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
   2) ***C*** и ***P*** не могут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
   3) Если ***C*** пойдет в среду или ***P*** — в четверг, то ***E*** согласится побывать на занятиях в пятницу.
   4) Если ***A*** не пойдет в ВУЗ в четверг, то ***E*** позволит себе сходить туда в среду.
   5) Если ***A*** и ***P*** будут в институте в среду, то ***C*** сможет пойти в пятницу.
   6) Если ***P*** в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то ***A*** придется сходить в институт во вторник, а ***C*** — в четверг.

8. Четыре друга — Антонов (***А***), Вехов (***В***), Сомов (***С***), Деев (***Д***) решили провести каникулы в четырех различных городах — Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:
   1) Если ***А*** не едет в Москву, то ***С*** не едет в Одессу.
   2) Если ***В*** не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то ***А*** едет в Москву.
   3) Если ***С*** не едет в Ташкент, то ***В*** едет в Киев.
   4) Если ***Д*** не едет в Москву, то ***В*** не едет в Москву.
   5) Если ***Д*** не едет в Одессу, то ***В*** не едет в Москву.

9. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.
   1) Клод утверждал, что Жак лжет.
   2) Жак обвинял во лжи Дика.
   3) Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.
   4) Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

5. АЛГЕБРА БУЛЯ

5.1 Булевы функции. Равенство функций и равносильность формул. Принцип двойственности

Переменная x, принимающая два значения, 0 или 1, называется ***булевой переменной.***

Пусть $E = \{0,1\}$. Тогда $E^n = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n\ \text{раз}}$ — множество упорядоченных двоичных наборов длины n:

$$E^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in E, i = 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Говорят, что задана ***булева функция*** n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если задан закон, по которому каждому двоичному набору $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$ ставится в соответствие 0 или 1: $f : E^n \to E$.

Таким образом, область определения булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть $D(F) = E^n$, множество значений — $R(f) = E$, где мощность $|D(f)| = 2^n$, $|R(f)| = 2$.

Булева функция может быть задана при помощи:

1. описания;
2. таблицы истинности;
3. формулы алгебры высказываний;
4. множества истинности $E_f = \{ f(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1\}$;
5. набора значений;
6. функциональной схемы.

Рассмотрим пример, на котором проиллюстрируем указанные способы задания булевых функций.

Пример. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ принимает значений 1 на наборах (a_1, a_2, a_3), в которых большинство нулей, а на остальных наборах ее значение равно 0.

Описанная функция может быть задана с помощью таблицы истинности (рис. 1):

В случае n переменных булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задается таблицей, содержащей 2^n строк, т.к. $\left|E^n\right| = |E|^n = 2^n$. В дальнейшем всегда будем располагать наборы в таблице истинности так, как показано на рис.2.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Рис. 1

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$
0	0	…	0	0	$f(0,0,...,0,0)$
0	0	…	0	1	$f(0,0,...,0,1)$
0	0	…	1	0	$f(0,0,...,1,0)$
0	0	…	1	1	$f(0,0,...,1,1)$
…	…	…	…	…	…
1	1	…	0	1	$f(1,1,...,0,1)$
1	1	…	1	0	$f(1,1,...,1,0)$
1	1	…	1	1	$f(1,1,...,1,1)$

Рис. 2

При фиксированном порядке расположения наборов $(a_1,a_2,...,a_n)$ в таблице истинности всякая булева функция однозначно задается набором своих значений. В нашем примере этот набор имеет вид $f=(11101000)$.

Заметим, что множество истинности E_f, задающее функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, представляет собой ***n*-местное отношение** φ на множестве E. Оно задает булеву функцию по правилу:

$$f(a_1,a_2,...,a_n)=\begin{cases}1, \text{ если } (a_1,a_2,...,a_n)\in\varphi\\ 0, \text{ если } (a_1,a_2,...,a_n)\notin\varphi .\end{cases}$$

И наоборот, булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ однозначно определяет множество истинности $E_f=\{f(a_1,a_2,...,a_n)\mid f(a_1,a_2,...,a_n)=1\}$.

В случае описанного выше примера

$$E_f=\{(0\,0\,0),(0\,0\,1),(0\,1\,0),(1\,0\,0)\}.$$

Имеет место

Теорема. Всякая булева функция представима в виде формулы алгебры логики через операции $\vee,\&$ и $\neg$, и это представление таково:

$$f(x_1,\,...,\,x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)}\left(x_1^{\sigma_1}\,\&\,x_2^{\sigma_2}\,\&\,...\,\&\,x_m^{\sigma_m}\,\&\,f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m,x_{m+1},\,...,\,x_n)\right),$$

где $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m)$ — различные двоичные наборы значений переменных $x_1,\,...,\,x_n$, $1\le m\le n$, $x_i^{\sigma_i}=x_i$, если $\sigma_i=1$, $x_i^{\sigma_i}=\bar{x}_i$, если $\sigma_i=0$, $i=1,...,m$.

Приведенная выше в примере функция $f(x_1,x_2,x_3)$ представима формулой:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0 x_2^0 x_3^0 f(000) \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 f(001) \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 f(010) \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 f(011) \vee$$
$$\vee\, x_1^1 x_2^0 x_3^0 f(100) \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 f(101) \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 f(110) \vee x_1^1 x_2^1 x_3^1 f(111) =$$
$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 .$$

Такое представление называется нормальной формой, речь о которой пойдет в следующих двух параграфах.

Всякая формула алгебры логики есть булева функция. Тождественно истинная и тождественно ложная формулы есть постоянные функции. Их множества значений соответственно состоят только из единиц или только из нулей.

Булевы функции вида

$f_1 = x,$	$f_4 = x \,\&\, y,$	$f_7 = x \mid y,$
$f_2 = \bar{x},$	$f_5 = x \rightarrow y,$	$f_8 = x \downarrow y,$
$f_3 = x \vee y,$	$f_6 = x \leftrightarrow y,$	$f_9 = x \oplus y$

называются ***элементарными.***

Булевы функции от n переменных называются ***равными***, если они принимают одинаковые значения на соответствующих одинаковых наборах переменных, в них входящих. Равные функции реализуются ***равносильными формулами***. Например,

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1.$$

Равносильность формул доказывается:

1. С помощью таблиц истинности;
2. Методом эквивалентных (равносильных) преобразований.

Существует еще один способ доказательства равносильности формул, основанный на применении так называемого ***принципа двойственности.***

Булева функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$. Так, функция $f^*(x, y) = x \,\&\, y$, двойственна к $f(x, y) = x \vee y$:

$$f^*(x, y) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \,\&\, \bar{\bar{y}} = x \,\&\, y .$$

Принцип двойственности. Пусть $f(x_1,\ldots,x_m)$, $g_1(x_1,\ldots,x_n)$, …, $g_m(x_1,\ldots,x_n)$ — булевы функции и пусть $\Phi(x_1,\ldots,x_n)=f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$ — суперпозиция функций $f,g_1,\ldots,g_m$. Тогда двойственная функция от суперпозиции функций равна суперпозиции двойственных функций:

$$\Phi^*(x_1,\ldots,x_n)=f^*\left(g_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m^*(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Из определения двойственной функции следует, что ***две булевы функции равны тогда и только тогда, когда равны двойственные им функции***. Используя этот факт, а также принцип двойственности, из уже известных равносильностей легко получить новые.

Пример. Пусть $f=x\vee\bar{x}y$, $g=x\vee y$. Доказать, что $f=g$.

Доказательство. Построим f^* и g^*:

$$f^*=\overline{f(\bar{x},\bar{y})}=\overline{\bar{x}\vee\bar{\bar{x}}\,\bar{y}}=\overline{\bar{x}\vee x\,\bar{y}}=\bar{\bar{x}}\,\&\,\overline{x\bar{y}}=x\,\&\,(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})=x\,\&\,(\bar{x}\vee y)=x\,\&\,y;$$

$$g^*=\overline{g(\bar{x},\bar{y})}=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}=\bar{\bar{x}}\,\&\,\bar{\bar{y}}=x\,\&\,y.$$

Видим, что $f^*=g^*$. Следовательно, $f=g$, т.е. $x\vee\bar{x}y=x\vee y$.

Доказывается ***теорема***, что ***число всех булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.***

Действительно, любая булева функция от n переменных однозначно задается столбцом своих значений, длина которого равна 2^n строк, а число различных столбцов равно числу всех размещений с повторениями из 0 и 1 длины 2^n, т.е. $\bar{A}_2^{2^n}=2^{2^n}$, что и доказывает теорему.

Примечание. Задание булевой функции в виде функциональной схемы будет рассмотрено далее.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотреть различные способы задания булевой функции от трех переменных, которая:
   a) принимает значение 1 в том и только в том случае, когда ровно две переменные равны нулю;
   b) принимает такое же значение, как большинство (или меньшество) переменных.

2. Найти множество истинности E_f для булевой функции f, заданной формулой:

1) $f = xy \oplus y \oplus \mathbf{1}$;
2) $f = (x \oplus y) \downarrow \bar{x}$;
3) $f = \overline{(x \mid y) \mid x}$;
4) $((x \downarrow y) \downarrow z) \leftrightarrow (x \oplus \bar{y})$;
5) $f = \overline{xy} \to (x \mid y)$.

7)

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

8)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. Представить следующие функции в виде формул, если:
   1) $f = (\mathbf{01})$;
   2) $f = (\mathbf{0011})$;
   3) $f = (\mathbf{0000})$;
   4) $f = (\mathbf{00110101})$;
   5) $E_f = \{(\mathbf{00}), (\mathbf{11})\}$;
   6) $E_f = \{(\mathbf{011}); (\mathbf{010}); (\mathbf{100}); (\mathbf{111})\}$;

4. Найти число булевых функций от трех переменных, которые на заданных двух наборах:
   a) принимают значение 1;
   b) принимают любые заданные значения.

5. Двоичные наборы вида $(d_1, \ldots, d_n)$ и $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)$ называются противоположными. Найти число булевых функций от n переменных, которые на противоположных наборах переменных принимают:
   a) противоположные значения;
   b) одинаковые значения.

6. Построить двойственную функцию для функции f, если:
   1) $f = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$;
   2) $f = (\mathbf{01011100})$;

3) $f = ((x \to y) \to x)$.

7. Построить двойственные функции для всех элементарных булевых функций.

8. Доказать или опровергнуть равенство двух функций, используя принцип двойственности:
   1) $f = x \to (y \oplus z)$, $\varphi = (x \to y) \oplus (x \to y)$;
   2) $f = x \to (y \to z)$; $\varphi = (x \to y) \to (x \to y)$;
   3) $f = x(y \leftrightarrow z)$; $\varphi = xy \leftrightarrow xz$;
   4) $f = x(y \oplus z)$; $\varphi = xy \oplus xz$;
   5) $f = x \oplus (y \vee z)$; $\varphi = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$.

9. Доказать, что $f(x, y) \equiv \mathbf{1}$,если:
   1) $f = (x \to y) \vee (y \to x)$;
   2) $f = (x \oplus y) \leftrightarrow \left(\overline{x \leftrightarrow y}\right)$;
   3) $f = \overline{xy} \leftrightarrow (x \mid y)$;
   4) $f = \overline{x \vee y} \leftrightarrow (x \downarrow y)$.

5.2 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Пусть x - булева переменная.

Введем обозначение: $x^{\sigma} = x \cdot \sigma \vee \bar{x} \cdot \bar{\sigma}$, где параметр $\sigma \in \{0,1\}$. Очевидно, что $x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$, т.е. $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$.

Легко видеть, что $x^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - булевы переменные.

Определение. Формулы алгебры логики вида:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, ... \,\&\, x_{i_n}^{\sigma_n} \text{ и } x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee ... \vee x_{i_n}^{\sigma_n},$$

где $i_k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma_k \in \{0,1\}$, называются соответственно ***элементарной конъюнкцией (э.к.)*** и ***элементарной дизъюнкцией (э.д.)*** на множестве булевых переменных $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Число логических множителей в **э.к.** и логических слагаемых в **э.д.**, называется рангом **э.к.** и **э.д.** соответственно. Считается, что константа 1 — **э.к.** нулевого ранга, константа 0 — **э.д.** нулевого ранга Символ **&** в **э.к.** можно опускать для краткости

Например,

$K_1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ — **э.к.** 4-го ранга;

$D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ — **э.д.** 3-го ранга.

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется произвольная дизъюнкция различных элементарных конъюнкций, т.е. формула вида

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_S, \text{ где } K_i, i = \overline{1,s} \text{ — э.к.}$$

Число S называется ***длиной ДНФ***. В случае $S = 0$ ДНФ называется пустой и полагается равной нулю.

Определение. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется произвольная конъюнкция различных элементарных дизъюнкций, т.е. формула вида

$$K = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\ldots\&\, D_S,$$

где S — длина КНФ, $D_i, i = \overline{1,s}$ — **э.д.**

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличной от тождественного нуля, существует дизъюнктивная нормальная форма D такая, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D$.

Теорема 2. Для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличной от тождественной единицы, существует конъюнктивная нормальная форма K такая, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K$.

Представление булевой функции в виде ДНФ и КНФ, вообще говоря, неоднозначно.

Например, для функции $f(x, y, z) = \left(\overline{x \vee z}\right)(x \to y)$ будут равносильные между собой следующие КНФ:

$$K_1 = \bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y),$$
$$K_2 = \bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z}),$$
$$K_3 = \bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z}).$$

Рассмотрим два способа построения ДНФ и КНФ.

Способ 1. (*Метод эквивалентных преобразований)*. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана формулой. Алгоритм построения ДНФ и КНФ состоит в следующем:

Шаг 1. Формулу преобразовать так, чтобы в ней были только операции $\vee$, **&** и $\neg$;

Шаг 2. Добиться с помощью законов де Моргана, чтобы знак отрицания стоял лишь над отдельными переменными;

Шаг 3. Раскрыть скобки по 1-му дистрибутивному закону $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} \vee \boldsymbol{AC}$ при построении ДНФ и по 2-му дистрибутивному закону $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C})$ при построении КНФ.

Способ 2. (*С использованием таблицы истинности).*

Шаг 1. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана таблицей или набором своих значений. Воспользоваться разложением функции по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} \left(x_1^{s_1} \mathbin{\&} x_2^{s_2} \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} x_n^{s_n} \mathbin{\&} f(s_1, \dots, s_n) \right) \qquad (*)$$

при построении ДНФ и

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} \left(x_1^{\bar{s}_1} \vee x_2^{\bar{s}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{s}_n} \vee f(s_1, \dots, s_n) \right) \qquad (**)$$

при построении КНФ.

Шаг 2. Полученные формулы по возможности упростить с помощью основных равносильностей алгебры логики высказываний.

$$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b;$$

$$a \mathbin{\&} \bar{a} = 0, \quad a \vee \bar{a} = 1;$$

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (\bar{a} \vee b)(\bar{b} \vee a) = \bar{a}\bar{b} \vee ab;$$

$$a \oplus b = \overline{a \leftrightarrow b} = \overline{(\bar{a} \mathbin{\&} \bar{b}) \vee (a \mathbin{\&} b)} = (a \vee b)(\bar{a} \vee \bar{b});$$

$$a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b; \quad a \vee 1 = 1;$$

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b}; \quad a | b = \overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}; \quad \textit{и т.д.}$$

Пример 1. *Методом эквивалентных преобразований для функции*

$$f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz$$

построить ДНФ и КНФ.

Решение. Применяя основные равносильности и 1-ый дистрибутивный закон, строим ДНФ:

$$f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz = \overline{\overline{(x \leftrightarrow y)}} \vee yz = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \vee yz =$$

$$= (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \vee yz = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee y\bar{y} \vee xy \vee yz =$$

$$= xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee yz.$$

Применяя 2-ой дистрибутивный закон в полученной ДНФ, построим КНФ для данной функции.

$$f(x,y,z)=(xy\vee\bar x\bar y)\vee yz=(xy\vee\bar x)(xy\vee\bar y)\vee yz=$$
$$=(x\vee\bar x)(y\vee\bar x)(x\vee\bar y)(y\vee\bar y)\vee yz=$$
$$=(y\vee\bar x)(x\vee\bar y)\vee yz=(y\vee\bar x\vee yz)(x\vee\bar y\vee yz)=$$
$$=(y\vee\bar x)(\bar x\vee z\vee y)(x\vee\bar y\vee z)(x\vee\bar y\vee y).$$

Учитывая, что $x\vee\bar y\vee y=x\vee 1=1$, получим другую КНФ, равносильную построенной:

$$f(x,y,z)=(\bar x\vee y)(x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee y\vee z).$$

Пример 2. Построить ДНФ и КНФ для функции $f=(11010011)$.

Решение. Строим таблицу истинности для функции, зависящей от трех переменных, т.к. длина ее двоичного набора равна $8=2^3$ $(n=3)$.

По формуле (*) с учетом, что $K\&1=K$, $K\&0=0$, имеем

$$f(x,y,z)=x^0y^0z^0\&1\vee x^0y^0z^1\&1\vee x^0y^1z^0\&0\vee$$
$$\vee x^0y^1z^1\&1\vee x^1y^0z^0\&0\vee x^1y^0z^1\&0\vee x^1y^1z^0\&1\vee$$
$$\vee x^1y^1z^1\&1=\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar yz\vee\bar x yz\vee xy\bar z\vee xyz-ДНФ_1.$$

Учитывая, что $ab\vee ac=a(b\vee c)$, можно получить другие ДНФ для данной функции:

$$f=(\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar yz)\vee\bar xyz\vee(xy\bar z\vee xyz)=$$
$$=\bar x\bar y(\bar z\vee z)\vee\bar xyz\vee xy(\bar z\vee z)=$$
$$=\bar x\bar y\vee\bar xyz\vee xy - ДНФ_2.$$

$$f=(\bar x\bar y\vee\bar xyz)\vee xy=$$
$$=\bar x(\bar y\vee yz)\vee xy=$$
$$=\bar x(\bar y\vee y)(\bar y\vee z)\vee xy$$
$$=\bar x(\bar y\vee z)\vee xy$$
$$=\bar x\bar y\vee\bar xz\vee xy - ДНФ_3.$$

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Разлагая данную функцию f по формуле (**) с учетом, что $D\vee 1=1$, $D\vee 0=D$, имеем

$$f(x,y,z)=(x^{\bar 0}\vee y^{\bar 0}\vee z^{\bar 0}\vee 1)(x^{\bar 0}\vee y^{\bar 0}\vee z^{\bar 1}\vee 1)(x^{\bar 0}\vee y^{\bar 1}\vee z^{\bar 0}$$
$$\wedge(x^{\bar 0}\vee y^{\bar 1}\vee z^{\bar 1}\vee 1)(x^{\bar 1}\vee y^{\bar 0}\vee z^{\bar 0}\vee 0)(x^{\bar 1}\vee y^{\bar 0}\vee z^{\bar 1}\vee 0)(x^{\bar 1}\vee y$$
$$\wedge(x^{\bar 1}\vee y^{\bar 1}\vee z^{\bar 1}\vee 1)=(x^1\vee y^0\vee z^1)(x^0\vee y^1\vee z^1)(x^0\vee y^1\vee z^0$$
$$=(x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee y\vee z)(\bar x\vee y\vee\bar z) - КНФ_1.$$

Учитывая, что $(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} \vee \overline{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \vee 0 = \boldsymbol{a}$, получим другую КНФ, равносильную КНФ$_1$:

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{x} \vee \overline{\boldsymbol{y}} \vee \boldsymbol{z})((\overline{\boldsymbol{x}} \vee \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{z}\overline{\boldsymbol{z}}) = (\boldsymbol{x} \vee \overline{\boldsymbol{y}} \vee \boldsymbol{z})(\overline{\boldsymbol{x}} \vee \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{КНФ}_2.$$

Неоднозначность нормальных форм очевидна.

Таким образом, применяя различные равносильные преобразования, мы можем прийти к различным нормальным формам, реализующих ***одну и ту же функцию***. В связи с этим возникает возможность выбора более предпочтительной реализации.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. По данному набору $(a_1,...,a_n)$ значений переменных $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ построить элементарную конъюнкцию, истинную только для этого набора значений переменных.
2. По данному набору $(a_1,....a_n)$ значений переменных $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ построить элементарную дизъюнкцию, ложную только для этого набора значений переменных.
3. С помощью эквивалентных преобразований привести к ДНФ формулы:
   1) $(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{yz})(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z})$;
   2) $((\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2\overline{\boldsymbol{x}}_3\boldsymbol{x}_4)(\overline{\boldsymbol{x}}_2 \vee \boldsymbol{x}_4) \to \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{x}_4) \vee (\overline{\boldsymbol{x}}_1 \vee \boldsymbol{x}_4)$;
   3) $(\boldsymbol{x} \downarrow \boldsymbol{z}) \sim (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{z}) \vee \overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$;
   4) $(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \to \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{x}_4) \mid (\boldsymbol{x}_1 \to \overline{\boldsymbol{x}}_3)$;
   5) $(\boldsymbol{x} \vee (\overline{\boldsymbol{x}} \sim \boldsymbol{y})) \to \overline{\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}}$.
4. С помощью эквивалентных преобразований привести к КНФ формулы:
   1) $\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z}$;
   2) $((\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \oplus \boldsymbol{x}_3) \to \overline{\boldsymbol{x}}_4) \to \boldsymbol{x}$;
   3) $((\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_2) \to \boldsymbol{x}_3) \sim \boldsymbol{x}_1\overline{\boldsymbol{x}}_4$;
   4) $((\boldsymbol{xyz} \sim (\overline{\boldsymbol{y}} \vee \boldsymbol{z}))\boldsymbol{y}) \downarrow \overline{\boldsymbol{x}}$;
   5) $\text{ù}(\boldsymbol{x} \sim \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{z}) \to (\overline{\boldsymbol{x}} \oplus (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{z}))$.
5. Пусть $\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}_m,\boldsymbol{U}_1,...,\boldsymbol{U}_n$ - произвольные формулы алгебры логики. Доказать следующие эквивалентности:

1) $\boldsymbol{X_1X_2...X_m \vee U_1U_2...U_n = \bigwedge_{\substack{i=1,...,m\\ j=1,...,n}} (X_i \vee U_j)}$;

2) $\boldsymbol{(X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_m)(U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_n) = \bigvee_{\substack{i-1,...,m\\ j=1,...,n}} X_iU_j}$;

6. С помощью второго дистрибутивного закона преобразовать ДНФ в КНФ:

   1) $\boldsymbol{x\bar{y} \vee yz \vee \bar{x}\bar{z}}$;
   2) $\boldsymbol{xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z}$;
   3) $\boldsymbol{x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_4\bar{x}_3 \vee x_2}$.

5.3 Классификация ДНФ. Минимизация булевых функций

Проблема минимизации булевых функций состоит в том, чтобы построить ДНФ, у которой число вхождений минимально по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими булеву функцию.

Определение 1. ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ называется ***кратчайшей***, если она имеет наименьшую длину среди всех эквивалентных ей ДНФ.

Определение 2. ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ называется ***минимальной***, если она имеет наименьшее число вхождений – букв $\boldsymbol{x_i^{s_i}}$ среди всех эквивалентных ДНФ.

Обозначим через $r_D = \sum_{i=1}^{s} r(K_i)$ — ***сумму рангов* э.к.**, входящих в ДНФ. Число r_D называется сложностью ДНФ. Тогда ДНФ, у которой сумма рангов r_D минимальна среди всех ее ДНФ, является минимальной.

Способ построения минимальной ДНФ дает следующая теорема.

Теорема. С помощью равносильных преобразований, применяя формулы:

1. Поглощения $\boldsymbol{K_1 \vee K_1K_2 = K_1}$;
1. Склеивания $\boldsymbol{XK \vee \bar{X}K = K}$;
2. Неполного склеивания $\boldsymbol{XK \vee \bar{X}K = XK \vee \bar{X}K \vee K}$;
3. Обобщенного склеивания $\boldsymbol{XK_1 \vee \bar{X}K_2 = XK_1 \vee \bar{X}K_2 \vee K_1K_2}$,

из любой ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ можно построить ДНФ, которая

а) либо совпадает с минимальной или кратчайшей,
б) либо минимальная (кратчайшая) получается из нее удалением одной или нескольких элементарных конъюнкций.

Пример 1. Для функции $\boldsymbol{f} = (11101100)$ построить несколько ДНФ. Указать кратчайшую и минимальную среди них.

Решение. Предварительно построив таблицу истинности для $\boldsymbol{f}$ и применяя преобразования, получим следующие ДНФ:

$$\boldsymbol{D}_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z; \quad r_{D_1} = \mathbf{15};$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z; \quad r_{D_2} = \mathbf{11};$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}; \quad r_{D_3} = \mathbf{7};$$

$$\boldsymbol{D}_4 = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}; \quad r_{D_4} = \mathbf{6};$$

$$\boldsymbol{D}_5 = \bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}; \quad r_{D_5} = \mathbf{3}.$$

Кратчайшей ДНФ является $\boldsymbol{D}_5$. У нее число логических слагаемых, т.е. длина $\boldsymbol{S} = 2$ — наименьшее.

Минимальной ***ДНФ является*** $\mathbf{D}_5$***, т.к.*** $r_D = \min\limits_{1 \le i \le 5} r_{D_i} = 3$ **.**

Определение* 3**. ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ называется ***тупиковой, если отбрасывание любого ее слагаемого или буквы приводит к неэквивалентной ДНФ.

Тупиковая ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ определяется неоднозначно. Среди тупиковых ДНФ функции $\boldsymbol{f}$ всегда содержится и минимальная.

Приведем ***алгоритм построения минимальной ДНФ*** для функции $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Шаг 1. Построить всевозможные **э.к.** из переменных $1, x_1, x_2, \dots, x_n$, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, $x_1 x_2, \dots, x_i x_j, \dots, x_1 x_2 \dots x_n$.;

Шаг 2. Из построенных **э.к.** построить всевозможные ДНФ;

Шаг 3. Упорядочить множество всех полученных ДНФ на 2-ом шаге в направлении возрастания величин r_{D_i};

Шаг 4. Сравнить таблицы истинности для функции $\boldsymbol{f}$ и для ДНФ, двигаясь по упорядоченному множеству, полученному на 3-ем шаге.

Первая ДНФ, у которой таблица истинности будет такой, как у функции $\boldsymbol{f}$, является минимальной.

Определение 4. Импликантом функции $\boldsymbol{f}$ называется элементарная конъюнкция $\boldsymbol{K} = x_{i_1}^{s_1} \,\&\, x_{i_2}^{s_2} \,\&\, \dots \,\&\, x_{i_r}^{s_r}$, $s_k \in \{0,1\}$, $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ для всех $k = \overline{1, r}$ такая, что $\boldsymbol{K} \vee \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$.

Импликант $\boldsymbol{K}$ функции $\boldsymbol{f}$ называется простым импликантом, если после отбрасывания любой буквы $x_{i_k}^{s_k}$ из $\boldsymbol{K}$ получается элементарная конъюнкция, не являющаяся уже импликантом функции $\boldsymbol{f}$.

Определение 5. Сокращенной ДНФ функции f называется дизъюнкция всех простых импликантов функции f.

Сокращенная ДНФ определяется однозначно для функции f.

Метод построения сокращенной ДНФ функции f

Шаг 1. Построить ДНФ для функции f.

Шаг 2. Производить операцию обобщенного склеивания

$$XK_1 \vee \overline{X}K_2 = XK_1 \vee \overline{X}K_2 \vee K_1K_2$$

до тех пор, пока это возможно.

Шаг 3. Производить операцию поглощения

$$K_1 \vee K_1K_2 = K_1.$$

В результате приходим к сокращенной ДНФ, учитывая, что $K_1\overline{K}_1 = 0$ и $K_1 \vee K_1 = K_1$.

Пример 2. Построить сокращенную ДНФ для функции

$$f = (x \vee y)(\overline{x} \vee y \vee z).$$

Решение. Раскрывая скобки по 1-му дистрибутивному закону, получаем ДНФ; затем применяем операцию поглощения:

$$f = (x \vee y)(\overline{x} \vee y \vee z) = x\overline{x} \vee \overline{x}y \vee xy \vee yy \vee xz \vee yz =$$
$$= \overline{x}y \vee (xy \vee y) \vee xz \vee yz = (\overline{x}y \vee y) \vee yz \vee xz =$$
$$= (y \vee yz) \vee xz = y \vee xz$$

– сокращенная ДНФ.

Определение 6. ДНФ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***совершенной***, если она составлена из попарно различных **э.к.** ***ранга*** n, т.е. формула вида:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(s_1, s_2, ..., s_n)=1} \left(x_1^{s_1} \,\&\, x_2^{s_2} \,\&\, ... \,\&\, x_n^{s_n}\right),$$

где дизъюнктивная сумма берется по всем наборам $(s_1, s_2, ..., s_n)$, на которых $f(s_1, s_2, ..., s_n) = 1$. Ясно, что функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ отлична от тождественного нуля.

В следующем параграфе подробно рассматриваются совершенные нормальные формы и их нахождение, имеющие важное значение в приложениях.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Для функции $f = (00101111)$ построить несколько ДНФ. Указать кратчайшую, минимальную. Среди **э.к.** определить, какие являются

a) импликантами,

b) простыми импликантами (с обоснованием).

Построить сокращенную ДНФ.

2. Построить сокращенную ДНФ для следующих функций. Какова ее длина?
   1) $f=(a\vee b\vee \bar{c})(\bar{a}\vee b\vee c)(\bar{b}\vee \bar{c})$;
   2) $f=xy\vee \bar{x}z\vee \bar{y}z$;
   3) $f=(11111000)$;
   4) $f=(11000101)$.

3. Построить сокращенную ДНФ для $f=x\oplus y\oplus z$. Определить ее длину.

4. Выяснить, являются ли тупиковыми, кратчайшими или минимальными ДНФ следующие функции:
   1) $f=ab\vee \bar{b}$; $\qquad f=a\bar{b}p\vee \bar{a}\bar{b}c\vee \bar{c}\bar{p}$;
   2) $f=xy\vee \bar{x}z$.

5. Из заданного множества **э.к.** K выделить:

   a) импликанты,

   b) простые импликанты

   функции $f=(01111111)$ где
   1) $K=\{x\bar{y}, yx, x, xyz\}$,
   2) $K=\{y, \bar{x}y, xz, xy, yz, \bar{y}z\}$.

6. Построить сокращенную ДНФ для функции f, заданной множеством истинности:
$$E_f=\{(000),(100),(101),(110),(111)\}.$$

7. В коробке лежат шары: большие и маленькие, красные и зеленые, темные и светлые. Из коробки надо достать шар, удовлетворяющий следующим условиям:
   1) Если шар светлый, то он может быть маленьким только тогда, когда он красный.
   2) Шар может быть большим и светлым, если он зеленый.
   3) Если шар большой, то для того, чтобы он был зеленый, достаточно, чтобы он был темным.

   Свести эти требования к двум простейшим условиям.

8. На праздник было решено пригласить гостей. В связи с этим были высказаны следующие соображения: если мы пригласим Андрея, то Воло-

дю приглашать не надо. Но Сережу можно пригласить только тогда, когда будет приглашен Володя. А если мы пригласим Андрея с Володей, то Сережу пригласить нельзя. На следующий день было решено, что нужно сделать противоположное, т.е. в качестве инструкции по приглашению гостей взять отрицание конъюнкции всего того, что было сказано накануне. Упростить новую инструкцию и свести ее к простейшим условиям.

9. По случаю новоселья семья решила купить новый шкаф. Все хотели, чтобы шкаф был либо дубовый, либо березовый; либо желтый, либо коричневый; либо светлый, либо темный. Отцу дали целый ряд рекомендаций.
    1) Мать сказала: «Ты можешь купить светлый шкаф, если только он будет березовым желтого цвета».
    2) Бабушка сказала: «Если шкаф будет березовым, то светлый тон должен быть достаточным признаком желтой окраски».
    3) Дети сказали: «Если шкаф будет коричневым, то для того, чтобы он был темным, необходимо, чтобы он был сделан из дуба».

   Отец сообразил, что эти рекомендации сводятся к двум простейшим условиям. Но он купил шкаф, который удовлетворял только одному из этих условий. Он поступил так потому, что хотел, чтобы шкаф был светлым и березовым или темным, но желтым. И это условие действительно оказалось выполненным. Какой шкаф был куплен?

Указание: решение задач 7-9 сводится к поиску минимальной КНФ.

5.4 Совершенные нормальные формы

Пусть $f(x_1,...,x_n)$ — произвольная булева функция, зависящая от n переменных.

Определение. ДНФ функции $f(x_1,...,x_n)$ называется совершенной, если она составлена из попарно различных элементарных конъюнкций ранга n, т.е. формул вида

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} \left(x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, ... \,\&\, x_n^{\sigma_n} \right), \qquad (1)$$

где дизъюнктивная сумма берется по всем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, для которых $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$.

Ясно, что эта функция $f(x_1,...,x_n)$ отлична от тождественного нуля.

Определение. КНФ функции $f(x_1,...,x_n)$ называется совершенной, если она составлена из попарно различных элементарных дизъюнкций ранга n, т.е. формул вида

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigwedge_{f(s_1,\ldots,s_n)=0}\left(x_1^{\bar{s}_1}\vee x_2^{\bar{s}_2}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{s}_n}\right),\qquad (2)$$

где конъюнктивное произведение берется по всем наборам $\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)$, для которых $f\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)=0$.Ясно, что $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\neq\mathbf{1}$

Формулы, стоящие в правых частях равенств (1) и (2), соответственно называются ***совершенной нормальной дизъюнктивной и конъюнктивной формами*** (СДНФ и СКНФ). В отличие от обычных форм каждое слагаемое СДНФ или каждый сомножитель СКНФ содержит все переменные $x_1,\ldots,x_n$ в некоторых «степенях». Рассмотрим два способа их построения.

Первым способом совершенные нормальные формы для произвольной булевой функции можно строить, исходя из представлений (1)—(2). Для этого достаточно построить ***таблицу истинности*** функции. Для построения СДНФ нужно выделить те наборы $\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)$, на которых $f\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)=1$. Каждому такому набору ставится в соответствие элементарная конъюнкция $x_1^{s_1}\,\&\,x_2^{s_2}\,\&\ldots\&\,x_n^{s_n}$. Составленная из этих конъюнкций дизъюнктивная сумма и есть искомая СДНФ.

Для построения СКНФ нужно выбрать наборы $\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)$, для которых $f\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right)=0$. Каждому такому набору ставится в соответствие элементарная дизъюнкция $x_1^{\bar{s}_1}\vee x_2^{\bar{s}_2}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{s}_n}$. Объединяя такие дизъюнкции в конъюнктивное произведение, получим СКНФ.

Пример 1. Пусть функция $\varphi\left(x,y,z\right)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда большинство переменных равно нулю. Построим СДНФ и СКНФ этой функции.

Решение. Рассмотрим таблицу истинности заданной функции (таблица 1):

Функция $\varphi\left(x,y,z\right)$ принимает значение 1 на наборах (000), (001), (010), (100). Этим наборам соответствуют элементарные конъюнкции

$$x^0y^0z^0,\ x^0y^0z^1,\ x^0y^1z^0,\ x^1y^0z^0,$$

которые с учетом (1) перепишем в виде:

$$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z},\ \bar{x}\,\bar{y}\,z,\ \bar{x}\,y\,\bar{z},\ x\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

номер набора	x	y	z	$\varphi\left(x,y,z\right)$
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0

Таблица 1

Окончательно имеем СДНФ функции $\varphi\left(x,y,z\right)$:

$$D_c=\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee\bar{x}\,y\,z\vee x\,\bar{y}\,z.$$

Для построения СКНФ заметим, что рассматриваемая функция принимает значение 0 на наборах (011), (101), (110) и (111).

Построим соответствующие этим наборам элементарные дизъюнкции:

$$x^{\bar 0} \vee y^{\bar 1} \vee z^{\bar 1},\ \ x^{\bar 1} \vee y^{\bar 0} \vee z^{\bar 1},\ \ x^{\bar 1} \vee y^{\bar 1} \vee z^{\bar 0},\ \ x^{\bar 1} \vee y^{\bar 1} \vee z^{\bar 1},$$

перепишем в стандартной форме:

$$\bar x \vee y \vee \bar z,\ \ \bar x \vee \bar y \vee z,\ \ \bar x \vee \bar y \vee \bar z,\ \ \bar x \vee \bar y \vee \bar z.$$

Конъюнктивное произведение этих дизъюнкций и есть СКНФ заданной функции: $K_c = (x \vee \bar y \vee \bar z)(\bar x \vee y \vee \bar z)(\bar x \vee \bar y \vee z)(\bar x \vee \bar y \vee \bar z)$.

Замечание. Очень часто булева функция задается набором своих значений $f(a_1,\dots,a_n)$, где $(a_1,\dots,a_n) \in E^n$, $E = \{0,1\}$. При этом вид набора значений функции существенно зависит от того, как упорядочены наборы $(a_1,\dots,a_n)$ на множестве E^n. Набору $(a_1,\dots,a_n)$ поставим в соответствие номер

$$k = 1 + a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n \qquad (3)$$

В наборе значений функции на k-м месте запишем величину $f(a_1,\dots,a_n)$. Так, функция, рассматриваемая в предыдущем примере, может быть записана в виде $\varphi(x,y,z) = (11101000)$.

Пример 2. Пусть $f(x,y,z) = (01101001)$. Найти СДНФ и СКНФ.

Решение. Функция f принимает значение 1 на наборах с номерами 2, 3, 5, 8. Восстановим по формуле (3) эти наборы: (001), (010), (100), (111). Объединим соответствующие этим наборам элементарные конъюнкции в СДНФ: $D_c = \bar x\,\bar y\,z \vee \bar x\,y\,\bar z \vee x\,\bar y\,\bar z \vee x\,y\,z$.

Значение 0 функция f принимает на наборах с номерами 1, 4, 6, 7. Выпишем эти наборы: (000), (011), (110), (101). Конъюнкция соответствующих этим наборам элементарных дизъюнкций является СКНФ заданной функции:

$$K_c = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar y \vee \bar z)(\bar x \vee \bar y \vee z)(\bar x \vee y \vee \bar z).$$

Рассмотренные примеры являются иллюстрацией к первому способу построения СКНФ и СДНФ, основанному на представлениях (1) и (2). Применяется он, как правило, для функций, заданных таблицей истинности или набором значений. Если же функция задана аналитически, т.е. при помощи формулы, то для нее нужно сначала построить таблицу истинности, а затем применять описанный метод.

Второй способ построения СДНФ и СКНФ состоит в эквивалентном преобразовании формулы, реализующей функцию, к виду (1) или (2). Как уже отмечалось, совершенные дизъюнктивная или конъюнктивная нормальные формы функции $f(x_1,\dots,x_n)$ отличаются от обычных тем, что каждое слагаемое СДНФ и каждый сомножитель СКНФ содержит все переменные $x_1,\dots,x_n$ в некоторых «степенях». Это свойство дает возможность сформулировать следующие правила.

1. Для получения СДНФ реализуемой формулой функции $f(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ нужно построить ДНФ этой функции (см. п.5.2). Затем, если какая-нибудь конъюнкция ДНФ не содержит переменной x_l, заменить ее парой конъюнкций K_j
$$K_j x_l \vee K_j \bar{x}_l. \qquad (4)$$
Замену производить до тех пор, пока каждое слагаемое ДНФ не будет содержать всех переменных $x_1,\dots,x_n$ (их отрицаний или их самих).
2. Для получения СКНФ реализуемой формулой функции $f(x_1,\dots,x_n)\neq 1$ нужно построить КНФ этой функции. Затем, если какая-нибудь дизъюнкция D_j КНФ не содержит переменной x_l, заменить ее парой дизъюнкций
$$(D_j \vee x_l)(D_j \vee \bar{x}_l). \qquad (5)$$

Замены (4) и (5) являются эквивалентными, так как в силу первого дистрибутивного закона
$$K_j x_l \vee K_j \bar{x}_l = K_j(x_l \vee \bar{x}_l) = K_j \cdot 1 = K_j,$$
а в силу второго дистрибутивного закона
$$(D_j \vee x_l)(D_j \vee \bar{x}_l) = D_j \vee x_l \bar{x}_l = D_j \vee 0 = D_j.$$

Пример 3. Для функции $f(x,y,z)=\overline{x \vee z} \sim xy$ построить СДНФ и СКНФ.

Решение. Сначала строим нормальные формы:
$$D = x\bar{y} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z,\ K = (x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y}).$$

В первом слагаемом ДНФ недостает переменной z, во втором — переменной y, в третьем — x. В соответствии с (4) запишем:
$$D = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z.$$
Убрав лишние слагаемые, находим СДНФ:
$$D_c = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

В первом сомножителе КНФ не достает переменной y, во втором — z; поэтому в соответствии с (5) имеем СКНФ:
$$K_c = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить совершенные ДНФ и КНФ для следующих функций (для функций, заданных формулами, предварительно построить таблицы истинности):
   1) $(x \oplus y) \to yz$;
   2) $f = (\mathbf{01101100})$;
   3) $((\bar{x} \to \bar{y}) \sim z) \mid xyz$;
   4) $f = (\mathbf{0100110000110010})$;
   5) $(\bar{x} \to y)(\bar{x} \oplus y)(x \sim y)(y \mid x)$.

2. Преобразовать заданные ДНФ в совершенные:
   1) $xy \vee y\bar{z} \vee \overline{xy}$;
   2) $x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2x_4$;
   3) $x \vee \overline{xyz} \vee xy$;
   4) $xy \vee xyz \vee y \vee \bar{x}y$;
   5) $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;

3. Преобразовать заданные КНФ в совершенные:
   1) $(\bar{x} \vee y)(z \vee y)z$;
   2) $(u \vee v)(u \vee \bar{v} \vee w)(\bar{u} \vee v)$;
   3) $(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4)$;
   4) $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee z)y$;
   5) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)$;

4. Построить СДНФ и СКНФ с помощью эквивалентных преобразований:
   1) $((x \to y) \vee \bar{z}) \sim (x \vee (y \to \bar{z}))$;
   2) $(x_1 \vee x_2) \to (x_3 \vee x_4)$;
   3) $((x \oplus z) \to y) \vee ((\bar{x} \mid y) \vee \bar{y})$;
   4) $(y \sim z)(z \sim \bar{x})(x \vee y)$;
   5) $(x_1 \mid x_2) \to (x_3 \mid x_4)$;

5. Построить формулу функции трех переменных, которая принимает значение 1 в том и только в том случае, когда ровно две переменные равны нулю.
6. Построить формулу функции трех переменных, которая принимает такое же значение, как большинство (или меньшинство) переменных.
7. Доказать, что функция от n переменных $f(x_1 \ldots x_n) \equiv \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда ее СКНФ содержит $\mathbf{2}^n$ попарно неэквивалентных элементарных дизъюнкций.
8. По СКНФ формулы U построить

1) СДНФ двойственной формулы $\boldsymbol{U^*}$;
2) СКНФ формулы $\overline{\boldsymbol{U}}$;
3) СДНФ формулы $\overline{\boldsymbol{U}}$;

9. По СДНФ формулы $\boldsymbol{U}$ и СДНФ формулы $\boldsymbol{V}$ построить
   1) СКНФ и СДНФ формулы $\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{V}$;
   2) СКНФ и СДНФ формулы $\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V}$;
   3) СКНФ и СДНФ формулы $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$.

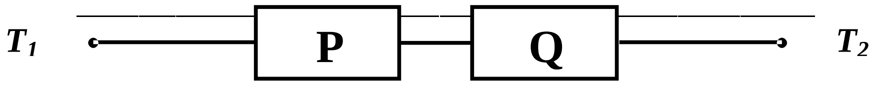
10. Найти длину совершенной ДНФ функции $f(x_1,...,x_n)$:
    1) $f(x_1,...,x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$;
    2) $f(x_1,...,x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee ... \vee \bar{x}_n)$;
    3) $f(x_1,...,x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus ... \oplus x_n$.

11. Сотрудники конструкторского бюро обсуждали вопрос о предстоящей командировке в Москву. Были высказаны следующие суждения:
    1) Если поедут Иванов и Петров, то надо посылать и Сидорова.
    2) Сидоров поедет только при условии, что поедет Иванов. Значит, Петрова посылать нельзя.
    3) Надо послать или Иванова или Петрова.

Директор сказал, что можно выполнить только одно из этих предложений. Кого хотели послать в командировку сотрудники и кого решил послать директор.

12. В кафе пришли три посетителя. Они узнали, что на обед можно заказать: харчо либо борщ, плов либо азу, сок либо компот. Обсуждая меню, каждый из посетителей высказал свое мнение:
    1) Я хочу заказать сок, если мы возьмем азу либо борщ.
    2) Чтобы я согласился взять борщ и плов, достаточно заказать сок. А на компот я соглашусь только при условии, что будет заказано азу или харчо.
    3) Если мы закажем сок, то надо взять харчо и плов, но я хочу заказать борщ. Значит, надо взять азу и сок.

Официант ничего не понял и попросил посетителей изложить свои требования в более ясной форме. Посетители подумали и свели свои требования к трем простейшим условиям. Тогда официант сказал, что из этих трех простейших условий он может выполнить только одно. Кроме того,



он сказал, что обеды комплексные и поэтому надо брать либо азу, либо

борщ и плов. Что заказали посетители и что им предложил официант?

Указание: Решение задач 11—12 связано с приведением формулы к виду СДНФ.

5.5 Приложение алгебры логики к релейно-контактным схемам

Будем интерпретировать функции алгебры логики как электрические цепи, содержащие двухпозиционные переключатели.

Рассматриваемые здесь электрические цепи являются частным случаем так называемых релейно-контактных схем (РКС) (иногда их называют переключательными схемами).

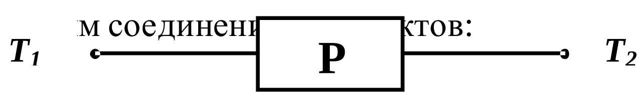
Простейшая схема, содержащая один переключатель P, имеет один вход T_1 и один выход T_2 :

Истинному высказыванию P, гласящему: «Переключатель P замкнут» поставим в соответствие переключатель P. В этом случае схема пропускает ток.

Высказыванию $\bar{P}$ соответствует: «Переключатель $\bar{P}$ разомкнут» и схема не проводит ток.

«1» (истина) интерпретируется как состояние переключателя «ток проходит», «0» (ложь) —«ток не проходит».

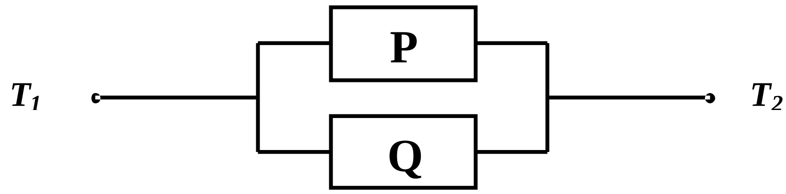
Конъюнкции двух высказываний $P\&Q$ соответствует схема с последоват м соединени ктов:



довательным соединением контактов:

Дизъюнкции двух высказываний PÚQ соответствует схема с параллельным соединением контактов:

Так как любая функция алгебры логики представима в виде ДНФ (или КНФ), то для любой булевой функции можно составить соответствующую схему, а каждой схеме соответствует некоторая формула алгебры логики, задающая некую булеву функцию.



Две схемы считаются эквивалентными, если через одну их них проходит ток тогда и только тогда, когда он проходит через другую. Из двух ***эквивалентных*** схем *более простой* считается та, которая содержит меньшее число контактов.

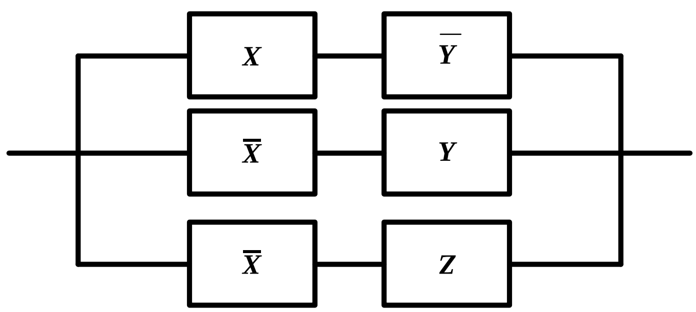
Пример 1. Составит РКС для следующей функции:

$$f(x,y,z) = (x \to y) \to (\bar{x}(y \vee z)).$$

Решение. С помощью равносильных преобразований найдем нормальную форму (ДНФ или КНФ):

$f(x,y,z) = (x \to y) \to \bar{x}(y \to z) = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee (\bar{x}y \vee \bar{x}z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z$ (ДНФ).

Итак, имеем РКС:



Пример 2. Построить РКС для функции $f(x,y,z)$, если

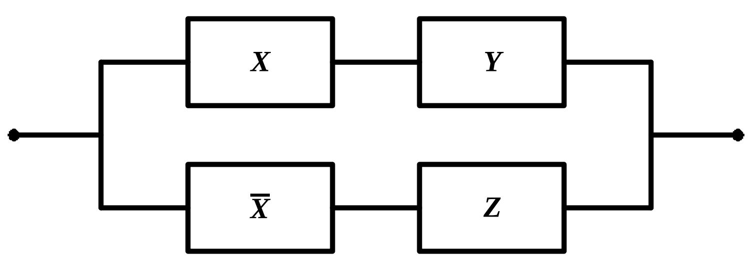
$$f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(0,1,1) = f(0,0,1) = 1,$$

а остальные значения функции равны нулю.

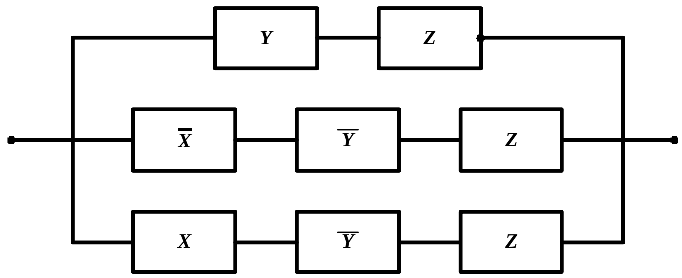
Решение. Составим СДНФ для данной функции и затем упростим:

$$f(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y}) = xy \vee \bar{x}z$$

Тогда имеем следующую РКС:



Пример 3. Упростить РКС:

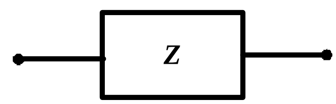


Решение. Составим по данной РКС формулу, задающую функцию проводимости, и затем упростим ее:

$$yz \text{ Ú } \overline{x}\,\overline{y}z \text{ Ú } x\overline{y}z = yz \text{ Ú } (\overline{x}\,\overline{y}z \text{ Ú } x\overline{y}z) =$$

$$= yz \text{ Ú } \overline{y}z(\overline{x} \text{ Ú } x) = yz \text{ Ú } \overline{y}z = (y \text{ Ú } \overline{y})z = z.$$

Тогда упрощенная схема вида:



ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить схемы, реализующие следующие элементарные булевы функции:

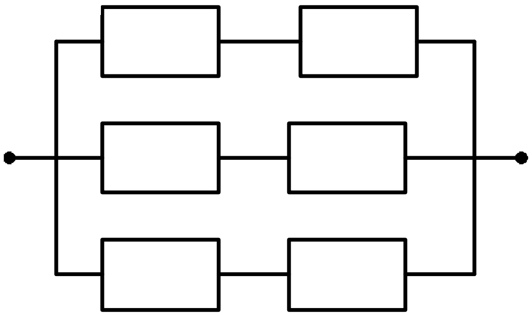
   1) $x \text{ ® } y$ 2) $x \text{ « } y$ 3) $x \mid y$
   4) $x \text{ ¯ } y$ 5) $x \text{ Å } y$

2. Реализовать схемами следующие формулы:

   1) $xy \text{ Ú } \overline{z}$
   2) $\overline{xy} \text{ Ú } zu$
   3) $xy \text{ U } yz \text{ U } xz$
   4) $x(x \text{ Ú } y)$
   5) $(x \text{ Å } y) \text{ Å } x$
   6) $(x \mid y) \mid z$
   7) $(x \text{ ® } y) \text{ ® } z$
   8) $(x \text{ ¯ } y) \text{ ¯ } z$
   9) $(x \text{ « } y) \text{ « } z$
   10) $(x \text{ Ú } z) \text{ ® } (y \mid x)$

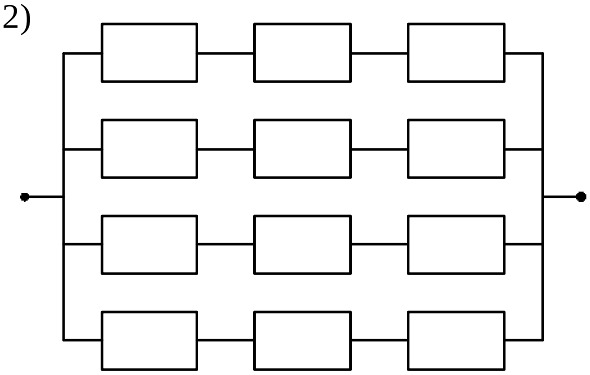
3. Упростить следующие РКС:

1)



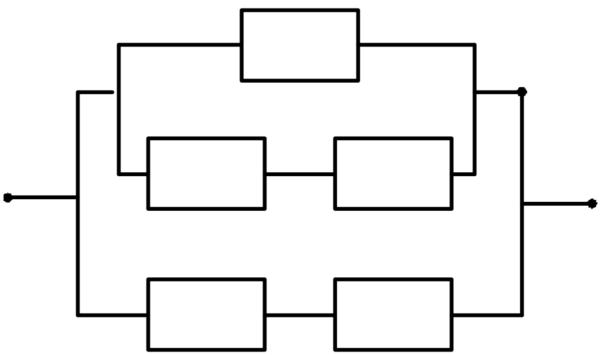
Ответ: $\bar{\boldsymbol{p}}$ U $\bar{\boldsymbol{q}}$.

2)



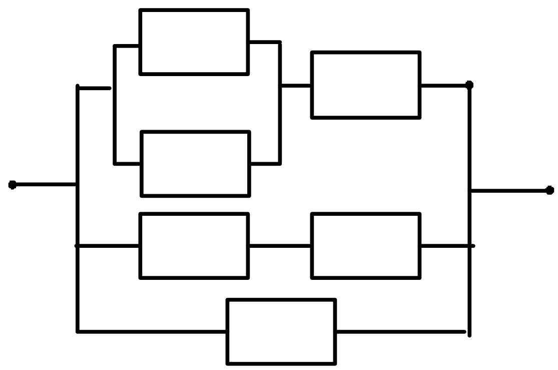
Ответ: $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}$ Ú $\boldsymbol{y})$ Ú $\boldsymbol{xy}$.

3)



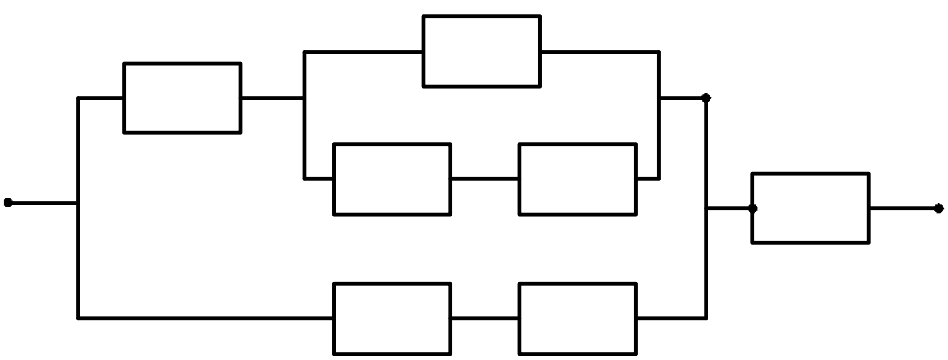
Ответ: $\boldsymbol{p}$ U $\bar{\boldsymbol{q}}$.

4)



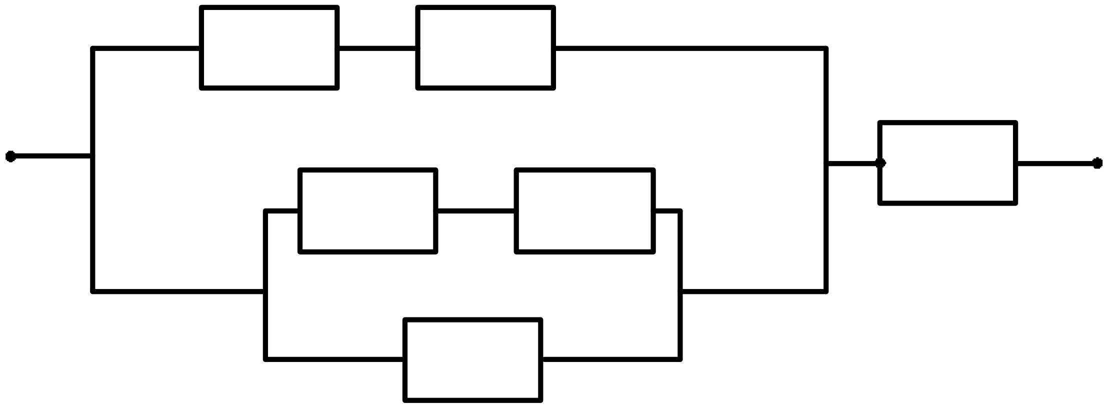
Ответ: $\boldsymbol{b}$ Ú $\bar{\boldsymbol{c}}$.

5)



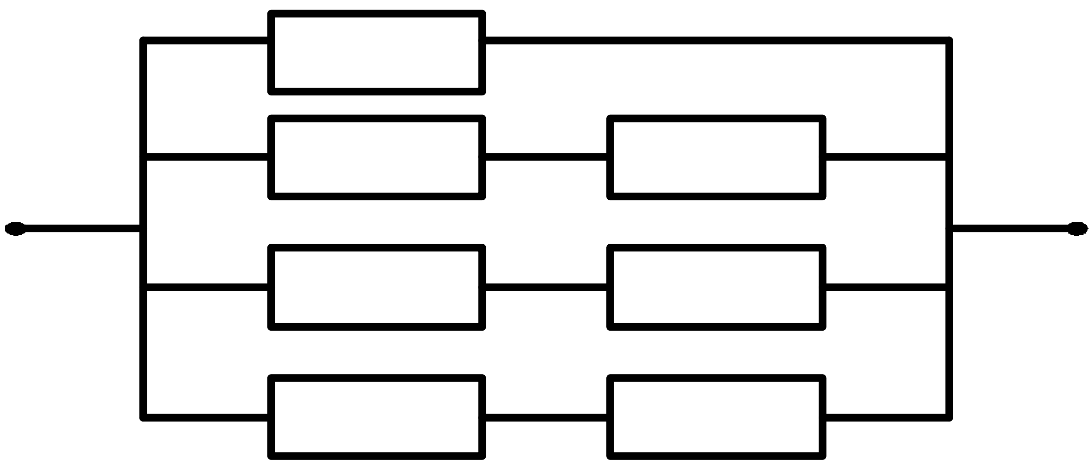
Ответ: $\bar{\boldsymbol{x}}$ & $\bar{\boldsymbol{y}}$.

6)



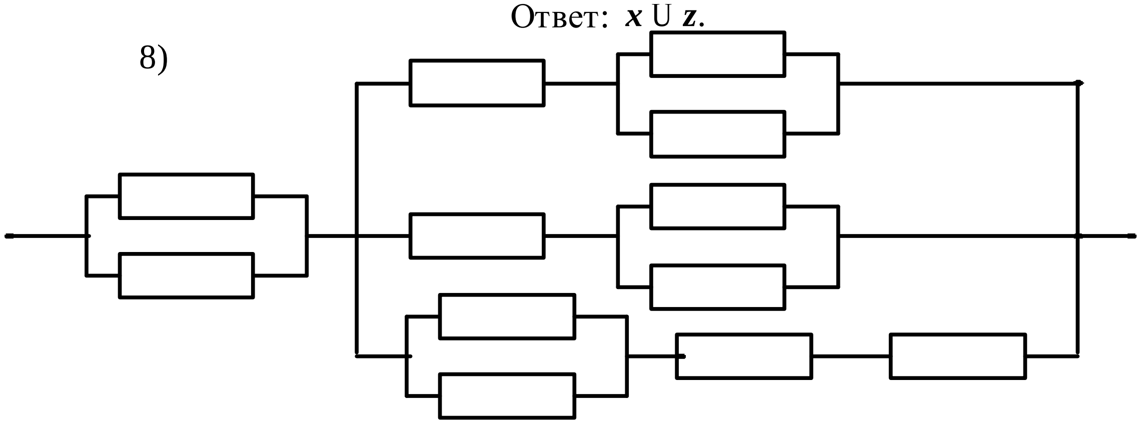
Ответ: $\boldsymbol{p}$.

7)



Ответ: $\boldsymbol{x}$ U $\boldsymbol{z}$.

8)



Ответ: $\boldsymbol{a}$ Ú $\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{xy}\right.$ Ú $\left.\boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{x}}\right)$.

4. Составить несколько РКС для следующих функций:
   1) $(x \to y)\&(y \to z)$
   2) $((x \to y)\&(y \to z) \to (x \to z)$
   3) $(y \vee z) \leftarrow x\bar{y}$
   4) $xy \leftrightarrow \bar{y}z$
   5) $(x \to \bar{y})\&(\bar{y} \to x) \vee \overline{(x \vee y)}$
   6) $\overline{(x \vee z)}\&(x \to y)$
   7) $x \vee (x \vee \bar{y})\&(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z$

5. Из контактов p, q, r составить схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-нибудь два из трех контактов p, q, r.

6. Требуется, чтобы в большом зале можно было включать или выключать свет при помощи любого из четырех переключателей, расставленных на четырех стенах.
   Указание: это можно осуществить путем конструирования схемы, в которой свет включается, когда замкнуто четное число выключателей, и выключается свет, когда разомкнуто нечетное число выключателей.

7. Для группы из трех человек построить электрическую схему для регистрации тайного голосования простым большинством голосов. Требуется так построить схему, чтобы каждый человек, голосующий «за», нажимал кнопку, и не нажимал, если он голосует «против», и чтобы в случае, если будет большинство человек голосовать «за», — загоралась лампочка.

6. ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Элементарная конъюнкция называется ***монотонной***, если она не содержит отрицательных переменных.

Полиномом Жегалкина или полиномом по модулю 2 называется формула:

$$P(x_1,\dots,x_n) = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus \dots \oplus K_l,$$

где K_i $(i = 1,\dots,l)$ — попарно различные монотонные элементарные конъюнкции, составленные из переменных $x_1,\dots,x_n$.

Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется ***степенью*** этого полинома. Число l называется длиной полинома. При $l = 0$ полагаем $P(x_1, ..., x_n) = 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Для каждой булевой функции существует, и при этом единственно, представление в виде полинома Жегалкина, который может быть записан следующим образом:

$$P(x_1, ..., x_n) = \sum_{\{i_1, ..., i_s\} \in \{1, ..., n\}} a_{i_1 ... i_s} x_{i_1} ... x_{i_s}.$$

Число возможных монотонных конъюнкций $x_{i_1} ... x_{i_s}$ равно количеству подмножеств $\{i_1, ..., i_s\}$ множества $\{1, 2, ..., n\}$, т.е. 2^n.Коэффициенты $a_{i_1 ... i_s}$ принимают значение либо 0, либо 1.

Отметим два способа построения полинома Жегалкина.

1. ***Метод неопределенных коэффициентов***. Применяется в основном тогда, когда булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ задана таблицей истинности или набором своих значений. При построении полинома Жегалкина методом неопределенных коэффициентов:

Во-первых, выписываем общий вид полинома Жегалкина для функций от n переменных;

Во-вторых, исходя из того, что $f(x_1, ..., x_n)$ и искомый полином $P(x_1, ..., x_n)$ на одинаковых наборах входящих в них переменных принимают одинаковые значения, составляем систему 2^n уравнений с 2^n неизвестными $a_{i_1 ... i_s}$.

В-третьих, решаем систему, найденную на предыдущем шаге, находим коэффициенты $a_{i_1 ... i_s}$ и выписываем искомый полином.

Пример 1. Построить полином Жегалкина для функции $f(x, y, z) = (01110011)$.

Решение. Запишем общий вид полинома Жегалкина для функции, зависящей от 3-х переменных:

$$P(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} zy \oplus a_{123} xyz.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_1 = 0; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_2 = 1; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_3 = 1; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{23} = 1; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{13} = 0; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_{12} = 1; \\ \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{12} \oplus \alpha_{13} \oplus \alpha_{23} \oplus \alpha_{123} = 1. \end{cases}$$

Учитывая свойства операции «сложение по модулю 2»:

$$1 \oplus 1 = 0; \quad 0 \oplus 1 = 1;$$

$$0 \oplus 0 = 0; \quad 1 \oplus 0 = 1,$$

находим коэффициенты полинома Жегалкина

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_{12} = 0, \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{23} = \alpha_{13} = \alpha_{123} = 1$$

и выписываем полином третьей степени:

$$P(x, y, z) == y \oplus z \oplus yz \oplus xz \oplus xyz .$$

2. ***Метод эквивалентных преобразований***. Этот метод применяется в том случае, когда функция $f(x_1,...,x_n)$ задана в виде формулы алгебры логики. Суть метода состоит в том, чтобы, исходя из свойств логических операций, построить эквивалентную заданной формулу, содержащую только символы операций логического умножения и сложения по модулю 2.

При этом следовать схеме:

а) построить д.н.ф. для заданной формулы;

б) в полученной д.н.ф. выразить дизъюнкцию через конъюнкцию и отрицание:

$$u \vee v \vee w = \neg(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}); \tag{1}$$

в) в полученной в пункте б) формуле освободиться от отрицания, используя эквивалентность:

$$\neg u = u \oplus 1; \tag{2}$$

г) раскрыть скобки в полученном выражении, пользуясь свойством дистрибутивности операции $\oplus$ относительно логического умножения

$$u(v \oplus w) = uv \oplus uw; \tag{3}$$

д) привести подобные члены по правилу:

$$u \oplus u = 0. \tag{4}$$

Пример 2. Пусть $f(x,y,z)=(x\ \text{®}\ y)(y\ \text{®}\ z)$. Построить полином Жегалкина, используя метод эквивалентных преобразований.

Решение. Построим д.н.ф.

$$(x\ \text{®}\ y)(y\ \text{®}\ z)=(\overline{x}\ \text{Ú}\ y)(\overline{y}\ \text{Ú}\ z)=\overline{x}\,\overline{y}\ \text{Ú}\ \overline{x}z\ \text{Ú}\ yz.$$

Освободимся от знака дизъюнкции Ú:

$$\overline{x}\,\overline{y}\ \text{Ú}\ \overline{x}z\ \text{Ú}\ yz\overset{(1)}{=}\text{ù}\left(\overline{\overline{x}\,\overline{y}}\ \text{Ù}\ \overline{\overline{x}z}\ \text{Ù}\ \overline{yz}\right).$$

Применим формулу (2):

$$\text{ù}\left(\overline{\overline{x}\,\overline{y}}\ \text{Ù}\ \overline{\overline{x}z}\ \text{Ù}\ \overline{yz}\right)=((x\ \text{Å}\ 1)(y\ \text{Å}\ 1)\ \text{Å}\ 1)((x\ \text{Å}\ 1)z\ \text{Å}\ 1)(yz\ \text{Å}\ 1)\ \text{Å}\ 1.$$

Пользуясь (3), раскроем скобки в последнем выражении и приведем подобные, получим:

$$(xy\ \text{Å}\ x\ \text{Å}\ y)(xz\ \text{Å}\ z\ \text{Å}\ 1)(yz\ \text{Å}\ 1)\ \text{Å}\ 1=yz\ \text{Å}\ xy\ \text{Å}\ y\ \text{Å}\ x\ \text{Å}\ 1.$$

Описанный в пунктах а) — д) способ построения полинома Жегалкина применим для любой формулы. Однако в большинстве случаев существует более краткие пути преобразования формулы в полином Жегалкина. В предыдущем примере можно построить полином Жегалкина для каждого сомножителя $x\ \text{®}\ y$ и $y\ \text{®}\ z$, их произведение и дает полином Жегалкина для $f(x,y,z)$. Действительно,

$$u\ \text{®}\ v=\overline{u}\ \text{Ú}\ v=\overline{u\overline{v}}=u(v\ \text{Å}\ 1)\ \text{Å}\ 1=uv\ \text{Å}\ u\ \text{Å}\ 1,$$

откуда следует

$$(x\ \text{®}\ y)(y\ \text{®}\ z)=(xy\ \text{Å}\ x\ \text{Å}\ 1)(yz\ \text{Å}\ y\ \text{Å}\ 1),$$

поэтому

$$(x\ \text{®}\ y)(y\ \text{®}\ z)=xy\ \text{Å}\ yz\ \text{Å}\ y\ \text{Å}\ x\ \text{Å}\ 1.$$

Для формул, содержащих символы ~ и | при построении полинома Жегалкина, полезно использовать эквивалентности:

$$u\sim v=\overline{u\ \text{Å}\ v}=u\ \text{Å}\ v\ \text{Å}\ 1, \tag{5}$$

$$u\,|\,v=\overline{uv}=uv\ \text{Å}\ 1. \tag{6}$$

Пример 3. Построим полином Жегалкина для функции

$$f(x,y,z)=\rceil((xy\sim z)\,|\,(\overline{x}\vee y)).$$

Решение.

$$\rceil((xy\sim z)\,|\,(\overline{x}\vee y))\overset{(5,6)}{=}(xy\oplus z\oplus 1)(xy\oplus x\oplus 1)=xyz\oplus xz\oplus x\oplus z\oplus 1.$$

Булева функция, которой соответствует полином Жегалкина первой степени, называется ***линейной***. Функции, задаваемые формулами

$$x\sim y,\ x\oplus y,\ \overline{x},\ x,\ x\oplus y\oplus z,$$

являются линейными. Множество всех линейных булевых функций обозначается через L, множество линейных функций, зависящих от n переменных, — через $L(n)$. Для каждой функции $f\in L(n)$ имеет место представление

ставление

$$f(x_1,\dots,x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \dots \oplus c_nx_n, \qquad (7)$$

где коэффициенты c_i принимают значения либо 0, либо 1.

Из представления (7) следует, что число всех линейных функций от n переменных равно 2^{n+1}. Другими словами, мощность множества $L(n)$ равна 2^{n+1}.

Если функция $f \notin L$, то она называется ***нелинейной***. Степень полинома Жегалкина нелинейной функции не меньше 2. Элементарные функции xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x|y$ являются нелинейными.

Справедливо утверждение (***лемма о нелинейной функции***):

Если $f(x_1,\dots,x_n)$ нелинейная функция, то, подставляя на места ее переменных 0, 1, x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$, можно получить либо xy, либо $\overline{xy}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти число монотонных элементарных конъюнкций ранга r, составленных из переменных $x_1,\dots,x_n$.

2. Найти число полиномов Жегалкина степени r над множеством переменных $x_1,\dots,x_n$.

3. Методом неопределенных коэффициентов построить полином Жегалкина для следующих функций:

1) $f = (1001)$;	4) $(x \sim \bar{y}) \vee (x \downarrow y)$;
2) $f = (01101000)$;	5) $xyz \to (\bar{x} \vee y)$;
3) $f = (01110010)$;	6) $(x\vert y) \to (y \oplus z)$.

4. Построить полиномы Жегалкина для элементарных булевых функций.

5. При помощи эквивалентных преобразований построить полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $D = xy \vee yz \vee \bar{x}z$;	4) $D = \bar{x}\,\bar{z} \vee xyz$;
2) $D = x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_3$;	5) $D = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3$;
3) $D = xyz \vee x \vee z$	6) $D = x\bar{y}z \vee \bar{x}$.

6. Наборы $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\alpha}_n)$ и $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_n)$ называются соседними, если они отличаются только одной координатой. Доказать, что если функция $f(x_1,\dots,x_n)$ на двух соседних наборах принимает противоположные значения, то она линейная. Верно ли обратное утверждение?

7. Выяснить, является ли линейной функция f:

1) $f = x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;
2) $f = (x \sim y)(y \to z) \sim z$;
3) $f = (01011001)$;
4) $f = (0110100110100101)$.

7. ОПЕРАЦИЯ ЗАМЫКАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

Обозначим множество всех булевых функций через ***Б***. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$, $g_1(x_1,\dots,x_m)$, …, $g_n(x_1,\dots,x_m)$ - произвольные булевы функции. ***Суперпозицией*** этих функций называется функция

$$\varphi(x_1,\dots,x_m) = f(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m)).$$

Пример 1. Пусть $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \sim x_2) \oplus x_3$, $g_1(x,y) = xy$, $g_2(x,y) = \overline{x}$, $g_3(x,y) = x \mid y$, тогда их суперпозиция $\varphi(x,y)$ реализуется формулой $(xy \sim \overline{x}) \oplus (x \mid y)$.

Пусть M - некоторое множество булевых функций: $M \subseteq Б$. ***Замыканием*** $[M]$ множества M называется совокупность всех тех булевых функций, которые являются суперпозициями функций из множества M. Операция получения множества $[M]$ из M называется ***операцией замыкания***. Множество M называется ***функционально замкнутым классом*** (короче, ***замкнутым классом***), если $[M] = M$. Таким образом, замкнутый класс вместе с любыми его функциями содержит и все их суперпозиции.

Традиционно выделяют пять замкнутых классов булевых функций:

1. *Класс* $\mathbf{L}$ *линейных функций.*
2. *Класс* T_0 *булевых функций, сохраняющих константу* $\mathbf{0}$:

$$T_0 = \{f \in Б \mid f(0,\dots,0) = 0\}.$$

Функции $x \& y, x \vee y, x \oplus y, x$ являются функциями из T_0, тогда как $x \mid y,\ x \downarrow y, x \to y,\ x \sim y,\ \bar{x}$ не принадлежат T_0.

3. *Класс T_1 булевых функций, сохраняющих константу **1***:

$$T_1 = \{ f \in Б \mid f(1,\dots,1) = 1 \}.$$

Как легко проверить, $x \vee y,\ x \& y,\ x \to y,\ x \sim y,\ x, 1$ – функции из T_1, в то время как $x \mid y,\ x \downarrow y,\ x \oplus y,\ \bar{x}, 0$ не принадлежат T_1.

4. *Класс **S** самодвойственных функций.* Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется ***самодвойственной***, если она совпадает со своей двойственной:

$$S = \{ f \in Б \mid f(x_1,\dots,x_n) = f^*(x_1,\dots,x_n) \}.$$

Очевидно, что самодвойственными функциями будут $x, \bar{x}$; функции $x \vee y,\ xy,\ x \to y,\ x \mid y$ не являются самодвойственными.

Пример 2. Покажем, что функция $\varphi(x,y,z) = xy \vee xz \vee yz$ является самодвойственной. Действительно,

$$\varphi^*(x,y,z) = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = xyz \vee xy \vee xz \vee yz =$$
$$= xy(1 \vee z) \vee xz \vee zy = xy \vee xz \vee zy.$$

Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\bar{f}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n) = f(x_1,\dots,x_n),$$

так что на наборах $(a_1,\dots,a_n)$ и $(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n)$, которые мы будем называть противоположными, самодвойственная функция принимает противоположные значения.

Пример 3. Функция $f_1(x,y,z) = (01101110)$ не является самодвойственной, так как на противоположных наборах (000) и (111) она принимает одно и то же значение 0.

Функция $f_2(x,y,z) = (10110010)$ является самодвойственной, так как на каждой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения.

Справедливо следующее утверждение, называемое обычно ***леммой о несамодвойственной функции***:

Если функция $f(x_1,\dots,x_n)$ несамодвойственная, то, подставляя на места ее переменных x и $\bar{x}$, можно получить константу.

5. *Класс **M** монотонных функций.*

Говорят, что набор $\tilde{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ предшествует набору $\tilde{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ и пишут $\tilde{a} \prec \tilde{b}$, если $a_i \le b_i$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{n}$. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \in \boldsymbol{Б}$ называется ***монотонной***, если $\boldsymbol{f}(\tilde{a}) \le \boldsymbol{f}(\tilde{b})$ при $\tilde{a} \prec \tilde{b}$.

Функции $\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}, \boldsymbol{xy}$ являются монотонными, тогда как $\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \downarrow \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ не принадлежат классу $\boldsymbol{M}$.

Справедливо утверждение (***лемма о немонотонной функции***):

Если $\boldsymbol{f} \notin \boldsymbol{M}$, то, подставляя на места ее переменных $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{x}$, можно получить функцию $\bar{\boldsymbol{x}}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Обосновать следующие свойства замыкания:
   1) $[\,[\boldsymbol{M}]\,] = [\boldsymbol{M}]$;
   2) если $\boldsymbol{M}_1 \subseteq \boldsymbol{M}_2$, то $[\boldsymbol{M}_1] \subseteq [\boldsymbol{M}_2]$;
   3) $[\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2] \supseteq [\boldsymbol{M}_1] \cup [\boldsymbol{M}_2]$;
   4) $[\varnothing] = \varnothing$.

2. Всегда ли на множестве $\boldsymbol{Б}$ булевых функций:
   a) пересечение замкнутых классов является замкнутым классом;
   b) разность замкнутых классов есть замкнутый класс;
   c) дополнение замкнутого класса не является замкнутым классом?

3. Показать, что суперпозиция линейных функций является линейной функцией, т.е. что класс $\boldsymbol{L}$ замкнут, и мощность $|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{n})| = 2^{n+1}$, где $\boldsymbol{n}$- число переменных.

4. Показать, что классы $\boldsymbol{T}_0$ и $\boldsymbol{T}_1$ функций, сохраняющих константу, замкнуты.

5. Показать, что суперпозиция самодвойственных функций является самодвойственной, т.е. $[\boldsymbol{S}] = \boldsymbol{S}$.

6. Доказать замкнутость класса монотонных функций.

7. Показать, что мощности множеств $\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{n})$ и $\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{n})$ функций от $\boldsymbol{n}$ переменных, сохраняющих константы, совпадают: $|\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{n})| = |\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{n})| = \mathbf{2}^{2^n-1}$.

8. Показать, что мощность множества $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n})$ самодвойственных функций от $\boldsymbol{n}$ переменных вычисляется по формуле: $|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n})| = \sqrt{\mathbf{2}^{2^n}}$.

9. Самодвойственна ли функция $\boldsymbol{f}$?
   1) $\boldsymbol{f} = \neg((\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{xz}) \to \boldsymbol{yz}$;
   2) $\boldsymbol{f} = (\bar{\boldsymbol{x}} \vee \boldsymbol{y} \vee \bar{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{t} \vee \bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{yz}$;
   3) $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{x})$;
   4) $\boldsymbol{f} = (\mathbf{01011110})$;
   5) $\boldsymbol{f} = (\mathbf{0001001001100111})$.

10. Из несамодвойственной функции $\boldsymbol{f}$ с помощью подстановки на места переменных функций $\boldsymbol{x}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}$ получить константу:

1) $f=(\mathbf{00111001})$;
2) $f=(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})t\vee\bar{x}y\bar{z}$;
3) $f=(x\downarrow y)\to(x\oplus z)$;
4) $f=xy\vee xz\vee yt\vee zt$.

11.Выяснить, каким из множеств $T_0\cup T_1, T_1\setminus T_0$ принадлежат перечисленные ниже функции:
1) $((x\vee y)\to(x\mid yz))\downarrow((y\sim z)\to x)$;
2) $(xy\to z)\mid((x\to z)\downarrow(z\oplus xy))$.

12.Сколькими способами можно расставить скобки в выражении $x_1\to x_2\to x_1\to x_2\to x_1$, чтобы получилась формула, реализующая функцию из T_0.

13.Подсчитать число функций, зависящих от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, в каждом из следующих множеств:
1) $T_1\cap T_0$;
2) $T_0\cap L$;
3) $T_1\cup L$;
4) $L\setminus(T_0\cap T_1)$;
5) $T_1\cap S$;
6) $L\cap S\cap T_1$;
7) $S\cap T_0\cap T_1$;
8) $T_0\cup T_1$;
9) $(S\setminus T_0)\cap T_1$;

14.Найти функцию $f(x,\ldots,x)$, если:
1) $f(x_1\ldots,x_n)\in T_1\setminus T_0$;
2) $f(x_1,\ldots,x_n)\in L\setminus(T_1\cap S)$;
3) $f(x_1,\ldots,x_n)\in S\setminus T_0$;

15.Какие из перечисленных ниже функций являются монотонными:
1) $x\to(x\to y)$;
2) $x\to(y\to x)$;
3) $xy(x\oplus y)$;
4) $xy\oplus yz\oplus zx\oplus x$;
5) $f=(\mathbf{00110111})$;
6) $f=(\mathbf{011001111})$;
7) $f=(\mathbf{0001010101010111})$;
8) $f=(\mathbf{0000000010111111})$

16.Сколько существует таких монотонных функций $\boldsymbol{f(x,y,z)}$, что $\boldsymbol{f(0,1,1)} = \boldsymbol{f(1,0,1)} = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{f(0,0,1)} = \boldsymbol{0}$? Сколько таких функций принадлежит множеству $\boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{S}$?

17.Показать, что если $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{f^*} \in \boldsymbol{M}$.

18.Показать, что замкнутые классы $\boldsymbol{T_0, T_1, S, M, L}$ попарно различны.

8. ПОЛНОТА СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Для всякой булевой функции существует представление в виде дизъюнктивной или конъюнктивной нормальных форм. Отсюда следует, что всякая функция $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{Б}$ может быть выражена в виде формулы через элементарные функции: отрицание $\boldsymbol{\overline{x}}$, дизъюнкцию $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ и конъюнкцию $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли другие системы булевых функций, которые обладают таким же свойством? Ответом на этот вопрос являются приводимые ниже понятия и теоремы.

Система булевых функций $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, ..., \boldsymbol{f_S}, ...\}$ называется ***полной***, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы, другими словами, является суперпозицией функций из системы $\boldsymbol{F}$.

Из этого определения следует, что система $\boldsymbol{F}$ полна, если $[\boldsymbol{F}] = \boldsymbol{F}$. Рассмотрим примеры полных систем:

1. Система $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{\overline{x}}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}\}$ представляет собой полную систему.
2. Система $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \,\&\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ также полна, так как любая булева функция представима в виде полинома Жегалкина;
3. Множество $\boldsymbol{Б}$ всех булевых функций также образует полную систему, так как $[\boldsymbol{Б}] = \boldsymbol{Б}$.

Ясно, что не всякая система является полной. Например, система $\{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \,\&\, \boldsymbol{y}\}$ не является полной. Следующая теорема позволяет сводить вопрос о полноте одних систем к вопросу о полноте других систем.

Теорема (о полноте двух систем):

Пусть даны две системы функций

$$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, ...\} \text{ и } \boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, ...\},$$

относительно которых известно, что первая система полна в $\boldsymbol{Б}$ и каждая ее функция является суперпозицией функций второй системы. Тогда вторая система также является полной.

Пользуясь этой теоремой, можно доказать полноту еще ряда функциональных систем и тем самым расширить список примеров полных систем.

4. Системы $G_1 = \{\bar{x}, x \text{ Ú } y\}$ и $G_2 = \{\bar{x}, x \text{ Ù } y\}$ являются полными. Из равенств

$$x \text{ Ú } y = \overline{\bar{x} \text{ Ù } \bar{y}} \text{ и } x \text{ Ù } y = \overline{\bar{x} \text{ Ú } \bar{y}}$$

следует, что в качестве системы F можно использовать множество функций в примере 1.

5. Система $G = \{x \mid y\}$ полна, так как

$$\bar{x} = x \mid x; \quad x \text{ Ù } y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$$

и в качестве F можно взять систему функций $\{\bar{x},\ x \text{ Ú } y\}$ из примера 4.

На множестве ***Б*** булевых функций справедлив следующий ***кри-***

классы функции	T_0	T_1 S	M L
f_1 f_2			
f_3			
…			

терий полноты.

Теорема Поста:

Система $F = \{f_1,\ f_2,\ldots\}$ ***полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из замкнутых классов*** T_0, T_1, S, M, L.

Применение критерия полноты

Чтобы исследовать полноту системы функций $F = \{f_1,\ f_2,\ldots\}$, удобно построить следующую таблицу,

в которой столько строк, сколько функций в данной системе F. В каждую клетку этой таблицы, стоящей на пересечении столбца, соответствующего одному из классов, и строки, соответствующей функции f_i, заносится знак «+», если f_i принадлежит этому классу, и знак «-» в противном случае.

В силу критерия Поста для полноты системы $\boldsymbol{F}=\{f_1, f_2,...\}$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной клетке каждого столбца стоял знак «-».

Система (множество) булевых функций называется ***базисом***, если она полна и любая ее подсистема не является полной на множестве булевых функций.

1

y	$\bar{y}$	1	f_1
0	1	1	0
1	0	1	1

2

x	y	z	xy	f_2
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

3

x	y	$x \cup y$	f_3
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Для выделения ***базиса*** из полной системы функций $\boldsymbol{F}=\{f_1, f_2, f_3,...\}$ нужно упорядочить по числу функций множество подсистем системы ***F:***

$$\{f_1\},\{f_2\},...,\{f_1, f_2\},\{f_1, f_3\},....$$

и, начиная с первой, исследовать их на полноту. ***Первая из полных*** в этой последовательности ***подсистем*** будет ***базисом***.

Пример. Исследовать полноту системы функций $\boldsymbol{F}=\{\bar{y}\oplus \mathbf{1};\ x\downarrow y;\ xy\to z\}$ и, если она полна, выделить из нее базис.

Решение. Пусть $f_1=\bar{y}\oplus\mathbf{1}$, $f_2=xy\to z$, $f_3=x\downarrow y$.

Составим таблицы истинности для заданных функций:

Исследуем функцию $f_2=xy\to z$ на принадлежность классам $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$.:

$f_2\notin \boldsymbol{T}_0$, т.к. $f_2(\mathbf{0,0})=\mathbf{1}$; $f_2\in \boldsymbol{T}_1$, т.к. $f_2(\mathbf{1,1})=\mathbf{1}$;

$f_2\notin \boldsymbol{S}_1$, т.к. на противоположных наборах (000) и (111) функция принимает одинаковое значение, равное 1.

$f_2\notin \boldsymbol{M}_1$, т.к. есть предшествующие наборы, например $(000)\le(110)$, на которых $f_2(\mathbf{0,0,0})=\mathbf{1}$, $f_2(\mathbf{1,1,0}=\mathbf{0})$,где неравенство $1\le 0$ ложное,

$f_2\notin \boldsymbol{L}_1$,т.к. $f_2=xy\to z=\overline{xy}\vee z=\overline{\overline{\overline{xy}}\vee z}=\overline{xy\,\&\,\bar{z}}=\overline{xy(z\oplus\mathbf{1})}=xyz\oplus xy\oplus\mathbf{1}$.

Аналогично исследуем функции f_1 и f_3 на принадлежность классам $\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{L}_1$.

Заполним таблицу

В каждом столбце таблицы стоит знак «-». Поэтому, согласно критерию Поста, система функций полная.

Базисом является функция f_3, т.к. подсистема $\{f_3\}$- полна в ***Б***.

Замечание 1. Для исследования полноты вовсе не обязательно заполнять все клетки таблицы. Если получили, что одна из функций не принадлежит какому – либо из классов, то принадлежность остальных функций этому классу можно не исследовать.

Замечание 2. При исследовании полноты системы полезно использовать следующее утверждение: если некоторая система функций $\boldsymbol{F}$ содержит в себе как часть полную систему функций $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1$ Ì $\boldsymbol{F}$, то система $\boldsymbol{F}$ полна.

Например, рассмотренная выше в примере система $\boldsymbol{F}$ является полной, т.к. содержит в себе полную подсистему $\{x$ ¯ $y\}$.

Замечание 3. Если в одном из столбцов таблицы получены все «+», т.е. все функции f_i системы $\boldsymbol{F}$ принадлежат какому-то классу, то система функций не является полной.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразить с помощью суперпозиций:
   1) «&»и « ® » через «U » и «┐ »;
   2) «&» и «U » через ® и «┐ »;
   3) «U » и «U » через «/ »;
   4) «┐ » через « ® » и «0»;
   5) «┐ » через «Å » и «1»;
   6) «U » через « ® »;

классы / функции	T_0	T_1	S	M	L
$f_1 = \bar{y}$ Å $\mathbf{1}$	+	+	+	+	+
$f_2 = xy$ ® z	—	+	—	—	—
$f_3 = x$ ¯ y	—	—	—	—	—

2. Доказать, что нельзя выразить с помощью суперпозиций:
   1) «┐ » через «&», «U », « ® » и «~»;
   2) « ® » через «&», и «U ».

3. Доказать полноту следующих систем функций, используя теорему о полноте 2 – х систем:
   1) $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \ \text{®}\ \boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$;
   2) $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \,^{-}\, \boldsymbol{y}\}$;
   3) $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \ \text{®}\ \boldsymbol{y}, \mathbf{0}\}$;
   4) $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x} \,\text{Ú}\, \boldsymbol{y}, \mathbf{1}\}$;
   5) $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \ \text{®}\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$;
   6) $\boldsymbol{G} = \{\mathbf{1}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{y}\}$.
4. Доказать неполноту систем функций:
   1) $f = \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$;
   2) $f = \{\boldsymbol{x} \,\&\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \,\text{Ú}\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \ \text{®}\ \boldsymbol{y}\}$.

5. Используя критерий полноты, выяснить, являются ли полными следующие системы функций. В полных системах выделить базис:
   1) $\boldsymbol{F} = \{\bar{\boldsymbol{x}} \ \text{®}\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \ \text{®}\ (\boldsymbol{y} \sim \bar{\boldsymbol{z}})\}$;
   2) $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{y} \ \text{®}\ \boldsymbol{z}), ((\boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{z}) \ \text{®}\ \boldsymbol{xy}) \,^{-}\, \bar{\boldsymbol{z}}\}$;
   3) $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \,\text{Ú}\, \boldsymbol{y} \,\text{Ú}\, \bar{\boldsymbol{z}} \ \text{®}\ (\boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{y}), \quad \overline{\boldsymbol{xy}} \ \text{®}\ \boldsymbol{z}\}$;
   4) $\boldsymbol{F} = \{(\mathbf{01101001}), (\mathbf{10001001}), (\mathbf{0001})\}$;
   5) $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{z}}, \ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \,\text{Ú}\, \bar{\boldsymbol{x}}_1\bar{\boldsymbol{x}}_2\}$;
   6) $\boldsymbol{F} = \{(\mathbf{10}), (\mathbf{1010110111110011})\}$;
   7) $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{S} \setminus \boldsymbol{M})\,\mathbf{U}\,(\boldsymbol{L} \setminus (\boldsymbol{T}_0 \,\mathbf{U}\, \boldsymbol{T}_1))$;
   8) $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{M} \setminus (\boldsymbol{T}_0 \,\mathbf{U}\, \boldsymbol{T}_1))\,\mathbf{U}\,(\boldsymbol{L} \setminus \boldsymbol{S})$;
   9) $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{M} \setminus (\boldsymbol{T}_0 \,\mathbf{I}\, \boldsymbol{T}_1))\,\mathbf{U}\,(\boldsymbol{L} \setminus \boldsymbol{S})$;
   10) $\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x} \ \text{®}\ \bar{\boldsymbol{z}}) \,\text{Ú}\, \boldsymbol{y}, (\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \ \text{®}\ \boldsymbol{x}) \sim \bar{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{xy}\}$;
   11) $\boldsymbol{F} = \{\bar{\boldsymbol{x}} \ \text{®}\ (\boldsymbol{x} \,\text{Å}\, \boldsymbol{y}), \bar{\boldsymbol{z}}\,\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{x} \,\text{Ú}\, \bar{\boldsymbol{z}}\}$;

6. Полна ли система $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1\ldots,\boldsymbol{x}_2)\}$; если:
   1) $\boldsymbol{f}_1 \ \text{Î}\ \boldsymbol{S} \setminus \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{f}_2 \ \text{Ï}\ \boldsymbol{L}\,\mathbf{U}\,\boldsymbol{S}, \quad \bar{\boldsymbol{f}}_1 \ \text{®}\ \boldsymbol{f}_2 = \mathbf{1}$;
   2) $\boldsymbol{f}_1 \ \text{Î}\ \boldsymbol{T}_0\,\mathbf{U}\,\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{f}_2 \ \text{Ï}\ \boldsymbol{S}, \quad \bar{\boldsymbol{f}}_1 \ \text{®}\ \bar{\boldsymbol{f}}_2 \ ^{\circ}\ \mathbf{1}$;
   3) $\boldsymbol{f}_1 \ \hat{\text{Î}}\ \boldsymbol{T}_0 \,\mathbf{I}\, \boldsymbol{T}_1, \quad \boldsymbol{f}_2 \ \text{Î}\ \boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{T}_1, \quad \boldsymbol{f}_1 \ \text{®}\ \boldsymbol{f}_2 \ ^{\circ}\ \mathbf{1}$.

9. ПРЕДИКАТЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Понятие предиката обобщает понятие высказывания.

Предложение или утверждение, содержащее одно или несколько переменных, при подстановке вместо которых конкретных значений из некоторых множеств мы получаем высказывание (истинное или ложное), называется ***предикатом***. Количество переменных, от которых зависит предикат, называется ***местностью*** или ***арностью***.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — множества элементов произвольной природы.

Определение 1: n-местным предикатом называется функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящая от n переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая на этом множестве значение 1(истина) или 0 (ложь).

Например, $P(x)$= [натуральное число x кратно 5] — одноместный предикат: $P(4)=0$, $P(15)=1$, $P(11)=0$, $P(20)=1$. $Q(x,y)=$[город x находится на территории государства y] — двухместный предикат: $Q(\textit{Москва}, \textit{Россия})=1$, $Q(\textit{Париж}, \textit{Венгрия})=0$, $Q(\textit{Париж}, \textit{Франция})=1$.

Само высказывание считается нуль-местным предикатом.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, от которых зависит предикат, называются ***предметными переменными***. Конкретные значения предметных переменных называются предметными константами.

Множество M, на котором задан предикат, называется ***областью определения предиката.***

Множество $E_p \subseteq M$, на котором предикат принимает только истинные значения, называется ***множеством истинности*** предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $E_p = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M \mid P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1\}$.

Различают четыре типа предикатов:

1. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***тождественно истинным*** на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, если $E_p = M$, т.е. если на любом наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ предикат принимает значение 1 (истина).
2. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***тождественно ложным*** на множестве M, если $E_p = \varnothing$, т.е. если на любом наборе значений переменных предикат принимает значение 0 (ложь).
3. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***выполнимым***, если его множество истинности E_p не пусто: $E_p \neq \varnothing$.
4. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***опровержимым***, если его множество истинности E_p не совпадает с его областью определения, т.е. существуют такие наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$, на которых предикат принимает значение 0.

Например,

$P(x,y)=\left[|x|+|y|\geq 0,\ x,y\in R\right]$ — тождественно истинный предикат;

$Q(x_1,x_2\ x_3)=\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2<0,\ x_i\in R,\ i=1,2,3\right]$ — тождественно ложный предикат, т.к. $E_Q=\varnothing$.

$F(x)=\left[x+3=1,\ x\in N\right]$ — выполнимый предикат, т.к. $E_F=\{-2\}\neq\varnothing$.

$\Phi(x,y)=\left[x^2+y^2>0,(x,y)\in R\times R\right]$ — опровержимый предикат, т.к. $E_\Phi=R\times R\setminus\{(0,0)\}$; $E_\Phi\neq M$.

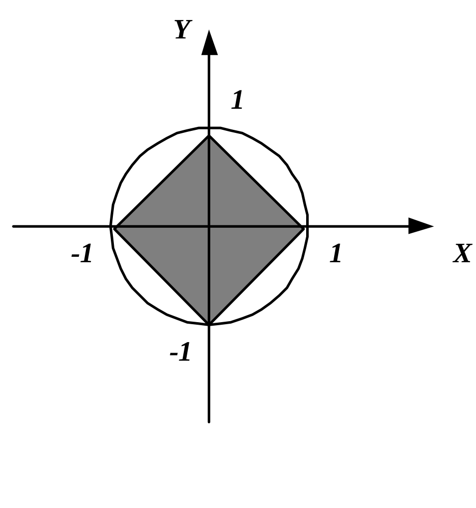
Говорят, что предикат $Q(x)$ является следствием предиката $P(x)$ $(P(x)\Rightarrow Q(x))$, если E_P является подмножеством E_Q: $E_P\subset E_Q$.

Определение 2: Два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, определенные на одном и том же множестве, одной и той же местности, называются ***равносильными*** $(P(x)\Leftrightarrow Q(x))$, если их множества истинности совпадают: $E_P=E_Q$.

Например,

$P(x,y)=\left[x^2+y^2=1,\ x,y\in Z\right]$ и $Q(x,y)=\left[|x|+|y|=1,\ x,y\in Z\right]$ — равносильные двухместные предикаты, т.к. $E_P=E_Q=\{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$.

Предикат $A(x,y)=\left[x^2+y^2\leq 1,\ x,y\in R\right]$ является следствием предиката $B(x,y)=\left[|x|+|y|\leq 1,\ x,y\in R\right]$, т.к. $E_B\subset E_A$ (см. рис.)



Из определений следует, что каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но не является опровержимым, тогда как каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но не является выполнимым. Выполнимый предикат не обязательно является тождественно истинным. Опровержимый предикат не обязательно является тождественно ложным.

Заметим, что отношение равносильности двух предикатов является отношением эквивалентности. Переход от предиката $\boldsymbol{P(x)}$ к равносильному ему предикату $\boldsymbol{Q(x)}$ называется ***равносильным преобразованием*** первого.

Уравнения и системы уравнений, неравенства и системы неравенств, прочие математические объекты представляют собой предикаты. При их решении мы проделываем равносильные преобразования над ними, целью которых является поиск множества истинности данного исходного предиката.

Имеет место утверждение:

Два предиката, имеющие одну область определения, равносильны тогда и только тогда, когда один из них является следствием другого:

$$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q} \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \text{ и } \boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P}.$$

Так как предикаты могут принимать два значения 1 или 0, то к ним применимы все логические операции алгебры высказываний. В результате получаем новые предикаты.

Например, ***конъюнкцией*** двух предикатов $\boldsymbol{P(x)}$ и $\boldsymbol{Q(x)}$ называется новый предикат $\boldsymbol{P(x) \& Q(x)}$, который принимает значение 1 при тех и только тех конкретных значениях $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$, при которых каждый из предикатов $\boldsymbol{P(x)}$ и $\boldsymbol{Q(x)}$ принимает значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

$(\boldsymbol{P \& Q})(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \& \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Очевидно, $\boldsymbol{E}_{P\&Q} = \boldsymbol{E}_P \cap \boldsymbol{E}_Q$.

Аналогично определяются операции $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\leftrightarrow$ (эквиваленция), $\neg$ (отрицание) и т.д.

Легко видеть, что

1. $\boldsymbol{E}_{P \vee Q} = \boldsymbol{E}_P \cup \boldsymbol{E}_Q$;
2. $\boldsymbol{E}_{\bar{P}} = \tilde{\boldsymbol{E}}_P = \boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{E}_P$;
3. $\boldsymbol{E}_{P \rightarrow Q} = \tilde{\boldsymbol{E}}_P \cup \boldsymbol{E}_Q$;

4. $\boldsymbol{E}_{P \leftrightarrow Q} = \left(\boldsymbol{E}_{P \to Q}\right) \cap \left(\boldsymbol{E}_{q \to P}\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}_P \cup \boldsymbol{E}_Q\right) \cap \left(\tilde{\boldsymbol{E}}_Q \cup \boldsymbol{E}_P\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}_P \cap \tilde{\boldsymbol{E}}_Q\right) \cup$
$\cup \left(\boldsymbol{E}_Q \cap \tilde{\boldsymbol{E}}_Q\right) \cup \left(\tilde{\boldsymbol{E}}_P \cap \boldsymbol{E}_P\right) \cup \left(\boldsymbol{E}_Q \cap \boldsymbol{E}_P\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}_P \cap \tilde{\boldsymbol{E}}_Q\right) \cup \left(\boldsymbol{E}_P \cap \boldsymbol{E}_Q\right)$,
т.к. $\boldsymbol{E}_Q \cap \tilde{\boldsymbol{E}}_Q = \varnothing$ и $\tilde{\boldsymbol{E}}_P \cap \boldsymbol{E}_P = \varnothing$.

Ясно, что при выполнении логических операций над предикатами к ним применимы основные равносильности алгебры логики высказываний.

Пример 1. Пусть даны одноместные предикаты:
$P(x)$=[x — четное число] и $Q(x)$=[число x кратно 3], определенные на множестве натуральных чисел N. Найти множество истинности предикатов:

1. $P(x) \& Q(x)$;
2. $P(x) \vee Q(x)$;
3. $\overline{P}(x)$;
4. $P(x) \rightarrow Q(x)$.

Решение: Имеем $E_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$; $E_Q = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$. Тогда

1. $E_{P\&Q} = \{6, 12, 18, \ldots, 6n, \ldots\}$;
2. $E_{P \vee Q} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, \ldots, 2n, 3n, \ldots\}$;
3. $E_{\overline{P}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$;
4. $E_{P \rightarrow Q} = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\} \cup \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$.

Имеют место следующие теоремы:

1. $(P \& Q) \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad P \equiv 1$ и $Q \equiv 1$;
2. $(P \vee Q) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \equiv 0$ и $Q \equiv 0$;
3. $(P \rightarrow Q) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \equiv 1$ и $Q \equiv 0$;
4. $\overline{P} \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad P \equiv 0$;
5. $(P \rightarrow Q) \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad (P \Rightarrow Q)$.

Считается, что операция $\neg$ связывает сильнее, чем **&**, а операция **&** связывает сильнее, чем $\vee$. Операция $\vee$ сильнее, чем $\rightarrow$; операция $\rightarrow$ сильнее, чем $\leftrightarrow$. Введение скобок нарушает принятый порядок выполнения операций.

Ниже приведены некоторые равносильности:

1. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$;
2. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$;
3. $(P \& Q) \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee \overline{Q})}$.

Кроме перечисленных выше операций введены еще две операции связывания кванторов, присущи только предикатам: квантор общности $\forall$ и квантор существования $\exists$. Эти две операции не имеют аналогов среди операций над высказываниями.

Пусть $P(x)$ — ***одноместный предикат***, определенный на множестве M.

Определение 3: Квантором общности предиката $P(x)$ называется ***высказывание*** $\forall x\, P(x)$ (читается: для всякого x $P(x)$ истинно), которое истинно, когда предикат $P(x)$ тождественно истинный, и ложно в противном случае, т.е.

$$\forall x\, P(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{\textit{если}} \quad P(x) \equiv 1; \\ 0, & \textbf{\textit{если}} \quad P(x) - \textbf{\textit{опровржимый предикат}}. \end{cases}$$

Переменную x в предикате $P(x)$ называют ***свободной***, т. к. ей можно придавать различные конкретные значения из множества M. В высказывании $\forall x\, P(x)$ переменную x называют ***связанной*** квантором общности $\forall$.

Определение 4: Квантором существования предиката $P(x)$ называется ***высказывание*** $\exists x\, P(x)$ (читается: существует x, при котором $P(x)$ истинно), которое истинно, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложно в противном случае, т.е.

$$\exists x\, P(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{\textit{если}} \quad P(x) - \textbf{\textit{выполнимый предикат}}; \\ 0, & \textbf{\textit{если}} \quad P(x) \equiv 0. \end{cases}$$

В высказывании $\exists x\, P(x)$ переменная x связана квантором существования $\exists$. Заметим, что символы $\forall$ и $\exists$ происходят от первых букв английских слов «All» (все) и «Exist» (существовать).

Пример 2. **Пусть $P(x) = [|x| \geq 3]$, определенный на множестве натуральных чисел N. Тогда высказывание $\forall x\, P(x)$ ложно, высказывание $\exists x\, P(x)$ истинно.**

Пример 3. Даны предикаты $P(x) = \left[x^2 + x + \frac{1}{2} > 0, \quad x \in R\right]$ и $Q(x) = [x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x \in R]$, определенные на множестве действительных чисел. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

1. $\forall x\, P(x)$ 3. $\forall x\, Q(x)$
2. $\exists x\, P(x)$ 4. $\exists x\, Q(x)$

Решение. Т.к. квадратный трехчлен $x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ при всех $x \in R$, то высказывания $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$ истинны.

Т.к. уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет два действительных корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, то предикат $Q(x)$ принимает значение 1 только при $x = 2$

и при $x = 3$, а значение 0 в остальных случаях. Поэтому высказывание $\forall x\, Q(x)$ ложно, высказывание $\exists x\, Q(x)$ истинно.

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то нетрудно видеть, что

1. $\forall x\, P(x) = P(a_1)\, \&\, P(a_2)\, \&\ldots\&\, P(a_n)$;
2. $\exists x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$,

т.е. кванторные операции обобщают операции **&** и $\vee$ на случай бесконечных множеств.

Считается, что кванторы «связывают» сильнее, чем операции логики высказываний.

Имеют место ***формулы связи кванторов***:

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)} \text{ и } \overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)},$$

которые широко используются при равносильных преобразованиях в логике предикатов.

Докажем первое равенство: пусть

$$\overline{\forall x\, P(x)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall x\, P(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow P(x) \equiv \mathbf{1} \Leftrightarrow \overline{P(x)} \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \exists x\, \overline{P(x)} = \mathbf{0}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам.

Например, применяя квантор общности по переменной x к двухместному предикату $P(x, y) = \lfloor |x| + y > 0, \quad x, y \in R \rfloor$ получаем одноместный предикат, зависящий от переменной y:

$$\forall x\, P(x, y) = \Phi(y);$$

$$\Phi(1) = \forall x\, P(x, 1) = \forall x\, [\,|x| + 1 > 0\,] = \mathbf{1} \quad (\textit{истина}),$$

$$\Phi(-1) = \forall x\, P(x, -1) = \forall x\, [\,|x| - 1 > 0\,] = \mathbf{0} \quad (\textit{ложь}).$$

К предикату $\Phi(y)$ можно применить кванторные операции по переменной y. В результате получим высказывание: $\forall y\, \Phi(y) = \forall y(\forall x\, P(x, y))$ или $\exists y\, \Phi(y) = \exists y(\forall x\, P(x, y))$.

Заметим, что перестановка любых кванторов местами, вообще говоря, изменяет логическое значение высказывания.

Пример 4. Показать, что высказывания $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ и $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ имеют различные логические значения, где двухместный предикат $P(x, y) = [x < y]$ определен на множестве $M = N \times N$.

Решение: Высказывание $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ означает утверждение, что для любого натурального числа x найдется натуральное число y, большее числа x. Это высказывание истинно. Высказывание $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ означает, что существует натуральное число y, которое больше любого натурального числа x. Это высказывание, очевидно, ложно.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из предикатов укажите одну из возможных областей определения и в соответствии с ней множество истинности:
   1) Луна есть спутник Венеры;
   2) Планеты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ принадлежат Солнечной системе;
   3) $\mathbf{5} + \sqrt[5]{\mathbf{70}} - \sqrt[6]{\mathbf{10}} > \mathbf{150}$;
   4) $\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$;
   5) $\boldsymbol{x}^4 - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{8}$;
   6) Любое простое число $\boldsymbol{p}$ не имеет делителей, отличных от себя и 1;
   7) Натурально число $\boldsymbol{n}$ не меньше 1;
   8) Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ равен треугольнику $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$;
   9) $\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} > \mathbf{0}$;
   10) $\mathbf{1} + \boldsymbol{tg}^2\boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\cos^2 \boldsymbol{x}}$;
   11) $\ln \boldsymbol{x} < \sin \boldsymbol{x}$.

2. Даны предикаты $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$: «$\boldsymbol{x}^2 - 4 = 0$» и $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$: «$3\boldsymbol{x} - 2 < 17$». Найти множества истинности этих предикатов, если их область определения есть:
   1) $\boldsymbol{R}$; 2) $\boldsymbol{N}$.

3. Будут ли следующие предикаты равносильны или один из них является следствием другого? (Предметные переменные в предикатах принадлежат $\boldsymbol{R}$)
   1) $\sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{y}} = 15$ и $\sqrt{\boldsymbol{xy}} = 15$;
   2) $\boldsymbol{lg\,ab} = 1$ и $\boldsymbol{lg\,a} + \boldsymbol{lg\,b} = 1$;
   3) $\boldsymbol{sin}^2\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{cos}^2\,\boldsymbol{x} = 1$ и $\boldsymbol{tg}^2\boldsymbol{x} + 1 = \dfrac{1}{\boldsymbol{cos}^2\,\boldsymbol{x}}$;
   4) $2^{\boldsymbol{log}_2 \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$;
   5) $\boldsymbol{x}^2 \le 0$ и $2^{|\boldsymbol{x}|} = \boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}$;
   6) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ и $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{zy}$;
   7) $\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^3 = 0$ и $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2 = 0$.

---

4. Найти множества истинности предикатов:

1) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3};$ 2) $\sqrt{x^2-1}=-3;$

3) $\begin{cases} x^2-13x+40\ge 0 \\ 2x^2+x-30<0 \end{cases};$ 4) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}<0.$

5. На множестве $M=\{1,2,3,\ldots,20\}$ заданы предикаты:

$A(x)$: « x не делится на 5»;
$B(x)$: « x — четное число»;
$C(x)$: « x — число простое»;
$D(x)$: « x кратно 3».

Найдите множество истинности следующих предикатов:

1) $A(x)\,\&\,B(x);$ 2) $C(x)\,\&\,B(x);$
3) $C(x)\,\&\,D(x);$ 4) $B(x)\,\&\,D(x);$
5) $\overline{B}(x)\,\&\,D(x);$ 6) $A(x)\,\&\,\overline{D}(x);$
7) $\overline{B}(x)\,\&\,\overline{D}(x);$ 8) $A(x)\,\&\,B(x)\,\&\,D(x);$
9) $A(x)\vee B(x);$ 10) $B(x)\vee C(x);$
11) $C(x)\vee D(x);$ 12) $B(x)\vee D(x);$
13) $\overline{B}(x)\vee D(x);$ 14) $B(x)\vee \overline{D}(x);$
15) $A(x)\vee B(x)\vee D(x);$ 16) $C(x)\rightarrow A(x);$
17) $D(x)\rightarrow \overline{C}(x);$ 18) $A(x)\rightarrow B(x);$
19) $(A(x)\,\&\,C(x))\rightarrow \overline{D}(x);$ 20) $(A(x)\,\&\,D(x))\rightarrow \overline{C}(x).$

6. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов совпадает с R.

1) $\exists x\,(x+5=x+3);$
2) $\exists x\left(x^2-x+\frac{1}{2}=0\right);$
3) $\forall x\,(x^2+x+1>0);$
4) $\forall x\,(x^2-5x+1\ge 0);$
5) $\exists x\,((x^2-5x+1\ge 0)\,\&\,(x^2-2x+1>0));$
6) $\exists x\,((x^2-5x+1\ge 0)\,\&\,(x^2-6x+8\le 0));$
7) $\forall x\,((x^2-6x+8\ge 0)\vee(x^2-6x+8<0));$
8) $\exists x\,((x\in\{2,5\})\rightarrow(x^2-6x+8=0));$

9) $\forall x\big((x \in \{3,5\}) \to (x^2 - 6x + 8 < 0)\big)$.

7. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над

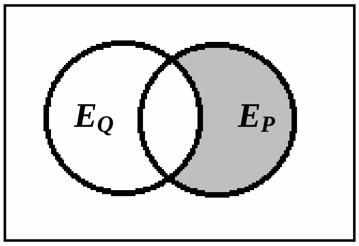


Рис.1

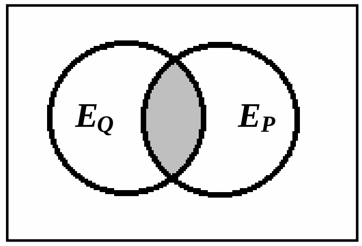


Рис.2

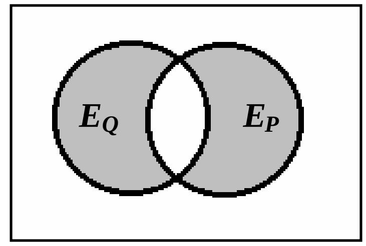


Рис.3

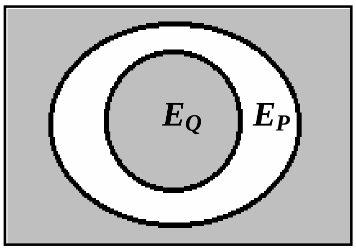


Рис.4

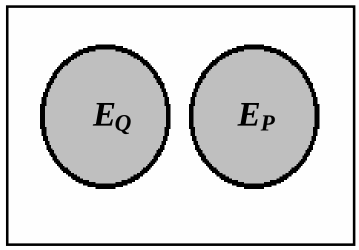


Рис.5

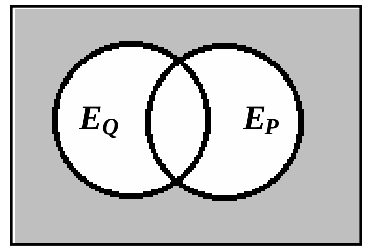


Рис.6

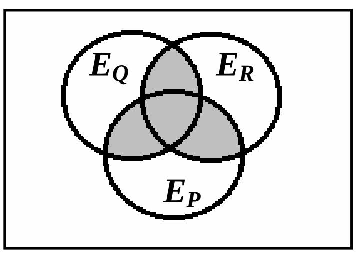


Рис.7

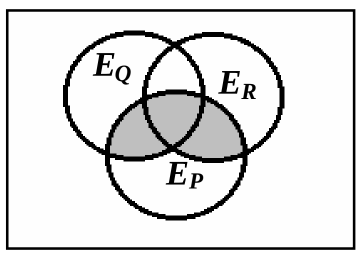


Рис.8

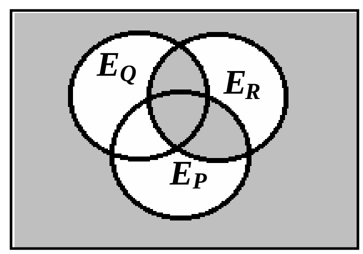


Рис.9

предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, множества истинности которых (E) заштрихованы на следующих рисунках:

8. Приведите примеры таких значений a, для которых данное высказывание: а) истинно; б) ложно (область определения предикатов совпадает с R).
   1) $\exists x < 0\,(x^2 + ax + a = 0)$;
   2) $\forall x \in [0,1]\,(x^2 + x + a < 0)$;
   3) $\forall x > 7\,(x^2 + ax + 1 > 0)$;
   4) $\exists x \in [a, a+1]\,(x^2 - x - 2 < 0)$.

9. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна множества истинности для следующих предикатов:
   1) $\overline{P}(x)\&\overline{Q}(x);$
   2) $\overline{P}(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x);$
   3) $(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\&\overline{Q}(x);$
   4) $P(x) \to (Q(x) \vee \overline{Q}(x));$
   5) $P(x)\&Q(x) \to \overline{R}(x).$

10. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предикатов:
   1) $\overline{(x > 2)}\&(x < y);$
   2) $(x \le y) \vee (|x| \le 1);$
   3) $(x \ge 3) \to (y < 5);$
   4) $((x > 2)\&(y \ge 1))\&((x < -1) \vee (y < -2));$
   5) $((x > 2) \vee (y > 1))\&((x < -1) \vee (y < -2)).$

10. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ В МАТЕМАТИКЕ

1. Применение языка предикатов для записи математических предложений, определений, теорем. Удобно и компактно с помощью символов языка предикатов передавать смысл высказываний.

Пример 1. Записать на языке предикатов определение предела числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Решение. Запись «число a есть предел $\{x_n\}$»:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N\ \lfloor n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \rfloor$$

означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется (существует) такой номер n_0, начиная с которого, т.е. для всех $n \ge n_0$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. Построение противоположного утверждения $\overline{A}$ для некоторого математического утверждения A, используя равносильные преобразования.

Пример 2. Имеет место утверждение A о непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \lfloor |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \rfloor.$$

Дать противоположное утверждение $\overline{A}$.

Решение.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \Leftrightarrow \overline{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \left[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \left[|x - x_0| < \delta \,\&\, |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right].$$

Построение отрицаний необходимо при доказательстве от противного: $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q} \equiv \overline{\boldsymbol{Q}} \to \overline{\boldsymbol{P}}$.

3. Многие теоремы формулируются в виде условного предложения: «Если любой элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ обладает свойством $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, то он обладает свойством $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$», т.е.

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \right]. \qquad (*)$$

Очевидно, что если теорема (*) неверна, то будет истинным утверждение

$$\overline{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \right]} \equiv \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \,\&\, \overline{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})} \right].$$

Поэтому для доказательства несправедливости теоремы (*) нужно указать хотя бы один элемент из множества $\boldsymbol{M}$, при котором условие $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ истинно, а значение $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ ложно. Другими словами, нужно привести контрпример.

4. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия.

Определение. **Теоремы**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \right] \text{ и } \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \right] \qquad (**)$$

называются ***взаимно обратными***, т. к. условие $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ одной теоремы является заключением второй, а условие $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ второй теоремы является заключением первой. При этом одна из них называется ***прямой теоремой***, другая — ***обратной***.

Определение. **Теоремы**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \right] \text{ и } \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x}) \right]$$

называются взаимно противоположными. В них условие $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ и заключение $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ одной являются отрицанием соответствующего условия $\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x})$ и заключения $\overline{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x})$ другой. Заметим, что теоремы

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \right] \text{ и } \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} \left[\overline{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x}) \to \overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \right]$$

всегда равносильны. На этом основывается метод доказательства от противного.

Известно, что если $\boldsymbol{E}_P \subset \boldsymbol{E}_Q$, то предикат $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ есть ***следствие*** предиката $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$. Отсюда следует, что предикат $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ является ***истинным*** для $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$. При этом предикат $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ называют ***дос-***

таточным условием для $Q(x)$, а предикат $Q(x)$ — ***необходимым условием*** для предиката $P(x)$.

Если $E_p = E_Q$, то $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, т.е. эти предикаты равносильны. В этом случае взаимно обратные теоремы (**) истинны при $\forall x \in M$. Условие $P(x)$ является необходимым и достаточным для $Q(x)$. Аналогично, условие $Q(x)$ является необходимым и достаточным для $P(x)$.

Пример 3. Записать на языке предикатов формулировку теоремы о необходимом признаке сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n;\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Решение. Пусть $P(x)$ — свойство x быть сходящимся рядом, где $M = \{x\}$ — множество всех числовых рядов; $Q(x)$ — общий член $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда формула $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ есть запись формулировки данной теоремы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите на языке логики предикатов определения:

   1) ***Линейно упорядоченного множества*** (упорядоченное множество называется линейным, если для любых элементов этого множества x и y либо $x = y$, либо $x < y$, либо $x > y$);

   2) ***Ограниченной функции*** (функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M, если существует такое неотрицательное число L, что для всех $x \in M$ справедливо неравенство $|f(x)| \le L$);

   3) ***Четной функции*** (функция f называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат и для каждого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$);

   4) ***Периодической функции*** (функция f называется периодической, если существует такое число $T \ne 0$, что при любом x из области определения f элементы $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области, и при этом выполнено равенство $f(x \pm T) = f(x)$);

   5) ***Возрастающей функции на множестве M*** (функция f называется возрастающей на множестве M, если для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$).

2. Пользуясь полученными в предыдущем упражнении формулами, ответьте на следующие вопросы. Что значит:

   1) Упорядоченное множество не является линейным?

   2) Функция не является ограниченной?

   3) Функция не является четной?

   4) Функция не является периодической?

   5) Функция не является возрастающей на множестве M?

3. Доказать несправедливость утверждений:

   1) «Если функция непрерывна в точке x_0, то она и дифференцируема в этой точке»;

   2) «Если предел n-го члена числового ряда равен нулю, то ряд сходится»;

---

3) «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником»;

4) «Если функция интегрируема на $[a,b]$, то она непрерывна на нем»;

5) «Если функция интегрируема на $[a,b]$, то она монотонна на нем»;

6) «Если числовая последовательность имеет предел, то она монотонна»;

7) «Если числовая последовательность ограничена, то она имеет предел»;

8) «Если формула логики предикатов выполнима, то она общезначима»;

9) «Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную, равную нулю $(y'(x_0) = 0)$, то точка x_0 — точка экстремума функции»;

10) «Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную, равную нулю $(y''(x_0) = 0)$, то точка x_0 — точка перегиба графика функции»;

4. Для каждого из следующих условий выясните, является ли оно необходимым или является ли оно достаточным для того, чтобы выполнялось неравенство $x_2 - 2x - 8 \le 0$:

a) $x = 0$; b) $x \ge -3$; c) $x > -2$;

d) $x \ge -1$ и $x \le 3$; e) $x \ge -1$ и $x < 10$; f) $-2 \le x \le 10$.

5. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова ***«необходимо, но недостаточно»*** или ***«достаточно, но не необходимо»*** или же ***«не необходимо и недостаточно»***, а где возможно ***«необходимо и достаточно»*** так, чтобы получилось истинное утверждение:

1) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольным …, чтобы длины его диагоналей были равны.

2) Для того чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ …, чтобы $x = 3$.

3) Для того чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, …, чтобы каждое слагаемое было четным.

4) Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, …, чтобы $f(x)$ была ограничена.

5) Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, …, чтобы $f(x)$ была непрерывна на $[a,b]$.

6) Для того чтобы окружность можно было вписать в четырехугольник, …, чтобы суммы длин его противоположных сторон были равны.

7) Для того чтобы множество A было счетным, …, чтобы его элементы можно было записать в виде нумерованной последовательности.

8) Для того чтобы числовая последовательность имела предел, …, чтобы она была ограниченной.

9) Для того чтобы числовая последовательности имела предел, …, чтобы она была монотонной и ограниченной.

6. Сформулируйте:

1) Необходимый и достаточный признак параллелограмма.

2) Необходимый, но недостаточный признак параллелограмма.

3) Достаточный, но необходимый признак параллелограмма.

4) Необходимое, но недостаточное условие того, чтобы уравнение $\sin x = a$ имело решение.

5) Достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы уравнение $\sin x = a$ имело решение.

6) Достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы уравнение $x^2 + px + q = 0$ имело вещественные корни.

7. Папа сказал детям: «Если мы с мамой поедем летом в дом отдыха, то вы все поедете в детский лагерь». В школе детей спросили, куда они поедут летом. Петя ответил: «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха». Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Нет, не так, — вмешался Коля.— Если мы не поедем в лагерь, то кто-то из родителей не поедет в дом отдыха».

   Чей ответ равносилен тому, что сказали родители?

11. МАШИНА ТЬЮРИНГА

Машина Тьюринга — это математическая модель идеализированной цифровой вычислительной машины. Идея такой машины, предложенная английским математиком А.Тьюрингом в тридцатых годах XX века, связана с его попыткой дать точное математическое определение понятия алгоритма.

Машина Тьюринга (МТ) состоит из четырех частей: ленты, считывающей головки, устройства управления и внутренней памяти.

1. ***Лента*** (внешняя память МТ) — бесконечная в обе стороны полоска, разбитая на ячейки (равные клетки). В каждую ячейку в дискретный момент времени может быть записан только один символ (буква) из ***внешнего алфавита*** $\boldsymbol{A} = \{\Lambda, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}\}$, $\boldsymbol{n} \geq 2$. Пустая ячейка обозначается символом Λ. В этом алфавите $\boldsymbol{A}$ в виде слова (конечного упорядоченного набора символов) кодируется та информация, которая подается в МТ. Машина перерабатывает информацию, поданную в виде слова, в новое слово.

2. ***Считывающая головка*** (некий считывающий элемент) перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка может ***считывать*** содержимое ячейки и ***записывать*** в нее новый символ из алфавита $\boldsymbol{A}$. В одном такте работы она может сдвигаться только на одну ячейку вправо ($\boldsymbol{П}$), влево ($\boldsymbol{Л}$) или оставаться на месте ($\boldsymbol{Н}$). Обозначим множество перемещений (сдвига) головки $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{П}, \boldsymbol{Л}, \boldsymbol{Н}\}$.

3. ***Память*** машины представляет собой некоторое конечное множество внутренних состояний $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_{m-1}\}$, $\boldsymbol{m} \geq 1$. Будем считать, что мощность $|\boldsymbol{Q}| \geq 2$. Два состояния машины имеют особое назначение: $\boldsymbol{q}_1$ — начальное внутреннее состояние, $\boldsymbol{q}_0$ — заключительное внутреннее состояние (стоп-состояние). Машина работает во времени, которое считается дискретным и его моменты занумерованы: 1, 2, 3, … . В каждый момент времени МТ характеризуется положением головки и внутренним состоянием. Например, под ячейкой, над которой находится головка, указывается внутреннее состояние машины.

	Λ	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_1$	Λ	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	Λ		
		$\boldsymbol{q}_1$							

4. ***Устройство управления*** (УУ) в каждый момент времени $\boldsymbol{t}$ в зависимости от внутреннего состояния машины и считывающего в этот момент символа на ленте, над которым находится головка, выполняет следующие действия:

а) «считывает» символ $\boldsymbol{a}_i$ — заменяет на новый символ $\boldsymbol{a}_j$ (может быть $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_i$);

b) перемещает головку в одном из направлений: $\boldsymbol{П, Л, Н}$;

c) изменяет имеющееся в момент $\boldsymbol{t}$ внутреннее состояние $\boldsymbol{q_l}$ на новое состояние $\boldsymbol{q_s}$, в котором будет машина в последующий момент времени $\boldsymbol{t}+1$ (может быть $\boldsymbol{q_l}=\boldsymbol{q_s}$).

Такие действия УУ называется ***командой***, которая записывается так:

$$\boldsymbol{q_l\, a_i} \to \boldsymbol{a_j\, D\, q_s}, \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{a_i, a_j} \in \boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{q_l, q_s} \in \boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{П, Л, Н}\},\quad \boldsymbol{l} \neq 0$.

В левой части команды (*) никогда не встречается $\boldsymbol{q}_0$.

Так как множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{Q}$ конечны, то команд вида (*), в которых левые части попарно различны, конечное число.

Совокупность всех команд называется ***программой*** МТ. Максимальное число команд в программе равно $(\boldsymbol{n}+1)\times\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{A}|,\quad \boldsymbol{m}=|\boldsymbol{Q}|$. Считается, что заключительное состояние $\boldsymbol{q}_0$ может стоять только в правой части команды, начальное состояние $\boldsymbol{q}_1$ — только в левой части команды.

Если левые части двух команд совпадают, то с необходимостью совпадают и правые части команд. Выполнение одной команды называют ***шагом.*** Ясно, что работа МТ полностью определяется ее программой.

Заданное слово на ленте с начальным состоянием $\boldsymbol{q}_1$ и положение головки над первым символом называется ***начальной конфигурацией***. Говорят, что ***МТ применима к слову начальной конфигурации***, если при работе над этим словом через конечное число шагов выполняется команда, содержащая в правой части заключительное состояние $\boldsymbol{q}_0$, и работа над этим словом прекращается. То, что получилось при этом на ленте, вместе с состоянием $\boldsymbol{q}_0$ и положением головки называют ***заключительной конфигурацией***. В противном случае говорят, что МТ не применима к слову начальной конфигурации.

Пример 1. Построить машину Тьюринга, которая в алфавите $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \Lambda\}$ слово $"\boldsymbol{abb}"$ преобразует в слово $"\boldsymbol{bba}"$.

Решение. Составим программу МТ:

$$\boldsymbol{q}_1\, \boldsymbol{a} \to \Lambda\, \boldsymbol{П}\, \boldsymbol{q}_2$$

$$\boldsymbol{q}_2\, \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{П}\, \boldsymbol{q}_2$$

$$\boldsymbol{q}_2\, \Lambda \to \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{Н}\, \boldsymbol{q}_0$$

В результате работы МТ над словом $"\boldsymbol{abb}"$ будут следующие шаги:

	Λ	***a***	***b***	***b***	Λ	

— 1-й шаг

q_1 (начальная конфигурация)

–

		L	***b***	***b***	L	

— 2-й шаг

q_2

–

		L	***b***	***b***	L	

— 3-й шаг

q_2

–

		L	***b***	***b***	L	

— 4-й шаг

q_2

–

		L	***b***	***b***	***a***	

— 5-й шаг (заключительная конфигурация)

q_0

Работа МТ закончена.

Работу МТ можно описать следующим образом: она запоминает 1-ю букву исходного слова (или при этом стирает его); головка движется вправо до первой пустой клетки, в которую и записывается первая буква исходного слова.

Замечание. Часто программу МТ записывают в другой, более компактной форме в виде таблицы. Например, программа примера 1 может выглядеть следующим образом:

	L	a	b	
q_1		L Π q_2		
q_2	a H q_0		b Π q_2	

Пример 2. Построить машину Тьюринга, вычисляющую числовую функцию

$$S(x) = x + 1, \quad x \text{ Î } N.$$

Решение. Пусть внешним алфавитом данной МТ является множество $A = \{L, 1\}$. Число x Î N на ленте машины записывать в виде набора из x единиц:

–

	L	1	1	1	…	1	1	L	

q_1

Программа МТ выглядит следующим образом:

$$q_1 1 ® 1 \Pi q_1,$$

$$q_1 L ® 1 H q_0,$$

согласно которой для любой начальной конфигурации, когда считывающая головка обозревает одну из единиц, в каждый момент эта единица остается на месте, и головка сдвигается вправо на одну ячейку. Этот процесс продолжается до тех пор, пока головка не выйдет на пустую ячейку. Тогда в пустую ячейку записывается единица, головка остается на месте. Машина перейдет в состояние q_0.

Можно показать, что все арифметические функции натурального аргумента вычислимы по Тьюрингу. Например, работа МТ в алфавите $\{L, 1\}$ при вычислении числовой функции $f(x, y) = x + y$ можно описать следующей программой

	q_1	q_2	q_3	q_4
L	$1 \Pi q_2$	$L Л q_3$		
1	$1 \Pi q_1$	$1 \Pi q_2$	$L Л q_4$	$L Л q_0$

где любое натуральное число m кодируется набором из $m+1$ единиц; этот набор обозначается через 1^{m+1}. Так , $0 \sim 1, 1 \sim 11, 2 \sim 111 = 1^3, 3 \sim 1111 = 1^4$ и т.д.

Числовая функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется вычислимой по Тьюрингу, если существует МТ такая, что для любых $m_1, m_2, ..., m_n$ если при $x_1 = m_1, x_2 = m_2, ..., x_n = m_n$ имеем $f(m_1, m_2, ..., m_n) = m$, эта машина применима к слову

$$1^{m_1+1} \& 1^{m_2+1} \& ... \& 1^{m_1+1} \qquad (**)$$

и в заключительной конфигурации на некотором участке ленты будет записано слово 1^{m+1}, а остальные ячейки окажутся пустыми. Если значение функции $f(m_1, m_2, ..., m_n)$ не определено, эта МТ не применима к слову (**).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, применима ли МТ, задаваемая программой в алфавите $\{0, 1\}$

	0	1	
q_1	$0\,\Pi\,q_2$	$1\,\Pi\,q_1$	
q_2	$0\,\Pi\,q_3$	$1\,Л\,q_1$	
q_3	$0\,H\,q_0$	$1\,Л\,q_2$	

к слову P:

1) $P = 1^3\,0^2\,1^2$;
2) $P = 1^3\,0\,1^3$;
3) $P = 10\,[01]^2\,1$.

Если применима, то найти результат применения МТ к слову P.

Ответ: В случаях
1), 3) — МТ применима,
2) — МТ не применима.

2. По заданной МТ и начальной конфигурации K_1 найти заключительную конфигурацию.

МТ$_1$

	0	1
q_1	$0\,H\,q_0$	$1\,\Pi\,q_2$
q_2	$1\,Л\,q_0$	$0\,\Pi\,q_3$
q_3	$1\,Л\,q_1$	$0\,\Pi\,q_1$

1) $K_1 = 1q_1\,1^5$;
2) $K_1 = q_1\,1^3\,01$;
3) $K_1 = 10q_1\,1^4$.

Ответ: 1) $1^2\,0^2\,1q_0\,01$; 2) $[10]^2\,0\,q_0 1^2$.

МТ$_2$

	0	1
q_1	$0\,H\,q_0$	$0\,\Pi\,q_2$
q_2	$0\,\Pi\,q_1$	$1\,Л\,q_2$

1) $K_1 = 1^2\,q_1\,1^3\,01$;
2) $K_1 = 1q_1\,1^4$.

3. Построить МТ, которая применима ко всем словам в алфавите $\{L, a, b\}$ и делает следующее: любое слово $x_1 x_2 \mathrm{K}\, x_n$, где $x_i = a$ или $x_i = b$, $(i = \overline{1, n})$, преобразует в слово $x_2 x_3 \mathrm{K}\, x_n x_1$.

Указание: В начальной конфигурации

		$\bar{}$							
	L	x_1	x_2	…	…	x_n	L		
		q_1							

заменить символ $\boldsymbol{x}_1$ на L и, двигаясь вправо до первой пустой ячейки, вписать в нее символ $\boldsymbol{x}_1$. Так как в алфавите всего два символа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то введите два состояния: $\boldsymbol{q}_2$ вписывает символ $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{q}_3$ вписывает символ $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}$.

4. Построить МТ, вычисляющую ***нуль-функцию*** $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}) = 0$ в алфавите $\{\mathrm{L}, 1\}$.

   Указание: Взять множество $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1\}$, подставить вместо всех единиц символ L, а когда встретится символ L, то поставить символ 1.

5. Реализовать на МТ алгоритм вычисления функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} + 2$, где $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$.

   Указание: Взять множество состояний $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$. Число $\boldsymbol{n}$ на ленте МТ записывается в десятичной системе счисления. Состояние $\boldsymbol{q}_1$ заменяет последнюю цифру числа $\boldsymbol{n}$, если эта цифра меньше 8, цифрой, на две единицы большей, и переходит в стоп-состояние. Если последняя цифра числа $\boldsymbol{n}$ равна 8, то ее заменить на 0 и перейти влево в состояние $\boldsymbol{q}_2$. Состояние $\boldsymbol{q}_2$ добавляет к следующему разряду 1. Если же последняя цифра числа $\boldsymbol{n}$ равна 9, то ее заменить на 1 и перейти влево в состояние $\boldsymbol{q}_2$.

6. Вычисляет ли МТ в алфавите $\{1, \mathrm{L}\}$

1) с программой

	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$
L	1 ***Л*** $\boldsymbol{q}_2$	L ***П*** $\boldsymbol{q}_0$	L ***Н*** $\boldsymbol{q}_0$
1		1 ***Н*** $\boldsymbol{q}_3$	L ***Л*** $\boldsymbol{q}_3$

функцию $\overline{\boldsymbol{sign}\,\boldsymbol{x}} = \begin{cases} 1, & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} = 0, \\ 0, & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} \ne 0. \end{cases}$

2) с программой

	$\boldsymbol{q}_1$	$\boldsymbol{q}_2$	$\boldsymbol{q}_3$	$\boldsymbol{q}_4$
L	L ***Л*** $\boldsymbol{q}_2$	L ***П*** $\boldsymbol{q}_0$	L ***П*** $\boldsymbol{q}_4$	L ***П*** $\boldsymbol{q}_4$
1		1 ***Л*** $\boldsymbol{q}_3$	L ***Л*** $\boldsymbol{q}_3$	1 ***Н*** $\boldsymbol{q}_0$

функцию $\boldsymbol{sign}\,\boldsymbol{x} = \begin{cases} 0, & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} = 0, \\ 1, & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} \ne 0. \end{cases}$

7. Построить МТ, которая вычисляет функцию:

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$; 2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$;

3) функцию выбора аргумента $\boldsymbol{J}_2^{(3)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{x}_2$.