

С. В. Емельянов, С. К. Коровин

Новые типы обратной связи

Управление
при неопределенности



Москва
Наука • Физматлит
1997

ББК 22.18
Е 60
УДК 519.71

ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности.— М.: Наука. Физматлит, 1997.— 352 с.— ISBN 5-02-015149-1.

Монография посвящена фундаментальным проблемам теории обратной связи. Сформулированы основные тенденции развития теории обратной связи и предложены новые идеи и принципы, ориентированные на решение задач управления и оптимизации в условиях неопределенности. Введены принципы бинарности, генерации структур и новые типы обратной связи, сочетание которых с принципами классической теории позволяет добиться высокого качества управления при существенной неопределенности и расширяет возможности автоматических систем. Представлены методы, которые могут найти применение при решении задач промышленной автоматизации и при создании систем управления сложными объектами, например в авиации и космонавтике.

Для научных работников, интересующихся проблемами теории обратной связи, кибернетики, управления и оптимизации, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 263. Библиогр. 98 назв.

Рецензенты: академик *В.П. Маслов*, академик *Я.Э. Цыпкин*

Е $\frac{1602110000-014}{053(02)-97}$ Без объявл.

© С.В. Емельянов,
С.К. Коровин, 1997

ISBN 5-02-015149-1

Оглавление

Предисловие.....	8
Введение.....	11

Часть I

Принципы построения систем автоматического управления

Глава 1. Принципы построения линейных систем автоматического управления	17
1.1. Постановка задачи управления и предварительные сведения ..	17
1.2. Принцип регулирования по нагрузке	28
1.3. Принцип регулирования по возмущению	31
1.4. Принцип компенсации при косвенном измерении возмущения ..	35
1.5. Принцип двухканальности	40
1.6. Метод K -изображений или метод встроенной модели	49
1.7. Глубокая обратная связь — большой коэффициент усиления ..	56
1.7.1. Постановка задачи, особенности и идея решения	56
1.7.2. Проблемы и ограничения метода глубокой обратной связи	58
1.7.3. О грубости систем с глубокой обратной связью	62
1.7.4. Метод пространства состояний в анализе систем с глубокой обратной связью	64
1.7.5. Геометрическая интерпретация систем с глубокой обратной связью	65
1.7.6. Влияние амплитудного ограничения на системы с глубокой обратной связью	65
1.8. Библиографический комментарий	66
Глава 2. Некоторые принципы построения нелинейных регуляторов	68
2.1. Релейная обратная связь	68
2.1.1. Основные понятия	68
2.1.2. Скользящий режим в точке	71
2.1.3. Режим переключений	73
2.1.4. О прочности режима переключения	75

2.1.5.	Релейная стабилизация объекта с самовыравниванием .	76
2.1.6.	Стабилизация объекта с высоким относительным порядком	78
2.1.7.	Робастная стабилизация: разрывность, непрерывность и информация о состоянии	78
2.1.8.	Робастная стабилизация объекта с первым относительным порядком	80
2.1.9.	Скользящий режим на отрезке	81
2.1.10.	Реальный скользящий режим на отрезке	82
2.1.11.	Релейная стабилизация обобщенного объекта	83
2.2.	Стабилизация объекта с неопределенным оператором	84
2.2.1.	Общие положения	84
2.2.2.	Принцип каскадного регулирования	88
2.2.3.	Структура объектов каскадного регулирования	92
2.2.4.	Стабилизация интервальных объектов	94
2.2.5.	Интервальная устойчивость	96
2.2.6.	Общие положения теории адаптивной стабилизации ...	100
2.3.	Стабилизация регулятором переменной структуры	108
2.3.1.	Астатическая следящая система	109
2.3.2.	Астатизм 2-го порядка	114
2.3.3.	Астатизм порядка m	115
2.3.4.	Астатическая следящая система переменной структуры	116
2.3.5.	Скользящий режим на всей прямой	120
2.3.6.	Анализ прочности СПС по отношению к параметрическим возмущениям	123
2.3.7.	СПС при наличии внешней силы	125
2.3.8.	Квазирелейное представление ψ -ячейки	128
2.3.9.	Ограничения, недостатки и проблемы теории СПС ...	130
2.4.	Библиографический комментарий	131

Часть II

Новые типы обратной связи

Глава 3.	Общие положения теории новых типов обратной связи	135
3.1.	Вводные замечания	135
3.2.	Система базовых понятий	137
3.2.1.	Сигнал-оператор	137
3.2.2.	Типы динамических объектов	138
3.2.3.	Бинарная операция	139
3.2.4.	Типы регулирующих органов	140
3.2.5.	Новые типы обратной связи	140
3.3.	Структурный синтез бинарных систем	141
3.3.1.	Задача стабилизации	141
3.3.2.	Нелинейная обратная связь как средство подавления неопределенности	148
3.3.3.	Задача фильтрации	150

Глава 4. Теория координатно-операторной обратной связи ..	154
4.1. Стабилизация объекта второго порядка с неизвестными параметрами и внешним воздействием	155
4.1.1. Принцип скаляризации и уравнение объекта в пространстве ошибок	156
4.1.2. Некоторые замечания к постановке задачи и ее обобщения	157
4.1.3. Фазовое пространство координата-оператор	161
4.2. КО-алгоритмы стабилизации	164
4.2.1. Прямая компенсация	165
4.2.2. Асимптотическое оценивание или косвенное измерение О-возмущения	165
4.2.3. Компенсация волнового О-возмущения	166
4.2.4. Релейная КО-стабилизация	168
4.2.5. Замечание о прочности систем с релейной КО-связью ..	171
4.2.6. Линейные КО-алгоритмы стабилизации	172
4.2.7. Интегрально-релейный КО-алгоритм стабилизации	176
Глава 5. Скользящие режимы высших порядков	179
5.1. Некоторые предварительные сведения из теории скользящего режима	179
5.1.1. Уравнения скольжения	180
5.1.2. Об инвариантности уравнения скольжения по отношению к возмущениям, удовлетворяющим условию согласованности	182
5.1.3. Уравнения реального скольжения	183
5.1.4. Замечание о порядке скольжения	187
5.2. Алгоритмы скольжения 2-го порядка	191
5.2.1. Асимптотические алгоритмы скольжения 2-го порядка ..	193
5.2.2. Разрывные асимптотические алгоритмы скольжения 2-го порядка	196
5.2.3. Финитные алгоритмы скольжения 2-го порядка: линейная обратная связь	197
5.2.4. Финитные алгоритмы скольжения 2-го порядка: релейная обратная связь	199
5.2.5. Алгоритм скручивания	200
5.3. Финитная стабилизация по выходу	202
Глава 6. Теория операторной обратной связи	206
6.1. О назначении операторной обратной связи	206
6.2. Уравнения движения в пространстве координата-оператор ...	209
6.3. Статическая операторная обратная связь	211
6.3.1. Статические операторная и координатно-операторная обратные связи	212
6.3.2. Статическая операторная и динамическая координатно-операторная обратные связи	215
6.3.3. Инерционная координатно-операторная обратная связь ..	215

6.3.4. Инерционно-релейная координатно-операторная обратная связь	217
6.3.5. Инерционно-релейная координатно-операторная обратная связь при неизвестном параметре при управлении ..	221
6.3.6. Интегрально-релейная координатно-операторная обратная связь	222
Глава 7. Теория операторно-координатной обратной связи ..	225
7.1. Динамический статизм и операторно-координатная обратная связь	225
7.2. Уравнения движения операторно-координатного объекта	228
7.3. Статический ОК-регулятор	229
7.4. Интегральный ОК-регулятор	231
7.5. Основные свойства и особенности бинарных систем стабилизации с различными типами обратной связи	235
7.6. Разрывная ОК-связь	237
7.6.1. Интегрально-релейный ОК-регулятор	237
7.6.2. Скользящие режимы второго порядка в ОК-контуре ..	241
Глава 8. Ограничения, физические основы компенсации возмущений и стабилизация вынужденного движения в бинарных системах	246
8.1. Ограничения операторной переменной	247
8.2. О глобальном поведении бинарной системы	252
8.3. Физические основы компенсации неопределенности	255
8.4. О компенсации координатного возмущения	256
Глава 9. Дифференцирование сигналов	262
9.1. Постановка задачи дифференцирования	262
9.1.1. Фильтрация	264
9.1.2. RC-цепочка	265
9.1.3. Дискретно-разностные аппроксимации	269
9.2. Следящие дифференцирующие системы	271
9.2.1. Линейный дифференциатор	272
9.2.2. Релейный дифференциатор	276
9.2.3. Дифференциатор переменной структуры	280
9.3. Следящий асимптотический бинарный дифференциатор	283
9.4. Финитный бинарный дифференциатор	287
9.5. Нестандартные дифференцирующие системы	288
9.5.1. Дифференциатор с "малой" амплитудой разрывов	289
9.5.2. Нестандартный бинарный дифференциатор	291
9.5.3. Результаты дискретного моделирования нестандартного бинарного дифференциатора	297

Глава 10. Субоптимальная стабилизация неопределенного объекта	300
10.1. Постановка задачи оптимальной стабилизации	300
10.2. Пример задачи оптимальной стабилизации при неопределенности	302
10.3. Оптимальная стабилизация "в среднем"	303
10.4. Минимаксная оптимальная стабилизация	304
10.5. Стабилизация с использованием эталонной модели и глубокой обратной связи по ошибке	306
10.6. Стабилизация методами теории бинарного управления	308
10.6.1. Система переменной структуры	310
10.6.2. Бинарная стабилизация с интегральной КО-связью	311
10.6.3. Стабилизация с использованием скользящего режима 2-го порядка	312
10.7. Сведение проблемы субоптимальной стабилизации к проблеме асимптотической инвариантности	313
10.7.1. Основные понятия теории асимптотической инвариантности	314
10.7.2. Субоптимальная линейно-квадратичная стабилизация ..	316
Заключение	319
Список литературы	322
Предметный указатель	328

Авторы сердечно признательны Михаилу Юрьевичу Живило, чье искреннее желание содействовать развитию российской науки вызывает глубокое уважение.

Предисловие

В данной монографии рассматривается одна из центральных проблем теории автоматического управления — задача стабилизации и методы ее решения в развитии, то есть, начав с простейшей постановки задачи и постепенно усложняя ее, авторы анализируют возможности различных методов ее решения.

Усложнение связано с ростом неопределенности в постановке задачи, в соответствии с этим изменяются и методы ее решения. Подобный подход позволяет рассмотреть общие тенденции в развитии принципов и методов теории автоматического управления. Последнее представляется особенно важным и своевременным, ибо понимание общих механизмов формирования управления важнее знания конкретных методик его синтеза.

Нужно отметить, что предлагаемая точка зрения на развитие теории автоматического управления не считается авторами единственно возможной, поскольку проблема механизма генерации обратной связи далеко не тривиальна и возможны разные подходы к описанию этого механизма. Чем больше будет предложено таких подходов, тем лучше, ибо они приближают нас к пониманию фундаментальных основ механизма обратной связи.

Последнее чрезвычайно важно в теоретическом и прикладном аспектах, потому что современные методы стабилизации ориентированы в основном на “силовое” решение проблемы, тогда как природа демонстрирует замечательные образцы решения задач стабилизации весьма ограниченными средствами и при весьма стесненных обстоятельствах. Последнее ясно указывает на то, что настоящая теория обратной связи еще не создана, многое остается неясным и основные открытия в этой области знания еще впереди.

Касаясь столь сложной и деликатной проблемы, авторы далеки от претензии на исчерпывающее ее решение, но убеждены в том, что предлагаемая ими теория выглядит естественной и убедительной.

Как уже отмечалось, изложение построено на переходе от простого к сложному и начинается, естественно, с линейных объектов и методов теории линейных систем управления. Поскольку упор делается на принципы решения задач и на содержательную интерпретацию результатов, то математически строгие утверждения и доказательства не приводятся. Разумеется, все факты и утверждения, вошедшие в монографию, могут быть строго обоснованы, и многие из них хорошо известны по литературным источникам.

В монографии сравниваются применения различных методов управления для решения задач стабилизации при вариации ряда условий: внешних сил, параметров, структуры и порядка объекта. Для этой цели в наибольшей степени подходят, конечно, простые модели объектов — только такие модели здесь и рассматриваются. При анализе, однако, используются различные формы описания объектов управления: структурная, операторная, дифференциальная, поскольку некоторые факты выглядят наиболее убедительно при одном описании, иные — при другом.

В книге четко прослеживается тот факт, что по мере усложнения задачи стабилизации все большая роль отводится нелинейности. Кроме того, выясняется, что без нелинейной обратной связи не может быть хорошей стабилизации и именно нелинейная обратная связь наделяет систему управления способностью демонстрировать “нужное” поведение в сложных и постоянно изменяющихся внешних и внутренних условиях. Оказывается, что с некоторого уровня сложности задачи “хороший” регулятор обязательно будет нелинейным. Известно, что в нелинейном мире нет регулярных путей и универсальных методов, характерных для локальных теорий, так как специфика нелинейности часто играет решающую роль. Для теории, развиваемой в монографии, весьма полезными оказались структурные методы анализа и синтеза систем, именно поэтому описанию этих методов уделяется достаточно большое внимание.

Целенаправленное использование нелинейностей в управлении позволяет запускать в оборот принципиально новые, “несиловые”, механизмы подавления факторов неопределенности. Это, в частности, приемы, базирующиеся на использовании положительной обратной связи и неустойчивых движений и позволяющие системе саморазогнаться до тех пор, пока не создадутся условия для подавления помех и факторов неопределенности. Именно положительная обратная связь и неустойчивость в ряде задач играют ключевую роль.

Наконец, отметим, что задачу стабилизации не следует рассматривать узко, и что многие важные проблемы теории управления могут быть сведены к задаче стабилизации, например проблемы дифферен-

цирования и оптимизации. Однако ввиду важности и содержательности этого класса задач относящиеся к ним исследования вынесены в самостоятельные разделы.

Авторы искренне признательны многим людям, сыгравшим важную роль в появлении и развитии теории бинарного управления: одним — за доброжелательное внимание и заинтересованное отношение еще на этапе первых публичных выступлений, другим — за самоотверженную и творческую работу над актуальными проблемами теории, оппонентам — за суровую, но в итоге полезную критику.

Мы выражаем особую благодарность академикам А.А. Красовскому, Е.П. Попову и Я.З. Цыпкину, замечания которых всегда были точными, затрагивали существо вопросов и способствовали правильному развитию теории.

Мы также признательны своим ученикам и последователям, которые много лет с энтузиазмом продуктивно трудились в этой области и внесли важный вклад в новую теорию. Прежде всего мы хотели бы отметить вклад И.Г. Мамедова, А.Л. Нерсияна, В.И. Сизикова, А.П. Носова и Л.В. Левантовского.

Нам приятно отметить атмосферу доброжелательности, научного творчества и взаимоподдержки, которая сложилась в коллективе Института системного анализа Российской академии наук, что самым благотворным образом отразилось на нашей работе. В этом заслуга первого директора ИСА РАН академика Д.М. Гвишиани.

Наконец, мы обязаны отметить кропотливую и исключительно полезную работу по подготовке рукописи к печати, которую взяли на себя А.П. Носов, М.М. Белова, А.С. Фурсов, Л.А. Селиванова, Э.Н. Шолохова, Т.С. Борщова, Т.В. Ковалина.

В период написания книги авторы пользовались финансовой поддержкой в виде грантов Российского фонда фундаментальных исследований и Европейского экономического сообщества.

Введение

В последние годы широко распространилась точка зрения, что разработка принципиальных вопросов теории автоматического управления в основном завершена, центр исследований сместился в область приложений, создания эффективных методов анализа и проектирования систем управления, а возникновение новых идей и принципов возможно лишь при переходе к объектам новой природы.

Нужно заметить, что для такой точки зрения действительно имеются основания, и весьма веские. Теория автоматического управления достигла впечатляющих успехов, сегодня она в состоянии предложить широкий спектр методов решения разнообразных задач прикладной автоматики. Поле практического применения теории управления огромно, и невозможно представить современную технологию без средств автоматизации, а значит и без использования рекомендаций теории управления. Это один аспект. Другой аспект состоит в том, что в теории управления все активнее используется самый современный математический аппарат, а выходящие по теории управления книги и журнальные публикации в основном имеют обобщающий, подытоживающий характер. Может показаться, что существуют явные признаки того, что теория управления близка к совершенству и заканчивает свое развитие.

Действительно ли положение таково и в теории управления есть готовые решения для каждого конкретного случая? В некоторых случаях это в самом деле так, но гораздо чаще теория управления дает не рецепты, а лишь рекомендации, которые еще должны пройти экспериментальную проверку на адекватность рассматриваемой ситуации. Поэтому неслучайно существует общепринятая последовательность этапов разработки систем автоматического управления: разработка математической модели объекта, исследование и идентификация модели, формулировка требований к свойствам системы, подбор закона управления и проведение имитационного эксперимента, техническая реализация системы и проведение натурного или полунатурного эксперимента, отладка системы. При этом вся цепочка разработки или некоторые ее звенья могут использоваться многократно. Если к тому же учесть, что реализация каждого этапа требует опреде-

ленных творческих усилий, то становится ясно, что процесс создания и эксплуатации систем весьма сложен и требует привлечения специалистов высокой квалификации. Это требование очевидным образом вступает в противоречие с массовым характером автоматизации.

Следовательно, такие этапы, как разработка, проектирование и поддержание системы управления являются “узким местом”, сдерживающим прогресс в технологии автоматизации. Это своего рода вызов для теории управления, которая должна дать надлежащие методы и инструменты, позволяющие эффективно разрабатывать и эксплуатировать системы управления малыми силами и без привлечения высококвалифицированных специалистов.

В определенной степени разрешению этой ситуации могут способствовать системы автоматизированного проектирования (САПР); но не только они. САПР — это инструмент, который только тогда эффективен, когда он хорошо “оснащен” теоретически. В противном случае САПР может справиться с рутинной фазой разработки, но не продвинет решение творческих задач автоматизации, для которых, собственно, и требуется высокая квалификация. Только развитая теория, дающая не только жесткие рекомендации для определенного класса ситуаций, но и предлагающая правила разумного действия в нестандартных положениях и способы получения адекватного решения для каждого конкретного случая, может стать тем фундаментом, на котором возможен дальнейший качественный прогресс в автоматизации. САПР с элементами “интеллекта” в теоретическом базисе — вот то, что сегодня необходимо.

Удовлетворяет ли этому требованию (требованию высокого “интеллекта”) современная теория управления? Приходится с сожалением констатировать, что нет, не удовлетворяет. Причин здесь много.

Разработчику системы управления все чаще приходится разрешать объективное противоречие между детальностью описания объекта и возможностями дальнейшего аналитического исследования системы, идентификации ее параметров и проблемами синтеза регулятора. Пожалуй, это самый трудный этап, формализация которого едва ли возможна. И хотя в основе разработки, как правило, лежит некоторый реальный процесс, в автоматике стремятся к построению не точной, а лишь имитационной модели процесса, отражающей его “важнейшие свойства” по отношению к заранее заданным входным и выходным переменным. Это основное, что отличает модели теории управления от моделей, эксплуатируемых в таких фундаментальных дисциплинах, как физика, химия и т.п. При этом понятие “важнейшие свойства” очень часто имеет интуитивный смысл, плохо поддающийся формализации. Возможно, поэтому при построении системы управления

приходится итеративно возвращаться к данному этапу и вносить необходимые исправления.

В силу отмеченного обстоятельства самым естественным оказался путь к “настолько простым моделям, насколько это возможно”. Это привело к образованию набора стандартных моделей, которые в основном и эксплуатируются в теории управления. В настоящее время этот арсенал достаточно беден, и его основу составляют линейные или близкие к ним модели.

Таким образом, часто в ущерб реальности, но в угоду теории, сформировался банк упрощенных моделей, с которым и по сей день, в основном, имеют дело в управлении, и что по сути дела является одним из препятствий, о которое “спотыкается” теория управления на практике.

Итак, приоритет в направлении развития теории был отдан аналитике, и это, в свою очередь, привело к гипертрофированному развитию аналитических методов, часто похожих по своим конечным результатам, но различающихся способами их достижения и условиями применения: передаточных функций, дифференциальных уравнений, отображений вход–выход, частотных и временных характеристик и т.д. Но даже при мощном аналитическом аппарате сфера применимости простых моделей не может быть распространена за границы, определенные уровнем их адекватности реальному процессу.

Особенно это касается систем автоматического управления, так как разработке вопросов синтеза регуляторов уделялось явно недостаточное внимание. Фактически эта область теории управления остается почти нетронутой. Существует довольно ограниченный набор способов синтеза для небольшого числа стандартных ситуаций.

Без преувеличения можно сказать, что сегодня процессы возникновения регуляторных механизмов совершенно не ясны. Во всех случаях появление нового метода синтеза скорее обязано изобретению, чем теории. Поэтому весьма привлекательной представляется задача поиска общих принципов синтеза, позволяющих в конкретных обстоятельствах как бы автоматически получать требуемый закон управления. Разработка таких общих принципов и предопределяет, по нашему мнению, развитие теории управления в ближайшем будущем.

Можно попытаться предугадать некоторые черты такого развития. Прежде всего ясно, что нелинейность должна стать неотъемлемым элементом теории. Во-первых, это требование практики: ограничения, нелинейность элементов и т.п. Но дело не только в этом. Примеры других наук (да и теории управления тоже) наглядно демонстрируют тот факт, что учет нелинейных явлений многократно обогащает теорию содержательно: нелинейный “мир” несоизмеримо

богаче линейного, и именно на этом пути возникают новые явления, принципы и законы.

В качестве иллюстрации можно привести пример, когда теория автоматического управления существенно обогатилась благодаря решению задач об абсолютной устойчивости, исследованию автоколебательных процессов, адаптивного управления. Примеры из других наук, например физики или химии, еще более выразительны. Но эта констатация почти очевидна, гораздо труднее указать какой-либо конструктивный путь, ведущий в нелинейный "мир". Существует ли он?

По нашему мнению, да, существует. И этот путь лежит в направлении систематического использования важнейшего принципа кибернетики — принципа обратной связи. Надо только научиться правильно его применять в нестандартных ситуациях. Сегодня ясно, что этот принцип является основой саморегуляции и развития всего живого. В теории автоматического управления в полную силу пока "работают" только отрицательная обратная связь и, соответственно, устойчивые процессы. Широкому использованию положительной обратной связи и неустойчивых процессов препятствует "гнет" линейности. И только при переходе к принципиально нелинейным системам возможно активное вовлечение в оборот новых эффектов, связанных с использованием положительной или знакопеременной обратной связи. Данная монография служит иллюстрацией этой научной парадигмы.

Часть I

Принципы построения систем автоматического управления

В первой части монографии дается краткое описание основных принципов построения систем автоматического управления. Основное внимание уделяется методам компенсации влияния внешнего возмущения на регулируемую координату. Для простоты рассматриваются только скалярные стационарные объекты управления, что позволяет при необходимости представлять операторы их вход-выходного соответствия передаточными функциями.

Принята форма изложения с параллельным использованием наиболее употребительных в теории автоматического управления способов описания динамических систем: структурного и пространства состояний. Это обеспечивает возможность всестороннего анализа рассматриваемых проблем, а также разнообразных интерпретаций получаемых решений. Кроме того, на различных примерах можно сравнить достоинства и ограничения обоих способов.

Изложение ведется в такой последовательности, которая дает возможность проследить направление эволюции основных идей, принципов и проблем теории управления, а также методов их решения. Это позволяет сформулировать некоторые актуальные проблемы теории управления, для разрешения которых требуются новые идеи.

Первая часть монографии состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются принципы построения линейных систем автоматического управления, а во второй — некоторые принципы построения нелинейных регуляторов. Общие теоретические конструкции сопровождаются примерами, которые позволяют на простых ситуациях прояснить слабые и сильные стороны каждого подхода.

Некоторые важные результаты и выводы, известные из теории автоматического управления и необходимые для лучшего восприятия излагаемого материала оформлены в виде Примеров, являющихся

самостоятельной структурной единицей текста с названием и номером, что облегчает их поиск при ссылках. Ниже приведен список таких тем (в скобках указаны номера страниц):

- Программное управление неустойчивым объектом (30).
- Прямая компенсация возмущения (33).
- Косвенная компенсация возмущения (37).
- Стабилизация с использованием принципа двухканальности (45).
- Стабилизация методом K -изображения (53).
- Устойчивость систем с обратной связью (60).
- Неустойчивость систем с обратной связью по отношению к сингулярным возмущениям (63).
- Простейшая релейная система (69).
- Релейная стабилизация системы второго порядка (73).
- Релейная стабилизация неустойчивого объекта с относительным порядком, равным двум (74).
- Иерархия обратных связей (88).
- Метод включения (98).
- Синтез адаптивной системы управления (105).
- Точное слежение за задающим воздействием (113).
- Режим переключений в системах переменной структуры (117).
- Системы переменной структуры с движением по вырожденным траекториям (119).
- Скользящий режим на прямой (120).
- СПС при сингулярном возмущении (129).
- СПС при функциональном возмущении (130).

Главы сопровождаются кратким обзором соответствующей научной литературы в виде библиографического комментария.

Глава 1

Принципы построения линейных систем автоматического управления

Ниже вводятся базовые понятия теории автоматического управления и описываются основные механизмы компенсации внешнего возмущения для линейного объекта управления.

1.1. Постановка задачи управления и предварительные сведения

В теории автоматического управления имеют дело с математическими моделями реальных процессов, которые, конечно, всегда неполны и лишь приближенно отражают те черты поведения реального процесса, которые важны в контексте конкретного исследования. Выбранную математическую модель называют объектом управления или просто объектом и для удобства прибегают к графическому его изображению в виде блока с входом u и выходом y (рис. 1.1). При таком структур-

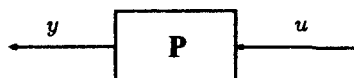


Рис. 1.1

ном представлении объект характеризуется оператором вход-выходного соответствия P , т.е. оператором, устанавливающим связь между множествами входных и выходных сигналов

$$y = Pu.$$

Обычно вход объекта u называют управлением, а его выход y — регулируемой координатой.

В линейной теории управления оператор P предполагается линейным. Это означает, что для любых чисел α_1 , α_2 и произвольных входов u_1 , u_2 выполняется соотношение

$$P(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 P u_1 + \alpha_2 P u_2.$$

Это допущение, конечно, сильно упрощает дело и обеспечивает возможность аналитического решения задач теории управления, чего, вообще говоря, трудно ожидать в нелинейном случае.

Еще одно важное допущение, которое мы также примем, состоит в инвариантности оператора объекта P при временном сдвиге. Такие объекты называют стационарными, т.е. не зависящими от времени, и они являются наиболее простыми объектами, изучаемыми в теории автоматического управления. Для стационарных объектов помимо оператора P , устанавливающего связь между функциями времени, можно ввести эквивалентный ему оператор $W(s)$, устанавливающий связь между преобразованиями Лапласа входа и выхода объекта при специальных, именно при нулевых, начальных условиях, т.е.

$$Y(s) = W(s)U(s),$$

где $Y(s) = \mathcal{L}[y]$, $U(s) = \mathcal{L}[u]$, и для скалярных объектов, т.е. объектов, имеющих один вход и один выход, по определению передаточная функция дается выражением

$$W(s) = \left. \frac{\mathcal{L}[y]}{\mathcal{L}[u]} \right|_{\text{нач. усл.}=0}.$$

В этих формулах s — комплексное число, участвующее в одностороннем преобразовании Лапласа, функции времени $\xi(t)$ т.е.

$$\mathcal{L}[\xi] = \int_0^{\infty} \xi(t) e^{-st} dt.$$

Из теории этого интегрального преобразования известно, что указанные операции имеют смысл лишь для функций времени $\xi(t)$, являющихся оригиналами. В линейных стационарных системах это предположение обычно выполнено. Поскольку дальше часто используются передаточные функции, имеет смысл отметить, что передаточные функции конечномерных линейных стационарных скалярных объектов — всегда дробно-рациональные функции комплексной переменной s , т.е. функции, задаваемые отношением двух полиномов $\beta(s)$ и $\alpha(s)$ степени $m = \deg \beta(s)$ и $n = \deg \alpha(s)$, соответственно, т.е.

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1},$$

где a_i, b_j — фиксированные вещественные параметры объекта.

При выполнении принципа причинности (следствие не наступает ранее причины, его вызывающей) степень m полинома числителя $\beta(s)$ не превосходит степени n полинома знаменателя $\alpha(s)$ передаточной функции $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$. Такие передаточные функции называют физически реализуемыми (осуществимыми).

Нули полинома $\beta(s)$ называют нулями передаточной функции $W(s)$ или нулями объекта, нули же полинома $\alpha(s)$ — полюсами $W(s)$ или полюсами объекта. Передаточная функция $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$ — невырожденная (несингулярная), если она не имеет совпадающих нулей и

поллюсов, что и предполагается выполненным впредь. В этом случае для физически реализуемой передаточной функции число $n = \deg \alpha(s)$ называют порядком объекта.

Используя невырожденную передаточную функцию объекта, несложно получить дифференциальное уравнение относительно вход-выходных функций времени, описывающее тот же самый объект. Действительно, по определению имеем равенство

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} U(s),$$

которое после почленного умножения на $\alpha(s)$ преобразуется к виду

$$(s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1) Y(s) = (b_{m+1} s^m + \dots + b_1) U(s).$$

После применения к этому соотношению обратного преобразования Лапласа получаем искомое дифференциальное уравнение объекта:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_1 y = b_{m+1} u^{(m)} + \dots + b_1 u,$$

где $\xi^{(k)} = d^k \xi / dt^k$ — k -я производная по времени функции $\xi(t)$. Отметим, что порядок старшей производной функции выхода, участвующей в данном дифференциальном уравнении, совпадает с порядком объекта.

От одного дифференциального уравнения порядка n можно перейти к эквивалентной совокупности n дифференциальных уравнений первого порядка, описывающей эволюцию исследуемого объекта в пространстве состояний.

Действительно, введем в рассмотрение n функций x_1, x_2, \dots, x_n , связанных между собой, входом $u(t)$ и выходом $y(t)$ соотношениями

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\dot{x}_n = - \sum_{i=1}^n a_i x_i + u,$$

$$y = \sum_{i=1}^{m+1} b_i x_i.$$

Нетрудно проверить, что передаточная функция такого объекта от u к y совпадает с исходной $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$, и, значит, приведенные соотношения также описывают исследуемый объект управления. При этом (x_1, x_2, \dots, x_n) образует набор некоторых фиктивных переменных, характеризующих, в отличие, скажем, от y и u , внутреннее состояние объекта. Последнему может быть придан полезный геометрический смысл, если воспользоваться декартовой системой координат (x_1, x_2, \dots, x_n) . Тогда каждому внутреннему состоянию объекта в соответствующем n -мерном пространстве отвечает точка x с координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) , которая также называется фазовой точкой.

При изменении времени она вычерчивает в n -мерном пространстве некоторую кривую $x_u(t, x)$, являющуюся геометрическим образом решения системы дифференциальных уравнений первого порядка при

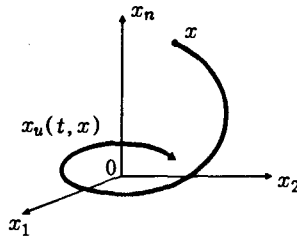


Рис. 1.2

некоторой входной функции $u(t)$ (рис. 1.2). Ортогональная проекция решения $x_u(t)$ на нормаль $c^T = (b_1, b_2, \dots, b_{m+1}, 0, \dots, 0)^T$ гиперплоскости $y = cx$ и определяет соответствующий входу $u(t)$ выход объекта $y(t)$.

Использование векторно-матричных обозначений

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c = (b_1, b_2, \dots, b_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

позволяет представить модель объекта в стандартном для современной теории управления виде

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

$$y = cx,$$

где дифференциальное уравнение называют уравнением состояния, а статическое соотношение — уравнением выхода. Разумеется, все три способа математического описания невырожденного объекта эквивалентны и нетрудно указать соответствующие взаимно однозначные преобразования. Подробности этих преобразований опускаем, приведем лишь равенство

$$c(sE - A)^{-1}b = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)},$$

в справедливости которого читателю предлагается убедиться самостоятельно.

Наконец, заметим, что упомянутую выше фиктивность вектора состояния $x(t)$ нужно понимать в том смысле, что в качестве такого

вектора может быть использован любой другой вектор z , связанный с ним невырожденным преобразованием M ($\text{deg } M \neq 0$), т.е.

$$z = Mx.$$

После такой замены получаем уравнения объекта в прежней форме, но с другими параметрами ($A_M = MAM^{-1}$, $b_M = Mb$, $c_M = cM^{-1}$):

$$\dot{z} = A_M z + b_M u,$$

$$y = c_M z.$$

При этом, разумеется, вход-выходное соответствие (в частности, передаточная функция) не изменяется. Действительно,

$$\begin{aligned} c_M (sE - A_M)^{-1} b_M &= cM^{-1}(sE - MAM^{-1})^{-1} Mb = \\ &= cM^{-1}M(sE - A)^{-1}M^{-1}Mb = c(sE - A)^{-1}b. \end{aligned}$$

Таким образом, если передаточная функция $W(s)$ не зависит от выбора фазового вектора, то ее “тонкая” структура, конечно, зависит от него (рис. 1.3). В частности поэтому при исследовании составных

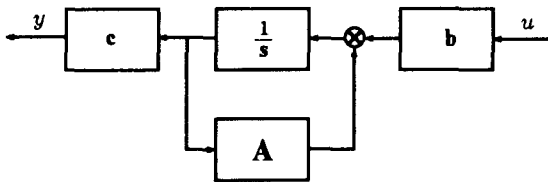


Рис. 1.3

систем удобнее использовать обобщенные передаточные функции, так как при этом особенно просто находится передаточная функция составной системы.

Непосредственные вычисления дают возможность убедиться в следующих правилах соединения передаточных функций:

- при последовательном соединении систем (рис. 1.4) передаточные

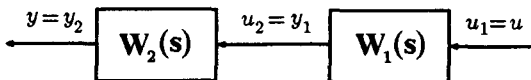


Рис. 1.4

функции перемножаются и выход системы определяется по формуле

$$y = W(s) u = W_2(s) W_1(s) u;$$

- при параллельном соединении систем (рис. 1.5) передаточные функ-

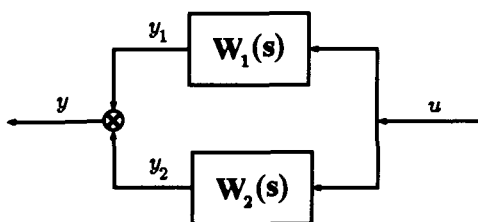


Рис. 1.5

ции складываются и выход системы определяется по формуле

$$y = W(s) u = [W_1(s) + W_2(s)] u;$$

- при соединении передаточных функций обратной связью (рис. 1.6)

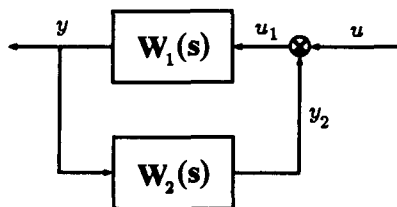


Рис. 1.6

выход системы преобразуется в соответствии с выражением

$$y = W(s) u = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)} u.$$

На рисунках белый сектор сумматора \otimes означает прибавление, а черный — вычитание соответствующего входящего сигнала.

Теперь перейдем к описанию постановки рассматриваемой задачи регулирования. Следуя современной терминологии, будем называть эту задачу задачей стабилизации. Суть возникающей в этой связи проблемы управления состоит в выборе такого управления u , при котором выход объекта y совпадает с заранее предъявленной функцией времени $y^s(t)$, выражающей требования к характеру изменения выхода объекта. Функция $y^s(t)$ называется задающим воздействием или просто заданием. Непростая сама по себе задача стабилизации усложняется воздействием на объект управления внешних возмущений двух типов: координатного $f(t)$ и операторного $a(t)$. Под влиянием внешних возмущений, информация о которых, кстати, часто недостаточна

(например, известен только факт их принадлежности некоторым множествам функций \mathcal{F} и \mathcal{A} , т.е. $f \in \mathcal{F}$, $a \in \mathcal{A}$), взаимосвязь между входом и выходом объекта становится неоднозначной и неопределенной, что, разумеется, сильно затрудняет решение задачи стабилизации (рис. 1.7). Следует, однако, отметить принципиальное различие в

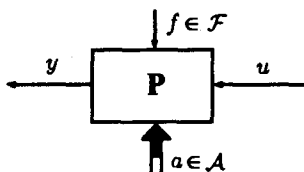


Рис. 1.7

характере влияния на объект возмущений координатного и операторного типов. Для этого более детально рассмотрим структуру объекта управления и способы воздействия на него возмущений, используя для

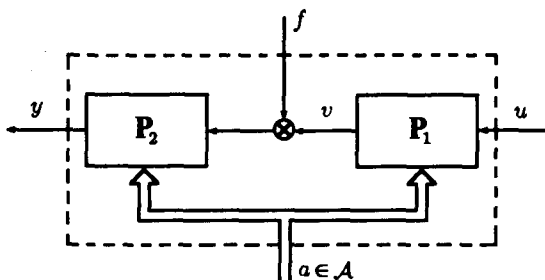


Рис. 1.8

этого схему, приведенную на рис. 1.8. Уравнения, описывающие эту схему, имеют вид

$$y = P_2[a](f + v), \quad v = P_1[a]u$$

или, более подробно,

$$y = P_2[a] P_1[a]u + P_2[a]f = P[a]u + P_2[a]f,$$

где явно отражена зависимость операторов P_1 и P_2 от операторного возмущения a .

Теперь наглядно видно качественное различие влияния возмущений f и a на выход объекта, что подчеркивается обозначениями на структурных схемах. Координатное возмущение f вносит аддитивный и независимый от входа u вклад в реакцию объекта, равный $P_2[a]f$. Операторное же возмущение a изменяет только вид или параметры операторов $P_1[a]$, $P_2[a]$ и не имеет независимого от u и f влияния на выход объекта. Таким образом, возмущение моделирует

“линейное” воздействие внешней среды на регулируемую координату, а возмущение a — “нелинейное” ее воздействие.

В линейной теории автоматического управления влияние операторного возмущения на процесс управления не изучается, поэтому ниже полагается $a \equiv 0$ и на структурных схемах это возмущение не обозначается.

Заметим, что задающее воздействие y^s также может быть выходом некоторой динамической системы, называемой задатчиком и обозначаемой ниже на структурных схемах знаком S (рис. 1.9). Конечно,



Рис. 1.9

здатчик, так же как и объект управления, может иметь вход и подвергаться влиянию помех, но ради простоты мы такие возможности не рассматриваем. В этих обозначениях и терминах задачи стабилизации может быть поставлена в соответствие структурная схема, приведенная на рис. 1.10. На рисунке $e = y^s - y$ — ошибка регулирования, а

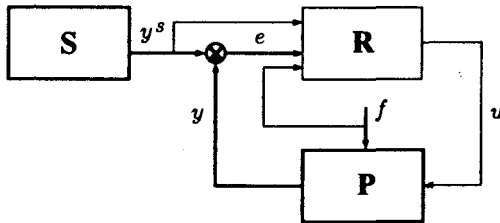


Рис. 1.10

R — регулятор, формирующий из доступной информации (y^s , e , f и т.п.) такой сигнал управления u , при котором ошибка регулирования e равна нулю или лежит в допустимых пределах.

Охарактеризуем в общих чертах принципиальные возможности, которыми располагает теория управления для достижения поставленной выше цели.

Во-первых, специалист по автоматизации, как правило, лишен возможности такого прямого влияния на внутреннее устройство технологического процесса, которое могло бы привести к требуемому равенству $y = y^s$ без какого-либо управления. Гораздо чаще ему приходится иметь дело с объектом, который сконструирован без учета этого обстоятельства. Поэтому по существу единственная возможность активного влияния на выход процесса, а значит, и на возможность решения задачи управления связана с манипулированием входным сигналом u .

И здесь, по сути дела, сразу обнаруживаются только две “чистые” стратегии поведения: первая связана с надлежащим формированием входного сигнала из имеющихся сигналов таким образом, чтобы его последующее преобразование оператором объекта привело бы к требуемому результату $y = y^*$; вторая — с изменением оператора входного соответствия с помощью обратной связи.

В первом случае, соответствующем использованию прямой связи, к входному сигналу u прибавляется вспомогательный сигнал u^s , зависящий, например, от задания y^* и преобразованный подходящим оператором R (рис. 1.11а). В результате таких преобразований выход объекта принимает вид

$$y = P R y^* + P u + P_2 f,$$

и при определенных условиях (например, $R = P^{-1}$, $P_2 f \equiv 0$, $u \equiv 0$) может оказаться, что требуемое равенство $y = y^*$ достигается.

Во втором случае входной сигнал объекта изменяется с помощью обратной связи по схеме, представленной на рис. 1.11б, на котором изображен оператор обратной связи R . Отвечающее этой структуре уравнение выхода имеет вид

$$y = P(u - R y) + P_2 f,$$

и после элементарного преобразования находим, что выход объекта, охваченного обратной связью, связан со входом u и помехой f соотношением

$$y = \frac{P}{1 + P R} u + \frac{P}{1 + P R} f,$$

из которого видно, что обратная связь меняет операторы передачи от входов u и f к выходу y без какого-либо вмешательства в технологию процесса — только путем умелого использования информации о выходе. В этом принципе заложены огромные потенциальные возмож-

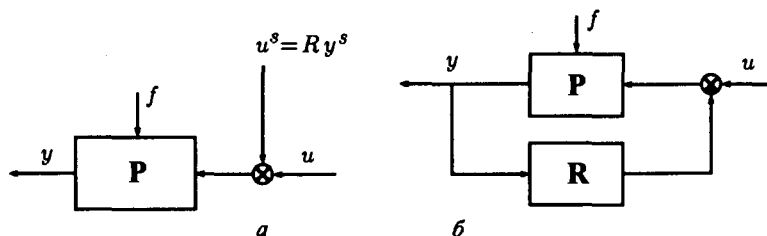


Рис. 1.11

ности, использование которых для нужд автоматизации и составляет главное содержание теории управления.

Нетрудно понять также, что сочетание прямых и обратных связей может привести к еще более глубокому влиянию на объект и, как следствие, к большому расширению возможностей автоматической системы управления.

Опишем теперь приведенные выше принципы на языке дифференциальных уравнений, используя для этого следующий пример. Пусть объект описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = u + f \quad (1.1)$$

с постоянными параметрами a_1 , a_2 и возмущением f . Отметим, что этому примеру при “операторном” описании объекта соответствуют операторы P и P_2 с передаточными функциями

$$W(s) = W_2(s) = \frac{1}{s^2 + a_2s + a_1}.$$

Пусть R — оператор прямой связи по заданию y^s с передаточной функцией

$$W_R(s) = b_2s + b_1,$$

где b_1 , b_2 — постоянные параметры. Тогда в соответствии с рис. 1.11а имеем

$$u^s = y^s + b_1y,$$

и выход объекта является теперь решением дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = b_2\dot{y}^s + b_1y^s + f + u, \quad (1.2)$$

которое отличается от исходного уравнения (1.1) дополнительным слагаемым в правой части. Так как общее решение линейного уравнения складывается из произвольного решения однородного уравнения

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения (1.2), то прямая связь влияет только на это частное или, как говорят, вынужденное решение и не оказывает никакого воздействия на его свободное движение.

Напротив, если мы используем обратную связь по схеме, представленной на рис. 1.11б, например с тем же самым оператором R , то в результате получим дифференциальное уравнение замкнутой системы управления сначала в таком виде:

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = -b_2\dot{y} - b_1y + u + f,$$

а после элементарного преобразования — в окончательном виде:

$$\ddot{y} + (a_2 + b_2)\dot{y} + (a_1 + b_1)y = u + f. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что обратная связь не изменяет правой части уравнения, но может быть использована для изменения параметров дифференциального уравнения. Это означает, что обратная связь влияет не только на собственные движения объекта, но и на вынужденные его движения. Разумеется, использование прямой и обратной связи может только “углубить” влияние на поведение объекта.

Приведенный пример уместно использовать для иллюстрации двух важных для теории автоматического управления понятий. Это понятия статики и динамики системы управления.

Рассмотрим уравнение (1.1) и положим сначала, что вход $u \equiv 0$, а возмущение $f = f_0 = \text{const}$. Тогда получим

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = f_0.$$

Общее решение этого уравнения, как известно, содержит два слагаемых:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_f(t),$$

где $y_{\text{св}}(t)$ — произвольное решение однородного уравнения и $y_f(t)$ — частное решение неоднородного уравнения. В данном случае, что нетрудно проверить прямой подстановкой,

$$y_f(t) = \frac{f_0}{a_1} = y^* = \text{const}.$$

Это решение также называют установившимся решением или статикой системы, а разницу $y(t) - f_0/a_1$ — переходным решением, переходным процессом или динамикой системы. Если объект асимптотически устойчив, а это имеет место при положительных параметрах a_1 и a_2 , то компонента $y_{\text{св}}(t)$ экспоненциально затухает до нуля, и объект колебательно (график 1 на рис. 1.12) или монотонно (график 2 на рис. 1.12) стремится к статическому положению y^* , так как в положении покоя $\dot{y} = \ddot{y} = 0$. Если используется прямая связь, то



Рис. 1.12

следует рассматривать уравнение (1.2). Пусть для простоты, как и ранее, $f \equiv f_0$, $u \equiv 0$ и, кроме того, $y^s = \text{const}$. Тогда имеем дело с уравнением

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = b_1y^s + f_0,$$

и из приведенных выше рассуждений следует, что если объект асимптотически устойчив, то все решения этого уравнения экспоненциально стремятся к статическому режиму

$$y^* = \frac{b_1}{a_1}y^s + \frac{1}{a_1}f_0.$$

Следовательно, прямая связь не влияет на динамику, а только на статику системы управления. Так как в желаемом режиме $y = y^s$, то разница

$$\eta = y^s - y^* = \frac{a_1 - b_1}{a_1} y^s - \frac{1}{a_1} f_0$$

определяет ошибку стабилизации и называется статической ошибкой системы управления. Поскольку параметр b_1 характеризует прямую связь, то последняя может применяться для уменьшения статической ошибки, например, при $b_1 = a_1$ ошибка

$$\eta = -\frac{1}{a_1} f_0.$$

Рассмотрим теперь обратную связь и уравнение (1.3) при тех же предположениях ($u \equiv 0$, $f \equiv f_0$), т.е. исследуем уравнение

$$\ddot{y} + (a_2 + b_2)\dot{y} + (a_1 + b_1)y = f_0.$$

В этом случае надлежащим выбором параметров обратной связи b_1, b_2 замкнутую систему управления можно всегда сделать асимптотически устойчивой, следовательно, обратная связь меняет динамику системы. Но не только. Поскольку в установившемся режиме

$$y^* = \frac{f_0}{a_1 + b_1},$$

то и статика зависит от обратной связи. В частности, увеличивая параметр b_1 , можно уменьшать статическую ошибку. Подчеркнем, что такая возможность в системах с прямой связью отсутствует.

Перейдем к описанию методов синтеза стабилизирующих регуляторов.

1.2. Принцип регулирования по нагрузке

Простейшая задача стабилизации возникает при отсутствии координатного возмущения, т.е. когда $f \equiv 0$. В этом случае уравнение объекта имеет вид

$$y = P u, \quad (1.4)$$

и решение рассматриваемой задачи дает так называемое программное управление

$$u^s = P^{-1} y^s, \quad (1.5)$$

где P^{-1} — оператор, обратный оператору P , т.е. оператор, удовлетворяющий равенству $P P^{-1} = 1$. Действительно, после подстановки (1.5) в уравнение объекта (1.4) последовательно находим

$$y = P u^s = P P^{-1} y^s = y^s,$$

и задача решена.

Этот принцип регулирования приводит к структурной схеме системы автоматического управления (рис. 1.13), на котором явно показана связь между заданием y^* и управлением u . Поскольку задание

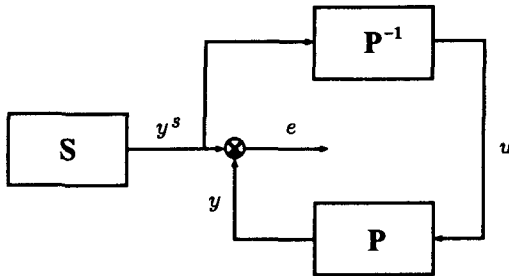


Рис. 1.13

y^* характеризует “нагрузку”, с которой функционирует объект, то использованный принцип регулирования удобно назвать принципом регулирования по нагрузке. Подобный способ регулирования имеет хронические слабости, среди которых отметим следующие.

Во-первых, по физическому смыслу задачи оператор P “моделирует” реальный процесс, и поэтому он удовлетворяет условию физической осуществимости. Пусть, например, передаточная функция оператора P имеет вид

$$W(s) = 1/s.$$

Тогда передаточная функция обратного ему оператора P^{-1} дается выражением

$$W^{-1}(s) = s$$

и, следовательно, имеет степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя, а значит, не удовлетворяет принципу причинности, т.е. оператор P^{-1} физически неосуществим. Поэтому речь может идти только о приближенной реализации программного управления $u^* = P^{-1}y^*$, а значит, только о приближенном решении рассматриваемой задачи стабилизации системой регулирования по нагрузке.

Во-вторых, только таким способом, т.е. без привлечения иных идей, нельзя решить задачу стабилизации, когда объект неустойчив (Пример 1).

И, наконец, в-третьих, стоит отметить, что в системе программного регулирования реализуемое управление не зависит от фактического поведения объекта, и потому оперативные коррективы невозможны при непредвиденных отклонениях в поведении объекта или датчика. В результате даже малое возмущение может “увести” выход объекта от предписанного.

Пример 1. Программное управление неустойчивым объектом.
Пусть объект управления имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + a_2 s + a_1},$$

где a_1, a_2 — постоянные параметры, и требуется стабилизировать выход объекта в нуле, т.е. считаем, что $y^s \equiv 0$. В соответствии с рекомендациями раздела 1.1, для получения дифференциального уравнения, описывающего рассматриваемый объект, сначала находим связь между преобразованиями Лапласа входа и выхода

$$(s^2 + a_2 s + a_1) Y(s) = U(s),$$

а затем выписываем искомое уравнение:

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = u. \quad (1.6)$$

Следуя изложенной выше процедуре построения систем регулирования по нагрузке, получаем структурную схему системы управления, приведен-

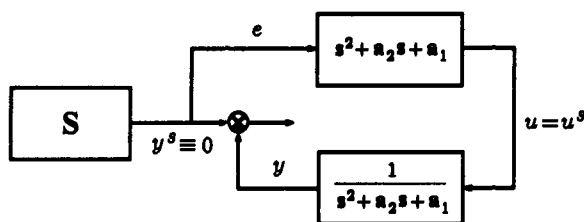


Рис. 1.14

ную на рис. 1.14. Сразу замечаем, что передаточную функцию регулятора

$$W^{-1}(s) = s^2 + a_2 s + a_1$$

можно реализовать только приближенно, и, следовательно, система управления нуждается в модификации. Но даже если допустить, что передаточная функция $W^{-1}(s)$ реализована точно, все-таки возникает серьезная трудность, когда параметр $a_1 < 0$. В самом деле, так как $u^s = P^{-1} y^s \equiv 0$, то на выходе объекта наблюдаются только собственные колебания, вызванные ненулевыми начальными условиями и описываемые дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = 0.$$

Ясно, что при $a_1 < 0$ его характеристическое уравнение

$$s^2 + a_2 s + a_1 = 0$$

имеет положительный корень, а значит, выход объекта y экспоненциально возрастает.

Иными словами, если объект управления неустойчив, то рассматриваемая задача стабилизации принципом регулирования по нагрузке не решается. Нетрудно понять, что и при $y^s \neq 0$ устойчивость объекта есть необ-

ходимое условие работоспособности системы регулирования по нагрузке. Действительно, программное управление $u^s = P^{-1}y^s$ имеет вид

$$u^s = \ddot{y}^s + a_2 \dot{y}^s + a_1 y^s,$$

и после подстановки его в уравнение объекта (1.6) получаем уравнение

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = \ddot{y}^s + a_2 \dot{y}^s + a_1 y^s.$$

Запишем это уравнение относительно ошибки регулирования $e = y^s - y$. Получаем

$$\ddot{e} + a_2 \dot{e} + a_1 e = 0,$$

и видим, если $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то задача стабилизации решена. Но последнее условие и означает асимптотическую устойчивость свободных движений объекта.

Рассмотрим теперь случай, когда объект управления находится на границе устойчивости $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, и программное управление реализуется не точно, а с погрешностью $\varepsilon = \text{const}$, т.е. $u = u^s + \varepsilon = \varepsilon$, поскольку $u^s = P^{-1}y^s \equiv 0$. В этом случае выход объекта удовлетворяет дифференциальному уравнению $\ddot{y} + a_1 \dot{y} = \varepsilon$, частное решение которого, обусловленное наличием правой части ε , неограниченно по времени нарастает по модулю, "уводя" выход объекта от желаемого нуля. Заметим, что этот вывод имеет место и в том случае, когда программное управление реализуется точно, но на входе нейтрального объекта действует постоянная помеха.

Таким образом,

- принцип регулирования по нагрузке имеет ограниченное применение при синтезе систем управления и может быть применен, вообще говоря, лишь в сочетании с другими принципами регулирования.

В частности, в комбинации с принципом регулирования по возмущению, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

1.3. Принцип регулирования по возмущению

Пусть координатное возмущение f , тождественно не равное нулю, приложено к некоторой внутренней точке объекта так, как это по-

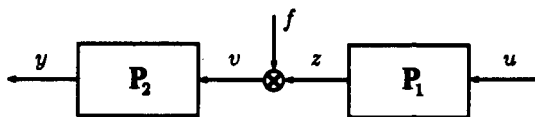


Рис. 1.15

казано на рис. 1.15. Пусть, кроме того, $z = P_1 u$, $v = z + f$ и

$$y = P_2 v = P_2 (z + f) = P_2 P_1 u + P_2 f = P u + P_2 f, \quad (1.7)$$

где учтено, что $P_2 P_1 = P$. Здесь мы имеем новую ситуацию, поскольку выход объекта зависит теперь не только от входа u , но и от возмущения f . Действительно, даже если мы точно следуем принципу регулирования по нагрузке и применяем соответствующее ему программное управление

$$u = u^s = P^{-1} y^s,$$

то в результате получим систему управления, выход которой определяется соотношением

$$y = P P^{-1} y^s + P_2 f = y^s + P_2 f$$

и, как видно, явно зависит от возмущения f , если $P_2 f \neq 0$. В том случае, когда возмущение f можно измерить, для устранения указанной зависимости целесообразно применить принцип регулирования по возмущению.

В соответствии с этим принципом управление должно содержать компоненту, пропорциональную возмущению. Применительно к данному случаю это означает, что управление следует взять в виде суммы двух компонент: программной и компенсирующей, т.е.

$$u = u^s + \mathcal{D} f,$$

где \mathcal{D} — искомый оператор. После подстановки этого выражения в (1.7) получим соотношение

$$y = P (u^s + \mathcal{D} f) + P_2 f = y^s + (P\mathcal{D} + P_2) f,$$

из анализа которого видно, что задача стабилизации решается точно и выход объекта не зависит от возмущения f , если выполнено равенство

$$P\mathcal{D} + P_2 = 0,$$

называемое условием компенсации.

Описанная выше процедура синтеза приводит к структурной схеме системы управления, приведенной на рис. 1.16. Достоинства такого способа регулирования снижают следующие обстоятельства.

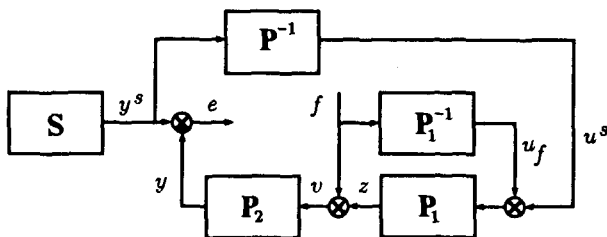


Рис. 1.16

Во-первых, как и ранее, неустойчивые объекты не могут быть за-стабилизированы таким образом.

Во-вторых, в нетривиальных случаях (т.е. когда $P_1 \neq \text{const}$) оператор \mathcal{D} , удовлетворяющий условию компенсации, физически неосуществим. Действительно, из условия компенсации имеем равенство

$$\mathcal{D} = -P^{-1} P_2 = -(P_1 P_2)^{-1} = -P_1^{-1},$$

а так как оператор P_1 моделирует реальный процесс, то обратный ему оператор P_1^{-1} физически неосуществим.

В-третьих, условие компенсации дается равенством, и при малейшей погрешности E в правой части соответствующего операторного равенства

$$P\mathcal{D} + P_2 = E$$

зависимость выхода объекта от возмущения не устраняется, так как в этом случае имеем

$$y = y^s + (P\mathcal{D} + P_2)f = y^s + Ef,$$

и если $Ef \neq 0$, то второе слагаемое в этом равенстве может привести к неприемлемому отклонению выхода y от задания y^s . Существенным ограничением этого принципа является также предположение о возможности прямого измерения возмущения f , что на практике выполняется редко.

Пример 2. Прямая компенсация возмущения. Проиллюстрируем возможности и ограничения принципа компенсации по возмущению на объекте из Примера 1. Положим, что в композиции операторов на рис. 1.15

$$P = P_2 P_1,$$

а передаточные функции, соответствующие операторам P_1 и P_2 , даются выражениями

$$W_1(s) = \frac{1}{s + \lambda_1}, \quad W_2(s) = \frac{1}{s + \lambda_2},$$

где, естественно,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_1.$$

В пространстве состояний этому операторному описанию объекта управления соответствует система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} + \lambda_2 y = z + f, \quad \dot{z} + \lambda_1 z = u$$

или, что в данном случае удобнее, одно дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = u + \dot{f} + \lambda_1 f. \quad (1.8)$$

Тогда, следуя изложенному выше принципу регулирования по возмущению, из условия компенсации $\mathcal{D} = -P_1^{-1}$ находим передаточную функцию $W_{\mathcal{D}}(s)$ оператора \mathcal{D} в виде

$$W_{\mathcal{D}}(s) = -(s + \lambda_1),$$

что (в сочетании с регулированием по нагрузке для получения программной

части u^s функции управления) приводит к структуре системы управления, изображенной на рис. 1.17. Из этой структурной схемы и дифференциаль-

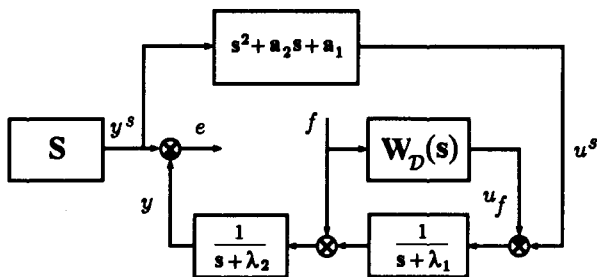


Рис. 1.17

ного уравнения (1.8) можно получить соответствующее решение в терминах пространства состояний.

После подстановки в правую часть уравнения (1.8) компенсирующего управления $u = -(f + \lambda_1 f)$ движение системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = 0.$$

Из этого уравнения, как и ранее, следует, что асимптотическая устойчивость объекта — необходимое условие разрешимости задачи в рамках принципа регулирования по нагрузке. Но и это ограничение метода далеко не единственное, так как в регуляторе синтезированной системы управления используются физически неосуществимые операторы с передаточными функциями $s^2 + a_2s + a_1$ и $s + \lambda_1$. Более того, даже если на это закрыть глаза, то все равно построенная система может оказаться неработоспособной, так как она очень чувствительна к малейшему нарушению условия компенсации: $u = -(f + \lambda_1 f)$.

Допустим, что в реализации передаточной функции оператора \mathcal{D} допущена погрешность и вместо $W_{\mathcal{D}}(s)$ использована передаточная функция

$$W_{\Delta}(s) = -(s + \lambda_1 + \Delta\lambda),$$

где $\Delta\lambda$ — некоторая константа. Тогда ошибка в реализации условия компенсации описывается выражением

$$E = -\frac{\Delta\lambda}{s^2 + a_2s + a_1}$$

и может быть сколь угодно малой при малой погрешности $\Delta\lambda$. Поскольку ошибка регулирования в данном случае определяется выражением

$$e = y^s - y = \frac{\Delta\lambda}{s^2 + a_2s + a_1} f,$$

то вновь, как и в Примере 1, убеждаемся, что при $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ даже сколь угодно малое постоянное возмущение f может привести к сколь угодно большому отклонению выхода y от задания y^* .

Таким образом,

- возможна лишь приближенная реализация принципа прямой компенсации. При этом, пожалуй, наиболее существенным его ограничением является необходимость прямого измерения возмущения.

Попытка смягчения этого ограничения предпринята в принципе компенсации с косвенным измерением возмущения. Перейдем к рассмотрению этого принципа регулирования.

1.4. Принцип компенсации при косвенном измерении возмущения

Одна из классических идей косвенного измерения возмущения может быть проиллюстрирована с помощью рис. 1.18.

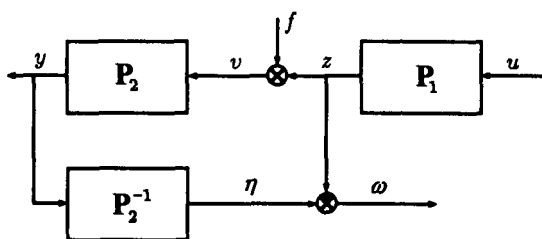


Рис. 1.18

Пусть измеряются выход объекта y и его внутренняя координата z . Тогда в результате преобразования выхода объекта оператором P_2^{-1} получаем сигнал $\eta = P_2^{-1}y$, который является оценкой сигнала v . Поскольку $v = f + z$, а сигнал z известен, то можно получить оценку возмущения f по формуле $\omega = \eta - z$.

Речь идет об оценках сигналов v и f в связи с тем, что рассматриваемое звено с оператором P_2^{-1} может иметь собственную динамику, с точностью до которой и следует понимать равенства $\eta \approx v$, $\omega \approx f$. Далее следует применить принцип прямой компенсации и сформировать управление в виде суммы двух компонент: программной u^* и компенсирующей $D\omega$, т.е.

$$u = u^* + D\omega,$$

где оператор D должен удовлетворять приведенному в предыдущем разделе условию компенсации: $D = P_1^{-1}$.

В следующем примере подробно разбираются некоторые особенности описанного явления. Здесь же подчеркнем, что указанная трудность не единственная. Все проблемы, связанные с использованием принципа прямой компенсации и отмечавшиеся в предыдущих разделах, разумеется, наследуются и рассмотренными в этом разделе системами компенсации с косвенным измерением возмущения.

Пример 3. Косвенная компенсация возмущения. Для рассмотренного в Примере 1 объекта проиллюстрируем описанный выше способ компенсации возмущения. В соответствии с изложенной теорией для указанного объекта имеем систему управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.20. Выделим из этой структурной схемы фрагмент с местной положительной обратной связью (рис. 1.21) и более подробно исследуем его свойства. Из рис. 1.21 непосредственно устанавливаем, что

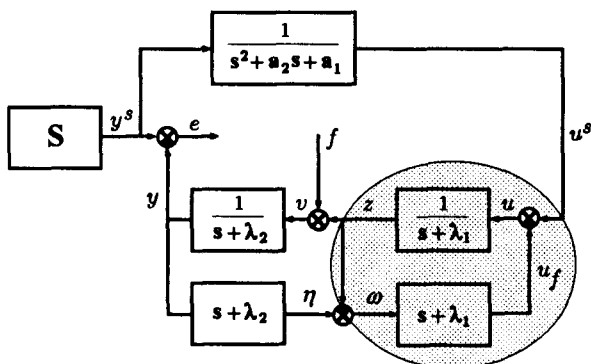


Рис. 1.20

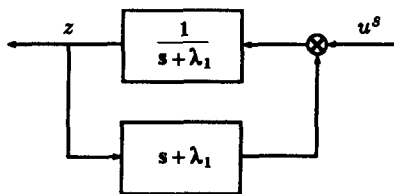


Рис. 1.21

передаточная функция $W_{u,z}(s)$ от входа u^s к выходу z задается равенством

$$W_{u,z}(s) = \frac{1}{1-1} \frac{1}{s+\lambda} = \frac{k_\infty}{s+\lambda_1},$$

и, следовательно, указанная положительная обратная связь приводит к эффекту использования в прямом канале бесконечного коэффициента усиления k_∞ . Допустим, что в этом контуре вместо оператора P_1 с передаточной

функцией $W_1(s) = 1/(s + \lambda_1)$ стоит оператор $\tilde{P}_1 = P_1 Q$ с передаточной функцией

$$\tilde{W}_1(s) = \frac{1}{s + \lambda_1} \frac{1}{\tau s + 1},$$

где $\tau = \text{const} > 0$ — малый параметр. При этом второй множитель моделирует “быструю” динамику оператора Q , не учтенную в исходной модели

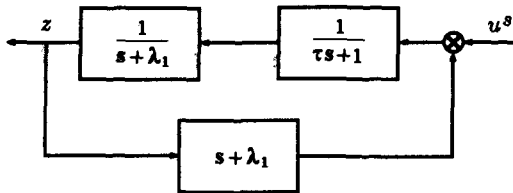


Рис. 1.22

объекта. Тогда имеем структурную схему (рис. 1.22) и описывающие ее соотношения в виде

$$(s + \lambda_1)(\tau s + 1)z = u, \quad u = u^s + (s + \lambda_1)z.$$

В результате искомая передаточная функция $\tilde{W}_{u,z}(s)$ от u^s к z определяется однозначно и дается выражением

$$\tilde{W}_{u,z}(s) = \frac{1}{\tau s(s + \lambda_1)}.$$

Отсюда следует, что объект находится на границе устойчивости и произвольно малое возмущение его параметров может привести к неустойчивости. Координата z начнет неограниченно нарастать по абсолютной величине, приводя к неограниченному же росту ошибки регулирования.

Теперь проведем исследование Примера 3 при помощи дифференциальных уравнений, а не с использованием структурного или операторного описания, как это было сделано выше. Из структурной схемы системы управления (рис. 1.20) имеем дифференциальные уравнения, описывающие объект управления

$$\dot{y} + \lambda_2 y = f + z, \quad (1.9)$$

$$\dot{z} + \lambda_1 z = u, \quad (1.10)$$

и уравнения компенсирующей внешней возмущение связи

$$u = u^s - (\dot{\omega} + \lambda_1 \omega), \quad (1.11)$$

$$\omega = \eta - z, \quad (1.12)$$

$$\eta = \dot{y} + \lambda_2 y. \quad (1.13)$$

Из (1.9) и (1.13) имеем, что $\eta = f + z$, и $\omega = -f$, поэтому управление в итоге имеет вид

$$u = u^s - (\dot{f} + \lambda_1 f). \quad (1.14)$$

Если к (1.9) применить дифференциальный оператор $d/dt + \lambda_1$, то с учетом уравнения (1.10) получаем уравнение объекта в виде

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = u + \dot{f} + \lambda_1 f,$$

где, как и ранее, параметры

$$a_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad a_1 = \lambda_1 \lambda_2.$$

После подстановки в это уравнение управления из (1.14) получаем, что движение системы управления описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = u^s - (\dot{f} + \lambda_1 f) + (\dot{f} + \lambda_1 f) = u^s$$

и не зависит от возмущения. Поскольку (рис. 1.20)

$$u^s = \ddot{y}^s + a_2\dot{y}^s + a_1y^s \text{ и } e = y^s - y,$$

то уравнение движения в ошибках имеет вид

$$\ddot{e} + a_2\dot{e} + a_1e = 0, \quad (1.15)$$

и если оно устойчиво, то задача стабилизации решена без прямого измерения возмущения f .

Отметим, что если уравнение (1.12) подставить в уравнение (1.11), а результат

$$u = u^s + (\dot{z} + \lambda_1 z) - (\dot{\eta} + \lambda_1 \eta)$$

подставить в уравнение (1.10), то получим

$$\dot{z} + \lambda_1 z = u^s + (\dot{z} + \lambda_1 z) - (\dot{\eta} + \lambda_1 \eta)$$

или, после упрощений,

$$\dot{\eta} + \lambda_1 \eta = u^s. \quad (1.16)$$

Значит, собственные движения координаты z при таком управлении не определяются однозначно, т.е. имеет место сокращение полюса и нуля.

Положим теперь, что вместо оператора P_1 в системе действует оператор $\tilde{P}_1 = P_1 Q$ и оператору Q отвечает, как и ранее, передаточная функция

$$W_\tau(s) = 1/(\tau s + 1).$$

Тогда, как это можно понять из рис. 1.20, 1.21, вместо дифференциальных уравнений (1.9), (1.10) надлежит рассматривать уравнения вида

$$\dot{y} + \lambda_2 y = f + z, \quad \tau \ddot{z} + (\tau + 1)\dot{z} + \lambda_1 z = u. \quad (1.17)$$

Вновь повторяя преобразования, убеждаемся в справедливости уравнения (1.15), но вместо соотношения (1.16) теперь получаем уравнение

$$\tau \ddot{z} + (\tau + 1)\dot{z} + \lambda_1 z = (\dot{z} + \lambda_1 z) + u^s - (\dot{\eta} + \lambda_1 \eta),$$

которое после приведения подобных принимает вид

$$\tau \ddot{z} + \tau \dot{z} = u^s - (\dot{\eta} + \lambda_1 \eta).$$

Отсюда следует, что устойчивость свободных движений переменной z определяется корнями характеристического полинома

$$\varphi(s) = \tau^2 s^2 + \tau s,$$

который имеет нулевой корень и, следовательно, отражает пограничную ситуацию:

- малого изменения параметров объекта достаточно для возникновения неустойчивого корня, а вместе с ним и неограниченного нарастания координаты z .

Этот вывод полностью совпадает с результатом, полученным на основе операторного анализа системы управления. Более тонкий подход к косвенному измерению возмущения с последующей компенсацией его влияния на регулируемую координату используется в принципе двухканальности Петрова.

1.5. Принцип двухканальности

Принцип двухканальности является эвристическим приемом структурного синтеза инвариантных систем автоматического управления или таких систем, в которых регулируемая координата не зависит от неконтролируемого, т.е. не измеряемого непосредственно, внешнего возмущения. Как всякий эвристический прием, принцип двухканальности не приводит к однозначному решению и не сводится к какой-либо единственной последовательности действий. Однако центральная идея этого приема весьма прозрачна и может быть сформулирована следующим образом: для достижения независимости регулируемой координаты системы управления от внешнего возмущения необходимо организовать, как минимум, еще один дополнительный канал влияния этого возмущения на регулируемую координату и “настроить” его таким образом, чтобы в заданной точке системы управления произошла взаимная компенсация компонент сигналов, обусловленных действиями возмущения.

К рассматриваемой задаче стабилизации этот принцип построения системы управления с полной компенсацией возмущения можно применить, например, при следующих обстоятельствах. Пусть компонента P_2 оператора объекта P представлена в виде композиции двух операторов P'_2 и P''_2 , т.е.

$$P_2 = P''_2 P'_2,$$

причем выходной сигнал z подсистемы с оператором P'_2 может быть измерен и, кроме того, при необходимости к этому сигналу может быть прибавлен какой-либо внешний сигнал q .

Такому разбиению соответствует структура объекта, показанная на рис. 1.23. Из рисунка видно, что выход объекта y не зависит от возмущения f , когда сигнал $v = z + q$ не зависит от f . Далее, так как сигналы z и r определяются равенствами

$$z = P_2'(f + r), \quad r = P_1 u^s,$$

то, очевидно, $z = P_2' f + P_2' P_1 u^s$, и сигнал v не будет зависеть от возмущения f , если сигнал q надлежащим образом зависит от этого возмущения. Это соображение и является неформальным выражением принципа двухканальности.

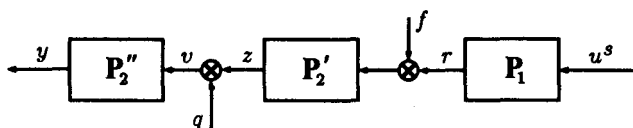


Рис. 1.23

Перейдем теперь к формальному его обоснованию. В том случае, когда выход r подсистемы P_1 известен, т.е. $r = P_1 u^s$, искомую зависимость $q(f)$, компенсирующую влияние f на v , можно построить следующим образом. Сначала измеряется сигнал z , затем он преобразуется оператором R_1 , а полученный сигнал вычитается из программного управления u^s . В результате получаем структурную схему системы управления, в которой $z = P_2' f + P_2' r$, $r = -P_1 R_1 z + P_1 u^s$ (рис. 1.24). Подставив первое выражение во второе, получаем равен-

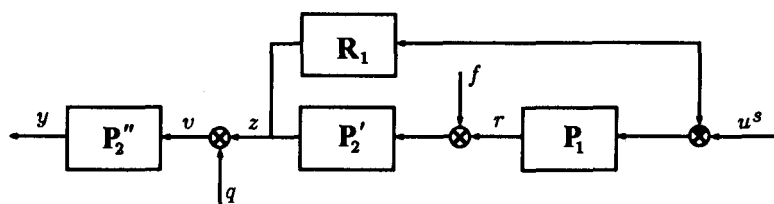


Рис. 1.24

ство $r = -P_1 R_1 (P_2' f + P_2' r) + P_1 u^s$. Решаем это равенство относительно r и находим, что сигнал

$$r = -\frac{P_1 R_1 P_2'}{1 + P_1 R_1 P_2'} f + \frac{P_1}{1 + P_1 R_1 P_2'} u^s \quad (1.18)$$

зависит от внешнего возмущения f , чего не было ранее. Поэтому, следуя рекомендациям из предшествующих разделов и выбирая подходящим образом оператор R_2 в системе на рис. 1.25, можно рассчи-

тывать на получение искомой, т.е. компенсирующей влияние f на v , зависимости $q(f)$. В этом случае образуется второй дополнительный канал распространения возмущения f (на рисунке обозначен штриховой линией), с чем связано название рассматриваемого принципа инвариантности.

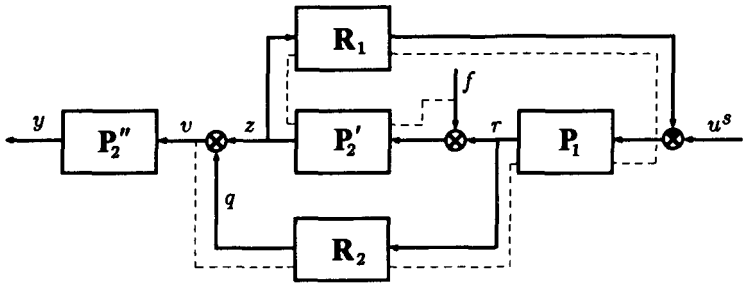


Рис. 1.25

Проанализируем полученную систему управления. Поскольку в структурной схеме на рис. 1.25 сигнал z дается выражением

$$z = P_2'(f + r),$$

то можно, подставив в это соотношение r из (1.18), получить связь между сигналами z , f и u^s в виде

$$z = \frac{P_2'}{1 + P_1 R_1 P_2'} f + \frac{P_2' P_1}{1 + P_1 R_1 P_2'} u^s.$$

Теперь, зная зависимость сигнала $v = z + q$ от f , нетрудно подобрать требуемую для обеспечения инвариантности по отношению к f зависимость $q(f)$. Для этого оператор R_2 в схеме на рис. 1.25 нужно выбрать в виде

$$R_2 = \frac{1}{R_1 P_1}. \quad (1.19)$$

В самом деле, при таком выборе оператора R_2 , с учетом соотношения (1.18), нетрудно определить, что

$$q = R_2 r = -\frac{P_2'}{1 + P_1 R_1 P_2'} f + \frac{1}{R_1(1 + P_1 R_1 P_2')} u^s.$$

Следовательно, сигнал v выражается равенством

$$v = z + q = \frac{1}{R_1} u^s$$

и не зависит от неконтролируемого возмущения f , что и требовалось.

Структурная схема синтезированной инвариантной системы стабилизации приведена на рис. 1.26.

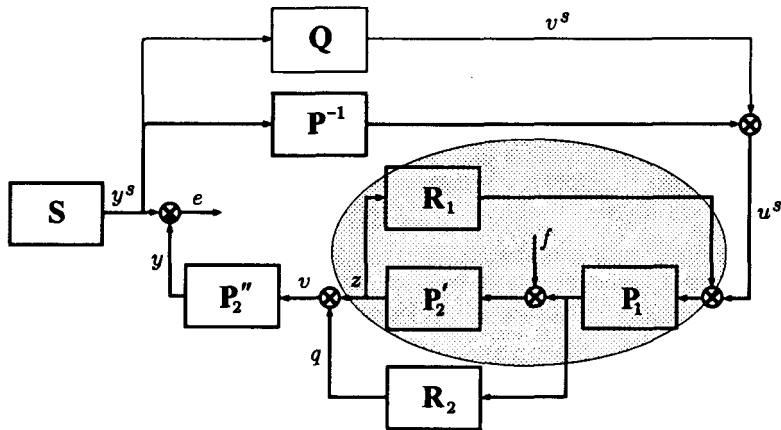


Рис. 1.26

Таким образом, независимость выхода объекта y от возмущения f обеспечена, но, вообще говоря, ценой потери требуемого в задаче стабилизации равенства $y = y^s$, поскольку теперь

$$y = P_2'' v = \frac{P_2''}{R_1} u^s = \frac{P_2'' P^{-1}}{R_1} y^s = \frac{R_2}{P_2'} y^s,$$

а выполнение равенства

$$R_2 = P_2' \quad (1.20)$$

нигде выше не предполагалось. Следовательно, для точного решения задачи стабилизации указанным выше способом требуется либо соблюдение условия (1.20), либо введение связи по заданию y^s , $v^s = Q y^s$, корректирующей программное управление u^s (Q — оператор корректирующей связи, которая на рис. 1.26 заштрихована).

В последнем случае имеем вполне очевидные соотношения

$$y = \frac{P_2''}{R_1} (u^s + v^s) = \left(\frac{R_2}{P_2'} + R_2 P_1 P_2'' Q \right) y = \frac{R_2}{P_2'} (1 + P Q) y^s,$$

при получении которых учтены условия компенсации (1.19) и введенные ранее обозначения

$$P = P_1 - P_2, \quad P_2 = P_2' - P_2''.$$

При наличии корректирующей связи в выборе операторов R_1 и R_2 появляется необходимая для смягчения (но отнюдь не для устранения)

требований к физической реализуемости степень свободы, стесненная лишь условием компенсации

$$P_1 R_1 R_2 = 1$$

и условием несмещенности решения задачи стабилизации

$$R_2 (1 + P Q) = P_2'.$$

Поэтому среди принципов прямой компенсации внешнего возмущения принцип двухканальности имеет, пожалуй, наибольшую сферу применимости. Однако и он не свободен от серьезных недостатков.

- Во-первых, при его использовании, как, впрочем, и в случаях применения других принципов компенсации, мы вынуждены ограничиваться устойчивыми объектами.
- Во-вторых, в структурной схеме соответствующей системы стабилизации (рис. 1.25) возникает контур местной обратной связи с оператором $P_1 P_2'$ в прямом канале и оператором R_1 в канале обратной связи. Устойчивость этого контура отнюдь не наступает неотвратимо, и так как выбор оператора R_1 стеснен условием компенсации, то скорее всего придется принимать специальные меры для стабилизации движений в этом внутреннем контуре.
- В-третьих и в-четвертых, из условия компенсации $R_1 R_2 P_1 = 1$ видно, что в нетривиальном случае (когда P_1 — физически реализуемое динамическое звено и, следовательно, степень полинома числителя соответствующей передаточной функции меньше степени полинома ее знаменателя) точное выполнение условия компенсации в классе физически реализуемых операторов R_1, R_2 невозможно. Поэтому речь может идти только о приближенной компенсации возмущения. К этому же выводу мы приходим и с учетом того обстоятельства, что условие полной компенсации выражается точным равенством, а для этого необходима информация об истинных значениях параметров объекта, чего на практике, конечно же, нет. Иными словами, применение этого принципа регулирования не приводит, вообще говоря, к грубым системам управления.
- И, наконец, в-пятых, условия применимости принципа двухканальности довольно специфичны и предполагают не только наличие информации о внутренних координатах объекта, но и возможность активного, а по сути дела регулирующего, воздействия на внутренние координаты. Само собой разумеется, что подобные возможности, а точнее, их сочетание, встречаются на практике далеко не всегда.

Именно поэтому теория управления обратилась к более активному использованию обратной связи. Подробнее об этом поговорим в следующем разделе, а теперь рассмотрим простой пример, иллюстрирующий особенности применения принципа двухканальности.

Пример 4. Стабилизация с использованием принципа двухканальности. Рассмотрим объект управления третьего порядка, декомпозированный в соответствии с общей теорией метода двухканальности на три подсистемы (рис. 1.27). Передаточные функции операторов P_1 , P_2' и

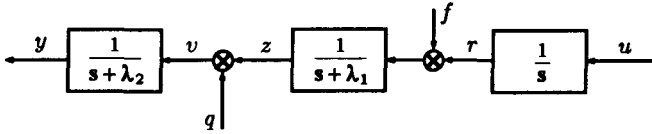


Рис. 1.27

P_2'' имеют вид $W_1(s) = 1/s$, $W_2'(s) = 1/(s + \lambda_1)$, $W_2''(s) = 1/(s + \lambda_2)$, где λ_1 и λ_2 — известные константы, и пусть координаты z и r измеряются. Требуется без измерения возмущения f обеспечить решение задачи стабилизации, т.е. добиться точного выполнения равенства $y = y^*$. Здесь y^* — заданная функция времени.

Заметим, что данный объект управления можно описать следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{y} = -\lambda_2 y + z, \quad \dot{z} = -\lambda_1 z + r + f, \quad \dot{r} = u.$$

В соответствии с изложенной выше теорией метода двухканальности дополняем рис. 1.27 местной обратной связью с оператором R_1 и местной прямой связью с оператором R_2 (рис. 1.28), где $W_1(s)$ и $W_2(s)$ — отвечающие

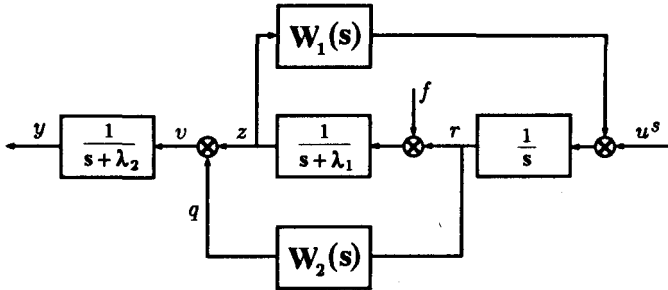


Рис. 1.28

R_1 и R_2 искомые передаточные функции. Исключаем из уравнений

$$y = \frac{1}{s + \lambda_2} v, \quad v = z + q, \quad q = W_2(s)z, \quad z = \frac{1}{s + \lambda_1} (f + r), \quad sr = u^s - W_1(s)z,$$

описывающих эту схему, переменные q и z и находим сначала равенство

$$r = \frac{s + \lambda_1}{s(s + \lambda_1) + W_1(s)} u^s - \frac{W_1}{s(s + \lambda_1) + W_1(s)} f,$$

а затем связь между переменной $v = z + q$, возмущением f и входом u^s в виде

$$v = \frac{1 + W_2(s)(s + \lambda_1)}{s(s + \lambda_1) + W_1(s)} u^s + \frac{s - W_1(s)W_2(s)}{s(s + \lambda_1) + W_1(s)} f.$$

При выполнении условия полной компенсации (1.19) передаточные функции $W_1(s)$, $W_2(s)$ удовлетворяют соотношению

$$W_1(s)W_2(s) = s. \quad (1.21)$$

Ясно, что для физически реализуемых передаточных функций это соотношение не может выполняться. Например, если $W_2(s) = 1$, то $W_1(s) = s$, и она физически нереализуема.

Разумеется, выбор передаточных функций $W_1(s)$ и $W_2(s)$ еще более стеснен, когда требуется обеспечить точное равенство $y = y^s$. Действительно, при выполнении условия компенсации (1.21) справедливы равенства

$$y = \frac{1}{s + \lambda_2} v = \frac{1 + W_2(s)(s + \lambda_1)}{s(s + \lambda_1) + W_1(s)} \frac{u^s}{s + \lambda_2} \Big|_{W_1 W_2 = s} = \frac{u^s}{W_1(s)(s + \lambda_2)}.$$

Если теперь использовать стандартный подход к формированию программного управления, когда $u^s = P^{-1}y^s$, а P — оператор объекта с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{s(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)},$$

то выход системы преобразуется в соответствии с выражением

$$y = \frac{s(s + \lambda_1)}{W_1(s)} y^s,$$

и для обеспечения требуемого условия $y = y^s$ необходимо выполнение равенства

$$W_1(s) = s(s + \lambda_1).$$

Из уравнения (1.21) находим передаточную функцию оператора P_2 :

$$W_2(s) = \frac{1}{s + \lambda_1}.$$

Если оператор R_2 вольтерровский (т.е. удовлетворяет принципу причинности), то R_1 — невольтерровский оператор, так как он содержит двукратное дифференцирование. Следовательно, подобная система управления физически неосуществима.

Это означает, что

- в рамках принципа двухканальности добиться точной компенсации возмущения и одновременно обеспечить точное решение задачи стабилизации с использованием только вольтерровских операторов невозможно.

Поэтому встает вопрос о приближенной реализации условия компенсации или об использовании корректирующей связи по нагрузке y^s для достижения точного равенства $y = y^s$. Поскольку вторая возможность подробно обсуждалась при изложении теории данного метода

компенсации, то исследуем подробно лишь обстоятельства, возникающие при приближенной реализации условия компенсации вольтерровскими операторами.

Остановим свой выбор в (1.21) сначала на операторах с передаточными функциями вида

$$W_1(s) = s, \quad W_2(s) = 1,$$

а затем невольтерровскую операцию точного дифференцирования заменим вольтерровской операцией приближенного (реального) дифференцирования и вместо $W_1(s)$ применим

$$\widetilde{W}_1(s) = \frac{s}{\tau s + 1},$$

где τ — малая постоянная времени. При этом предположении условие компенсации, разумеется, не выполнено, так как теперь

$$\widetilde{W}_1(s) W_2(s) = \frac{s}{\tau s + 1},$$

и, следовательно, для переменной v имеем выражение

$$v = \frac{1 + W_2(s)(s + \lambda_1)}{s(s + \lambda_1) + \widetilde{W}_1(s)} u^s + \frac{\tau s}{(\tau s + 1)(s + \lambda_1)} f,$$

а, значит, выход объекта $y = v/(s + \lambda_2)$ зависит от возмущения f . Но эта зависимость уменьшается вместе с постоянной времени τ , которая может быть взята достаточно малой. Для удовлетворения условия несмещенности решения задачи стабилизации следует воспользоваться описанной выше корректирующей связью. Окончательно структурную схему системы стабилизации получаем в виде рис. 1.29. На этом

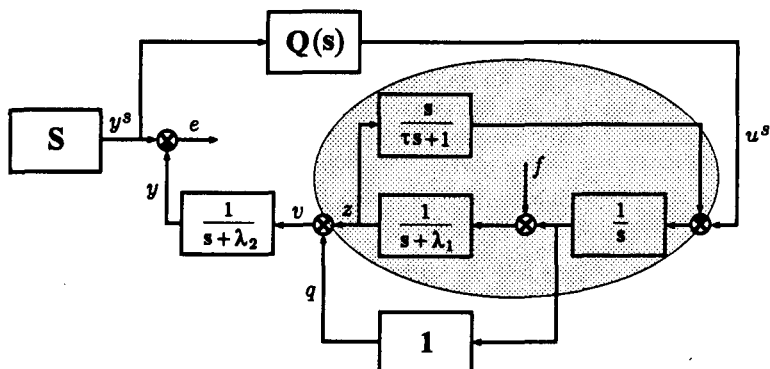


Рис. 1.29

рисунке передаточная функция $Q(s)$ выбирается из условия

$$\frac{1 + (s + \lambda_1)}{s(s + \lambda_1) + s/(\tau s + 1)} \frac{Q(s)}{s + \lambda_2} = 1,$$

обеспечивающего такое программное управление u^s , при котором передаточная функция от y^s к u равна единице, т.е.

$$y = y^s + \frac{\tau s}{(\tau s + 1)(s + \lambda_1)} f. \quad (1.22)$$

Эта схема может определить работоспособную систему стабилизации, только если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, т.е. когда собственные движения оператора

$$P_2 = \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$$

экспоненциально устойчивы.

Анализируя формулу (1.22), нетрудно установить, что синтезированная система управления точно решает задачу стабилизации, если неизвестное возмущение f постоянно. Действительно, в этом случае второе слагаемое в сумме (1.22) обнуляется. Это как будто бы частное наблюдение составляет главное содержание принципа встроенной модели или принципа K -изображения, к изложению которого мы переходим в следующем разделе. Но прежде исследуем вопрос об устойчивости внутреннего контура с передаточной функцией $W_1(s) = s/(\tau s + 1)$ в обратной связи (рис. 1.29). Действуя стандартным образом, найдем полином, ответственный за устойчивость этого контура, в следующем виде:

$$\varphi(s) = [\tau s^2 + (\lambda\tau + 1)s + (\lambda + 1)] s.$$

Наличие нулевого корня означает, что контур находится на границе устойчивости и, следовательно, скрытые параметры могут привести к неустойчивости собственных движений внутреннего контура, что, в свою очередь, приведет к нарушению работоспособности всей системы. Последнее свидетельствует о неробастности синтезированной системы управления.

Завершим раздел разъяснением особенностей применения принципа двухканальности в пространстве состояний. Исходные уравнения рассматриваемого объекта приводились выше. При принятых ранее допущениях (измеряются сигналы z , r и можно влиять на вход оператора P_2'' с передаточной функцией $W_2''(s) = 1/(s + \lambda_2)$) эти уравнения можно переписать в виде

$$\dot{y} = -\lambda_2 y + z + q, \quad \dot{z} = -\lambda_1 z + r + f, \quad \dot{r} = u. \quad (1.23)$$

Очевидно, что координата y не будет зависеть от возмущения f , если сумма $v = z + q$ не зависит от этого возмущения. Но это означает, что и скорость изменения координаты v , которая описывается уравнением

$$\dot{v} = \dot{z} + \dot{q} = -\lambda_1 z + r + f + \dot{q},$$

не зависит от f . Положим $q = r$. Тогда, в силу (1.23), из предыдущего уравнения получим выражение

$$\dot{v} = -\lambda_1 z + r + f + u, \quad (1.24)$$

в котором управление u следует подобрать так, чтобы его правая часть зависела только от сигнала v и программы u^s . При этом управление может зависеть только от сигналов z , r и u^s .

Выразим функцию f из правой части второго уравнения (1.23) и подставим результат в (1.24). В итоге получим $\dot{v} = \dot{z} + u$. Теперь ясно, что если

$$u = -\dot{z} + u^s + kv, \quad (1.25)$$

где k — постоянный коэффициент, то сигнал v удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = kv + u^s$$

и не зависит от возмущения f , а значит и выход объекта не зависит от этого возмущения, что нам и требовалось. Отметим, что этот результат совпадает с описанным выше результатом, полученным структурным методом при $k = 0$.

1.6. Метод K -изображений или метод встроенной модели

В классической и современной теории управления весьма популярен метод компенсации возмущения $f(t)$, основанный на точном знании модели, порождающей это возмущение. В линейной теории модель возмущения задается или векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Hx, \quad f = hx, \quad (1.26)$$

где H , h — постоянные матрица и вектор надлежащих размеров, или скалярным дифференциальным оператором $K(s)$, аннулирующим возмущение $f(t)$, т.е.

$$K(s)f = 0. \quad (1.27)$$

Здесь $K(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1$, и при всех $(i = 1, \dots, n)$ параметры a_i постоянны. В первом случае возмущение однозначно определяется начальным фазовым вектором x^0 , так как

$$f = h(sE - H)^{-1}x^0,$$

а во втором случае — значениями $f(0)$, $f^{(1)}(0)$, \dots , $f^{(n-1)}(0)$. Задание возмущения в виде волновой модели (1.26) или в виде аннулирующего оператора (1.27) — это вопрос удобства. Ранее же использовалась только форма (1.27), и именно для нее академиком В.С. Кулебакиным был развит соответствующий раздел теории инвариантности. Об этом нам напоминает буква K , традиционно используемая в обозначении аннулирующего полинома.

Итак, рассмотрим объект (рис. 1.30), подверженный воздействию возмущения $f(t)$ и управлению u . Предполагаются известными анну-

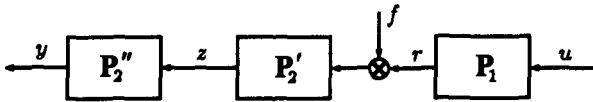


Рис. 1.30

лирующий оператор $K(s)$ и внутренняя переменная $z(t)$. Требуется выбором управления $u(t)$ обеспечить выполнение точного равенства $y(t) = y^*(t)$ при любых $f(t)$, удовлетворяющих (1.27).

Из рис. 1.30 и уравнений объекта управления

$$y = P_2'' z, \quad z = P_2'(f + r), \quad r = P_1 u$$

легко понять, что y не зависит от помехи f , если координата z от f не зависит. Но в исходной структуре последнее имеет место только тогда, когда $P_2' f \equiv 0$, т.е. когда P_2' — аннулирующий оператор для f . Поскольку надежд на выполнение этого тождества нет, то попытаемся изменить оператор между f и z с помощью местной обратной

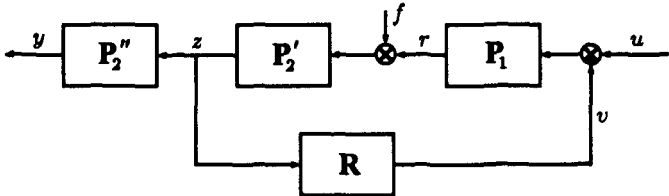


Рис. 1.31

связи с оператором R (рис. 1.31). В модифицированной таким образом системе для нахождения зависимости z от f воспользуемся соотношениями

$$z = P_2'(f + r), \quad r = P_1(u - Rz).$$

После подстановки второго равенства в первое и приведения подобных, находим искомую зависимость в виде

$$z = \frac{P_2'}{1 + P_2' P_1 R} + \frac{P_2' P_1}{1 + P_2' P_1 R} u. \quad (1.28)$$

Координата z не будет зависеть от помехи f , если найдется оператор R такой, что при некотором операторе L имеет место равенство

$$\frac{P_2'}{1 + P_2' P_1 R} = L K, \quad (1.29)$$

где K — полином из (1.27). Решая уравнение (1.29) относительно R , находим требуемый оператор R :

$$R = \left(\frac{P_2'}{LK} - 1 \right) \frac{1}{P_2' P_1} = \frac{N}{K^n}, \quad (1.30)$$

где $N = (P_2' - LK)/(LP_2' P_1)$.

Формула (1.30) показывает, что местная обратная связь, обеспечивающая условие инвариантности, должна содержать оператор, обратный оператору, аннулирующему возмущение. Именно с этим обстоятельством и связано второе название описываемого метода — метод встроенной модели.

При выполнении условия инвариантности (1.29) справедливы равенства

$$z = \frac{P_2'}{1 + P_2' P_1 R} P_1 u = LK P_1 u,$$

и для окончательного решения задачи стабилизации ($y = y^*$) необходимо подобрать корректирующую обратную связь по нагрузке для нового объекта с оператором $\tilde{P} = P_2'' LK P_1$ (рис. 1.32). Если объ-

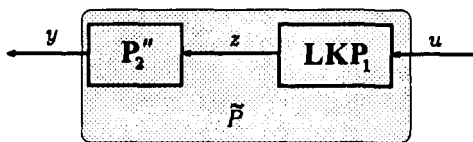


Рис. 1.32

ект \tilde{P} минимально фазовый, т.е. полиномы его числителя и знаменателя устойчивы, то можно использовать стандартную прямую связь по нагрузке (рис. 1.33), которая и решает поставленную задачу, иначе говоря, поддерживает в статике равенство $y = y^*$.

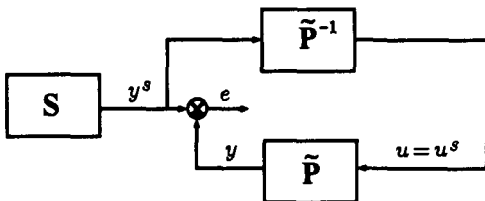


Рис. 1.33

Таким образом, минимальная фазовость объекта \tilde{P} является обязательным, но не единственным условием применения метода K -изображения. Другое ограничение связано с физической реализуемостью обратного оператора \tilde{P}^{-1} .

Действительно, оператор местной обратной связи R должен быть физически осуществим, но тогда таковым обязан быть и оператор \tilde{P} , а следовательно, оператор \tilde{P}^{-1} нереализуем. Речь может идти только о физически реализуемой аппроксимации \tilde{P}^{-1} оператора \tilde{P}^{-1} , и, вероятно, задача стабилизации может решаться только приближенно.

Для ослабления требований минимальной фазовости и физической осуществимости \tilde{P}^{-1} можно, наряду со связью по нагрузке, использо-

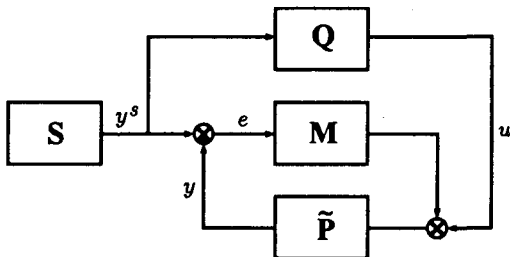


Рис. 1.34

вать обратную связь по ошибке стабилизации $e(t)$, представленную на рис. 1.34, на котором Q и M — операторы соответствующих связей.

Из уравнений

$$y = \tilde{P}(u + Me), \quad e = y^s - y$$

находим соотношение между y и y^s в виде

$$y = \frac{\tilde{P}(Q + M)}{1 + \tilde{P}M} y^s = W(s) y^s. \quad (1.31)$$

Таким образом, задача стабилизации не может быть точно решена при ограниченных операторах обратной связи M , так как из равенства

$$\frac{\tilde{P}(Q + M)}{1 + \tilde{P}M} = 1 \quad (1.32)$$

получаем, что $\tilde{P}Q = 1$, и значит Q физически неосуществим. Однако надлежащим выбором оператора M можно влиять на устойчивость знаменателя передаточной функции $W(s)$, а выбором оператора Q добиваться лучшей аппроксимации соотношения (1.32). При этом требование устойчивости нулей оператора \tilde{P} сохраняется, потому что такая модификация системы стабилизации не влияет на положение этих нулей.

Заметим, что если вовсе отказаться от прямой связи по нагрузке, т.е. принять $Q \equiv 0$ в схеме на рис. 1.34, а решение задачи возложить

на обратную связь, то получим такое соотношение между y и y^s :

$$y = \frac{\tilde{P}M}{1 + \tilde{P}M} y^s.$$

Ясно, что только при условии $|\tilde{P}M| \gg 1$ можно рассчитывать на удовлетворительное решение задачи стабилизации.

Но это уже другая тема — тема глубокой обратной связи, к которой мы перейдем в следующем разделе, а теперь рассмотрим пример к методу K -изображения.

Пример 5. Стабилизация методом K -изображения. Ознакомимся с возможностями и недостатками метода K -изображения при работе с передаточными функциями и в пространстве состояний. Рассмотрим случаи постоянного и экспоненциального возмущения.

Случай А. Пусть возмущение $f = \text{const}$ действует на объект согласно схеме, приведенной на рис. 1.35. Требуется найти оператор R такой, при

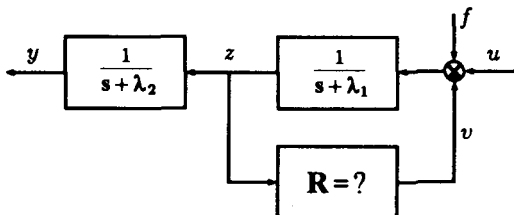


Рис. 1.35

котором координата z не зависит от f и, кроме того, имеет место равенство $y = y^s$. Поскольку $f = \text{const}$, то простейший оператор, аннулирующий константу, — оператор дифференцирования, т.е. $K = s$. Следовательно, согласно изложенной теории, берем $R = N(s)/s$. Убеждаемся в том, что координата z при таком операторе R не зависит от f .

В самом деле,

$$z = \frac{f - Rz + u}{s + \lambda_1} = \frac{sf - N(s)z + su}{s(s + \lambda_1)}.$$

Но $sf \equiv 0$ и, значит,

$$z = \frac{-N(s)z + su}{s(s + \lambda_1)}.$$

Оператор передачи от u к z определяется выражением

$$z = \frac{s}{s(s + \lambda_1) + N(s)} u,$$

и, следовательно,

$$y = \frac{s}{(s + \lambda_2) [s(s + \lambda_1) + N(s)]} u.$$

Если попытаться обеспечить равенство операторов $\tilde{P} = P$, т.е.

$$\frac{s}{(s + \lambda_2) [s(s + \lambda_1) + N(s)]} = \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_1)},$$

то с неизбежностью получим $N(s) = 0$. Поэтому направим выбор оператора $N(s)$ на достижение устойчивости “подвоенного” объекта \tilde{P} или, что то же самое, при устойчивом объекте P — на устойчивость полинома

$$\varphi(s) = s(s + \lambda_1) + N(s).$$

Устойчивость полинома достигается, например, при $N = k = \text{const} > 0$, так как в итоге получаем $\varphi(s) = s^2 + s\lambda_1 + k$. При $\lambda_1 > 0$ (это условие выполнено по предположению) и $k > 0$ этот полином — гурвицев.

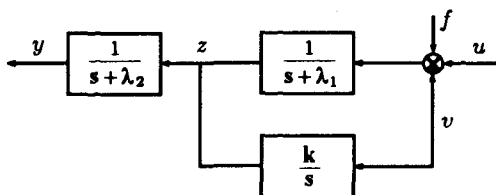


Рис. 1.36

В результате компенсирующая возмущение обратная связь получилась интегральной (рис. 1.36). Нетрудно вычислить, что передаточной функции такого объекта соответствует выражение

$$\tilde{W}(s) = \frac{s}{(s + \lambda_2) [s(s + \lambda_1) + k]}.$$

Поскольку передаточная функция $\tilde{W}(s)$ имеет устойчивые полюса, то для решения задачи стабилизации можно использовать принцип регулирования

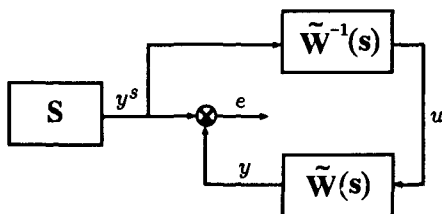


Рис. 1.37

по нагрузке (рис. 1.37) с передаточной функцией, обратной к $\tilde{W}(s)$:

$$\tilde{W}^{-1}(s) = (s + \lambda_2)(s + \lambda_1) + k \frac{s + \lambda_2}{s}.$$

Видно, что $\tilde{W}^{-1}(s)$ физически неосуществима и, следовательно, можно говорить только о приближенной ее реализации.

Случай Б. Задача становится неразрешимой этим методом, если на входе объекта действует экспоненциальное возмущение $f = e^{\alpha t}$, $\alpha = \text{const}$. Аннулирующим для $f(t)$ является оператор $K = s - \alpha$. Действительно,

$$K f = \left(\frac{d}{dt} f - \alpha f \right) \Big|_{f=e^{\alpha t}} = \alpha f - \alpha f = 0.$$

Следуя рекомендациям теории, получаем

$$R = N(s)/s - \alpha,$$

и связь между z и u определяется выражением

$$z = \frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)(s + \lambda_1) + N(s)} u.$$

Выбираем оператор $N(s)$ из соображений устойчивости полинома

$$\varphi(s) = (s - \alpha)(s + \lambda_1) + N(s).$$

Ясно, что можно положить $N(s) = k_1 s + k_2$. Тогда при выполнении неравенств $k_1 > \lambda_1 \alpha$, $k_2 > \alpha - \lambda_1$ рассматриваемый полином $\varphi(s)$ — гурвицев.

В результате передаточная функция “подновленного” объекта определяется выражением

$$\widetilde{W}(s) = \frac{s - \alpha}{(s + \lambda_2) \varphi(s)},$$

а обратная к ней передаточная функция

$$\widetilde{W}^{-1}(s) = \frac{(s + \lambda_2) \varphi(s)}{s - \alpha}$$

имеет неустойчивый полюс, и, значит, в данном случае принцип регулирования по нагрузке применять нельзя. Ничего в этой схеме не меняет и обратная связь по ошибке $e = y^s - y$, так как такая связь не устраняет правых нулей передаточных функций.

Случай В. Вновь рассмотрим объект, представленный структурной схемой на рис. 1.35 с возмущением $f = \text{const}$, но теперь для описания метода K -изображения используем дифференциальные уравнения. Данный объект описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y} + \lambda_2 y &= z, \\ \dot{z} + \lambda_1 z &= f + u - v. \end{aligned} \quad (1.33)$$

После дифференцирования по t уравнения (1.33) с учетом того, что $\dot{f} \equiv 0$, имеем

$$\ddot{z} \lambda_1 \dot{z} = \dot{v} + \dot{u},$$

и, следовательно, z не зависит от f . Полагаем

$$\dot{v} = kz. \quad (1.34)$$

Тогда $\ddot{z} \lambda_1 \dot{z} + kz = \dot{u}$, и если $k > 0$, то это уравнение устойчиво и надлежащим выбором $\dot{u}(y^s)$ можно получить $y \rightarrow y^s$, что решает задачу. Уравнение (1.34) описывает интегральную обратную связь, так как

$$v = k \int z dt.$$

1.7. Глубокая обратная связь — большой коэффициент усиления

Рассмотрим один из наиболее мощных методов решения задач стабилизации в условиях неопределенности — метод глубокой обратной связи, который для линейного случая сводится к использованию в регуляторе большого коэффициента усиления.

1.7.1. Постановка задачи, особенности и идея решения

Пусть на объект с оператором $P = P_1 P_2$ действует возмущение f (рис. 1.38). Требуется выбором управления u обеспечить независи-

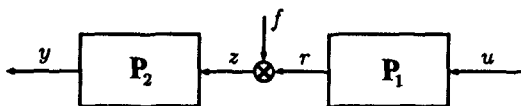


Рис. 1.38

мость регулируемой координаты y от возмущения f и, кроме того, достижение и поддержание равенства

$$y = y^s.$$

Укажем на некоторые особенности постановки задачи стабилизации. Во-первых, не предполагается, как ранее, что объект P обязательно устойчивый. Во-вторых, возмущение f необязательно является малым или исчезающим со временем. И, наконец, в-третьих, не предполагается наличие возможностей прямого или косвенного измерения возмущения f .

В рассматриваемых условиях применение описанных выше методов невозможно, а потому неизбежно обращение или к обратной связи и принципу регулирования по ошибке в рамках схемы на рис. 1.39, в которой надлежит выбрать оператор обратной связи R' , или к со-

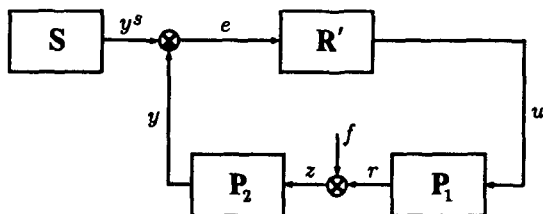


Рис. 1.39

четанию принципа регулирования по нагрузке с обратной связью в рамках схемы на рис. 1.40, в которой, кроме того, нужно построить

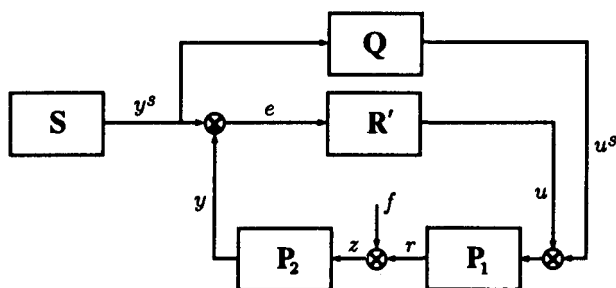


Рис. 1.40

оператор прямой связи по нагрузке Q . Идея решения задачи основана на переходе от схемы на рис. 1.39 к схеме, представленной на рис. 1.41, который осуществляется заменой $R' = kR$, где k — скалярный коэффициент усиления, а R — искомый оператор обратной связи.

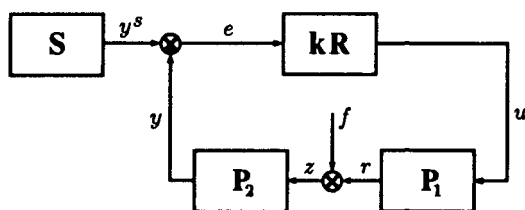


Рис. 1.41

Уравнения, описывающие полученную замкнутую систему управления имеют вид

$$y = P_2(f + r), \quad r = P_1 u, \quad u = kR(y^s - y).$$

После исключения переменных u и r находим связь между основными переменными y , y^s и f сначала в виде

$$(1 + kPR)y = P_2 f + kPRy^s, \quad (1.35)$$

а после деления на $1 + kPR$ в окончательном варианте:

$$y = \frac{P_2}{1 + kPR} f + \frac{kPR}{1 + kPR} y^s. \quad (1.36)$$

Можно заметить, что при $k \rightarrow \infty$ первое слагаемое в выражении (1.36) уменьшается до нуля, а второе стремится к заданию y^* , что и решает рассматриваемую задачу стабилизации, если, конечно, при каждом значении $k \rightarrow \infty$ замкнутая система асимптотически устойчива.

Кроме того, использование больших коэффициентов усиления ведет к увеличению значений переменных системы, а поскольку в реальных системах всегда имеются амплитудные ограничения, то необходимо изучить их влияние на свойства системы. Наконец, следует выяснить, насколько чувствительно решение, даваемое глубокой обратной связью, к вариациям условий задачи, т.е. по отношению к регулярным и сингулярным возмущениям. Свойства системы, непрерывно зависящие от указанных возмущений, принято называть грубыми.

1.7.2. Проблемы и ограничения метода глубокой обратной связи

В этом и последующих разделах рассмотрим некоторые из упомянутых выше проблем. Здесь мы исследуем условия устойчивости предельной и допредельной систем и изучим влияние амплитудных ограничений на управление.

Из уравнения (1.36) замкнутой системы получаем

$$(1 + kPR)y = P_2 f + kPRy^*,$$

и, следовательно, при $k \rightarrow \infty$ нужно изучать устойчивость свободного движения или, что то же самое, устойчивость нулевого решения уравнения

$$(1 + kPR)y = 0. \quad (1.37)$$

Обозначим передаточную функцию объекта P через

$$W_P(s) = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1} = \frac{b(s)}{a(s)},$$

а передаточную функцию регулятора R , — как

$$W_R(s) = \frac{p_{n+1}s^n + p_n s^{n-1} + \dots + p_1}{q_{n+1}s^n + q_n s^{n-1} + \dots + q_1} = \frac{p(s)}{q(s)}.$$

Подстановка этих выражений в исследуемое уравнение (1.37) дает выражение

$$\left[1 + k \frac{b(s)}{a(s)} \frac{p(s)}{q(s)} \right] y = \frac{a(s)q(s) + kb(s)p(s)}{a(s)q(s)} y,$$

и проблема устойчивости сводится к исследованию при $k \rightarrow \infty$ гурвицевости параметрического семейства полиномов

$$\varphi_k(s) = a(s)q(s) + kb(s)p(s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{a,q}(s) + \varphi_{b,p}(s). \quad (1.38)$$

Из (1.38) следует, что при $k \rightarrow \infty$ часть нулей исследуемого полинома совпадает с нулями полинома $\varphi_{b,p}(s)$, которые, конечно, должны иметь отрицательные вещественные части, и это *первое ограничение метода*. Далее, по условию физической осуществимости, степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, т.е.

$$\deg \varphi_k(s) < \deg \varphi_{a,q}(s), \quad (1.39)$$

и, следовательно, полином $\varphi_\infty(s)$ помимо нулей полинома $\varphi_{b,p}(s)$ имеет другие нули, которые также должны принадлежать открытой левой полуплоскости переменной s . Из анализа допредельного полинома (1.38) видно, что абсолютные значения его нулей $\lambda_i(k)$, не стремящихся при $k \rightarrow \infty$ к нулям полинома $\varphi_{b,p}(s)$, увеличиваются до бесконечности, так как при любом k должно выполняться равенство

$$\varphi_k(\lambda_k(k)) = a(\lambda_k(k))q(\lambda_k(k)) + kb(\lambda_k(k))p(\lambda_k(k)) = 0.$$

Ясно, что по соображению устойчивости эти нули при $k \rightarrow \infty$ должны уходить в бесконечность в левой открытой полуплоскости комплексной переменной s , и это — *второе ограничение данного метода*.

Для выражения условия (1.39) через параметры системы поделим с помощью алгоритма Евклида полином $\varphi_{a,q}(s) = a(s)q(s)$ на полином $\varphi_{b,p}(s)$. В результате получим равенство

$$a(s)b(s) = \Theta(s)b(s)p(s) + r(s), \quad (1.40)$$

где $\Theta(s)$ — частное, а $r(s)$ — остаток деления, причем его степень меньше степени делителя, т.е.

$$\deg r(s) < \deg (b(s)p(s)). \quad (1.41)$$

Используя равенство (1.40), представим полином $\varphi_k(s)$ в виде

$$\varphi_k(s) = b(s)p(s) \left[\Theta(s) + \frac{r(s)}{b(s)p(s)} + k \right].$$

Теперь ясно, что бесконечно растущие при $k \rightarrow \infty$ нули полинома $\varphi_k(s)$ стремятся к нулям полинома

$$\vartheta(s) = \Theta(s) + k,$$

так как по доказанному выше и в силу неравенства (1.41) имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(\lambda_i(k))}{b(\lambda_i(k))p(\lambda_i(k))} = 0.$$

Таким образом, к устойчивости полинома $\varphi_k(s)$ при $k \rightarrow \infty$ и устойчивом полиноме $\varphi_{b,p}(s)$ ведут только две возможности:

если $\deg \Theta(s) = 1$, т.е. $\Theta(s) = \Theta_2 s + \Theta_1$, то $\Theta_2 > 0$;

если $\deg \Theta(s) = 2$, т.е. $\Theta(s) = \Theta_3 s^2 + \Theta_2 s + \Theta_1$, то $\Theta_2 > 0$, $\Theta_3 > 0$.

Прочие же ситуации, в том числе и $\deg \Theta(s) > 2$, ведут к неустойчивости.

Пример 6. Устойчивость систем с обратной связью. Изложенную выше теорию проиллюстрируем простым примером, для чего рассмотрим объект, представленный на рис. 1.42. Параметры объекта λ_1 и λ_2 — необязательно положительные числа, т.е. объект не обязательно устойчив.

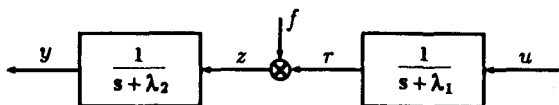


Рис. 1.42

Применим обратную связь по ошибке $e = y^s - y$ с передаточной функцией

$$W_R(s) = k \frac{p(s)}{q(s)}, \quad k = \text{const}, \quad \deg q(s) \geq \deg p(s).$$

В результате получим замкнутую систему управления, структурная схема которой приведена на рис. 1.43. Нетрудно установить, что связь между

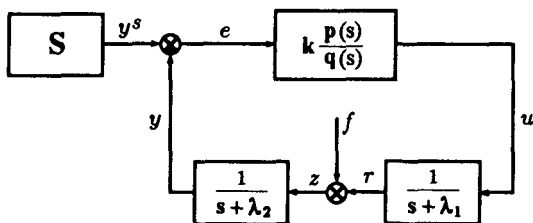


Рис. 1.43

переменными y , y^s и f дается выражением

$$\left[1 + \frac{kp(s)}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_1)q(s)} \right] y = \frac{f}{s + \lambda_2} + \frac{kp(s)}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_1)q(s)} y^s,$$

которое после приведения к общему знаменателю принимает вид

$$\left[(s + \lambda_2)(s + \lambda_1)q(s) + kp(s) \right] y(s) = q(s)(s + \lambda_1)f + kp(s)y^s.$$

Если в последнем равенстве параметр обратной связи $k \rightarrow \infty$, то в пределе получаем требуемое равенство

$$y = y^s.$$

Из теории также следует, что осмысленность предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ зависит от устойчивости двух полиномов:

$$\varphi_k(s) = (s + \lambda_2)(s + \lambda_1)q(s) + kp(s), \quad p(s).$$

Если, например, $p(s) = 1$, то с неизбежностью $q(s) = 1$, и все определяется устойчивостью полинома

$$\varphi_k(s) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 + k,$$

которая наступает только при выполнении неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0.$$

Ясно, что последнее неравенство может и не выполняться. Если же $p(s) = s + c$, где $c = \text{const} > 0$, то при $q(s) = 1$ устойчивость полинома

$$\varphi_k(s) = s^2 + [(\lambda_1 + \lambda_2) + k]s + \lambda_1 \lambda_2 + kc$$

наступает при любых параметрах λ_1 , λ_2 и достаточно большом значении коэффициента обратной связи k . При этом следует обратить внимание на то, что передаточная функция регулятора

$$W_R(s) = k \frac{p(s)}{q(s)} = k(s + c)$$

физически нереализуема, так как $\deg q(s) < \deg p(s)$, следовательно, в приведенных выше расчетах нужно, как минимум, положить

$$q(s) = s + q, \quad q = \text{const} > 0.$$

Тогда можно установить, что отвечающий за устойчивость замкнутой системы полином имеет вид

$$\varphi_k(s) = s^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + q)s^2 + [\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)q + k]s + \lambda_1 \lambda_2 q + kc,$$

а устойчивость наступает при достаточно больших значениях параметров k и q . Тем самым мы получим структуру замкнутой системы управле-

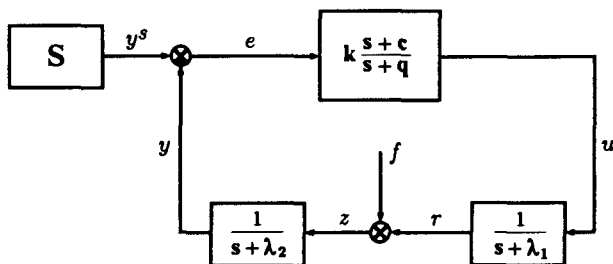


Рис. 1.44

ния (рис. 1.44), устойчивую при неограниченном увеличении коэффициента обратной связи ($k \rightarrow \infty$) и решающую поставленную задачу стабилизации.

1.7.3. О грубости систем с глубокой обратной связью

Рассмотрим влияние двух типов вариаций оператора объекта:

- регулярных вариаций, или вариаций параметров;
- нерегулярных вариаций или сингулярных возмущений, меняющих порядок объекта.

Для анализа последствий, которые имеют место при регулярных возмущениях, достаточно обратиться к полиному

$$\varphi_k(s) = a(s)q(s) + kb(s)p(s),$$

отвечающему за устойчивость замкнутой системы. Очевидно, что если полиномы $\varphi_{b,p}(s) = b(s)p(s)$ и $\varphi_k(s)$ гурвицевы (последний при достаточно большом значении k), то, в силу непрерывной зависимости спектра от параметров, малые изменения параметров полиномов $a(s)$ и $b(s)$ (т.е. параметров объекта) не меняют ситуацию качественно.

Иными словами,

- системы с глубокой обратной связью грубы по отношению к регулярным возмущениям.

При сингулярном возмущении меняется порядок объекта, например, вместо передаточной функции $W(s) = b(s)/a(s)$ мы имеем дело с передаточной функцией вида

$$W_\tau(s) = \frac{b(s)}{a(s)\tau(s)},$$

где $\tau(s)$ — некоторый устойчивый, но неизвестный полином степени не ниже первой, т.е. $\deg \tau(s) \geq 1$. Тогда за устойчивость замкнутой системы отвечает полином вида

$$\varphi_k^\tau(s) = \tau(s)a(s)q(s) + kb(s)p(s)$$

и ясно, что если имеет место неравенство $\deg \tau(s) \geq 2$, то для физически реализуемой обратной связи полином $\varphi_k^\tau(s)$ всегда неустойчив при $k \rightarrow \infty$. Надежда на устойчивость сохраняется только тогда, когда $\deg \tau(s) = 1$. Но и эта надежда призрачна, так как порядок реального объекта всегда выше порядка его математической модели и, следовательно,

- практическое использование глубокой обратной связи всегда ведет к неустойчивости.

Следовательно, значение коэффициента усиления, предельно допустимого по соображениям устойчивости, ограничено некоторым критическим значением k_{cr} , т.е. $0 \leq k \leq k_{cr}$. Последнее, разумеется, не позволяет полностью устранить влияние возмущения f на регулируемую координату y и, как следствие, добиться требуемого равенства $y = y^*$, т.е. не позволяет точно решать задачу стабилизации. Иными словами,

- системы с глубокой обратной связью негрубы по отношению к сингулярным возмущениям.

Пример 7. Неустойчивость систем с обратной связью по отношению к сингулярным возмущениям. Пусть в системе с обратной связью (Пример 6) имеется действующее указанным выше способом сингулярное возмущение с оператором

$$\tau(s) = \tau s + 1, \quad \tau = \text{const} > 0.$$

Тогда полином замкнутой системы управления описывается выражением

$$\varphi_k^r(s) = (\tau s + 1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_1)(s + q) + k(s + c)$$

и ясно, что ни при каком положительном значении τ он не может быть гурвицевым при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, построенная в Примере 6 система стабилизации неработоспособна при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что при $k < k_{cr}$ полином $\varphi_k^r(s)$ устойчив, однако требуемое равенство $y = y^s$ не выполняется и, более того, ошибка стабилизации зависит от возмущения $f(t)$.

Выясним, что принципиально нового вносит в полученные результаты дополнительная прямая связь по нагрузке в соответствии со схе-

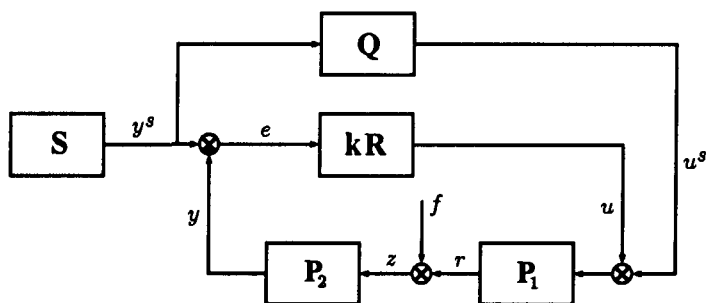


Рис. 1.45

мой, представленной на рис. 1.45. Отвечающие этой структуре уравнения имеют вид

$$y = P_2(f + r), \quad r = P_1(u + u^s), \quad u^s = Q y^s, \quad u = k R(y^s - y).$$

После исключения переменных u , u^s и r находим искомую связь между переменными y , y^s и f в виде

$$(1 + k P R) y = P_2 f + (k P R + P Q) y^s.$$

Из этого выражения следует, что рассматриваемая прямая связь по нагрузке не влияет на устойчивость системы, так как отвечающий за устойчивость полином $1 + k P R$ не зависит от оператора Q . Точность компенсации возмущения f также не зависит от оператора Q . Польза от прямой связи состоит в том, что при конечном коэффициенте усиления ($k \ll k_{cr}$) с помощью оператора Q можно повысить точность поддержания требуемого равенства $y = y^s$.

1.7.4. Метод пространства состояний в анализе систем с глубокой обратной связью

Решим задачу стабилизации объекта из Примера 6 (рис. 1.42) методами пространства состояний. Дифференциальные уравнения, описывающие объект в пространстве состояний, имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{y} + \lambda_2 y &= f + r, \\ \dot{r} + \lambda_1 r &= u.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Применим оператор $d/dt + \lambda_1$ к уравнению (1.42), полагая, конечно, дифференцируемость функции f . Тогда, используя стандартные обозначения

$$a_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad a_1 = \lambda_1 \lambda_2,$$

уравнение объекта можно записать следующим образом:

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = F + u, \quad (1.43)$$

где $F = \dot{f} + \lambda_1 f$ — возмущение, приведенное ко входу объекта, т.е. к управляющему входу. Пусть

$$\ddot{y}^s + a_2 \dot{y}^s + a_1 y^s = Y^s.$$

Вычтем из этого выражения уравнение объекта (1.43) и, так как $e = y^s - y$, получим в результате уравнение объекта в отклонениях:

$$\ddot{e} + a_2 \dot{e} + a_1 e = Y^s - F - u.$$

Определим декартовы координаты $x_1 = e$, $x_2 = \dot{e}$ и запишем уравнения объекта управления в фазовом пространстве (x_1, x_2) . Имеем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - u + Y^s - F.$$

При обратной связи

$$u = k\sigma, \quad \sigma = x_2 + cx_1, \quad c = \text{const} > 0,$$

получаем замкнутую систему управления вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - k(x_2 + cx_1) + Y^s - F. \quad (1.44)$$

При $k \rightarrow \infty$ последнее дифференциальное уравнение вырождается в алгебраическое уравнение $x_2 + cx_1 = 0$. После подстановки $x_2 = -cx_1$ в дифференциальное уравнение (1.44), получаем уравнение предельного движения в виде

$$\dot{x}_1 = -cx_1.$$

Поскольку это уравнение экспоненциально устойчиво, а

$$y^s - y = e = x_1,$$

то $y^s - y \rightarrow 0$, и задача стабилизации тем самым решена.

1.7.5. Геометрическая интерпретация систем с глубокой обратной связью

Если в (1.44) положить

$$a_1 = \text{const}, \quad a_2 = \text{const}, \quad Y^s - F = A = \text{const},$$

то уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - k(x_2 + c x_1) + A, \quad (1.45)$$

и полученным аналитическим результатам можно придать геометрическую интерпретацию (рис 1.46). При конечном значении параме-

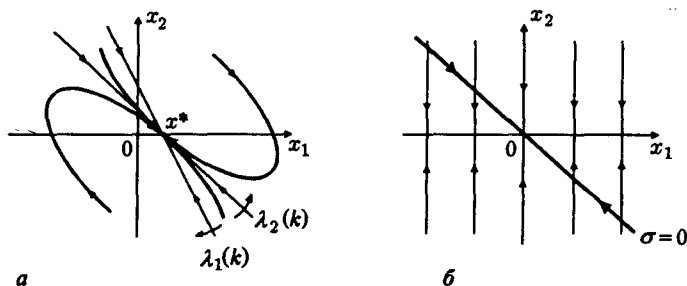


Рис. 1.46

тра k качественное поведение фазовых траекторий системы (1.45) иллюстрирует рис. 1.46а, на котором $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ — нули характеристического полинома $\varphi_k(s)$, определяющие парциальные движения, а $x^* = A/(kc + a_1)$ — статическая ошибка. При $k \rightarrow \infty$ прямая $\lambda_1(k)$ стремится к прямой $\sigma = 0$, прямая $\lambda_2(k)$ занимает вертикальное положение, а точка x^* стремится к нулю. В результате получаем фазовый портрет предельной системы, представленный на рис. 1.46б.

1.7.6. Влияние амплитудного ограничения на системы с глубокой обратной связью

Пусть в канале управления имеется ограничение на амплитуду сигнала (рис. 1.47). Тогда при использовании глубокой обратной связи наступает, в отличие от предыдущего случая, качественно новая ситу-

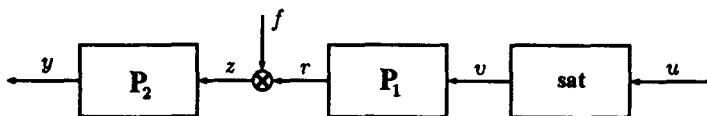


Рис. 1.47

ация. Поясним это. Пусть $\text{sat}(\cdot)$ описывает функцию насыщения или линейную зону с упорами (рис. 1.48а). Если $u = k\sigma$, то зависимость

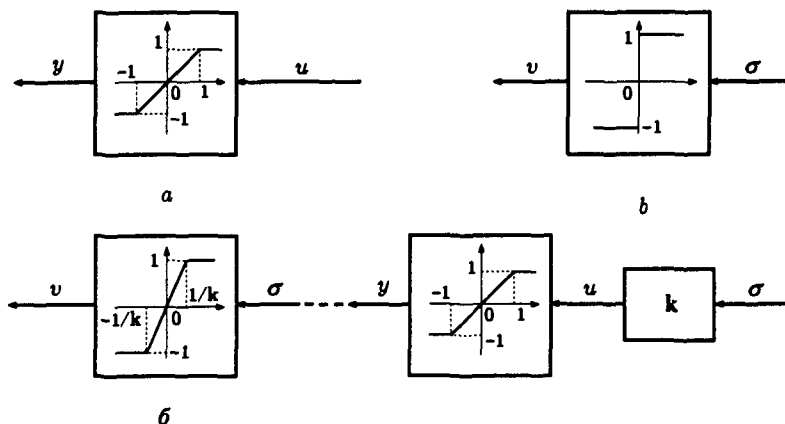


Рис. 1.48

$v(\sigma)$ подобна $\text{sat}(u)$, но с измененной зоной линейности (рис. 1.48б). Ясно, что при $k \rightarrow \infty$ функция $\text{sat}(k\sigma)$ превращается в функцию идеального реле (рис. 1.48в). В результате взамен гладкого управления $u = k\sigma$ получаем разрывное управление $u = \text{sgn } \sigma$ и вместо линейной системы — релейную систему, фрагмент которой показан на рис. 1.49.

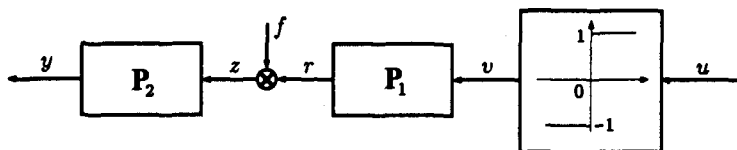


Рис. 1.49

Поведение релейных систем существенно отличается от поведения линейных систем. Некоторые важные особенности поведения релейных систем рассматриваются в следующей главе.

Подводя итог обсуждению темы, можно сделать следующий вывод:

- не существует линейного регулятора, робастно решающего задачу стабилизации при наличии неизвестного внешнего возмущения.

1.8. Библиографический комментарий

Работы [13, 56, 58, 77, 78, 95–97] заложили теоретическую базу классической теории автоматического регулирования. Действительно, английский ученый Дж. Максвелл (J. Maxwell) впервые в [95] матема-

тически исследовал вопрос об устойчивости пары “паровая машина — регулятор” и сформулировал критерий асимптотической устойчивости линейного уравнения третьего порядка.

Русский математик И.А. Вышнеградский в статье [13] уточнил модель Максвелла и провел исчерпывающее качественное исследование произвольной трехмерной системы. Он впервые поставил вопрос о качестве переходного процесса в системе автоматического управления и математически описал границы областей в пространстве параметров уравнения системы с различным типом качественного поведения его решений, дал практические рекомендации по настройке регулятора Дж. Уатта (J. Watt).

Словацкий инженер А. Стодола (A. Stodola) сформулировал необходимые условия устойчивости произвольного полинома и привлек внимание немецкого математика А. Гурвица (A. Hurwitz) к проблеме необходимых и достаточных условий устойчивости. Эта задача была решена Гурвицем в 1895 г. с использованием результатов Ш. Эрмита (Sh. Hermitte), но еще ранее, в 1877 г., эквивалентные условия устойчивости были найдены Е. Рауссом (E.J. Routh) [97].

Наиболее общие методы исследования устойчивости и основные понятия современной теории устойчивости движения даны А.М. Ляпуновым в диссертации [56].

Частотные методы и структурные схемы стали широко применяться в теории управления после работ Г. Найквиста (H. Nyquist) [96], Г. Блейка (H. Black) [77], Г. Боде (H. Bode) [78] и А.В. Михайлова [58]. Ученые провели исчерпывающее исследование устойчивости замкнутых обратной связью систем по частотным характеристикам объекта и регулятора.

Основные постановки задач и базовые принципы теории автоматического регулирования имеют глубокие корни. Считается, что американец М. Бултон (M. Boulton) в 1788 г. и француз Ж.-В. Понселе (J.-V. Poncelet) в 1826 г. ввели в научный обиход принцип разомкнутого регулирования. Авторство принципа обратной связи датируется 1788 г. и приписывается американцу Дж. Уатту. Интегральную компоненту в обратную связь ввел в 1837 г. француз Л. Молини (L. Molinie), производную — немцы, братья Уильям и Вернер Сименсы (William & Werner Siemens) в 1844 г. Регулирование по нагрузке впервые было предложено Ч. Портером (C.T. Porter) в 1908 г., релейная обратная связь, по-видимому, впервые использовалась Ч. Шофилдом (C.L. Schofield) еще в 1836 г., пропорциональное регулирование применялось в 1870 г. американцем Д. Вудбери (D.A. Woodbury).

С современной трактовкой методов прямого управления можно ознакомиться по работам [1, 6, 11, 12, 64, 67]. Принцип двухканальности изложен в [61, 62, 67]. Метод Кулебакина подробно описан в [49, 52]. Теория и методы большого коэффициента усиления, по-видимому, впервые систематически изложены в монографии [57].

Глава 2

Некоторые принципы построения нелинейных регуляторов

Релейные системы являются простейшим видом принципиально нелинейных динамических систем, они описываются дифференциальными уравнениями с разрывными характеристиками и потому часто их называют разрывными системами. В теории автоматического управления интерес к исследованию разрывных систем связан с использованием сервомеханизмов типа полный вперед—полный назад, а также ввиду наличия амплитудных ограничений на сигналы.

В этой главе мы рассматриваем некоторые специальные вопросы теории релейных систем, представляющие интерес в общем контексте монографии и прежде всего в связи с анализом возможностей релейной стабилизации в условиях неопределенности.

2.1. Релейная обратная связь

2.1.1. Основные понятия

Релейная система — это система, в структурной схеме которой имеется хотя бы один релейный элемент (РЭ). В теории автоматического управления релейной считают, как правило, обратную связь, изображенную на рис. 2.1, на котором $\text{sgn}(\cdot)$ — нелинейная операция, устанав-

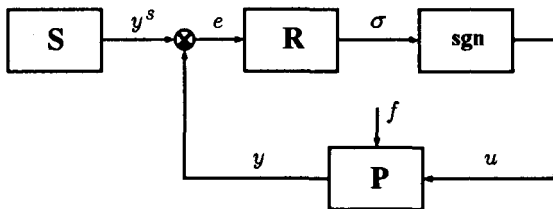


Рис. 2.1

вливающая связь между управлением u и выходом σ регулятора R по формуле $u = \text{sgn } \sigma$. Если релейных элементов несколько, то систему называют каскадной релейной системой.

Характерная особенность РЭ — разрывность, что вносит существенную специфику в методы анализа и синтеза релейных систем, а

также накладывает отпечаток на их качественное поведение и функциональные возможности. Типичные модели релейного элемента изображены на рис. 2.2.

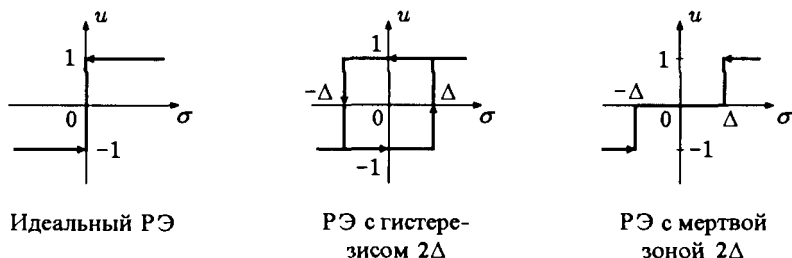


Рис. 2.2

Необходимость рассмотрения релейной системы естественно возникает, когда в системе управления используется реальный привод (силовой механизм типа “полный вперед — полный назад”) либо релейная система выступает в качестве удобной абстракции, например, в виде предельной системы (рис. 2.3) для системы с глубокой обратной связью при наличии амплитудного ограничения в канале управления.

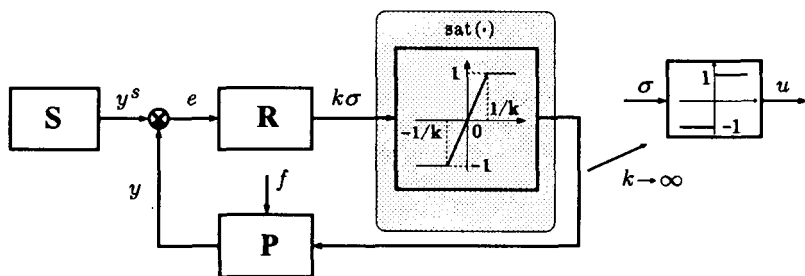


Рис. 2.3

Пример 8. Простейшая релейная система. Рассмотрим простейшую следящую систему первого порядка, представленную на рис. 2.4.

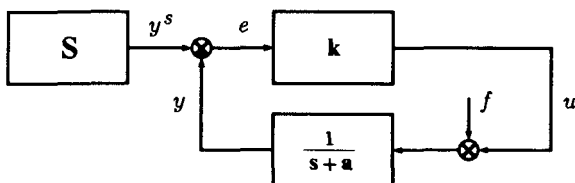


Рис. 2.4

Движение такой системы можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y} + ay &= u + f && \text{— объект,} \\ u &= ke && \text{— регулятор,} \\ e &= y^s - y && \text{— ошибка слежения.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для анализа свойств системы (2.1) удобно переписать уравнение ее движения относительно “ошибки”. Прямыми вычислениями находим

$$\dot{e} = \dot{y}^s - \dot{y} = \dot{y}^s - u - f - ay \Big|_{y=y^s-e} = -(k+a)e + \dot{y}^s + a\dot{y}^s - f. \quad (2.2)$$

Пусть $e(t, k)$ — какое-либо решение уравнения (2.2). Ясно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(t, k) = 0$$

при любом параметре a , “практически” произвольном задании $y^s(t)$ и возмущении $f(t)$. Пусть теперь в канале обратной связи исследуемой системы

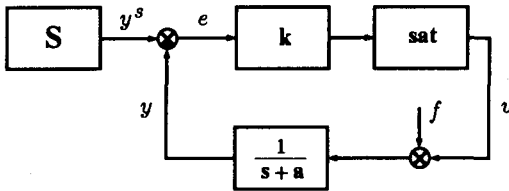


Рис. 2.5

имеется ограничение типа $\text{sat}(\cdot)$ — насыщения (рис. 2.5). Тогда при $k \rightarrow \infty$ возникает качественно новая ситуация и “уравнение в ошибках” имеет вид

$$\dot{e} = -ae - \text{sat}(ke) + F,$$

где для удобства использовано обозначение

$$F = \dot{y}^s + ay^s - f.$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ имеем дело с релейной системой

$$\dot{e} = -ae - \text{sgn } e + F. \quad (2.3)$$

Система (2.3) разительно отличается от системы (2.2). Ясно, что для неустойчивого объекта (т.е. когда $a < 0$) задача слежения решается системой (2.3) только при выполнении неравенства

$$|ae + F| < 1,$$

иначе говоря, только при определенных начальных условиях и только для ограниченного возмущения F . Следовательно,

- релейной обратной связью стабилизируются более узкие, по сравнению с линейной обратной связью, классы объектов и только при действии ограниченных по амплитуде возмущений.

2.1.2. Скользящий режим в точке

В релейных системах часто возникает скользящий режим. Для пояснения приведем следующий пример:

$$\dot{e} + ae = -\operatorname{sgn} e, \quad a = \operatorname{const}. \quad (2.4)$$

Фазовое пространство системы (2.4) одномерно (рис. 2.6).

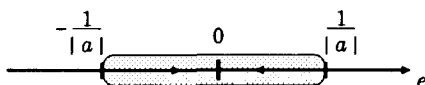


Рис. 2.6

Из (2.4) нетрудно понять, что неустойчивый объект (т.е. когда $a < 0$) стабилизируется в нуле для любых начальных условий $e(0)$ из интервала $(-1/|a|, 1/|a|)$, тогда как устойчивый объект (т.е. $a \geq 0$) стабилизируется в нуле на всей прямой для любых начальных условий $(-\infty, \infty)$. В окрестности точки 0 фазовые траектории системы (2.4) направлены навстречу друг другу и, следовательно, фазовая точка не может покинуть точку 0. Решение $e = 0$ не является “классическим” и должно пониматься в каком-то ином смысле, например по А.Ф.Филиппову [72]. Такому решению отвечают бесконечно частые переключения релейного элемента. Эти переключения ассоциируются со скользящим режимом.

Исследуем скользящий режим в системе (2.4) более подробно. Для этого представим ее геометрически в виде многообразия на плоскости (e, \dot{e}) (рис. 2.7). Слева от нуля движение происходит по прямой $\dot{e} + ae = 1$, а справа — по прямой $\dot{e} + ae = -1$. Отрезок $[1, -1]$ на оси $e = 0$ есть отрезок скользящего режима, когда скачком меняется уравнение движения. Выясним, что произойдет с системой при появлении задержки в переключениях РЭ. Задержка в переключении может быть пространственной или временной. В первом случае (рис. 2.8а) релейный элемент имеет петлю гистерезиса шириной 2Δ и для него используем обозначение $\operatorname{sgn}_\Delta e$, а во втором случае (рис. 2.8б) переключение происходит через время τ после смены знака входным сигналом. Соответствующий элемент обозначен через $\operatorname{sgn}_\tau e = \operatorname{sgn} e_\tau$, где τ — постоянная времени запаздывания.

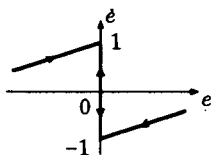


Рис. 2.7

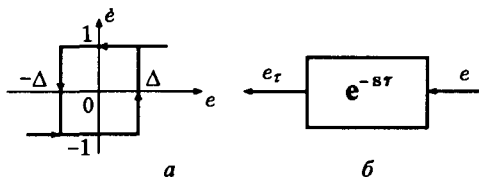


Рис. 2.8

Уравнения движения релейной системы при наличии задержки даются выражениями $\dot{e} + ae = -\text{sgn}_{\Delta} e$ и $\dot{e} + ae = -\text{sgn}_{\tau} e$, которым соответствуют рис. 2.9а и 2.9б. При всем отличии в существе явле-

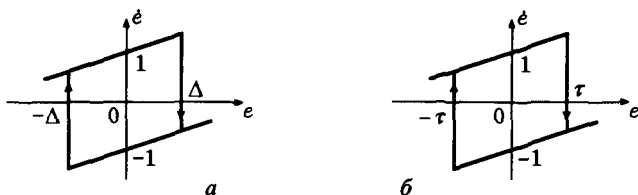


Рис. 2.9

ния задержки качественно картина поведения систем в случаях а и б на рис. 2.9 схожая: скользкий режим в точке разрушен, возникает режим переключений с предельным циклом в окрестности нуля, “размер” которого по входной переменной пропорционален постоянным Δ или τ , характеризующим задержку. Это позволяет нам сделать следующий вывод:

- скользкий режим в точке не является прочным, и, следовательно, задача релейной стабилизации не имеет робастного решения.

В заключение приведем структурные схемы релейной системы с пространственной (рис. 2.10а) и временной (рис. 2.10б) задержками в переключениях.

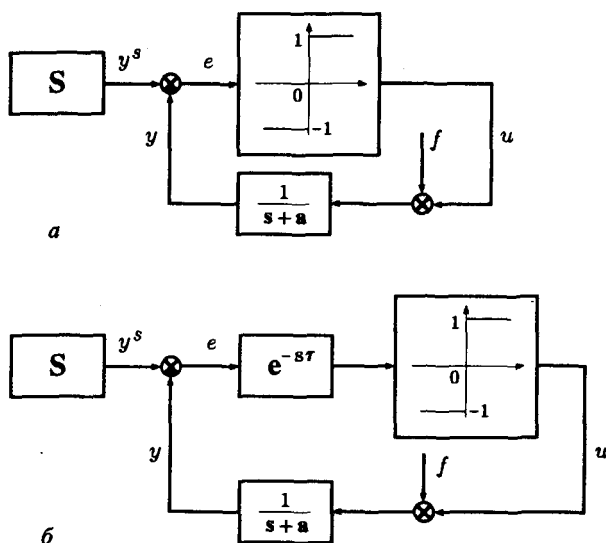


Рис. 2.10

Пример 9. Релейная стабилизация системы второго порядка. Рассмотрим более сложную задачу, а именно: исследуем особенности релейной обратной связи, стабилизирующей объект второго порядка (рис. 2.11).

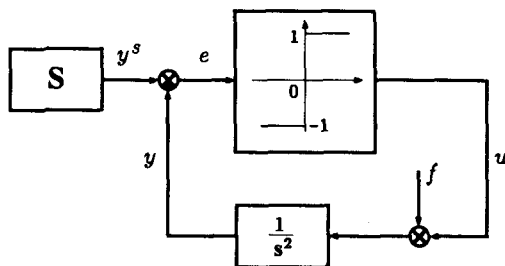


Рис. 2.11

Уравнение движения такой системы при $y^s \equiv 0$, очевидно, имеет вид

$$\ddot{e} = -\operatorname{sgn} e - f. \quad (2.5)$$

Ясно, что необходимым условием стабилизируемости является неравенство $|f| < 1$, ограничивающее класс допустимых возмущений. Если это условие выполнено, то вместо (2.5) без потери общности можно рассматривать однородное уравнение

$$\ddot{e} = -\operatorname{sgn} e. \quad (2.6)$$

2.1.3. Режим переключений

Фазовый портрет системы (2.6) образуется "сшиванием" по оси $e = 0$ фазовых траекторий из двух полуплоскостей:

$$\ddot{e} = -1 \quad (I), \quad \ddot{e} = 1 \quad (II).$$

Фазовые траектории — суть отрезки парабол с вершинами на оси $\dot{e} = 0$ (рис. 2.12), и поэтому система (2.6) является консервативной.

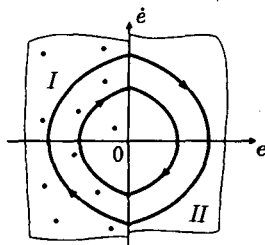


Рис. 2.12

При наличии пространственного или временного запаздывания изменения фазовых портретов показаны на рис. 2.13а и 2.13б соответственно, из которых видно, что в рассматриваемых системах необратимо наступает неустойчивость. Иными словами, релейные системы

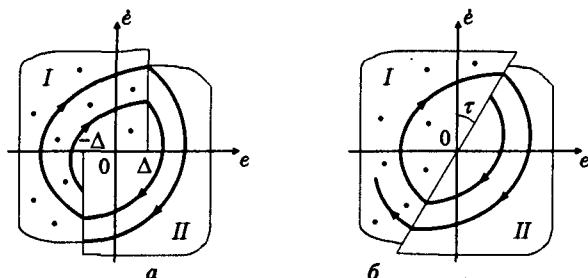


Рис. 2.13

с высоким относительным порядком негрубы. Напомним, что относительный порядок линейного стационарного объекта равен разности степеней полиномов знаменателя и числителя передаточной функции.

Из Примера 9 можно сделать следующий вывод:

- для придания грубости релейной системе следует уменьшить до единицы относительный порядок передаточной функции от входа релейного элемента до его выхода.

Пример 10. Релейная стабилизация объекта с относительным порядком, равным двум. Рассмотрим теперь релейную систему стабилизации объекта с относительным порядком, равным двум (рис. 2.14). Вновь

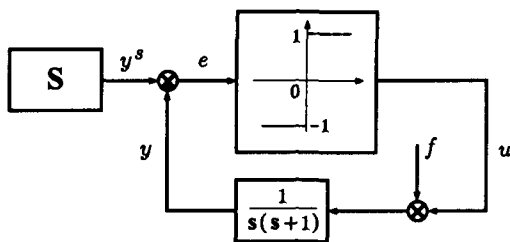


Рис. 2.14

без потери общности полагаем $y^s \equiv 0$. Тогда уравнение движения системы на рис. 2.14 относительно координаты ошибки имеет вид

$$\ddot{e} + \dot{e} + \operatorname{sgn} e = -f. \quad (2.7)$$

Необходимое условие стабилизируемости в нуле дается очевидным неравенством $|f| < 1$. Это неравенство вместе с устойчивостью в нуле уравнения

$$\ddot{e} + \dot{e} + \operatorname{sgn} e = 0 \quad (2.8)$$

гарантируют стабилизируемость системы (2.7) в нуле.

Для анализа устойчивости уравнения (2.8) используем геометрические представления, т.е. метод фазовой плоскости. Ход фазовых траекторий уравнения (2.8) при $e > 0$, когда действует уравнение

$$\ddot{e} + \dot{e} + 1 = 0,$$

и при $e < 0$, когда действует уравнение

$$\ddot{e} + \dot{e} - 1 = 0,$$

показаны на рис. 2.15а и 2.15б соответственно. В результате “сшивания” фазовых траекторий имеем итоговый фазовый портрет системы, изображенный на рис. 2.15в. Из анализа этого фазового портрета становится ясно,

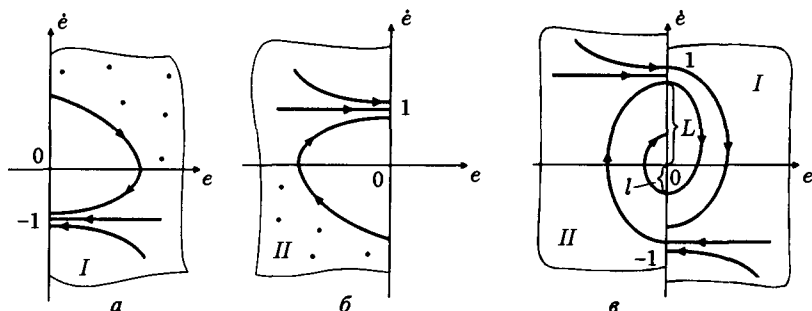


Рис. 2.15

что $l/L < 1$, а значит каждая траектория “скручивается” к началу координат. Этот же факт можно установить аналитически с помощью функции Ляпунова

$$v = |e| + \frac{\dot{e}^2}{2}.$$

Ее производная в силу уравнения (2.8) имеет вид

$$\dot{v} = \dot{e} \operatorname{sgn} e + \dot{e} \ddot{e} = \dot{e} \operatorname{sgn} e + \dot{e} (-\dot{e} - \operatorname{sgn} e) = -\dot{e}^2.$$

Поскольку многообразие $\{\dot{e} = 0\} \setminus \{0\}$ не содержит целых траекторий, то нуль уравнения (2.8) асимптотически устойчив.

2.1.4. О прочности режима переключения

Убедимся, что устойчивость нуля уравнения (2.8) $\ddot{e} + \dot{e} + \operatorname{sgn} e = 0$ не сохраняется при наличии пространственной или временной задержки в переключении. В самом деле, пусть имеет место пространственная задержка величиной Δ . Тогда вместо уравнения (2.8) поведение системы можно описать уравнением

$$\ddot{e} + \dot{e} + \operatorname{sgn}_{\Delta} e = 0 \quad (2.9)$$

и проиллюстрировать рис. 2.16. После “сшивания” фазовых траекторий по границам разрыва получаем итоговый фазовый портрет уравнения (2.9), в котором нетрудно усмотреть существование предельного цикла (рис. 2.16в). Следовательно, релейная система стабилиза-

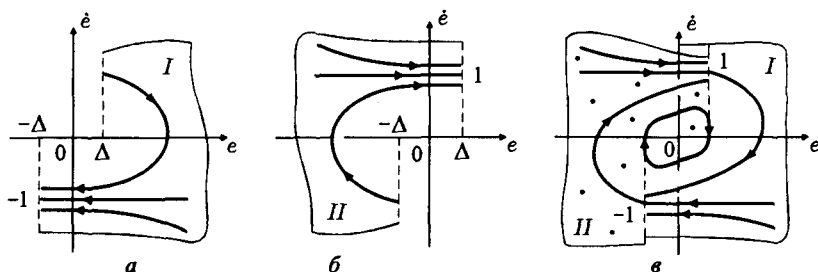


Рис. 2.16

ции (2.8) является негрубой, так как качественно меняет поведение при вариации условий задачи.

2.1.5. Релейная стабилизация объекта с самовыравниванием

Интересно выяснить, остается ли справедливым вывод, сделанный в предыдущем разделе, для более простых объектов. Рассмотрим возможности релейной обратной связи при стабилизации объекта с самовыравниванием, т.е. объекта, асимптотически устойчивого при ну-

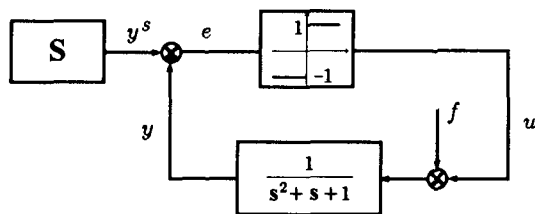


Рис. 2.17

левом управлении. Для простоты ограничимся объектом, изображенным на рис. 2.17. При $y^s \equiv 0$ исследованию подлежит уравнение

$$\ddot{e} + \dot{e} + e + \operatorname{sgn} e = -f.$$

Ясно, что при выполнении условия $|f| < 1$ исследование стабильности сводится к анализу устойчивости свободных колебаний системы управления, описываемых уравнением

$$\ddot{e} + \dot{e} + e + \operatorname{sgn} e = 0. \quad (2.10)$$

Вновь используем для этой цели геометрические представления, т.е. фазовую плоскость. Фазовые траектории уравнения (2.10) состоят из отрезков фазовых траекторий уравнения

$$\ddot{e} + \dot{e} + e + 1 = 0,$$

действующего при $e > 0$ (рис. 2.18а), и фазовых траекторий уравнения

$$\ddot{e} + \dot{e} + e - 1 = 0,$$

действующего при $e < 0$ (рис. 2.18б). После “сшивания” траекторий по границе разрыва $e = 0$ получим итоговый фазовый портрет (рис. 2.18в), на котором видна тенденция к скручиваемости траекторий системы к началу координат. Последнее обусловлено тем, что

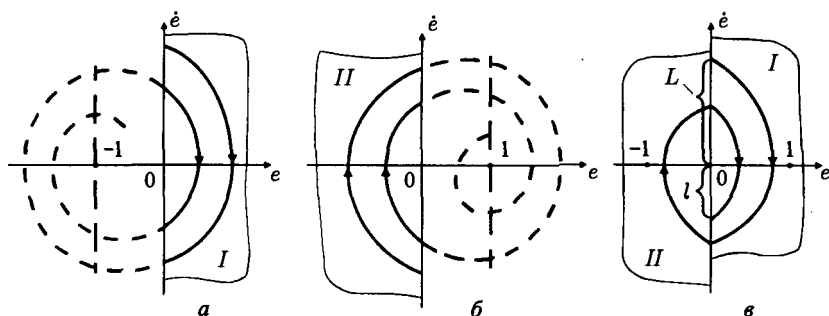


Рис. 2.18

$l/L < 1$. Аналитическое исследование устойчивости уравнения (2.10) проводится с использованием функции Ляпунова $v = \dot{e}^2 + e^2 + |e|$, производная которой $\dot{v} = -\dot{e}^2$.

При наличии пространственного запаздывания Δ в переключениях уравнения (2.10) фазовые портреты претерпевают естественные изменения и принимают вид, показанный на рис. 2.19. На рис. 2.19в можно

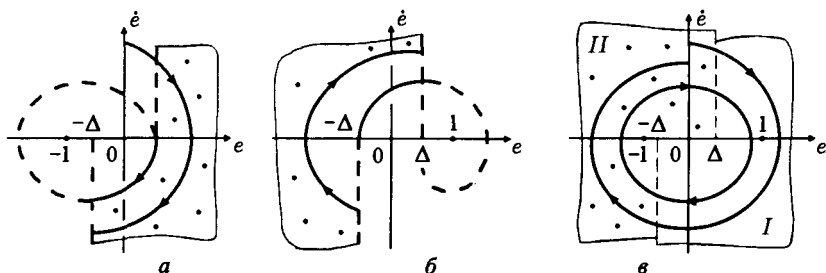


Рис. 2.19

наблюдать предельный цикл в окрестности нуля, что эквивалентно неглубокой исследуемой релейной системы.

2.1.6. Стабилизация объекта с высоким относительным порядком

Рассмотрим произвольный линейный объект с относительным порядком $r = n - m$, где $r \geq 3$, n и m — порядок полинома знаменателя и числителя соответственно (например, объект, приведенный на рис. 2.20).

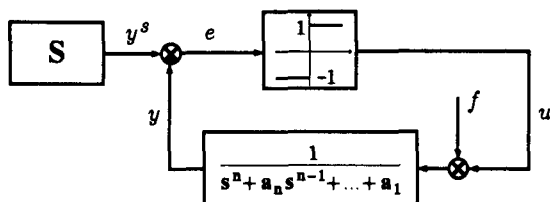


Рис. 2.20

При $y^s \equiv 0$ исследованию подлежит устойчивость нуля уравнения

$$e^{(n)} + a_n e^{(n-1)} + \dots + a_1 e + \operatorname{sgn} e = -f.$$

Вновь при условии

$$|f| < 1$$

все сводится к устойчивости свободных колебаний

$$e^{(n)} + a_n e^{(n-1)} + \dots + a_1 e + \operatorname{sgn} e = 0. \quad (2.11)$$

Но нуль последнего уравнения всегда неустойчив при $n \geq 3$, что следует из неустойчивости характеристического уравнения, соответствующего ситуации, возникающей после замены релейного элемента $\operatorname{sgn} e$ на линейный усилитель ke при достаточно большом значении коэффициента усиления k . О правомерности такой замены при анализе устойчивости нуля мы говорили выше.

2.1.7. Робастная стабилизация: разрывность, непрерывность и информация о состоянии

Рассмотренные выше случаи позволяют проследить очевидную зависимость между непрерывностью, разрывностью и количеством информации, необходимой для стабилизации линейных объектов. Приведем характерные примеры. Стабилизируем объект

$$\ddot{e} + a_2 \dot{e} + a_1 e = u \quad (2.12)$$

с помощью линейной обратной связи $u = -ke$ при выполнении соотношений $a_1 a_2 > k > 0$, $a_1 > 0$. Ни при каких параметрах a_1 , a_2 объект (2.12) не стабилизируется в нуле релейной обратной связью

$u = -\text{sgn } e$. Если, однако, в закон релейной обратной связи ввести дополнительную информацию о производных \dot{e} и \ddot{e} , например

$$u = -\text{sgn}(e + \dot{e}), \quad u = -\text{sgn}(e + \dot{e} + \ddot{e}),$$

то устойчивость нуля при $a_1, a_2 > 0$ будет обеспечена. Иными словами,

- существуют ситуации, когда переход от разрывного элемента к непрерывному, в частности, к линейному элементу не только повышает прочность системы управления, но и позволяет решить задачу при меньшем объеме информации о ее состоянии.

Аналогичная зависимость существует между прочностью системы и непрерывностью ее нелинейных элементов. Для пояснения рассмотрим уравнение

$$\dot{e} + ae + \text{sgn } e = 0, \quad a = \text{const} > 0.$$

На плоскости (e, \dot{e}) ему соответствует рис. 2.21а, со скользящим режимом в нуле. При наличии запаздывания τ в переключении разрывного элемента имеем дело с уравнением

$$\dot{e} + ae + \text{sgn } e_\tau = 0, \quad e_\tau = e(t - \tau),$$

которому соответствует рис. 2.21б. На этом рисунке видно возникновение режима переключения с предельным циклом. При достаточно малом запаздывании τ можно прибегнуть к аппроксимации $e_\tau \cong e - \tau\dot{e}$ и вместо $\text{sgn } e_\tau$ использовать разрывной элемент вида $\text{sgn}(e - \tau\dot{e})$, что не меняет качественную картину явления (рис. 2.21в). Ситуация ме-

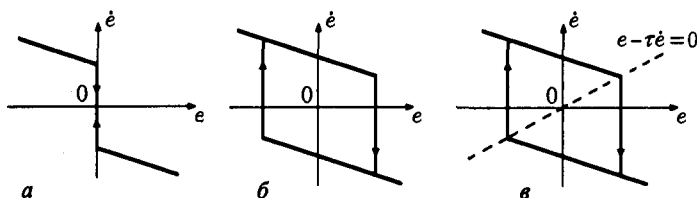


Рис. 2.21

няется качественно, если реле заменить наклоном, т.е. от разрывного элемента перейти к непрерывному элементу, например к элементу типа насыщения.

Тогда для анализа устойчивости в нуле следует иметь дело с линейным уравнением

$$\dot{e} + ae + ke_\tau = 0, \quad k = \text{const} > 0,$$

которому соответствует характеристический квазиполином $s + a + ke^{-s\tau} = 0$. При достаточно большом значении коэффициента усиления k у этого уравнения всегда есть нули $\lambda(k)$ в правой комплексной

полуплоскости, стремящиеся при $k \rightarrow \infty$ к нулям уравнения $e^{-s\tau} = 0$. Последние, очевидно, имеют положительные вещественные части. С другой стороны, если k конечно, а τ мало, то с помощью аппроксимации $e^{-s\tau} \approx 1 - s\tau$ анализ устойчивости можно свести к исследованию полинома первого порядка $(1 - k\tau)s + a + k = 0$. Очевидно, что при выполнении неравенств $1 - k\tau > 0$, $a + k > 0$ наступает устойчивость, т.е. предельный цикл исчезает.

Подводя итог исследованию, можно сделать вывод о том, что релейная стабилизация годится только для объектов с относительным порядком $r \leq 2$. Поскольку стабилизация при $r = n - m = 2$ была рассмотрена выше, то теперь можно исследовать особенности релейной стабилизации при $r = n - m = 1$.

2.1.8. Робастная стабилизация объекта с первым относительным порядком

Рассмотрим релейную систему управления, структурная схема которой изображена на рис. 2.22. В данном случае относительный порядок

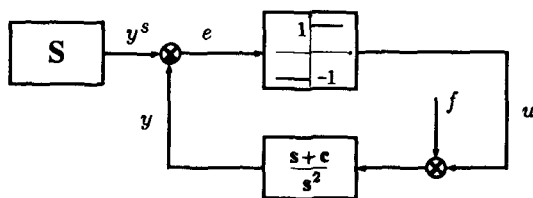


Рис. 2.22

объекта $r = m - n = 2 - 1 = 1$. Для введения переменных состояния удобно объект управления представить в виде схемы, приведенной на рис. 2.23. Тогда поведение исследуемого объекта управления можно

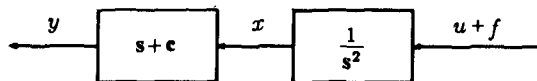


Рис. 2.23

описать уравнениями

$$\ddot{x} = u + f, \quad y = \dot{x} + cx, \quad c = \text{const.}$$

После введения переменных состояния по формулам $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ и при необременительном условии $y' \equiv 0$ получаем уравнения движения рассматриваемой системы в стандартном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\text{sgn}(x_2 + cx_1) + f. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При выполнении условия $|f| < 1$ исследование стабилизируемости системы (2.13) сводится к анализу устойчивости нуля уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sgn}(x_2 + cx_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для исследования этой системы построим ее фазовый портрет, который получается в результате “сшивания” по линии $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$ фазовых траекторий двух систем

$$\Sigma_1 = : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \quad \Sigma_2 = : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases}$$

действующих, соответственно, в полуплоскостях $\sigma < 0$ и $\sigma > 0$.

2.1.9. Скользящий режим на отрезке

Траектории систем Σ_1, Σ_2 — суть параболы, которые при $c > 0$ расположены так, как это показано на рис. 2.24. На рисунках обозна-

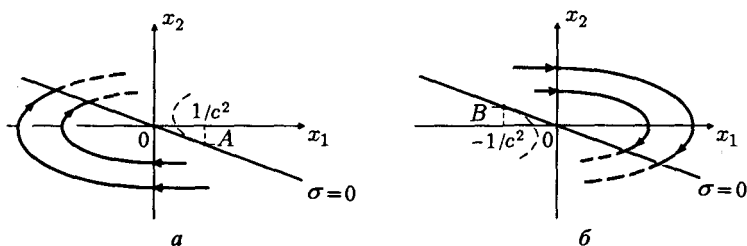


Рис. 2.24

чены две точки A и B , являющиеся точками касания фазовых траекторий систем Σ_1 и Σ_2 прямой линии $\sigma = 0$. Координаты этих точек определяются из условий касания ($\sigma = 0, \dot{\sigma} = 0$): $A = (1/c^2, -1/c)$, $B = (-1/c^2, 1/c)$. После “сшивания” фазовых траекторий получаем итоговый фазовый портрет, изображенный на рис. 2.25.

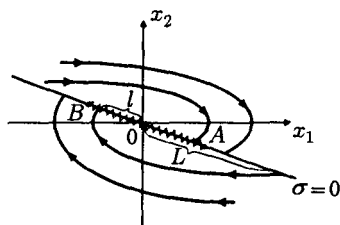


Рис. 2.25

Из рис. 2.25 можно сделать выводы о том, что:

- отношение $l/L < 1$ и, следовательно, изображающая точка за конечное число переключений релейного элемента попадает на отрезок AB ;
- на отрезке AB идет “встречное” движение по фазовым траекториям систем Σ_1 и Σ_2 и, следовательно, изображающая точка не может покинуть отрезок AB , т.е. возникает скользящий режим.

Для нахождения уравнения движения в скользящем режиме проведем эвристические рассуждения. В режиме скольжения

$$\sigma = x_2 + cx_1 = 0,$$

но по определению

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}.$$

Значит, за уравнение скольжения можно принять уравнение вида

$$\dot{x} + cx = 0.$$

При $c > 0$ оно экспоненциально устойчиво, что влечет за собой устойчивость рассматриваемой релейной системы.

2.1.10. Реальный скользящий режим на отрезке

Пусть в релейной системе (2.14) имеется пространственное запаздывание Δ в переключении релейного элемента, т.е. фактически мы имеем дело с системой

$$\Sigma^\Delta =: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\operatorname{sgn}_\Delta(x_2 + cx_1). \end{cases} \quad (2.15)$$

Для получения ее фазового портрета следует наложить фазовые портреты систем Σ_1^Δ (рис. 2.26а) и Σ_2^Δ (2.26б). Тогда в результате мы

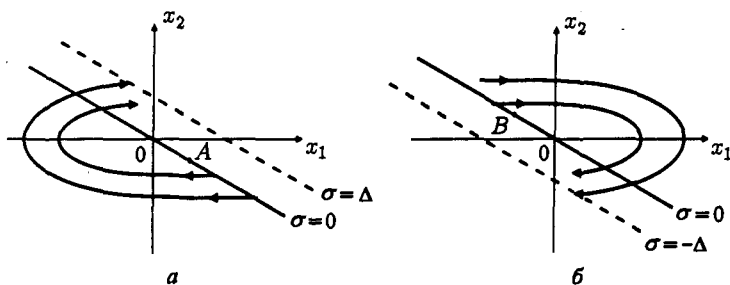


Рис. 2.26

будем иметь фазовый портрет системы (2.15). Этот фазовый портрет приведен на рис. 2.27.

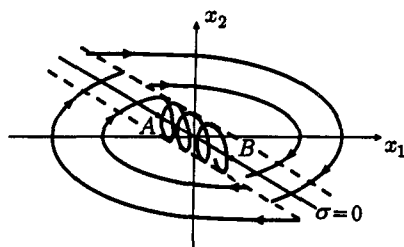


Рис. 2.27

Из анализа рис. 2.27 видно, что:

- в окрестности начала координат возникает предельный цикл;
- скользящий режим превращается в режим переключений, называемый реальным скользящим режимом; последний характеризуется конечной частотой переключений релейного элемента и конечной “амплитудой” отклонения изображающей точки от линии $\sigma = 0$.

Следовательно, рассмотренная релейная система управления, как и все рассмотренные до этого, не является прочной, т.е. при наличии неидеальности переключений, из асимптотически устойчивой системы она превращается в диссипативную.

2.1.11. Релейная стабилизация обобщенного объекта

Рассмотрим произвольный объект с относительным порядком, равным единице, и релейную систему управления таким объектом, представленную на рис. 2.28. Передаточная функция $W(s) = b(s)/a(s)$ в

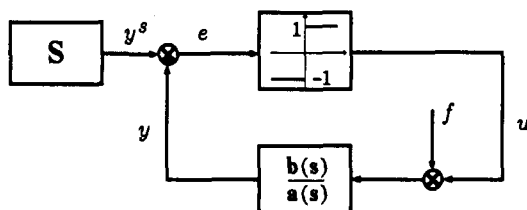


Рис. 2.28

схеме на рис. 2.28 задается отношением двух полиномов

$$\begin{aligned} b(s) &= b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_1, \\ a(s) &= s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1, \end{aligned}$$

откуда следует, что устойчивость системы в нуле при условии $|f| < 1$ возможна только тогда, когда полином $b(s)$ гурвицев, а полином $a(s)$ не имеет нулей в правой полуплоскости переменной s и не более двух его нулей лежит на мнимой оси плоскости переменной s . Подобные объекты называют минимально фазовыми.

Из сказанного выше следует вывод о том, что релейная обратная связь является стабилизирующей, если:

- объект минимально фазовый;
- имеет относительный порядок $r \leq 2$;
- задание и возмущение равномерно ограничены.

Кроме того, релейные системы не являются прочными, а их решения, а значит, и их свойства зависят от возмущений.

2.2. Стабилизация объекта с неопределенным оператором

Качественно новую ситуацию в объекте управления создает неопределенность, в частности, неопределенность параметрическая. Для решения задачи стабилизации необходимо привлечение новых методов синтеза и алгоритмов управления. Рассмотрению некоторых уже известных подходов к этой проблеме и посвящен настоящий раздел.

2.2.1. Общие положения

При расчете обратной связи обычно используется математическая модель объекта с оператором P (рис. 2.29а), однако, как правило, оператор объекта управления известен с некоторой погрешностью ΔP , и поэтому фактически стабилизируется объект с неопределенным оператором $P + \Delta P$ (рис. 2.29б). Если погрешность ΔP в определен-

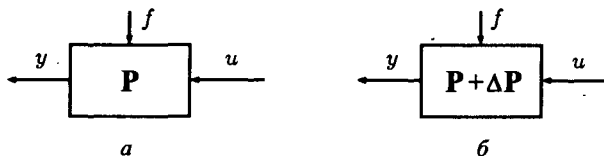


Рис. 2.29

ном смысле мала, а регулятор R , рассчитанный по точной модели P , делает замкнутую систему (рис. 2.30а) прочной, то тот же самый регулятор годится и для стабилизации неопределенного объекта (рис. 2.30б). Математическим выражением прочности замкнутой системы управления служит сохранение качественного поведения динамической системы при вариации условий задачи, в частности, при малых регулярных и сингулярных возмущениях.

Ситуация качественно меняется, когда в описании объекта неопределенность ΔP не мала и такова, что поведение систем управления, изображенных на рис. 2.30, принципиально различается. Например, система на рис. 2.30а устойчива, а на рис. 2.30б — неустойчива, и так далее.

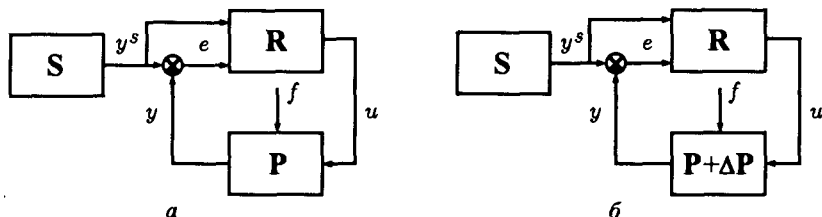


Рис. 2.30

Главная трудность в подобных ситуациях состоит в том, что погрешность ΔP и, следовательно, информация о ней не могут быть использованы в алгоритмах управления. Иными словами, обратная связь, стабилизирующая неопределенный объект, либо должна сообщать системе очень высокий запас прочности, что едва ли возможно, либо должна сама каким-то образом меняться в процессе управления, улавливая информацию о факторах неопределенности.

Во всяком случае стандартные методики синтеза управления, основанные на точном знании оператора объекта, теперь неприменимы. Например, принципы регулирования по нагрузке и по возмущению уже не приводят к желаемому результату. Действительно, систему прямой компенсации (рис. 2.31) можно описать соотношением

$$\begin{aligned} y &= P u + \Delta P u + (P_2 + \Delta P_2) f \Big|_{u=P^{-1}y^s - P_1^{-1}f} = \\ &= y^s + (\Delta P_2 - \Delta P P_1^{-1}) f + \Delta P P^{-1} y, \end{aligned}$$

и ясно, что отклонение регулируемой координаты y от задания y^s может быть неприемлемым.

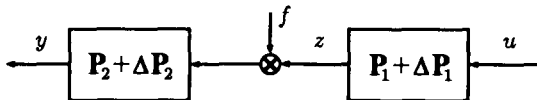


Рис. 2.31

Сказанное справедливо и для метода большого коэффициента (глубокой обратной связи), хотя он менее других методов связан с использованием полной информации об объекте и действующих на него возмущений.

В самом деле, рассмотрим последствия, которые возникают при устремлении коэффициента k к бесконечности (рис. 2.32), где струк-

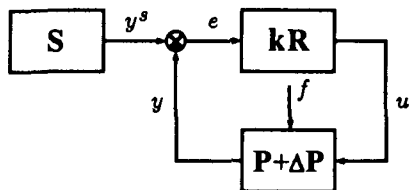


Рис. 2.32

тура воздействия возмущения $f(t)$ та же, что и в системе на рис. 2.31. Уравнение этой системы управления имеет вид

$$y = (P + \Delta P) k R e + (P_2 + \Delta P_2) f.$$

Поскольку $e = y^s - y$, то для ошибки стабилизации имеем выражение $e = -k(P + \Delta P) R e - (P_2 + \Delta P_2) f$. После приведения подобных и деления на k получаем уравнение

$$\left[\frac{1}{k} + (P + \Delta P) R \right] e = -\frac{1}{k} (P_2 + \Delta P_2) f.$$

В пределе, при $k \rightarrow \infty$, возникает уравнение $(P + \Delta P) R e = e$, которое ответственно за основные черты поведения системы с глубокой обратной связью. Видно, что это поведение зависит от факторов неопределенности. Следовательно, глубокая обратная связь в общем случае не обеспечивает стабилизацию неопределенного объекта.

Если, однако, неопределенность каким-либо способом структурирована, то возможности по стабилизации такого неопределенного объекта расширяются. Пусть, например, неопределенность в операторе объекта ΔP может быть приведена к управляющему входу. В этом случае говорят, что неопределенность удовлетворяет условию согласованности или, иначе, matching condition (МС-условию). При выполнении МС-условия неопределенный объект можно представить схемой, изображенной на рис. 2.33. Для такого объекта применение глубо-

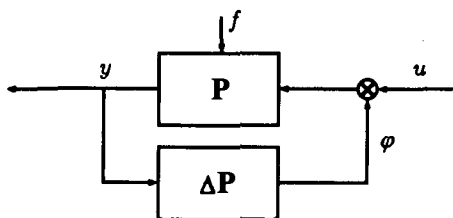


Рис. 2.33

кой обратной связи может дать желательный результат, т.е. заставить неопределенный объект при устремлении коэффициента обратной связи k к бесконечности по схеме рис. 2.34. В самом деле,

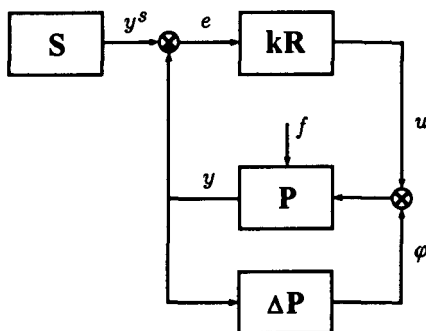


Рис. 2.34

объект, представленный на рис. 2.34, может быть описан уравнением

$$y = P u + P \Delta P y + P_2 f,$$

а обратная связь — уравнением

$$u = k R e.$$

Поскольку $e = y^s - y$, то уравнение замкнутой системы управления относительно ошибки регулирования имеет вид

$$(1 + k P R) e = -P \Delta P y - P_2 f.$$

После почленного деления на коэффициент k получим соотношение

$$\left(\frac{1}{k} + P R \right) e = -\frac{1}{k} P \Delta P y - \frac{1}{k} P_2 f,$$

из которого при $k \rightarrow \infty$ находим предельное уравнение движения в следующем виде:

$$P R e = 0.$$

Это уравнение не зависит от неопределенности ΔP , возмущения f и свидетельствует о принципиальной возможности решения задачи стабилизации. При этом, конечно, необходимо помнить о тех проблемах, которые возникают при устремлении k в бесконечность: негрубость, усиление влияния ограничений и т.п. Поэтому, принимая во внимание принципиальную возможность разрешения задачи, следует искать альтернативные методы.

2.2.2. Принцип каскадного регулирования

Как выяснилось, весьма часто простым увеличением коэффициента усиления главной обратной связи (рис.2.34) задача стабилизации не решается, так как предельная система неустойчива. Напомним, что для устойчивости при введении глубокой обратной связи по выходу необходимо, чтобы объект был минимально фазовым и имел относительный порядок $r \leq 2$.

Понятно, что эти условия выполняются далеко не всегда. Поэтому представляют интерес методы, использующие местные глубокие обратные связи, когда указанные выше условия реализуются локально, в каком-то месте структурной схемы системы.

Такие местные глубокие обратные связи, надлежащим образом согласованные, порождают иерархию коэффициентов усиления и связанную с этим разнотемповость движений в различных контурах обратных связей. Одновременно это часто упрощает синтез управления, так как при решении локальной задачи стабилизации обычно имеют дело с системой более низкого порядка по отношению к порядку исходной системы.

Часто разнотемповость в системе имеет физическую природу (например, в электромеханических системах), и поэтому подобный способ управления не кажется искусственным. Такую иерархию глубоких обратных связей вводит принцип каскадного регулирования.

Пример 11. Иерархия обратных связей. Рассмотрим задачу стабилизации в нуле объекта, показанного на рис. 2.35. Считается, что кон-

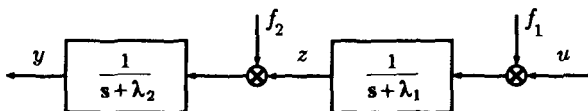


Рис. 2.35

станты λ_1 , λ_2 и внешние силы f_1 , f_2 неизвестны, а для управления могут использоваться только координаты y и z .

Дифференциальные уравнения этого объекта имеют вид

$$\dot{y} + \lambda_2 y = f_2 + z, \quad (2.16)$$

$$\dot{z} + \lambda_1 z = f_1 + u. \quad (2.17)$$

Очевидно, что в этой задаче условия применимости стандартных методов компенсации не выполнены. Определенные трудности возникают и при использовании обычной глубокой обратной связи, так как возмущение f_2 не удовлетворяет МС-условию. Поэтому организация обратной связи по имеющейся информации

$$u = -k(cy + z) \quad (2.18)$$

и устремление $k \rightarrow \infty$ не дает требуемого результата, так как предельная система описывается уравнением

$$\dot{y} + (c + \lambda_2) y = f_2, \quad (2.19)$$

которое следует из (2.16), (2.17), (2.18). Поскольку это уравнение зависит от факторов неопределенности λ_2 , f_2 , то решение задачи стабилизации не гарантируется (рис. 2.36). Например, при $c + \lambda_2 > 0$ свободные движения уравнения (2.19) устойчивы, но при конечном значении параметра c вынужденное решение уводит координату y от желаемого нуля. В то же время

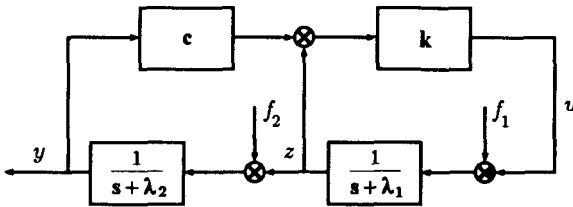


Рис. 2.36

при стремлении параметра c к бесконечности (2.19) поставленная задача стабилизации решается, причем ни на каком этапе ее решения не требуется информация о параметрах объекта λ_1 , λ_2 и возмущениях f_1 , f_2 , которые могут быть любыми.

Пример 11 демонстрирует полезность пошагового устремления в бесконечность параметров обратной связи. Здесь $k \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow \infty$, но так, что $c/k \rightarrow 0$. Последнее соотношение и устанавливает ту иерархию коэффициентов усиления, о которой говорилось ранее. Именно эта идея и эксплуатируется принципом каскадного регулирования.

Справедливости ради нужно заметить, что использование дополнительной информации о состоянии объекта позволяет обойтись при решении рассматриваемой задачи только одной глубокой обратной связью. Продемонстрируем такую возможность. Для этого продифференцируем уравнение (2.16):

$$\ddot{y} + \lambda_2 \dot{y} = \dot{f}_2 + \dot{z}, \quad (2.20)$$

умножим уравнение (2.16) почленно на λ_1 :

$$\lambda_1 \dot{y} + \lambda_1 \lambda_2 y = \lambda_1 f_2 + \lambda_1 z. \quad (2.21)$$

Результаты (2.20), (2.21) сложим и учтем, что уравнение (2.17) имеет вид

$$\dot{z} + \lambda_1 z = f_1 + u.$$

В итоге получим уравнение объекта в виде

$$\ddot{y} + (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{y} + \lambda_1 \lambda_2 y = F + u, \quad (2.22)$$

где $F = \dot{f}_2 + \lambda_1 f_2 + f_1$.

Достоинство полученного уравнения (2.22) состоит в том, что теперь возмущение согласовано с управлением, т.е. удовлетворяет МС-условию, поэтому использованная процедура и называется приведением возмущения к управляющему входу. При этом, конечно, нужно допустить дифференцируемость функции $f_2(t)$.

Для объекта (2.22) возможно применение стандартной глубокой обратной связи $u = -k(cy + \dot{y})$ по схеме, представленной на рис. 2.37, в которой устремление k в бесконечность при $c > 0$ решает задачу

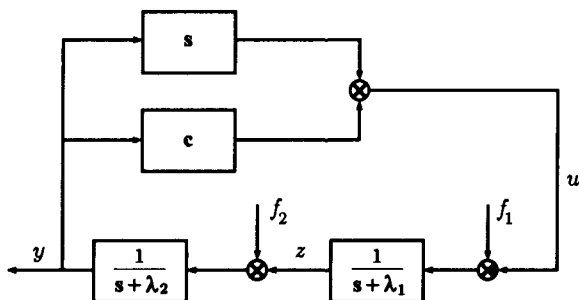


Рис. 2.37

стабилизации, ибо предельная система описывается экспоненциально устойчивым уравнением первого порядка

$$\dot{y} + cy = 0.$$

Ограничения рассмотренного метода очевидны, они связаны:

- с дифференцируемостью функции f_2 , чего может и не быть;
- с наличием информации о производной \dot{y} , что также представляет проблему.

Вернемся теперь к исходной постановке задачи стабилизации из Примера 11 и решим ее с использованием только доступной информации об объекте, прямо следуя основной идее принципа каскадного регулирования. Рассмотрим первое уравнение объекта P_2 :

$$\dot{y} + \lambda_2 y = f_2 + v, \quad (2.23)$$

в котором произведена замена переменной z на v . Будем считать сигнал v управлением для объекта P_2 . Заметим, что возмущение f_2 для объекта P_2 удовлетворяет МС-условию и, следовательно, есть возможность для применения глубокой обратной связи. Пусть $v(y)$ — обратная связь, стабилизирующая y в нуле для объекта (2.23). Но на объект P_2 фактически действует сигнал z , поэтому имеется рассогласование $e = v - z$ на его входе. На устранение этого рассогласования

(что, конечно, решает рассматриваемую задачу) и направляется выбор управления u на входе объекта P_1 :

$$\dot{z} + \lambda_1 z = f_1 + u. \quad (2.24)$$

Для синтеза подходящего управления u удобно записать уравнения движения объекта P_1 (2.24) относительно ошибки $e = v - z$. Дифференцируя последнее уравнение по t и производя замены по формулам

$$z = v - e, \quad \dot{z} = \dot{v} + u - \lambda_1 v + \lambda_1 e,$$

находим искомое уравнение движения в виде

$$\dot{e} + \lambda_1 e = \varphi - u, \quad (2.25)$$

где $\varphi = \dot{v} + \lambda_1 v + f_1$. Объект (2.25) также удовлетворяет МС-условию, и поэтому уместно применение глубокой обратной связи по ошибке в стандартном виде $u = k_1 e$. В результате имеем замкнутую систему управления с уравнением движения вида

$$\dot{e} + (k_1 + \lambda_1) e = \varphi.$$

При $k_1 \rightarrow \infty$ объект (2.25) стабилизируется в нуле, что и требовалось доказать. Поскольку ясно, что обратная связь $v = -k_2 y$ при $k_2 \rightarrow \infty$ стабилизирует объект P_2 в нуле при любых λ_2 и f_2 , то можно теперь изобразить структурную схему синтезированной системы каскадного регулирования (рис. 2.38). Каскадность этой системы управ-

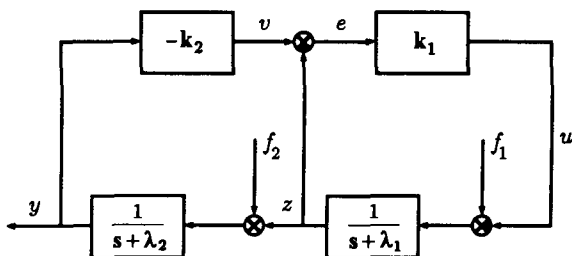


Рис. 2.38

вления следует из того, что обратная связь $u = k_1 e$ способна подавить возмущение

$$\varphi = k_2 \dot{y} + \lambda_1 k_2 y + f_1$$

только в том случае, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{k_1 \rightarrow \infty \\ k_2 \rightarrow \infty}} \frac{k_2}{k_1} = 0.$$

Последнее условие и устанавливает иерархию коэффициентов усиления местных контуров обратных связей, а вместе с этим вводит в систему каскадность. Если структурную схему полученной системы стабилизации представить в виде схемы, изображенной на рис. 2.39, то появляется возможность полезных содержательных интерпретаций. При таком представлении видны два контура обратных свя-

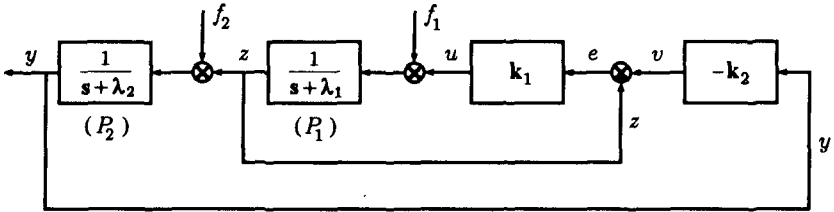


Рис. 2.39

зей, причем внутренний контур является более “быстрым” (в пределе бесконечно более “быстрым”, чем внешний контур) и, значит, можно считать переменные внешнего контура как бы “замороженными” по отношению к переменным внутреннего контура. Поэтому если внутренний контур устойчив, то можно считать, что $e = v - z = 0$ и, следовательно, внутренний контур как бы “передает” или индуцирует на входе объекта P_2 управление v . В связи с этим принцип каскадного регулирования иногда называют принципом индуцированных обратных связей.

2.2.3. Структура объектов каскадного регулирования

Рассмотренную выше (рис. 2.39) структуру системы каскадного регулирования нетрудно обобщить на случай произвольного числа m каскадов (рис. 2.40). При этом стабилизация выхода объекта y в нуле

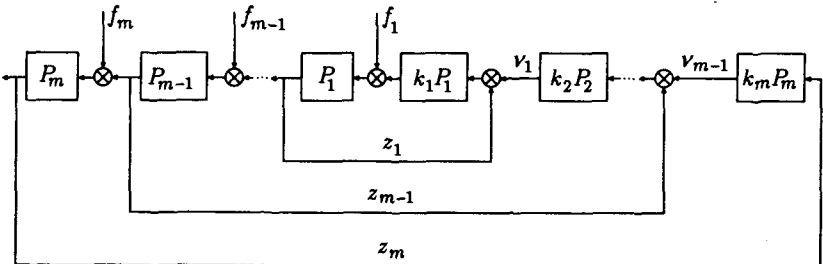


Рис. 2.40

возможна при установлении для локальных глубоких обратных связей определенной иерархии коэффициентов усиления

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} \frac{k_{i+1}}{k_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Подобным образом можно стабилизировать далеко не все объекты, а только те, которые допускают структурную композицию, приведенную на рис. 2.40. Суть этой композиции в том, что поведение каждого контура не должно зависеть от переменных внутренних (по отношению к нему) контуров, т.е. должны выполняться соотношения

$$z_i = P_i(f_i + z_{i+1}), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

$$z_m \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

На языке дифференциальных уравнений последнее означает, что правая часть уравнения движения объекта в форме Коши должна иметь “треугольную структуру”, т.е. старшая по номеру переменная может входить только строго в предшествующее уравнение и не должна входить в прочие уравнения с меньшими номерами. Пример таких уравнений движения в фазовом пространстве (z_1, z_2, \dots, z_m) приведен ниже:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \varphi_1(z_1, t) + z_2, \\ \dot{z}_2 &= \varphi_2(z_1, z_2, t) + z_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_m &= \varphi_m(z_1, \dots, z_m, t) + u. \end{aligned}$$

Только в этом случае каждую старшую переменную можно интерпретировать как управление для предшествующих переменных и устанавливать иерархию обратных связей. Подобные объекты принято называть объектами с треугольной структурой.

Изложенное выше показывает, что принцип каскадного регулирования является довольно эффективным средством стабилизации неопределенного объекта, поскольку:

- синтез обратной связи является итеративным и на каждой итерации приходится иметь дело с объектом низкого порядка;
- нет необходимости иметь полную информацию о фазовом векторе объекта;
- допускаются и нестационарная неопределенность и произвольные внешние воздействия;
- учитывается разнотемповость физических процессов, протекающих в реальной системе.

При этом система каскадного регулирования не свободна и от недостатков: использование больших коэффициентов усиления понижает прочность системы и повышает роль амплитудных ограничений, кроме того, требуется “треугольная” структура системы, что ограничивает класс стабилизируемых неопределенных объектов.

2.2.4. Стабилизация интервальных объектов

Рассмотрим теперь проблему стабилизации в нуле линейного объекта

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_1 y = u + f, \quad (2.26)$$

называемого далее объектом P , постоянные параметры a_1, \dots, a_n которого неизвестны, а даны только границы содержащих их отрезков, т.е. известны числа a_1^\pm, \dots, a_n^\pm такие, что $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$. Эти, известные с точностью до интервала, числа называют интервальными и обозначают символом

$$[a_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

В соответствии с этим объект P называется интервальным объектом $[P]$ и записывается в виде

$$y^{(n)} + [a_n]y^{(n-1)} + [a_1]y = u + f. \quad (2.27)$$

Кроме того, интервальный объект может быть задан уравнением состояний

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A]x + [b]u + [d]f, \\ y &= [c]x, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $[A]$, $[b]$, $[d]$ и $[c]$ — интервальные матрица и векторы соответственно. Заметим, что переход от описания (2.27) к (2.28) всегда возможен, тогда как обратный переход может и не существовать. При стабилизации интервального объекта (2.27) фактически приходится иметь дело с семейством объектов, и этому может быть дана соответствующая геометрическая интерпретация.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор параметров или точка в векторном пространстве параметров \mathcal{A} , определяющая конкретный объект (рис. 2.41). Тогда $[a] = ([a_1], \dots, [a_n])$ — интервальный вектор

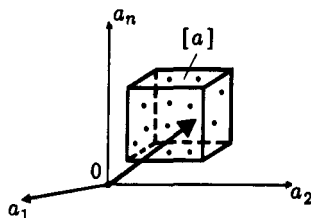


Рис. 2.41

параметров или множество — полиэдр в пространстве \mathcal{A} , определяющий семейство объектов. Поэтому фактически обратная связь должна быть стабилизирующей для любой точки полиэдра. При этом не возникает никаких проблем, когда полиэдр “мал”, так как есть теоремы, свидетельствующие о непрерывной зависимости решений от параметров. Но как быть, когда полиэдр нельзя считать “малым”?

Возможно применение нескольких подходов. Например, можно выбрать медиану каждого i -го отрезка

$$a_i^m = (a_i^+ + a_i^-)/2$$

и ввести полуширину того же отрезка

$$\Delta a_i = (a_i^+ - a_i^-)/2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это позволяет выделить стандартный объект P^m с фиксированными (в нашем случае — с медианными) параметрами

$$y^{(n)} + a_n^m y^{(n-1)} + \dots + a_1^m y = v, \quad (2.29)$$

а разницу между (2.29) и (2.27) определить как неизвестное возмущение

$$\varphi(y, \dots, y^{(n-1)}) = (a_n - a_n^m)y^{(n-1)} + \dots + (a_1 - a_1^m)y,$$

для которого, однако, известна мажоранта

$$\varphi_M(y, \dots, y^{(n-1)}) = \Delta a_n |y^{(n-1)}| + \dots + \Delta a_1 |y|,$$

т.е. $|\varphi| \leq \varphi_M$. При таких переобозначениях проблему стабилизации интервального объекта P из (2.27) можно свести к стандартной проблеме стабилизации медианного объекта P^m из (2.29) при наличии помехи φ в правой части, т.е.

$$y^{(n)} + a_n^m y^{(n-1)} + \dots + a_1^m y = u + f - \varphi. \quad (2.30)$$

Если теперь имеется информация о фазовом векторе $(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$, то рассматриваемую проблему стабилизации решает глубокая линейная обратная связь

$$u = -k (c_1 y + c_2 y^{(1)} + \dots + c_{n-1} y^{(n-2)} + y^{(n-1)}), \quad (2.31)$$

если только полином

$$\varphi(s) = s^{(n-1)} + c_{n-1} s^{(n-2)} + \dots + c_1,$$

отвечающий обратной связи (2.31) при $k \rightarrow \infty$, гурвицев. В самом деле, с обратной связью (2.31) интервальный объект $[P]$ описывается уравнением

$$y^{(n)} + [a_n^m + k]y^{(n-1)} + \dots + [a_1^m + kc_1]y = f.$$

После почленного деления на k имеем

$$\frac{1}{k} y^{(n)} + \left[\frac{a_n^m}{k} + 1 \right] y^{(n-1)} + \dots + \left[\frac{a_1^m}{k} + c_1 \right] y = \frac{1}{k} (f - \varphi)$$

и после устремления коэффициента обратной связи k в бесконечность получаем уравнение предельного движения

$$y^{(n-1)} + c_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + c_1 y = 0,$$

которое, по предположению, асимптотически устойчиво.

Конечно, возможности такого подхода ограничены стандартными (для систем с бесконечно большим коэффициентом усиления) требованиями к прочности и т.п., которые отчасти можно ослабить применением идеи каскадного регулирования. Но в целом проблема стабилизации общего интервального объекта с ограниченным коэффициентом усиления в обратной связи остается по-прежнему актуальной.

2.2.5. Интервальная устойчивость

Альтернативой глубокой обратной связи является, правда только до определенной степени, метод, базирующийся на теории интервальной устойчивости.

Предлагаемая теория основана на разнообразных критериях локализации нулей, в частности, на критериях устойчивости политопов — полиномов с интервальными коэффициентами. Например, согласно критерию Харитонова, для устойчивости политопа

$$[\varphi] = s^n + [a_n]s^{(n-1)} + \dots + [a_1]$$

необходимо и достаточно устойчивости следующих четырех полиномов:

$$\varphi_{--}^{++} = a_1^+ + a_2^+ s + a_3^- s^2 + a_4^- s^3 + \dots$$

$$\varphi_{++}^{--} = a_1^- + a_2^- s + a_3^+ s^2 + a_4^+ s^3 + \dots$$

$$\varphi_{-+}^{+-} = a_1^+ + a_2^- s + a_3^- s^2 + a_4^+ s^3 + \dots$$

$$\varphi_{+-}^{-+} = a_1^- + a_2^+ s + a_3^+ s^2 + a_4^- s^3 + \dots$$

Условия Харитонова, вообще говоря, избыточны, т.е. в некоторых случаях можно обойтись проверкой устойчивости и еще меньшего числа полиномов. Например, для политопа второго порядка

$$[\varphi] = s^2 + [a_2]s + [a_1]$$

достаточно проверить устойчивость только одного полинома

$$\varphi = s^2 + a_2^- s + a_1^-,$$

что, впрочем, прямо следует из рис. 2.42. Поскольку необходимые

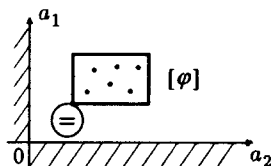


Рис. 2.42

и достаточные условия устойчивости политопа $[\varphi]$ состоят в положительности его коэффициентов, то достаточно проверить только

точку (=). Если, однако, проводить локализацию нулей политопа более точно, то потребуются дополнительные условия. Например, правая ветвь параболы

$$4a_1 = a_2^2 \quad (2.32)$$

определяет на плоскости (a_1, a_2) границу аperiodической устойчивости, и ясно, что для чисто аperiodических процессов прямоугольник $[a] = ([a_1], [a_1])$ должен целиком лежать ниже параболы (2.32), а для колебательных — выше ее (рис. 2.43). Поэтому потребуется наложить

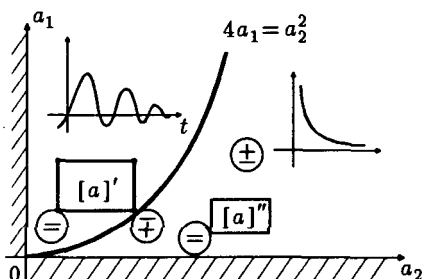


Рис. 2.43

условия на точки (=), (±) в первом случае и на точки (=), (±) — во втором случае.

Если, кроме того, потребовать степени устойчивости, равной числу $\eta > 0$ у политопа $[\varphi] = s^2 + [a_2]s + [a_1]$, то условия проверки этого свойства еще более усложняются, что видно на рис. 2.44, где пунктиром обозначена граница области G со степенью устойчивости не меньше η . Политопы, отвечающие прямоугольнику $[a]'$, всегда имеют комплексно сопряженную пару нулей с вещественной частью не более,

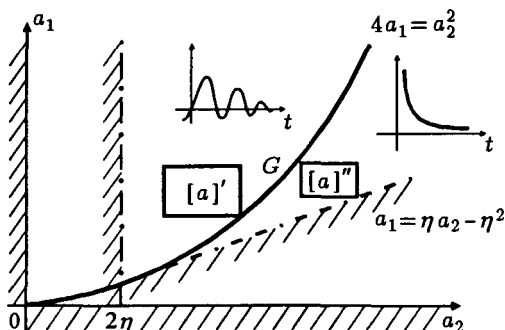


Рис. 2.44

чем $-\eta$, тогда как политоп, отвечающий прямоугольнику $[a]''$, всегда имеет только вещественные нули, не превосходящие число $-\eta$.

Заметим, что теория интервальной устойчивости сегодня представляет собой хорошо развитый раздел теории устойчивости движения. Здесь мы ограничимся вышеприведенными замечаниями и перейдем к проблемам использования критериев интервальной устойчивости в задачах стабилизации, в частности рассмотрим метод включения.

Пример 12. Метод включения. Рассмотрим интервальный объект

$$\ddot{y} + [a_2]\dot{y} + [a_1]y = [b]u, \tag{2.33}$$

где $[b]$ — интервальный коэффициент усиления, $b \in [b^-, b^+]$, причем $b^- > 0$.

Очевидно, что какую бы обратную связь с конечными коэффициентами усиления мы ни взяли, замкнутая система будет неопределенной, а при линейной обратной связи — интервальной системой. Поэтому естественно попытаться задать свойства замкнутой системы с помощью желаемого интервального полинома

$$[\varphi]_ж = s^2 + [a_2]_ж s + [a_1]_ж.$$

Тогда цель регулирования будет достигнута при линейной обратной связи

$$u = -k_1 y - k_2 \dot{y}, \tag{2.34}$$

если ее параметры k_1, k_2 будут удовлетворять следующим включениям:

$$[a_1 + bk_1] \subseteq [a_1]_ж, \quad [a_2 + bk_2] \subseteq [a_2]_ж.$$

Трудности, с которыми сталкивается рассматриваемый метод, видны из рис. 2.45. Действительно, для достижения асимптотической устойчиво-

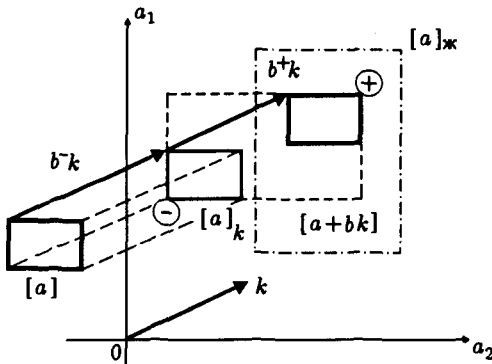


Рис. 2.45

сти начальный прямоугольник $[a]$ нужно с помощью вектора $k = (k_2, k_1)$ “перенести” в открытый положительный ортант плоскости (a_2, a_1) . При этом происходит расширение границ пересекаемого прямоугольника $[a]_ж$, так как коэффициент b неизвестен и меняется от b^- до b^+ .

Для достижения требуемого качества регулирования, кроме всего прочего, нужно попасть "размытым" прямоугольником $[a]_k$ вовнутрь прямоугольника $[a]_ж$, что довольно трудно. Для этого нужно проверить принадлежность прямоугольнику $[a]_ж$ двух диагональных вершин прямоугольника $[a]_k$, например \oplus и \ominus .

Конечно, если ослабить требования к качеству переходных процессов и добиваться лишь, к примеру, стабилизируемости, т.е. асимптотической устойчивости замкнутой системы, то процедура синтеза обратной связи заметно упрощается. Так, при стабилизации интервального объекта (2.33) с помощью линейной обратной связи (2.34) достаточно выбором параметров k_1, k_2 удовлетворить интервальные неравенства

$$[a_2 + bk_2] > 0, \quad [a_1 + bk_1] > 0,$$

которые эквивалентны следующим числовым неравенствам:

$$a_2^- + b^- k_2 > 0, \quad a_1^- + b^- k_2 > 0.$$

Справедливость последнего утверждения иллюстрируется рис. 2.46.

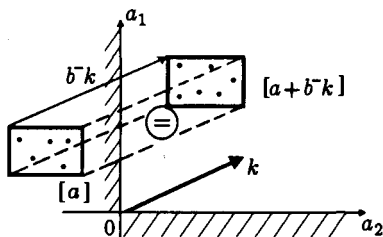


Рис. 2.46

Структурная схема системы стабилизации в нуле интервального объекта с помощью линейной обратной связи приведена на рис. 2.47 и, разумеется, не зависит от способа расчета ее параметров k_1 и k_2 , т.е. используется ли метод включения или метод интервальной устойчивости.

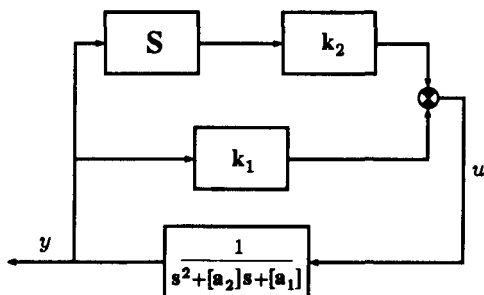


Рис. 2.47

В заключение заметим, что рассмотренные методы стабилизации не могут быть применены, если в правой части имеется неисчезающее, пусть даже известное, возмущение $f(t)$, т.е. в случае, когда стабилизируется объект вида

$$\ddot{y} + [a_2]\dot{y} + [a_1]y = [b]u + f.$$

Отсутствие информации о коэффициенте b не позволяет применить даже метод прямой компенсации возмущения, а так как в обратной связи

$$u = -k_1y - k_2\dot{y}$$

используются ограниченные коэффициенты, а помеха $f(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то замкнутая система, в лучшем случае, будет диссипативной. Следовательно,

- методы стабилизации, основанные на интервальной устойчивости, имеют свою область применения, но не исчерпывают проблему в целом.

В частности, они не годятся для тех случаев, когда параметры объекта меняются.

2.2.6. Общие положения теории адаптивной стабилизации

Рассмотрим проблему стабилизации неопределенного объекта с оператором $P + \Delta P$ и положим для простоты, что

$$y^s \equiv 0, \quad f \equiv 0,$$

т.е. будем решать задачу стабилизации свободных колебаний объекта.

Сделаем также стандартное предположение о том, что неопределенность ΔP удовлетворяет условию согласованности или МС-условию. Тогда проблема сводится к выбору регулятора \bar{R} , стабилизирующего выход объекта $P + \Delta P$ в нуле (рис. 2.48). Ранее мы уже

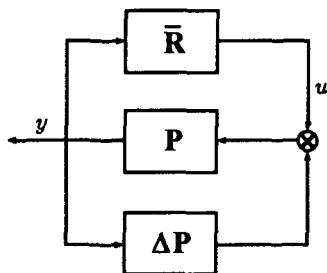


Рис. 2.48

доказали принципиальную возможность решения такой задачи стабилизации методом большого коэффициента, но это приводит, как неоднократно подчеркивалось, к непрочным системам управления.

При использовании в обратной связи конечных коэффициентов передачи (именно это является признаком прочной системы) в теории адаптивного управления регулятор \bar{R} конструируют в виде двух компонент

$$\bar{R} = R + \Delta R,$$

где выбор первой компоненты R направляют на стабилизацию определенного объекта P , тогда как вторая компонента ΔR должна компенсировать (устранить) влияние неопределенности ΔP на поведение системы.

Это соображение приводит к схеме системы, представленной на рис. 2.49, где часть системы, обведенную контуром, обычно называют обобщенным объектом. Оператор

$$P_c = \frac{P}{1 + PR}$$

этого обобщенного объекта выбором регулятора R наделяется всеми требуемыми в постановке задачи стабилизации свойствами, в том числе и асимптотической устойчивостью. Поэтому фактически проблема стабилизации сводится к взаимной компенсации на входе объекта сигналов с контуров обратной связи ΔR и ΔP соответственно (рис. 2.50). Идеальным решением задачи был бы выбор оператора ΔR

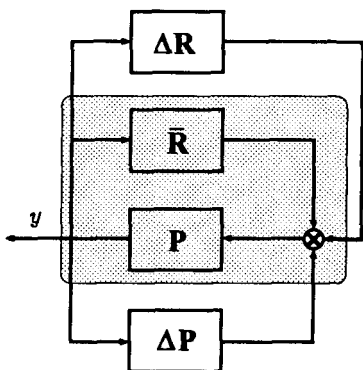


Рис. 2.49

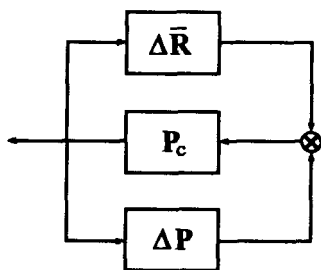


Рис. 2.50

на основе тождества $\Delta R + \Delta P \equiv 0$, но оператор ΔP неизвестен, и поэтому следует позаботиться о получении его асимптотической оценки $\Delta \hat{P}$, так чтобы

$$\Delta \hat{P} \rightarrow \Delta P \quad t \rightarrow \infty.$$

Тогда, полагая, точнее говоря, осуществляя настройку оператора обратной связи ΔR по правилу

$$\Delta R = -\Delta \hat{P}, \quad (2.35)$$

Замечание 1. Имеются вариации описанной выше схемы адаптации. Например, для выполнения условия компенсации

$$\Delta R + \Delta P = 0$$

можно менять не только (а может быть и не столько) оператор регулятора ΔR , но и оператор объекта ΔP . Для этого, разумеется, должна иметься соответствующая возможность представления ΔP в виде суммы

$$\Delta P = \Delta P' + \Delta P'',$$

где $\Delta P'$ — неизвестная, а $\Delta P''$ — настраиваемая часть. В этом случае говорят о методе настраиваемого объекта, в отличие от предыдущего случая, когда мы имели дело с настраиваемой обратной связью.

Замечание 2. Поскольку оценка $\Delta \hat{P}$ вырабатывается по измерениям координат объекта p или системы P_c , а также их входов, то понятно, что наиболее просто это делается тогда, когда изменения ΔP происходят “медленнее” изменений этих переменных. В этом смысле говорят о квазистационарном изменении оператора ΔP , а фактически при расчете обратной связи ориентируются на стационарный оператор ΔP . Если построенная таким образом адаптивная система прочна, то она сохраняет работоспособность и при “медленных” изменениях в силу устойчивости прочных систем по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Замечание 3. Наличие внешнего воздействия f на неопределенный объект управления (рис. 2.53) еще более усложняет ситуацию, так как при этом вносится дополнительная неустранимая погрешность в оценку $\Delta \hat{P}$, если только $\Delta f \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому вместо требуемого условием компенсации равенства

$$\Delta R + \Delta P = 0$$

имеем смещенное на некоторую величину ΔQ равенство

$$\Delta R + \Delta P = \Delta Q,$$

и проблема, следовательно, состоит только в том, насколько оператор ΔQ искажает поведение объекта P_c (рис. 2.54). Если возмущение исчезающее,

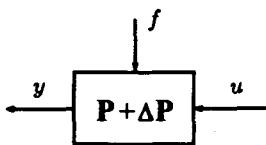


Рис. 2.53

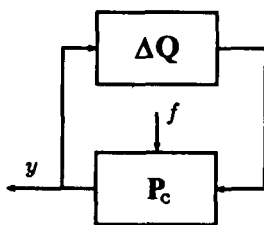


Рис. 2.54

т.е. $f \rightarrow 0$, а вместе с этим и $\Delta Q \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то в установившемся режиме проблемы не возникает. Если же возмущение не исчезающее, т.е. $\Delta f \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$, но, например, ограниченное, т.е. $|f| \leq f_0 = \text{const}$, то

из-за использования ограниченных коэффициентов передачи в регуляторе можно рассчитывать, вообще говоря, только на диссипативность замкнутой системы управления с радиусом диссипативности порядка f_0 .

Замечание 4. При определенных условиях адаптивный подход порождает стабилизаторы универсального действия, т.е. такие регуляторы, для применения которых нет необходимости точно знать не только параметры объекта, но даже и его порядок. Подобные регуляторы называются универсальными. Для успешного их использования требуется выполнение следующих условий:

- МС-условия (условия согласованности);
- минимальной фазовости объекта P .

Действительно, в этом случае можно применить глубокую обратную связь вида kR с коэффициентом усиления k и оператором R (рис. 2.55). Такая обратная связь при $k \rightarrow \infty$ обеспечивает стабилизацию, если асим-

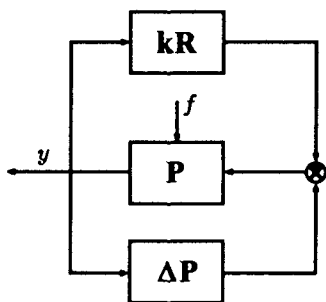


Рис. 2.55

птотически устойчиво уравнение предельного движения

$$P R y = 0. \quad (2.36)$$

Последнее уравнение при $k \rightarrow \infty$ следует из уравнения движения замкнутой системы

$$(1 + kPR)y = (P_2 + \Delta P_2)f + P\Delta P y,$$

соответствующего рис. 2.55.

Рассмотрим условие асимптотической устойчивости для уравнения (2.36) подробнее. Пусть объект P стационарен. Тогда его можно представить передаточной функцией

$$W_P(s) = \frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)}.$$

Аналогично, оператору регулятора R поставим в соответствие передаточную функцию

$$W_R(s) = \frac{\delta_l(s)}{\gamma_r(s)},$$

где $\beta, \alpha, \delta, \gamma$ — полиномы комплексной переменной s , а индексы m, n, l и r — степени соответствующих полиномов. Тогда уравнение предельного движения

$$P R y = 0$$

эквивалентно уравнению

$$\beta_m(s) \delta_l(s) Y(s) = 0, \quad (2.37)$$

где $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ — одностороннее преобразование Лапласа функции $y(t)$. Из (2.37) видно, что полином $\beta_m(s)$ должен быть гурвицевым, что и означает минимальную фазовость объекта P .

Непрочность рассматриваемой системы с глубокой обратной связью в универсальном стабилизаторе преодолевается тем, что коэффициент обратной связи зависит от переменных состояния, например, от выхода объекта

$$k = k(y, \dots),$$

и монотонно увеличивается до тех пор, пока не наступает, при указанных выше условиях, устойчивость (при $f \rightarrow 0$) или диссипативность (при $|f| \leq f_0$) следующего уравнения:

$$\left(\frac{1}{k(\cdot)} + PR \right) y = (P_2 + \Delta P_2) f + P \Delta P y.$$

Пример 13. Синтез адаптивной системы управления. Рассмотрим на примере стабилизации в нуле объекта второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu, \end{aligned} \quad (2.38)$$

с неопределенными коэффициентами a и $b > 0$, одну из наиболее распространенных методик синтеза адаптивного управления.

Замкнем объект (2.38) обратной связью

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$$

и сформируем алгоритмы адаптации \mathcal{A} переменных ξ_1, ξ_2 :

$$\dot{k}_1 = \xi_1, \quad \dot{k}_2 = \xi_2, \quad (2.39)$$

т.е. алгоритмы настройки параметров k_1, k_2 , таким образом, чтобы поведение замкнутой системы Σ_k :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(bk_1 - a)x_1 - bk_2 x_2, \end{aligned}$$

было бы подобно (может быть, даже близко) поведению некоторой эталонной системы Σ_γ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2. \end{aligned}$$

Здесь γ_1 и γ_2 — назначенные положительные числа; Σ_γ -систему будем также называть моделью. После введения обозначений

$$b\Delta k_1 = bk_1 - a - \gamma_1, \quad b\Delta k_2 = bk_2 - \gamma_2$$

замкнутую адаптируемой обратной связью Σ_k -систему можно представить в стандартном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - b\Delta k_1 x_1 - b\Delta k_2 x_2. \end{aligned}$$

В условиях гипотезы квазистационарности $\Delta \dot{k}_1 = \dot{k}_1$, $\Delta \dot{k}_2 = \dot{k}_2$, и по-этому формально удобно считать, что адаптируются не сами коэффициенты k_1 и k_2 , а их отклонения от требуемых значений, т.е. закон адаптации \mathcal{A} можно записать в обобщенном виде $\Delta \dot{k}_1 = \xi_1$, $\Delta \dot{k}_2 = \xi_2$.

Для получения конкретного алгоритма адаптации \mathcal{A} используем квадратичную форму $v(x) = (x, Hx)$ с положительно определенной (2×2) -матрицей $H = [h_1, h_2]^+$, такую, что при некотором (желаемом) положительном числе $\lambda > 0$, определяющем степень устойчивости Σ_γ -системы (модели поведения замкнутой системы), ее производная в силу Σ_γ -системы имеет вид

$$\dot{v}|_{\Sigma_\gamma} = -2\lambda v.$$

Поскольку выбор параметров модели γ_1 , γ_2 ничем не ограничен, такие матрица H и число λ существуют.

Введем теперь в рассмотрение квадратичную форму $V(x, k)$ в расширенном пространстве переменных $\{x, k\}$ выражением

$$V(x, k) = v(x) + \frac{b}{2} \left(\frac{\Delta k_1^2}{\beta_1} + \frac{\Delta k_2^2}{\beta_2} \right),$$

где β_1, β_2 — некоторые положительные числа. Ее производная в силу Σ_k -системы с алгоритмом адаптации \mathcal{A} дается выражением

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{\Sigma_k} &= \dot{V}|_{\Sigma_\gamma} - \left\langle Hx, \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right\rangle (\Delta k_1 x_1 + \Delta k_2 x_2) + b \left(\frac{\Delta k_1 \xi_1}{\beta_1} + \frac{\Delta k_2 \xi_2}{\beta_2} \right) = \\ &= -2\lambda \langle x, Hx \rangle - b \left[\Delta k_1 \left(x_1 \sigma - \frac{\xi_1}{\beta_1} \right) + \Delta k_2 \left(x_2 \sigma - \frac{\xi_2}{\beta_2} \right) \right], \quad (2.40) \end{aligned}$$

где $\sigma = \left\langle Hx, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle h_2, x \rangle$. Теперь ясно, что если правые части алгоритма адаптации выбрать в виде

$$\xi_1 = \beta_1 x_1 \sigma, \quad \xi_2 = \beta_2 x_2 \sigma,$$

то производная (2.40) принимает вид

$$\dot{V} = -2\lambda \langle x, Hx \rangle$$

и становится знакоотрицательной в пространстве $\{x, k\}$, откуда и следует стабилизируемость рассматриваемой системы.

Заметим, что сходимость погрешностей оценок Δk_1 , Δk_2 к нулю при этом не гарантируется, поскольку для такой сходимости требуется определенная отрицательность \dot{v} в расширенном фазовом пространстве $\{x, k\}$. Заметим также, что при наличии координатного возмущения f , т.е. при стабилизации объекта P^f :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 + bu + f\end{aligned}$$

указанным выше способом, в итоговом выражении для производной \dot{v} появится дополнительное слагаемое, пропорциональное возмущению

$$\dot{v} = -2\lambda(x_1, Hx) + b\sigma f,$$

которое при неизвестном f нарушает знакоотрицательность \dot{v} и при ограничении $|f| \leq f_0$ ведет к диссипативности системы по основным переменным, т.е. задача стабилизации не решается точно.

В заключение приведем структурную схему адаптивной системы стабилизации, синтезированной в Примере 13. Она представлена на рис. 2.56, на котором h_{21} и h_{22} — компоненты вектора $h_2 = \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}$.

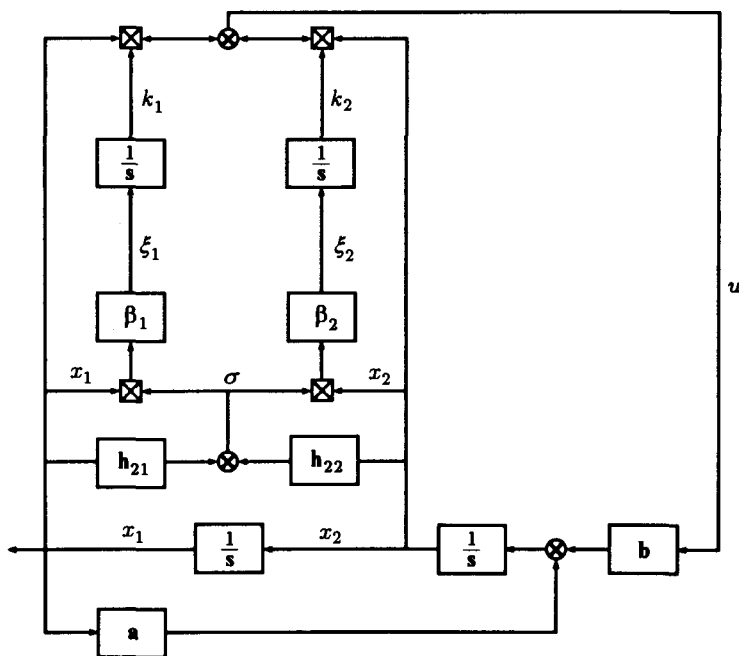


Рис. 2.56

В дальнейшем эта структурная схема потребуется нам для сравнения.

2.3. Стабилизация регулятором переменной структуры

Рассмотрим теперь еще одну попытку окончательного решения рассматриваемой в монографии проблемы путем использования регуляторов с переменной структурой.

Идея принципа переменности структуры состоит в скачкообразном изменении связей между функциональными элементами регулятора в зависимости от фазового состояния замкнутой системы управления, которую в таком случае называют системой управления переменной структуры (СПС). Если рассматриваются линейные объект и функциональные элементы регулятора, то соответствующую СПС можно интерпретировать как совокупность линейных подсистем и правил перехода от одного элемента этой совокупности к другому при пересечении фазовой точкой разделительных гиперплоскостей в фазовом пространстве системы, которые называют поверхностями разрыва. Если же объект или функциональные элементы нелинейны, то речь идет о совокупности нелинейных подсистем и, соответственно, о нелинейных поверхностях или многообразиях разрыва.

И в первом и во втором случае СПС — нелинейная динамическая система — описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Синтез СПС сводится к выбору поверхностей разрыва и исходной совокупности подсистем, гарантирующих решение поставленной задачи управления. Мы не излагаем здесь теорию СПС, просто хотим подчеркнуть, что СПС предназначены для робастного управления объектом со структурированной неопределенностью (рис. 2.57), где S — задатчик, P — известный оператор объекта, ΔP — неизвестная компонента оператора объекта, приведенная к управляющему входу, R_{vss} — регулятор переменной структуры. Особенности синтеза R_{vss} поясним на примерах.

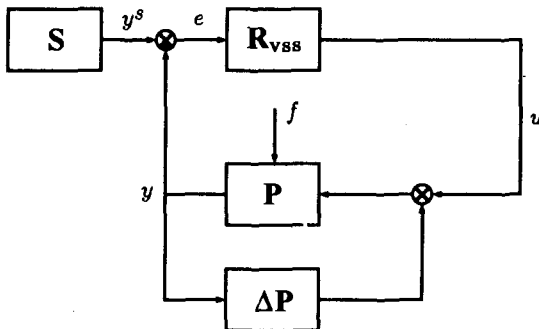


Рис. 2.57

2.3.1. Астатическая следящая система

Рассмотрим простейшую следящую систему с дробно-рациональной передаточной функцией объекта вида $W(s) = 1/\alpha(s)$, где $\alpha(s)$ — полином степени $n = \deg \alpha(s) \geq 1$ (рис. 2.58). Если регулятор R в схеме

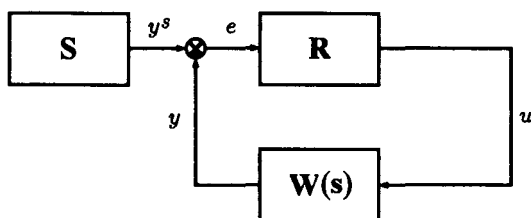


Рис. 2.58

на рис. 2.58 выбран таким образом, что ошибка слежения $e = y^s - y$ асимптотически стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то такую следящую систему называют астатической, в противном случае система статическая.

Для пояснения основных проблем, связанных с построением астатической следящей системы в рамках линейной теории, запишем уравнение движения системы, изображенной на рис. 2.58, относительно ошибки слежения в операторном виде, после чего имеем уравнения

$$\alpha(s)e = \alpha(s)y^s - u \Big|_{u=Re} = \alpha(s)y^s - Re$$

или, после приведения подобных, получаем уравнение

$$[\alpha(s) + R(s)]e = \alpha(s)y^s. \quad (2.41)$$

Стоит подчеркнуть, что в (2.41) $R(s)$, вообще говоря, — тоже дробно-рациональная функция,

$$R(s) = k \frac{\gamma(s)}{\delta(s)}, \quad (2.42)$$

с коэффициентом усиления k и полиномами $\gamma(s)$, $\delta(s)$, удовлетворяющими условию физической осуществимости

$$\deg \delta(s) \geq \deg \gamma(s).$$

Положим для определенности, что $\deg \delta(s) \geq 1$. С учетом этого замечания уравнение (2.42) можно преобразовать к следующему виду:

$$[\alpha(s)\delta(s) + k\gamma(s)]e = \alpha(s)\delta(s)y^s. \quad (2.43)$$

Из (2.43) видно, что теоретически данная следящая система будет астатической тогда и только тогда, когда полином $\alpha(s)\delta(s) + k\gamma(s)$ гурвицев и полином $\alpha(s)\delta(s)$ содержит множитель $\mathcal{K}(s)$, аннулирующий

функцию задания, т.е. такой, что

$$\mathcal{K}(s)y^s \equiv 0, \quad (2.44)$$

либо, если такого множителя $\mathcal{K}(s)$ нет, то:

- 1) полином $\gamma(s)$ должен быть гурвицев;
- 2) в пределе при $k \rightarrow \infty$ поведение системы описывается асимптотически устойчивым уравнением

$$\gamma(s)e = 0. \quad (2.45)$$

Впрочем, так как большие коэффициенты усиления приводят к негрубым системам, то реально при синтезе астатических систем приходится ориентироваться на конечные коэффициенты передачи, а значит, и на гурвицевость полинома $\alpha(s)\delta(s) + \gamma(s)$ и условие (2.44).

Если аннулирующий полином $\mathcal{K}(s)$ является гурвицевым, то выполнение указанных выше условий не вызывает принципиальных осложнений. Другое дело, когда полином $\mathcal{K}(s)$ — неустойчивый, например $\mathcal{K}(s) = s^2 - a^2$, $a = \text{const} > 0$. Тогда мы сталкиваемся с серьезными проблемами. В самом деле, полином $\delta(s)$ не может быть неустойчивым, ибо в противном случае неустойчива собственная динамика регулятора (2.42) и его выход $u(t)$ экспоненциально нарастает со всеми вытекающими отсюда негативными последствиями: выходом за пределы зоны линейности и т.п. Следовательно, неустойчивые компоненты (множители) аннулирующего оператора $\mathcal{K}(s)$ должны быть одновременно множителями полинома $\alpha(s)$, что, конечно, невероятно. Это рассуждение показывает, что

- в рамках линейной теории управления, предполагающей использование только ограниченных коэффициентов передачи в регуляторе, построить астатическую систему слежения за экспоненциально растущим сигналом y^s невозможно.

Мы рассмотрели две грубые ситуации: экспоненциально устойчивые и экспоненциально неустойчивые $\mathcal{K}(s)$. Проанализируем теперь пограничную ситуацию, когда задание y^s — полиномиально растущая функция времени, т.е.

$$y^s = c_{m+1}t^m + c_m t^{m-1} + \dots + c_1,$$

где c_i — некоторые константы, ($i = 1, \dots, m+1$), а число m — порядок полинома, т.е. $c_{m+1} \neq 0$. Простейшим оператором, аннулирующим полином (2.45), очевидно, является оператор $(m+1)$ -кратного дифференцирования $\mathcal{K}(s) = s^{m+1}$. Естественно предполагать, что в систему слежения он привносится регулятором, т.е.

$$\delta(s) = s^{m+1} \delta'(s),$$

где $\delta'(s)$ — некоторый устойчивый полином. Но в таком случае, в силу необходимого условия устойчивости, для обеспечения гурвицевости

характеристического полинома замкнутой системы

$$\alpha(s)\delta'(s)s^{m+1} + k\gamma(s) \quad (2.46)$$

требуется выполнение неравенства $\deg \gamma(s) \geq m + 1$. Если полином (2.46) гурвицев, то система слежения без ошибки воспроизводит полиномиальный сигнал (2.45), и тогда говорят, что регулятор

$$R(s) = \frac{\gamma(s)}{s^{m+1}\delta'(s)} \quad (2.47)$$

обеспечивает астатизм $(m + 1)$ -го порядка. Заметим, что, в силу известного разложения экспоненты

$$e^{at} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!},$$

задачу слежения за экспоненциально растущим сигналом

$$y^*(t) = y^*(0)e^{at}$$

можно интерпретировать как задачу построения системы с бесконечным порядком астатизма.

Ясно, что указанным выше способом построить такую систему слежения нельзя из-за неограниченно возрастающей сложности регулятора. Это наблюдение только подтверждает сделанный ранее вывод о том, что

- в рамках линейной теории невозможно построение робастной астатической следящей системы.

Может показаться, что и в рамках принципа комбинированного управления, когда управляющий сигнал формируется в виде суммы сигнала обратной связи по ошибке слежения $u_e = Re$ и сигнала прямой связи по нагрузке $u_y = Hy^*$ (рис. 2.59), этот принципиальный вывод неверен.

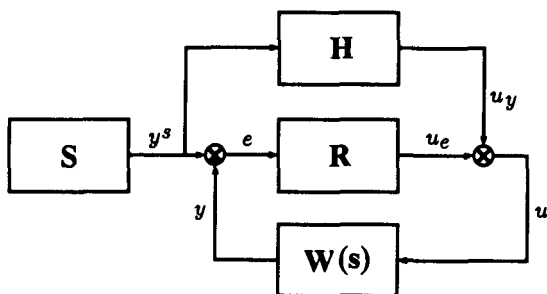


Рис. 2.59

Разберем и эту ситуацию, полагая, как и ранее, что $W(s) = 1/\alpha(s)$, $R(s) = \gamma(s)/\delta(s)$. Из рис. 2.59 имеем следующее уравнение движения относительно ошибки:

$$\alpha(s) e = \alpha(s) y^s - u \Big|_{u=Hy^s + Re} = [\alpha(s) - H(s)] y^s - R(s) e.$$

После приведения подобных имеем дело с уравнением

$$[\alpha(s) \delta(s) + \gamma(s)] e = \delta(s) [\alpha(s) - H(s)] y^s. \quad (2.48)$$

В (2.48) оператор прямой связи $H(s)$ надлежит выбрать так, чтобы правая часть обратилась в тождественный нуль. Имеется несколько очевидных возможностей решения этой задачи.

Способ I. Можно, например, положить

$$H(s) = \alpha(s),$$

тогда прямая связь определяется выражением

$$u_y = \alpha(s) y^s$$

и предполагает n -кратное точное дифференцирование задающего сигнала (напомним, что $\deg \alpha(s) = n$). По неоднократно приводившимся выше соображениям от этого решения, как неробастного, приходится отказываться.

Способ II. Можно понизить кратность дифференцирования воспроизводимого сигнала $y^s(t)$, если

$$\deg \mathcal{K}(s) \leq \deg \alpha(s),$$

где $\mathcal{K}(s)$ — оператор, аннулирующий $y^s(t)$. В самом деле, поделим полином $\alpha(s)$ на $\mathcal{K}(s)$, так как, вообще говоря, все нули $\mathcal{K}(s)$ не являются нулями $\alpha(s)$. В результате деления получится некий остаток $\eta(s)$, т.е.

$$\alpha(s) = \alpha'(s) \mathcal{K}(s) + \eta(s), \quad (2.49)$$

причем справедливы неравенства

$$\deg \eta(s) < \deg \mathcal{K}(s) < \deg \alpha(s).$$

Теперь для достижения астатизма достаточно (при том условии, что характеристический полином $\varphi(s) = \alpha(s) \delta(s) + \gamma(s)$ — гурвицев) положить

$$H(s) = \eta(s). \quad (2.50)$$

Подставляя (2.50) в (2.49), а результат — в (2.48), получаем уравнение

$$[\alpha(s) \delta(s) + \gamma(s)] e = \delta(s) [\alpha'(s) \mathcal{K}(s) + \eta(s) - \eta(s)] y^s = 0,$$

из которого и следует сказанное выше.

Способ III. Если же

$$\deg \mathcal{K}(s) > \deg \alpha(s)$$

и у оператора $\mathcal{K}(s)$ есть устойчивые нули, т.е. он представим в виде

$$\mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_-(s) \mathcal{K}_+(s),$$

где $\mathcal{K}_-(s)$ — гурвицев полином, то эти нули можно включить в число нулей полинома $\delta(s)$, т.е. взять последний в виде

$$\delta(s) = \delta'(s) \mathcal{K}_-(s).$$

Если при этом еще окажется, что

$$\deg \mathcal{K}_+(s) \leq \deg \alpha(s),$$

то возможен синтез оператора прямой связи $H(s)$ по той же схеме, что и в Способе II. При невыполнении последнего неравенства использование прямой связи по нагрузке кардинальным образом не влияет на возможность построения астатической следящей системы.

Из приведенного выше анализа следует, что в любом случае потребуются операция точного многократного дифференцирования, что не позволяет говорить о решении рассматриваемой задачи.

Пример 14. Точное слежение за задающим воздействием. Проиллюстрируем теоретические выкладки предыдущего раздела на простейшем примере и рассмотрим следующую постановку задачи: требуется синтезировать обратную связь, обеспечивающую точное слежение регулируемой координатой y за задающим воздействием y^s (рис. 2.60). Уравнение

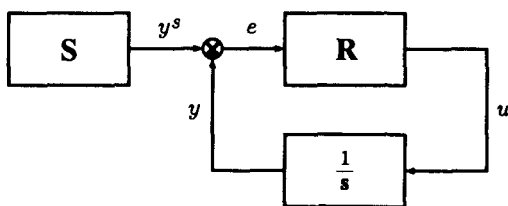


Рис. 2.60

системы слежения относительно ошибки e таково: $\dot{e} = \dot{y}^s - u$. Если $\dot{y}^s \equiv 0$, то задачу решает любая обратная связь вида

$$u = ke, \quad k = \text{const} > 0,$$

так как в этом случае уравнение замкнутой системы $\dot{e} = -ke$ экспоненциально устойчиво. Если же $\dot{y}^s \neq 0$, например $\dot{y}^s = \text{const}$ (т.е. задание растет линейно), то статическая обратная связь $u = ke$ уже не решает задачу, так как уравнение движения в отклонениях имеет ненулевую правую

часть в положении равновесия $\dot{e} = -ke + \dot{y}^s$, и, следовательно, появляется статическая ошибка, т.е. установившееся при $t \rightarrow \infty$ значение ошибки регулирования $e(\infty) = \dot{y}^s/k$. Разумеется, увеличением коэффициента усиления обратной связи k эту погрешность слежения можно устранить, но при этом возникают характерные для систем с глубокой обратной связью проблемы, о которых говорилось в главе 1. Если в системе на рис. 2.60 дополнительно использовать прямую связь по нагрузке, т.е. сформировать управление в виде суммы $u = ke + \dot{y}^s$, то получится астатическая следящая система со структурной схемой, приведенной на рис. 2.61, и уравнением движения вида $\dot{e} = -ke$. Последнее асимптотически устойчиво при $k > 0$, что и решает рассматриваемую задачу.

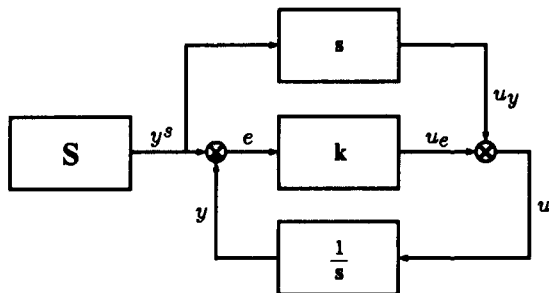


Рис. 2.61

Иными словами, построена астатическая комбинированная следящая система, в которой для достижения астатизма необходимо использовать операцию точного дифференцирования, и это в таком тривиальном случае!

В этой связи естественным представляется следующий вопрос:

- нельзя ли обеспечить астатизм (нулевую установившуюся ошибку) при ограниченных коэффициентах регулирования и без использования операции точного дифференцирования?

2.3.2. Астатизм 2-го порядка

В предыдущем примере $\dot{y}^s = \text{const}$. Продифференцируем по t уравнение объекта $\dot{e} = \dot{y}^s - u$ и введем обозначение

$$\dot{u} = v. \quad (2.51)$$

Тогда получим уравнение вида $\ddot{e} = -v$. Следовательно, рассматриваемая задача слежения сведена к задаче стабилизации свободных колебаний. Последняя задача решается, например, применением линейной обратной связи

$$v = k_2 \dot{e} + k_1 e \quad (2.52)$$

при положительных коэффициентах k_1, k_2 .

Действительно, соответствующая замкнутая система управления описывается устойчивым уравнением $\dot{e} + k_2 e + k_1 e = 0$. Из (2.51) и (2.52) получаем искомую обратную связь в виде пропорционально-

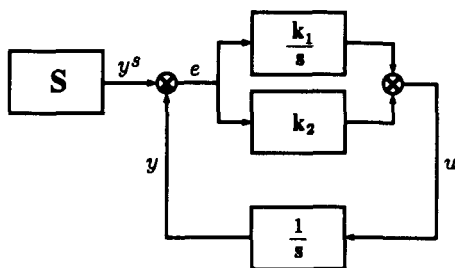


Рис. 2.62

интегрального или ПИ-закона

$$u = k_2 e + k_1 \int e dt.$$

Структурная схема соответствующей следящей системы представлена на рис. 2.62.

2.3.3. Астатизм порядка m

По индукции ясно, что если $y^s(t)$ — полином по t степени m , т.е. в нуль тождественно обращаются все его производные, начиная с $(m+1)$ -й, то для достижения астатизма в этом случае потребуется не менее, чем m интегрирований ошибки слежения (рис. 2.63). При $m \rightarrow \infty$ по-

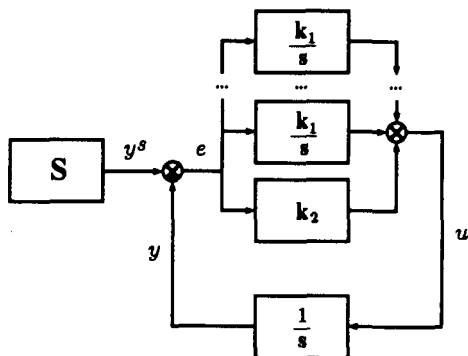


Рис. 2.63

рядок линейного регулятора растет до бесконечности, что, конечно, практически неприемлемо. В частности, таким путем нельзя построить астатическую систему для экспоненциально растущего задания $y^s = e^{\alpha t}$, $\alpha = \text{const} > 0$, так как

$$e^{\alpha t} = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha t)^m}{m!},$$

и для этого по указанной методике потребуются использование бесконечного регулятора. Как же быть?

2.3.4. Астатическая следящая система переменной структуры

Исследуем систему, структурная схема которой дана на рис. 2.64. Особенность рассматриваемой системы состоит в том, что знак ко-

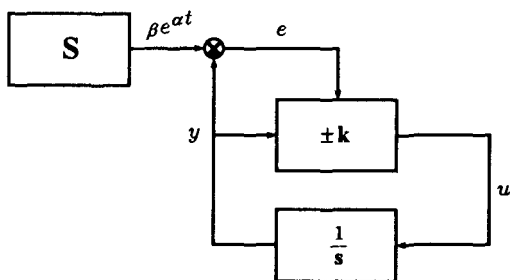


Рис. 2.64

эффициента обратной связи по выходу y определяется знаком ошибки слежения e . Именно, уравнение движения имеет вид $\dot{y} = k y \text{sgn } e$, и если $k > 0$, то при $e > 0$ выход объекта экспоненциально нарастает (рис. 2.65а), так как $\dot{y} = ky$, $y = y(0) e^{kt}$, а при $e < 0$ выход объекта экспоненциально убывает (рис. 2.65б), так как $\dot{y} = -ky$, $y = y(0) e^{-kt}$.

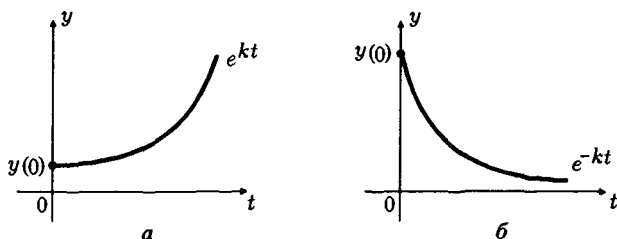


Рис. 2.65

Если теперь положить $k > \alpha$ и $\text{sgn } y(0) = \text{sgn } \beta$, то при $|y(0)| < |\beta|$ экспонента $y(0)e^{kt}$, а при $|y(0)| > |\beta|$ экспонента $y(0)e^{-kt}$ за конечное время “догонит” задающую экспоненту $\beta e^{\alpha t}$ (рис. 2.66). Возникает

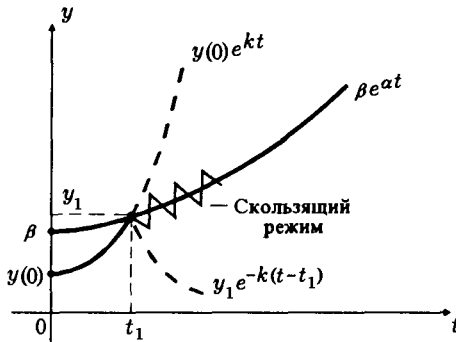


Рис. 2.66

режим переключений, и выход объекта $y(t)$ точно воспроизводит задание $y^*(t)$ в скользящем режиме. Следовательно,

- астатизм ∞ -го порядка достигнут с помощью статической разрывной обратной связи с конечными коэффициентами усиления и без использования производной от задания.

Рассмотренный случай демонстрирует эффективность использования разрывной знакопеременной обратной связи. Оказалось, что это не исключение, а правило, т.е. регулярное использование неустойчивых структур является фундаментальной идеей теории обратной связи, альтернативной другим фундаментальным идеям теории управления (идеям точной компенсации и глубокой обратной связи) и открывает путь к построению робастных систем управления, в том числе и робастных следящих систем. Эта идея явилась ключевой для теории систем управления переменной структурой, фрагменты которой излагаются далее на конкретных примерах.

Пример 15. Режимы переключений в системах переменной структуры. Рассмотрим задачу стабилизации в нуле объекта второго порядка $\ddot{y} = u$ при условии, что имеется информация только о координате y и знаке ее производной \dot{y} . Поскольку ни при каком фиксированном k обратная связь

$$u = -ky \quad (2.53)$$

не является стабилизирующей, то ясно, что линейными средствами эту задачу не решить.

Будем менять коэффициент обратной связи (2.53) в зависимости от y и $\text{sgn } \dot{y}$, например, следующим образом:

$$k(y, \dot{y}) = \begin{cases} k_1, & y\dot{y} \geq 0, \\ k_2, & y\dot{y} < 0. \end{cases}$$

Тогда замкнутая система управления имеет разрывную обратную связь и описывается уравнением

$$\ddot{y} = -k(y, \dot{y})y. \tag{2.54}$$

Пусть $0 < k_2 < 1 < k_1$, тогда при $k = k_1$ фазовыми траекториями системы будут эллипсы, вытянутые вдоль оси \dot{y} (рис. 2.67а), а при $k = k_2$ — эллипсы, вытянутые вдоль оси y (рис. 2.67б). “Сшивание” отрезков фазовых траекторий дает итоговый фазовый портрет устойчивой системы (рис. 2.67в). Поскольку $l/L = k_2/k_1$, то ординаты точек последовательного переключения

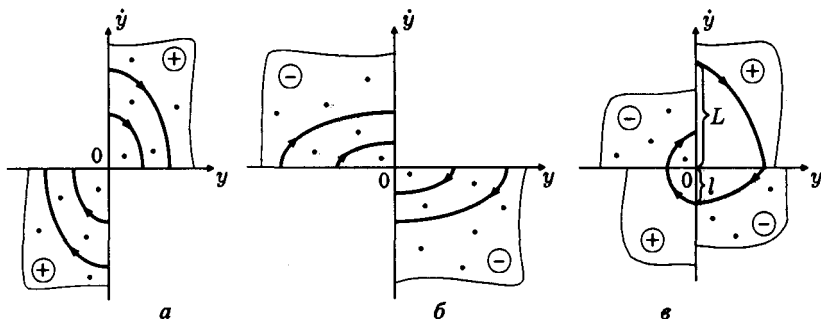


Рис. 2.67

ния фазовой траектории оси \dot{y} образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = \frac{k_2}{k_1} < 1,$$

что и влечет асимптотическую устойчивость нуля системы (2.54).

Заметим, что построенная система прочна, т.е. ее качественное поведение сохраняется при малых задержках (временных или пространственных) в переключениях. Структурная схема исследованной системы приведена на рис. 2.68. Вновь мы имеем дело с обратной связью, параметры которой претерпевают разрывы в функции фазового состояния системы.

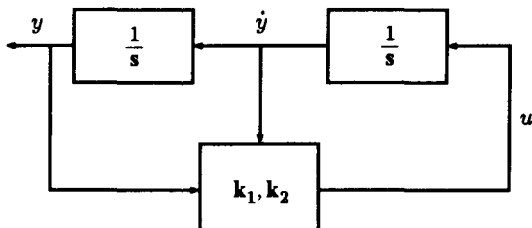


Рис. 2.68

Пример 16. Системы переменной структуры с движением по вырожденным траекториям. Рассмотрим задачу стабилизации в нуле объекта

$$\ddot{y} = u$$

при условии, что в обратной связи может быть использована информация о регулируемой координате y и знаке линейной комбинации

$$\sigma = \dot{y} + cy, \quad c = \text{const} > 0. \quad (2.55)$$

Вновь ясно, что никакая линейная обратная связь вида

$$u = -ky$$

не решает задачи стабилизации. Сделаем коэффициент k разрывным, например, по следующему правилу:

$$k(y, \sigma) = \begin{cases} c^2, & y\sigma > 0, \\ -c^2, & y\sigma \leq 0, \end{cases}$$

тогда получим систему с разрывной обратной связью, описываемую уравнением

$$\ddot{y} = -c^2|y| \operatorname{sgn} \sigma.$$

Для анализа этой системы используем метод фазовой плоскости. В области $y\sigma > 0$ (на рисунке она обозначена знаком \oplus) поведение системы описывается уравнением $\ddot{y} = -c^2y$, его фазовые траектории — эллипсы (рис. 2.69а). При $y\sigma \leq 0$ (на рисунке эта область обозначена знаком \ominus) движение подчинено уравнению $\ddot{y} = c^2y$ и его фазовые траектории — гиперболы (рис. 2.69б). В результате “сшивания” фазовых траекторий по границам разрыва получаем асимптотически устойчивую систему (рис. 2.69в). В исследуемой системе стабилизации каждая траектория за конечное время

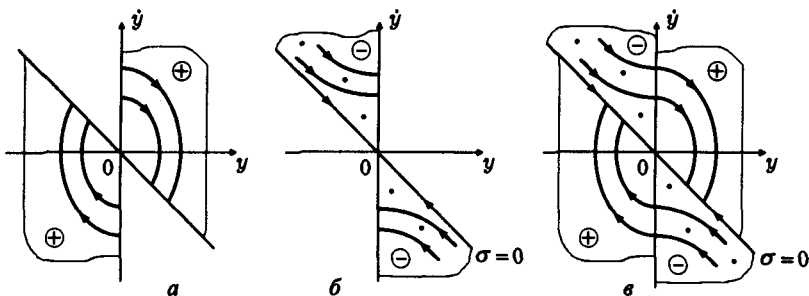


Рис. 2.69

достигает линии $\sigma = 0$ и далее не покидает ее. Действительно, в силу (2.55) выполнено равенство

$$\dot{y} + cy = 0$$

и $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Недостаток данной системы управления состоит в ее непрочности. Малые задержки в переключениях качественно меняют ее поведение: аperiodические переходные процессы могут стать колебательными (рис. 2.70а) или даже может наступить неустойчивость (рис. 2.70б).

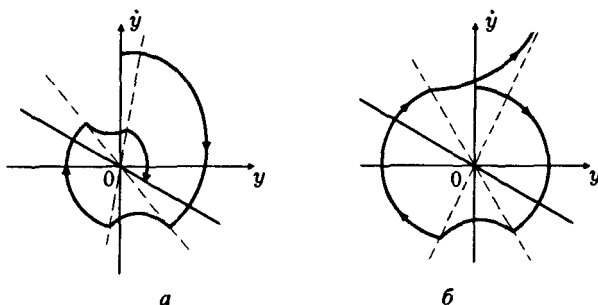


Рис. 2.70

2.3.5. Скользящий режим на всей прямой

При рассмотрении режимов переключения и движения по вырожденным траекториям выявляются определенные достоинства принципа переменности структуры, в том числе: простота закона обратной связи, уменьшение объема информации, необходимой для стабилизации объекта по сравнению с линейной обратной связью. Но видны и недостатки этих режимов: колебательность переходного процесса в режиме переключений и трудность организации движения по вырожденным траекториям при изменении параметров объекта и действии внешних сил. Не имеют в этих случаях простого ответа и вопросы, связанные с прочностью систем управления, а также с возможностью переноса методов синтеза на многомерные системы. Поэтому актуален следующий вопрос:

- возможно ли при сохранении достоинств принципа переменности структуры устранение или ослабление указанных выше недостатков?

Ответ на этот вопрос положителен, но для этого следует использовать скользящий режим на прямой.

Пример 17. Скользящий режим на прямой. Вновь рассмотрим задачу стабилизации в нуле объекта

$$\ddot{y} = u$$

при условии, что в обратной связи возможно использование информации о координате y и знаке линейной комбинации $\sigma = \dot{y} + cy$, $c = \text{const} > 0$. Ясно, что линейная обратная связь $u = -ky$ ни при каком фиксированном коэффициенте k задачу не решает.

Применим принцип переменности структуры, положим $u = \psi(y, \dot{y})$ и

$$\psi(y, \dot{y}) = \begin{cases} k_1, & y\sigma \geq 0, \\ k_2, & y\sigma < 0, \end{cases}$$

где константы $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, $c^2 > 0$. Тогда в секторе $y\sigma \geq 0$ на фазовой плоскости (y, \dot{y}) движение системы управления описывается уравнением (I):

$$\ddot{y} = k_1 y, \quad k_1 < 0,$$

фазовые траектории которого — эллипсы (рис. 2.71а). В секторе $y\sigma < 0$ действует уравнение (II):

$$\ddot{y} = k_2 y, \quad k_2 > 0,$$

и движение происходит по гиперболическим кривым (рис. 2.71б). Видно, что асимптотическая устойчивость не наступает ни при положительных, ни при отрицательных значениях k . Если, однако, фазовые траектории “сшить” по линиям разрыва $\sigma = 0$, $y = 0$, то получим асимптотически устойчивую систему (рис. 2.71в). Обозначения I и II на рисунках соответ-

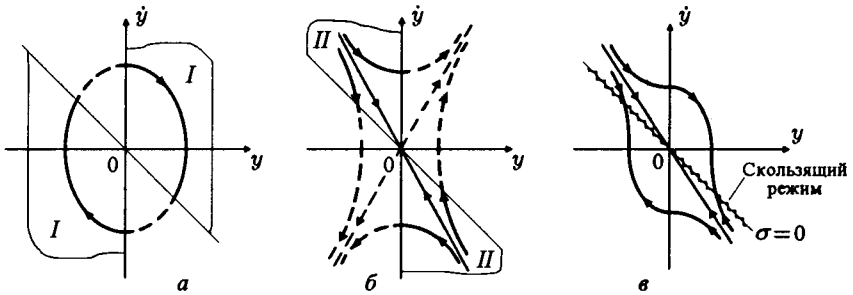


Рис. 2.71

ствуют областям действия структур (I) и (II). На прямой $\sigma = 0$ фазовые траектории уравнений (I) и (II) направлены “встречно” (рис. 2.72), где f^I , f^{II} — фазовые скорости. Формально это означает, что $\sigma \dot{\sigma} < 0$, когда $\sigma \neq 0$.

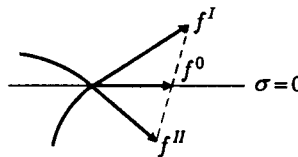


Рис. 2.72

Следовательно, фазовая точка не может покинуть прямую разрыва $\sigma = 0$, при дальнейшем движении выполнено равенство $\sigma \equiv 0$ и этому движению отвечает фазовый вектор $f^0 = \alpha f^I + (1 - \alpha) f^{II}$, $\alpha \geq 0$, направленный вдоль прямой разрыва $\sigma = 0$.

Строгий анализ движения системы в скользящем режиме дает теория А.Ф. Филиппова (определение решения, условия его существования, единственности, продолжимости вправо и т.д.). Здесь ограничимся эвристическими рассуждениями. Поскольку в скользящем режиме выполнено равенство $\sigma = \dot{y} + cy = 0$, то

$$y(t) = y(t_1) e^{-c(t-t_1)},$$

где t_1 — момент возникновения скользящего режима. Поскольку $c > 0$, то $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требуется. Значит, задача стабилизации решена. Заметим, что даже если бы имелась информация о линейной комбинации $\sigma = \dot{y} + cy$, а не о ее знаке, как выше, то для получения аналогичного результата с помощью линейной обратной связи $u = -k\sigma$ потребовалось бы устремление $k \rightarrow \infty$. Здесь же коэффициенты k_1 и k_2 конечны, что и обеспечивает прочность системе управления. Таким образом,

- в результате сочетания не являющихся асимптотически устойчивыми структур (*I* — эллиптической, *II* — гиперболической) возникло устойчивое движение, которого не было ни у одного из них, т.е. появилось новое качество.

Иными словами, введение в обратную связь разрывного статического элемента на два входа (ψ -ячейки) (рис. 2.73) наделяет замкну-

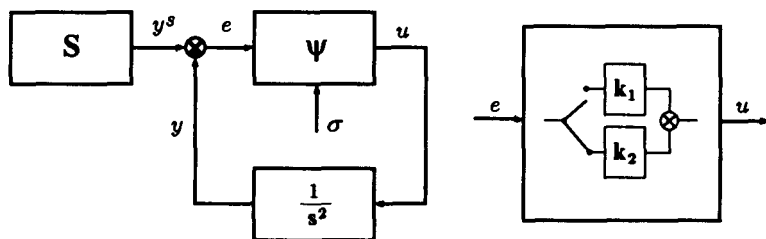


Рис. 2.73

тую систему управления новыми качествами:

- асимптотической устойчивостью при пониженных, по сравнению с линейной обратной связью, требованиях к объему информации;
- понижением порядка уравнения движения для всех траекторий, кроме асимптот (рис.2.71в);
- нечувствительностью к вариациям параметров объекта и к действию внешней силы;
- прочностью по отношению к сингулярным возмущениям.

И хотя сделанные выше выводы почти очевидны, приведем все-таки необходимые обоснования.

2.3.6. Анализ прочности СПС по отношению к параметрическим возмущениям

Рассмотрим систему переменной структуры, показанную на рис. 2.74, и исследуем ее свойства в предположении, что параметры объекта a_1 , a_2 и b известны с точностью до диапазонов

$$a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, \quad i = 1, 2,$$

$$0 < b \leq b^-,$$

т.е. имеется информация только о числах a_i^\pm и b^- , тогда как значения параметров объекта и характер их изменения во времени неизвестны.

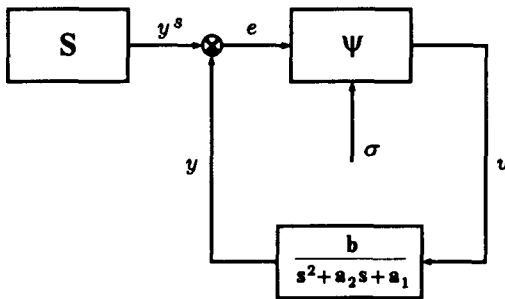


Рис. 2.74

Подобные возмущения объекта называют регулярными, поэтому рассматриваемая задача есть задача анализа прочности СПС по отношению к регулярным возмущениям.

Положим для удобства $y^s \equiv 0$. Тогда имеем дело с уравнением переменной структуры

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = b \psi y,$$

в котором характер переключений определяется действием ψ -ячейки:

$$\psi = \begin{cases} k_1, & y\sigma \geq 0 \\ k_2, & y\sigma < 0, \quad \sigma = \dot{y} + cy. \end{cases}$$

В области $y\sigma > 0$ действует уравнение

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + (a_1 - bk_1)y = 0,$$

и при выполнении неравенства

$$a_2^2 < 4(a_1 - bk_1),$$

в зависимости от знака параметра a_2 , движение осуществляется по скручивающимся (рис. 2.75а) или раскручивающимся (рис. 2.75б) спиральям (разумеется, все параметры считаются постоянными). В обла-

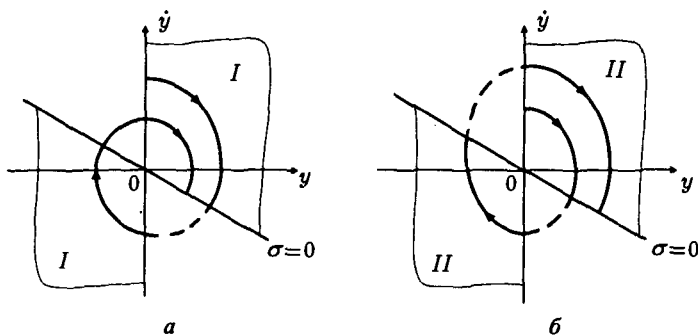


Рис. 2.75

сти $y\sigma < 0$ действует уравнение $\ddot{y} + a_2\dot{y} + (a_1 - bk_2)y = 0$, и при выполнении условия $a_1 - bk_2 < 0$ структуре *II* отвечают гиперболические фазовые траектории (рис. 2.76а). Разумеется, положение асимптотических траекторий (асимптот) меняется при изменении параметров объекта, и если при любых допустимых a_1, a_2, b выполнено неравенство $bk_2 > c(c - a_2) + a_1$, то асимптота, отвечающая устойчивому движению, расположена так, как это показано на рис. 2.76а. После “сшивания” фазовых траекторий структур *I* и *II* получаем фазовый портрет, изображенный на рис. 2.76б, на котором заштрихованы “ко-

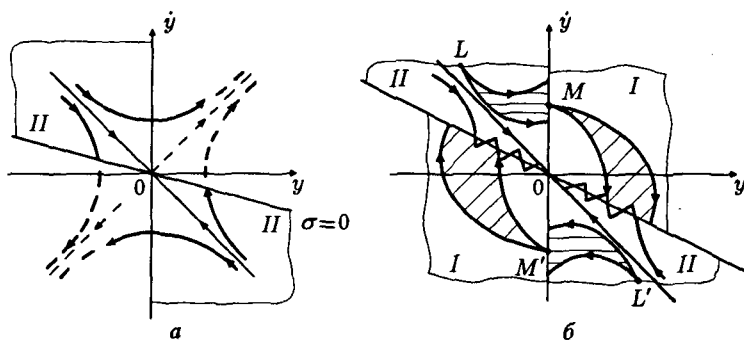


Рис. 2.76

сье” секторы с началом в точках M, M' и L, L' , заметаемые фазовыми траекториями СПС при тех или иных допустимых сочетаниях параметров a_1, a_2, b . Как и ранее, почти всегда фазовая точка за конечное время попадает на линию переключения $\sigma = 0$, где и возникает скользящий режим.

В скользящем режиме движение подчинено уравнению

$$\sigma = \dot{y} + cy = 0,$$

т.е. и в этом случае понижается порядок уравнения движения и достигается независимость движения от параметров объекта, при этом допускается произвольное изменение параметров.

Все сказанное выше справедливо, если имеют место условия

- “попадание” на прямую разрыва $\sigma = 0$,
- скользящий режим существует на всей прямой $\sigma = 0$.

Необходимым и достаточным условием попадания является отсутствие вещественных положительных нулей у полинома

$$\varphi(s) = s^2 + a_2^\pm s + (a_1^\pm - b^- k_1).$$

Достаточное условие существования скользящего режима имеет вид

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{d\sigma}{dt} \leq 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow -0} \frac{d\sigma}{dt} \geq 0 \quad (2.56)$$

и, так как равенство

$$\dot{\sigma} = (c - a_2)\sigma - [c(c - a_2) + a_1]y + b\psi y,$$

выполняется при

$$k_1 < \min_{a_i, b} \left[\frac{c(c - a_2) - a_1}{b} \right], \quad k_2 > \max_{a_i, b} \left[\frac{c(c - a_2) - a_1}{b} \right].$$

Заметим, что в условиях стабилизируемости методами СПС отсутствуют ограничения на скорость изменения параметров объекта, тогда как для линейных систем такие ограничения имеются, как, например, в методе замороженных коэффициентов.

2.3.7. СПС при наличии внешней силы

Рассмотрим проблему синтеза регулятора переменной структуры для системы, представленной на рис. 2.77.

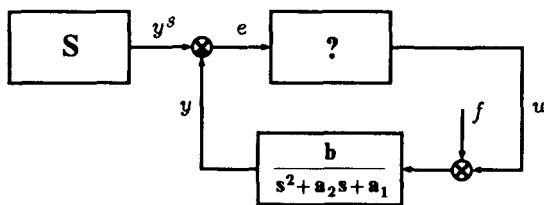


Рис. 2.77

Уравнения движения системы относительно ошибки и ее производных имеют вид

$$\ddot{e} + a_2 \dot{e} + a_1 e = -bu + F, \quad (2.57)$$

где

$$F = \ddot{y}^* + a_2 \dot{y}^* + a_1 y^* - bf,$$

и параметры возмущения F находятся в диапазонах

$$a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, \quad i = 1, 2; \quad 0 < b^- \leq b.$$

Возможны два варианта постановки задачи:

- 1) функция $F(t)$ известна;
- 2) функция $F(t)$ не измеряется, но известна ее мажоранта $F_m(t)$, т.е. при всех t справедлива оценка $|F(t)| \leq F_m(t)$.

Требуется стабилизировать объект (2.57) в нуле с использованием информации об ошибке e и ее производной \dot{e} . Заметим, что традиционные средства компенсации F , кроме глубокой обратной связи, для этой цели не годятся.

При синтезе обратной связи воспользуемся приемом из Примера 17. Возьмем линию переключения на плоскости (e, \dot{e}) в виде $\sigma = \dot{e} + ce$ и запишем выражение для ее производной в силу уравнений движения (2.57). Имеем

$$\dot{\sigma} = (c - a_2)\sigma - [c(c - a_2) + a_1]e - bu + F. \quad (2.58)$$

Сформируем управление в виде суммы двух компонент $u = u_e + u_F$, где первую компоненту u_e выберем, как и ранее, с разрывным коэффициентом, т.е.

$$u_e = -\psi_e e, \quad \psi_e = \begin{cases} k_1, & e\sigma \geq 0, \\ k_2, & e\sigma < 0. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в (2.58) получим

$$\dot{\sigma} = (c - a_2)\sigma + \dot{\sigma}_0 + bu_F + F, \quad (2.59)$$

где

$$\dot{\sigma}_0 = -[c(c - a_2) + a_1]e + b\psi_e e.$$

Если параметры ψ_e -ячейки выбраны так, как в Примере 17, а именно:

$$k_1 < \min_{a_i, b} \frac{c(c - a_2) + a_1}{b}, \quad k_2 > \max_{a_i, b} \frac{c(c - a_2) + a_1}{b},$$

то будет выполнено неравенство $\sigma \dot{\sigma}_0 \leq 0$. Если теперь вторую компоненту управления u_F выбрать так, чтобы имело место условие

$$\sigma(bu_F + F) \leq 0, \quad (2.60)$$

то, как это видно из выражения

$$\sigma \dot{\sigma} = (c - a_2)\sigma^2 + \sigma \dot{\sigma}_0 + \sigma(bu_F + F), \quad (2.61)$$

на поверхности $\sigma = 0$ выполняется условие $\sigma \dot{\sigma} \leq 0$, и имеет место скользящий режим. Более того, неравенство (2.60) гарантирует также и попадание изображающей точки на поверхность $\sigma = 0$. Действительно, если при $F \equiv 0$ выполнены условия попадания точки на поверхность $\sigma = 0$, то третье слагаемое в (2.61) эти условия усиливает.

Таким образом, если у полиномов

$$\varphi^\pm(s) = s^2 + a_2^\pm s + a_1^\pm - b^- k_1$$

нет положительных вещественных нулей, то условия попадания обеспечены неравенством (2.60).

Неравенству (2.60) удовлетворяет множество функций u_F . Укажем некоторые из них, характерные для СПС. В первом варианте при известном возмущении F таковой является функция

$$u_F = \psi_F F, \quad \psi_F = \begin{cases} l_1, & \sigma F \geq 0, \\ l_2, & \sigma F < 0, \end{cases}$$

где $b^- l_1 < -1$, $b^- l_2 \geq 1$. Во втором варианте при неизвестном возмущении F форма закона сохраняется, но вместо функции F используется ее мажоранта F_m :

$$u_F = \psi_F F_m, \quad \psi_F = \begin{cases} l_1, & \sigma \geq 0, \\ l_2, & \sigma < 0, \end{cases}$$

где $b^- l_1 \leq -1$, $b^- l_2 \geq 1$.

В структуре синтезированной системы управления для случая измеряемого возмущения, изображенной на рис. 2.78, видны две ψ -ячейки, что прямо характеризует эту систему как систему переменной

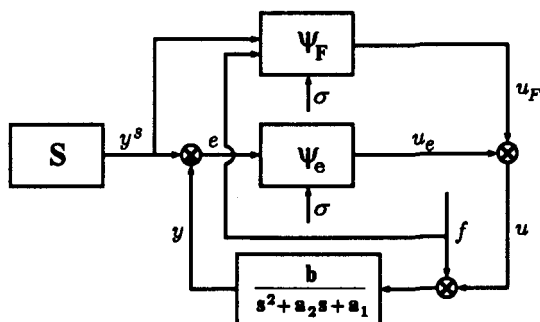


Рис. 2.78

структуры. В СПС скачкообразно меняется не только коэффициент обратной связи ψ_e , но и коэффициент прямой связи по возмущению.

Заметим, что ψ -ячейка является функциональным элементом на два входа, и ее можно представить в виде релейного элемента с изменяющейся “полкой” или, иначе, величиной коммутируемого сигнала. Это хорошо видно при так называемом квазирелейном представлении ψ -ячейки.

2.3.8. Квазирелейное представление ψ -ячейки

Стандартное отображение ψ -ячейки дано на рис. 2.79. Вход и выход

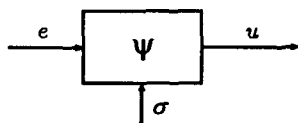


Рис. 2.79

ψ -ячейки связаны между собой выражениями

$$u = \psi e, \quad \psi = \begin{cases} k_1, & e\sigma \geq 0, \\ k_2, & e\sigma < 0. \end{cases}$$

Без потери общности положим $k_1 = -k_2 = -k$, и тогда имеем для ψ -ячейки выражение $\psi = -k \operatorname{sgn}(e\sigma)$ и, следовательно, СПС-й закон обратной связи имеет вид

$$u = \psi e = -k|e| \operatorname{sgn} \sigma.$$

Последнее представление и называют квазирелейным представлением ψ -ячейки. Ему соответствует схема на рис. 2.80 или более подробная схема на рис. 2.81. На рис. 2.81 знак \boxtimes используется для обозначения

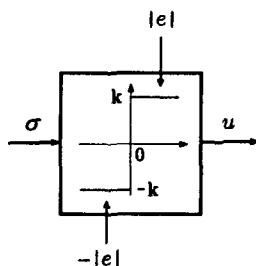


Рис. 2.80

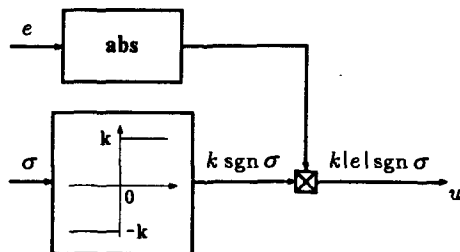


Рис. 2.81

мультипликатора, т.е. оператора перемножения сигналов, а $\operatorname{abs}(\cdot)$ — обозначение операции вычисления абсолютного значения.

Пример 18. СПС при сингулярном возмущении. Исследуем влияние на свойства СПС, синтезированной в Примере 17, временной задержки в переключениях, т.е. рассмотрим качественное поведение решений следующего уравнения:

$$\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = -bk|y| \operatorname{sgn}_\tau \sigma,$$

$$\sigma = \dot{y} + cy, \quad \operatorname{sgn}_\tau \sigma = \operatorname{sgn} \sigma(t - \tau),$$

где все константы и параметры удовлетворяют стандартным условиям, а τ — достаточно малая постоянная времени запаздывания. Индекс τ означает, как обычно, что ψ -ячейка “срабатывает” не в момент смены знака входным сигналом, а через время τ . Отсюда следует, что вместо идеального скользящего режима, имеющего место при $\tau = 0$ (рис. 2.82а), воз-

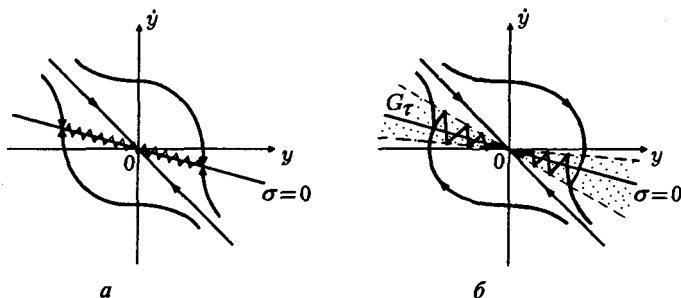


Рис. 2.82

никает режим переключений, называемый реальным скользящим режимом (рис. 2.82б). Если при идеальном скольжении фазовая точка принадлежит линии $\sigma = 0$:

$$(y, \dot{y}) \in G_0 = \{(y, \dot{y}) \mid \sigma = 0\},$$

то для достаточно малого τ при реальном скольжении фазовая точка находится в некоторой окрестности линии $\sigma = 0$, т.е.

$$(y, \dot{y}) \in G_\tau = \{g(y, \dot{y}) \mid |\sigma| \leq \delta(\tau) |y|\},$$

где $\delta = O(\tau)$, т.е. δ — величина порядка τ .

Из рассмотренного примера следует, что асимптотическая устойчивость сохраняется при таком сингулярном возмущении, в отличие от релейной системы (рис. 2.82б). Формально сходимости решения к началу в режиме реального скольжения следует из дифференциального уравнения и неравенства, описывающих этот режим:

$$\dot{y} + cy = \sigma, \quad |\sigma| \leq \delta |y|.$$

Ясно, что при достаточно малом δ (т.е. малом τ) имеет место экспоненциальная сходимость к нулю. Иными словами,

- СПС прочна по отношению к сингулярным возмущениям.

Пример 19. СПС при функциональном возмущении. Рассмотрим влияние на качественное поведение СПС функциональной неидеальности, например, положительного гистерезиса величиной $\Delta > 0$ в переключениях ψ -ячейки. В таком случае имеем дело с уравнением

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = -bk|y| \operatorname{sgn}_\Delta \sigma,$$

в котором переключения происходят на поверхности

$$\sigma = \dot{y} + cy,$$

а все параметры и их выбор описаны в Примере 17.

Свойства разрывного элемента $\operatorname{sgn}_\Delta \sigma$ таковы, что переключение наступает только на линиях $|\sigma| = \Delta$ после прохождения нуля $\sigma = 0$, поэтому вместо стандартного фазового портрета СПС с идеальным скользящим режимом имеем реальный скользящий режим в полосе $|\sigma| \leq \Delta$ (рис. 2.83). Это,

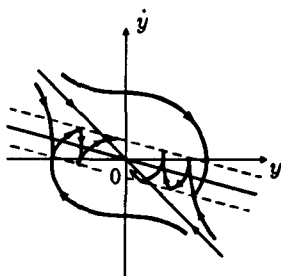


Рис. 2.83

конечно, ведет к диссипативности, т.е. к потере свойства асимптотической устойчивости. Формально этот факт следует из соотношений

$$\dot{y} + cy = \sigma, \quad |\sigma| \leq \Delta.$$

Следовательно,

- СПС не является прочной по отношению к функциональным возмущениям.

2.3.9. Ограничения, недостатки и проблемы теории СПС

Рассмотренные выше примеры и многие другие результаты по теории и практике систем переменной структуры позволяют сделать выводы, важные для развития теории обратной связи. Приведем только некоторые из них.

- Параметры реального скользящего режима зависят от скрытых параметров τ , Δ в рассмотренных выше примерах. Возникающие при этом “биения”, т.е. режимы высокочастотных колебаний в

окрестности $\sigma = 0$, негативно сказываются на работе механических и электромеханических приводов, которые весьма часто используют на практике в качестве силовых установок. Это обстоятельство делает невозможным практическое использование классических СПС.

- Моделирование стандартного скользящего режима на дискретной ЭВМ возможно только методами 1-го порядка (Эйлера, Адамса и т.д.), так как методы более высоких порядков требуют существования производных от правой части дифференциального уравнения. Это условие не выполняется для уравнений, описывающих СПС. При "дискретном" скольжении имеют место следующие соотношения:

$$\sigma \sim O(h), \quad \dot{\sigma} \sim O(h),$$

где h — шаг дискретизации, которые означают, что отклонение траекторий от линии скольжения пропорционально шагу дискретизации. Для повышения точности скольжения нужно уменьшать шаг дискретизации h , что немедленно приводит к увеличению времени расчетов, так как последние имеют порядок $1/h$. Именно это обстоятельство делает невозможным прямое использование СПС по скользящим режимам в системах прямого цифрового управления,

- Трудности стабилизации неопределенного объекта с относительным порядком r , таким, что $1 < r < n - 1$. В значительной степени эти трудности связаны с получением информации о состоянии неопределенной системы, в частности, с получением "хороших" оценок производных выходного сигнала объекта.

В связи с перечисленными обстоятельствами можно сформулировать следующую проблему: *построить систему управления со свойствами идеальной СПС, но с гладкой обратной связью, прочной по отношению к регулярным, сингулярным, функциональным и структурным возмущениям.* Эта проблема и рассматривается во второй части монографии.

2.4. Библиографический комментарий

Интерес к исследованию разрывных систем возник очень давно, например, в классической механике он появился в связи с анализом влияния кулоновского трения и гистерезисных явлений, а в электротехнике и радиотехнике — в связи с появлением стабилизаторов, различных генераторов, экономичных усилителей мощности и т.п.

Было замечено, что релейные системы склонны к автоколебаниям, но наряду с этим некоторые движения в релейных системах мало чувствительны к параметрам и потому оказались полезными при компенсации влияния факторов неопределенности на свойства системы регулирования. Потребность в целенаправленном использовании этого

свойства, а также необходимость в средствах подавления автоколебаний привели к созданию теории релейных систем. На первых этапах значительный вклад в эту теорию внесли Х.Л. Хазен (H.L. Hazen) [91], И. Флюгге-Лотц (I. Flugge-Lotz) [90] и Я.З. Цыпкин [75]. С современным состоянием теории релейных систем можно ознакомиться по книгам [9, 14].

Интерес современной теории управления к релейным системам связан прежде всего с задачами оптимального быстрогодействия при ограниченных ресурсах [60, 94]. Некоторые аспекты релейной стабилизации в условиях неопределенности рассмотрены в работе [7]. Математические методы анализа скользящих режимов, возникающих в релейных системах, можно найти в [71]. Проблемам управления неопределенными объектами посвящено много работ, см., например, [46, 55, 69, 73, 74, 76]. Основы теории систем автоматического управления переменной структуры изложены в монографии [15].

Часть II

Новые типы обратной связи

Во второй части монографии излагаются теоретические основы построения нового класса нелинейных систем автоматического управления. Математическую основу построения таких систем управления составляет принцип бинарности, в соответствии с которым координаты и операторы нелинейных управляемых систем рассматриваются в виде единой совокупности ее переменных состояния и между ними не проводится принципиального различия. Более того, каждый элемент такой совокупности может выступать в качестве координаты или оператора, а содержательная интерпретация переменной состояния предопределена ее ролью в конкретном локальном преобразовании, и эта роль может, разумеется, меняться от преобразования к преобразованию. Это означает, что операторы могут подвергаться преобразованиям, аналогичным тем, которые используются для преобразования координат. Это обстоятельство немедленно ведет к необходимости введения новых типов обратной связи, когда целью обратной связи служит не формирование переменной, как в классической теории регулирования, но оператора.

Сочетание принципа бинарности с принципом регулирования по отклонению позволяет перейти к автоматическому формированию законов управления в условиях, когда априорной информации недостаточно для прямого синтеза обратной связи, сообщающей замкнутой системе управления требуемой совокупности свойств.

Во второй части развивается понятийный аппарат новой теории, синтезируются обобщенные структуры замкнутых систем с новыми типами обратной связи. Значительное внимание уделяется анализу конкретных примеров.

Библиографическая справка. Общие принципы теории новых типов обратной связи сформулированы в [18, 19, 79]. Первое систематическое изложение этой теории можно найти в [17]. Раз-

личным ее аспектам посвящены работы [20, 21, 37–42, 85–88]. Стабилизация неопределенных систем с использованием нестандартной обратной связи рассмотрена в работах [26–28, 31–36, 44, 45, 81–84].

Математическая теория разрывных систем разработана А.Ф. Филипповым в работе [72], а с различными прикладными аспектами стандартных скользящих режимов можно ознакомиться в трудах [9, 14, 68]. Скользящим режимам высших порядков посвящены работы [22, 23, 80]. Наиболее подробное на сегодня изложение этой теории содержится в статье [25].

С проблемой получения высококачественных производных сигналов можно ознакомиться по работам [1, 6, 49]. Математические вопросы дифференцирования рассмотрены в монографии [66], различные дискретные аппроксимации можно найти в книге [65], современная трактовка проблемы дифференцирования дана в [2].

Проблема оптимального управления в ее современном виде оформилась благодаря работам Л.С. Понтрягина (принцип максимума) [63] и Р. Беллмана (принцип оптимальности) [4]. Оптимальное управление — наиболее проработанный и динамично развивающийся раздел теории управления. Классическая теория представлена в работах [3, 5, 8, 10, 50, 54, 70, 94]. Численные аспекты оптимального управления обсуждались в монографии [59]. Современная трактовка основных идей оптимального управления дана в книге [51]. Обобщения изложенного в разделе метода субоптимального управления можно найти в работах [29, 30, 43].

Глава 3

Общие положения теории новых типов обратной связи

Основу новой теории составляет принцип бинарности, раскрывающий двойственную природу сигналов в нелинейных динамических системах: сигналы могут выступать либо в качестве переменных, над которыми осуществляются преобразования, либо в качестве операторов, определяющих эти преобразования. Принцип бинарности позволяет возложить синтез оператора стабилизирующей обратной связи на вспомогательную нелинейную систему с обратной связью. Развитие этой концепции и соответствующих методик синтеза привело к необходимости рассмотрения трех новых типов обратной связи: операторной, операторно-координатной и координатно-операторной.

В данной главе излагаются основные понятия, определения и принципы построения систем автоматического управления с новыми типами обратной связи.

3.1. Вводные замечания

Из предыдущего раздела следует вывод о том, что традиционная теория систем автоматического управления развивалась в основном в рамках структурных схем, приведенных на рис. 3.1. Проблема син-

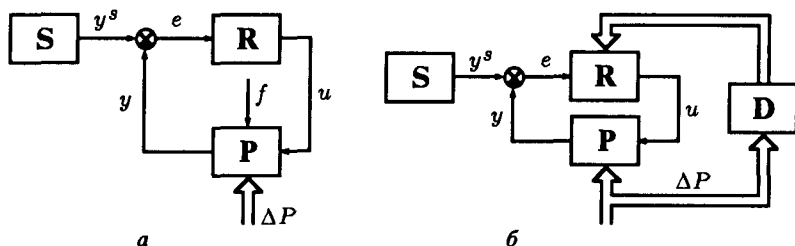


Рис. 3.1

теза системы управления сводится в рамках этих структур к выбору по априорной информации об объекте, помехе и целях регулирования оператора регулятора R , решающего задачу стабилизации, т.е. обеспечивающего условие: $e \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если априорной информации достаточно для решения задачи синтеза, т.е. информация точна и допускаются лишь малые отклонения ΔP от модели линейного оператора P , а внешних сил f — от их волновой модели, если, кроме того, цели регулирования заданы не очень “жестко”, то для синтеза стабилизирующего оператора R вполне применимы описанные в предыдущем разделе классические методы синтеза.

В тех случаях, когда отклонение ΔP не мало, а об изменениях характеристик объекта управления можно получить в режиме on-line необходимую информацию, в таких случаях можно организовать, также в режиме on-line, поднастройку оператора обратной связи R по схеме на рис. 3.1б, принятой в теории адаптивного управления.

Если же изменения оператора объекта ΔP происходят интенсивно и к тому же неконтролируемым образом, помеха f не является волновой, кроме того, сформулированы “строгие” требования к качеству регулирования, а также имеются ограничения на фазовые переменные и управление, то *традиционные методы синтеза стабилизирующих регуляторов неприменимы и следует искать новые подходы к синтезу САУ в таких сложных условиях.*

При определении направления поиска, как обычно, полезно обратиться к опыту и аналогиям. Вспомним, что принцип обратной связи заменил принцип регулирования по возмущению, когда это возмущение стало неизвестным. И если при известном возмущении целью синтеза регулятора было получение “программы” $u^*(t)$, то при отсутствии информации о возмущении целью синтеза регулятора стало получение его оператора R , вырабатывающего требуемый сигнал управления $u(t)$ с помощью обратной связи. Сами же значения сигнала $u(t)$ стали несущественными, важно лишь то, что при правильном выборе оператора R замкнутая система управления имеет требуемое свойство, а именно

$$e(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Указанный выше переход от формирования сигнала к формированию оператора, вырабатывающего нужный сигнал, можно возвести в принцип и дать ему, например, следующую формулировку:

- при дефиците информации следует переходить от программного формирования функции (элемента) к синтезу алгоритма (оператора), генерирующего функцию.

Как функция времени $u(t)$ — элемент некоторого множества допустимых управлений, так и оператор R — только элемент множества \mathcal{R} стабилизирующих обратных связей. Поэтому для получения требуемого оператора R при дефиците информации используем сформулированный выше принцип. Именно, *будем синтезировать не сам оператор обратной связи R , но алгоритм его формирования, а поскольку все это происходит в условиях неопределенности, то без механизма обратной связи здесь не обойтись.* Заметим, что эта идея является явной альтернативой идее адаптивного управления (рис. 3.1б), когда с

помощью процедуры идентификации реализуется “программная” генерация требуемого оператора R .

Сформулированный выше принцип впредь будем называть принципом генерации. Разумеется, принцип генерации может быть распространен и на формирование алгоритма, генерирующего оператор R , и т.д. и т.п. При применении принципа генерации естественным образом возникают следующие первоочередные вопросы:

- каким образом осуществлять синтез контура генерации;
- что будет ошибкой или регулируемой координатой такого контура;
- что следует применять в качестве регулирующего органа в этом контуре;
- можно ли из этой идеи извлечь практическую выгоду, ведь контур генерации можно рассматривать как часть регулятора, и откуда следует, что такой синтез регулятора “по частям” проще синтеза регулятора “в целом”.

На некоторые из этих вопросов ответы даются легко, на другие однозначных ответов нет вообще. Это означает, что в реализации намеченного плана по автоматическому синтезу стабилизирующих регуляторов в условиях неустранимой неопределенности по априорной и текущей информации много эвристики и произвола. Отчасти это можно устранить с помощью следующей системы базовых понятий.

3.2. Система базовых понятий

Для придания развиваемой теории конструктивного характера нам потребуется ряд нестандартных для классической теории управления понятий, и ключевое из них вводится в следующем пункте.

3.2.1. Сигнал-оператор

Для обозначения того, что изменению подвергается оператор, будем применять двойную стрелку (рис. 3.2). Соответствующую переменную обозначаем буквами греческого алфавита, например μ , и назы-

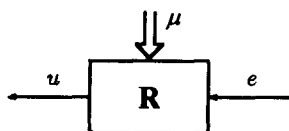


Рис. 3.2

ваем сигналом-оператором или для краткости О-сигналом (рис. 3.3а) в отличие от обычных переменных, обозначаемых латинскими буквами и одинарными стрелками (рис. 3.3б) и называемых сигналами-координатами или К-сигналами. Поскольку всякий О-сигнал, как и К-



Рис. 3.3

сигнал, имеет физический носитель, то ясно, что различие между О- и К-сигналами условное и предопределяется интерпретацией участия сигнала в локальном преобразовании $y = P_1(\mu, x) = P_2(x, \mu)$ (рис. 3.4). В первом случае (рис. 3.4а) преобразуется сигнал x , а сигнал μ опре-

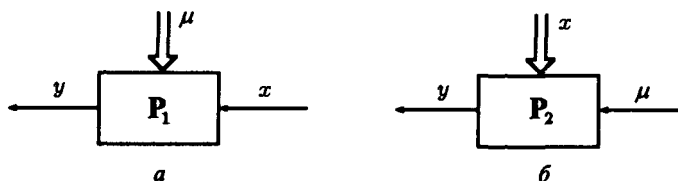


Рис. 3.4

деляет оператор преобразования. Во втором случае (рис. 3.4б) все с точностью до наоборот. Таким образом, О- и К-сигналы образуют общую совокупность переменных состояния нелинейной системы, и поэтому удобно ввести преобразователи подобия, действия которых можно полностью уяснить из анализа рис. 3.5. Введенная типизация



Рис. 3.5

сигналов естественным образом влечет типизацию основных структурных элементов системы автоматического управления.

3.2.2. Типы динамических объектов

В зависимости от типа входного и выходного сигналов динамического звена возможно выделение четырех основных типов динамических объектов, изображенных на рис. 3.6. Нужно заметить, что в раз-

личных дисциплинах объекты подобных типов используются давно, однако классификация их по указанным выше признакам не проводи-

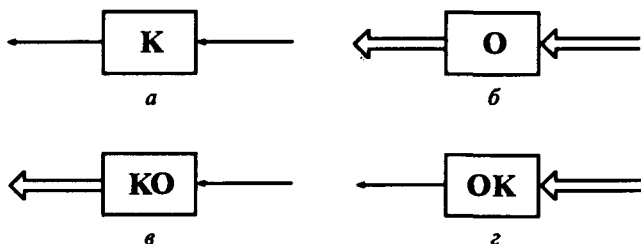


Рис. 3.6

лась. Приведем лишь некоторые примеры объектов разных типов:

К-объект: стандартный колебательный контур, преобразующий входные напряжения в выходные;

О-объект: колебательный контур с вариконом, преобразующий емкость контура в частоту колебаний;

КО-объект: стандартный колебательный контур, вход — напряжение, выход — характеристика;

ОК-объект: устанавливает связь между параметрами колебательного контура и выходным напряжением.

3.2.3. Бинарная операция

Из предыдущего изложения видна важная роль, отводимая элементу на два независимых входа, изображенному на рис. 3.7. Такой элемент

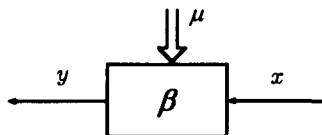


Рис. 3.7

описывается уравнением $y = \beta(\mu, x)$ и называется бинарным элементом. Бинарный элемент может быть:

линейным по x : $y = \beta_1(\mu)x$;

линейным по μ : $y = \mu\beta_2x$;

линейным по x и μ , тогда он называется билинейным.

Простейший билинейный элемент — множитель с масштабированием, описываемый уравнением

$$y = k \mu x.$$

Бинарный элемент называется сепарабельным, если

$$y = \beta_1(\mu) \beta_2(x).$$

Бинарный элемент обобщает понятия релейного элемента и ψ -ячейки. Так, релейный элемент можно получить из бинарного при $\mu = \text{const}$, а ψ -ячейку — при $\beta_1 = \text{sgn } \mu$, $\beta_2(x) \geq 0$.

3.2.4. Типы регулирующих органов

Элемент системы управления, выходная переменная которого оказывает непосредственное влияние на вход объекта, называется регулирующим органом. Регулирующие органы бывают статическими и динамическими.

В классической теории управления регулирующим органом чаще всего выступают статический усилитель (рис. 3.8а) или интегрирующий усилитель (рис. 3.8б), т.е. линейные звенья. При использовании

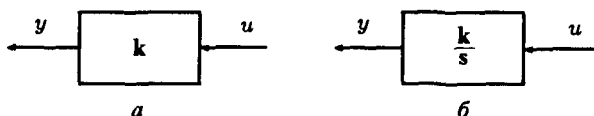


Рис. 3.8

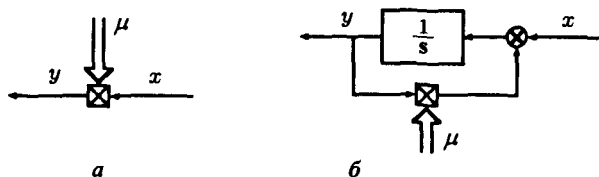


Рис. 3.9

бинарного элемента регулирующие органы становятся нелинейными и появляются дополнительные возможности по управлению их свойствами. Примеры статического и динамического бинарного регулирующего органа даны на рис. 3.9.

3.2.5. Новые типы обратной связи

При расширенном наборе типов динамических звеньев представляется оправданным помимо обычной или, иначе, координатной обратной связи (КОС) ввести в обиход еще три новых типа обратной связи:

координатно-операторную, или КООС, операторно-координатную — ОКОС и операторную — ООС (рис. 3.10). Теперь мы располагаем

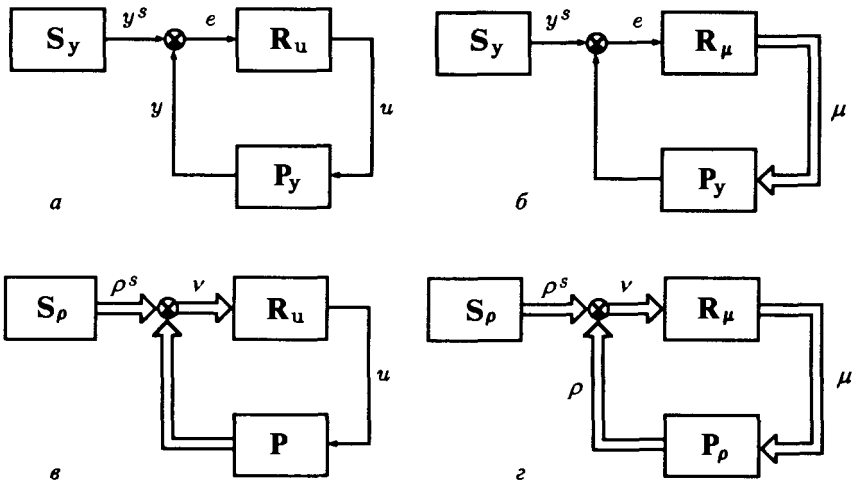


Рис. 3.10

необходимым минимумом базовых понятий и можем приступить к изложению основных фактов теории.

3.3. Структурный синтез бинарных систем

3.3.1. Задача стабилизации

Рассмотрим стандартную задачу стабилизации неопределенного объекта P (рис. 3.11) в условиях, когда по априорной информации о координатном $f \in F$ и операторном $a \in A$ возмущениях требуется выбрать оператор R_u стабилизирующей обратной связи (рис. 3.12). Предположим, что по условию задачи требуется не только добиться

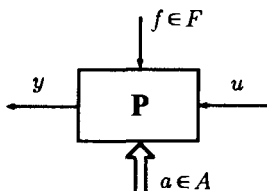


Рис. 3.11

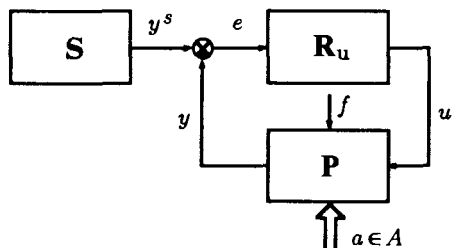


Рис. 3.12

стабилизации, т.е. “устойчивости” ошибки регулирования, но и обеспечить заданное качество переходного процесса. Пусть, например, в переходных процессах требуется выполнение соотношения

$$S_e(c)e = e,$$

где $S_e(c)$ — известный оператор, c — его параметр, $c \in C$.

При этих естественных допущениях возможно провести структурный синтез бинарной системы стабилизации. Действительно, следуя изложенной выше общей концепции бинарного управления, откажемся от априорного выбора оператора обратной связи R_u по схеме на рис. 3.12 и перейдем к его автоматическому выбору с помощью сигнала-оператора μ по схеме, представленной на рис. 3.13. В ре-

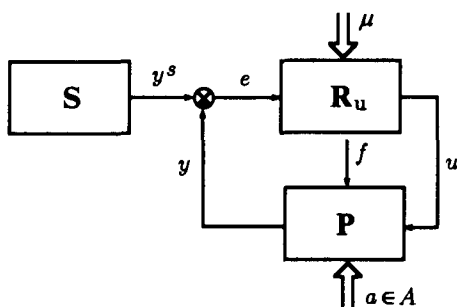


Рис. 3.13

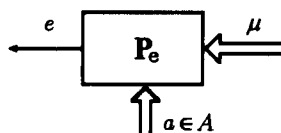


Рис. 3.14

зультате этого перехода проблема выбора конкретного оператора R_u заменена более простыми проблемами выбора семейства стабилизирующих операторов R , маркируемых сигналом-оператором μ , и формирования требуемого значения самого сигнала-оператора μ .

Обсуждение проблемы выбора семейства операторов R пока отложим и займемся принципами формирования надлежщего μ . Поскольку качество системы управления в поставленной задаче выражено через ошибку регулирования, то систему на рис. 3.13 можно представить в виде нового (обобщенного) объекта P_e (рис. 3.14), имеющего выходом ошибку регулирования e , а входом — сигнал-оператор μ , т.е. P_e является нелинейным объектом ОК-типа, на который действует неизвестное возмущение $a \in A$. Для теории регулирования это стандартная постановка задачи стабилизации, решаемая с помощью рассмотренных в предыдущем разделе принципов регулирования. В частности, если ввести в рассмотрение сигнал

$$e^s = S_e e,$$

где S_e — оператор, отражающий требования к эталонному поведению ошибки, то можно ввести в рассмотрение новую ошибку регулирования $\sigma = e^s - e$, для стабилизации которой в нуле (а это дает решение

исходной задачи, так как из $\sigma = 0$ следует требуемое соотношение $S_e e = e$) целесообразно использовать обратную связь по схеме, представленной на рис. 3.15, где R_μ — оператор координатно-операторной

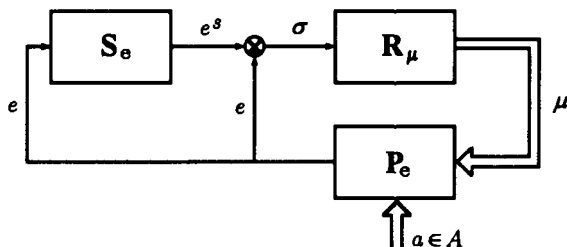


Рис. 3.15

обратной связи, для синтеза которого могут быть применены все известные приемы синтеза стабилизирующей обратной связи при наличии неизмеряемого координатного возмущения $a \in A$.

Разумеется, при этом возникают неизбежные особенности, обусловленные нелинейностью объекта P_e , но по крайней мере принципиальных трудностей нет. Это означает, что

- сложная проблема компенсации неизвестного операторного возмущения сведена к традиционной и хорошо изученной проблеме компенсации координатного возмущения.

Схеме на рис. 3.15 можно сопоставить более детальную схему системы управления с двумя типами обратной связи: с координатной и координатно-операторной. На рис. 3.16 представлена схема с двумя локальными регуляторами: К-регулятором R_u и КО-регулятором R_μ .

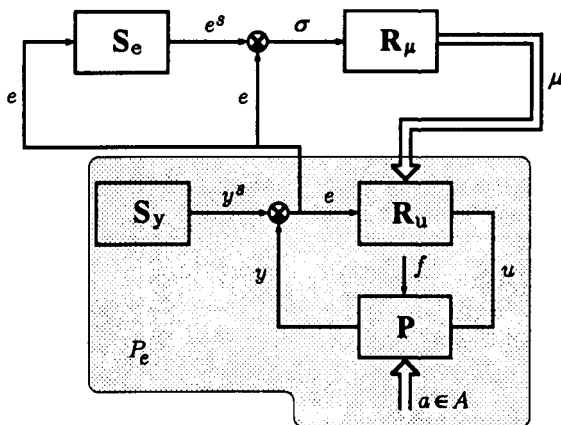


Рис. 3.16

Изложенный прием синтеза структуры регулятора можно трактовать как способ получения нелинейного регулятора R в схеме на рис. 3.17, и, вообще говоря, априорно не очевидно, почему этот нелинейный регулятор должен иметь именно такую структуру. В пре-

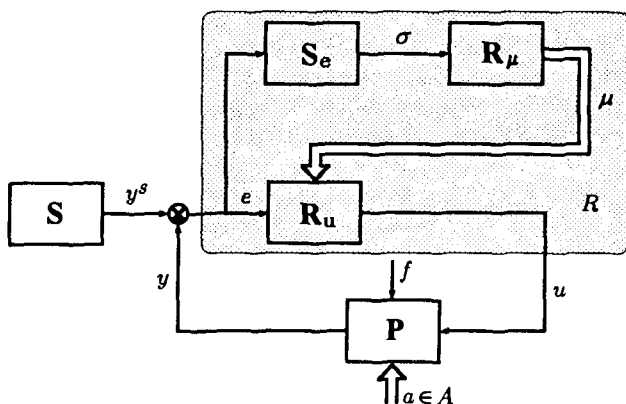


Рис. 3.17

дыдущей схеме оператор $S_e(c)$, определяющий эталонное свойство системы управления, зависит от параметра c , который часто задан неоднозначно, а только с точностью до принадлежности некоторому множеству C , т.е. $c \in C$. Естественно полагать, что, меняя параметр c в пределах множества C , можно улучшить некоторые характеристики системы.

Например, хорошо известно, что снижение коэффициентов усиления в обратной связи благоприятно сказывается на помехозащищенности системы, уменьшает влияние ограничений и т.п. С другой стороны, если в схеме на рис. 3.16 оператор R_u реализует статическую бинарную операцию, т.е.

$$R_u = k\mu x, \quad c = \text{const},$$

то 0-сигнал μ выполняет роль коэффициента передачи и потому должен быть ограничен, т.е. $|\mu| \leq 1$.

Проанализируем теперь режим работы структуры на рис. 3.15, когда выполняется требуемое равенство $\sigma = 0$. Последнее эквивалентно двум равенствам

$$S_e(c)e = e, \quad e = P_e(a)\mu.$$

При заданном параметре c из первого соотношения находим зависимость $e(c)$, а затем, из второго уравнения, — требуемое значение 0-сигнала

$$\mu = P_e^{-1}(a)e(c), \quad (3.1)$$

которое, естественно, зависит от неизвестного параметра a , и именно поэтому его нельзя было вычислить по априорным данным.

Второй вывод из (3.1) состоит в том, что когда параметр a меняется в широких пределах, то пределы изменения сигнала μ также должны быть достаточно большими, что может оказаться несовместимым с ограничением

$$|\mu| \leq 1. \quad (3.2)$$

Имеется одна принципиальная возможность выполнения равенства (3.1) при соблюдении ограничения (3.2). Она, очевидно, связана с изменением параметра $c \in C$ в зависимости от О-сигнала μ . Реализация этого плана означает переход от схемы на рис. 3.15 к схеме системы, представленной на рис. 3.18, где теперь предполагается наладить изменение параметра c с помощью О-сигнала ρ , т.е. $c = c(\rho)$. Поскольку

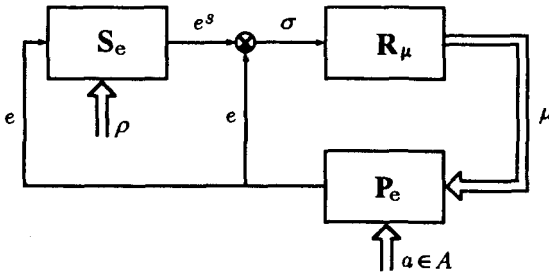


Рис. 3.18

в этом случае μ — выходной, а ρ — входной сигнал, то мы имеем дело с управлением О-объектом (рис. 3.19), который заменяет схему на рис. 3.18.

Вновь мы приходим к стандартной задаче управления неопределенным объектом, для решения которой естественно использовать обратную связь, в данном случае, разумеется, операторного типа. Поскольку целью регулирования по постановке задачи является выполнение ограничения $|\mu| \leq 1$, то проблему можно трактовать (без потери общности) как проблему стабилизации О-сигнала μ в нуле. Поэтому нет необходимости в задатчике, и после применения обратной связи по регулируемой координате получаем структуру системы, изображенную на рис. 3.20, где R_ρ — оператор О-регулятора.

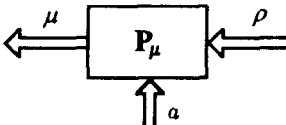


Рис. 3.19

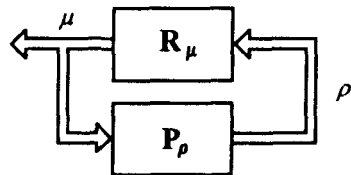


Рис. 3.20

Раскрывая строение объекта P_e с помощью рис. 3.18, находим сначала систему с двумя типами обратной связи (рис. 3.21), а после детализации (рис. 3.22) обнаруживаем, что в системе управления на самом деле использованы три типа обратной связи.

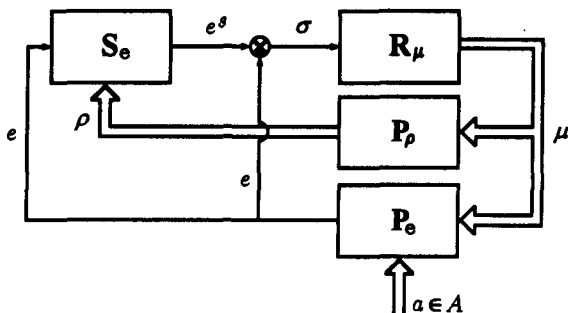


Рис. 3.21

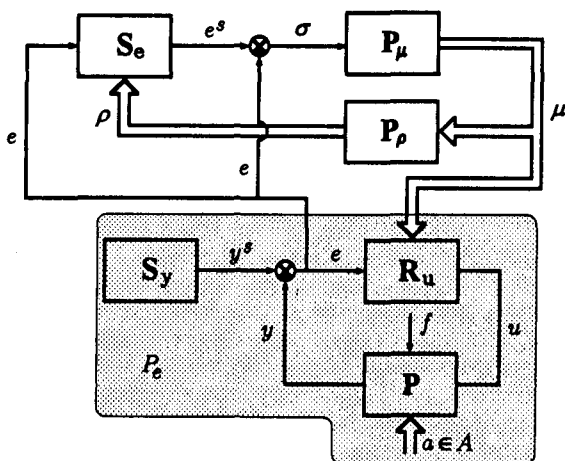


Рис. 3.22

Из приведенных схем легко увидеть, что О-связь действует согласованно с ОК-связью и направлена на стабилизацию σ в нуле.

В предыдущей схеме выбор оператора О-обратной связи R_ρ достаточно произволен, и поэтому в этой схеме имеется еще достаточно свободы, чтобы наделить траекторию дрейфа параметров оператора $S_e(c)$ $c(t) \in C$ теми или иными нужными свойствами. Это может оказаться весьма кстати, так как оператор $S_e(c)$ ответственен за качество системы управления. Пусть, например, требуется приблизить функцию $c(t)$ к функции $c^s(t) \in C$, используя для этого дополнитель-

ное воздействие v на объект управления P , суммируемого с основным сигналом $u(t)$. Для синтеза регулятора, решающего эту задачу, объект на рис. 3.22 от входа v к входу $c(t)$ можно представить КО-объектом P_c (рис. 3.23). Вновь, следуя классической традиции, для решения задачи слежения за сигналом $c^s(t)$ прибегаем к услугам обратной связи, в данном случае — операторно-координатного типа, и в результате получаем структуру, представленную на рис. 3.24, где

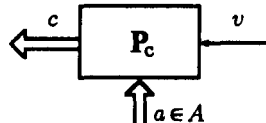


Рис. 3.23

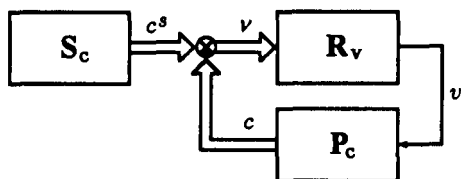


Рис. 3.24

S_c — задатчик О-сигнала c^s , v — О-ошибка регулирования, R_v — ОК-регулятор. После раскрытия внутреннего устройства P_c -объекта получаем систему управления со всеми возможными четырьмя типами обратной связи (рис.3.25). Еще раз подчеркнем, что оконтуренная часть на рис. 3.25 является, по сути дела, нелинейным регулятором, априорный синтез которого традиционными средствами невозможен, а вновь предложенная теория, базирующаяся на принципе бинарности, дает требуемый результат.

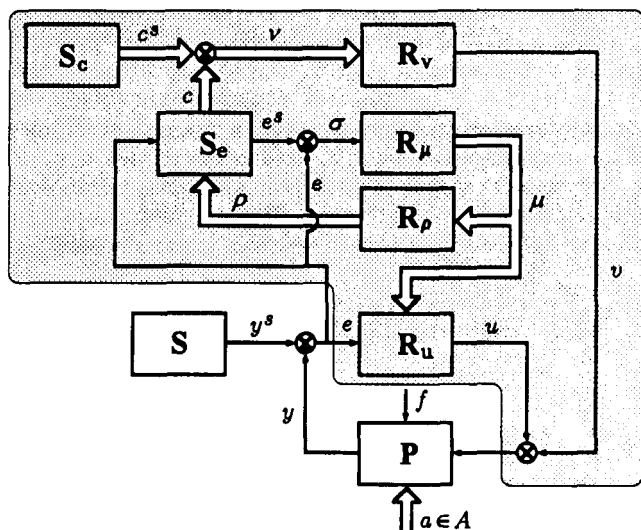


Рис. 3.25

3.3.2. Нелинейная обратная связь как средство подавления неопределенности

Главная идея продемонстрированного выше подхода к структурному синтезу динамических систем состоит в сведении сложной новой задачи к последовательности традиционных и решаемых, по крайней мере принципиально, известными средствами задач.

Для простоты был использован только принцип регулирования по отклонению, который в сочетании с принципом бинарности позволил получить достаточно большое разнообразие структур нелинейных систем. Разумеется, это разнообразие еще более увеличится, если привлечь к структурному синтезу и другие известные принципы регулирования, которые без особых оговорок, в силу своей общности, применимы и в рассматриваемой задаче стабилизации. Мы опускаем связанные с этим детали, отмечая только принципиальную сторону предлагаемого подхода.

Сама идея нового подхода может быть также сформулирована как принцип генерации структур: процедуру синтеза сложного регулятора следует представить в виде последовательности задач синтеза, решаемых традиционными средствами.

Разумеется, не каждая проблема допускает такую декомпозицию, но число таких проблем достаточно велико. Рассмотрим, например, задачу о понижении размерности замкнутой системы. Из структурной схемы на рис. 3.25 видно, что при обнулении ошибки ОК-контура, т.е. при выполнении равенства

$$\sigma = 0, \quad (3.3)$$

появляется дополнительная связь между переменными состояния

$$S_e e = e, \quad (3.4)$$

наличие которой означает их зависимость, а значит, порядок системы понижается на размерность связи. Поэтому естественен вопрос: нельзя ли наладить регулярное вырождение порядка путем установления связей вида (3.3). Но как этого добиться? Ведь если в схеме на рис. 3.26 для вырождения использован естественный управляющий вход, то в

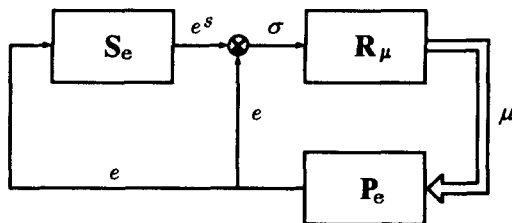


Рис. 3.26

схеме системы на рис. 3.27, отвечающей равенству (3.4), такого управляющего входа нет. Следовательно, стандартными средствами эту

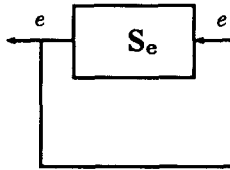


Рис. 3.27

задачу не решить, но если вспомнить, что оператор S_e зависит от параметра c , т.е. $S_e(c)$, то именно этот параметр или, что то же самое, 0-сигнал ξ , поскольку $c = c(\xi)$, можно считать управлением и рассматривать как ОК-объект с оператором P'_e (рис.3.28). Теперь,

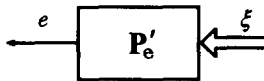


Рис. 3.28

строго следуя изложенному выше подходу, синтезируем структуру, представленную на рис. 3.29. Далее выбираем оператор S'_e и регулятор R_ξ так, чтобы с некоторого момента времени выполнялось равенство $\sigma' = e'_1 - e = 0$. Это равенство вместе с равенством (3.4) устанавливает связи $S'_e e = e$, $S_e e = e$, и, следовательно, происходит дальнейшее понижение порядка системы.

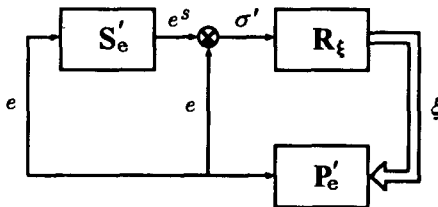


Рис. 3.29

Действуя последовательно указанным способом, можно n -мерный объект за конечное число итераций свести к объекту первого порядка и в результате получить структуры, представленные на рис. 3.30. Этому факту можно дать следующую содержательную интерпрета-

цию: добавлением к сложному и неопределенному объекту сложного нелинейного регулятора можно предельно упростить и сделать про-

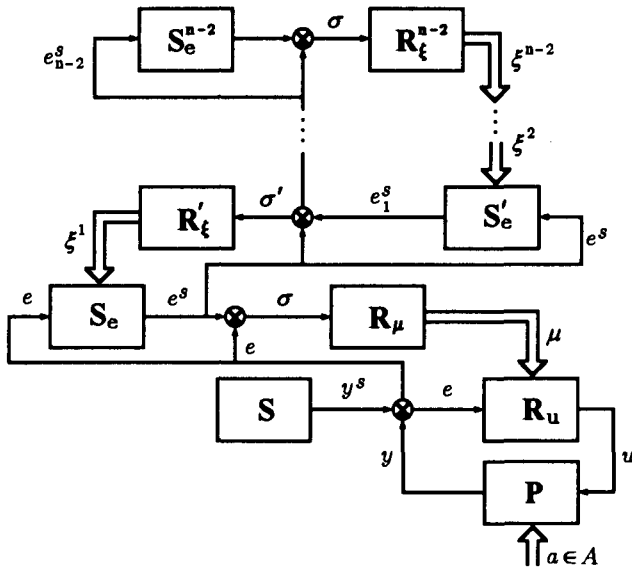


Рис. 3.30

гнозируемым поведение замкнутой системы. Иными словами, предлагаемый регулятор является “поглотителем” сложности и неопределенности объекта.

3.3.3. Задача фильтрации

Одна из основных задач теории управления — задача фильтрации. Типичная постановка этой задачи такова. Задан оператор P желаемого преобразования полезного сигнала x в выходной сигнал y^x (рис. 3.31). Фактически к полезному сигналу всегда добавляется помеха ξ (рис. 3.32), что приводит к отклонению выхода от требуемого значения. Поэтому оператор P уже не является наилучшим и ставится

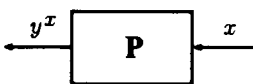


Рис. 3.31

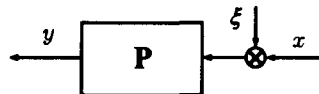


Рис. 3.32

задача об определении наилучшего оператора в схеме на рис. 3.32, ми-

минимизирующего “расстояние” между y^x и y , т.е.

$$P_{\text{opt}} = \operatorname{argmin} r(y^x - y),$$

где $r(\cdot, \cdot)$ — надлежащим образом определенное расстояние, например, среднеквадратическое отклонение, когда речь идет о случайных сигналах.

Стандартно сигналы x и ξ считаются случайными процессами с известными статистическими свойствами. Чаще всего известны формирующие фильтры этих сигналов с операторами P_x и P_ξ соответ-

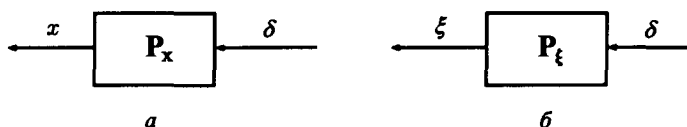


Рис. 3.33

ственно (рис. 3.33), где δ — белый шум. При таком представлении сигналов x , ξ структурная схема фильтра принимает вид, представленный на рис. 3.34. Если формирующие фильтры P_ξ , P_x известны и стационарны, то фильтр P также стационарен и называется филь-

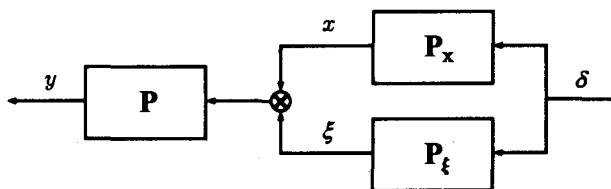


Рис. 3.34

тром Винера. Если же P_ξ , P_x известны, но нестационарны, — фильтром Калмана-Бьюси. Методы синтеза этих фильтров известны.

Проблема возникает тогда, когда оператор помехи P_ξ неизвестен, что можно смоделировать действием возмущения $a \in A$ (рис. 3.35).

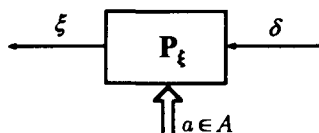


Рис. 3.35

Поскольку в данном случае имеет место операторное возмущение, то для его компенсации следует использовать также операторное воздействие μ (рис. 3.36). В результате проблема выбора оператора оптимального фильтра может быть возложена на КО-обратную связь по стандартной для теории бинарного управления схеме (рис. 3.37).

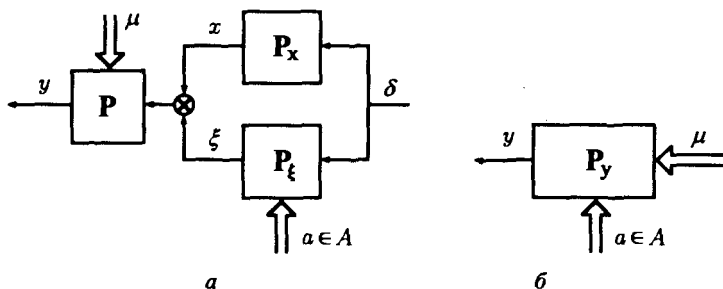


Рис. 3.36

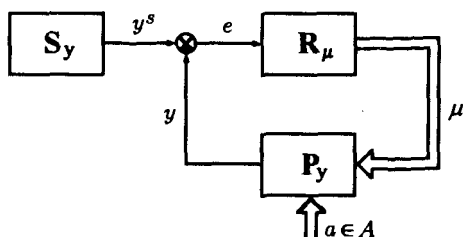


Рис. 3.37

Структура задатчика S_y показана на рис. 3.38. Разумеется, расчет КО-оператора R_μ обратной связи должен производиться статистическими методами.

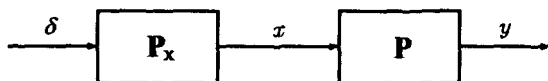


Рис. 3.38

Теперь перейдем к рассмотрению простых примеров, которые проиллюстрируют особенности синтеза регуляторов новых типов. Этому рассмотрению предпоставим таблицу “Проблема — тип нелинейной операции”, в которой можно наглядно усмотреть план по проверке полез-

ности изложенной выше конструкции на стандартных задачах теории управления.

Проблема	Тип нелинейной операции	
	Унарная	Бинарная
Стабилизация		
Фильтрация и дифференцирование		
Оптимальность		
Инвариантность		

Заштрихованный столбец таблицы отражает достижения классической теории регулирования, в которой бинарная операция не использовалась активно. Достоинства и недостатки получаемых при этом результатов упоминались выше. Во втором столбце таблицы клетки не заштрихованы, и еще предстоит разобраться, что нового дает принцип бинарности для решения этих задач.

Глава 4

Теория координатно-операторной обратной связи

В данной главе на сравнительно простом примере подробно разбираются принципы синтеза систем стабилизации с координатно-операторной обратной связью, а также основные свойства и особенности таких систем управления. Для удобства излагаемую далее теорию называем КО-теорией. КО-теория содержит регулярные методы анализа и синтеза систем управления с КО-регуляторами в структурной схеме, представленной на рис. 4.1, или, что то же самое, методы управления КО-объектом, изображенным на рис. 4.2.

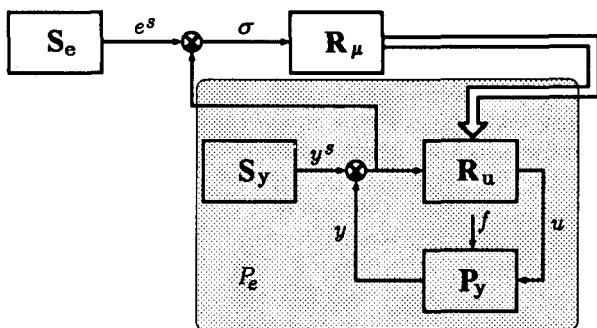


Рис. 4.1

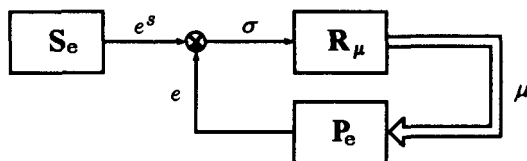


Рис. 4.2

Особенность и отличие этой теории от классической теории стабилизации видны непосредственно из рис. 4.1 и 4.2, прежде всего это принципиальная нелинейность объекта управления P_e .

Следовательно, стандартные методы синтеза обратной связи неприменимы и нужно искать новые подходы. Продемонстрируем полезность и конструктивность использования для этой цели изложенных в предыдущей главе *принципов генерации и бинарности новых типов обратных связей*.

4.1. Стабилизация объекта второго порядка с неизвестными параметрами и внешним воздействием

Рассмотрим простейший объект второго порядка Σ^p :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu + f, \\ y &= cx_1 + x_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с неизвестными параметрами a , b и возмущением f , удовлетворяющими включениям

$$a \in A \stackrel{\text{def}}{=} \{a \mid |a| \leq a_0\}, \quad b \in B \stackrel{\text{def}}{=} \{b \mid 0 < b^- \leq b \leq b^+\},$$

$$f \in F \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid |f| \leq f_m\},$$

где числа a_0 , b^\pm и функция f_m известны. Этот объект, называемый далее Σ^p -системой, позволяет дать содержательный набросок КО-теории, отражающий, практически без изъятий, ее основные положения и результаты.

В задаче стабилизации Σ^p -системы требуется указать робастную гладкую обратную связь по состоянию, стабилизирующую Σ^p -систему при произвольном изменении параметров $a \in A$, $b \in B$ и любом возмущении $f \in F$.

Из предшествующего изложения совершенно ясно, что стандартные подходы к этой задаче не гарантируют ее решения, ибо:

- глубокая обратная связь неробастна;
- адаптивное управление неприменимо, так как не выполнены основные условия: квазистационарность параметров и действие исчезающего возмущения;
- методы СПС ориентированы на использование разрывного управления, когда робастность не достигается.

При синтезе КО-регулятора будем следовать рекомендациям общей теории систем с новыми типами обратной связи, но прежде укажем два полезных и сильно упрощающих дело наблюдения.

4.1.1. Принцип скаляризации и уравнение объекта в пространстве ошибок

Этот принцип позволяет при естественных условиях и при выполнении МС-условия (т.е. условия согласованности возмущения) свести задачу стабилизации многомерного объекта к задаче стабилизации скалярного объекта.

Действительно, нетрудно убедиться, что выход Σ^p -системы экспоненциально стремится к нулю (что и означает решение задачи стабилизации), если при некотором числе $d > 0$ обеспечено выполнение связи

$$\dot{x}_1 + dx_1 = 0. \quad (4.2)$$

Величину

$$\sigma = \dot{x}_1 + dx_1 = x_2 + dx_1$$

назовем ошибкой реализации желаемой связи (4.2).

Теперь очевидно, что стабилизация ошибки σ в нуле и будет означать решение исходной задачи. Но отсюда еще не следует, что задача стала скалярной. Для того чтобы убедиться в этом, перейдем от исходного пространства координат (x_1, x_2) к пространству ошибок — координатам (x_1, σ) . Для этого находим сначала, что

$$\dot{\sigma} = \dot{x}_1 + d\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + dx_2 = ax_1 + bu + f + dx_2.$$

Из уравнения $\sigma = x_2 + dx_1$ выражаем переменную x_2 :

$$x_2 = \sigma - dx_1.$$

В уравнениях Σ^p -системы заменяем x_2 найденным выражением. В результате получаем искомые уравнения движения в виде

$$\dot{x}_1 = -dx_1 + \sigma, \quad (4.3)$$

$$\dot{\sigma} = d\sigma + (a + d^2)x_1 + bu + f. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) будем называть далее Σ_1^p -системой, а (4.4) — Σ_2^p -системой. Из уравнений (4.3), (4.4) видно, что при $\sigma \rightarrow 0$ автоматически следует, что и $x_1 \rightarrow 0$. Следовательно, для решения задачи стабилизации можно ограничиться скалярным Σ_2^p -уравнением.

Если ввести обозначение

$$\tilde{f} = f + (a + d^2)x_1,$$

то указанными преобразованиями исходная проблема сводится к стабилизации скалярного Σ_2^p -объекта вида

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + \tilde{f}, \quad (4.5)$$

находящегося под воздействием неизвестного возмущения $\tilde{f} \in \tilde{F}$, для которого известна только мажоранта

$$\tilde{F} = \left\{ \tilde{f} \mid |\tilde{f}| \leq (d^2 + a_0)|x_1| + f_m = \tilde{f}_m \right\}.$$

Поскольку уравнение

$$\sigma = x_2 + dx_1 = 0 \quad (4.6)$$

определяет прямую на плоскости (x_1, x_2) , то геометрически принцип скаляризации означает создание выбором управления условий, при которых прямая (4.6) является аттрактором, т.е. притягивающим инвариантным множеством (рис. 4.3а). В пространстве ошибок этот аттрактор превращается в одну из осей координат (рис. 4.3б).

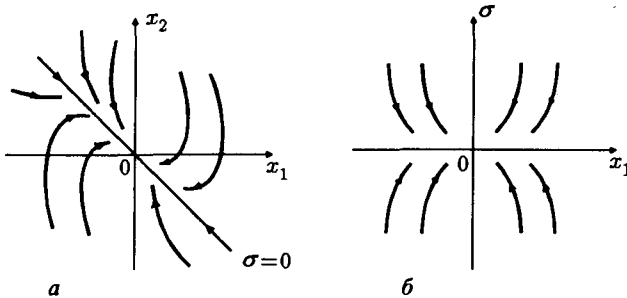


Рис. 4.3

Сделаем ряд замечаний, касающихся сведения общей задачи стабилизации к скалярной задаче и связанных с ней проблем управления скаляризованным объектом Σ_2^p вида (4.5).

4.1.2. Некоторые замечания к постановке задачи и ее обобщения

При скаляризации задачи стабилизации необходимо иметь ввиду следующее.

Замечание 1. Рассмотрение объекта только с двумя неизвестными параметрами $a \in A, b \in B$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu + f \end{aligned}$$

несколько не ограничивает общности результата, так как уравнениям произвольного объекта с тремя неизвестными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1x_1 + a_2x_2 + bu + f, \end{aligned}$$

где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, b \in B$, следующей нестационарной заменой переменных:

$$x_1 = c(t)z_1, \quad z_2 = \dot{z}_1,$$

можно придать требуемый в рассматриваемой постановке задачи вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \tilde{a}z_1 + \tilde{b}u + \tilde{f}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{a} = \frac{\ddot{c} + a_2\dot{c} + a_1c}{c}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{c},$$

если только $c(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$2\dot{c} + a_2c = 0.$$

Замечание 2. Принцип скаляризации применим к произвольным объектам общего положения с одним входом и одним выходом, т.е. к объектам вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + u + f, \quad y = cx.\end{aligned}$$

Действительно, в данном случае достаточно выбрать новую ошибку в виде

$$\sigma = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i, \quad d_i = \text{const} > 0,$$

и в $(n-1)$ -м уравнении Σ -системы заменить x_n на выражение

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i + \sigma,$$

а вместо последнего уравнения в Σ -системе записать уравнение

$$\dot{\sigma} = (d_{n-1} - a_n)\sigma + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + u + f.$$

В результате получим две подсистемы: Σ_1 -систему $(n-1)$ -го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^n d_i x_i + \sigma,\end{aligned}$$

и скалярную Σ_2 -систему

$$\dot{\sigma} = d\sigma + u + \tilde{f}, \quad y = c'x' + c_n\sigma,$$

где $x' = \text{col}(x_1, \dots, x_{n-1})$, $c = (c', c_n)$. При этом, если параметры d_i таковы, что Σ_1 -система при $\sigma = 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^n d_i x_i\end{aligned}$$

экспоненциально устойчива, то вновь из условия $\sigma \rightarrow 0$ следует, что $x_i \rightarrow 0$, что является формальным выражением принципа скаляризации.

Замечание 3. Указанному выше преобразованию координат, лежащему в основе принципа скалярзации, соответствует структурная схема объекта, иллюстрируемая рис. 4.4. Особенность указанной на рисунке декомпозиции в том, что Σ_1 -система полностью определена и асимптотически

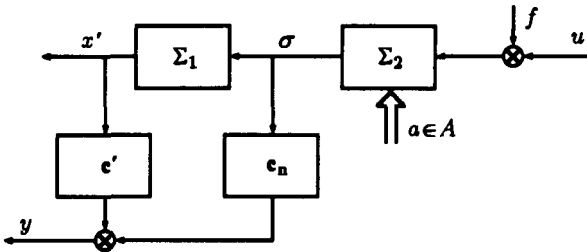


Рис. 4.4

устойчива, Σ_2 -система скалярна, подвержена влиянию факторов неопределенности $\{a, f\}$ и эффективно управляема.

Отметим, что в общем случае для систем со многими входами и многими выходами, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad u \in R^m, \\ y &= Cx, \quad y \in R^r, \end{aligned}$$

принцип скалярзации также имеет место, при этом, однако, Σ_2 -система имеет размерность m , совпадающую с размерностью вектора управления

$$\dot{\sigma} = D\sigma + CBu + \tilde{f},$$

и если $\det CB \neq 0$, то заменой $u = (CB)^{-1}v$ вместо одной m -мерной задачи получаем m одномерных задач стабилизации.

Замечание 4. Полагая, что в Σ^P -системе возмущение отсутствует, т.е. $f \equiv 0$, а все параметры постоянны:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_1 + bu, \quad y = cx_1 + x_2,$$

найдем передаточные функции от входа u к выходам y и $\sigma = x_2 + dx_1$ соответственно. Нетрудно получить выражения

$$W_y(s) = b \frac{s+c}{s^2+a}, \quad W_\sigma(s) = b \frac{s+d}{s^2+a}, \quad (4.7)$$

из сравнения которых можно усмотреть следующее: при $c > 0$ вместо переменной σ можно использовать выход объекта y , и тогда, по сути дела, принцип скалярзации приводит к задаче стабилизации выхода

$$\dot{y} = cy + bu + \tilde{f},$$

т.е. объект 2-го порядка можно заменить объектом 1-го порядка. Как видно из (4.7), такой объект имеет относительный порядок $r = 1$ и является минимально фазовым.

Замечание 5. Выбор обратной связи, стабилизирующей Σ_2^p -объект:

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + \tilde{f},$$

особенно прост, когда имеется полная информация о параметрах и возмущениях. В самом деле, при этих предположениях управление $u = v - \tilde{f}/b$ сводит задачу стабилизации к тривиальной

$$\dot{\sigma} = d\sigma + v,$$

когда выбор управления v очевиден. Если же параметры или возмущение неизвестны, то проблема становится сложнее, так как методы стабилизации классической теории регулирования: глубокая обратная связь ($u = -k\sigma$, $k \rightarrow \infty$), адаптивная обратная связь ($u = -k\sigma$, $\dot{k} = \gamma\sigma^2$, $\gamma = \text{const} > 0$), система переменной структуры ($u = -\tilde{f}_m \text{sgn } \sigma$), при известных достоинствах имеют недостатки и ограничения по применению.

Замечание 6. Покажем, что линейная обратная связь

$$u = -k_2\sigma - k_1x_1 \quad (4.8)$$

с ограниченными коэффициентами годится для стабилизации свободных движений неопределенного объекта с постоянными априорно ограниченными параметрами (названного ранее интервальным объектом)

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + (a - d^2)x_1, \quad (4.9)$$

но, вообще говоря, не решает задачи при изменении параметров a , b или при наличии внешнего возмущения

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + (a - d^2)x_1 + f, \quad f \in F. \quad (4.10)$$

Действительно, после подстановки (4.8) в (4.9) и при $f \equiv 0$ получим

$$\dot{\sigma} = (d - bk_2)\sigma + (a - d^2 - bk_1)x_1, \quad (4.11)$$

и для анализа асимптотики $\sigma(t)$ это уравнение следует дополнить уравнением для ошибки x_1 , т.е.

$$\dot{x}_1 = -dx_1 + \sigma. \quad (4.12)$$

Характеристический полином замкнутой системы (4.11) и (4.12) дается выражением

$$\det \begin{bmatrix} s + d & -1 \\ bk_1 - a + d^2 & s + bk_2 - d \end{bmatrix} = s^2 + bk_2s + bk_1 - a + dbk_2 = 0,$$

и ясно, что при выполнении следующих условий

$$k_2 > 0, \quad b^-k_1 + db^-k_2 > a^- \quad (4.13)$$

замкнутая система асимптотически устойчива.

При изменении параметров условия (4.13) уже не гарантируют устойчивость системы, а действие возмущения даже при устойчивости свободных движений не гарантирует стабилизируемости.

Но даже при постоянных параметрах и $f \equiv 0$ качество переходных процессов может сильно варьироваться с изменением параметров и не соответствовать предъявляемым к системе требованиям.

Таким образом, может быть сформулирована следующая проблема:

- как добиться независимости свойств замкнутой системы от факторов неопределенности при ограниченных коэффициентах передачи в каналах обратной связи?

4.1.3. Фазовое пространство координата–оператор

Принцип скаляризации тесно связан с новыми типами обратной связи и принципом бинарности. Именно, если переменную σ взять в качестве ошибки КО-контура регулирования и использовать КО-обратную связь, то естественным образом возникает стандартная для теории бинарного управления структура, изображенная на рис. 4.5. При этом

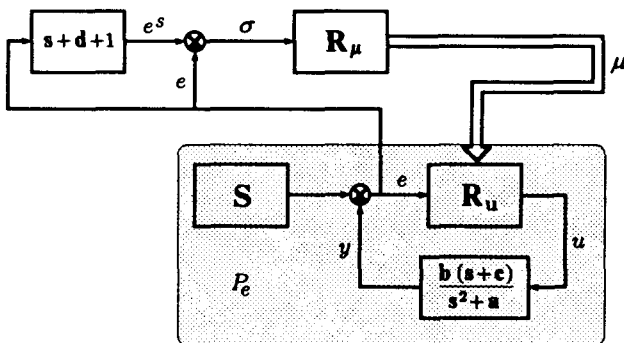


Рис. 4.5

центральными становятся следующие проблемы выбора: оператора R_u , оператора R_μ , типа бинарной операции.

Перейдем к решению этих проблем, однако напомним, что при этом важная роль отводится нижеследующим преобразованиям.

Довольно очевидно, что движение в системе

$$\dot{x}_1 = -dx_1 + \sigma,$$

$$\dot{\sigma} = d\sigma + a^*x_1 + bu + f, \quad a^* = a - d^2$$

близко к требуемому, задаваемому уравнением $\dot{x}_1 = -dx_1$, и слабо зависит от факторов неопределенности $\{a, f\}$, если при достаточно малом числе $\delta > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$|\sigma| \leq \delta |x_1|. \quad (4.14)$$

Это утверждение довольно ясно также из геометрических представлений, так как выполнение условия (4.14) означает, что фазовая траектория не покидает секториального множества G_δ (рис. 4.6), окружающего прямую $\sigma = 0$. Поэтому целью управления может быть

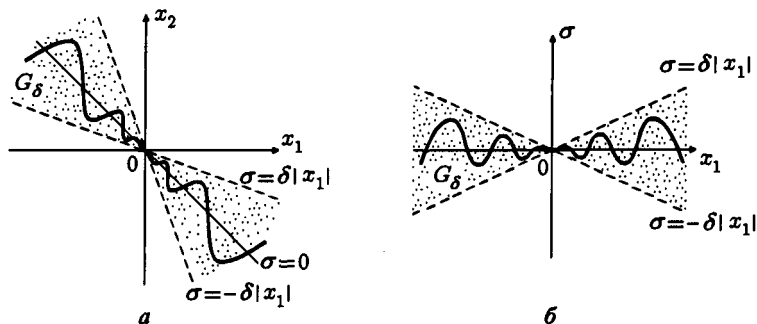


Рис. 4.6

приведение и удержание фазовой точки в G_δ . Для анализа движения и синтеза управления в множестве $G_\delta = \{x \mid |\sigma| \leq \delta|x_1|\}$ удобно использовать нелинейную замену координат $\xi = \sigma/x_1$. Геометрический смысл указанной замены поясняет рис. 4.7, откуда следует, что ξ определяет наклон прямой $\sigma = \xi x_1$. Поэтому ξ можно считать параметром

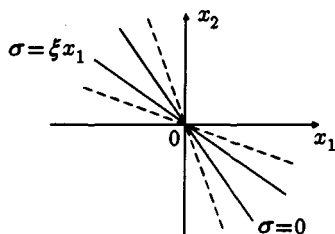


Рис. 4.7

или, более общо, операторной переменной, если воспользоваться следующими соотношениями. Переменные σ и x_1 связаны дифференциальным оператором $\pi(d/dt)$:

$$\sigma = \dot{x}_1 + dx_1 = \left[\frac{d(\cdot)}{dt} + d \right] x_1 = \pi \left(\frac{d}{dt} \right) x_1.$$

Аналогичную связь можно установить между переменными σ_ξ и x_1 :

$$\sigma_\xi = \sigma - \xi x_1 = \pi \left(\frac{d}{dt} \right) x_1 - \xi x_1 = \pi_\xi \left(\frac{d}{dt} \right) x_1,$$

где

$$\pi_{\xi} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} + d - \xi.$$

Поскольку ξ определяет оператор π_{ξ} , то ее уместно назвать операторной переменной. Следовательно, пространство (x_1, ξ) можно назвать фазовым пространством координата-оператор, или, коротко, КО-пространством. Какую же пользу можно извлечь из указанной замены переменных?

Для ответа на этот вопрос достаточно найти уравнение изменения новой переменной $\xi = \sigma/x_1$. Положим пока, что $f \equiv 0$, тогда имеем последовательно:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\dot{\sigma}}{x_1} - \frac{\sigma}{x_1} \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{d\sigma + bu + a^*x_1}{x_1} - \frac{\sigma}{x_1} \frac{\sigma - dx_1}{x_1} = \\ &= d\xi + b\frac{u}{x_1} + a^* - \xi(\xi - d). \end{aligned}$$

Если теперь ввести обозначение $\mu = u/x_1$ и назвать μ новым управлением, то проблема стабилизации свободного движения параметрически неопределенного объекта

$$\dot{\sigma} = d\sigma + a^*x_1 + bu$$

сводится к проблеме стабилизации определенного объекта, находящегося под воздействием координатного возмущения a^* , так как теперь мы имеем дело с уравнением Σ_{ξ} вида

$$\dot{\xi} = d\xi - \xi(\xi - d) + b\mu + a^*.$$

Иными словами, путем нелинейной замены $\xi = \sigma/x_1$ сложная проблема стабилизации неопределенного Σ_2^p -объекта (рис. 4.8а, б) трансформирована в хорошо изученную проблему компенсации координатного возмущения для Σ_{ξ} -объекта (рис. 4.8в). Обсуждению и сравне-

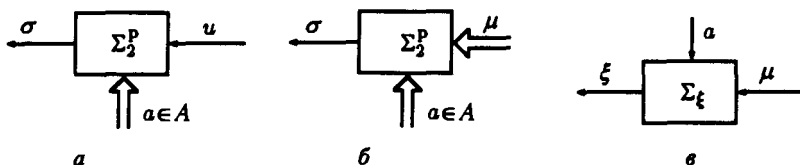


Рис. 4.8

нию вариантов выбора управления μ на основе стандартных приемов компенсации посвящена последующая часть параграфа, а здесь отметим, что, хотя принципиально проблема синтеза стабилизирующей

обратной связи решена, сложности все-таки неизбежны, так как применение известных принципов должно проходить в новых условиях, поскольку объект принципиально нелинеен:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -dx_1 + \xi x_1, \\ \dot{\xi} &= d\xi - \xi(\xi - d) + b\mu + a^*, \\ b &\in B, \quad a^* \in A^*.\end{aligned}$$

Ввиду того что эти уравнения действуют на множестве G_δ , а δ мало, второе уравнение можно линеаризовать и, без больших потерь в общности, ограничиться рассмотрением уравнения первого приближения

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a^*.$$

Завершая этот раздел, заметим, что в ходе преобразования координат было введено следующее обозначение:

$$\mu = \frac{u}{x_1},$$

которое, по сути дела, задает статическую бинарную операцию

$$u = \beta(\mu, x_1) = \mu x_1,$$

определяющую оператор R_u координатной обратной связи в структурной схеме на рис. 4.5.

Разумеется, это не единственная, но, быть может, простейшая возможность. Можно было бы использовать и динамическую бинарную операцию, например операцию интегрального

$$\frac{u}{x_1} = \int \mu dt$$

или инерционного типа

$$\frac{u}{x_1} = \tau\mu + \int \mu dt, \quad \tau = \text{const}.$$

В любом случае общие выводы, конечно, сохраняют силу, однако вместо скалярного объекта пришлось бы иметь дело с объектом более высокого порядка, например, при интегральной бинарной операции стабилизируемая система описывается системой уравнений

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu_1 + a^*, \quad \dot{\mu}_1 = \mu.$$

4.2. КО-алгоритмы стабилизации

Воспользуемся стандартными методами классической теории регулирования для синтеза управления, стабилизирующего скалярный объект:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2d\xi + b\mu + a - d^2, \\ a &\in A, \quad b \in B, \quad d > 0.\end{aligned}\tag{4.15}$$

4.2.1. Прямая компенсация

В уравнении (4.15) параметр d^2 можно интерпретировать как известное возмущение, и при известном параметре b с помощью прямой компенсации

$$\mu = \mu_1 + \frac{d^2}{b} \quad (4.16)$$

влияние этого "возмущения" устраняется, ибо

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu_1 + a.$$

Если же параметр b неизвестен, то прямая компенсация в "лоб" не проходит, но ее можно успешно сочетать с идентификацией параметров. Об этом скажем чуть позже, а сейчас заметим, что управлению (4.16) в исходных переменных отвечает обратная связь вида

$$u = \mu x_1 = \mu_1 x_1 + \frac{d^2}{b} x_1,$$

имеющая бинарную и линейную составляющие.

Заметим, что если параметр a тоже известен, то необходимости в бинарной компоненте не возникает.

4.2.2. Асимптотическое оценивание или косвенное измерение О-возмущения

Рассмотрим вариант задачи стабилизации объекта¹

$$\dot{\xi} = 2d\xi + a + b\mu_1, \quad (4.17)$$

когда параметры a , b фиксированы, b известен, a — любой элемент из A . Для получения оценки \tilde{a} неизвестного параметра a используем наблюдатель

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (2d - k_1)\varphi + \tilde{a} + k_1\xi + b\mu, \\ \dot{\tilde{a}} &= -k_2(\varphi - \xi), \quad k_1, k_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

После вычитания (4.17) из (4.18) и введения обозначений

$$e = \varphi - \xi, \quad \alpha = \tilde{a} - a$$

с учетом того, что параметр a фиксирован, т.е.

$$\dot{a} = 0,$$

получим уравнения наблюдателя относительно ошибок (e, α)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (2d - k_1)e + \alpha, \\ \dot{\alpha} &= -k_2e. \end{aligned} \quad (4.19)$$

¹Здесь и далее для простоты вместо $a^* = a - d^2$ пишем a , полагая, что компонента d^2 уже скомпенсирована.

Характеристический полином наблюдателя (4.19) имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} s - (2d - k_1) & -1 \\ k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(k_1 - 2d) + k_2 = 0$$

и является гурвицевым при выполнении неравенств $k_2 > 0$, $k_1 > 2d$. Поэтому оценка \tilde{a} асимптотически (экспоненциально) сходится к числу a . Если теперь управление μ сформировать в виде

$$\mu = \mu_1 - \frac{\tilde{a}}{b}, \quad (4.20)$$

то произойдет асимптотическая компенсация возмущения a , так как

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu_1 + a - \tilde{a},$$

и, следовательно, $a - \tilde{a} \rightarrow 0$.

Таким образом, при выборе управления μ_1 достаточно иметь дело со свободным движением объекта:

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu_1.$$

В исходных переменных алгоритму управления (4.20) соответствует алгоритм вида

$$u = \mu x_1 = \mu_1 x_1 - \frac{\tilde{a}}{b} x_1,$$

где вторую компоненту естественно называть адаптивной. Иными словами,

- описанный способ асимптотического оценивания постоянного возмущения a реализует стандартную процедуру адаптивного управления.

Если, однако, $a = a(t)$, то теория адаптивного управления не дает рекомендаций по синтезу стабилизирующего управления, тогда как развиваемая теория легко переносится на этот случай.

4.2.3. Компенсация волнового О-возмущения

Пусть известен дифференциальный оператор $K(d/dt)$, аннулирующий О-возмущение, т.е.

$$K\left(\frac{d}{dt}\right)a \equiv 0.$$

Например, известны числа r, p такие, что

$$\dot{a} + pa + r \equiv 0, \quad (4.21)$$

но неизвестно начальное условие $a(0)$, что делает возмущение a неизвестным.

Согласно рекомендации классической теории регулирования при стабилизации объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a \quad (4.22)$$

следует по уравнениям (4.21), (4.22) составить уравнения наблюдателя, вырабатывающего асимптотическую оценку \tilde{a} возмущения a . Такой наблюдатель строится стандартным образом и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 2d\varphi + b\mu + \tilde{a} - k_1(\varphi - \xi), \\ \dot{\tilde{a}} &= -p\tilde{a} - r - k_2(\varphi - \xi). \end{aligned} \quad (4.23)$$

После почленного вычитания (4.21) и (4.22) из (4.23) и перехода к ошибкам оценивания

$$e = \varphi - \xi, \quad \alpha = \tilde{a} - a$$

уравнения наблюдателя принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (2d - k_1)e + \alpha, \\ \dot{\alpha} &= -p\alpha - k_2e. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Характеристический полином системы (4.24) дается выражением

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} s + (k_1 - 2d) & -1 \\ k_2 & s + p \end{bmatrix} &= \\ &= s^2 + (p + k_1 - 2d)s + k_2 + p(k_1 - 2d) = 0, \end{aligned}$$

и ясно, что наблюдатель экспоненциально устойчив, когда

$$k_1 > 2d - p, \quad k_2 > p(k_1 - 2d).$$

Последнее условие легко выполнить, и, следовательно, наблюдатель (4.24) дает асимптотическую оценку

$$\tilde{a} \xrightarrow{\text{exp}} a.$$

В силу полученной асимптотической оценки управление

$$\mu = \mu_1 - \frac{\tilde{a}}{b}$$

решает задачу компенсации переменного возмущения $a(t)$ и сводит исходную задачу стабилизации к тривиальной задаче стабилизации объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu_1.$$

Отметим, что аналогичный результат невозможно получить, действуя в рамках стандартной концепции адаптивного управления.

4.2.4. Релейная КО-стабилизация

При отсутствии волновой модели О-возмущения, но при известной мажоранте a^0 , т.е. такой функции или постоянной, что

$$|a(t)| \leq a^0,$$

для стабилизации объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + \mu + a$$

возможно применение разрывной, в частности, при $a^0 = \text{const}$, релейной обратной связи

$$\mu = -k \operatorname{sgn} \xi.$$

Тогда замкнутая система описывается уравнением

$$\dot{\xi} = 2d\xi - k \operatorname{sgn} \xi + a, \quad k = \text{const}, \quad (4.25)$$

и при выполнении условия

$$k > a^0$$

существует окрестность, в которой нуль уравнения (4.25) асимптотически устойчив.

Представление о качественном поведении решений уравнения

$$\dot{\xi} = 2d\xi - k \operatorname{sgn} \xi + a \quad (4.26)$$

можно получить из рис. 4.9а, изображающего многообразие решений уравнения (4.26), или рис. 4.9б, на котором показан ход фазовых траекторий в КО-пространстве (x_1, ξ) . Скользящий режим в релейной

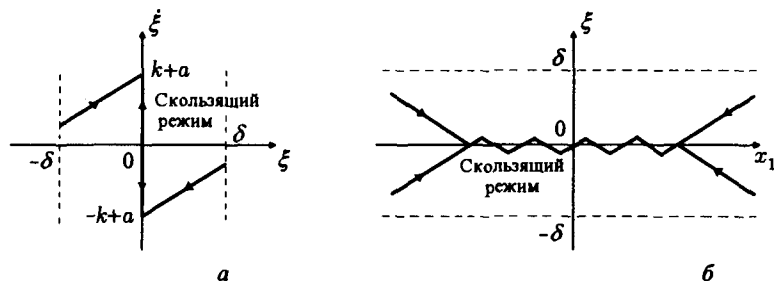


Рис. 4.9

системе не является прочным и “размывается” до реального скользящего режима при введении пространственной задержки Δ или малого запаздывания в переключения, т.е. если вместо (4.26) мы имеем дело с уравнениями вида

$$\dot{\xi} = 2d\xi - k \operatorname{sgn}_{\Delta} \xi + a, \quad \dot{\xi} = 2d\xi - k \operatorname{sgn}_{\tau} \xi + a. \quad (4.27)$$

Сказанное иллюстрируют рис. 4.10, где $\Delta(\tau)$ — “амплитуда” реального скользящего режима. Все отмеченные свойства релейной системы хорошо известны и ранее уже отмечались. Сейчас же гораздо

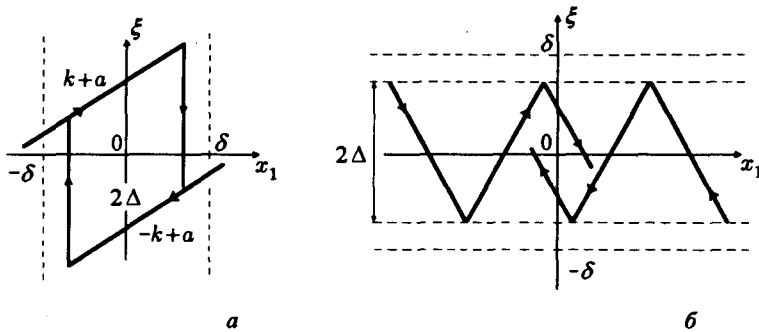


Рис. 4.10

интереснее посмотреть на то, какие движения в исходном координатном пространстве (x_1, x_2) соответствуют указанным выше движениям в КО-пространстве (x_1, ξ) .

Сначала сделаем это формально, используя первое уравнение объекта в переменных (x_1, ξ) , т.е. уравнение

$$\dot{x}_1 = -dx_1 + \xi x_1 = -(d - \xi)x_1.$$

При возникновении идеального скользящего режима имеет место равенство $\xi = 0$ и, следовательно, переменная x_1 , а вместе с ней и выход объекта y экспоненциально убывают до нуля, так как $\dot{x}_1 = -dx_1$. В режиме реального скользящего выполняется условие $|\xi| \leq \Delta < \delta$ и также имеет место экспоненциальная устойчивость, если $\delta < d$, что, конечно, выполнено. Поэтому полученная система бинарного управления с релейным КО-алгоритмом экспоненциально устойчива как при идеальных, так и при реальных переключениях. Иначе говоря,

- она прочна по отношению к неидеальностям в переключениях, причем не только временного, но (!) и пространственного типа.

Можно сказать, что прочностные свойства нелинейной разрывной системы зависят от места расположения в ее структуре разрывного (релейного) элемента.

Рассмотрим теперь построенную бинарную систему с релейным КО-алгоритмом стабилизации в исходном координатном пространстве (x_1, x_2) . Поскольку $u = \mu x_1$, $\sigma = \xi x_1$, $\mu = -k \operatorname{sgn} \xi$, то имеем последовательно

$$u = -k x_1 \operatorname{sgn} \xi = -k x_1 \operatorname{sgn} \frac{\sigma}{x_1} = -k |x_1| \operatorname{sgn} \sigma. \quad (4.28)$$

Распространим действие этого алгоритма управления за пределы множества G_δ на всю плоскость (x_1, x_2) , тогда этот алгоритм становится стандартным алгоритмом управления систем переменной структуры. Действительно, последнее выражение в (4.28) определяет стандартную ψ -ячейку:

$$u = \psi x_1, \quad \psi = \begin{cases} -k, & x_1 \sigma > 0, \\ k, & x_1 \sigma < 0, \end{cases}$$

и, следовательно, фазовый портрет рассматриваемой системы в координатах (x_1, x_2) имеет уже знакомый вид (рис. 4.11). Изменение

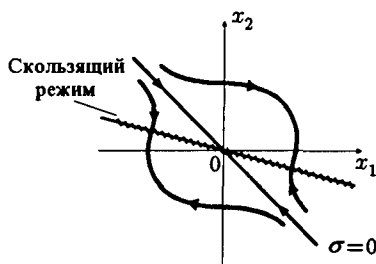


Рис. 4.11

структуры системы происходит на прямых $x = 0$ и $\sigma = 0$. Структурная схема синтезированной таким образом бинарной системы с релейной КО-обратной связью приведена на рис. 4.12. Для сравнения на рис. 4.13 дана структура той же системы в стандартном варианте СПС. Из сравнения рисунков видно, что теория бинарного управления позволяет вскрыть тонкое устройство разрывной обратной связи

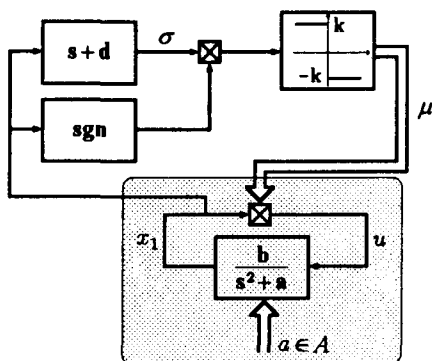


Рис. 4.12

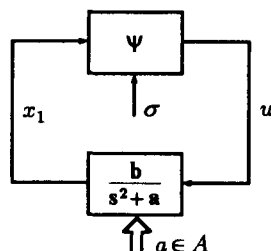


Рис. 4.13

и, следовательно, представляет возможности регулярного синтеза такой обратной связи, тогда как в теории СПС вид обратной связи был угадан. Еще одна принципиальная особенность КО-обратной связи — ее знакопеременность в зависимости от положения фазовой точки на плоскости. Формально это следует из формулы

$$u = \mu x_1 = -k|x_1| \operatorname{sgn} \sigma,$$

следовательно, $\mu = -k \operatorname{sgn} (x_1 \sigma)$. Иными словами,

- работоспособность систем с КО-связью достигается только при переменности структуры системы.

4.2.5. Замечание о прочности систем с релейной КО-связью

Между классической СПС и изучаемой бинарной системой управления есть, однако, принципиальное различие, которое проявляется при наличии неидеальностей в переключениях. Именно, в бинарной системе при появлении временной или пространственной задержки в переключениях выполнено неравенство $|\xi| \leq \Delta$ и, следовательно, асимптотическая устойчивость сохраняется, а фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 4.14а. Для стандартной СПС при временной задержке переключения фазовый портрет совпадает с портретом на

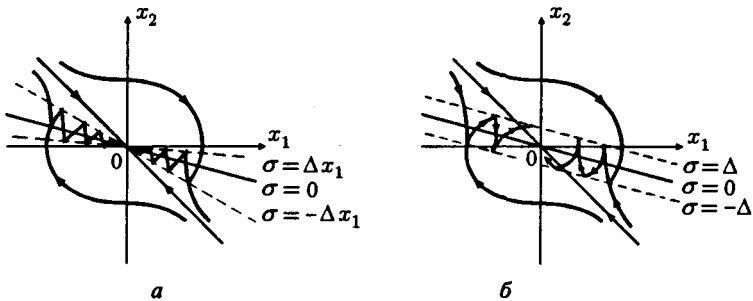


Рис. 4.14

рис. 4.14а, но при пространственной задержке отличается от него и имеет вид, указанный на рис. 4.14б. Следовательно,

- бинарная система управления, замкнутая КО-релейной обратной связью, прочна по отношению к этим возмущениям, тогда как классическая СПС не является прочной. Таким образом, показано, что при отсутствии волновой модели О-возмущения a , т.е. $|a| \leq a^0$, и любом О-возмущении $b \geq b_{\min} > 0$, т.е. $b \in B$, синтезированный алгоритм бинарного управления с КО-релейной обратной связью

- пока единственный из известных робастно решает задачу стабилизации неопределенного нестационарного объекта.

Это и есть первый практический “выход” КО-теории стабилизации.

Одним из недостатков рассмотренного алгоритма является наличие “биений”, сопровождающих режим релейного скольжения, в котором функционируют, конечно, все физические системы. Другой недостаток связан с трудоемкостью точной цифровой реализации скользящего режима в реальном времени, поскольку в этом случае можно применять схемы аппроксимации только 1-го порядка, но тогда “амплитуда” отклонения от линии скольжения имеет порядок шага дискретизации h , т.е.

$$|\sigma| \sim O(h).$$

Поэтому важно иметь ответ на следующий вопрос:

- существуют ли непрерывные алгоритмы стабилизации, сообщающие замкнутой системе описанные выше свойства?

Пожалуй, ясно, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, но в частных случаях можно указать такие алгоритмы. Оставаясь пока в рамках КО-теории, укажем некоторые из них.

4.2.6. Линейные КО-алгоритмы стабилизации

Рассмотрим ситуацию, когда при стабилизации объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a$$

известные параметры $a \in A$, $b \in B$ можно считать постоянными. При неизвестном b метод асимптотического оценивания неприменим и следует поискать иные приемы стабилизации. Такие приемы развиты в классической теории регулирования, и они предполагают использование линейных обратных связей с интегральной компонентой: так называемые ПИ- (пропорционально-интегральные) и ПИД- (пропорциональные интегрально-дифференциальные) законы регулирования. Но прежде рассмотрим пропорциональные законы.

П-законы регулирования. В этом случае

$$\mu = -k\xi, \quad k = \text{const},$$

замкнутая система управления описывается уравнением

$$\dot{\xi} = -(bk - 2d)\xi + a,$$

и при выполнении условия

$$b^{-1}k > 2d$$

она асимптотически устойчива с положением равновесия в точке

$$\xi_{\infty} = \frac{a}{bk - 2d}.$$

Фазовый портрет замкнутой системы управления в координатах (x_1, ξ) приведен на рис. 4.15. Точка ξ_{∞} на рисунке определяет статизм

системы стабилизации в координатах (x_1, ξ) . Рисунку 4.15 соответствует фазовый портрет в исходных координатах (x_1, x_2) (рис. 4.16), где прямая $\sigma = \xi_\infty x_1$ является асимптотой, определяющей доминант-

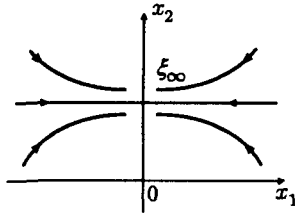


Рис. 4.15

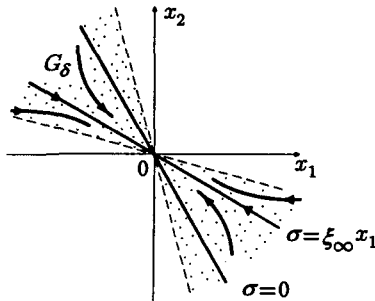


Рис. 4.16

ное движение. Напомним, что анализ проводится при условии $|\xi| \leq \delta$, т.е. в множестве

$$G_\sigma = \{(x_1, x_2) \mid |\sigma| \leq \delta|x_1|\},$$

поэтому траектории вне G_δ пока на рисунках не указываются.

Таким образом, если $|\xi_\infty| \leq \delta$, то статизм в КО-контуре регулирования не нарушает асимптотики системы управления в исходном пространстве, но поскольку асимптота $\sigma = \xi_\infty x_1$ не совпадает с требуемым положением $\sigma = 0$, то появляется отличие в асимптотическом поведении (в степени устойчивости), что может быть интерпретировано как динамический статизм. Для устранения последнего можно устремить коэффициент $k \rightarrow \infty$, но это эквивалентно введению глубокой обратной связи в КО-контуре, так как $u = \mu x_1 = -k\xi x_1 = -k\sigma$. Как известно, это ведет к непрочной системе, что не соответствует цели исследования. Поэтому теперь рассмотрим возможности, предоставляемые ПИ-законом регулирования в КО-контуре.

ПИ-законы регулирования. В этом случае

$$\mu = -k_2\xi - k_1 \int \xi dt \quad (4.29)$$

и при замыкании такой обратной связью исследуемого объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a \quad (4.30)$$

получаем систему управления второго порядка

$$\ddot{\xi} + (bk_2 - 2d)\dot{\xi} + bk_1\xi = 0. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) получено в результате подстановки продифференцированного соотношения (4.29) в продифференцированное уравнение (4.30). Из уравнения (4.31) ясно видно, что при выполнении условий $b \cdot k_2 > 2d$, $k_1 > 0$ наступает асимптотическая устойчивость нуля уравнения. В зависимости от соотношений параметров k_1 , k_2 эта устойчивость может быть колебательной или аperiodической. Кроме этого, степень устойчивости также может быть назначена по произволу надлежащим выбором параметров k_1 , k_2 .

На рис. 4.17 в координатах $(\xi, \dot{\xi})$ изображены фазовые траектории, отвечающие колебательным и аperiodическим переходным процессам в замкнутой системе $\ddot{\xi} + (bk_2 - 2d)\dot{\xi} + bk_1\xi = 0$. На рис. 4.18 при-

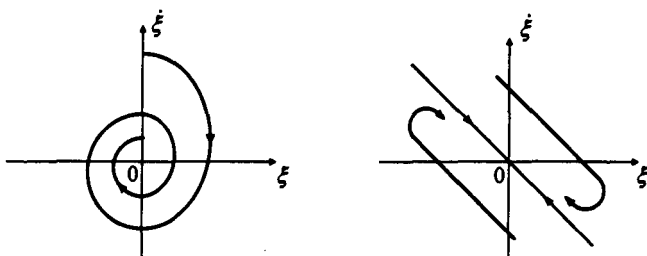


Рис. 4.17

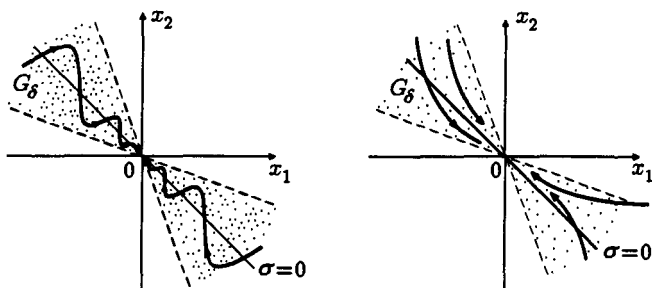


Рис. 4.18

ведены соответствующие им проекции фазовых траекторий на плоскость (x_1, x_2) .

Результрующий алгоритм стабилизации, отвечающий ПИ-закону КО-обратной связи, имеет вид

$$\begin{aligned} u = \mu x_1 &= -k_2 \xi x_1 - k_1 x_1 \int \xi dt = \\ &= -k_2 \sigma - k_1 x_1 \int \frac{\sigma}{x_1} dt. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Обратной связи (4.32) отвечает (напомним, что это соответствие имеет место только в пределах множества G_δ) структурная схема, представленная на рис. 4.19. Нетрудно понять, что синтезирован-

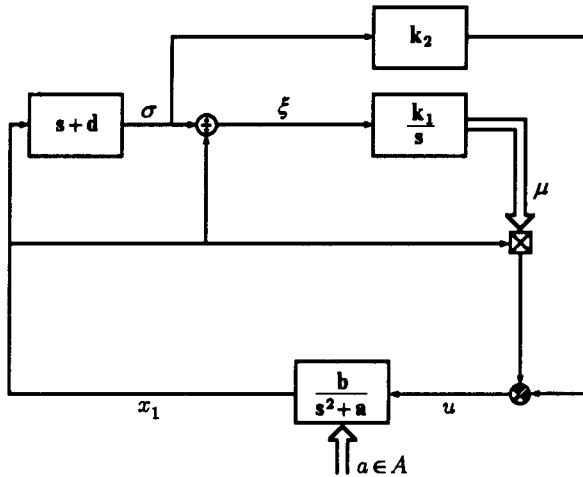


Рис. 4.19

ная система бинарного управления является прочной по отношению к сингулярным возмущениям и, следовательно, основная цель синтеза достигнута:

- описан непрерывный алгоритм управления, обеспечивающий при любом постоянном $a \in A$ асимптотическое “движение” по требуемой траектории $\sigma = \dot{x}_1 + dx_1 = 0$.

Следовательно, эффект малой зависимости движения от фактора неопределенности достигается не с помощью большого коэффициента усиления или скользящего режима, а, единственно, применением надлежащей КО-обратной связи.

4.2.7. Интегрально-релейный КО-алгоритм стабилизации

Из структуры системы на рис. 4.19 видно, что для реализации ПИ-закона в КО-контуре обратной связи необходимо использовать операцию деления, от которой можно избавиться, если вместо интегральной компоненты применять релейно-интегральную компоненту. Именно, исследуем последствия, наступающие при законе

$$\mu = -k_2 \xi - k_1 \int \operatorname{sgn} \xi dt.$$

В этом случае поведение замкнутой системы определяется уравнением

$$\ddot{\xi} + (bk_2 - d^2)\dot{\xi} + bk_1 \operatorname{sgn} \xi = 0. \quad (4.33)$$

При $b^{-}k_2 > d^2$, $k_1 > 0$ фазовый портрет уравнения (4.33) образуют отрезки параболических траекторий уравнений

$$\ddot{\xi} + (bk_2 - d^2)\dot{\xi} = \pm bk_1,$$

“сшитых” по линии разрыва $\xi = 0$ (рис. 4.20а). Поскольку имеет место демпфирование ($bk_2 - d^2 > 0$), то движение по этим траекториям асимптотически стремится к нулю. “Темп” скручивания регулируется параметром k_2 . В исходном пространстве (x_1, x_2) соответствующие переходные процессы иллюстрируются рис. 4.20б.

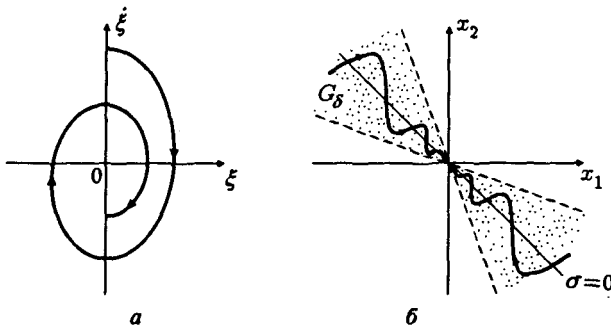


Рис. 4.20

Структурная схема бинарной системы с такой пропорциональной релейно-интегральной КО-связью приведена на рис. 4.21, и видно, что этот регулятор проще в реализации КО-регулятора с ПИ-законом. Отметим, в частности, что при $bk_2 = d^2$ система в O -пространстве $(\xi, \dot{\xi})$ становится колебательной:

$$\ddot{\xi} + bk_1 \operatorname{sgn} \xi = 0.$$

И хотя координата $\xi \neq 0$, асимптотическая устойчивость по основным переменным гарантируется, если $|\xi(0)| \leq \delta$. Соответствующие этому случаю графики даны на рис. 4.22.

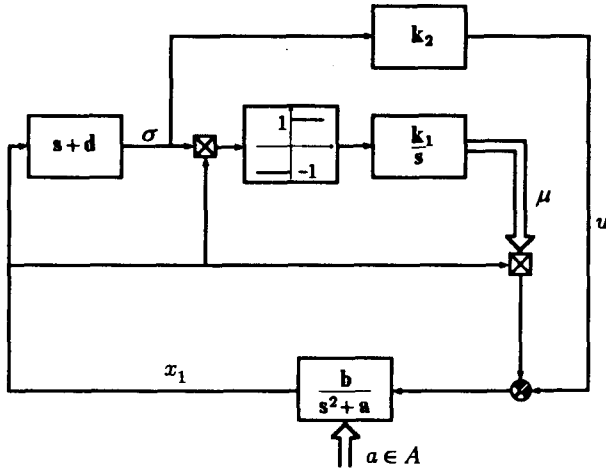


Рис. 4.21

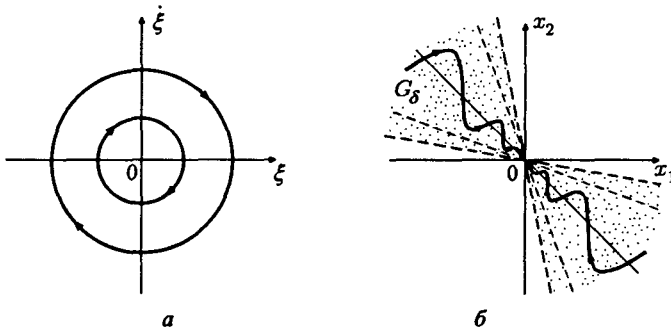


Рис. 4.22

В заключение отметим, что в рассмотренных гладких бинарных системах не наступает финитное (как в СПС) “обнуление” ошибки σ , и поэтому речь можно вести только об асимптотическом устранении зависимости свойств системы от неконтролируемых факторов. Однако при более “хитрых” законах КО-регулирования появляется возможность финитной стабилизации ошибки σ в нуле, при этом система имеет определенную степень гладкости.

Более подробное обсуждение этих вопросов составляет предмет следующих тем. Здесь же подчеркнем следующее:

- асимптотической независимости движения в системе управления неопределенным объектом можно добиться без использования глубокой обратной связи или скользящего режима, а только применением нелинейной обратной связи КО-типа. Это второй практический результат КО-теории;
- физическая основа компенсации неопределенности состоит в использовании на некоторых этапах движения положительной обратной связи, которая позволяет управляющему сигналу “нарасти” до величины, достаточной для компенсации неопределенности. Это происходит подобно тому, как описано в главе 2 при решении задачи о воспроизведении задающего воздействия с помощью одного интеграла.

Глава 5

Скольльзящие режимы высших порядков

Из предыдущего изложения видна та важная роль, которая принадлежит скольльзящему режиму в задачах управления в условиях неопределенности. Достаточно вспомнить релейные системы, системы переменной структуры, системы с координатно-операторной обратной связью. Краткое исследование, проведенное в соответствующих разделах монографии, показало, что при определенном сходстве имеется глубокое различие в скольльзящих режимах, проявляющееся, в частности, под воздействием факторов неопределенности и помех. Более детальное исследование показывает, что существует много видов скольльзящего режима и объединяет их только факт наличия разрывов правой части дифференциальных уравнений, описывающих поведение соответствующих динамических систем. Далее мы дадим содержательный набросок того раздела общей теории скольльзящих режимов, который связан со степенью гладкости на решениях системы функции, определяющей поверхность разрыва. Степень гладкости решения естественным образом упорядочивает скольльзящие режимы, и появляется возможность введения нового понятия — порядка скольжения.

5.1. Некоторые предварительные сведения из теории скольльзящего режима

Изложим некоторые факты из теории скольльзящих режимов, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Скольльзящие режимы возникают в разрывных динамических системах, например в системах управления вида

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u,$$

где управление u (обратная связь) терпит разрывы на гладком многообразии

$$M = \{x \in R^n \mid \sigma(x) = 0\},$$

именно:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \sigma(x) > 0, \\ u^-(x), & \sigma(x) \leq 0, \quad u^+ \neq u^-. \end{cases}$$

Скользящий режим имеет место в тех точках многообразия M , к которым фазовые траектории $x^\pm(t)$ динамических систем

$$\dot{x} = f^\pm(x) = f(x) + b(x) u^\pm(x)$$

подходят с разных сторон многообразия и трансверсально его пересе-

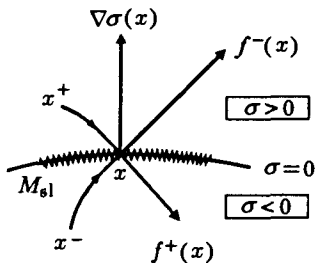


Рис. 5.1

кают (рис. 5.1). В таких точках выполнены следующие неравенства:

$$\pm \langle \nabla \sigma(x), f^\pm(x) \rangle |_{\sigma(x)=0} < 0.$$

Объединение всех таких точек $x \in M$ образует множество $M_{sl} \subset M$, называемое далее областью скольжения (на рис. 5.1 она выделена).

5.1.1. Уравнения скольжения

Для получения уравнений, описывающих движение в скользящем режиме (далее они называются уравнениями скольжения), можно использовать процедуру Филиппова. Опишем необходимый фрагмент этой процедуры. Соединим прямой концы фазовых векторов $f^\pm(x)$. Всякий вектор $f_\alpha(x)$, упирающийся в эту прямую, дается выпуклой комбинацией $f_\alpha = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-$ фазовых векторов $f^\pm(x)$. Один из этих векторов принимается за искомый (рис. 5.2). Именно, поскольку

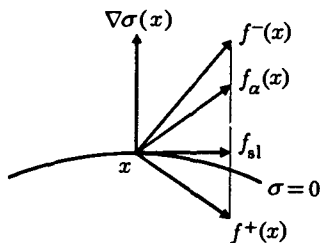


Рис. 5.2

в режиме скольжения $\sigma \equiv 0$, то искомым фазовый вектор должен удовлетворять уравнению

$$\langle \nabla \sigma, f_\alpha \rangle = 0,$$

где $\nabla \sigma$ — градиент функции $\sigma(x)$ в точке x . Решая последнее уравнение относительно параметра α , находим

$$\alpha^* = \frac{\langle \nabla \sigma, f^- \rangle}{\langle \nabla \sigma, (f^- - f^+) \rangle}.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{\alpha^*} = f^- - \alpha^*(f^- - f^+) = \\ &= f^- - \frac{(f^- - f^+)\langle \nabla \sigma, f^- \rangle}{\langle \nabla \sigma, (f^- - f^+) \rangle} = f_{sl}(x) \end{aligned}$$

и описывает движение по поверхностям уровня $\sigma(x) = \text{const}$. Для получения уравнения скольжения нужно дополнить его равенством

$$\sigma = 0, \quad x \in M_{sl}.$$

Уравнениям скольжения

$$\dot{x} = f_{sl}(x), \quad \sigma(x) = 0, \quad x \in M_{sl}$$

можно придать полезную геометрическую интерпретацию. Введем в рассмотрение на многообразии M оператор

$$P(x) = E - \frac{f^-(x) - f^+(x) \langle \nabla \sigma(x), (\cdot) \rangle}{\langle \nabla \sigma(x), (f^-(x) - f^+(x)) \rangle}.$$

Поскольку $P^2 = P$, то этот оператор является оператором локального проектирования на многообразие $\sigma = 0$ вдоль прямой (параллельно), задаваемой вектором $\Delta f = f^- - f^+$ (рис. 5.3). Поэтому уравнения

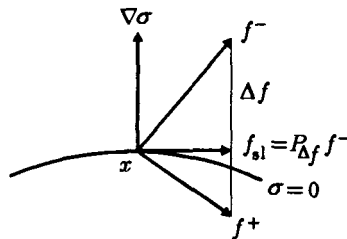


Рис. 5.3

скольжения можно записать в виде

$$\dot{x} = P_{\Delta f} \cdot f^-, \quad P_{\Delta f} = E - \frac{\Delta f \langle \nabla \sigma, (\cdot) \rangle}{\langle \nabla \sigma, \Delta f \rangle}.$$

Для рассматриваемого уравнения $\dot{x} = f + bu$ вектор

$$\Delta f = f + bu^- - f - bu^+ = b(u^- - u^+) = b\Delta u,$$

и если $\Delta u \neq 0$, то векторы Δf и b коллинеарны. Следовательно, верно равенство

$$P_{\Delta f} = P_b = E - \frac{b\langle \nabla \sigma, (\cdot) \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle},$$

а так как по свойству оператора проектирования

$$P_b \cdot b = \left(E - \frac{b\langle \nabla \sigma, (\cdot) \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} \right) b = b - \frac{b\langle \nabla \sigma, b \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} = 0,$$

то уравнения скольжения можно записать в более компактном виде:

$$\dot{x} = P_b f, \quad \sigma = 0, \quad x \in M_{sl}.$$

5.1.2. Об инвариантности уравнения скольжения по отношению к возмущениям, удовлетворяющим условию согласованности

Напомним, что внешнее возмущение $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условию согласованности (МС-условию), если оно действует в канале управления

$$\dot{x} = f + b(u + \varphi). \quad (5.1)$$

В силу указанного выше свойства

$$P_b b = 0.$$

Уравнения скольжения по многообразию M для возмущенного (5.1) и невозмущенного

$$\dot{x} = f + bu$$

объектов совпадают и даются формулами

$$\dot{x} = P_b f, \quad \sigma = 0, \quad x \in M_{sl} \subset M. \quad (5.2)$$

Именно этот математический факт проясняет тот интерес, который постоянно проявляется в теории управления и ее приложениях к идее интегрального многообразия и ее реализации с помощью разрывной и глубокой обратных связей.

Здесь уместно заметить, что уравнения (5.2) описывают также движение в системе с глубокой обратной связью

$$\dot{x} = f + bu \Big|_{u=-k\sigma} = f - kb\sigma, \quad k = \text{const} > 0, \quad (5.3)$$

т.е. при устремлении коэффициента обратной связи в бесконечность ($k \rightarrow \infty$), если выполнено условие

$$\langle \nabla \sigma, b \rangle > 0.$$

Для того чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться приведенными выше геометрическими соображениями или нижеследующими выкладками. В силу уравнения движения находим

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f \rangle - k \langle \nabla \sigma, b \rangle \sigma, \quad (5.4)$$

и при указанных выше условиях изображающая точка “мгновенно” достигает поверхности $\sigma(x) = 0$ и далее ее не покидает, а значит, во время движения имеет место равенство $\dot{\sigma} = 0$. Воспользуемся теперь следующим эвристическим приемом: выразим из уравнения $\dot{\sigma} = 0$ произведение $k\sigma$, а результат подставим в уравнение (5.3), тогда получим уравнение

$$\dot{x} = f - b \frac{\langle \nabla \sigma, f \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} = P_b f,$$

которое вместе с равенством $\sigma = 0$ и задает уравнение движения системы с глубокой обратной связью. Видно, что оно совпадает с полученным выше уравнением скольжения разрывной системы.

В определенной степени стандартную разрывную систему и систему с глубокой обратной связью можно рассматривать как два полюса реализации одной и той же идеи — идеи скольжения по гладкому многообразию. В одном случае это скольжение осуществляется бесконечно гладко, а в другом — с разрывом уже первой производной функции, задающей поверхность скольжения. Оказывается, что между этими двумя крайними системами существует бесконечно много систем, “скользящих” по той же поверхности, но обладающих различной степенью гладкости. О некоторых таких промежуточных системах и идет речь в данной главе.

5.1.3. Уравнения реального скольжения

Практически, т.е. в реальных ситуациях, переключения разрывного элемента происходят не точно на многообразии $M = \{x \mid \sigma(x) = 0\}$, но всегда в некоторой его окрестности

$$O(M) = \{x \mid |\sigma(x)| \leq A(\Delta)\},$$

где $A(\Delta)$ — “амплитуда” отклонения траекторий разрывной системы $\dot{x} = f^\pm$ от многообразия M (рис. 5.4). Здесь и далее Δ — параметр,

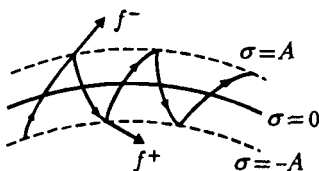


Рис. 5.4

характеризующий неидеальность переключений, например временную или пространственную задержку, быструю немоделируемую динамику и т.п. Подобный режим скольжения принято называть реальным скользящим режимом. При малых амплитудах $A(\Delta)$ его можно также характеризовать “частотой” переключения $W(\Delta)$, для которой верна оценка

$$W(\Delta) \leq \frac{\pi \|f\|}{2A(\Delta)},$$

где $\|f\| = \min(\|f^-\|, \|f^+\|)$. При устранении неидеальности переключения (т.е. при $\Delta \rightarrow 0$) “амплитуда”, как правило, уменьшается до нуля, а “частота” растет до бесконечности, т.е.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} W(\Delta) = \infty, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} A(\Delta) = 0.$$

При этом реальное скольжение переходит в идеальное (рис. 5.5) и весьма важен вопрос о порядке этого перехода по параметру Δ .

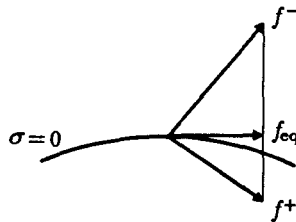


Рис. 5.5

Прежде чем точно определить то, что здесь имеется в виду, получим уравнения реального скольжения. Напомним, что при идеальном скольжении ($\sigma = 0$) искомым фазовый вектор правой части уравнения движения f_{eq} (рис. 5.5) находится в результате решения уравнения

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f_{eq} \rangle = 0.$$

При реальном скольжении выполнено неравенство $|\sigma| \leq A(\Delta)$, и искомым вектор правой части системы реального скольжения f_{rs} находится из неоднородного уравнения

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f_{rs} \rangle.$$

В частности, если система имеет вид

$$\dot{x} = f + b(a + \varphi), \quad (5.5)$$

то последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f \rangle + \langle \nabla \sigma, b \rangle u_{rs} + \langle \nabla \sigma, b \rangle \varphi.$$

Если $\langle \nabla \sigma, b \rangle \neq 0$, то

$$u_{\text{ra}} = -\frac{\langle \nabla \sigma, f \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} + \frac{\dot{\sigma}}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} - \varphi,$$

и после подстановки найденного значения в уравнения движения (5.5) находим

$$\dot{x} = f - b - \frac{\langle \nabla \sigma, f \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} + b \frac{\dot{\sigma}}{\langle \nabla \sigma, b \rangle}.$$

Если использовать оператор проецирования

$$P_b = E - b \frac{\langle \nabla \sigma, f \rangle}{\langle \nabla \sigma, b \rangle},$$

то последнее уравнение принимает вид

$$\dot{x} = P_b f + b \frac{\dot{\sigma}}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} \quad (5.6)$$

и вместе с ограничением

$$|\sigma| \leq A(\Delta) \quad (5.7)$$

определяет движение в реальном скользящем режиме.

Представляет интерес исследование близости решений идеального и реального скольжения (обозначим их $x_{\text{id}}(t)$ и $x(t)$ соответственно), выпущенных из одной начальной точки $x^0 \in M$ при одном и том же возмущении $\varphi(t)$. Решение идеального скольжения описывается уравнениями

$$\dot{x}_{\text{id}} = P_b f(x_{\text{id}}), \quad \sigma(x_{\text{id}}) = 0,$$

а решение реального скольжения имеет вид

$$\dot{x} = P_b f(x) + \frac{b}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} \dot{\sigma}, \quad |\sigma(x)| \leq A(\Delta).$$

Положим для простоты и без потери общности, что вектор

$$h = \frac{b}{\langle \nabla \sigma, b \rangle} = \text{const},$$

тогда оператор $P_b = \text{const}$, и после вычитания первого уравнения из второго для ошибки $\varepsilon = x - x_{\text{id}}$ получаем следующее уравнение:

$$\dot{\varepsilon} = P_b [f(x_{\text{id}} + \varepsilon) - f(x_{\text{id}})] + h \dot{\sigma}.$$

По теореме Лагранжа для некоторого вектора $\Theta \in [x_{\text{id}}, x_{\text{id}} + \varepsilon]$ имеет место равенство

$$f(x_{\text{id}} + \varepsilon) - f(x_{\text{id}}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Theta) \varepsilon,$$

поэтому впрямь имеем дело с уравнением вида

$$\dot{\varepsilon} = N\varepsilon + h\dot{\sigma}, \quad N = P_b \frac{\partial f}{\partial x}(\Theta).$$

Поскольку $\varepsilon(0) = 0$, то последнее дифференциальное уравнение эквивалентно интегральному уравнению

$$\varepsilon(t) = \int_0^t N\varepsilon(\tau) d\tau + h \int_0^t \dot{\sigma} d\tau = \int_0^t N\varepsilon(\tau) d\tau + h\sigma(t).$$

Полагая, что на некотором отрезке $[0, T]$

$$\|N\| \leq D,$$

от интегрального уравнения переходим к скалярному неравенству для нормы ошибки

$$\|\varepsilon(t)\| \leq D \int_0^t \|\varepsilon(\tau)\| d\tau + \|h\|A(\Delta).$$

После применения леммы Гронуолла–Беллмана находим на отрезке $[0, T]$ искомую оценку

$$\|\varepsilon(t)\| = \|x(t) - x_{id}(t)\| \leq \|h\|e^{DT}A(\Delta).$$

Таким образом, из принадлежности траекторий реального скольжения окрестности многообразия M

$$O(M) = \{x \mid |\sigma| \leq A(\Delta)\}$$

следует их близость на конечном интервале времени к соответствующим траекториям идеального скольжения с точностью порядка $A(\Delta)$, т.е. с точностью реального скольжения. Отсюда следует, что

- нужно стремиться к повышению порядка реального скольжения по отношению к параметру Δ , ибо тогда большей точности приближения к идеальному скольжению можно добиться при большей неидеальности.

Иными словами, это и есть прямой путь к повышению прочности системы управления.

Аналогичная проблема возникает при дискретном моделировании разрывных систем, когда роль параметра неидеальности выполняет шаг дискретизации временной шкалы

$$h = t_{j+1} - t_j$$

и разрывы имеют место на множестве дискретных моментов времени $\{t_j\}$. В этом случае окрестность $O(M)$ реального скольжения характеризуется неравенством

$$|\sigma(t_j)| \leq A(h)$$

и для повышения точности моделирования нужно уменьшать шаг дискретизации h , но тогда растут вычислительные затраты. Выгоды от уменьшения h возрастают с ростом порядка малости функции $A(h)$ по h , т.е. чем выше число r в соотношении

$$A(h) \sim h^r,$$

тем более высокая точность счета достигается при заданном шаге интегрирования h .

Проведенные рассуждения актуализируют данную проблему изыскания средств повышения порядка функции $A(\Delta)$ по малому параметру Δ , определяющему "точность" реального скольжения.

5.1.4. Замечание о порядке скольжения

От чего же зависит и чем определяется порядок скольжения?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим движение в скользящем режиме разрывной системы

$$\dot{x} = f^\pm(x) = f(x) + b(x) u^\pm(x) \quad (5.8)$$

по гладкому многообразию

$$M_0 = \{x \mid \sigma(x) = 0\}. \quad (5.9)$$

Из (5.8), (5.9) имеем равенства

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f^\pm \rangle = \langle \nabla \sigma, f \rangle + \langle \nabla \sigma, b \rangle u^\pm, \quad (5.10)$$

и если векторные поля $f^\pm(x)$ трансверсальны M_0 , то $\langle \nabla \sigma, b \rangle|_{M_0} \neq 0$ и на многообразии M_0 возможен скользящий режим. При этом $\sigma = 0$ и

$$\dot{\sigma}_{\text{eq}} = \langle \nabla \sigma, f \rangle + \langle \nabla \sigma, b \rangle u_{\text{eq}} = 0. \quad (5.11)$$

Вычитая (5.11) из (5.10) при $\sigma = 0$ и вводя обозначения

$$u_1^\pm = u^\pm - u_{\text{eq}},$$

получаем

$$\dot{\sigma} \Big|_{\sigma=0} = \langle \nabla \sigma, b \rangle u_1^\pm.$$

Напомним, что с такими уравнениями мы ранее уже имели дело и анализировали их свойства при наличии неидеальности переключений.

Пусть для определенности выполнено неравенство $\langle \nabla \sigma, b \rangle > 0$, тогда для управления

$$u_1^\pm = -\operatorname{sgn} \sigma$$

имеем уравнение скольжения

$$\dot{\sigma} \Big|_{M_0} = -\langle \nabla \sigma, b \rangle > \operatorname{sgn} \sigma,$$

которому при идеальных переключениях соответствует рис. 5.6а, а при неидеальных — рис. 5.6б. Из этих рисунков видно, что рассмо-

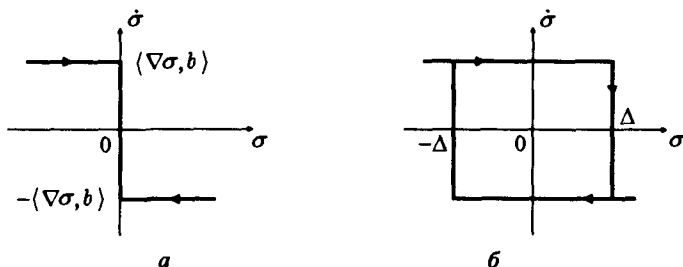


Рис. 5.6

тренная система имеет 1-й порядок малости по параметру неидеальности Δ , так как при реальном скольжении

$$|\sigma| \leq \Delta, \quad |\dot{\sigma}| \leq \operatorname{const}.$$

Припишем такому реальному скольжению 1-й порядок по параметру Δ . В пределе при $\Delta \rightarrow 0$ имеем соотношения

$$\sigma \equiv 0, \quad |\dot{\sigma}| \leq \operatorname{const},$$

определяющие стандартный режим идеального скольжения, который характеризуется непрерывностью переменной σ и разрывностью ее производной $\dot{\sigma}$. такому идеальному скольжению также удобно приписать 1-й порядок.

Из предыдущего следует, что трансверсальность пересечения многообразия скольжения M_0 траекториями систем $\dot{x} = f^\pm$ приводит к скольжению 1-го порядка (идеальному и реальному). Поэтому более высокий порядок скольжения наступает только тогда, когда векторные поля f^\pm касаются многообразия скольжения M_0 , т.е. когда имеет место тождество

$$\dot{\sigma}(x) \Big|_{M_0} \equiv 0. \quad (5.12)$$

Множество точек x , удовлетворяющих (5.12), обозначим через M_1 . При выполнении условия (5.12) скользящий режим на пересечении

$M_0 \cap M_1$ может возникнуть, если разрывна и знакопеременна вторая производная

$$\ddot{\sigma} = \langle \nabla \dot{\sigma}, f^\pm \rangle = \langle \nabla \dot{\sigma}, f \rangle + \langle \nabla \dot{\sigma}, b \rangle u^\pm,$$

т.е. $\langle \nabla \dot{\sigma}, b \rangle \neq 0$ на $M_0 \cap M_1$.

Сказанное иллюстрируют рис. 5.7. На рис. 5.7б показан ход траекторий такой системы при взгляде с торца на пересечение $M_0 \cap M_1$. Поскольку в этом случае функции σ и $\dot{\sigma}$ непрерывны, а функция $\ddot{\sigma}$ раз-

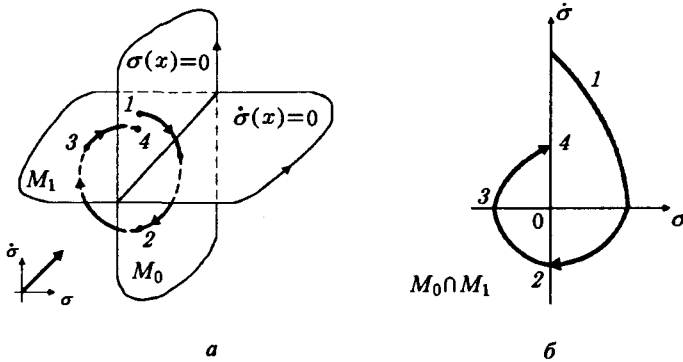


Рис. 5.7

рывна, то в идеальном скользящем режиме имеем соотношения $\sigma = 0$, $\dot{\sigma} = 0$, $|\ddot{\sigma}| \leq \text{const}$. Следуя принятой выше концепции, такому режиму скольжения нужно присвоить 2-й порядок.

Для определения порядка режима реального скольжения по параметру неидеальности Δ допустим, что при достаточно малом $\Delta > 0$ реальный скользящий режим удерживается в окрестности пересечения $M_0 \cap M_1$, т.е. при некоторых константах $A_0(\Delta)$, $A_1(\Delta)$, $A_2^\pm(\Delta)$ имеют место следующие неравенства:

$$|\sigma| \leq A_0(\Delta), \quad |\dot{\sigma}| \leq A_2(\Delta), \quad A_2^- \leq |\ddot{\sigma}| \leq A_2^+(\Delta), \quad (5.13)$$

причем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} A_0(\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} A_1(\Delta) = 0, \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} A_2^\pm(\Delta) > 0.$$

Пусть $\tau(\Delta)$ — какой-либо интервал неопределенности $\ddot{\sigma}$. Ясно, что $\tau(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. Тогда по теореме Лагранжа для некоторой точки Θ из этого интервала

$$|\ddot{\sigma}(\Theta)| \leq 2 \max_{\tau} |\dot{\sigma}| \leq \frac{2A_1(\Delta)}{\tau(\Delta)}. \quad (5.14)$$

Аналогично, для того же интервала находим для некоторого Θ'

$$|\ddot{\sigma}(\Theta')| \leq 2 \max_{\tau} |\sigma| \leq \frac{2A_0(\Delta)}{\tau(\Delta)}. \quad (5.15)$$

Из сопоставления (5.13), (5.14) и (5.15) находим, что

$$A_1 \sim O(\tau), \quad A_2 \sim O(\tau^2),$$

и если $\tau \sim O(\Delta)$, а это, как правило, имеет место, то

$$A_1 \sim O(\Delta), \quad A_2 \sim O(\Delta^2).$$

Последнее означает, что рассматриваемый реальный скользящий режим имеет 2-й порядок по параметру неидеальности Δ .

В частности, если параметр $\Delta = h$, где h — шаг дискретизации временной шкалы при численном моделировании разрывной системы, то для реального скольжения 2-го порядка гарантируется соответствующая точность 2-го порядка по h выполнения связи $\sigma = 0$ и, следовательно, аналогичная точность приближения траектории реального скольжения к соответствующей траектории идеального скольжения.

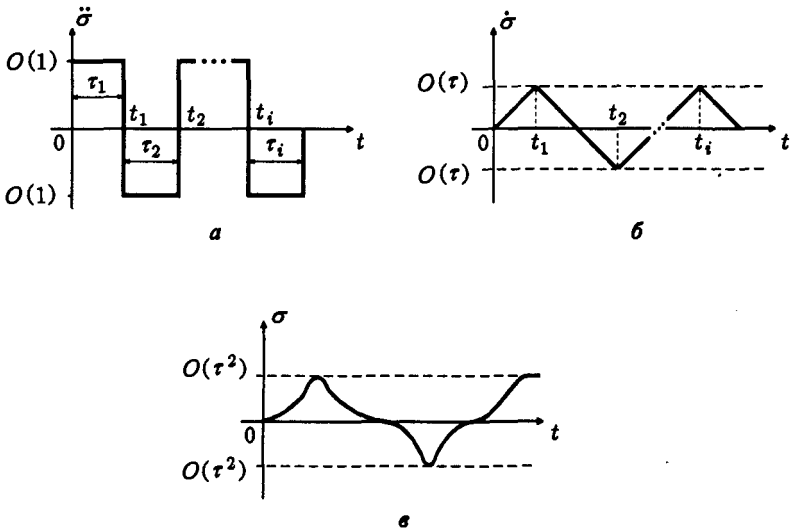


Рис. 5.8

Сказанное выше иллюстрируют рис. 5.8. Описанная концепция естественным образом обобщается на произвольный порядок скольжения, именно: пусть $L_f(\cdot)$ — оператор дифференцирования по направлению векторного поля f^\pm , т.е. для гладкой функции $\varphi(x)$

$$L_f^l D\varphi(x) = \langle \nabla \varphi, f^\pm \rangle, \quad f^\pm = f + bu^\pm.$$

При кратном применении этого оператора имеем равенство

$$L_j^l \varphi = L_j(L_j^{l-1} \varphi), \quad l — \text{целое число.}$$

Заметим, что в тех случаях, когда это имеет смысл, между производными по времени функции $\sigma(x)$ и системой $\dot{x} = f(x)$ справедливо следующее равенство:

$$\sigma^{(l)} = \frac{d^l \sigma}{dL^l} = L_j^l \sigma.$$

Пусть при последовательном дифференцировании функции $\sigma(x)$ и все ее производные до порядка $(r-1)$ включительно непрерывны, а r -я производная $\sigma^{(r)} \equiv L_j^r \sigma$ разрывна и знакопеременна. Тогда, если пересечение

$$M_r = M_0 \cap M_1 \cap \dots \cap M_{r-1},$$

где

$$M_l = \{x \mid \sigma^{(l)}(x) = 0\}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1,$$

не пусто, то оно является многообразием идеального скольжения порядка r .

Если, кроме того, при реальном скольжении обеспечено выполнение следующих неравенств для $l = 0, 1, \dots, r-1$:

$$|\sigma^{(l)}| \leq A_l(\Delta), \quad |\sigma^{(r)}| \leq A_r(\Delta), \quad A_r(\Delta) \geq \text{const} > 0,$$

где Δ — параметр, характеризующий неидеальности переключений, то точность реального скольжения по σ имеет порядок Δ^r , так как

$$|\sigma^{(l)}| \sim O(\Delta^{r-l}), \quad l = 0, 1, \dots, r-1.$$

5.2. Алгоритмы скольжения 2-го порядка

Рассмотрим некоторые алгоритмы скольжения 2-го порядка.

Прежде всего уточним математическую модель, с которой предстоит иметь дело. Вновь рассмотрим гладкое многообразие

$$M_0 = \{x \mid \sigma(x) = 0\}.$$

Поведение в его окрестности $O(M_0)$ разрывной системы

$$\dot{x} = f + b u^\pm$$

можно изучать по скалярному уравнению вида

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, f \rangle + \langle \nabla \sigma, b \rangle u^\pm. \quad (5.16)$$

Пусть u_{eq} — решение для $x \in O(M_0)$ уравнения

$$0 = \langle \nabla \sigma, f \rangle + \langle \nabla \sigma, b \rangle u_{\text{eq}}, \quad (5.17)$$

тогда, после вычитания (5.17) из (5.16), получим, что в окрестности $O(M_0)$ действует уравнение

$$\dot{\sigma} = \langle \nabla \sigma, b \rangle (u^{\pm} - u_{\text{eq}}).$$

Если обозначить правую часть последнего уравнения через u , то тем самым изучение движений в окрестности $O(M_0)$ можно свести, без ущерба для общности, к следующему стандартному уравнению:

$$\dot{\sigma} = u. \quad (5.18)$$

Особенность такого уравнения при анализе скользящих режимов 2-го порядка состоит в том, что функция u непрерывна и такова, что фазовые траектории исходной системы касаются многообразия в точках скольжения 2-го порядка, иными словами, u обращается в нуль на пересечении

$$M_0 \cap M_1,$$

где, как и раньше,

$$M_1 = \{x \mid \dot{\sigma}(x) = 0\}.$$

Проблема стабилизации скалярного объекта (5.18) непрерывным управлением сводится следующими заменами

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = u$$

к стандартной проблеме стабилизации в нуле объекта 2-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \sigma_2, & \dot{\sigma}_2 &= \nu, \\ \sigma &= \sigma_1, \end{aligned} \quad (5.19)$$

обратной связью $\nu(\sigma_1, \sigma_2)$, которая при скольжении 2-го порядка может быть и разрывной. Разумеется, наиболее привлекательны те обратные связи $\nu(\sigma_1, \sigma_2)$, которые финитно стабилизируют объект (5.19) в нуле по выходу, однако не будем пренебрегать и асимптотически стабилизирующими обратными связями по состоянию или по выходу.

Описанная выше конструкция допускает естественное обобщение. Так, проблема организации скользящего режима r -го порядка на многообразии M_0 эквивалентна проблеме финитной стабилизации по выходу в нуле следующей системы r -го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \sigma_{i+1}, & i &= 1, 2, \dots, r-1, \\ \dot{\sigma}_r &= \nu, & \sigma &= \sigma_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

В самом деле, в этом случае в желаемом режиме имеем равенства

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_r = 0,$$

которые означают, что движение происходит по пересечению

$$M_0 \cap M_1 \cap \dots \cap M_r,$$

где, как очевидно, множества M_i определяются следующими соотношениями:

$$M_i = \{x \mid \sigma^{(i)}(x) = 0\}.$$

Порядок скользящего режима можно связать с относительным порядком исходного объекта по управлению, если за его выход принята переменная $\sigma(x)$. Проще всего и без потери в общности это можно пояснить на примере линейного стационарного объекта. Действительно, пусть связь между входом u и выходом σ объекта определена дробно-рациональной передаточной функцией $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$ (рис. 5.9).

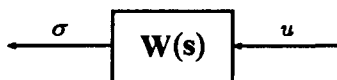


Рис. 5.9

Тогда при относительном порядке единица, т.е. когда

$$\deg \alpha(s) - \deg \beta(s) = 1,$$

производная $\dot{\sigma}$ может претерпевать разрывы, если управление u разрывно и, следовательно, возможен скользящий режим 1-го порядка.

При условии, что

$$\deg \alpha(s) - \deg \beta(s) = r,$$

функции $\sigma^{(l)}$, $l = 0, 1, \dots, r - 1$ не зависят явно от управления, а функция $\sigma^{(r)}$ — зависит, и, следовательно, при разрывном управлении u разрывы может претерпевать только $\sigma^{(r)}$, а значит, в системе в принципе возможен скользящий режим не ниже r -го порядка. Таким образом, порядок функции, задающей поверхность разрыва, по управлению (т.е. номер первой производной Ли, явно зависящей от управления) и определяет порядок скользящего режима, если, конечно, последний устойчив.

Рассмотрим конкретные примеры алгоритмов скольжения 2-го порядка подробнее.

5.2.1. Асимптотические алгоритмы скольжения 2-го порядка

При решении задачи асимптотической стабилизации в нуле объекта (Σ -системы)

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = u$$

сначала исследуем возможности линейной обратной связи

$$u = -k_1\sigma_1 - k_2\sigma_2. \quad (5.21)$$

При постоянных параметрах обратной связи k_1, k_2 возможны три основных вида экспоненциально затухающих переходных процессов: колебательные (рис. 5.10), апериодические (рис. 5.11) и монотонные (рис. 5.12). В последнем случае используется глубокая обратная связь,

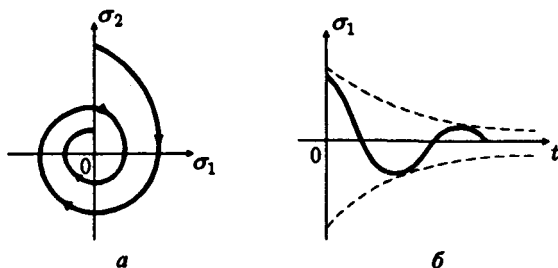


Рис. 5.10

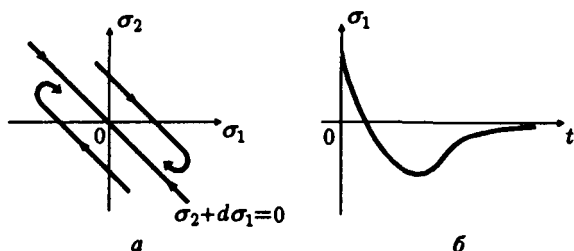


Рис. 5.11

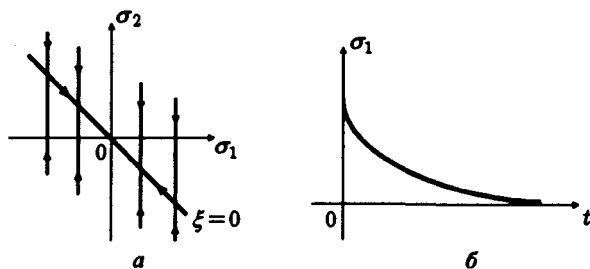


Рис. 5.12

вводимая устремлением в бесконечность общего множителя k параметров k_1, k_2 , т.е. в этом случае обратная связь (5.21) имеет вид

$$u = -k\xi = -k(\sigma_2 + d\sigma_1), \quad d = \text{const} > 0.$$

Соответствующие рис. 5.10–5.12 ситуации в исходном фазовом пространстве X разрывной системы

$$\dot{x} = f^\pm = f + bu^\pm$$

иллюстрируют рис. 5.13, 5.14. Особенности таких алгоритмов скольжения обусловлены характерными свойствами линейных систем стабилизации. В частности, для уменьшения времени переходного про-

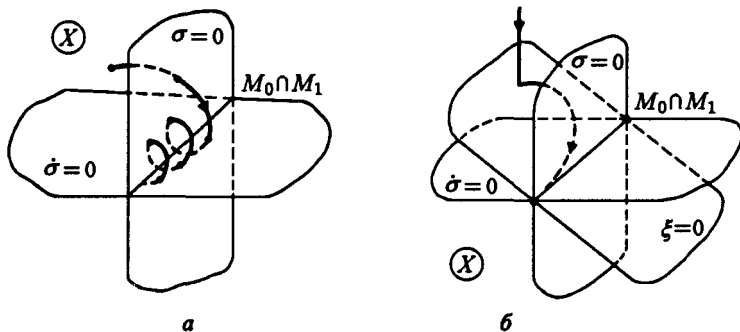


Рис. 5.13

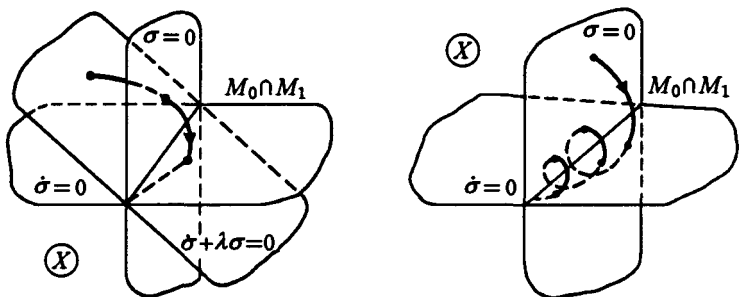


Рис. 5.14

Рис. 5.15

цесса (а это желательно) необходимо увеличивать демпфирование, но это понижает прочность системы. Кроме того, при наличии неопределенности в описании исходной системы $\dot{x} = f^\pm$ информация о производной σ_2 может отсутствовать, а ее восстановление стандартными методами наблюдения невозможно. Поэтому следует обратиться к нелинейным алгоритмам стабилизации.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда многообразие скольжения — M_0 , и только оно является многообразием разрыва обратной связи, например,

$$u = -k_2 \sigma_2 - k_1 \operatorname{sgn} \sigma_1.$$

В этом случае замкнутая система

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 &= -k_1 \operatorname{sgn} \sigma_1 - k_2 \sigma_2\end{aligned}$$

асимптотически устойчива в нуле, что проверяется пробной функцией

$$v = |\sigma_1| + \frac{1}{2k_1} \sigma_2^2,$$

производная которой имеет вид

$$\dot{v} = -\frac{k_2}{k_1} \sigma_2^2$$

и тождественно обращается в нуль только в начале координат. Каче-

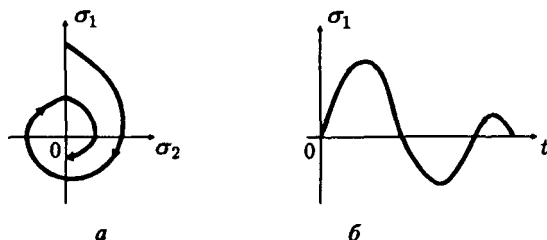


Рис. 5.16

ственное представление о характере движения в окрестности пересечения $M_0 \cap M_1$ в этом случае дают рис. 5.15, 5.16.

5.2.2. Разрывные асимптотические алгоритмы скольжения 2-го порядка

Если разрывы управления допускаются не только на многообразии скольжения M_0 , то экспоненциальную стабилизацию Σ -системы в нуле обеспечивает следующий закон СПС:

$$\begin{aligned}u &= -k |\sigma_1| \operatorname{sgn} \xi, \\ \xi &= \sigma_2 + 2d \sigma_1, \quad d = \operatorname{const} > 0.\end{aligned}$$

Действительно, уравнения замкнутой системы имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 &= -k |\sigma_1| \operatorname{sgn} \xi,\end{aligned}$$

и при выполнении неравенства

$$k > d^2$$

на прямой $\xi = 0$ за конечное время (кроме асимптотических траекторий) возникает скользящий режим (рис. 5.17, 5.18), который является скользящим режимом 1-го порядка относительно переменной ξ , но 2-го порядка относительно переменной σ_1 . Разрывные алгоритмы

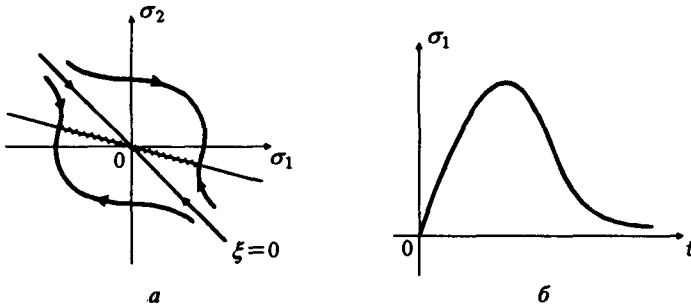


Рис. 5.17

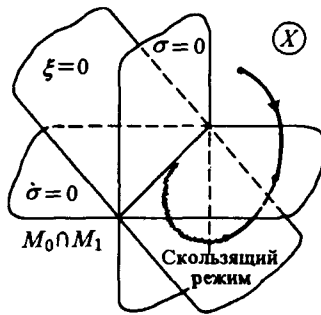


Рис. 5.18

скольжения обеспечивают более прочное по сравнению с линейными алгоритмами решение задачи стабилизации по неоднократно упомянутым причинам. Представляет интерес, однако, синтез финитных алгоритмов стабилизации.

5.2.3. Финитные алгоритмы скольжения 2-го порядка: линейная обратная связь

Финитная стабилизация возможна только в классе линейных нестационарных или же нелинейных (разрывных) обратных связей.

Прежде всего естественно рассмотреть стабилизирующие возможности линейной обратной связи. Именно, применим для стабилизации в нуле Σ -системы

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = u$$

за конечное время $\eta > 0$ линейную обратную связь с переменными параметрами $u = -k\bar{\sigma} = -k_1\sigma_1 - k_2\sigma_2$, где для удобства введены векторы $k^T = (k_1, k_2)$ и $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$; здесь T — знак транспонирования.

Общее решение Σ -системы дается формулой Коши

$$\bar{\sigma}(t) = e^{tA} \left[\bar{\sigma}_0 + \int_0^t e^{-\tau A} b u d\tau \right],$$

где матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Положим

$$u(t) = -b^T e^{-\tau A^T} l,$$

где вектор l определяется из равенства $\bar{\sigma}(\eta) = 0$, т.е.

$$\bar{\sigma}_0 = \left[\int_0^\eta e^{-\tau A} b b^T e^{-\tau A^T} d\tau \right] l = W(0, \eta) l.$$

Поскольку Σ -система управляема, то граммیان управляемости $W(0, \eta)$ невырожден при любом $\eta > 0$, и поэтому $l = W^{-1}(0, \eta)\bar{\sigma}_0$, что и позволяет найти управление, решающее задачу в виде “программы”

$$u = -b^T e^{-tA^T} W^{-1}(0, \eta) \bar{\sigma}_0.$$

Для нахождения соответствующей обратной связи выразим $\bar{\sigma}_0$ из равенства

$$e^{-tA} \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 \bar{\varphi} W(0, t) W^{-1}(0, \eta) \bar{\sigma}_0,$$

а результат подставим в предыдущую формулу для u . Получим следующую формулу:

$$u = -\frac{b^T e^{-tA^T} W^{-1}(0, \eta) e^{-tA}}{1 - W(0, t) W^{-1}(0, \eta)} \sigma,$$

которая и определяет искомую обратную связь. Поскольку

$$W(0, t) W^{-1}(0, \eta) \rightarrow 1$$

при $t \rightarrow \eta$, то коэффициент обратной связи неограниченно возрастает за конечное время, т.е.

$$k(t) = -\frac{b^T e^{-tA^T} W^{-1}(0, \eta) e^{-tA}}{1 - W(0, t) W^{-1}(0, \eta)} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \eta.$$

Последнее, конечно, неприемлемо в приложениях. Для явного выражения параметров $k_1(t)$ и $k_2(t)$ через параметры Σ -системы нужно использовать следующие формулы:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W(0, t) = \begin{bmatrix} t^3/3 & -t^2/2 \\ t^2/2 & t \end{bmatrix},$$

$$W^{-1}(0, t) = \begin{bmatrix} 12/t^3 & 6/t^2 \\ 6/t^2 & 4/t \end{bmatrix}, \quad b^T e^{-tA^T} = [-t, 1].$$

5.2.4. Финитные алгоритмы скольжения 2-го порядка: релейная обратная связь

Рассмотрим теперь нелинейную обратную связь, которая также обеспечивает финитную стабилизацию, но ограничена при любых $\bar{\sigma}$. Пусть скалярная гладкая функция $g(\sigma)$ такова, что $g(0) = 0$, $g'g$ ограничена, решение дифференциального уравнения $\dot{\sigma} = g(\sigma)$ существует при любом $\sigma(0)$ и это решение за конечное время попадает в нуль. Например, такими свойствами обладает функция $g(\sigma) = -d \operatorname{sgn} \sigma |\sigma|^\rho$, $0.5 \leq \rho < 1$, $d = \operatorname{const} > 0$.

Тогда обратную связь, финитно стабилизирующую Σ -систему

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = u,$$

можно выбрать релейной, например в виде

$$u = -k \operatorname{sgn} \xi(\sigma_1, \sigma_2),$$

$$\xi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - g(\sigma_1).$$

При достаточно большом коэффициенте $k > 0$ кривая $\sigma_2 = g(\sigma_1)$ будет кривой скольжения, она достигается из любого начального положения за конечное время, что и гарантирует финитность времени стабилизации η (рис. 5.19).

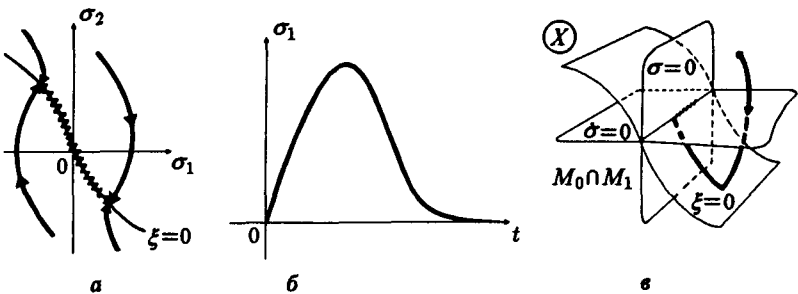


Рис. 5.19

5.2.5. Алгоритм скручивания

Исследуем стабилизирующие свойства разрывной обратной связи вида

$$u = -k_1 \operatorname{sgn} \sigma_1 - k_2 \operatorname{sgn} \sigma_2,$$

где $k_1 > k_2$ — положительные параметры. Замкнутая система при этом описывается уравнениями

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2,$$

$$\dot{\sigma}_2 = -k_1 \operatorname{sgn} \sigma_1 - k_2 \operatorname{sgn} \sigma_2,$$

а отвечающие ей траектории, состоящие из отрезков параболы, изображены на рис. 5.20.

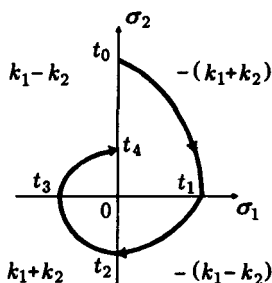


Рис. 5.20

Пусть t_0, t_1, t_2, t_3 и t_4 — последовательные моменты переключения управления, а $\tau_1 = t_1 - t_0$, $\tau_2 = t_2 - t_1$ и т.д. — интервалы времени между переключениями. Соотношения между последовательными значениями переменных σ_1, σ_2 в моменты переключений даются, очевидно, следующими выражениями: $\sigma_1 = \pm \sigma_2^2 / (k_1 + k_2)$ в первом и третьем квадрантах, $\sigma_1 = \mp \sigma_2^2 / (k_1 - k_2)$ — во втором и четвертом. Поэтому между квадратами $\sigma_2(0)$ и $\sigma_2(t_2)$ имеет место соотношение

$$\sigma_2^2(t_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \sigma_2^2(0) = \kappa \sigma_2^2(0).$$

Аналогично имеем $\sigma_2^2(t_4) = \kappa \sigma_2^2(t_2) = \kappa^2 \sigma_2^2(0)$.

Пусть i — номер полного оборота фазового вектора вокруг нуля, тогда последовательные значения переменной σ_2 связаны следующими соотношениями:

$$|\sigma_2(i)| = \kappa |\sigma_2(i-1)| = \dots = \kappa^i |\sigma_2(0)|, \quad i = 1, 2, \dots,$$

откуда следует сходимость переходных процессов Σ -системы к нулю, если только $\kappa < 1$. Докажем, что эта сходимость финитна.

Пусть T_i — время i -го оборота. Очевидно, что

$$T_i = \tau_1^i + \tau_2^i + \tau_3^i + \tau_4^i,$$

где для промежутков τ_j^i ($j = 1, 2, 3, 4$) нетрудно получить выражения

$$\tau_1^i = \frac{|\sigma_2(t_0^i)|}{k_1 + k_2}, \quad \tau_3^i = \frac{|\sigma_2(t_2^i)|}{k_1 + k_2},$$

$$\tau_2^i = \frac{|\sigma_2(t_2^i)|}{k_1 - k_2}, \quad \tau_4^i = \frac{|\sigma_2(t_4^i)|}{k_1 - k_2}.$$

Используя последние соотношения, нетрудно убедиться, что верна следующая оценка:

$$T_i \leq \frac{1}{k_1 - k_2} (|\sigma_2(t_0^i)| + 2|\sigma_2(t_2^i)| + |\sigma_2(t_4^i)|) =$$

$$= \frac{1}{k_1 - k_2} (1 + 2\sqrt{\kappa} + \kappa) |\sigma_2(t_0^i)| = \frac{(1 + \sqrt{\kappa})^2}{k_1 - k_2} |\sigma_2(i)|.$$

Поскольку для времени переходного процесса верна оценка сверху

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \leq \frac{(1 + \sqrt{\kappa})^2}{k_1 - k_2} \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_2(i)| = \frac{(1 + \sqrt{\kappa})^2 |\sigma_2(0)|}{k_1 - k_2} \sum_{i=1}^{\infty} \kappa^{i-1}$$

и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \kappa^i$ сходится при $\kappa < 1$, то это и означает, что время T переходного процесса ограничено. Иными словами, любая фазовая траектория “скручивается” в нуль за конечное время, что и проясняет название алгоритма. Соответствующие этому поведению иллюстрации даны на рис. 5.21.

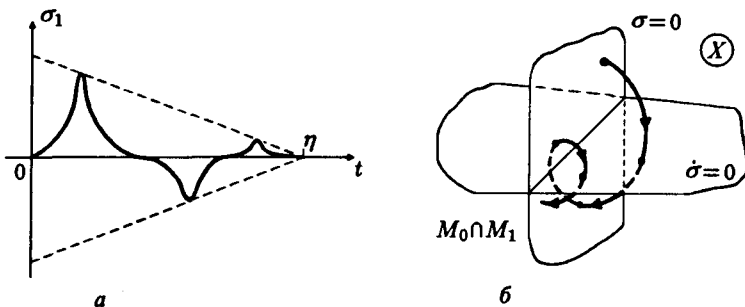


Рис. 5.21

В заключение этого раздела заметим, что релейный алгоритм и алгоритм скручивания можно применять и при дискретных измерениях, но в этой ситуации они превращаются в алгоритмы реального

скольжения 2-го порядка. Именно, пусть t_i — моменты измерения функции $\sigma(t)$ с постоянным шагом $h = t_{i+1} - t_i$. Тогда релейный алгоритм реального скольжения 2-го порядка задается выражением

$$u(t) = g - k \operatorname{sgn} [\delta_i \sigma_1 - g(\sigma_1(t_i))], \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

где $\delta_i \sigma_1 = \sigma_1(t_i) - \sigma_1(t_{i-1})$, а алгоритм дискретного скручивания, соответственно, — выражением

$$u(t) = -k_1 \operatorname{sgn} \sigma_1(t_i) - k_2 \operatorname{sgn} [\delta_i \sigma_1], \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

5.3. Финитная стабилизация по выходу

Вновь рассмотрим задачу финитной стабилизации в нуле Σ -системы

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = u,$$

с уравнением выхода

$$\sigma = \sigma_1.$$

Удобно уравнения Σ -системы свести к одному уравнению второго порядка $\ddot{\sigma} = u$. Зададимся обратной связью вида

$$u = -k_1 \operatorname{sgn} \sigma - \frac{k_2}{|\sigma|^{1/2}} \dot{\sigma}, \quad k_1, k_2 = \operatorname{const} > 0, \quad (5.22)$$

особенность которой состоит в том, что коэффициент демпфирования $k_2/|\sigma|^{1/2}$ в уравнении замкнутой системы

$$\ddot{\sigma} + \frac{k_2}{|\sigma|^{1/2}} \dot{\sigma} + k_1 \operatorname{sgn} \sigma = 0 \quad (5.23)$$

неограниченно нарастает при приближении к многообразию скольжения

$$M_0 = \{x \mid \sigma(x) = 0\}.$$

Именно с этим “физическим” эффектом связаны надежды на финитно стабилизационные возможности обратной связи (5.22).

Перейдем к анализу уравнения замкнутой системы (5.23). Прежде всего замечаем, что при замене $\sigma \rightarrow -\sigma$ вид уравнения, а значит, и его фазовые траектории сохраняются, поэтому достаточно ограничиться анализом его решений при $\sigma > 0$, так как траектории в квадрантах $\sigma \dot{\sigma} > 0$ ($\sigma \dot{\sigma} < 0$) подобны.

Качественно фазовые траектории исследуемого уравнения

$$\ddot{\sigma} + \frac{k_2}{|\sigma|^{1/2}} \dot{\sigma} + k_1 \operatorname{sgn} \sigma = 0$$

представлены на рис. 5.22, на котором $\dot{\sigma}_0$ — начальное значение скорости, $\dot{\sigma}_2$ — точка второго пересечения фазовой траектории с осью $\sigma = 0$ (т.е. второго пересечения многообразия M_0), $\dot{\sigma}_* = \dot{\sigma}(t_*)$ — минимальное значение скорости на интервале движения $[t_1, t_2]$, где t_1 — момент обнуления скорости $\dot{\sigma}$ (т.е. момент максимального удаления изображающей точки от многообразия M_0), t_2 — момент попадания на M_0 . При $\sigma > 0$ имеем дело с уравнением

$$\ddot{\sigma} + \frac{k_2}{\sqrt{\sigma}} \dot{\sigma} + k_1 = 0,$$

которое нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} [\dot{\sigma} + k_1 t + 2k_2 \sigma^{1/2}] = 0,$$

а затем, так как при $t = 0$ верны равенства $\dot{\sigma}(0) = \dot{\sigma}_0$, $\sigma(0) = 0$, после интегрирования получаем соотношение

Рис. 5.22

$$\dot{\sigma} + k_1 t + 2k_2 \sigma^{1/2} = \dot{\sigma}_0. \quad (5.24)$$

При $t = t_1$ из (5.24) находим (учитывая, что $\dot{\sigma}(t_1) = 0$)

$$k_1 t_1 + 2k_2 \sigma_1^{1/2} = \dot{\sigma}_0.$$

Поскольку $t_1 > 0$, то из последнего равенства имеем первое из необходимых нам далее неравенств, именно:

$$\sigma_1^{1/2} < \frac{\dot{\sigma}_0}{2k_2}. \quad (5.25)$$

Подставим $t = t_*$ в (5.23). Тогда, учитывая, что $\ddot{\sigma}(t_*) = 0$, получим равенство

$$k_2 \dot{\sigma}_* + k_1 \sigma_*^{1/2} = 0, \quad \text{или} \quad \sigma_*^{1/2} = -\frac{k_2}{k_1} \dot{\sigma}_*.$$

Но очевидно (рис. 5.22), что $\sigma_* < \sigma_1$, $\dot{\sigma}_* < \dot{\sigma}_2$, а поэтому из последнего равенства получаем цепочку неравенств

$$\sigma_1^{1/2} > \sigma_*^{1/2} = \frac{k_2}{k_1} (-\dot{\sigma}_*) > \frac{k_2}{k_1} (-\dot{\sigma}_2),$$

из которых можно извлечь второе из требуемых соотношений, именно:

$$-\dot{\sigma}_2 < \frac{k_1}{k_2} \sigma_1^{1/2}. \quad (5.26)$$

После подстановки (5.25) в (5.26) получаем следующее неравенство между скоростями двух последовательных пересечений многообразия скольжения M_0 :

$$\frac{|\dot{\sigma}_2|}{\dot{\sigma}_0} < \gamma = \frac{k_1}{2k_2^2}.$$

В силу отмеченной выше симметрии уравнений замкнутой системы аналогичное неравенство имеет место для любых двух последовательных моментов пересечения многообразия M_0 , т.е. справедливо неравенство

$$\left| \frac{\dot{\sigma}_{i+1}}{\dot{\sigma}_i} \right| \leq \gamma.$$

Отсюда получаем оценку вида $|\dot{\sigma}_i| \leq \gamma^i |\dot{\sigma}_0|$, и если выполнено условие

$$\gamma = \frac{k_1}{2k_2^2} < 1,$$

то стабилизируемость доказана, так как при этом

$$|\dot{\sigma}_i| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

а из неравенств типа (5.25) следует также, что и

$$|\sigma_i| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

где σ_i — максимумы отклонений от многообразия скольжения M_0 .

Докажем теперь, что время переходного процесса конечно. Для этого подставим $t = t_2$ в уравнение (5.24). Получим равенство

$$\dot{\sigma}_2 + k_1 t_2 = \dot{\sigma}_0,$$

и, следовательно, для промежутка времени $T_1 = t_2 - 0$ между двумя пересечениями многообразия M_0 имеет место следующая оценка:

$$T_1 = t_2 = \frac{\dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_2}{k_1} < \dot{\sigma}_0 \frac{1 + \gamma}{k_1}.$$

Естественно, что аналогичная оценка справедлива для каждого i -го интервала, т.е.

$$T_i < |\dot{\sigma}_{i-1}| \frac{1 + \gamma}{k_1}.$$

Но время T переходного процесса конечно, так как в неравенстве

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i < \frac{1 + \gamma}{k_1} \sum_{i=1}^{\infty} |\dot{\sigma}_{i-1}|$$

по доказанному ранее

$$|\dot{\sigma}_i| < \gamma |\dot{\sigma}_{i-1}|, \quad 0 < \gamma < 1,$$

и, значит, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\dot{\sigma}_i|$ ограничен.

Таким образом, имеет место фinitная стабилизация Σ -системы обратной связью вида (5.22). Проведенное исследование обосновывает рис. 5.23, на котором изображен фinitный переходный процесс, заканчивающийся к моменту времени η .

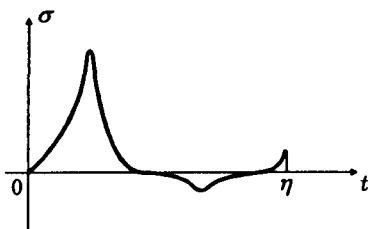


Рис. 5.23

В завершение данного раздела укажем причину, по которой обратная связь

$$u = -k_1 d \operatorname{sgn} \sigma - k_2 \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{1/2}}$$

названа обратной связью по выходу. Дело в том, что поведение исследуемой выше Σ -системы и нижеследующей системы, описываемой интегриродифференциальным уравнением

$$\dot{\sigma}(t) = -k_1 \int_0^t \operatorname{sgn} \sigma d\tau - k_2 \int_0^t |\sigma|^{1/2} \operatorname{sgn} \sigma d\tau + \dot{\sigma}_0,$$

суть одно, но для реализации управления, стоящего в правой части последнего уравнения, требуется информация только о выходе σ .

Разумеется, все выводы сохраняются и в случае использования обратной связи вида

$$u = -k_1 \operatorname{sgn} \sigma - k_2 \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^\rho}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Наконец, заметим, что все изложенные выше результаты без существенных изъятий могут быть перенесены на произвольный порядок скольжения. Следует, однако, отметить тот факт, что при управлении неопределенной системой информация о переменных σ_i ($i \geq 1$) может отсутствовать, а их оценивание с помощью стандартных наблюдений может оказаться невозможным. Это серьезная и пока не решенная проблема.

Глава 6

Теория операторной обратной связи

В данной главе свойства систем стабилизации из главы 3 улучшаются путем использования дополнительной нелинейной обратной связи операторного типа. Напомним, что “по легенде” операторная обратная связь должна обеспечить “сближение” динамических свойств задатчика и системы управления с координатной и координатно-операторной обратными связями. Подобное сближение требуется осуществить без использования какой-либо информации о факторах неопределенности, а только путем установления дополнительной нелинейной связи между переменными системы. Результатом использования такой нелинейной связи должно быть повышение качества переходных процессов и уменьшение их зависимости от факторов неопределенности.

6.1. О назначении операторной обратной связи

В теории координатно-операторной обратной связи (глава 4) рассмотрены различные алгоритмы стабилизации простейшего неопределенного объекта

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a \quad (6.1)$$

с неизвестными параметрами, принадлежащими известным множествам

$$a \in A, \quad b \in B.$$

Одним из наиболее эффективных и простых в реализации оказался пропорционально-интегрально-релейный закон стабилизации

$$\mu = -k_2 \xi - k_1 \int_0^t \operatorname{sgn} \xi dt, \quad (6.2)$$

где k_1, k_2 — фиксированные параметры обратной связи. Структурная схема соответствующей замкнутой системы (6.1), (6.2) приведена на рис. 6.1 (смысл стрелок на интеграторе в законе (6.2) будет пояснен позднее). Уравнения движения замкнутой системы в пределах линейной зоны интегратора (рис. 6.1) и при постоянных параметрах a и b в координатно-операторном пространстве следуют из (6.1), (6.2) и

имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + (bk_2 - 2d)\dot{\xi} + bk_1 \operatorname{sgn} \xi &= 0, \\ \dot{x}_1 &= -dx_1 + \xi x_1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

откуда ясно, что чем больше коэффициент k_2 (т.е. чем "глубже" линейная обратная связь), тем выше темп затухания операторной переменной ξ . Это и является целью решаемой задачи стабилизации. Но

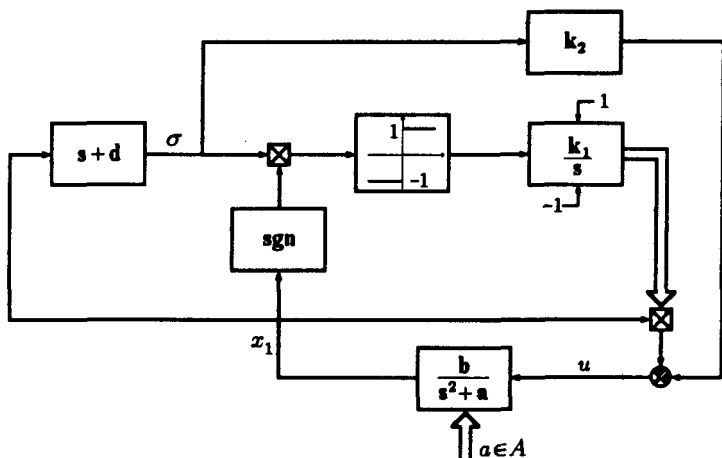


Рис. 6.1

для фактического управления верно следующее выражение:

$$u = \mu x_1 = -k_2 \sigma - k_1 x_1 \int \operatorname{sgn}(\sigma x_1) dt,$$

из которого видно, что с увеличением параметра k_2 растет воздействие по переменной σ и, следовательно, прочность замкнутой системы снижается.

При увеличении же параметра k_1 переходный процесс по операторной переменной становится колебательным. Поэтому важно изыскать средства, которые:

- обеспечат достаточное демпфирование переходных процессов в системе (6.3) без увеличения коэффициента k_2 , а быть может, позволят и вовсе отказаться от линейной компоненты в обратной связи ($k_2 = 0$);
- позволят устранить колебательность операторной переменной ξ , что весьма желательно по причинам, упоминавшимся выше.

Кроме того, если параметр b меняется, то закон стабилизации (6.2) неизбежно приводит к статизму по операторной переменной ξ , что, как известно, эквивалентно динамическому статизму по основной переменной x_1 .

Отметим, без подробного комментария, что изменения параметра a с ограниченной скоростью, т.е. когда

$$|\dot{a}| < \text{const} < bk_1,$$

закон (6.2) допускает. В связи с этим возникает вопрос о принципиальной достижимости сформулированных выше целей управления и путей их достижения.

Можно, конечно, анализируя уравнение (6.1)

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a,$$

попытаться угадать соответствующий алгоритм стабилизации операторной переменной ξ в нуле, что, конечно, возможно. Но кажется более предпочтительным попытаться воспользоваться рекомендациями общей теории, изложенной в главе 3. Именно, использовать для решения поставленной задачи операторную обратную связь (далее, для краткости, О-связь), реализуемую по схеме рис. 6.2. Это вполне есте-

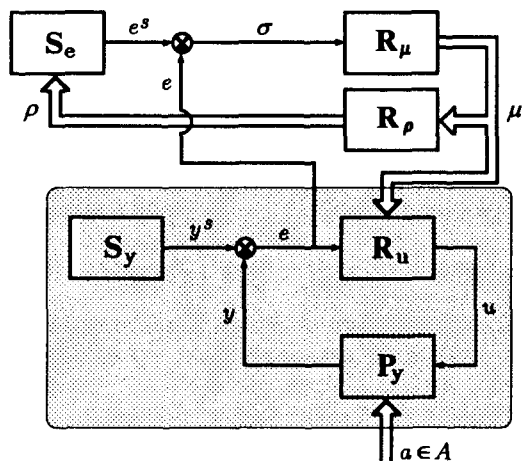


Рис. 6.2

ственно, так как с физической точки зрения назначение О-связи состоит в сближении динамических свойств задатчика S_e и объекта P_e . Понятно, что при наличии такого сближения "легче" управлять объектом и потому коэффициенты усиления в КО-контуре можно уменьшить.

Если в предыдущей схеме символом \tilde{P}_e обозначить объект операторного типа с выходом μ и входом ρ , то проблема синтеза оператора О-связи R_ρ , по крайней мере в содержательном плане, может быть

сведена к стандартной проблеме синтеза обратной связи, которую иллюстрирует рис. 6.3. Разумеется, при этом проявятся важные особен-

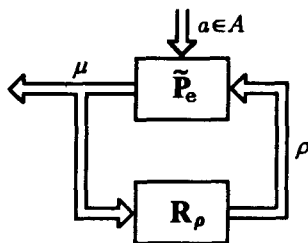


Рис. 6.3

ности в управлении таким объектом, и прежде всего принципиальна нелинейность его уравнений движения. Поэтому в первую очередь получим уравнения движения исследуемой системы, поскольку параметры d задатчика S_e в схеме на рис. 6.2 теперь переменны и зависят от ρ , т.е. $d_\rho = d(\rho)$, и если $\rho = \rho(t)$, то $d_\rho = d_\rho(t)$.

6.2. Уравнения движения в пространстве координата–оператор

Напомним, что в исходном (x_1, x_2) -координатном пространстве стабилизируемый объект описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_1 + bu.$$

Следуя общей процедуре синтеза бинарного управления, введем КО-ошибку

$$\sigma_\rho = x_2 + d_\rho x_1 = \dot{x}_1 + d_\rho x_1,$$

которую впредь будем помечать индексом ρ , отличая ее тем самым от прежней ошибки $\sigma = x_2 + dx_1$. Теперь можно определить в области

$$G_\delta = \{ (x_1, x_2) \mid |\sigma| \leq \delta |x_1|, \delta = \text{const} \}$$

новую операторную переменную

$$\xi = \sigma_\rho / x_1. \quad (6.4)$$

Для перехода к описанию в координатно-операторном, далее, для краткости, КО-пространстве (x_1, ξ) потребуется уравнение изменения операторной переменной ξ . Дифференцируя выражение (6.4) и исполь-

зую равенства $\dot{x}_2 = ax_1 + bu$, $x_2 = \sigma_\rho - d_\rho x_1$, имеем последовательно:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\dot{\sigma}_\rho}{x_1} - \frac{\sigma_\rho}{x_1} \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{x}_2 + d_\rho x_2 + \dot{d}_\rho x_1}{x_1} - \frac{\sigma_\rho}{x_1} \frac{x_2}{x_1} = \\ &= \frac{ax_1 + bu + d_\rho \sigma_\rho - d_\rho^2 x_1 + \dot{d}_\rho x_1}{x_1} - \frac{\sigma_\rho}{x_1} \frac{\sigma_\rho - d_\rho x_1}{x_1} = \\ &= 2d_\rho \xi + b \frac{u}{x_1} + (a - d_\rho^2) + \dot{d}_\rho - \xi^2. \end{aligned}$$

Если, как и ранее, использовать в главном контуре простейшую бинарную операцию $u = \mu x_1$ и рассматривать стабилизацию в малом, когда можно пренебречь квадратичными членами, то искомые уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -d_\rho x_1 + \xi x_1, \\ \dot{\xi} &= 2d_\rho \xi + b\mu + a - d_\rho^2 + \dot{d}_\rho. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Эти уравнения отличаются от применявшихся ранее уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -dx_1 + \xi x_1, \\ \dot{\xi} &= 2d\xi + b\mu + a - d^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

зависимостью параметра d задатчика S_e от операторной переменной ρ и наличием производной $\dot{d}_\rho \neq 0$ в правой части (6.5), так как теперь $d_\rho = d_\rho(t)$. Поскольку О-закон (т.е. функцию ρ) можно формировать независимо от КО-закона (т.е. функции μ), постольку член \dot{d}_ρ , по существу, можно интерпретировать как дополнительное управление, привлекаемое для стабилизации О-переменной ξ в нуле.

Практически, однако, удобно синтезировать не производную \dot{d}_ρ , а при выбранной функциональной зависимости $d(\rho)$ (например, без потери общности, в виде $d_\rho = d + \rho$) оператор О-связи R_ρ (рис.6.2) и, в отдельных случаях, оператор КО-связи R_μ .

Для дальнейшего упрощения уравнения \bar{P}_e -объекта (рис. 6.3) и получения его окончательного вида будем считать, что при всех изменениях параметр ρ мал по отношению к d . Это предположение вполне оправдано, более того, нужно стремиться к его обеспечению, поскольку в желаемом режиме стабилизации, когда $\varphi = 0$, основная переменная x_1 изменяется, согласно (6.5), в соответствии с уравнением

$$\dot{x}_1 = -d_\rho x_1 = -(d + \rho)x_1.$$

Тогда качество переходного процесса близко к эталонному, определяемому уравнением $\dot{x}_1 = -dx_1$, если выполнено упомянутое выше соотношение порядка между параметрами d и ρ . Но если принять это допущение, то можно приближенно заменить

$$d_\rho = (d + \rho)^2 \approx d^2 + 2d\rho.$$

Наконец, если, как и ранее, для удобства сначала ввести обозначение

$$a^* = a - d^2,$$

а затем, для простоты, “звездочку” не указывать (т.е. осуществить замену $a^* \rightarrow a$), то окончательно уравнения движения исследуемого объекта в О-теории принимают вид

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho)x_1 + \xi x_1, \quad (6.7)$$

$$\dot{\xi} = 2(d + \rho)\xi + b\mu + a - 2d\rho + \dot{\rho}, \quad a \in A, b \in B. \quad (6.8)$$

Далее этот объект (6.7), (6.8) для удобства обозначаем символом P_ρ . Если же рассматривается только второе уравнение P_ρ -объекта (6.8), то его, как условлено выше, обозначаем символом \tilde{P}_e .

Из уравнений (6.7), (6.8) виден нелинейный, точнее билинейный, характер уравнений движения (это обстоятельство принципиально и неоднократно отмечалось выше), но, что важно и что обеспечивает успех всего мероприятия, так это аффинность уравнений движения по управлению (т.е. по паре (μ, ρ)). Последнее позволяет применять для решения задачи стабилизации методы классической теории стабилизации.

6.3. Статическая операторная обратная связь

Рассматривая уравнение \tilde{P}_e -объекта

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2(d + \rho)\xi + b\mu + a - 2d\rho + \dot{\rho}, \\ a &\in A, \quad b \in B, \end{aligned}$$

нетрудно понять, что обратная связь $\rho = R_\rho\mu$ может быть статической или динамической, в зависимости от вида оператора R_ρ , однако только во втором случае ввиду наличия производной $\dot{\rho}$ в правой части (6.8) КО-связь $\mu = R_\mu\sigma_\rho$ может быть разрывной.

Исследование естественно начать с анализа возможностей отрицательной статической О-связи, когда

$$\rho = -q\mu, \quad (6.9)$$

где $q > 0$ — коэффициент усиления О-связи. Имеем в результате следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(d - q\mu)x_1 + \xi x_1, \\ \dot{\xi} &= 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - q\dot{\mu}, \\ \tilde{b} &= b + 2qd. \end{aligned} \quad (6.10)$$

После выбора оператора О-связи $R_p = -q$ свободным остается выбор оператора КО-связи R_μ . Применяя разные операторы R_μ , получаем варианты бинарной системы управления с О-связью. Естественно начать рассмотрение с простейших вариантов выбора оператора R_μ .

6.3.1. Статические операторная и координатно-операторная обратные связи

При использовании статической КО-связи

$$\mu = -k\xi, \quad k = \text{const} > 0$$

второе уравнение движения в (6.10) принимает вид

$$\dot{\xi} = 2(d + qk\xi)\xi - \tilde{b}k\xi + qk\xi + a.$$

После приведения подобных и выделения главной части имеем следующее линейное уравнение:

$$\dot{\xi} = -\frac{(\tilde{b}k - 2d)}{1 - qk}\xi + \frac{a}{1 - qk}, \quad \tilde{b} = b + 2qd,$$

если, конечно, $1 > qk$. При выполнении неравенства

$$(b + 2qd)k > 2d$$

уравнение асимптотически устойчиво и предельное (т.е. установившееся) значение переменной $\xi(t)$ определяется выражением

$$\xi_\infty = \frac{a}{(b + 2qd)k - 2d} = \frac{a}{bk - 2d(1 - qk)}. \quad (6.11)$$

Ошибка ξ_∞ определяет статическую О-ошибку, которая порождает динамический статизм в основном контуре.

Поскольку в пределе основная переменная удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_1 = -(d + qk\xi_\infty)x_1 + \xi_\infty x_1 = -[d + (qk - 1)\xi_\infty]x_1,$$

то величина упоминавшегося динамического статизма дается следующим выражением:

$$\xi_\infty^* = \frac{a(1 - qk)}{bk - 2d(1 - qk)}.$$

Стоит заметить, что статическая ошибка в системе (6.10) без О-связи (т.е. при $q = 0$) определяется выражением

$$\xi_\infty = \frac{a}{bk - 2d},$$

из сравнения которого с (6.11) следует, что в бинарной системе с О-связью заданная величина динамического статизма достигается при

меньшем значении параметра k , нежели в бинарной системе без О-связи. Это немедленно следует из того, что

$$\frac{1}{bk - 2d} > \frac{1 - qk}{bk - 2d(1 - qk)}.$$

Действительно, после освобождения от знаменателей имеем сначала, что

$$(bk - 2d) + 2dqk > (bk - 2d) - qk(bk - 2d),$$

а после приведения подобных получаем тривиальное неравенство

$$0 > -qbk^2.$$

Более того, поскольку динамический статизм

$$\xi_{\infty}^*(q) = \frac{1 - qk}{bk - 2d(1 - qk)}$$

монотонно убывает с ростом параметра q , то величина динамического статизма $\xi_{\infty}^*(q)$ может быть сколь угодно приближена к нулю при $qk \rightarrow 1$, хотя нуль недостижим, ибо при $q = 0$ все эти уравнения не действуют. Следовательно,

- использование статической О-связи оправдано даже в том тривиальном случае, когда применяются только статические нелинейные обратные связи.

Для содержательной интерпретации последнего вывода полезно получить выражение для закона управления по основной переменной, т.е. закона, выраженного через исходные переменные x_1, x_2 . Делая обратную замену $\mu = -k\xi$ и используя равенство $\rho = -q\mu$, имеем следовательно:

$$\begin{aligned} u &= \mu x_1 = -k\xi x_1 = -k\sigma_{\rho} = -k[x_2 + (d + \rho)x_1] = \\ &= -k[x_2 + (d - q\mu)x_1] = -k(x_2 + dx_1) + qk\mu x_1 = -k\sigma + qku. \end{aligned}$$

Разрешая последнее равенство относительно управления u , находим, что

$$u = \frac{k}{1 - qk}\sigma, \quad \sigma = \dot{x}_1 + dx_1.$$

Иными словами, построенная нелинейная бинарная система управления на множестве G_{δ} эквивалентна линейной с коэффициентом усиления

$$K_{\text{eq}} = \frac{k}{1 - qk},$$

и при $qk \rightarrow -1$ наступает эффект большого коэффициента усиления, хотя во всех контурах системы управления применяются конечные коэффициенты усиления. Этот эффект является прямым результатом использования нелинейности и положительной обратной связи.

Структурная схема рассмотренной системы приведена на рис. 6.4. Напомним, что эта схема работоспособна только при ограничении

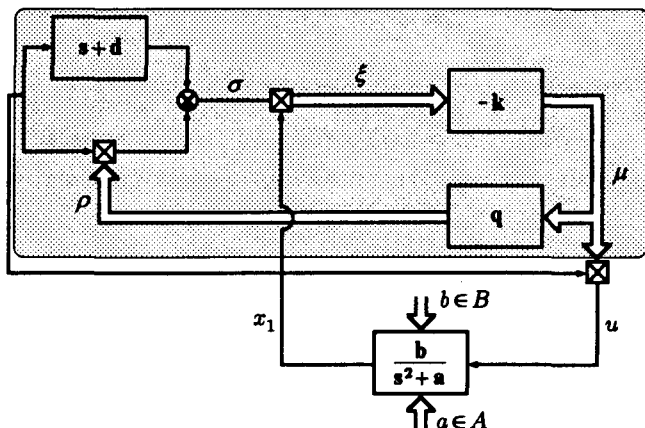


Рис. 6.4

$|\sigma| \leq \delta |x_1|$. Фазовый портрет в координатах (x_1, x_2) этой системы управления в пределах множества G_δ приведен на рис. 6.5, на котором колебания относительно линии $\sigma = 0$ отсутствуют. К недостаткам этой схемы следует отнести наличие в регуляторе внутреннего статического контура (выделен на рис. 6.4) обратной связи. Это при-

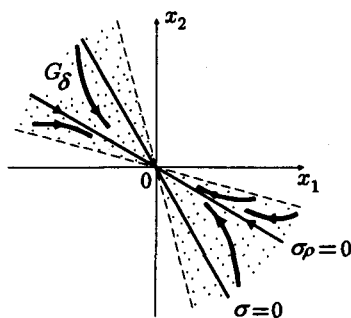


Рис. 6.5

водит к негрубости системы, ибо влияние неопределенной динамики может привести к нежелательным последствиям: колебаниям или неустойчивости. Поэтому следует подумать над способами повышения прочности системы со статической О-связью.

6.3.2. Статическая операторная и динамическая координатно-операторная обратные связи

Изучим теперь возможность стабилизации \tilde{P}_e -объекта

$$\dot{\xi} = 2(d + \rho)\xi + b\mu + a - 2d\rho + \dot{\rho},$$

$$a \in A, b \in B,$$

с помощью статической О-связи

$$\rho = -q\mu, \quad q = \text{const},$$

и различных видов динамической КО-связи

$$\mu = R_\mu \sigma,$$

где R_μ — дифференциальный, интегральный или какой-либо иной оператор динамического преобразования.

После исключения ρ получаем уравнение стабилизируемого объекта, зависящее только от КО-закона управления в следующем виде:

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - q\dot{\mu}, \quad \tilde{b} = b + 2qd. \quad (6.12)$$

Прежде всего рассмотрим случай, когда используется координатно-операторная связь другого вида.

6.3.3. Инерционная координатно-операторная обратная связь

В этом случае параметр $b \in B$ предполагается известным, поэтому КО-закон можно взять, например, в виде

$$q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu = k\xi, \quad k = \text{const} > 0. \quad (6.13)$$

При выполнении неравенств $q < 0$, $\tilde{b}^- = b^- + 2qd > 0$ этот КО-закон естественно назвать инерционным, так как передаточная функция от ξ к μ имеет вид инерционного звена (рис. 6.6а или, более подробно, рис. 6.6б). После подстановки (6.13) в (6.8) получаем уравнение за-

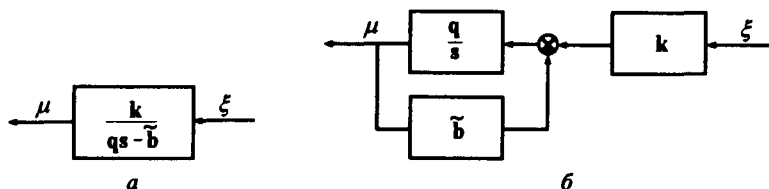


Рис. 6.6

мкнутой системы в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2(d - q\mu)\xi + a - k\xi, \\ q\dot{\mu} - \tilde{b} &= k\xi.\end{aligned}\tag{6.14}$$

В положении равновесия (μ_∞, ξ_∞) этой системы выполнены равенства

$$\begin{aligned}2(d - q\mu_\infty)\xi_\infty + a &= k\xi_\infty, \\ \tilde{b}\mu_\infty &= -k\xi_\infty,\end{aligned}$$

разрешая которые с точностью до величин порядка $1/k$ получаем

$$\xi_\infty \cong \frac{a}{k - 2d}, \quad \mu_\infty \cong -\frac{k}{\tilde{b}} \frac{a}{k - 2d}.$$

Для анализа устойчивости этого положения равновесия в малом запишем уравнения движения системы (6.14) в отклонениях

$$\xi_1 = \xi - \xi_\infty, \quad \xi_2 = \mu - \mu_\infty,$$

удерживая лишь члены первого порядка малости. После элементарных преобразований получим уравнения

$$\dot{\xi}_1 = -(k - 2d)\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = \frac{\tilde{b}}{q}\xi_1 + \frac{k}{q}\xi_2,$$

из анализа которых легко усмотреть, что точка (μ_∞, ξ_∞) асимптотически устойчива, если

$$k > 2d, \quad \tilde{b} = b + 2qd > 0.$$

Для определения предельного движения основной координаты x_1 воспользуемся первым уравнением системы (6.10). Получаем

$$\dot{x}_1 = -(d - q\mu_\infty)x_1 + \xi_\infty x_1 = -(d - q\mu_\infty - \xi_\infty)x_1.$$

Следовательно, число

$$\xi_\infty^* = -(q\mu_\infty + \xi_\infty) = -\frac{a}{\tilde{b}} \frac{(\tilde{b} - qk)}{k - 2d}$$

определяет в этом случае величину статизма. Устремлением параметра $k \rightarrow \infty$ устранить этот статизм невозможно, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\infty^* = \frac{aq}{\tilde{b}} = \frac{aq}{b + 2qd}.$$

Однако уменьшением параметра q его можно сделать произвольно малым, хотя устранить вовсе таким путем нельзя, так как $q > 0$.

Структурная схема исследованной системы стабилизации приведена на рис. 6.7. Напомним, что она действительна только при ограничении $|\sigma| \leq \delta|x_1|$. Рисунок с проекциями фазовых траекторий этой

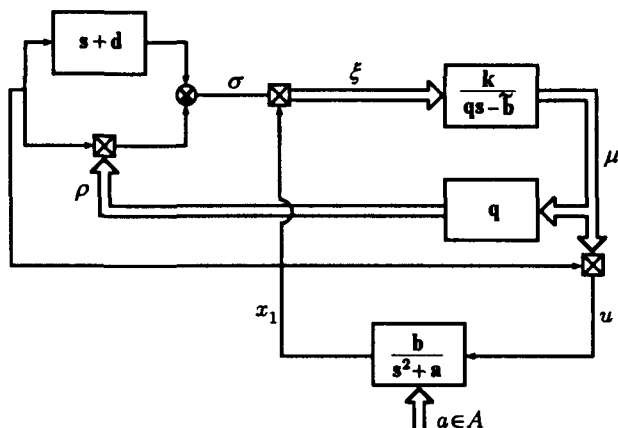


Рис. 6.7

системы на множество G_δ в плоскости (x_1, x_2) подобен рис. 6.5 и поэтому не приводится.

Поскольку прочность этой системы из-за наличия динамики в О-контуре не вызывает сомнений, то можно констатировать, что

- в рассмотренной бинарной системе поставленная задача стабилизации решается непрерывным управлением сколь угодно точно и колебания фазового вектора относительно линии $\sigma = 0$ отсутствуют.

Однако для реализации требуется знать параметр $b \in B$, да и сама реализация сложна, так как требует операции деления. Для преодоления этих недостатков рассмотрим иной вид КО-связи.

6.3.4. Инерционно-релейная координатно-операторная обратная связь

Вновь будем считать параметр $b \in B$ известным и определим КО-связь уравнением вида

$$q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu = k \operatorname{sgn} \xi, \quad k = \operatorname{const} > 0. \quad (6.15)$$

При замыкании такой обратной связью \tilde{P}_e -объекта

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - q\dot{\mu}$$

получаем замкнутую систему стабилизации со следующим уравнением движения:

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi - k \operatorname{sgn} \xi + a. \quad (6.16)$$

Удобство КО-закона (6.15) состоит в том, что при $q < 0$ переменная μ автоматически ограничивается по модулю, что, безусловно, полезно, так как $u = \mu x_1$ и в главном контуре управления переменная μ выполняет функцию коэффициента усиления, который, как известно, по соображениям прочности нужно ограничивать. Отметим, что этого эффекта не было в других системах с рассмотренными КО-законами, и в них это ограничение нужно обеспечивать специально. Подробнее об этом позже, а сейчас приведем структурную схему, объясняющую название закона (рис. 6.8). Поскольку переменная μ

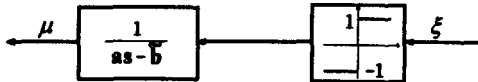


Рис. 6.8

ограничена, то из анализа уравнения (6.16)

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi - k \operatorname{sgn} \xi + a$$

очевидно, что при достаточно большом значении параметра k , именно $k > a$, в точке $\xi = 0$ возникает скользящий режим. Для определения уравнения движения в скользящем режиме сначала из уравнений $\dot{\xi} = 0$, $\xi = 0$ находим эквивалентное значение разрывного элемента

$$k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = a,$$

затем найденное значение подставляем в уравнение (6.15) изменения переменной μ и получаем следующее уравнение движения:

$$q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu = a. \quad (6.17)$$

Это уравнение устойчиво при $q < 0$ и при фиксированном параметре a имеет положение равновесия

$$\mu_{\infty} = -a/\tilde{b}.$$

Теперь можно установить уравнения движения системы в скользящем режиме. Поскольку при $\xi = 0$ для основной переменной x_1 действует уравнение

$$\dot{x}_1 = -(d - q\mu)x_1, \quad (6.18)$$

то в скользящем режиме это уравнение должно быть дополнено уравнением (6.17). Если, однако, параметр q достаточно мал, то можно считать, что $\mu(t) \cong \mu_{\infty}$, и уравнение (6.18) упрощается (используем замену $\tilde{b} = b + 2ad$) до следующего уравнения:

$$\dot{x}_1 = -(d - q\mu_{\infty})x_1 = -(d + qa/\tilde{b})x_1.$$

Из последнего уравнения, в частности, следует, что динамический статизм определяется равенством

$$\xi_{\infty}^* = q \frac{a}{b + 2qd}$$

и может быть сделан сколь угодно малым путем уменьшения параметра q . При этом статизм неустраним вовсе, ибо значение $q = 0$ не допускается. Поэтому проекция хода фазовых траекторий этой системы на множество G_{δ} в плоскости (x_1, x_2) подобна изображенной на рис. 6.5.

Для пояснения физического эффекта, эксплуатируемого в рассматриваемой системе стабилизации, полезно записать алгоритм стабилизации в исходных переменных. Поскольку в скользящем режиме $\xi = 0$, а $\sigma_p = \xi x_1$, то и $\sigma_p = 0$. Но $u = \mu x_1$, и, следовательно,

$$\sigma_p = \dot{x}_1 + dx_1 - q\mu x_1 = \sigma - qu = 0.$$

Таким образом, имеет место равенство $u = \sigma/q$, которое означает, что в скользящем режиме исследуемая нелинейная обратная связь эквивалентна линейной с коэффициентом усиления $1/q$, который может быть сделан сколь угодно большим $q \rightarrow -0$, что и обеспечивает решение задачи стабилизации.

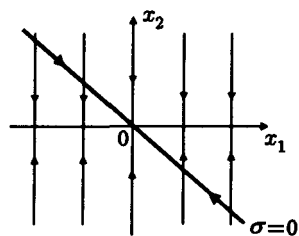


Рис. 6.9

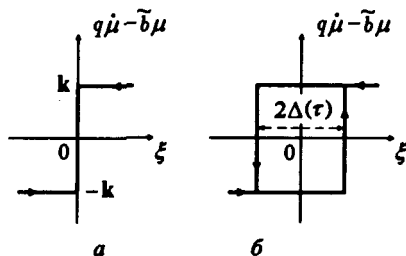


Рис. 6.10

Действительно, в этом случае в исходных переменных система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + \frac{1}{q}(x_2 + dx_1) \end{aligned}$$

и при $q \rightarrow 0$ ей отвечает фазовый портрет на рис. 6.9. Таким образом,

- предложенная обратная связь решает поставленную задачу стабилизации сколь угодно точно, но с неустранимым динамическим статизмом.

При этом колебания операторной переменной ξ устраняются полностью ($\xi = 0$), а коэффициент передачи k уменьшается по сравнению с предыдущим законом.

Нетрудно также понять, что эта система прочна. В самом деле, пусть имеется запаздывание $\tau > 0$ в переключениях, т.е. вместо закона (6.15) имеем дело с КО-законом вида

$$q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu = k \operatorname{sgn}_\tau \xi, \quad k = \operatorname{const} > 0. \quad (6.19)$$

В координатах $(q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu, \xi)$ уравнениям (6.15) и (6.19) соответствуют графики на рис. 6.10, откуда немедленно следует оценка $|\xi| \leq \Delta(\tau)$, что и означает прочность системы, так как $\Delta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Структурная схема синтезированной бинарной системы приведена на рис. 6.11, и для сравнения на рис. 6.12 дана схема, эквивалентная ей при возникновении скользящего режима. Из сравнения рис. 6.7 и 6.11

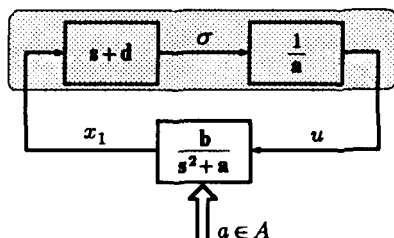


Рис. 6.11

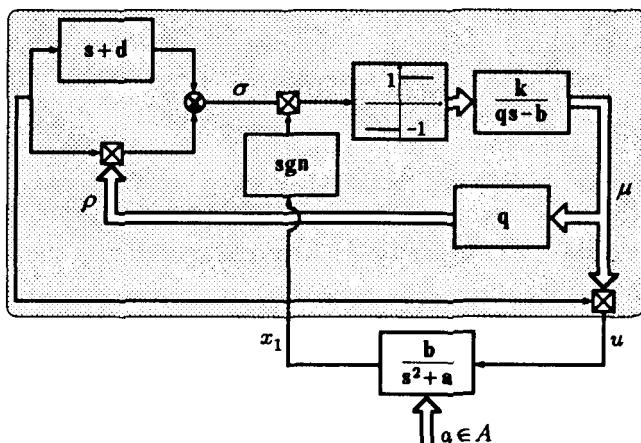


Рис. 6.12

видно, что последняя система стабилизации при тех же возможностях проще в реализации. Следует, однако, позаботиться о дальнейшем ее упрощении и, если это возможно, исключить использование информации о параметре $b \in B$.

6.3.5. Инерционно-релейная координатно-операторная обратная связь при неизвестном параметре при управлении

В этом пункте для стабилизации \tilde{P}_e -объекта (6.8)

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - q\dot{\mu}, \quad \tilde{b} = b + 2qd \\ a &\in A, \quad b \in B,\end{aligned}$$

применяется инерционно-релейная КО-связь вида

$$\begin{aligned}q\dot{\mu} - \tilde{b}^-\mu &= k \operatorname{sgn} \xi, \quad k = \operatorname{const} > 0, \\ \tilde{b}^- &= b^- + 2qd,\end{aligned}\tag{6.20}$$

которая может быть использована и тогда, когда значение параметра b неизвестно. Отметим, что допускаются изменения неизвестных параметров a, b во времени произвольным образом. Структура регулятора (6.20) совпадает со структурой регулятора на рис.6.8 при замене \tilde{b} на \tilde{b}^- .

Подстановка (6.20) в (6.8) дает уравнение замкнутой системы в следующем виде:

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + (\tilde{b} - \tilde{b}^-)\mu - k \operatorname{sgn} \xi + a.\tag{6.21}$$

Поскольку и в этом случае переменная μ равномерно ограничена (при $q < 0$), то, очевидно, существует такое число a^0 , что при $k > a^0$ в точке $\xi = 0$ возникает скользящий режим.

В скользящем режиме можно считать выполненными равенства

$$\xi = 0, \quad \dot{\xi} = 0,$$

тогда из уравнения (6.21) эквивалентное значение разрывного сигнала определяется в виде

$$k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = a + (\tilde{b} - \tilde{b}^-)\mu.$$

После подстановки этого значения в уравнение регулятора (6.20) находим уравнение движения операторной переменной μ в скользящем режиме

$$q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu = a,\tag{6.22}$$

которое в точности совпадает с уравнением скольжения для переменной μ из предыдущего пункта. Поэтому верны все сделанные ранее выводы и, в частности, о том, что уравнение скольжения по основной переменной после окончания переходного процесса уравнения (6.22) дается выражением

$$\dot{x}_1 = -(d + qa/\tilde{b})x_1.$$

Следовательно,

- и в этом случае имеет место неустранимый (хотя и сколь угодно малый при $q \rightarrow -0$) динамический статизм.

Сохраняются также все замечания и о прочности системы управления, и о физическом смысле эффекта компенсации возмущений a , b .

Ход проекций фазовых траекторий на множество G_3 в плоскости (x_1, x_2) показан на рис. 6.5, а для получения структуры системы достаточно в схеме на рис. 6.11 заменить параметр \tilde{b} на \tilde{b}^- и добавить двойную стрелку $\Downarrow b \in B$, действующую на объект P и отражающую влияние фактора неопределенности.

Достоинство регулятора (6.20) состоит в том, что он эффективно действует при любых неизвестных параметрах $a \in A$, $b \in B$.

6.3.6. Интегрально-релейная координатно-операторная обратная связь

Максимально возможное упрощение системы управления достигается при использовании интегрально-релейного закона

$$q\dot{\mu} = k \operatorname{sgn} \xi. \quad (6.23)$$

В этом случае замкнутая система управления описывается (6.23) и уравнением

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - k \operatorname{sgn} \xi, \quad \tilde{b} = b + 2qd. \quad (6.24)$$

При возникновении скользящего режима можно считать выполненными в надлежащем смысле равенства

$$\xi = 0, \quad \dot{\xi} = 0,$$

а поэтому эквивалентное значение разрывного сигнала имеет следующее значение:

$$k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = \tilde{b}\mu + a.$$

После его подстановки в уравнение регулятора (6.23) находим точные и асимптотические уравнения скольжения для переменных μ и x_1 в виде известных уже из предыдущего выражений

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} - \tilde{b}\mu &= a, & \dot{x}_1 &= -(d - q\mu)x_1 - (d + qa/\tilde{b})x_1; \\ \mu_\infty &= -a/\tilde{b}, & \dot{x}_1 &= -(d + qa/\tilde{b})x_1. \end{aligned}$$

Поэтому справедливы все выводы, сделанные в пунктах 6.3.4 и 6.3.5.

Единственная трудность в проведенном рассуждении состоит в том, что факт возникновения скользящего режима в точке $\xi = 0$ не просто усмотреть из уравнений замкнутой системы (6.23), (6.24). Поскольку нас интересует анализ в малом, то этот вопрос можно исследовать с помощью функции Ляпунова вида

$$v = (1/2)\xi^2. \quad (6.25)$$

Действительно, полагая для простоты, что параметры $a, b = \text{const}$, после дифференцирования функции (6.25) в силу уравнений движения (6.23), (6.24) находим

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{\xi} = \xi [2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu + a - \alpha \operatorname{sgn} \xi] = \\ &= 2(d - q\mu)\xi^2 - |\xi| [d - (\tilde{b}\mu + a) \operatorname{sgn} \xi]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Далее заметим, что в положении равновесия

$$\xi = 0, \quad \tilde{b}\mu + a = 0,$$

поэтому в его окрестности в (6.26) доминирует член $-d|\xi|$. Следовательно, существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$\dot{v} \leq -\gamma|\xi| = -\gamma\sqrt{2v} = -\gamma^* \sqrt{v}.$$

Решая последнее дифференциальное неравенство, находим оценку

$$\sqrt{v(t)} - \sqrt{v(0)} \leq -\gamma^* t,$$

из которой следует, что в некоторой окрестности положения равновесия скользящий режим всегда возникает через конечное время, что и требовалось доказать.

Структурная схема синтезированной бинарной системы управления представлена на рис. 6.13. Пожалуй, она наиболее простая из всех рассмотренных ранее, причем основные стабилизирующие свойства сохраняются.

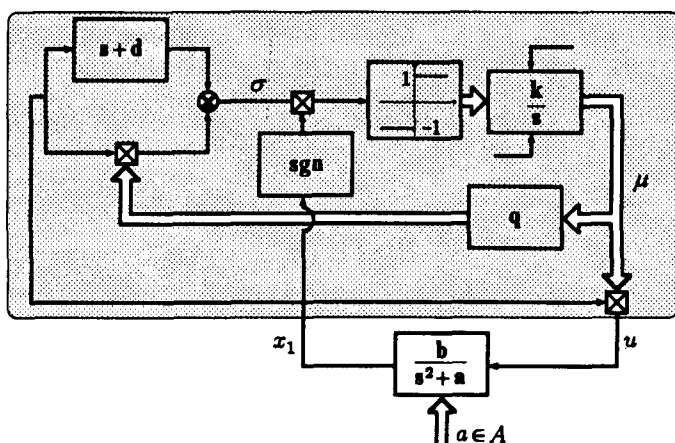


Рис. 6.13

Проведенное исследование показало, что с помощью О-связи можно значительно повысить качество переходных процессов бинарной системы управления, в частности:

- устранить колебательность фазового вектора в множестве G_δ ;
- повысить прочность системы управления путем уменьшения коэффициентов передачи в главном канале и, более того, вовсе отказаться от использования в КО-законах демпфирующей компоненты $\mu = -k_2\xi$;
- понизить размерность замкнутой системы на 2 порядка, например с 3-го до 1-го (при сочетании с динамической разрывной КО-связью);
- сколь угодно точно достигнуть (правда, в ущерб прочности) требуемого качества переходных процессов.

При этом статическую О-связь неизбежно сопровождает статизм (динамический статизм в основных переменных), что, впрочем, естественно для любой статической обратной связи. Вопрос об использовании динамической О-связи здесь не затрагивается. В следующей главе используем ОК-связь для устранения указанного статизма.

Глава 7

Теория операторно-координатной обратной связи

Данная глава посвящена качественному исследованию бинарных систем автоматического управления с разными типами обратной связи. Потенциально подобные нелинейные динамические системы стабилизации должны обладать самыми совершенными свойствами, близкими к тем идеальным, которые можно наблюдать у систем управления с глубокой обратной связью. Однако, в отличие от последних, бинарная система стабилизации прочна в классе регулярных и сингулярных возмущений. Пожалуй, эта глава в наиболее полной степени демонстрирует использование эффекта нелинейности в задачах стабилизации существенно неопределенного объекта. Итоговые уравнения движения системы стабилизации принципиально нелинейны, достаточно сложны и обладают глобально устойчивыми решениями, которые мало зависят (а в некоторых случаях не зависят) от факторов неопределенности и могут быть описаны простейшими дифференциальными уравнениями. Подобные нелинейные уравнения есть прямой результат применения разработанной в монографии теории.

О возможности получения подобных уравнений другими методами сегодня ничего неизвестно.

7.1. Динамический статизм и операторно-координатная обратная связь

В предыдущих главах было установлено, что стабилизация в нуле неопределенного объекта

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu, \quad a \in A, b \in B, \end{aligned}$$

с помощью трех типов обратной связи (рис. 7.1), достигается при любых, в том числе и переменных, параметрах объекта $a \in A, b \in B$.

При этом в множестве

$$G_\delta = \{x \mid |\sigma| \leq \delta|x_1|\}$$

предельное движение описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho_\infty)x_1,$$

в котором число ρ_∞ определяет динамический статизм

$$\rho_\infty = -qa/k\tilde{b}, \quad \tilde{b} = b - 2qd,$$

отклоняющий это предельное движение от эталонного движения, заданного уравнением $\dot{x}_1 = -dx_1$ (рис. 7.2).

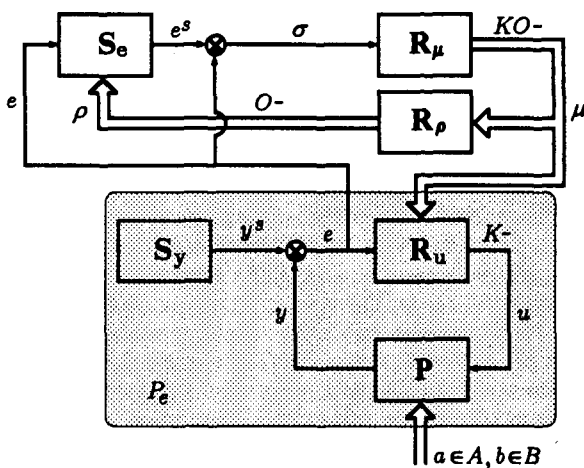


Рис. 7.1

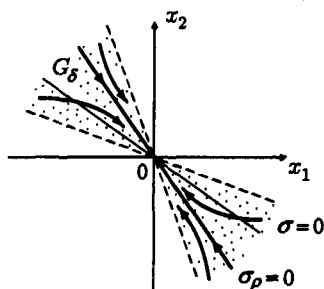


Рис. 7.2

Статизм можно устранить устремлением $k \rightarrow \infty$, но это понижает прочность системы управления. Можно, напротив, устремить параметр $q \rightarrow 0$, что не исключается, но в пределе (т.е. при $q = 0$) О-связь размыкается, а без этого для достижения аналогичного качества переходного процесса нужно увеличивать коэффициенты усиления либо согласиться на колебания фазового вектора относительно многообразия $\sigma = 0$.

Стоит отметить, что устремление параметра $q \rightarrow 0$, как это следует, например, из уравнения интегрально-релейного КО-регулятора

$$\dot{\mu} = \frac{k}{q} \operatorname{sgn} \xi,$$

означает, по существу, введение глубокой обратной связи в КО-контуре регулирования, так как при этом $k/q \rightarrow \infty$. Это, как известно, ведет к потере прочности и, хотя значения скрытых параметров в регуляторе можно считать меньшими, нежели значения скрытых параметров в объекте, и, следовательно, критическое значение коэффициента усиления этого контура, при превышении которого требуется устойчивость, выше, тем не менее в принципиальном плане следует поискать новые средства для точного решения рассматриваемой задачи стабилизации.

Важно также отметить, что в системах со статической О-связью и разрывной КО-связью при возникновении скользящего режима управление в главном контуре описывается выражением $u = (k/q)\sigma$, и хотя, быть может, $k/q > k_{\text{кр}}$, неустойчивость не наступает. Обоснование этого факта почти очевидно и здесь не приводится.

Для устранения динамического статизма воспользуемся операторно-координатной обратной связью или, коротко, ОК-связью, охватывающей объект управления по схеме рис. 7.3. В этой структуре подде-

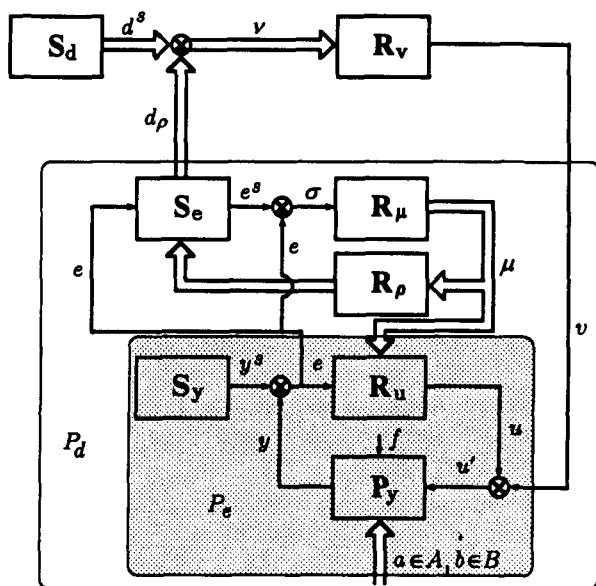


Рис. 7.3

жат заданию или синтезу операторы О-задатчика S_d и ОК-регулятора R_v . Напомним, что $d_\rho = d(\rho)$. Выделенная часть схемы на рис. 7.3 является типичным ОК-объектом, и поэтому рассматриваемую задачу укрупненно иллюстрирует рис. 7.4. Поскольку эта схема стан-

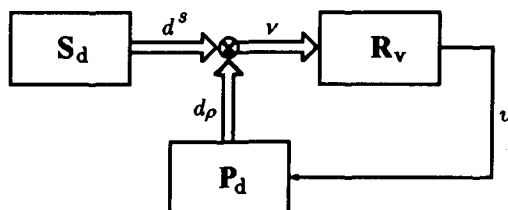


Рис. 7.4

дартна для теории обратной связи, то и методы решения задачи могут быть стандартными.

7.2. Уравнения движения операторно-координатного объекта

Исходные уравнения объекта в координатном пространстве имеют теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & a &\in A \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + b(u + v), & \sigma &= cx_1 + x_2, \quad b \in B. \end{aligned}$$

Здесь наличие ОК-связи отражено компонентой v в управлении.

После введения, с учетом действия О-связи, ошибки

$$\sigma_\rho = x_2 + d_\rho x_1$$

и операторной переменной $\xi = \sigma_\rho / x_1$ в множестве

$$G_\delta = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid |\sigma| \leq \delta |x_1| \right\},$$

действуя стандартным образом (см. главы 4, 6), находим уравнение изменения операторной переменной в множестве G_δ , которое в первом приближении имеет следующий вид:

$$\dot{\xi} = 2d_\rho \xi + 2d_\rho + \dot{\rho} + a + b \frac{u + v}{x_1}. \quad (7.1)$$

Положим, как обычно, бинарную операцию в К-контуре статической:

$$u = \beta_u(\mu, x_1) = \mu x_1,$$

аналогично распорядимся выбором бинарной операции в ОК-контуре:

$$v = \beta_\nu(\eta, x_1) = \eta x_1,$$

где, как принято выше, μ и η — операторные переменные. При таком выборе уравнение (7.1) принимает следующий вид:

$$\dot{\xi} = 2d_\rho \xi + 2d_\rho + \dot{\rho} + a + b(\mu + \eta), \quad (7.2)$$

где μ и η можно рассматривать в качестве управлений.

Сохраняя преемственность, положим О-связь статической:

$$\rho = -q\mu, \quad q = \text{const},$$

а воздействие на параметр S_e -задатчика — адаптивным:

$$d_\rho = d + \rho.$$

Тогда при интегрально-релейном КО-регуляторе

$$q\dot{\mu} = k_1 \text{sgn } \xi, \quad k_1 = \text{const},$$

уравнение изменения операторной ошибки ξ (7.2) примет вид

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu - k_1 \text{sgn } \xi + a + b\eta, \quad \tilde{b} = b - 2qd. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3), дополненное уравнением изменения основной переменной

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho)x_1 + \xi x_1, \quad (7.4)$$

и уравнение ОК-регулятора

$$\eta = R_\eta \nu, \quad (7.5)$$

где ОК-ошибка регулирования

$$\nu = d_\rho - d = \rho, \quad (7.6)$$

а R_η — оператор ОК-регулятора, описывают в множестве G_δ замкнутую систему регулирования с четырьмя типами обратной связи. Поскольку

$$\dot{\nu} = \dot{\rho} = -k_1 \text{sgn } \xi, \quad (7.7)$$

то нужно позаботиться о надлежащем выборе оператора R_η , гарантирующего стабилизацию ошибки ν в нуле. Рассмотрим некоторые варианты.

7.3. Статический ОК-регулятор

Пусть оператор R_η в (7.5) является простейшим линейным оператором, т.е. $\eta = k_2\nu$. Тогда надлежит исследовать на устойчивость следующую систему уравнений, для удобства обозначаемую символом Σ^c :

$$\dot{\xi} = 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu - k_1 \text{sgn } \xi + k_2 b\nu + a, \quad (7.8)$$

$$\dot{\nu} = -k_1 \text{sgn } \xi. \quad (7.9)$$

Поскольку $\nu = \rho$, $\rho = -q\mu$, то после введения обозначения

$$b^* = (1 - qk_2)b - 2qd,$$

эту систему можно переписать в более удобном виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2(d - q\mu)\xi + b^*\mu - k_1 \operatorname{sgn} \xi + a, \\ \dot{\nu} &= -k_1 \operatorname{sgn} \xi.\end{aligned}$$

Уравнения, подобные уравнению (7.8) Σ^c -системы, подробно исследовались в главах 4, 6, поэтому можно утверждать, что при выполнении неравенства $k_1 > a^0$ в точке $\xi = 0$ возникает скользящий режим. Поскольку при этом, кроме того, в определенном смысле $\dot{\xi} = 0$, то эквивалентное значение разрывного сигнала определяется следующим выражением:

$$k_1 \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = b^*\mu + a.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (7.9) Σ^c -системы находим уравнение изменения О-ошибки ν в виде $\dot{\nu} = -b^*\mu - a$. В силу того, что $\nu = \rho = -q\mu$, окончательно имеем уравнение для ошибки ν :

$$\dot{\nu} = \frac{b^*}{q}\nu - a. \quad (7.10)$$

Поскольку $b^*/q < 0$, то уравнение (7.10) асимптотически устойчиво и имеет положение равновесия в точке

$$\nu_\infty = \frac{qa}{b^*}, \quad b^* = (1 - qk_2)b - 2qd.$$

Следовательно,

- статическая ОК-связь не устраняет динамический статизм, а лишь несколько уменьшает его величину по сравнению с рассмотренными выше системами управления.

Действительно, например, в системе со статической О-связью величина статизма давалась выражением

$$\rho_\infty = qa/\tilde{b}, \quad \tilde{b} = b - 2qd,$$

но так как $b^* > \tilde{b}$, то очевидно имеем требуемое $\nu_\infty < \rho_\infty$.

Увеличением $k_2 \rightarrow \infty$ можно устранить статизм ν_∞ , но при этом будет нанесен ущерб прочности системы. Действительно, в этом случае вторая компонента управления линейно связана с основным управлением

$$v = \eta x_1 = k_2 \nu x_1 = -qk_2 \mu x_1 = -qk_2 u$$

и полное управление $u' = u + v$ также пропорционально основному управлению

$$u' = (1 - qk_2)u. \quad (7.11)$$

Последнее как раз и означает, что действие статического ОК-регулятора эквивалентно увеличению в $(1 - qk_2)$ раз коэффициентов передачи КО-регулятора, что, как отмечалось ранее, понижает прочность системы управления. Формула (7.11) также проясняет эффект от использования статического ОК-регулятора. Описанную систему

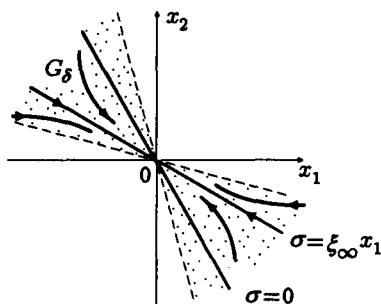


Рис. 7.5

иллюстрирует рис. 7.5, на котором показан ход проекций фазовых траекторий системы на множестве G_δ после возникновения скользящего режима.

7.4. Интегральный ОК-регулятор

Из классической теории регулирования известно, что статизм устраняется применением интегральной обратной связи, поэтому рассмотрим ОК-регулятор следующего вида:

$$\dot{\eta} = -k_2 \nu, \quad k_2 = \text{const}. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) вместе с уравнениями КО- и О-регуляторов

$$q\dot{\mu} = k_1 \text{sgn } \xi, \quad k_1 = \text{const}, \quad (7.13)$$

$$\rho = -q\mu, \quad q = \text{const}, \quad (7.14)$$

уравнениями бинарных элементов

$$u' = u + v = \mu x_1 + \eta x_1 = (\mu + \eta)x_1, \quad (7.15)$$

а также уравнениями движения объекта в КО-пространстве (x_1, ξ)

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho)x_1 + \xi x_1, \quad (7.16)$$

$$\dot{\xi} = 2(d + \rho)\xi + b\mu + 2d\rho + \dot{\rho} + b\eta + a, \quad a \in A, b \in B, \quad (7.17)$$

задает поведение замкнутой системы управления с четырьмя типами обратной связи на множестве G_δ .

Как и ранее, полагаем

$$\nu = d_\rho - d = \rho, \quad (7.18)$$

$$\xi x_1 = \sigma, \quad \sigma = \dot{x}_1 + dx_1, \quad \sigma_\rho = \dot{x}_1 + d_+\rho x_1. \quad (7.19)$$

Структурная схема исследуемой бинарной системы приведена на рис. 7.6. (выделен синтезированный нелинейный динамический регулятор второго порядка, полный порядок замкнутой системы ра-

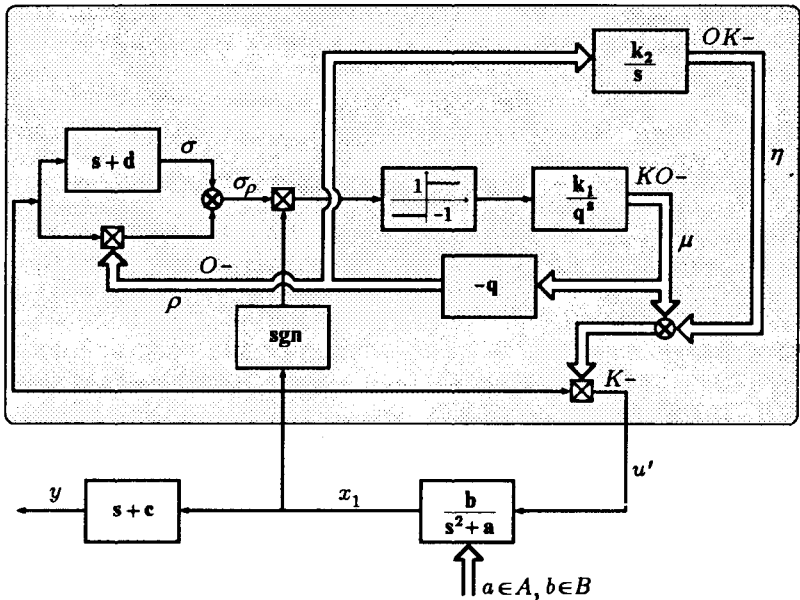


Рис. 7.6

вен четырем). Задача теперь состоит в таком выборе параметров системы, при котором гарантируется стабилизация переменной x_1 в нуле при асимптотически исчезающей зависимости переходного процесса от неопределенных (для простоты — постоянных) параметров $a \in A, b \in B$.

Для анализа поведения синтезированной бинарной системы обратимся к уравнениям изменения операторных переменных (ξ, μ, η). После подстановки соотношений (7.17), (7.14) в (7.12) и (7.13), (7.14) в (7.17) получим в итоге совокупность дифференциальных уравнений, описывающих так называемую Σ_i^c -систему:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2(d - q\mu)\xi + \tilde{b}\mu - k_1 \operatorname{sgn} \xi + b\eta + a, & \tilde{b} &= b - 2qd, \\ q\dot{\mu} &= k_1 \operatorname{sgn} \xi, & \dot{\eta} &= qk_2\mu. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Довольно ясно, что положение равновесия Σ_i^c -системы находится в точке $(\xi_\infty, \mu_\infty, \eta_\infty) = (0, 0, -a/b)$.

Убедимся, что в малой окрестности положения равновесия за конечное время в точке $\xi = 0$ возникает скользящий режим. Для этого достаточно умножить почленно первое уравнение Σ_i^c -системы на ξ и получить выражение

$$\xi \dot{\xi} = -k_1 |\xi| + 2(d - q\mu)\xi^2 + \tilde{b}\mu\xi + b\eta\xi + a\xi,$$

из анализа которого прямо следует, что при выполнении условия

$$k_1 > a^0$$

существуют такие константы $\alpha, \beta > 0$, что в окрестности

$$|\xi| \leq \beta$$

выполнено неравенство

$$\xi \dot{\xi} < -\alpha |\xi|,$$

которое эквивалентно дифференциальному неравенству

$$\dot{\xi} < -\alpha \operatorname{sgn} \xi.$$

Из приведенных неравенств следуют утверждение о возникновении скользящего режима в точке $\xi = 0$ за конечное время и сходимости в G_δ к нулю основной переменной x_1 , так как из (7.16) имеем уравнение

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho)x_1.$$

Однако этого мало, поэтому продолжим исследование.

В скользящем режиме, как обычно, из равенств $\xi = \dot{\xi} = 0$ определяем эквивалентное значение разрывного сигнала в виде

$$k_1 \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = \tilde{b}\mu + b\eta + a.$$

После подстановки найденного эквивалентного управления в уравнения (7.20) Σ_i^c -системы получаем следующую совокупность дифференциальных уравнений $\tilde{\Sigma}_i^c$ -системы:

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + b\eta + a, \\ \dot{\eta} &= qk_2\mu. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Положение равновесия $\tilde{\Sigma}_i^c$ -системы находится в точке $(0, -a/b)$, которая, естественно, совпадает с точкой $(\mu_\infty, \eta_\infty)$. Устойчивость положения равновесия определяется асимптотическими свойствами динамической системы

$$\dot{\mu} = \frac{\tilde{b}}{q}\mu + \frac{b}{q}\eta, \quad \dot{\eta} = qk_2\mu. \quad (7.22)$$

Система (7.22) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда гурвицев ее характеристический полином

$$\varphi(s) = \det(sE - A) = \det \begin{bmatrix} s - \tilde{b}/q & -b/q \\ -qk_2 & s \end{bmatrix} = s^2 - \frac{\tilde{b}}{q}s + k_2b.$$

Последнее имеет место при выполнении неравенств $\tilde{b}/q < 0$, $k_2 > 0$. Заметим, что степень устойчивости системы (7.22) увеличивается при $q \rightarrow 0$, т.е. назначается по произволу без изменения коэффициентов передачи главного К-контура регулирования. Кроме того, из (7.14) и (7.18) следует равенство $\nu = -q\mu$, и поэтому $\nu \rightarrow 0$, когда $\mu \rightarrow 0$. Таким образом, интегральный ОК-регулятор решает поставленную задачу об асимптотическом устранении с произвольным темпом динамического статизма.

Выбирая надлежащим образом свободные параметры дифференциального уравнения $\ddot{\nu} - \dot{\nu}\tilde{b}/q + k_2b = 0$, определяющего изменение О-ошибки ν , можно добиться колебательных (рис. 7.7а) или аperiодических (рис. 7.7б) переходных процессов. В соответствии с этим определяется и характер переходных процессов в исходном координатном (x_1, x_2) -пространстве (рис. 7.8).

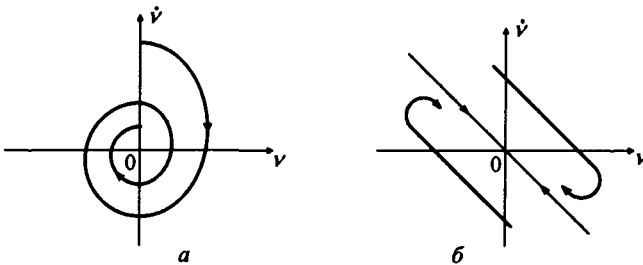


Рис. 7.7

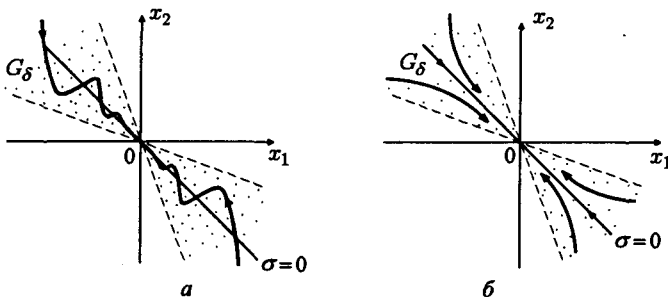


Рис. 7.8

7.5. Основные свойства и особенности бинарных систем стабилизации с различными типами обратной связи

Перечислим основные свойства и особенности бинарных систем стабилизации с различными типами обратной связи.

Отличие от идентификационного подхода. В рассмотренной бинарной системе нет даже косвенного эффекта идентификации. Отсутствие идентификации следует из формулы

$$\eta(t) \rightarrow \eta_{\infty} = -\frac{a}{b},$$

и принципиально отличает предложенную схему управления от адаптивного подхода.

Эффект, лежащий в основе компенсации неопределенности. По формуле (7.15) сигнал управления

$$u' = u + v = (\mu + \eta)x_1 = \left(1 + \frac{\eta}{\mu}\right)\mu x_1. \quad (7.23)$$

С другой стороны, в скользящем режиме $\xi = 0$, что эквивалентно по формуле (7.19) равенству

$$\sigma_{\rho} = \dot{x}_1 + dx_1 + \rho x_1 = 0. \quad (7.24)$$

Но $\rho = -q\mu$ (см. (7.14)), и поэтому из (7.24) получаем следующее соотношение:

$$\mu x_1 = \frac{\dot{x}_1 + dx_1}{q} = \frac{\sigma}{q}.$$

Подставляя последнее соотношение в (7.23), находим

$$u' = \left(1 + \frac{\eta}{\mu}\right)\frac{\sigma}{q}.$$

По доказанному выше,

$$\eta \rightarrow \eta_{\infty} = -a/b, \quad \mu \rightarrow 0,$$

а значит и отношение $\eta/\mu \rightarrow \infty$. Иными словами,

- интегральный ОК-регулятор обеспечивает эффект неограниченного нарастания коэффициента воздействия по ошибке регулирования $\sigma = \dot{x}_1 + dx_1$, т.е.

$$\left(1 + \frac{\eta}{\mu}\right)\frac{1}{a} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Последнее полностью проясняет эффект компенсации факторов неопределенности в привычных для теории регулирования терминах.

О прочности бинарной системы. Синтезированная бинарная система (в силу использования конечных коэффициентов передачи) прочна, так как динамические или функциональные неидеальности приводят лишь к отклонению переменной ξ от нуля, т.е. $|\xi| \leq \Delta$, $\Delta = \text{const} < \delta$. Последнее, очевидно, не нарушает асимптотических свойств системы в исходных переменных (x_1, x_2) .

О стабилизации объекта с переменными параметрами. Изменение во времени параметра $b \in B$ принципиально не меняет описанной выше картины, так как уравнения движения при этом остаются прежними. Следует, однако, отметить, что при доказательствах устойчивости предпочтительнее использовать второй метод Ляпунова, а не операторные методы и преобразование Лапласа, как ранее. Если же меняется параметр $a \in A$, то все уравнения движения также сохраняются, однако меняется их асимптотика.

Так, например, $\tilde{\Sigma}_i^c$ -система (7.21)

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + b\eta + a, \\ \dot{\eta} &= qk_2\mu \end{aligned}$$

из асимптотически устойчивой превращается в диссипативную, т.е. за конечное время ее решение погружается в инвариантный шар

$$\mu^2 + (b\eta + a)^2 \leq \text{const}.$$

Поскольку $\nu = \rho = -q\mu$, отсюда следует диссипативность и по ν , т.е. $|\nu| \leq \text{const}$. Это означает, что устранение динамического статизма не гарантируется. Но этого и следовало ожидать, так как интегральный закон аннулирует только постоянные возмущения, для аннулирования произвольного волнового возмущения $Ka \equiv 0$, как известно, в регуляторе следует применять оператор K^{-1} — обратный к аннулирующему оператору K .

О порядке замкнутой системы управления. Из структурной схемы замкнутой системы, приведенной на рис. 7.6, видно, что исходный порядок системы равен четырем. После возникновения скользящего режима в О-регуляторе он понижается на единицу и описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + b\eta + a, & \dot{\eta} &= qk_2\mu \\ \dot{x}_1 &= -(d - q\mu)x_1. \end{aligned}$$

Если степень устойчивости $\tilde{\Sigma}_i^c$ -системы установить много больше числа d , а это всегда возможно выбором параметров регулятора, то ее движения можно считать быстрыми по отношению к основному движению

$$\dot{x}_1 = -dx_1 \quad (7.25)$$

и, следовательно, фактически порядок замкнутой системы равен единице. Иными словами, сложная неопределенная нелинейная система в итоге ведет себя как скалярная система (7.25).

Подчеркнем, однако, что это драматическое понижение порядка справедливо только в асимптотике. Если же принять разрывную ОК-связь, то того же эффекта можно добиться финитно, т.е. за конечное время.

7.6. Разрывная ОК-связь

Из предыдущего рассмотрения ясно, что интегральный ОК-регулятор устраняет динамический статизм лишь в асимптотике и не гарантирует этого при переменных параметрах $a \in A$, $b \in B$. Поэтому рассматриваемая в данном пункте задача такова:

- предложить эффективные методы финитного устранения динамического статизма, работоспособные и при переменных параметрах объекта.

Из классической теории регулирования известно, что при отсутствии информации о характере изменения возмущения для этой цели могут применяться: большой коэффициент усиления, разрывная (релейная или СПС) обратная связь.

Увеличение коэффициента усиления понижает прочность системы управления, поэтому исследуем возможности разрывной ОК-обратной связи при решении сформулированной задачи.

7.6.1. Интегрально-релейный ОК-регулятор

В этом случае уравнение ОК-регулятора имеет вид

$$\dot{\eta} = -k_2 \operatorname{sgn} \nu, \quad (7.26)$$

чему соответствует структурная схема на рис. 7.9, проясняющая на-



Рис. 7.9

звание регулятора. Уравнение (7.26) вместе с уравнением изменения О-переменной ξ

$$\dot{\xi} = 2d_p \xi + \tilde{b}\mu - k_1 \operatorname{sgn} \xi + b\eta + a \quad (7.27)$$

и уравнением КО-регулятора

$$q\dot{\mu} = k_1 \operatorname{sgn} \xi \quad (7.28)$$

определяют, с учетом равенства

$$\nu = -q\mu, \quad (7.29)$$

исследуемую замкнутую систему дифференциальных уравнений. Если уравнения (7.26)–(7.29) дополнить уравнением изменения основной переменной

$$\dot{x}_1 = -(d + \rho)x_1 + \xi x_1, \quad (7.30)$$

в котором использованы переменные

$$\xi x_1 = \sigma, \quad \sigma = \dot{x}_1 + d x_1, \quad \sigma_\rho = \sigma + \rho x_1 = \dot{x}_1 + d_\rho x_1,$$

то получаем уравнения движения замкнутой системы бинарного управления Σ_R^c на множестве G_δ . Структурная схема исследуемой бинарной системы управления Σ_R^c приведена на рис. 7.10. В предваритель-

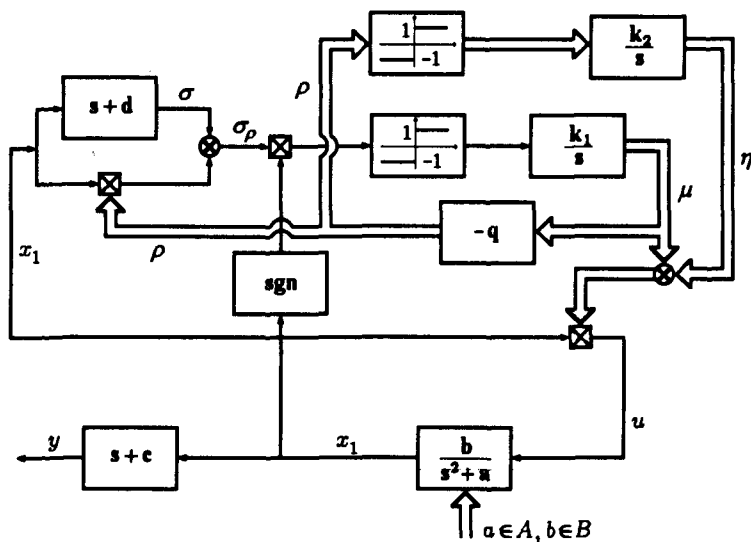


Рис. 7.10

ном порядке отметим, что в этой системе есть два разрывных элемента в КО- и в ОК-регуляторе. Поэтому возможно возникновение скользящего режима не только в О-контуре, как ранее, но и в ОК-контуре. Именно этот план компенсации возмущения и принят при дальнейшем анализе.

Рассматривая уравнения (7.26)–(7.29), убеждаемся, что положение равновесия исследуемой системы находится в точке

$$\xi_\infty = 0, \quad \mu_\infty = 0, \quad b\eta_\infty = -a.$$

Поэтому, анализируя уравнение

$$\dot{\xi} = 2d\rho\xi + \tilde{b}\mu - k_1 \operatorname{sgn} \xi + b\eta + a, \quad \tilde{b} = b - 2qd, \quad (7.31)$$

убеждаемся, как и во всех аналогичных случаях ранее, что при выполнении условия $k_1 > a^0$ в точке $\xi = 0$ существует скользящий режим со следующим эквивалентным значением разрывного сигнала:

$$k_1 \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi = \tilde{b}\mu + b\eta + a.$$

После подстановки найденного эквивалентного значения в уравнение КО-регулятора (7.28) получаем $\tilde{\Sigma}_R^c$ -систему уравнений, подлежащую дальнейшему анализу:

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + b\eta + a, \\ \dot{\eta} &= -k_2 \operatorname{sgn} \mu. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Для анализа этой $\tilde{\Sigma}_R^c$ -системы удобно положить $b = \text{const}$ и сделать замену переменного по формуле

$$e = b\eta + a,$$

тогда ее уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, \\ \dot{e} &= -k_2 \operatorname{sgn} \mu + \dot{a}, \end{aligned}$$

и положение равновесия переместится в нуль:

$$(\mu = 0, e = 0).$$

Если предположить, что

$$k_2 b > \sup_{t \geq 0} |\dot{a}|,$$

то качественные поведения $\tilde{\Sigma}_R^c$ -системы и системы, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, \\ \dot{e} &= -k_2 b \operatorname{sgn} \mu, \end{aligned} \quad (7.33)$$

совпадают, поэтому далее имеем дело с более простыми уравнениями (7.33), считая впредь, что они и задают $\tilde{\Sigma}_R^c$ -систему.

Напомним, что $\tilde{\Sigma}_R^c$ — релейная система. Подобные системы уже подробно рассматривались нами ранее, поэтому просто воспользуемся результатами проведенного анализа в первой части монографии (см. главу 2). В результате сшивания по оси $\mu = 0$ фазовых траекторий, отвечающих решениям систем

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, & \dot{e} &= -k_2 b, \\ q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, & \dot{e} &= +k_2 b, \end{aligned}$$

получаем фазовый портрет $\tilde{\Sigma}_R^c$ -системы (рис. 7.11). Из рис. 7.11 в видна тенденция “скручиваемости” траекторий к нулю. Для анализа асимптотики этого движения воспользуемся вторым методом

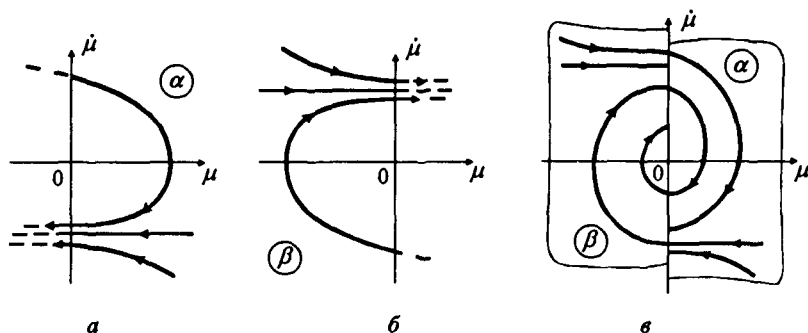


Рис. 7.11

Ляпунова. Заметим, что достаточно доказать факт $\mu \rightarrow 0$, так как $\nu = -q\mu$, а, следовательно, одновременно $\nu \rightarrow 0$.

Возьмем пробную функцию

$$v = |\mu| + \frac{e^2}{2k_2bq},$$

ее производная в силу $\tilde{\Sigma}_R^c$ -системы (7.33) имеет вид

$$\dot{v} = \dot{\mu} \operatorname{sgn} \mu + \frac{e}{k_2\tilde{b}} \dot{e} = \left(\frac{\tilde{b}}{q} \mu + \frac{e}{q} \right) \operatorname{sgn} \mu - \frac{e}{q} \operatorname{sgn} \mu = \frac{\tilde{b}}{q} |\mu|.$$

Поскольку $|\mu| = v - e^2/2k_2bq$, то последовательно имеем

$$\dot{v} = \frac{\tilde{b}}{q} v - \frac{\tilde{b}}{2k_2bq^2} e^2 \leq \frac{\tilde{b}}{q} v.$$

Из этого неравенства следует экспоненциальная оценка

$$v(t) \leq v(0) \exp\left(\frac{\tilde{b}}{q} t\right).$$

Напомним, что $q < 0$, и, следовательно,

- интегрально-релейный ОК-регулятор способен компенсировать неизвестное и переменное возмущения $a \in A$, но делает это только асимптотически.

Для достижения финитной компенсации требуются более “хитрые” регуляторы.

7.6.2. Скользящие режимы 2-го порядка в ОК-контуре

Рассмотрим здесь тот случай финитной стабилизации ошибки ОК-контура ν , который естественно возникает при использовании разрывной ОК-связи следующего вида:

$$\dot{\eta} = -k_2 \operatorname{sgn} \left(\dot{\nu} + \sqrt{|q\nu|} \operatorname{sgn} \nu \right). \quad (7.34)$$

Опуская, ввиду аналогичности, рассуждения, устанавливающие финитность возникновения скользящего режима в точке $\xi = 0$, переходим непосредственно к анализу уравнений скольжения в (μ, e) -пространстве или, иначе, уравнений Σ_{s1}^c -системы. При $b = \text{const}$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, \\ \dot{e} &= -k_2 b \operatorname{sgn} \left(\dot{\mu} + \sqrt{|\mu|} \operatorname{sgn} \mu \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

При получении этих уравнений учтено, что $\nu = -q\mu$.

Уравнения, подобные уравнениям Σ_{s1}^c -системы, подробно изучались в оптимально-релейных системах, сходные уравнения рассматривались и в главе 5 при анализе скользящих режимов высших порядков. Сшивание фазовых траекторий Σ_a - (рис. 7.12а) и Σ_b - (рис. 7.12б) систем в пространстве $(\mu, \dot{\mu})$ по линии разрыва

$$\xi = \dot{\mu} + \sqrt{|\mu|} \operatorname{sgn} \mu = 0 \quad (7.36)$$

дает исходный фазовый портрет Σ_{s1}^c -системы (рис. 7.13). Из этих

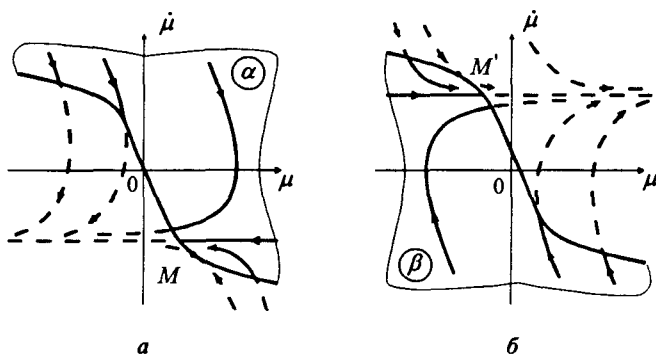


Рис. 7.12

рисунков можно увидеть, что существует отрезок MM' “параболы” $\xi = \dot{\mu} + \sqrt{|\mu|} \operatorname{sgn} \mu = 0$, в окрестности которого фазовые траектории направлены встречно, т.е. на этом отрезке возникает скользящий режим с уравнением движения $\dot{\mu} = -\sqrt{|\mu|} \operatorname{sgn} \mu$.

Уравнение ОК-регулятора имеет вид

$$\dot{\eta} = -k_2(\nu, \dot{\nu}) \operatorname{sgn} \nu = \begin{cases} -k'_2 \operatorname{sgn} \nu, & \nu \dot{\nu} \geq 0, \\ -k''_2 \operatorname{sgn} \nu, & \nu \dot{\nu} < 0, \end{cases} \quad (7.37)$$

где k'_2 и k''_2 — положительные константы. Вновь опускаем стандартные рассуждения и переходим при $b = \operatorname{const}$ к анализу $\tilde{\Sigma}_{01}^c$ -системы

$$\begin{aligned} q\dot{\mu} &= \tilde{b}\mu + e, \\ \dot{e} &= -k_2(\mu, \dot{\mu})b. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Фазовый портрет $\tilde{\Sigma}_{01}^c$ -системы (7.38) образуется “склеиванием” по координатным осям фазовых портретов Σ^a - и Σ^b -систем, каждая из которых действует в “своей” части плоскости (рис. 7.15), и изображен на рис. 7.16. Как установлено ранее, при $k'_2/k''_2 > 1$ “скручивание” траекторий в нуль происходит за конечное время, что и доказывает финитность стабилизации ошибки ν .

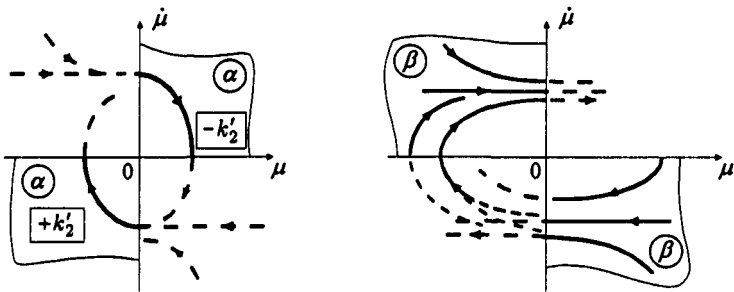


Рис. 7.15

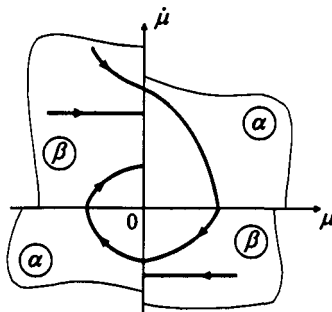


Рис. 7.16

или иную операцию усреднения, например, в виде скользящего среднего (рис. 7.18а), либо инерционного звена с достаточно малыми постоянными времени $\tau > 0$ (рис. 7.18б). Если, однако, в ОК-контуре

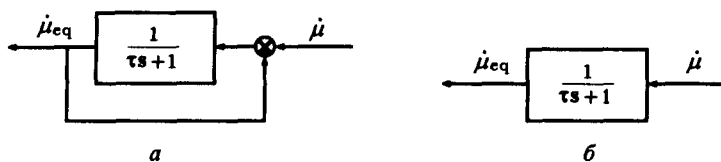


Рис. 7.18

применить скользящий режим 2-го порядка (описанный подробно в главе 5), не используя информацию о производной $\dot{\mu}_{eq}$, то можно избавиться и от решения связанных с этим проблем. Подробности опускаем.

Проведенное исследование позволяет сделать следующий принципиальный вывод:

- при использовании надлежащим образом организованной разрывной ОК-связи, в совокупности с тремя другими типами обратной связи, возможно добиться финитной независимости движения в параметрически неопределенной системе без скользящего режима в главном контуре регулирования и при конечных коэффициентах передачи в каждом контуре обратной связи.

Типичный ход проекций фазовых траекторий таким образом синтезированной бинарной системы стабилизации на множестве G_δ дает рис. 7.19. При этом закономерен вопрос о физической основе указан-

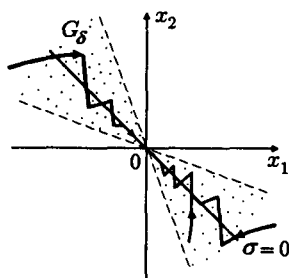


Рис. 7.19

ного эффекта компенсации возмущения. Важно также выработать определенные правила действия обратных связей вне множества G_δ , что позволит говорить о решении задачи глобальной стабилизации. Обо всем этом пойдет речь в следующей главе.

Глава 8

Ограничения, физические основы компенсации возмущений и стабилизация вынужденного движения в бинарных системах

До сих пор при синтезе систем стабилизации рассматривалось движение только на множестве $G_\delta = \{x \mid |\sigma| \leq \delta |x_1|\}$ (рис. 8.1), причем число $\delta > 0$ считалось столь малым, что это позволяло обойтись при анализе уравнениями первого приближения. В этой связи уместен

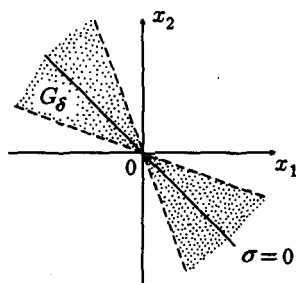


Рис. 8.1

первый вопрос:

- Как правильно модифицировать алгоритм бинарного управления, с тем чтобы он был пригоден к использованию при любых начальных условиях? (Разумеется, все его стабилизирующие свойства должны сохраняться.)

Важным тезисом, бывшим одним из основных при развитии теории бинарного управления, является тезис об *ограниченности коэффициентов передачи и непрерывности сигналов управления* и прежде всего в главном К-контуре регулирования. Поэтому возникает *второй* вопрос:

- Как эти фундаментальные требования отразить в алгоритме бинарного управления и какими побочными эффектами это сопровождается?

Следующий, *третий* вопрос, на который далее дается ответ, связан с выяснением,

- какова физическая основа компенсирующей неопределенность эффекта в бинарных системах.

Известно, что в линейных системах такой основой служит беспредельное увеличение коэффициента обратной связи, в разрывных системах (СПС, релейные системы) — скользящий режим. Но в бинарных системах может и не быть скользящего режима, а коэффициенты передачи конечны, поэтому и возникает сформулированный выше третий вопрос. Наконец, следует прояснить *четвертый* вопрос:

- о тех изменениях, которые нужно внести в бинарную обратную связь, с тем чтобы распространить ее стабилизирующие свойства на задачи управления вынужденным движением при отсутствии детальной информации о координатном возмущении,

т.е. имеется в виду рассмотреть проблему стабилизации следующего объекта:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu + f, \quad a \in A, b \in B, f \in F.\end{aligned}$$

8.1. Ограничения операторной переменной

Начнем рассмотрение со второго вопроса.

В синтезированных бинарных системах сигнал управления определяется выражениями $u = \mu x_1$ либо $u' = (\mu + \eta)x_1$. Очевидно, что μ или $(\mu + \eta)$ можно интерпретировать как коэффициент передачи К-регулятора по переменной x_1 . Поэтому по соображениям прочности О-переменные μ и η должны быть ограничены, т.е. при всех $t > 0$

$$|\mu(t)| \leq \text{const}, \quad |\eta(t)| \leq \text{const}.$$

Практически удобно иметь дело с ограничениями вида

$$|\mu| \leq 1, \quad |\eta| \leq 1,$$

фактически же $\mu(t)$ и $\eta(t)$ — выходные переменные некоторой динамической системы (КО- и ОК-регулятора соответственно), и проблема ограничения такой переменной вовсе не тривиальна и требует внимательного анализа. Кстати, не годится для этой цели, казалось бы, очевидный способ ограничения с использованием сатуратора.

Действительно, соответствующая этому предложению возможная структурная схема представлена на рис. 8.2. Уравнения системы, изо-

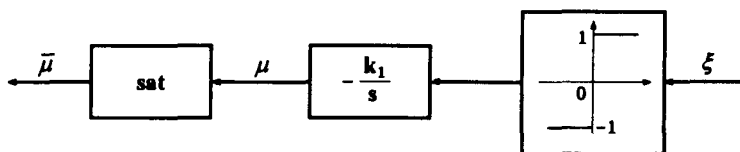


Рис. 8.2

браженной на рис. 8.2, имеют вид

$$\dot{\mu} = -k_1 \operatorname{sgn} \xi, \quad \bar{\mu} = \operatorname{sat}(\mu) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \mu, & |\mu| > 1, \\ \mu, & |\mu| \leq 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Теперь в уравнении изменения О-переменной ξ должна фигурировать переменная $\bar{\mu}$, а не μ , как ранее, так как $u = \bar{\mu}x$, и поэтому

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\bar{\mu} + a. \quad (8.2)$$

В результате дифференцирования $\bar{\mu}$, из (8.1) видно, что $\dot{\bar{\mu}} = \dot{\mu}$ только при $|\mu| < 1$ и $\dot{\bar{\mu}} = 0$ в остальных случаях. Это качественно меняет задачу стабилизации объекта (8.2) управлением $\bar{\mu}$ и ведет к негативным последствиям, так как при $|\mu| > 1$ этот объект неуправляем. Поэтому следует искать более “хитрые” решения задачи об ограничении операторной переменной μ .

Рассмотрим ряд способов ограничения О-переменной μ , сохраняющие управляемость объекта $\dot{\xi} = 2d\xi + b\mu + a$.

Способ I. Положим

$$\dot{\mu} = \begin{cases} -\omega\mu, & |\mu| > 1, \\ -k \operatorname{sgn} \xi, & |\mu| \leq 1, \end{cases} \quad (8.3)$$

где ω, k — положительные константы. Если $\xi > 0$ и $|\mu| < 1$, то $\dot{\mu} = -k$ и μ линейно убывает до значения $\mu = -1$; при переходе через $\mu = -1$ уравнение изменения μ меняется на $\dot{\mu} = -\omega\mu$ и переменная μ возрастает и трансверсально пересекает прямую $\mu = -1$ (рис. 8.3). Таким

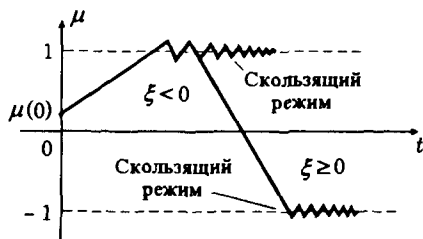


Рис. 8.3

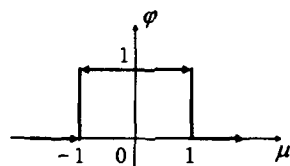


Рис. 8.4

образом, на прямых $|\mu| = 1$ возникает скользящий режим, что и гарантирует соблюдение ограничения $|\mu| \leq 1$, быть может, с некоторого момента времени.

Достоинство этого способа заключается в том, что управляемость объекта не теряется при выходе на ограничение, так как при изменении знака ξ переменная μ немедленно “сходит” с него, а это то, что нужно. Заметим, что закон (8.3) можно записать в виде одной формулы, если ввести функцию

$$\varphi(\mu) = (1 - |\operatorname{sat}(\mu)|) / (1 - |\mu|), \quad (8.4)$$

(ее график дан на рис. 8.4) и бинарную операцию $\beta(\varphi, \xi) = \varphi(\mu) \operatorname{sgn} \xi$.

В новых обозначениях закон (8.3) эквивалентен следующему, более простому, закону:

$$\dot{\mu} = -k\beta(\varphi, \xi). \quad (8.5)$$

Способ II. Заметим, что функцию φ из (8.4) можно представить разностью

$$\varphi(\mu) = \text{sg}(1 + \mu) - \text{sg}(\mu - 1), \quad (8.6)$$

где $\text{sg}(\xi)$ — функция знака (ее график приведен на рис. 8.5а). Тогда

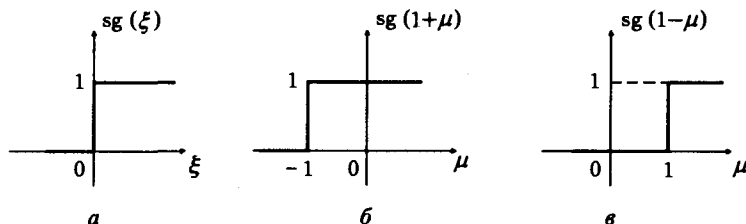


Рис. 8.5

в результате вычитания графиков на рис. 8.5б и 8.5в получаем требуемый график рис. 8.4. После подстановки (8.6) в (8.5) получаем

$$\dot{\mu} = -k \text{sg}(1 + \mu) \text{sgn } \xi + k \text{sg}(\mu - 1) \text{sgn } \xi, \quad k = \text{const} > 0. \quad (8.7)$$

Учитывая особенность знакового умножения, формулу (8.7) можно реализовать без бинарной операции путем использования двух каналов распространения сигнала (рис. 8.6). Эта схема работает следующим образом. Если $\xi > 0$, то $-\text{sgn } \xi = -1$ и из двух диодов D_1 ,

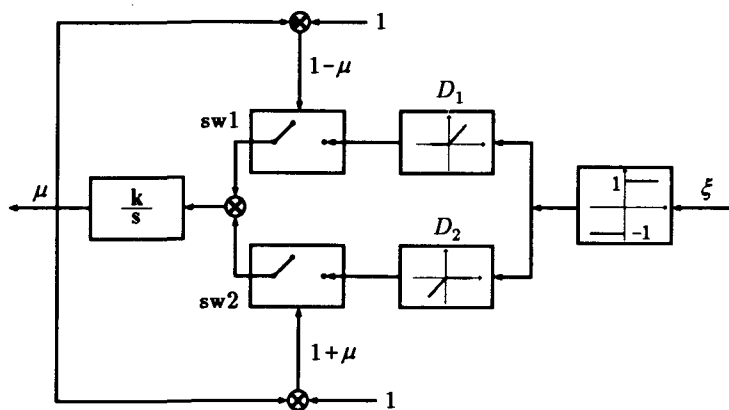


Рис. 8.6

D_2 пропускает сигнал только D_2 . Если при этом $\mu + 1 > 0$, то ключ sw_2 замкнут и $\dot{\mu} = -k$, что и требуется. Это происходит, пока μ не достигнет значения $\mu = -1$, когда sw_2 размыкается, и тогда $\mu = -1$, пока $\xi > 0$, либо пока ξ не сменит знак. В этом случае проводящим становится D_1 , а не D_2 , работает верхняя цепь, и если $1 - \mu > 0$, то ключ sw_1 замкнут и $\dot{\mu} = k$, как и должно быть. Как только станет $\mu = 1$, если только ξ не сменит знак, sw_1 разомкнется, фиксируя $\mu = 1$. Достоинство этой схемы в том, что в ней не возникает скользящего режима на $|\mu| = 1$.

Способ III. Пожалуй, наиболее компактная запись интегратора-ограничителя дается следующей формулой с простейшей бинарной операцией:

$$\dot{\mu} = -k \operatorname{sgn}(\xi + \mu|\xi|), \quad k = \operatorname{const} > 0. \quad (8.8)$$

Этому выражению отвечает структурная схема на рис. 8.7. Опишем

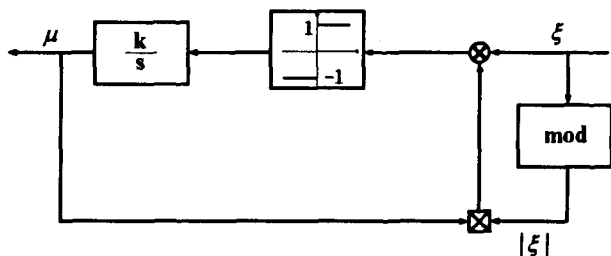


Рис. 8.7

подробно принцип работы этого устройства. Пока $|\mu| < 1$, выполняется условие $\operatorname{sgn}(\xi + \mu|\xi|) = \operatorname{sgn} \xi$. Пока $|\mu| > 1$, выполняется условие $\operatorname{sgn}(\xi + \mu|\xi|) = \operatorname{sgn} \mu$. Таким образом, в нижней зоне $|\mu| < 1$ и $\dot{\mu} = -k \operatorname{sgn} \xi$, а вне ее $\dot{\mu} = -k \operatorname{sgn} \mu$. Последнее обеспечивает соблюдение ограничения $\mu \leq 1$ в скользящем режиме на границах $|\mu| = 1$, а также немедленный сход с границ $|\mu| = 1$ при изменении знака ξ . А это как раз то, что и нужно для управляемости.

Описанный выше оператор с управляемым ограничением выхода является, таким образом, сложным нелинейным динамическим звеном. Унифицированное обозначение таких звеньев дано на рис. 8.8.

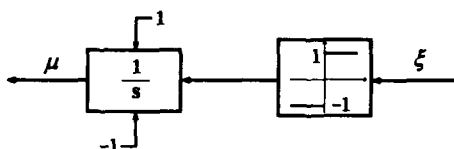


Рис. 8.8

8.2. О глобальном поведении бинарной системы

В данном разделе ответим, наконец, на первый из поставленных в начале этой главы вопросов, а именно на вопрос об уравнениях движения и свойствах синтезированной бинарной системы при произвольных начальных условиях по x , т.е. в том числе и не принадлежащих

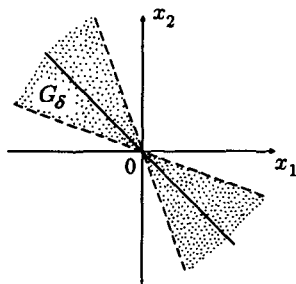


Рис. 8.11

множеству G_δ (рис. 8.11). Рассмотрим для определенности бинарную систему с К- и КО-связями вида

$$u = k\mu x_1, \quad \dot{\mu} = -k_1 \operatorname{sgn} [\xi + \mu|\xi|]. \quad (8.9)$$

Если использованы, кроме того, другие типы обратной связи, то соответствующее исследование даже проще предлагаемого.

Из (8.9) следует, что переменные μ и u ограничены:

$$|\mu| \leq 1, \quad |u| \leq k|x_1|.$$

Более того, если действие уравнений (8.9) распространить за пределы множества G_δ , а для этого достаточно вместо стандартного

$$\xi = \sigma/x_1$$

положить

$$\xi = \operatorname{sat} \left(\frac{\sigma}{\delta x_1} \right),$$

тогда при нахождении фазовой точки вне G_δ переменная μ через промежуток времени, меньший $2/k_1$, принимает следующее значение:

$$\mu = -\operatorname{sgn} (\sigma x_1). \quad (8.10)$$

После подстановки (8.10) в первое из соотношений (8.9) находим, что управление принимает форму $u = -k|x_1| \operatorname{sgn} \sigma$, совпадающую с обратной связью СПС. А раз так, то и фазовые траектории те же самые, что в СПС.

Таким образом, если в СПС параметр k выбран так, что имеет место попадание на линию разрыва $\sigma = 0$, то в бинарной системе это также имеет место, т.е. множество G_δ является притягивающим множеством. Необходимым и достаточным условием попадания является отсутствие вещественных положительных нулей у характеристического полинома системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 - bkx_1\end{aligned}$$

при любых фиксированных $a \in A$, $b \in B$. Последнее, очевидно, справедливо, когда

$$kb^- > a^0. \quad (8.11)$$

Таким образом, при выполнении условия (8.11) множество G_δ притягивающее. Если побеспокоиться о том, чтобы оно было также инвариантным (т.е. все начинающиеся в нем движения не должны покидать его в дальнейшем), то G_δ было бы аттрактором и весь анализ из предшествующих глав без изъятий годился бы для исследования такой ситуации. Но в рассматриваемой бинарной системе (К+КО-связи) множество G_δ является не аттрактором, а только условно инвариантным множеством. Именно, если внутри G_δ можно указать множество, например, той же конфигурации $G_{\delta'}$ ($0 < \delta' < \delta$) такое, что движения, начинающиеся в $G_{\delta'}$, не покидают G_δ , то последнее — условно инва-

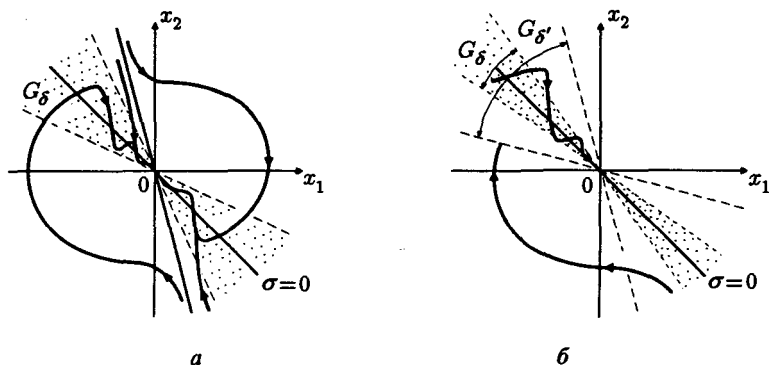


Рис. 8.12

риантное множество. Если к тому же оно притягивающее, то говорим об условном аттракторе (рис. 8.12). На рис. 8.12а множество G_δ — аттрактор, а на рис. 8.12б — условный $G_{\delta'}$ -аттрактор.

Поскольку прямая $\sigma = 0$ также является притягивающей при выполнении условия (8.11), то именно ее удобно взять в качестве $G_{\delta'}$. Для получения соотношений между коэффициентами системы, гарантирующими σ -условную инвариантность множества G_δ , рассмотрим

следующее известное по предыдущим главам уравнение движения относительно переменной $\xi = \sigma/x_1$:

$$\dot{\xi} = 2d\xi + kb\mu + a_*, \quad a_* = a - d^2, \quad k = \text{const}, \quad (8.12)$$

и уравнение КО-регулятора

$$\dot{\mu} = -k_1 \text{sgn}(\xi + \mu|\xi|), \quad k_1 = \text{const}.$$

Ясно, что множество G_δ является σ -условно инвариантным, если всякое движение, стартовавшее с линии $\sigma = 0$ (т.е. при $\xi = 0$), не достигнет границы G_δ (т.е. $|\xi| = \delta$).

Из (8.12) имеем в G_δ оценку

$$|\dot{\xi}| \leq 2d\delta + a_*^0 + kb^+, \quad a_*^0 = a^0 - d^2,$$

поэтому за время t переменная ξ “нарастет” не более чем на величину

$$|\xi| \leq (2d\delta + a_*^0 + kb^+)t.$$

Из требуемого условия $|\xi| \leq \delta$ получаем следующую оценку на время “нарастания”:

$$t \leq \frac{\delta}{2d\delta + a_*^0 + kb^+}. \quad (8.13)$$

Но рост гарантированно прекратится тогда, когда переменная μ достигает крайнего значения $\mu = -\text{sgn} \xi$ прежде, чем переменная $|\xi|$ достигнет значения δ и, кроме того, будет выполнено неравенство

$$2d\delta - kb^- + a_*^0 < 0, \quad a_*^0 = a^0 - d^2. \quad (8.14)$$

Максимальное время, необходимое для изменения переменной μ от одного крайнего значения до другого, меньше $2/k_1$. Поэтому из последнего неравенства и (8.13) получаем следующую окончательную оценку для расчета параметра k_1 :

$$k_1 \geq \frac{2}{\delta} (2d\delta + a_*^0 + kb^+), \quad (8.15)$$

где параметр k определяется из (8.14) неравенством

$$k \geq \frac{2d\delta + a_*^0}{b^-}. \quad (8.16)$$

Соотношения (8.15), (8.16) полностью определяют параметры К- и КО-связей, так как (8.16) гарантирует притяжение для прямой $\sigma = 0$. Заметим также, что при использовании О-связи нижнюю оценку коэффициента k_1 можно уменьшить вдвое.

8.3. Физические основы компенсации неопределенности

Перейдем теперь к ответу на третий вопрос о физических основах компенсации неопределенности.

Прежде всего отметим тот очевидный факт, что всякое возмущение можно трактовать как некую силу, влияние которой компенсируется только другой, эквивалентной ей силой. Например, при прямой компенсации возмущения f в управлении

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + f$$

управление формируется в виде суммы

$$u = u_x + u_f,$$

где компонента $u_f = -f/b$ является компенсирующей силой, а компонента u_x — стабилизирующей.

При неизвестном возмущении f можно использовать большой коэффициент усиления в обратной связи $u = -k\sigma$, тогда в замкнутой системе, описываемой уравнением

$$\frac{1}{k} \dot{\sigma} = - \left(b + \frac{d}{k} \right) \sigma + \frac{f}{k},$$

компенсация достигается при $k \rightarrow \infty$, когда приведенное возмущение $(f/k) \rightarrow 0$. В этом случае компенсирующая сила образуется в результате умножения большого k на малый сигнал σ .

Релейное управление

$$u = -u^0 \operatorname{sgn} \sigma, \quad u^0 = \operatorname{const}$$

также “силовым” способом подавляет действие возмущения f :

$$\dot{\sigma} = d\sigma - u^0 b \operatorname{sgn} \sigma + f,$$

которое теперь, однако, должно быть равномерно ограничено:

$$|f| < u^0.$$

При этом в нуле переменной σ существует скользящий режим и среднее значение разрывного сигнала с точностью до знака совпадает с компонентой u_f в методе прямой компенсации

$$u^0 \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \sigma = f/b.$$

Таким образом, во всех указанных случаях

- идея силовой компенсации возмущения реализуется с помощью отрицательной обратной связи.

В бинарных системах (и в СПС, конечно, тоже) компенсация достигается иными средствами. Действительно, в этом случае

$$u = k\mu x_1,$$

и произведение $k\mu = k_\mu$ играет роль коэффициента передачи обратной связи. Но при использовании релейного КО-регулятора

$$\mu = -\operatorname{sgn} \xi$$

или интегрально-релейного КО-регулятора

$$\dot{\mu} = -k_1 \operatorname{sgn} (\sigma + \mu|\sigma|)$$

переменная μ меняется от -1 до $+1$ и, значит, коэффициент обратной связи главного контура k_μ также меняет знак. Последнее означает, что в главном контуре используется знакопеременная обратная связь и поведение системы описывается Σ^+ -уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + kbx_1, \end{aligned}$$

или Σ^- -уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 - kbx_1. \end{aligned}$$

Поскольку $kb^- > a^0$, то Σ^+ -система всегда неустойчива, и это принципиальный момент. Именно:

- использование неустойчивых структур позволяет в системе с ограниченными параметрами за конечное время увеличить норму фазового вектора до величины, достаточной для подавления возмущения.

Как мы теперь знаем, использование для этого разрывной обратной связи вовсе не является неотвратимым, годятся любые, необязательно линейные, законы управления, меняющие знак обратной связи.

8.4. О компенсации координатного возмущения

Рассмотрим теперь способ решения четвертой задачи, поставленной в начале главы, — задачи об алгоритмах стабилизации вынужденного движения.

До сих пор, по уговору, предполагалось, что $f(t) \equiv 0$. Пусть теперь это не так, а именно, в уравнении изменения ошибки КО-контура σ имеется дополнительный аддитивный член, т.е.

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + a^*x_1 + f, \quad a^* = a - d^2, \quad b \in B, \quad a \in A.$$

Наличие слагаемого $f(t)$ в правой части качественно меняет ситуацию. Поскольку возмущение $f(t)$ предполагается известным с точностью до включения

$$f \in F = \{ f \mid |f| \leq f_M \},$$

где, кроме того, неизвестен и параметр $b \in B$, то оно не может быть включено в параметрическое возмущение или устранено с помощью известных методов компенсации: прямым или косвенным измерением. Поэтому актуален вопрос об изменениях, которые следует внести в конструкцию бинарных систем управления, с тем чтобы наделить их свойством стабилизируемости при координатном возмущении.

Заметим, что при известном $b \in B$ проблема остается нерешенной даже при известном $f(t)$, поскольку стандартные методы стабилизации в такой ситуации неприменимы. Если известна волновая модель возмущения f , т.е. известен аннулирующий его оператор K_f :

$$K_f f \equiv 0,$$

то заменой управления

$$u = K_f^{-1} v$$

задача стабилизации вынужденного движения сводится к стабилизации свободных колебаний, так как

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bK_f^{-1}v + a^*x_1 + f,$$

и после введения новых переменных

$$\tilde{\sigma} = K_f \sigma, \quad \tilde{x}_1 = K_f x_1$$

получаем стандартную задачу стабилизации

$$\dot{\tilde{\sigma}} = d\tilde{\sigma} + b\tilde{x}_1 + a^*\tilde{x}_1,$$

В этих выкладках для простоты и без потери общности полагалось, что $b = \text{const}$. Таким образом,

- наиболее общая и трудная ситуация возникает тогда, когда о возмущении $f(t)$ известен только факт включения $f \in F$, а параметры объекта неизвестны, т.е. $a \in A$, $b \in B$.

Именно этой ситуацией далее и займемся.

Пусть координатное возмущение удовлетворяет МС-условию. Тогда с помощью стандартной замены переменного

$$x_2 = \sigma - dx_1$$

сводим исходную задачу стабилизации объекта P :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bu + f \end{aligned}$$

к задаче стабилизации скалярного объекта P_σ :

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu + a_*x_1 + f, \quad a_* = a - d^2.$$

Как обычно, при управлении вынужденным движением выберем управление в виде суммы

$$u = u_x + u_f, \quad (8.17)$$

где компонента u_x стабилизирует свободные колебания объекта P_1 :

$$\dot{\sigma} = d\sigma + bu_x + a_*x_1,$$

а компонента u_f стабилизирует вынужденные колебания объекта P_2 :

$$\dot{\sigma} = bu_f + f.$$

Как и ранее, предполагается, что

$$a \in A, \quad b \in B, \quad f \in F.$$

При использовании разрывных управлений из стабилизации P_1 и P_2 -объектов следует стабилизация P_σ -объекта. В самом деле, разрывные стабилизирующие управления u_x , u_f , очевидно, удовлетворяют условиям

$$\sigma(d\sigma + bu_x + a_*x_1) \leq 0, \quad (8.18)$$

$$\sigma(bu_f + f) \leq 0. \quad (8.19)$$

Поскольку это так, то и их сумма удовлетворяет аналогичному условию

$$\sigma(d\sigma + b(u_x + u_f) + a_*x_1 + f) \leq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\sigma\dot{\sigma} < 0,$$

влекущему за собой стабилизацию P_σ -объекта в нуле.

Законы управления, разрешающие неравенства (8.18), (8.19) при любых $a \in A$, $b \in B$ и $f \in F$, очевидно, имеют вид

$$u_x = -k|x_1| \operatorname{sgn} \sigma, \quad (8.20)$$

$$u_f = -lf_M \operatorname{sgn} \sigma, \quad (8.21)$$

где константы k , l удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} kb^- > a_*^0 &= a^0 + d^2, \\ lb^- &> 1. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Алгоритмы управления (8.20), (8.21) стандартны для теории СПС.

При переходе от разрывных алгоритмов стабилизации к непрерывным можно поступить следующим образом. Используя стандартные обозначения

$$\mu = -\operatorname{sgn}(x_1\sigma) = -\operatorname{sgn} \xi, \quad \xi = \sigma/x_1, \quad (8.23)$$

алгоритмы стабилизации управления (8.20), (8.21) можно записать в виде

$$u = u_x + u_f = (kx_1 + lf_M \operatorname{sgn} x_1)\mu. \quad (8.24)$$

Возьмем теперь формулу (8.24) при синтезе непрерывного закона за основу, но вместо релейного КО-регулятора применим, к примеру, интегрально-релейный КО-регулятор

$$\dot{\mu} = -k_1^0 \operatorname{sgn} (\xi + \mu|\xi|), \quad (8.25)$$

где k_1^0 , как будет видно далее, уже не коэффициент, а некоторая функция, зависящая от фазового вектора и мажоранты возмущения.

Для нахождения этой функции k_1^0 , гарантирующей σ -условную инвариантность множества G_δ , т.е. выполнение неравенства $|\xi| \leq \delta$, если $\xi(0) = 0$, воспользуемся уравнением изменения O -переменной ξ в множестве G_δ . Это уравнение выводится стандартным образом и имеет следующий вид:

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\frac{u}{x_1} + a_* + \frac{f}{x_1}.$$

Поскольку, согласно (8.24),

$$\frac{u}{x_1} = \left(k + \frac{lf_M}{|x_1|}\right)\mu,$$

то искомое уравнение окончательно можно записать в виде

$$\dot{\xi} = 2d\xi + b\left(k + \frac{lf_M}{|x_1|}\right)\mu + a_* + \frac{f_1}{x_1}. \quad (8.26)$$

Из (8.24) имеем $|\mu| \leq 1$, следовательно, для правой части уравнения (8.26) в G_δ верна оценка

$$|\dot{\xi}| \leq 2d\delta + b^+\left(k + \frac{lf_M}{|x_1|}\right) + a_*^0 + \frac{f_M}{|x_1|}.$$

За время t переменная ξ возрастает с нуля ($\xi(0) = 0$) не более чем на величину $|\xi_{\max}|$ (x_1 можно считать постоянной, так как движение происходит в G_δ , а δ и t малы), где

$$|\xi_{\max}| = \left[2d\delta + b^+k + a_*^0 + \frac{b^+l+1}{|x_1|}f_M\right]t. \quad (8.27)$$

Полученная величина не превысит допустимый предел δ , если за время t , согласно (8.22), O -переменная μ гарантированно примет значение $\mu = -\operatorname{sgn} \xi$. Но это может быть только тогда, когда

$$t \geq 2/k_1^0. \quad (8.28)$$

Из соотношений (8.27), (8.28) и неравенства $|\xi_{\max}| \leq \delta$ получаем оценку снизу для функции k_1^0 :

$$k_1^0 \geq \left[2d\delta + b^+k + a^0 + \frac{b^+l+1}{|x_1|} f_M \right] = k_1 + \frac{2(b^+l+1)}{\delta|x_1|} f_M. \quad (8.29)$$

Из полученной оценки следует, что функция k_1^0 отличается от константы k_1 , действующей при управлении свободным движением, на слагаемое

$$\frac{2(b^+l+1)}{\delta|x_1|} f_M$$

обусловленное наличием внешней силы f . При отсутствии этой силы ($f_M \equiv 0$) данная оценка совпадает с ранее установленной.

Второй вывод из (8.29) тот, что в окрестности нуля переменной x_1 функция k_1^0 неограниченно возрастает, что неприемлемо. Для ограничения этой функции вместо (8.29) следует использовать оценку

$$k_1^0 \geq k_1 + \frac{2(b^+l+1)}{\delta\Delta} f_M = k_1 + k_1' f_M, \quad (8.30)$$

где Δ — положительная константа, определяющая размер шара диссипативности

$$B_r(0) = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2(\Delta)\}.$$

Последнее замечание о диссипативности системы обусловлено тем, что при ограниченной функции k_1^0 из (8.30) при малых x_1 ($|x_1| < \Delta$) проекции фазовых траекторий системы на множество G_δ могут покинуть это множество, чего не может быть для функции k_1^0 из (8.29). Поэтому условие (8.30) гарантирует стабилизацию всех решений (разумеется, при выполнении условий притяжения для G_δ) в окрестности нуля, погруженной в шар $B_r(0)$ (рис. 8.13). Отметим, что при $\Delta \rightarrow 0$

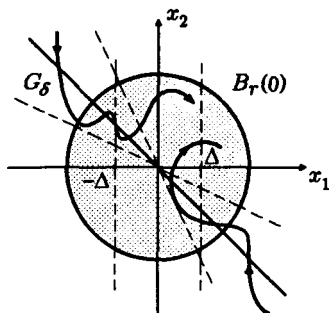


Рис. 8.13

шар вырождается в точку 0, как это и должно быть. Шар диссипативности $B_r(0)$ можно уменьшить, а значит, поднять точность стабилизации, введением надлежащих О- и ОК-связей. Подробное обоснование этого утверждения здесь не приводится.

Структурная схема синтезированной бинарной системы стабилизации вынужденного движения для случая, когда возмущение измеряется, приведена на рис. 8.14. Завершая обсуждение данной темы, от-

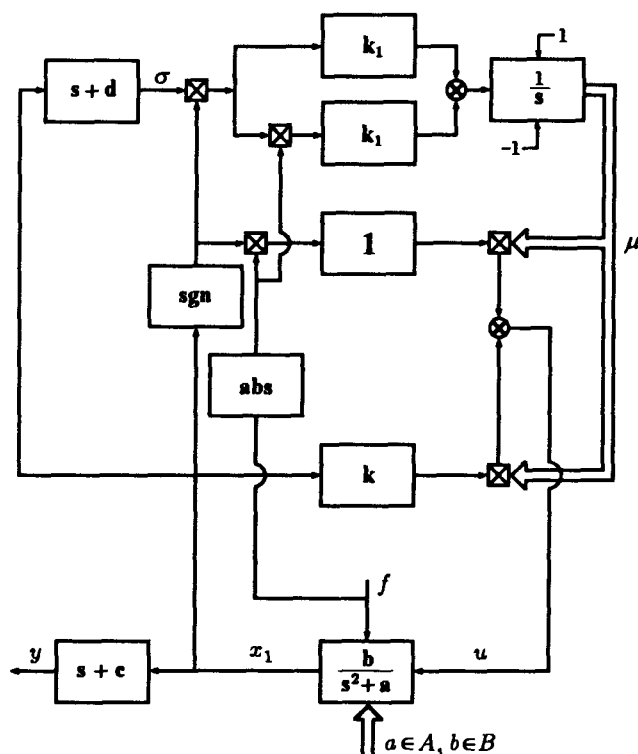


Рис. 8.14

метим, что задачу стабилизации вынужденного движения можно решать и при отсутствии информации о мажоранте координатного возмущения f_M и даже при нарушении МС-условия. В этом случае компенсация достигается сочетанием использования косвенной оценки возмущения через внутренние переменные объекта и знакопеременной обратной связи.

Глава 9

Дифференцирование сигналов

Под дифференцированием в теории управления обычно понимается обработка сигнала с целью получения оценок его производных. Основными препятствиями на пути идеального дифференцирования являются физическая неосуществимость идеального дифференциатора и неустранимое противоречие между точностью операции дифференцирования и операцией фильтрации помех. Теория дифференцирования является разделом общей теории фильтрации, однако имеет весьма существенную особенность, которая состоит в отсутствии модели обрабатываемого сигнала или точной информации о ее параметрах, что характерно для теории фильтрации. Поэтому дифференцирование до сих пор является одной из наиболее трудных задач теории управления. Априорная неопределенность в постановке задачи дифференцирования предопределяет поиск наиболее совершенных дифференциаторов в классе нелинейных динамических систем.

Цель настоящей главы состоит в демонстрации возможностей новых видов нелинейных обратных связей в задаче дифференцирования.

9.1. Постановка задачи дифференцирования

При решении многих задач естествознания часто требуется располагать оценками производных функций. Далее для удобства, предположим, что эти функции являются функциями времени, и будем по традиции называть их сигналами.

Проблема дифференцирования возникает и в теории управления в связи, например, с восстановлением по выходу системы ее полного фазового вектора. В тех случаях, когда эта проблема разрешима, с помощью преобразования переменных можно получить фазовый вектор в произвольных координатах. Задача дифференцирования сигнала относится к числу некорректно поставленных задач, и это связано, в частности, с тем, что из равенства

$$g_1(t) = g_2(t) \tag{9.1}$$

вовсе не следует, что

$$\frac{dg_1(t)}{dt} = \frac{dg_2(t)}{dt} \tag{9.2}$$

Более того, указанные производные могут даже не существовать. Поэтому прежде всего следует позаботиться о такой предварительной обработке сигнала, когда естественное следствие (9.1)→(9.2) имеет место. Это достигается использованием фильтра F_{in} предварительной обработки сигнала (рис 9.1) и его преобразованием в гладкий сигнал \tilde{g} . Задача дифференцирования некорректно поставлена еще и

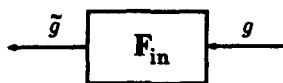


Рис. 9.1

потому, что результат дифференцирования двух сколь угодно близких сигналов может отличаться на произвольную величину.

Действительно, рассмотрим два сигнала

$$g_1(t) = c = \text{const}, \quad g_2(t) = g_1(t) + \varepsilon \sin \omega t, \quad (9.3)$$

где ε — сколь угодно малая константа, ω — частота помехи (рис. 9.2). Дифференцируя функции из (9.3), имеем $\dot{g}_1 = 0$, $\dot{g}_2 = \varepsilon \omega \cos \omega t$. Графики производных даны на рис. 9.3. Видно, что ошибка дифференцирования

$$\sup_t |\dot{g}_1 - \dot{g}_2| = \varepsilon \omega$$

может превзойти любое наперед заданное число. Поэтому о “чистом” дифференцировании говорить не приходится, можно вести речь только об оценках производной \hat{g} , измеряя ее близость к истинной производной в той или иной метрике. Часто удобно различать в

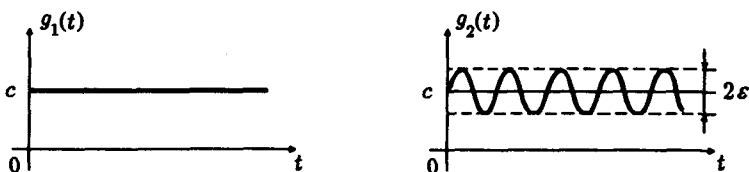


Рис. 9.2

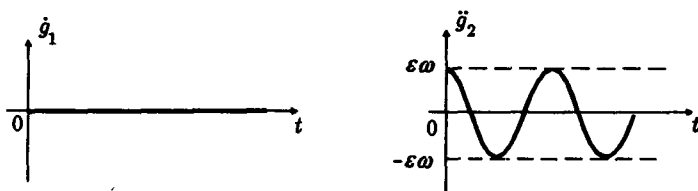


Рис. 9.3

структуре дифференциатора часть, которая отвечает за собственно дифференцирование сигнала, от части, предназначенной для формирования оценки производной. Последняя операция реализуется с помощью некоторого фильтра F_{out} , и указанное разделение функций иллюстрирует рис. 9.4. Таким образом, не только дифференцируемый



Рис. 9.4

сигнал, но и полученная производная должны, вообще говоря, подвергаться дополнительной обработке, с тем чтобы сделать задачу разрешимой, а оценку производной приемлемой, т.е. фактически подлежат синтезу операторы фильтров F_{in} , F_{out} и оператор дифференциатора D (рис. 9.5). Выбор фильтров зависит от многих обстоятельств, не

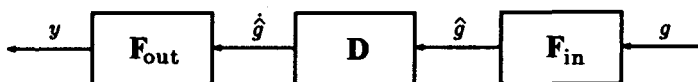


Рис. 9.5

связанных напрямую с операцией “чистого дифференцирования” (например, от спектрального состава помехи, от наличия амплитудных ограничений и т.п.). Именно это делает декомпозицию оператора приближенного дифференцирования на рис. 9.5 полезной.

Далее, полагаем, что сигнал $g(t)$ “хорош” и поэтому можно положить $F_{in} \equiv 1$.

9.1.1. Фильтрация

Фильтрация — операция выделения полезного сигнала из смеси сигналов. Поскольку такое выделение неоднозначно, то для сравнения вариантов разделения вводят показатель качества или критерий фильтрации. Экстремизация этого критерия дает оптимальный фильтр.

Для успешного разделения необходима априорная информация о полезном сигнале и помехе. Часто такой информацией служат динамические системы, порождающие эти сигналы, иначе говоря, волновые модели сигнала и помехи. В подобных случаях проблема фильтрации может быть сведена к некоторой задаче дифференцирования. В то же время проблему дифференцирования всегда можно трактовать как проблему фильтрации, т.е. между этими проблемами много общего, но они не тождественны.

Дело даже не столько в том, что задача фильтрации обычно рассматривается в стохастической постановке, а задача дифференцирования — в детерминированной. Основное различие сводится к тому, что обычно для решения задачи дифференцирования требуется меньший объем априорной информации, нежели объем, необходимый для решения задачи фильтрации.

9.1.2. RC-цепочка

В приложениях и по сей день для приближенного дифференцирования используются простейшие дифференциаторы, реализуемые на пассивных электроцепях. Наиболее известным дифференциатором этого типа является RC-цепочка (рис. 9.6). Здесь g — входное напряже-

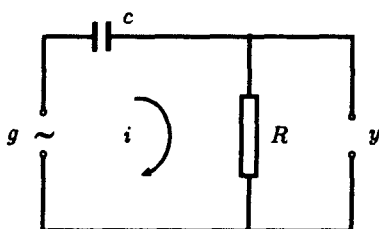


Рис. 9.6

ние, y — выходное напряжение, i — сила тока, R и c — параметры цепочки, сопротивление и емкость соответственно. По закону Ома

$$g - Ri + \frac{1}{c} \int i dt, \quad y = Ri.$$

Дифференцируя это выражение и исключая силу тока i , получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{y} + (1/T)y = \dot{g}, \quad (9.4)$$

где $T = cR$ — постоянная времени дифференцирования. Общее решение уравнения (9.4) имеет вид

$$y = \underbrace{e^{-t/T} y(0)}_{\text{свободное движение}} + \underbrace{Tg(1 - e^{-t/T})}_{\text{вынужденное движение}}.$$

Исследуем дифференцирующие свойства RC-цепочки, рассматривая лишь вынужденную компоненту ($y(0) = 0$) решения (выхода), так как свободное движение экспоненциально затухает. Пусть сначала

$$\dot{g} = \text{const.}$$

В этом случае из уравнения

$$y = T\dot{g} (1 - e^{-t/T})$$

видно, что $y \rightarrow T\dot{g}$ при $t \rightarrow \infty$, причем с уменьшением T “темп” сходимости возрастает, но одновременно уменьшается коэффициент перед производной (рис. 9.7, где $T_1 > T_2$). Таким образом, RC -цепочка осу-

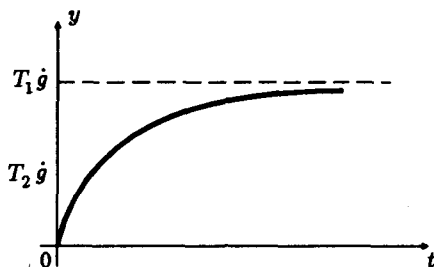


Рис. 9.7

ществляет дифференцирование с точностью до переходного процесса, который, однако, неустраним.

Пусть теперь $g(t)$ — гармонический сигнал, т.е.

$$g(t) = e^{j\Omega t},$$

где Ω — частота, j — мнимая единица. Тогда вынужденное решение уравнения

$$\dot{y} + (1/T)y = j\Omega e^{j\Omega t} \quad (9.5)$$

ищем в виде

$$y = A e^{j(\Omega t + \varphi)}, \quad (9.6)$$

где A — амплитуда, а φ — фаза выходного сигнала RC -цепочки. Подставляя (9.6) в (9.5), получаем соотношение

$$(j\Omega + 1/T) A e^{j\varphi} = j\Omega.$$

Из этого равенства находим выражение для амплитуды и фазы:

$$A = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + 1/T^2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T\Omega).$$

Поскольку “чистая” производная дается выражением

$$\dot{g} = j\Omega e^{j\Omega t} = \Omega e^{j(\Omega t + \pi/2)},$$

то величины $\Omega - A$, $\pi/2 - \varphi$ уместно назвать искажениями по амплитуде и фазе соответственно.

Зависимости ошибок дифференцирования от постоянной времени T для случая, когда $\Omega > 1$, приведены на рис. 9.8. Из графиков видно, что с увеличением постоянной времени уменьшаются амплитудные, но нарастают фазовые искажения при дифференцировании гармонического сигнала. Следовательно, проблема выбора постоянной времени не так проста, как это может показаться.

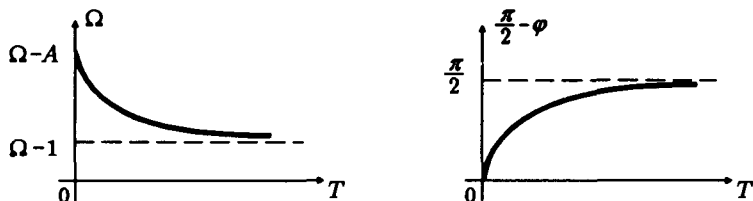


Рис. 9.8

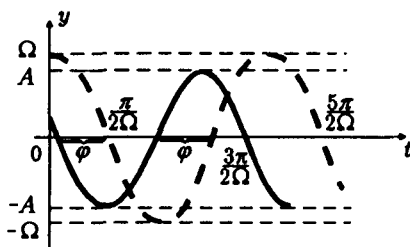


Рис. 9.9

На рис. 9.9 штриховой линией изображена «чистая» производная $\Omega \cos(\Omega t)$, а сплошной линией — «реальная» производная на выходе RC -цепочки.

Полезно также иметь представление о том, как меняются погрешности дифференцирования при изменении частоты обрабатываемого сигнала. Соответствующие графики при $T < 1$ даны на рис. 9.10. Видно, что разные частоты обрабатываются с разными погрешностями, и что самые лучшие характеристики RC -цепочка имеет при

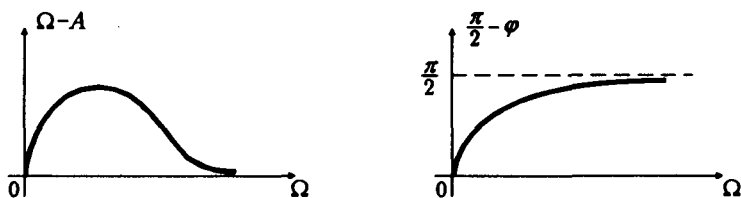


Рис. 9.10

$\Omega \rightarrow 0$, т.е. при дифференцировании постоянного сигнала. При наличии помехи, т.е. когда дифференцируется сигнал $g(t) = e^{j\Omega t} + \epsilon e^{j\omega t}$, где частота помехи $\omega \gg \Omega$, а амплитуда $\epsilon \ll 1$, выход RC -цепочки при $y(0) = 0$ можно представить в виде суммы $y = y_{\Omega}(t) + y_{\omega}(t)$, где первая компонента — оценка производной полезного сигнала, а y_{ω} — оценка производной помехи. Поскольку для компоненты $y_{\omega}(t)$ справедливы приведенные выше формулы (9.5), (9.6) и связанные с ними, то вносимый ею дополнительный вклад в погрешность дифференцирования определяется ее амплитудой A_{ω} и фазой φ_{ω} :

$$A_{\omega} = \frac{T\omega}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad \varphi_{\omega} = \arctg(-T\omega).$$

Из выражений для амплитуды и фазы следует, что для устранения вредного влияния помехи следует увеличивать постоянную времени RC -цепочки, но тогда возрастают фазовые искажения в полезной составляющей. Поэтому здесь возможен компромисс. Лучший выход, однако, может состоять в поиске таких схем дифференцирования, в которых имеется несколько свободных параметров, позволяющих независимо решать задачу “фильтрации” помехи и уменьшения амплитудных и фазовых искажений.

Перейдем к рассмотрению подобных схем дифференцирования, но прежде заметим, что передаточная функция RC -цепочки имеет вид

$$W_{RC}(s) = \frac{s}{s + 1/T},$$

который нетрудно установить по ее дифференциальному уравнению

$$\dot{y} + \frac{1}{T}y = \dot{g}.$$

Такой передаточной функции соответствует упрощенная структурная схема на рис. 9.11, которую можно развернуть в виде системы, представленной на рис. 9.12, где z — выход следящей системы, e — ее

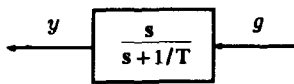


Рис. 9.11

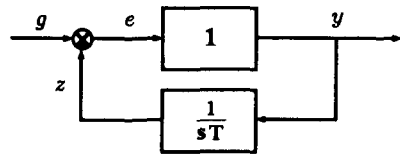


Рис. 9.12

ошибка. В схемах всего один настраиваемый параметр T , что и предопределяет их возможности. Если вместо тождественного преобразования в прямом канале использовать иные законы обратной связи, то можно рассчитывать на получение лучших дифференциаторов.

9.1.3. Дискретно-разностные аппроксимации

К улучшенным методам дифференцирования относятся методы, основанные на использовании дискретных разностей различных порядков дифференцируемой функции. Например, оценкой производной функции $g(t)$ может служить разность

$$\tilde{g} = \frac{g(t) - g(t-h)}{h} \cong \frac{dg(t)}{dt}, \quad (9.7)$$

где $h = \text{const} > 0$. Заметим, что для линейных функций эта оценка (9.7) производной совпадает с ее точным значением. В общем случае имеет место равенство

$$g(t) = g(t-h) + \dot{g}(t)h + \ddot{g}(t+dh)\frac{h^2}{2},$$

где d — некоторое число из интервала $[0, 1]$, и, следовательно, оценка (9.7) имеет погрешность порядка $O(h^2)$.

Использование дискретных значений в $(r+1)$ -й точке для формирования оценки

$$\hat{g} = \sum_{k=0}^r \alpha_k g(t+kh)$$

при надлежащем выборе параметров α_k позволяет повысить точность аппроксимации до $O(h^r)$. Кажется, что устремлением $h \rightarrow 0$ задача дифференцирования исчерпывается. Однако это не так и при наличии помехи возникают проблемы, родственные описанным в предыдущем пункте. Именно, пусть вместо $g(t)$ дифференцируется по схеме (9.7) сигнал $g_\epsilon = g(t) + \epsilon \sin \omega t$, тогда оценка его производной \hat{g}_ϵ дается выражением

$$\begin{aligned} \hat{g}_\epsilon &= \frac{g_\epsilon(t) - g_\epsilon(t-h)}{h} = \frac{g(t) - g(t+h)}{h} + \\ &+ \frac{\epsilon}{h} [\sin \omega t - \sin \omega(t-h)]. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Но $\sin \omega(t-h) = \sin \omega t \cos \omega h - \cos \omega t \sin \omega h$, и при $\omega h \ll 1$

$$\cos \omega h \cong 1 - \omega h, \quad \sin \omega h \cong \omega h,$$

поэтому справедливо приближенное равенство

$$\sin \omega(t-h) \cong \sin \omega t - \omega h (\sin \omega t + \cos \omega t).$$

Следовательно, помеха вносит в оценку (9.8) дополнительную и, вообще говоря, сколь угодно большую погрешность

$$\hat{g}_\epsilon \cong \hat{g} - \epsilon \omega (\sin \omega t + \cos \omega t),$$

неустраняемую при уменьшении $h \rightarrow 0$.

В некоторых ситуациях качество такого дифференцирования может быть повышено использованием идеи фильтрации, которая в разностных схемах эквивалентна операции усреднения. Именно, пусть дифференцируемый сигнал g_ξ есть аддитивная смесь полезного сигнала g и случайной помехи ξ с нулевым средним, т.е. $M\xi = 0$. Для измерения производной используем N параллельно работающих дифференциаторов D^i (рис. 9.13) вида

$$\hat{g}_\xi^i(t) = \frac{g(t) - g(t-h)}{h} + \frac{\xi^i(t) - \xi^i(t-h)}{h}. \quad (9.9)$$

На рисунке индексом i помечен выход i -го дифференциатора D^i ; наличие индекса у помехи означает, что на входе каждого D^i действует "своя" реализация случайного процесса ξ .

Для получения искомой оценки используем следующую простейшую операцию усреднения:

$$\hat{g}_\xi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{g}_\xi^i(t). \quad (9.10)$$

Тогда из (9.9) и (9.10) получаем

$$\hat{g}_\xi = \hat{g} + \frac{1}{hN} \sum_{i=1}^N \Delta \xi^i(t).$$

Последнее слагаемое при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю при сделанных выше предположениях. При этом, разумеется, для уменьшения регу-

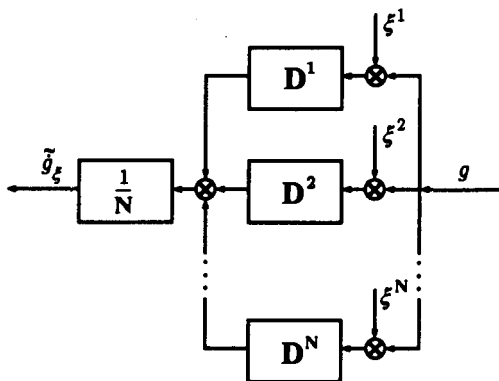


Рис. 9.13

лярной погрешности (которая, напомним, порядка $O(h^2)$) требуется уменьшать h , что ведет к увеличению числа N , а значит, и сложности дифференциатора.

Кроме того, нетрудно заметить, что структурная схема дифференциатора первой разности

$$\tilde{g} = \frac{g(t) - g(t-h)}{h}$$

имеет вид, показанный на рис. 9.14, и содержит звено запаздывания, реализация которого — также непростое дело. Передаточная функция дифференциатора (9.10) находится из рис. 9.14 и дается выраже-

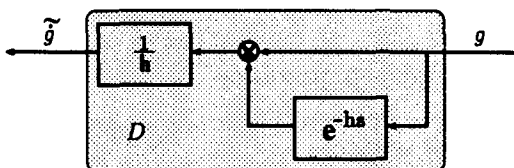


Рис. 9.14

нием $W_D(s) = h/(1 - e^{-hs})$. При малых значениях $|hs|$ справедливо разложение $1 - e^{-hs} = hs - (h^2/2)s^2 + O(|hs|^3)$, поэтому $W_D(s)$ можно приближенно аппроксимировать выражением

$$W_D(s) \cong s - \frac{h}{2}s^2 = s \left(1 - \frac{h}{2}s\right) \cong \frac{s}{1 + (h/2)s}$$

Иными словами, если обозначить $T = h/2$, то передаточная функция такого дифференциатора близка к передаточной функции RC -цепочки $W_D(s) \cong s/(Ts+1)$, следовательно, их свойства также близки. Поэтому не будем повторяться и перейдем к “следящим” дифференциаторам.

9.2. Следящие дифференцирующие системы

Структурный принцип построения дифференциаторов рассматриваемого типа отражает рис. 9.15, на котором F_{out} — выходной фильтр, а R_y — регулятор, стабилизирующий в нуле ошибку слежения $e = g - z$.

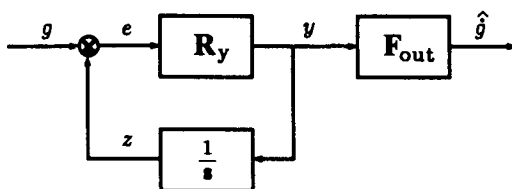


Рис. 9.15

В случае, когда сигналы $g(t)$ и $z(t)$ гладкие, из равенств $e = 0$, $\dot{z} = y$ немедленно получаем требуемое $y = \dot{g}$. Если же $z(t)$ не имеет обычной производной, то с помощью фильтра F_{out} можно сформировать требуемую оценку производной

$$\hat{g} = F_{\text{out}} y.$$

Таким образом, задача дифференцирования может быть сформулирована как задача слежения и возникающие при этом варианты определяются выбором пары $\{R_y, F_{\text{out}}\}$. Рассмотрим некоторые из них.

9.2.1. Линейный дифференциатор

Простейшим следящим дифференциатором можно считать линейный дифференциатор, для которого

$$\{R_y, F_{\text{out}}\} = \{k, 1\}, \quad k = \text{const} > 0.$$

Его структурная схема дифференциатора представлена на рис. 9.16.

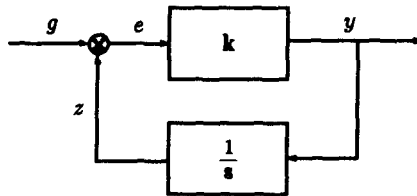


Рис. 9.16

Уравнения дифференциатора имеют вид

$$e = g - z, \quad \dot{z} = y, \quad \hat{g} = y = ke. \quad (9.11)$$

Проанализируем его работу. Уравнение движения относительно ошибки слежения из (9.11) имеет вид

$$\dot{e} = -ke + \dot{g}, \quad t \geq 0,$$

и, следовательно, полная ошибка складывается из двух компонент: свободного $e_c(t) = e(0) e^{-kt}$ и вынужденного

$$e_f(t) = e^{-kt} \int_0^t e^{k\tau} \dot{g}(\tau) d\tau \quad (9.12)$$

движений. Исследуем только $e_f(t)$, так как только эта компонента содержит информацию о производной, тогда как $e_c(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и от \dot{g} не зависит.

Пусть $\dot{g} = \text{const}$, тогда (9.12) легко интегрируется и

$$e_f(t) = \frac{\dot{g}}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Поскольку $y = ke$, то для оценки производной имеем формулу

$$\hat{g} = \dot{y} = k \dot{e} (1 - e^{-kt}).$$

Временные графики оценок при различных k ($k_1 > k_2$) приведены на рис. 9.17. Из графиков видно, что увеличение коэффициента усиления

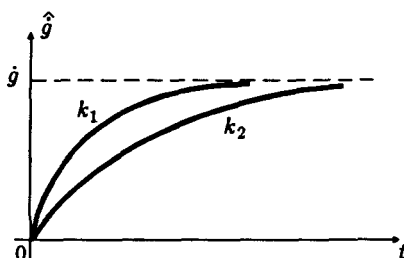


Рис. 9.17

в обратной связи улучшает дифференцирующие свойства этой схемы. При этом, однако, нужно всегда помнить о том, что мы имеем дело с глубокой обратной связью. А именно, нужно при $k \rightarrow \infty$ учитывать влияние ограничений и сингулярных возмущений на прочность системы. Если $\dot{g} \neq \text{const}$, то для уменьшения ошибки слежения также нужно устремлять $k \rightarrow \infty$.

Для анализа последствий, наступающих при сингулярном возмущении, положим, что в схеме на рис. 9.16 вместо чистого интегрирования осуществляется интегрирование с малой временной задержкой $\tau = \text{const} > 0$, т.е. исследуемая ситуация иллюстрируется рис. 9.18.

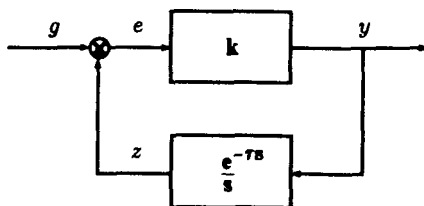


Рис. 9.18

На этом рисунке уравнение в ошибках иное и дается следующей формулой:

$$\dot{e}(t) = -k e(t - \tau) + \dot{g}. \quad (9.13)$$

Теперь вопрос о том, принимать или не принимать во внимание свободную компоненту решения уравнения (9.13), зависит от устойчивости квазиполинома

$$\varphi(s) = s + k e^{-\tau s}.$$

Но при $k \rightarrow \infty$ его нули стремятся к нулям уравнения $e^{-\tau s} = 0$, которое имеет нули в бесконечности правой комплексной полуплоскости переменной s ($\operatorname{Re} s > 0$). Таким образом, исследуемый полином неустойчив, а поэтому неустойчива рассматриваемая дифференцирующая система. Следовательно, устойчивость системы при сингулярном возмущении ограничивает коэффициент обратной связи критическим значением $k \leq k_{\text{кр}}$.

Наличие критического коэффициента усиления определяет и предельно достижимые фазовые искажения при обработке синусоидального сигнала. В самом деле, передаточная функция линейного дифференциатора

$$W_D(s) = \frac{s}{s/k + 1}, \quad (9.14)$$

и, следовательно, минимально достижимая постоянная времени дифференциатора $T = 1/k_{\text{кр}}$, что, как уже указывалось при анализе RC -цепочек, и определяет фазовые искажения. Отметим справедливость сделанных ранее замечаний о свойствах дифференциаторов с передаточными функциями вида (9.14) и в этом случае.

Исследуем теперь влияние амплитудного ограничения на выходе дифференциатора, представленного на рис. 9.19. Уравнения этого

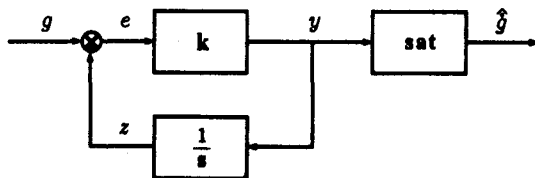


Рис. 9.19

дифференциатора отличаются от уравнений рассмотренного дифференциатора только уравнением выхода

$$\hat{g} = \text{sat}(y),$$

где $\text{sat}(\cdot)$ — функция насыщения. Из схемы на рис. 9.19 видно, что $\hat{g} = \text{sat}(ke)$, но при $k \rightarrow \infty$

$$\text{sat}(ke) = \text{sat}_{1/k}(e) \rightarrow \text{sgn } e.$$

Таким образом, в пределе, при $k \rightarrow \infty$, наличие ограничения приводит к разрывному сигналу (рис. 9.20). Поэтому для получения при-

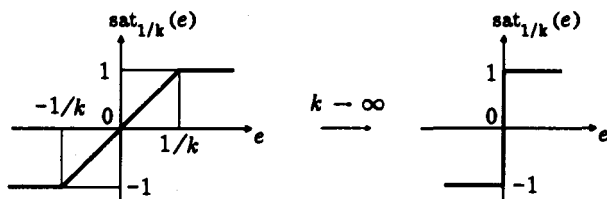


Рис. 9.20

емлемой оценки неизбежно использование выходного фильтра F_{out} , надлежащим образом “усредняющего” разрывной сигнал $\text{sgn } y$ и неизбежно вносящего дополнительные фазовые искажения (рис. 9.21).

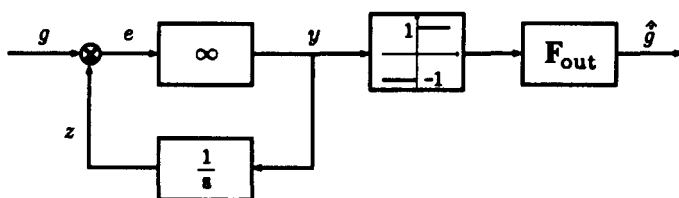


Рис. 9.21

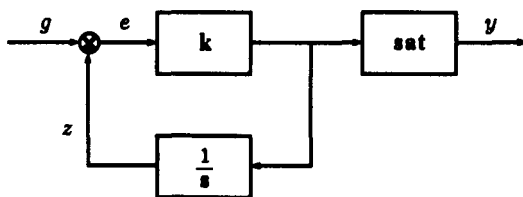


Рис. 9.22

Далее методы усреднения исследуются подробно, здесь же ограничимся замечанием, что к исходным проблемам приводит наличие амплитудного ограничения в замкнутом контуре (рис. 9.22), когда предельный переход $k \rightarrow \infty$ приводит к релейному дифференциатору. К анализу свойств релейного дифференциатора теперь и переходим.

9.2.2. Релейный дифференциатор

Структура релейного дифференциатора, характеризующегося парой

$$\{R_y, F_{out}\} = \left\{ k \operatorname{sgn} e, \frac{1}{\tau s + 1} \right\},$$

изображена на рис. 9.23. За оценку сигнала примем выход системы, т.е. положим $\hat{g} = x$. Для анализа процессов в замкнутом контуре

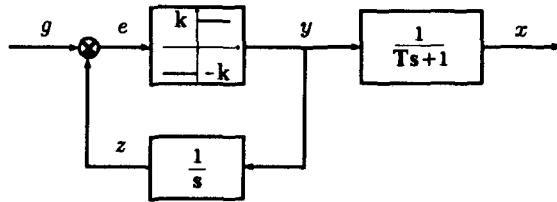


Рис. 9.23

запишем уравнение движения относительно ошибки e :

$$\dot{e} = -k \operatorname{sgn} e + \dot{g}, \quad (9.15)$$

которое легко получается из уравнений дифференциатора

$$\begin{aligned} e &= g - z, & y &= k \operatorname{sgn} e, & k &= \operatorname{const} > 0, \\ \dot{z} &= y, & T\dot{x} + x &= y, & T &= \operatorname{const} > 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Видим, что если $k > |\dot{g}|$, то за конечное время процесс стабилизируется в нуле $e = 0$, где возникает скользящий режим (рис. 9.24).

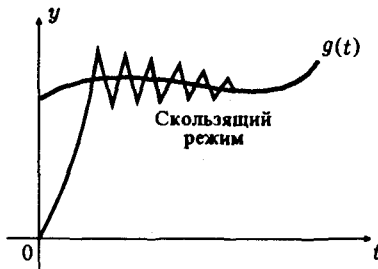


Рис. 9.24

В скользящем режиме среднее значение разрывного сигнала находится из равенств $e = 0$, $\dot{e} = 0$ и дается выражением $k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} e = \dot{g}$. Для выделения этого среднего и нужен выходной фильтр.

Действительно, из (9.16) и (9.15) имеем уравнение фильтра

$$T\dot{x} + x = \dot{g} - \dot{e},$$

вынужденная компонента решения которого дается хорошо известной формулой

$$x_f(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \int_0^t e^{\tau/T} (\dot{g}(\tau) - \dot{e}(\tau)) d\tau. \quad (9.17)$$

Пусть существует и равномерно ограничена вторая производная сигнала g , т.е.

$$|\ddot{g}| \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (9.18)$$

а скользящий режим возник при $t = 0$, тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\tau/T} \dot{e}(\tau) d\tau &= \int_0^t e^{\tau/T} de(\tau) = \\ &= e(\tau) e^{\tau/T} \Big|_0^t - \int_0^t e(\tau) e^{\tau/T} d(\tau/T) = 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Следовательно, (9.17) можно упростить до выражения

$$x_f(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \int_0^t e^{\tau/T} \dot{g} d\tau, \quad (9.20)$$

для дальнейшего преобразования которого вновь воспользуемся интегрированием по частям. В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\tau/T} \dot{g} d(\tau/T) &= \int_0^t \dot{g} de^{\tau/T} = \dot{g} e^{\tau/T} \Big|_0^t - \\ &- \int_0^t e^{\tau/T} \ddot{g} d\tau = \dot{g} e^{\tau/T} - \dot{g}(0) - \int_0^t e^{\tau/T} \ddot{g} d\tau. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Последнее слагаемое в этой формуле оценивается с учетом (9.18) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{\tau/T} \ddot{g} d\tau \right| &\leq \int_0^t e^{\tau/T} |\ddot{g}| d\tau \leq \\ &\leq M \int_0^t e^{\tau/T} d\tau = TM (e^{t/T} - 1). \end{aligned} \quad (9.22)$$

После подстановки (9.21) в (9.20) находим, что

$$x_f(t) = \dot{g}(t) - \dot{g}(0) e^{-t/T} - e^{t/T} \int_0^t e^{\tau/T} \ddot{g} d\tau = \dot{g}(t) + \varepsilon(t). \quad (9.23)$$

Для погрешности дифференцирования $\varepsilon(t)$ из (9.22) и неравенства $|\dot{g}(0)| < k$ имеем оценку

$$|\varepsilon(t)| \leq TM + (k + TM)e^{-t/T}. \quad (9.24)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$|x_f(t) - \dot{g}(t)| \leq TM + (k + TM)e^{-t/T}. \quad (9.25)$$

Для уменьшения регулярной $\{TM\}$ и асимптотически исчезающей $\{(k + TM)e^{-t/T}\}$ компонент погрешности дифференцирования, как видно из (9.25), следует уменьшать постоянную времени T фильтра, и в пределе при $T = 0$ получим абсолютно точное дифференцирование. Но это физически недостижимо, и причина в том, что переключения всегда неидеальны и выбор параметра T должен быть согласован с этими неидеальностями.

Пусть, например, имеется пространственная задержка $\Delta = \text{const}$ в переключениях (рис. 9.25). Тогда для описания дифференциатора с

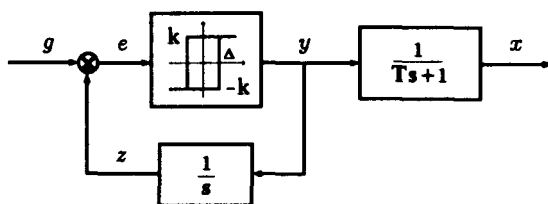


Рис. 9.25

неидеальными переключениями справедливы все уравнения релейного дифференциатора со схемы на рис. 9.23 при замене в них идеального реле на реле с гистерезисом $\text{sgn}_{\Delta} e$, в частности, имеем следующее уравнение в ошибках:

$$\dot{e} = -k \text{sgn}_{\Delta} e + \dot{g}.$$

В окрестности $|e| \leq \Delta$ возникает реальный скользящий режим (рис. 9.26). Справедлива также оценка для погрешности (9.24), вно-

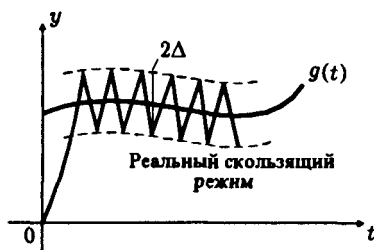


Рис. 9.26

симая динамикой фильтра, однако теперь $|e(t)| \leq \Delta$ и оценка (9.22) не имеет места. Используя выражение из (9.22), находим оценку, пригодную для этого случая. Имеем

$$\left| \int_0^t e^{\tau/T} \dot{e}(\tau) d\tau \right| \leq |e(t)e^{t/T} - e(0)| + O|e(t)|(e^{t/T} - 1) \leq 2\Delta(e^{t/T} - 1).$$

После подстановки найденной оценки, (9.23) и (9.24) в (9.17), устанавливаем справедливость оценки погрешности дифференцирования:

$$|x_f(t) - \dot{g}(t)| \leq TM + \frac{2\Delta}{T} + \left(k + TM + \frac{2\Delta}{T}\right)e^{t/T} \quad (9.26)$$

Теперь видно, что при $T \rightarrow 0$ погрешность не уменьшается, как ожидалось, а напротив, увеличивается.

Точность дифференцирования действительно будет повышаться, если имеет место условие

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta}{T} = 0.$$

С физической точки зрения последнее соотношение означает (9.26), что высокочастотная составляющая сигнала $y(t)$ действительно отфильтрована и выделена только полезная составляющая \dot{g} . Проведенное исследование показало, что

- в релейном дифференциаторе невозможно выбором единственного параметра T одновременно уменьшить погрешности, вносимые динамикой фильтра (TM) и неидеальностями переключений (Δ/T).

Аналогичный результат имеет место и тогда, когда вместо инерционного фильтра на рис. 9.23 используется фильтр "скользящего" среднего, представленный на рис. 9.27. Кроме того, под ограничение

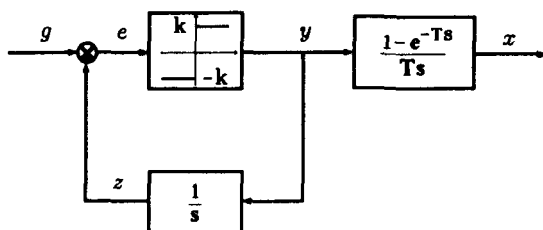


Рис. 9.27

$|\dot{g}| < k$ не попадают экспоненциальные, полиномиальные или высокочастотные гармонические сигналы. Поэтому представляет интерес исследовать возможности, возникающие при использовании регулятора переменной структуры в замкнутом контуре дифференциатора.

9.2.3. Дифференциатор переменной структуры

Структурную схему дифференциатора переменной структуры, которому соответствует пара

$$\{R_y, F_{out}\} = \left\{ \psi(z, e), \frac{1}{Ts+1} \right\},$$

изобразим в стандартном для теории СПС виде (рис. 9.28). Уравнения

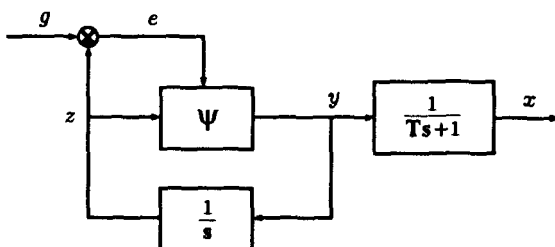


Рис. 9.28

дифференциатора переменной структуры (далее называемого СПС-дифференциатором) имеют вид

$$e = g - z, \quad y = \psi(z, e) = \begin{cases} kz, & ez < 0, \\ -kz, & ez > 0, \end{cases}$$

$$\dot{z} = y, \quad T\dot{x} + x = y, \quad k, T = \text{const} > 0;$$

выход x принимается за оценку производной \hat{g} . Поскольку данную ψ -ячейку можно описать формулой

$$y = \psi(z, e) = k |z| \text{sgn } e,$$

то уравнение движения замкнутого контура дифференциатора имеет следующий вид:

$$\dot{e} = -k |z| \text{sgn } e + \dot{g}.$$

Если знаки $g(0)$ и $z(0)$ совпадают и сигнал $g(t)$ принадлежит классу сигналов Γ , т.е.

$$g(t) \in \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{g \mid |\dot{g}| \leq \gamma |g|, |\ddot{g}| \leq M, M, \gamma = \text{const} > 0\},$$

то при выполнении условия $k > \gamma$ сигнал

$$z(t) = z(0) e^{\pm kt},$$

нарастая (убывая) по экспоненте, за конечное время “догонит” сигнал $g(t)$, и в нуле $z = 0$ возникнет скользящий режим (рис. 9.29).

В скользящем режиме $e = 0$, т.е. $z = g$, среднее значение сигнала y определяется выражением

$$y_{\text{eq}} = \dot{g}$$

и, следовательно, на выходе инерционного фильтра имеем оценку производной $x_f(t)$, подобную установленной в предыдущем пункте. Именно

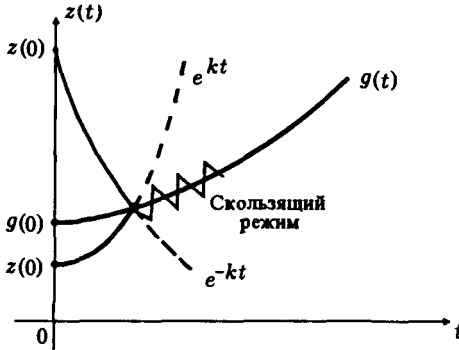


Рис. 9.29

при аналогичном предположении $|\ddot{g}| \leq M$ и при идеальных переключениях справедлива оценка

$$|x_f(t) - \dot{g}(t)| \leq TM + (\gamma |g(0)| + TM) e^{-t/T}.$$

При наличии пространственной задержки $\Delta > 0$ в переключениях имеем реальный скользящий режим (рис. 9.30). Точность дифферен-

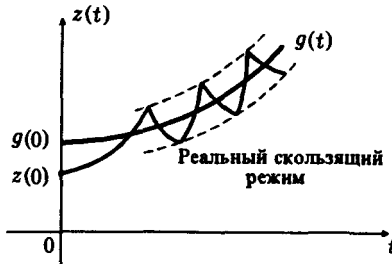


Рис. 9.30

цирования в реальном скользящем режиме характеризуется оценкой

$$|x_f(t) - \dot{g}(t)| \leq TM + \frac{2\Delta}{T} + \left(\gamma |g(0)| + TM + \frac{2\Delta}{T} \right) e^{-t/T}.$$

Несмотря на то что класс допустимых сигналов теперь включает экспоненты, принципиальных изменений не произошло.

- По-прежнему трудно разрешим компромисс между инерционностью фильтра и его фильтрующими свойствами в режиме реального скольжения. Кроме того, при несовпадающих знаках $g(0)$ и $z(0)$ дифференциатор неработоспособен.

Вследствие этого использование его для дифференцирования синусоидальных сигналов неэффективно.

Для преодоления указанных трудностей можно в замкнутом контуре управления применить сочетание релейного (линейного) и СПС-регуляторов. Структурная схема системы приведена на рис. 9.31. В

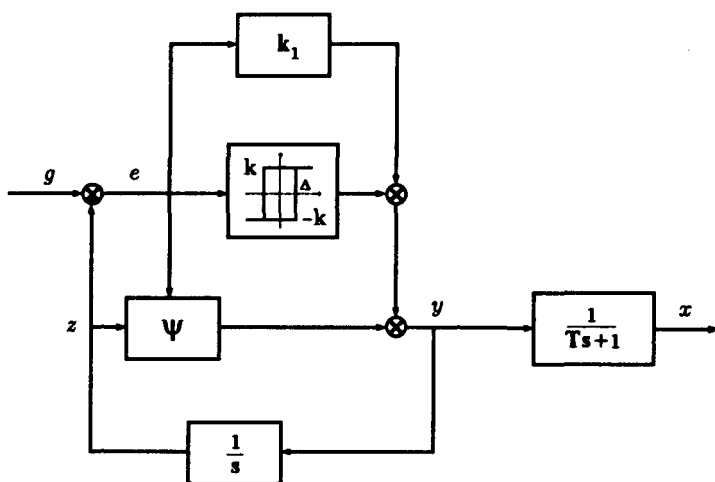


Рис. 9.31

этом случае уравнение замкнутого контура имеет вид

$$\dot{e} = -(k_3 |z| + k_2) \operatorname{sgn} e - k_1 e + \dot{g}$$

и класс дифференцируемых сигналов удовлетворяет условию

$$|\dot{g}| \leq k_2 + k_3 |g|, \quad k_1, k_2, k_3 = \operatorname{const} > 0.$$

Все остальные события разворачиваются описанным выше образом.

Указанные трудности преодолеваются, однако проблема точности дифференцирования остается и для ее разрешения нужны иные схемы. Другие подходы требуются и для реализации повторного дифференцирования, так как производная x разрывна и возникает необходимость в дополнительном фильтре либо ином принципе построения дифференциатора.

9.3. Следящий асимптотический бинарный дифференциатор

Структура бинарного дифференциатора изображена на рис. 9.32, где не определен пока вид КО-регулятора R_μ . Регулятор R_μ должен выбираться так, чтобы при гладкости выходного сигнала y , что устраняет необходимость использования выходного фильтра F_{out} и создает

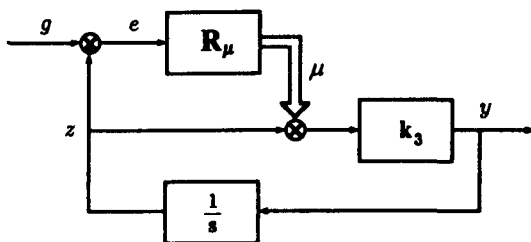


Рис. 9.32

предпосылки для повторного дифференцирования, обеспечить, кроме того, прочность системы дифференцирования.

Уравнения бинарного дифференциатора таковы:

$$e = g - z, \quad \mu = R_\mu e, \quad y = k_3 \mu z, \quad \dot{z} = y. \quad (9.27)$$

Пусть сигнал g удовлетворяет условию $g \in \Gamma$, где

$$\Gamma = \{ g \mid |\dot{g}| \leq \gamma |g|, \quad \gamma = \text{const} > 0 \}.$$

При дальнейшем исследовании удобно использовать О-переменные

$$\xi = e/g, \quad a = \dot{g}/g. \quad (9.28)$$

Теперь стабилизацию ошибки e в нуле можно заменить стабилизацией функции ξ в нуле, при этом a будет выступать в роли равномерно ограниченного возмущения ($|a| \leq \gamma$). При получении уравнения движения замкнутого контура относительно О-ошибки ξ сначала имеем из (9.27) и (9.28)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\dot{e}}{g} - \frac{e\dot{g}}{g^2} = \frac{\dot{g} - y}{g} - \xi \frac{\dot{g}}{g} = (1 - \xi) \frac{\dot{g}}{g} - \frac{k_3 \mu z}{g} \Big|_{z=g-e} = \\ &= (1 - \xi) \frac{\dot{g}}{g} - k_3 \mu (1 - \xi) \end{aligned}$$

или после замены \dot{g}/g из (9.28) получаем искомое уравнение

$$\dot{\xi} = (1 - \xi)(a - k_3 \mu), \quad |a| \leq \gamma. \quad (9.29)$$

Если a — неизвестная функция, то стабилизацию в малом ошибки ξ в нуле гарантирует при $k_3 > \gamma$ разрывной закон

$$\mu = \operatorname{sgn} \xi. \quad (9.30)$$

При идеальных переключениях этот закон приводит к дифференциатору переменной структуры, так как в этом случае

$$\mu = \operatorname{sgn} \frac{e}{g} = \operatorname{sgn} e \operatorname{sgn} g = \operatorname{sgn} e \operatorname{sgn} z$$

и далее

$$y = k_3 z \mu = k_3 |z| \operatorname{sgn} e,$$

а это и есть выход СПС дифференциатора.

При неидеальных переключениях, например, при пространственной задержке Δ , имеем $|\xi| \leq \Delta$ и, значит,

$$|e| \leq \Delta |g|,$$

а не $|e| \leq \Delta$, как в СПС-дифференциаторе. Последнее означает, что

- при дифференцировании малых сигналов рассматриваемый бинарный дифференциатор предпочтительнее СПС-дифференциатора.

Тем не менее релейный КО-регулятор ведет к разрывному выходному сигналу y и, как следствие, к необходимости использования выходного сглаживающего фильтра. Это не соответствует заявленным целям. Поэтому рассмотрим теперь интегрально-релейный КО-закон

$$\dot{\mu} = k_2 \operatorname{sgn} [\xi + \mu |\xi|], \quad (9.31)$$

который вместе с уравнением (9.29) задает подлежащую анализу замкнутую систему.

Поскольку рассматривается стабилизация в малом ($|\xi| \leq \delta$, $\delta \ll 1$), то заменой переменного

$$\varphi = -\ln(1 - \xi) = \xi + o(\xi^2)$$

получаем эквивалентную задачу стабилизации Σ_1^φ -системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a - k_3 \mu, \\ \dot{\mu} &= -k_2 \operatorname{sgn} [\varphi + \mu |\varphi|]. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Но это стандартная система, подробное исследование которой проводилось в КО-теории (глава 4). Опираясь на установленные в КО-теории результаты, заключаем, что Σ^φ -система при $\dot{a} = \operatorname{const}$ диссипативна (рис. 9.33) и, следовательно, такой дифференциатор не дает асимптотически точного дифференцирования. Указанную трудность можно преодолеть двумя путями.

Первый путь состоит в использовании линейного интегрально-релейного КО-регулятора

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1 + \mu_2, \\ \mu_1 &= k_1 \xi, \quad \mu_2 = k_2 \operatorname{sgn} [\xi + \mu_2 |\xi|].\end{aligned}\quad (9.33)$$

Теперь, по описанной выше схеме, получаем уравнения замкнутой Σ_2^{φ} -системы

$$\dot{\varphi} = a - k_3 k_1 \varphi - k_3 \mu_2, \quad (9.34)$$

$$\dot{\mu} = k_2 \operatorname{sgn} [\varphi + \mu_2 |\varphi|]. \quad (9.35)$$

Дифференцируя по t уравнение (9.34) и подставляя в результат $\dot{\mu}_2$ из (9.35), получаем при $|\mu| \leq 1$ уравнение

$$\ddot{\varphi} + k_3 k_1 \dot{\varphi} + k_3 k_2 \operatorname{sgn} \varphi = \dot{a}. \quad (9.36)$$

При $k_3 k_2 > \sup_{t \leq 0} |\dot{a}|$ это уравнение имеет нуль асимптотически устойчивым положением равновесия. Следовательно, О-переменная $\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, значит, исходная ошибка слежения e убывает.

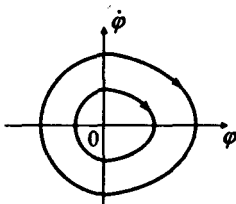


Рис. 9.33

По доказанному выше $e \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, значит, $z \rightarrow g$ при $t \rightarrow \infty$, а поэтому в силу гладкости $\dot{z} \rightarrow \dot{g}$. Но

$$\dot{z} = u = y + k_1 e,$$

откуда и следует требуемое

$$\dot{g}(t) - y(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

На рис. 9.34 изображена структурная схема бинарного дифференциатора с линейным интегрально-релейным законом стабилизации.

Второй путь достижения асимптотической точности дифференцирования основан на использовании инерционно-релейного КО-регулятора (здесь уже проведена замена $\varphi(\xi)$)

$$\dot{\mu} + k_2 \mu = k_2 \operatorname{sgn} \varphi. \quad (9.37)$$

Это уравнение вместе с уравнением О-объекта

$$\dot{\varphi} = a - k_3\mu$$

определяют замкнутую Σ_3^φ -систему.

Структурная схема бинарного дифференциатора с инерционно-релейным регулятором приведена на рис. 9.35. Для анализа устойчиво-

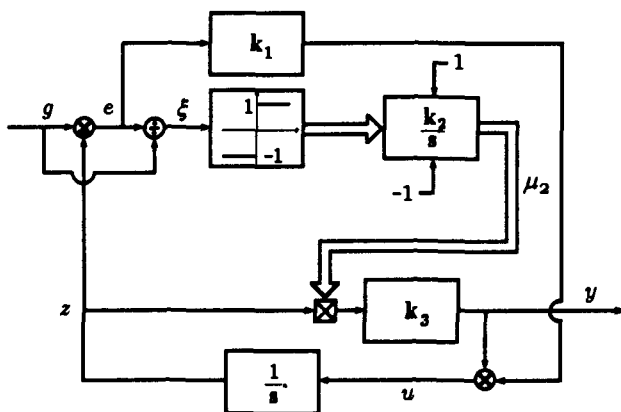


Рис. 9.34

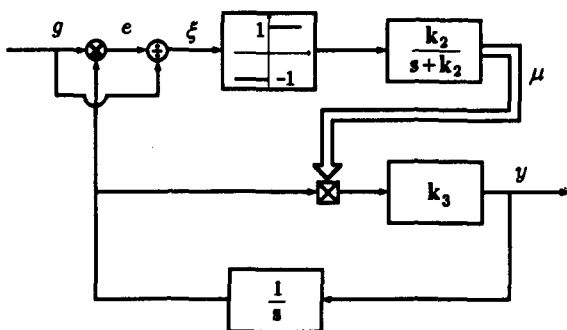


Рис. 9.35

сти замкнутого контура Σ_3^φ -системы продифференцируем по t уравнение $\dot{\xi} = a - k_3\mu$, подставим в него μ из (9.37), а в полученном уравнении

заменим μ выражением $(a - \dot{\xi})/k_3$. В результате получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + k_2 \dot{\xi} + k_3 k_2 \operatorname{sgn} \varphi = \dot{a} + k_2 a. \quad (9.38)$$

Это уравнение нетрудно сделать асимптотически устойчивым в нуле, для чего достаточно обеспечить выполнение условия

$$k_3 k_2 > \sup_{t \geq 0} |\dot{a} + k_2 a|.$$

Таким образом, $\varphi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, значит, данная система также обеспечивает асимптотически точное дифференцирование

$$y(t) - \dot{g}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Перейдем теперь к описанию финитного бинарного дифференциатора.

9.4. Финитный бинарный дифференциатор

Обобщенная структурная схема финитного регулятора ничем не отличается от стандартной схемы бинарного дифференциатора. Специфика его в том, что используется К-регулятор стабилизирующий бинарный КО-регулятор R_μ , гарантирующий возникновение скользящего режима 2-го порядка (рис. 9.36а), т.е. такого режима, когда не только e , но и \dot{e} непрерывна, а претерпевает разрывы только \ddot{e} . С начала такого скольжения, конечно, тождественно выполнены равенства

$$e = 0, \quad \dot{e} = 0,$$

и с этого момента времени $y(t) = \dot{g}(t)$ (рис. 9.36б). В качестве такого алгоритма стабилизации может быть использован любой алгоритм, описанный в главе 5: алгоритм конечного скручивания, оптимальный по времени или дрейфа. За подробностями отсылаем читателя к указанной главе.

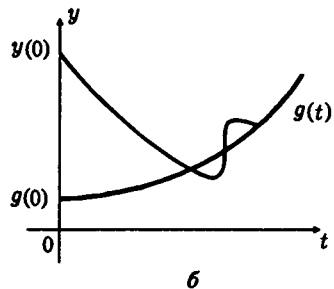
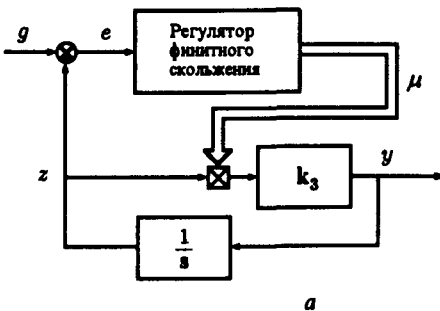


Рис. 9.36

Здесь же в качестве примера опишем принцип построения алгоритма конечного скручивания. Как установлено выше, задача стабилизации замкнутого контура может быть сведена к задаче стабилизации в нуле скалярного объекта

$$\dot{\xi} = a - k_3 \mu, \quad |\alpha| \leq \gamma, \quad \gamma = \text{const}. \quad (9.39)$$

Положим для простоты $a = \text{const}$, и пусть известны знаки переменной φ и ее производной $\dot{\xi}$. Тогда алгоритм

$$\dot{\mu} = -k_1 \text{sgn } \varphi - k_2 \text{sgn } \dot{\xi}, \quad k_1, k_2 = \text{const} > 0 \quad (9.40)$$

финитно стабилизирует объект (9.39) в нуле. В самом деле, из (9.39) и (9.40) имеем уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi} + k_3 k_2 \text{sgn } \dot{\xi} + k_3 k_1 \text{sgn } \varphi = 0,$$

фазовые траектории которого — параболы, определяемые уравнениями

$$\dot{\varphi} = \pm \alpha = \pm k_3 (k_2 + k_1),$$

$$\dot{\varphi} = \pm \beta = \pm k_3 (k_2 - k_1),$$

и если $\alpha > \beta > 0$, то в режиме скручивания фазовая точка за конечное время попадает в нуль.

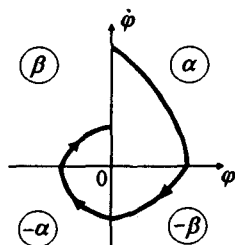


Рис. 9.37

Отметим, что в нуле возникает скользящий режим 2-го порядка. Это означает, что при наличии малой задержки τ в переключении отклонение φ от нуля имеет 2-й порядок малости по τ , т.е. $|\varphi| \sim O(\tau^2)$, а не 1-й порядок ($|\varphi| \sim O(\tau)$), как при обычном скольжении.

9.5. Нестандартные дифференцирующие системы

В следящих дифференцирующих системах (рис. 9.38) выбор оператора К-связи R_y направлялся на обеспечение и поддержание равенства

$$z = g, \quad (9.41)$$

из которого при надлежащей гладкости и получалась оценка производной $y = \dot{z} \cong \dot{g}$.

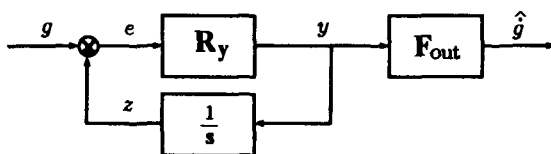


Рис. 9.38

Точное равенство (9.41) удается обеспечить только с помощью глубокой ($k \rightarrow \infty$) или разрывной обратной связи. Во всех случаях оценка производной формировалась из выходного сигнала y К-регулятора R_y . При наличии аддитивной помехи в обрабатываемом сигнале и амплитудного ограничения на входе К-регулятора это снижает помехозащищенность дифференциатора и, как следствие, ухудшает оценку производной.

Кроме того, гарантированное качество дифференцирования в системах с разрывным К-регулятором R_y , как следует из приводившихся выше оценок, заметно ухудшается с ростом амплитуды разрывного (коммутируемого) сигнала. Следовательно, важно изыскать новые средства и методы построения дифференцирующих систем, в которых влияние этих факторов ослаблено. Рассмотрим два новых вида дифференцирующих систем.

9.5.1. Дифференциатор с “малой” амплитудой разрывов

Принцип построения дифференциатора с малой амплитудой разрывов основан на следующей достаточно очевидной идее, которую поясним на примере релейного дифференциатора. Если выделить среднюю составляющую разрывного сигнала на входе интегратора, например, с помощью инерционного звена, а результат прибавить к выходному сигналу релейного регулятора (рис. 9.39), то среднее значение раз-

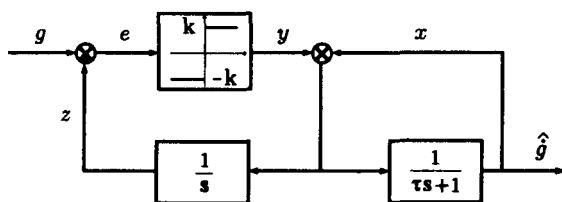


Рис. 9.39

рывного сигнала y в режиме стабилизации, когда $e = 0$, будет равно нулю. Последнее означает, что скольльзящий режим в этом случае может поддерживаться сколь угодно малой величиной коммутируемого сигнала. Формально это следует из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{g} - u, & u &= y + x, \\ \tau \dot{x} + x &= u, & y &= k \operatorname{sgn} e. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Если в точке $e = 0$ возникнет скольльзящий режим, то $\dot{e} = 0$ и эквивалентное значение управления дается выражением

$$u_{\text{eq}} = \dot{g}.$$

Но $\tau \dot{x} + x = u$ и, значит, сигнал $x(t)$ доставляет асимптотическую оценку производной \dot{g} . Следовательно, среднее значение сигнала

$$(y_{\text{eq}} = u_{\text{eq}} - x) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Для более точного исследования данного дифференциатора удобно преобразовать его структурную схему к виду, представленному на

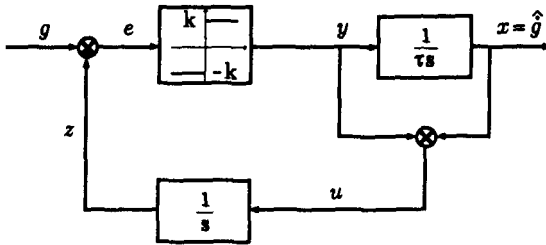


Рис. 9.40

рис. 9.40. Помимо ошибки слежения e введем ошибку дифференцирования

$$\varepsilon = \dot{g} - x \quad (9.43)$$

и запишем уравнения движения дифференциатора в переменных (e, ε) . Из (9.42), (9.43) и рис. 9.40 имеем

$$\bar{\mu} = \ddot{g} - \dot{x} = \ddot{g} - \frac{y}{\tau} = \ddot{g} - \frac{k}{\tau} \operatorname{sgn} e, \quad (9.44)$$

$$\dot{e} = \varepsilon - y = \varepsilon - k \operatorname{sgn} e. \quad (9.45)$$

Для анализа устойчивости нуля системы (9.44), (9.45) используем функцию Ляпунова вида

$$v = (k/\tau) |e| + \varepsilon^2/2.$$

Ее производная в силу системы (9.44), (9.45) при $e \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{k}{\tau} (\operatorname{sgn} e) \dot{e} + \varepsilon \bar{\mu} = \frac{k}{\tau} \operatorname{sgn} e (\varepsilon - k \operatorname{sgn} e) + \\ &+ \varepsilon \left(\ddot{g} - \frac{k}{\tau} \operatorname{sgn} e \right) = e \ddot{g} - \frac{k^2}{\tau}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что если

$$|\ddot{g}| \leq M, \quad M = \text{const}, \quad (9.46)$$

то по крайней мере для начальных условий

$$\varepsilon(0) \leq \frac{k^2}{\tau M} \quad (9.47)$$

через конечное время в точке $e = 0$ возникает скользящий режим. В этом случае эквивалентное значение разрывного сигнала определено равенством

$$k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} e = \varepsilon,$$

после подстановки которого в уравнение (9.44) получаем уравнение изменения ошибки дифференцирования

$$\tau \ddot{\mu} + \varepsilon = \tau \ddot{g}.$$

Если выполняется (9.46), то справедлива следующая оценка погрешности дифференцирования:

$$|\varepsilon(t)| \leq \tau M. \quad (9.48)$$

Из (9.47), (9.48) устанавливаем неравенство, ограничивающее снизу величину разрывов:

$$k > \tau M.$$

Выводы:

- Амплитуда разрывов в идеале может быть сделана сколь угодно малой.
- В реальной схеме постоянного фильтра $\tau \geq \tau_{\text{cr}}$, где τ_{cr} определяется неидеальностями переключений, поэтому амплитуда разрывов не может быть меньше $k_{\text{cr}} \geq \tau_{\text{cr}} M$.
- В рассмотренном дифференциаторе класс допустимых сигналов расширен до сигналов с ограниченной \ddot{g} .

9.5.2. Нестандартный бинарный дифференциатор

Если предыдущий нестандартный дифференциатор основывался на следящей системе, то рассматриваемый ниже дифференциатор базируется на принципиально иной идее. Суть ее проясняет рис. 9.41. Из

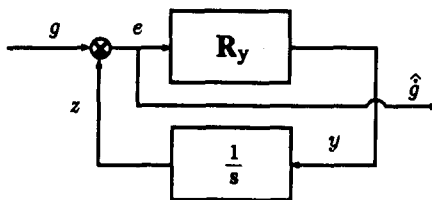


Рис. 9.41

рисунка видно, что в качестве оценки производной сигнала $g(t)$ предлагается использовать ошибку “слежения”

$$e = g - z.$$

Смысл этой идеи можно пояснить следующим образом. В стандартной следящей системе $e = 0$ и выход регулятора R_y совпадает с производной \dot{g} . Если к сигналу $g(t)$ добавляется помеха $q \sin \omega t$, то на выходе регулятора имеем сигнал $\dot{g} + q\omega \cos \omega t$, причем возможно, что $q\omega \gg 1$. Поскольку на выходе регулятора всегда имеются амплитудные ограничения, то они будут постоянно нарушаться и оценка производной искажается. Поэтому возникает идея о “снятии” производной до регулятора, так как в этом случае можно рассчитывать на уменьшение негативного влияния амплитудных ограничений.

Проведем предварительный анализ схемы на рис. 9.41. Ее описывает операторное соотношение

$$e = g - z = g - \frac{R_y}{s} e,$$

где s — символ операции дифференцирования. Следовательно,

$$e = \frac{s}{s + R_y} g. \quad (9.49)$$

Для того чтобы дифференциатор давал сколь угодно малые фазовые и амплитудные искажения, необходимо выполнение равенства

$$e = \frac{s}{\tau s + 1} g \quad (9.50)$$

при назначенной по произволу постоянной времени $\tau = \text{const} > 0$. Из сравнения (9.49) и (9.50) находим требуемое для этого выражение для оператора

$$R_y = (\tau - 1)s + 1. \quad (9.51)$$

Из формулы (9.51) видно, что для решения этой задачи (т.е. задачи дифференцирования) линейными средствами требуется оператор “чистой” производной. Получается порочный круг, разорвать который можно только использованием эффектов, наблюдаемых в нелинейных системах.

Здесь уместно напомнить, что в главе 6 (О-теория) уже возникла сходная ситуация, когда в результате использования трех типов обратной связи (К-, КО- и О-связей) удавалось получать оператор вида (9.51), т.е. оператор, преобразующий ошибку регулирования x_1 во взвешенную сумму ошибки и ее производной:

$$u = (-k/\delta) \sigma = (-k/\delta) (\dot{x}_1 + dx_1)$$

Но $u = \mu x_1$, и из сравнения этих выражений находим, что действие μ эквивалентно действию оператора

$$R_u = (-k/\delta) (s + d).$$

Это означает, что “действие” операторной переменной μ по эффекту эквивалентно “действию” оператора

$$R_y = -\frac{Ts + (c-1)}{q}.$$

Сравнивая это выражение с требуемым

$$R_y = (\tau - 1)s + 1,$$

получаем соотношения для расчета параметров схемы

$$1 - \tau = \frac{T}{q}, \quad 1 = \frac{1 - c}{q}, \quad (9.52)$$

которые нетрудно удовлетворить. В итоге получаем требуемое уравнение

$$\tau \dot{e} + e = \dot{g}.$$

В соответствии с этим выбором структурная схема дифференциатора конкретизируется и принимает вид, показанный на рис. 9.43.

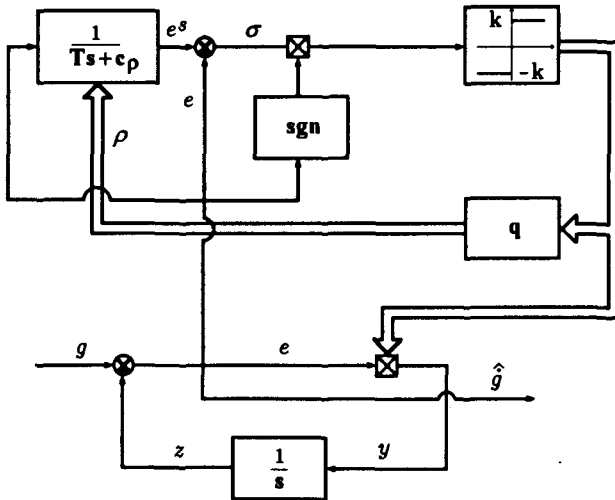


Рис. 9.43

Перейдем к анализу дифференцирующей системы. Указанные последствия наступают только в том случае, если с некоторого момента времени $\sigma \equiv 0$. Для получения условий, гарантирующих этот факт, запишем уравнение изменения ошибки σ .

Поскольку $\sigma = e^s - e$, то имеем сначала

$$\dot{\sigma} = \dot{e}^s - \dot{e}|_{s_0} = \frac{e - (c + q\mu)e^s}{T} - \dot{g} + \mu e.$$

Но $e_s = \sigma + e$, поэтому

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \frac{e - c(\sigma + e)}{T} - \dot{g} + \mu e \left(1 - \frac{q}{T}\right) - \frac{q\mu\sigma}{T} = \\ &= \frac{1-c}{T}e - \frac{c+q\mu}{T}\sigma - \dot{g} + \mu e \left(1 - \frac{q}{T}\right).\end{aligned}\quad (9.53)$$

Из соотношений (9.52) следуют равенства

$$\frac{1-c}{T} = \frac{1}{1-\tau}, \quad \frac{c}{T} = \frac{1-q}{q(1-\tau)}, \quad 1 - \frac{q}{T} = -\frac{\tau}{1-\tau}, \quad \frac{q}{T} = \frac{1}{1-\tau};$$

поэтому (9.53) можно переписать в виде

$$\dot{\sigma} = \frac{e}{1-\tau} - \frac{(1-q+q\mu)\sigma}{q(1-\tau)} - \dot{g} - \mu e \frac{\tau}{1-\tau}.$$

Поскольку $\mu = k \operatorname{sgn}(\sigma e)$, то окончательно получаем уравнение

$$\dot{\sigma} = \frac{e}{1-\tau} - \frac{(1-q+q\mu)\sigma}{q(1-\tau)} - \dot{g} - k|e| \frac{\tau}{1-\tau} \operatorname{sgn} \sigma. \quad (9.54)$$

Заметим теперь, что ничто не препятствует выбору параметра q достаточно малым, например таким что

$$q(k+1) < 1. \quad (9.55)$$

Тогда коэффициент (напомним, что $|\mu| \leq k$)

$$\frac{1-q+q\mu}{q(1-\tau)} > 0.$$

Для того чтобы в точке $\sigma = 0$ существовал скользящий режим, следует позаботиться, как это следует из (9.54), о выполнении неравенства

$$\sigma(e - \dot{g} + \tau\dot{g} - k\tau|e|\operatorname{sgn} \sigma) \leq 0.$$

По крайней мере в малой окрестности точки $\sigma = 0$ это условие выполнено, если

$$|\dot{g}| < k, \quad (9.56)$$

поскольку при этом $e \cong \dot{g}$.

Таким образом, если выполнены соотношения (9.55), (9.56), то при начальных условиях из некоторой окрестности $\sigma = 0$ через конечное время возникает скользящий режим, поддерживающий требуемое равенство $\sigma = 0$. Вследствие этого наступают описанные ранее благоприятные последствия, а именно:

- использование разрывной стабилизирующей обратной связи не влечет необходимости использования в данном случае “сглаживающего” выходного фильтра, что является обязательным в других разрывных дифференцирующих системах, однако для получения старших производных такие “сглаживающие” фильтры могут потребоваться.
- ограничения на класс дифференцируемых сигналов

$$|\dot{g}| \leq \text{const}, \quad |\ddot{g}| \leq \text{const}$$

могут быть ослаблены до

$$|\dot{g}| \leq \text{const},$$

если воспользоваться сочетанием идей, положенных в основу построения рассмотренных нестандартных дифференцирующих систем (рис. 9.44).

Прием позволяет уменьшить амплитуду коммутируемого сигнала. Подробности опускаем.

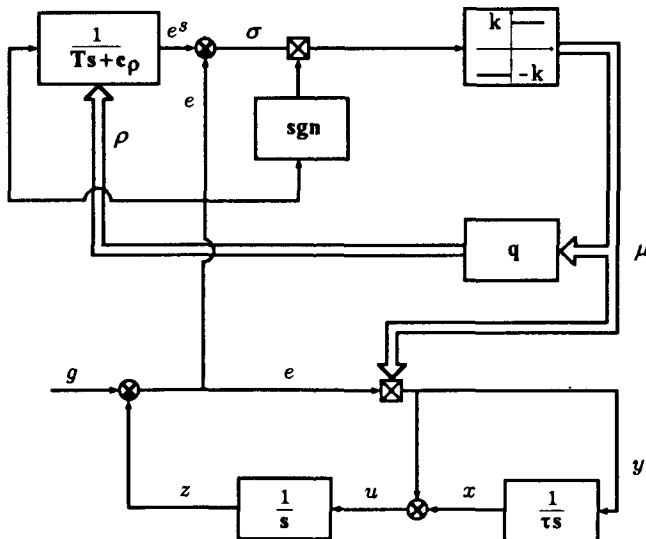


Рис. 9.44

В завершение темы приведем результаты дискретного моделирования нестандартного бинарного дифференциатора.

9.5.3. Результаты дискретного моделирования нестандартного бинарного дифференциатора

Дифференцируемый сигнал $g(t) = \sin t + \varepsilon \sin(1000t)$ содержит полезный сигнал $\sin t$ и помеху $\varepsilon \sin(1000t)$. Параметры в схеме дифференциатора, изображенного на рис. 9.43, выбраны следующим образом:

$$T = 1/20, \quad q = 1/19,8, \quad c = 0,95, \quad k = 1.$$

При этих значения $\tau = 0,01$. Разностная схема построена методом Эйлера с шагом $h = 0,001$. Результаты моделирования приведены на рисунках.

На рис. 9.45 приведены графики оценок первой производной при наличии шума, полученных в рамках классической схемы при помощи линейного дифференциатора с передаточной функцией

$$W(s) = -\frac{s}{\tau s + 1}.$$

На рис. 9.45а,в представлены результаты дифференцирования сигнала с уровнем помехи $\varepsilon \sim 10^{-2}$, а на рис. 9.45б,г даны графики, полу-

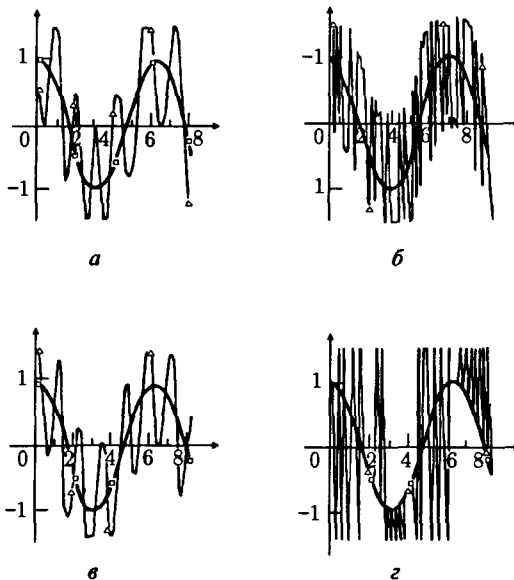


Рис. 9.45

ченные в результате дифференцирования того же сигнала с уровнем помехи $\varepsilon \sim 10^{-1}$.

На рис. 9.46 приведены результаты дифференцирования в рамках неклассической схемы дифференцирования при помощи нестандартного бинарного дифференциатора. Представлены графики оце-

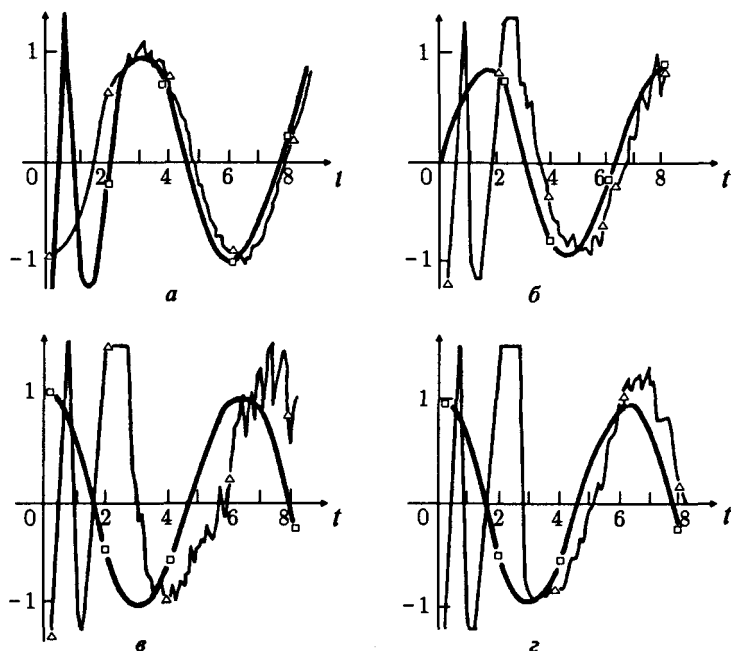


Рис. 9.46

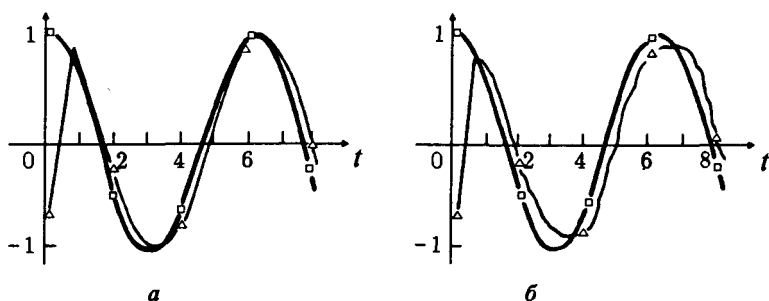


Рис. 9.47

нок второй, третьей, четвертой и пятой производных соответственно, при последовательном дифференцировании без помех ($\epsilon = 0$).

На рис. 9.47 приведены графики оценок первой производной при наличии шума, полученные при последовательном дифференцировании нестандартным бинарным дифференциатором с уровнем помехи

$\epsilon \sim 10^{-2}$. Графики оценок первой производной при наличии шума, полученные при последовательном дифференцировании нестандартным бинарным дифференциатором с уровнем помехи $\epsilon \sim 10^{-1}$, приведены на рис. 9.48.

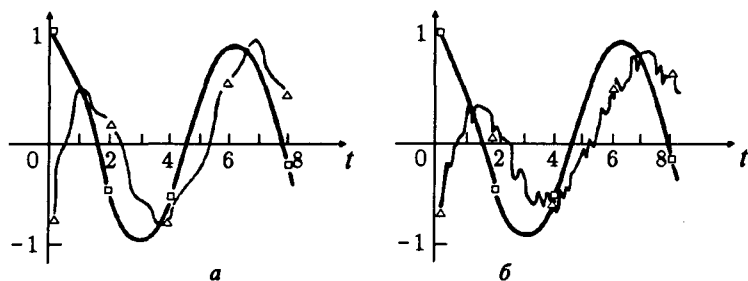


Рис. 9.48

На рисунках 9.45–9.48 квадратами обозначены производные, а треугольниками — оценки производных.

Глава 10

Субоптимальная стабилизация неопределенного объекта

Рассмотрим случаи, когда задача оптимальной стабилизации неопределенного объекта решается точно или приближенно. Подход к решению базируется на сочетании идей оптимальной стабилизации, асимптотической инвариантности и теории бинарного управления. Инвариантность поля экстремалей к факторам неопределенности служит несущим элементом развиваемой конструкции. При этом от факторов неопределенности зависит лишь оптимальная обратная связь. Для ее приближенной реализации используются новые типы обратной связи и методы бинарного управления. Проводится сравнение предлагаемого подхода с известными методами: усреднения, гарантированного результата, глубокой обратной связи и т.п.

10.1. Постановка задачи оптимальной стабилизации

Оформление оптимальной стабилизации в самостоятельное направление теории оптимального управления в детерминированной постановке уходит своими корнями к трудам А.А. Летова, Р. Беллмана, А.А. Красовского и в стохастической постановке — к трудам Р. Калмана. В результате многолетних усилий была создана теория АКОР (аналитического конструирования оптимальных регуляторов).

Центральное место в теории АКОР занимает проблема синтеза оптимальной обратной связи, стабилизирующей детерминированный или стохастический объект в условиях, когда имеется полная информация о его поведении и характеристиках внешних сил. В реальных условиях информация об объекте и действующих на него возмущениях всегда неполна, а так как оптимальное решение, как правило, весьма чувствительно к вариациям условий задачи, то рекомендации этой теории могут быть взяты только за основу и редко используются на практике.

Возможности теории АКОР несколько расширяются при сочетании ее методов с методами адаптивного управления. Внутренние ограничения теории адаптивного управления не могли привести к универсальным методам оптимальной стабилизации при неопределенности, и потому рассматриваемая проблема сохраняет актуальность. Требуется новый взгляд на проблему оптимального управления при неопределенности. В частности, представляет интерес выделение тех

ситуаций, в которых возможно получить оптимальное или сколь угодно близкое к оптимальному (субоптимальное) решение задачи стабилизации при значительной неопределенности в описании объекта управления или внешних сил. Здесь и далее под значительной неопределенностью понимается наличие информации лишь о мажорантах функций, описывающих возмущения, и, быть может, о каналах их воздействия на объект.

В этом разделе ограничимся рассмотрением задач оптимальной стабилизации в следующей постановке: для конечномерного объекта

$$\dot{x} = f(t, x, u, a), \quad t \geq t_0,$$

содержащего компактную неопределенность

$$a \in A,$$

требуется синтезировать реализуемую оптимальную обратную связь по состоянию, переводящую объект из любого начального положения x_0 в наперед заданное состояние x_1 к моменту времени $t_1 > t_0$, удерживающую объект в положении x_1 при всех $t > t_1$ и минимизирующую функционал

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u, a) dt.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}$ — управление. Функции f , F таковы, что гарантируется существование оптимальной обратной связи для каждого $a \in A$. Суть рассматриваемой проблемы заключается в том, что возмущение a точно не известно и не может быть идентифицировано. Необходимо описать класс объектов и функционалов, для которых сформулированная постановка задачи оптимальной стабилизации допускает физически осмысленное решение. Положительный ответ на этот круг вопросов и составляет главное содержание раздела.

Кратко суть предлагаемого подхода можно пояснить следующим образом. Пусть возмущение a известно. Тогда функция

$$u_{\text{opt}}(t, x, a) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} J(a)$$

определяет оптимальную обратную связь, и уравнение поля экстремалей принимает вид

$$\dot{x}_{\text{opt}} = f_{\text{opt}}(t, x_{\text{opt}}) = f(t, x_{\text{opt}}, u(t, x_{\text{opt}}, a), a).$$

Первая очевидная возможность реализации оптимальной системы имеет место тогда, когда u_{opt} не зависит от возмущения a . Вторая возможность менее тривиальна и возникает тогда, когда поле экстремалей не зависит от возмущения a . В этом случае, конечно, u_{opt} зависит от возмущения и не может быть реализовано точно. Испол-

зование новых типов обратной связи и методов теории бинарного управления дает возможность сколь угодно точного приближения к оптимальному закону управления. Общему рассмотрению проблемы предположим иллюстративный пример, демонстрирующий особенности развиваемого подхода.

10.2. Пример задачи оптимальной стабилизации при неопределенности

Рассмотрим для простоты скалярный объект

$$\dot{x} = ax + u, \quad t \geq 0,$$

с неизвестным параметром a , удовлетворяющим ограничению

$$|a| \leq A,$$

где A — известная константа. Оптимальная обратная связь должна переводить объект из произвольного состояния $x_0 \in \mathbb{R}$ в нуль за бесконечное время, доставляя минимум квадратичному функционалу “полной энергии”

$$J(a) = \int_0^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{x}^2 \right) dt.$$

Здесь γ — известный положительный параметр. Следуя традиции, при расчете u_{opt} используем функцию Беллмана

$$v(t) = \int_t^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{x}^2 \right) d\tau, \quad t \geq 0.$$

В соответствии с принципом оптимальности функция $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Беллмана

$$\min_u \left\{ \frac{dv}{dt} + x^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{x}^2 \right\} = 0.$$

Полагая $v = kx^2/2$, находим выражение для оптимального управления в следующем виде:

$$u_{\text{opt}} = -ax - \frac{\gamma^2 k}{2} x.$$

Подстановка последнего в уравнение Беллмана позволяет определить параметр функции Беллмана

$$k = 2/\gamma,$$

и вместе с ним — окончательный вид оптимальной обратной связи

$$u_{\text{opt}} = -(\gamma + a)x.$$

Поле экстремалей в этой задаче порождается дифференциальным уравнением, не зависящим от параметра a :

$$\dot{x}_{\text{opt}} + \gamma x_{\text{opt}} = 0,$$

а минимальное значение функционала $J(a)$ также не зависит от a и определяется равенством

$$J_{\text{opt}} = \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

Реализация найденной обратной связи, разумеется, невозможна, поэтому следует изыскать способы ее приближенной реализации. Рассмотрим те из них, которые основаны на устранении неопределенности в рассматриваемой задаче еще на начальной стадии. Первая возможность, которую мы рассмотрим, связана с идеей усреднения и предполагает наличие информации о плотности распределения параметра a .

10.3. Оптимальная стабилизация "в среднем"

Пусть для определенности плотность распределения параметра a равномерна на отрезке $[-A, A]$, т.е.

$$p(a) = \frac{1}{2A}.$$

Тогда минимизации подлежит среднее значение функционала

$$\bar{J}(A) = \int_{-A}^A p(a) J(a) da,$$

и в соответствии с этим нужно рассматривать усредненную функцию Беллмана

$$\bar{v} = \int_{-A}^A v(t) p(a) da,$$

если, конечно, для синтеза обратной связи используется принцип оптимальности Беллмана. В таком случае уравнение оптимальности имеет вид

$$\min_u \left\{ \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{x}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \bar{x}^2 \right\} = 0.$$

Если положить $\bar{v} = \bar{k}x^2/2$ и провести усреднение, то уравнение оптимальности примет вид

$$\min_u \left\{ \frac{A^2 x^2}{3\gamma^2} + \bar{k}xu + \frac{u^2}{\gamma^2} \right\} = 0.$$

Все величины в предыдущем уравнении известны, т.е. ситуация полностью определена, и, следовательно, его можно решить. Сначала находим, что

$$u_{\text{opt}} = -\frac{\gamma^2 \bar{k}}{2} x.$$

Далее подставляем найденное выражение в уравнение оптимальности и определяем параметр усредненной функции Беллмана

$$\bar{k} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{A^2}{3\gamma^2}}.$$

Тогда окончательный вид оптимальной обратной связи определяется выражением

$$u_{\text{opt}} = -\sqrt{\gamma^2 + \frac{A^2}{3}} x,$$

поле экстремалей подчинено дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_{\text{opt}} + \left(\sqrt{\gamma^2 + \frac{A^2}{3}} - a \right) x_{\text{opt}} = 0,$$

а минимальное значение усредненного функционала задается формулой

$$\bar{J}_{\text{opt}} = \sqrt{1 + \frac{A^2}{3\gamma^2}} \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

Итак, в методе усреднения оптимальная обратная связь детерминирована, поле экстремалей зависит от неопределенного параметра, а оптимальное значение функционала \bar{J}_{opt} превосходит минимально возможное значение J_{opt} , так как

$$\Delta \bar{J} = \bar{J}_{\text{opt}} - J_{\text{opt}} = \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{3\gamma^2}} - 1 \right) \frac{x_0^2}{\gamma} > 0.$$

Это неравенство и определяет потери в оптимальности при стабилизации “в среднем”.

10.4. Минимаксная оптимальная стабилизация

Если информация о плотности распределения отсутствует, то сведения рассматриваемой задачи с неопределенностью к задаче без неопределенности возможно с помощью идеи гарантированного результата, когда минимизации подлежит “наихудшее” значение функционала. Формально эта процедура сводится к известной проблеме минимакса и поиску седловой точки. Сохраним приверженность принципу оптимальности Беллмана и для определения функции Беллмана

$v = kx^2/2$ воспользуемся уравнением дифференциального минимакса

$$\min_u \max_{a \in A} \left\{ kx(ax + u) + \frac{1}{\gamma^2}(ax + u)^2 + x^2 \right\} = 0.$$

Непосредственный анализ выражения в скобках позволяет установить, что его максимум по $a \in A$ достигается при

$$a^* = A \operatorname{sgn} \left(\frac{\gamma^2 k}{2} x^2 + ux \right).$$

Поэтому выбор оптимальной обратной связи надлежит проводить теперь на основе минимизации полностью определенной функции, т.е.

$$\min_u \left\{ \left(1 + \frac{A^2}{\gamma^2} \right) x^2 + A \left| kx^2 + \frac{2xu}{\gamma^2} \right| + \frac{u^2}{\gamma^2} + kxu \right\} = 0.$$

Отсюда находим оптимальную обратную связь в виде

$$u_{\text{opt}} = -\frac{\gamma^2 k}{2} x,$$

где коэффициент функции Беллмана

$$k = \frac{2}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{A^2}{\gamma^2}},$$

т.е. оптимальная по принципу минимакса обратная связь линейна и дается выражением

$$u_{\text{opt}} = -\sqrt{\gamma^2 + A^2} x.$$

Поле экстремалей описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_{\text{opt}} + \left(\sqrt{\gamma^2 + A^2} - a \right) x_{\text{opt}} = 0,$$

а минимаксное значение функционала дается выражением

$$J_{\text{opt}}^M = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{A^2}{\gamma^2}} x_0^2.$$

Абсолютные потери в оптимальности при таком подходе к синтезу обратной связи определяются равенством

$$\Delta J^M = J_{\text{opt}}^M - J_{\text{opt}} = \sqrt{1 + \frac{A^2}{\gamma^2}} \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

10.5. Стабилизация с использованием эталонной модели и глубокой обратной связи по ошибке

Хорошо известно, что глубокая обратная связь является эффективным средством подавления возмущений. Прямое ее использование в рассматриваемой задаче, однако, ничего не дает. Поэтому прежде всего обратим внимание на то, что поле экстремалей не зависит от фактора неопределенности и, следовательно, соответствующее дифференциальное уравнение можно принять за уравнение эталонной модели. Тогда глубокая обратная связь может быть введена по сигналу ошибки

$$e = x - x_{\text{opt}}$$

и использована для ее обнуления, в соответствии со схемой рис. 10.1. Пусть, например, глубокая обратная связь линейна и реализуется уве-

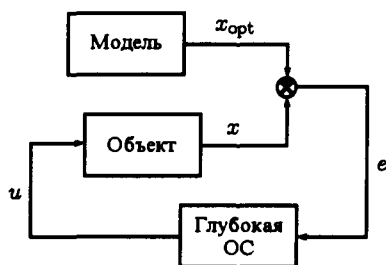


Рис. 10.1

личением коэффициента усиления $k > 0$ до бесконечности, т.е.

$$u = -ke, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда уравнение системы в отклонениях имеет вид

$$\dot{e} = -(\gamma + k)e + (a + \gamma)x.$$

При $k \rightarrow \infty$ ошибка уменьшается до нуля и поведение замкнутой системы ничем не отличается от оптимального.

Формально найденное решение полностью исчерпывает рассматриваемую проблему, так как потери в оптимальности равны нулю. Но если интересоваться решением, имеющим прагматический смысл, то приходится учитывать наличие физических ограничений и исследовать грубость такой оптимальной системы по отношению к регулярным и сингулярным возмущениям.

Хорошо известно, что системы с большим коэффициентом усиления в обратной связи негрубы по отношению к сингулярным возмущениям, и потому запрещено использовать коэффициенты усиления, превосходящие некоторое критическое значение $k_{\text{кр}}$. Но если $k < k_{\text{кр}}$,

то ошибка $e \neq 0$ и возникают потери в оптимальности, для оценки которых запишем уравнение в отклонениях

$$\dot{e} = -k_\gamma e + a_\gamma x,$$

где $k_\gamma = k + \gamma$, $a_\gamma = a + \gamma$. Поскольку $e(0) = 0$, то для всех $t > 0$ верна оценка

$$|e| \leq \frac{A_\gamma}{k_\gamma} |x|, \quad A_\gamma = A + \gamma.$$

Из этого соотношения и следующего очевидного неравенства

$$|x| \leq |x_{\text{opt}}| + |e|$$

при достаточно большом значении k (т.е. $k > A$) следует необходимая для дальнейшего оценка

$$|x| \leq m |x_{\text{opt}}|, \quad \bar{m} = \frac{k_\gamma}{k - A}.$$

Интегрант функционала задачи

$$F = x^2 + \frac{1}{\gamma^2} (ax - ke)^2$$

оценивается неравенством

$$F \leq Mx^2, \quad M = 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left(A + \frac{kA_\gamma}{k_\gamma} \right)^2.$$

Поскольку на экстремали интегрант определен равенством

$$F_{\text{opt}} = 2x_{\text{opt}}^2,$$

то при $t > 0$ имеет место неравенство

$$F \leq \frac{m^2 M}{2} F_{\text{opt}},$$

и потому абсолютные потери в оптимальности удовлетворяют неравенству

$$\Delta F^k = J_{\text{opt}}^k - J_{\text{opt}} \leq \left(\frac{m^2 M}{2} - 1 \right) \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

Разумеется, эта оценка завышена. Для получения более “деликатного” результата следует ввести в рассмотрение функцию $\xi(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = -(k_\gamma + a)\xi + k\xi^2 + a_\gamma,$$

отвечающее тривиальному начальному условию $\xi(0) = 0$.

Теперь ошибка e определяется равенством $e = \xi x$, а интегрант функционала удовлетворяет оценке

$$F = x^2 \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} (a - k_\gamma)^2 \right] \leq M_\xi x^2,$$

где

$$M_\xi = \max_{\xi} \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} (a - k_\gamma)^2 \right].$$

Если $m_\xi^2 = \max_{\xi} [1/(1-\xi)^2]$, то окончательная оценка абсолютных потерь имеет установленный выше вид, но с более “точными” константами:

$$\Delta J^{k,\xi} = J_{\text{opt}}^{k,\xi} - J_{\text{opt}} \leq \left(\frac{m_\xi^2 M_\xi}{2} - 1 \right) \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

Эта оценка примечательна тем, что при $k \rightarrow \infty$ она убывает до нуля. Заметим, что это свойство не выполнено для предыдущей оценки.

Таким образом, увеличение коэффициента усиления в обратной связи повышает качество системы управления, но только до определенного предела, зависящего от критического коэффициента усиления k_{cr} . При этом, конечно, по-прежнему актуален вопрос о существовании иных методов, уменьшающих потери в оптимальности или устраняющих их вовсе. Если $a = \text{const}$, то некоторые надежды можно связать с идеями идентификации и адаптации. Процесс идентификации параметра вызывает потери в оптимальности, сопоставимые с потерями предыдущих методов, и, следовательно, не приводит к качественно новому результату. Ограничивает возможности этого подхода и тот факт, что параметр a должен быть фиксирован.

10.6. Стабилизация методами теории бинарного управления

Для методов теории бинарного управления характерно принципиально отличное, например, от метода большого коэффициента усиления использование независимости поля экстремалей задачи от фактора неопределенности.

Если при стандартной обратной связи сначала определяется закон управления и затем выясняется влияние его параметров на качество решения задачи, то при бинарном управлении форма обратной связи не фиксируется, а определяется автоматически с помощью нового типа обратной связи по ошибке.

Задачей нового контура обратной связи является обеспечение совпадения качественного поведения объекта управления и некоторого динамического звена (задатчика динамических свойств), определяющего такое поведение. Обратная связь при этом, конечно, нелинейна.

Схема системы управления, в которой реализуется эта идея, показана в обобщенном виде на рис. 10.2, на котором P — объект, S_y и S_x — основной и вспомогательный задатчики с выходными зада-

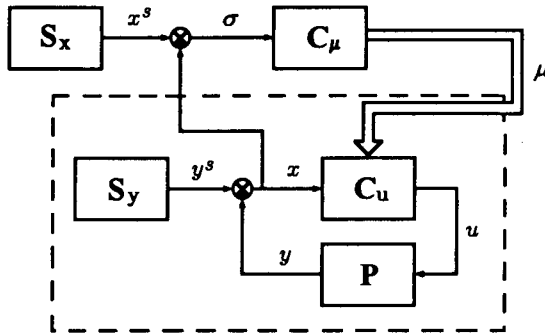


Рис. 10.2

ющими воздействиями y^S и x^S соответственно, C_u и C_μ — операторы основной и бинарной обратной связи, x и σ — ошибки регулирования основного и координатно-операторного контура обратной связи, u и μ — координатный и операторный сигналы управления. В этой структуре выбору подлежат оператор C_μ и бинарная операция в C_u , при которых обнуляется ошибка координатно-операторного контура обратной связи σ .

Конкретно для рассматриваемой задачи эта схема принимает вид, представленный на рис. 10.3. Структура системы управления на этом рисунке для удобства и простоты отражает тот выбор оператора C_u

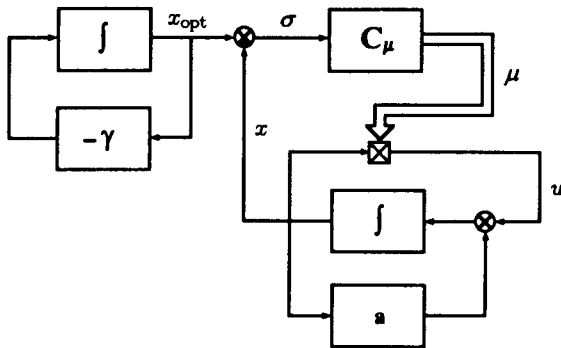


Рис. 10.3

и бинарной операции, при котором

$$u = \mu x.$$

В такой бинарной системе управления выбору подлежит только оператор C_μ из условий оптимальности всей системы, что имело бы место тогда, когда ошибка $\sigma \equiv 0$. Уравнение движения относительно этой ошибки имеет вид

$$\dot{\sigma} = -\gamma\sigma - a_\gamma x - \mu x, \quad \sigma(0) = 0,$$

и проблема состоит в “правильном” задании алгоритма изменения операторной переменной μ . Рассмотрим имеющиеся для этого возможности.

10.6.1. Система переменной структуры

В классической теории систем переменной структуры используется разрывная обратная связь, обеспечивающая скользящий режим на поверхности разрыва. В нашем случае эта идея приводит к использованию релейной координатно-операторной обратной связи

$$\mu = k \operatorname{sgn}(\sigma x), \quad k = \operatorname{const} > 0.$$

В результате при выполнении неравенства

$$k > A_\gamma$$

в замкнутой системе управления, описываемой уравнением

$$\dot{\sigma} = -\gamma\sigma - a_\gamma x - k|x|\operatorname{sgn} \sigma,$$

на “поверхности” разрыва $\sigma = 0$ возникает скользящий режим, и с начального момента (так как $\sigma(0) = 0$) уравнения движения системы управления неотличимы от уравнения движения оптимальной системы при любом a . Но следует ли отсюда, что свойства такой системы управления инвариантны и по отношению к параметру a ?

Для измерения качества системы управления естественно использовать функционал задачи

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{x}^2 \right) dt.$$

Если действовать формально и не обращать внимания на разрывность \dot{x} , то для подсчета функционала J в интегрант вместо

$$\dot{x} = ax + k|x|\operatorname{sgn} \sigma$$

следует подставить

$$\dot{x} = ax + k|x|\operatorname{sgn} \sigma_{\text{eq}}.$$

Но $k|x| \operatorname{sgn} \sigma_{\text{eq}} = -a_\gamma x$, поэтому $\dot{x} = -\gamma x$, а значит, оптимальное значение функционала, найденное таким образом, инвариантно к параметру a .

Если же действовать более аккуратно, то можно заметить, что

$$\dot{x} = a^2 x^2 + 2a k x |x| \operatorname{sgn} \sigma_{\text{eq}} + k^2 x^2 = (k^2 - a^2 - 2a\gamma) x^2,$$

и если $a = \text{const}$, то оптимальное значение функционала зависит от параметра a и дается выражением

$$J_{\text{vss}}^{\text{opt}}(a) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} (k^2 - a^2 - 2a\gamma) \right] \frac{x_0^2}{\gamma}.$$

Следовательно, при использовании методов классической теории систем переменной структуры в рассматриваемой задаче минимум функционала не фиксирован и определяется конкретным значением параметра a . В этом смысле рассматриваемая задача оптимального управления методами СПС не решается. Причина состоит в том, что интегрант функционала нелинеен по разрывному управлению. В связи с этим представляют интерес методы оптимальной стабилизации, обеспечивающие движение по экстремали непрерывным управлением.

10.6.2. Бинарная стабилизация с интегральной КО-связью

Движение, сколь угодно близкое к оптимальному, можно обеспечить непрерывным бинарным управлением с интегральной КО-связью

$$\dot{\mu} = \alpha \operatorname{sgn} \left\{ \left[\sigma + \frac{M}{k} |\sigma| \right] x \right\},$$

где $\alpha = \text{const} > 0$ — достаточно большое число, $k > A_\gamma$, как и ранее.

Для того чтобы убедиться в этом, проведем замену переменного $\sigma = \xi x$ и тогда получим уравнение движения

$$\dot{\xi} = -(1 + \xi)(a_\gamma + \mu), \quad \dot{\mu} = \alpha \operatorname{sgn} \left[\xi + \frac{M}{k} |\xi| \right].$$

Поскольку $\mu \rightarrow \mu_{\text{eq}} = k \operatorname{sgn}_{\text{eq}} \xi$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и процесс $\xi(t)$ стабилизируется в нуле, то нетрудно понять, что при конечном, но достаточно большом α процесс $\xi(t)$ будет стабилизирован в некоторой окрестности нуля

$$|\xi| \leq \delta_1$$

с константой $\delta_1 = \delta_1(\alpha)$ такой, что $\delta_1(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Пусть $\eta = \mu - \mu_{\text{eq}}$. Тогда из предыдущего следует, что

$$|\eta| \leq \delta_2,$$

где константа $\delta_2 = \delta_2(\alpha)$ и $\delta_2(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. В этих обозначениях для интегранта функционала задачи F справедлива оценка

$$F = x^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{x}^2 = x^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma + \eta}{\gamma} \right)^2 \right] \leq \frac{\gamma^2 + (\gamma^2 + \delta_2)^2}{2\gamma^2(1 - \delta_1)^2} 2x_{\text{opt}}^2$$

и, следовательно, для оптимального значения функционала J_{opt}^B справедливо неравенство

$$J_{\text{opt}}^B \leq \frac{\gamma^2 + (\gamma^2 + \delta_2)^2}{2\gamma^2(1 - \delta_1)^2} \frac{x_0^2}{\gamma},$$

из которого следует, что $J_{\text{opt}}^B \rightarrow x_0^2/\gamma$ при $\alpha \rightarrow \infty$, и теперь уместно говорить о субоптимальной стабилизации в классе бинарных обратных связей. Поскольку бинарные системы грубы по отношению к регулярным и сингулярным возмущениям, то построенная субоптимальная система управления также груба, и этим она выгодно отличается от систем стабилизации с большим коэффициентом усиления.

10.6.3. Стабилизация с использованием скользящего режима 2-го порядка

При субоптимальной бинарной стабилизации $x(t) \neq x_{\text{opt}}(t)$. Однако точное равенство $x(t) = x_{\text{opt}}(t)$ все же можно обеспечить непрерывным управлением с конечного момента времени t_* , если прибегнуть к скользящему режиму 2-го порядка. Вновь рассмотрим бинарную систему управления в координатах (ξ, μ) :

$$\dot{\xi} = -(1 + \xi)(a_\gamma + \mu).$$

Тогда при $0 < \rho < 1/2$ и достаточно больших константах α и λ алгоритм управления вида $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где

$$\dot{\mu}_1 = \alpha \operatorname{sgn} \left(\xi + \frac{M}{k} |\xi| \right), \quad \mu_2 = \lambda |\xi|^\rho \operatorname{sgn} \xi,$$

обеспечивает стабилизацию ξ в нуле за конечное время t_* , которое может быть сделано сколь угодно малым, если $\xi(0) = 0$. Потери на поиск при этом определяются равенством

$$\Delta J^S = J_{\text{opt}}^S - J_{\text{opt}} = \int_0^{t_*} (F - F_{\text{opt}}) dt,$$

и, следовательно, скользящие режимы 2-го порядка также открывают возможность субоптимального управления неопределенным объектом.

Если ввести индекс субоптимальности (относительные потери в оптимальности) по формуле

$$I = \frac{\Delta J}{J_{\text{opt}}},$$

то можно наглядно продемонстрировать достоинства того или иного из рассмотренных методов стабилизации (рис. 10.4). На этом рисунке

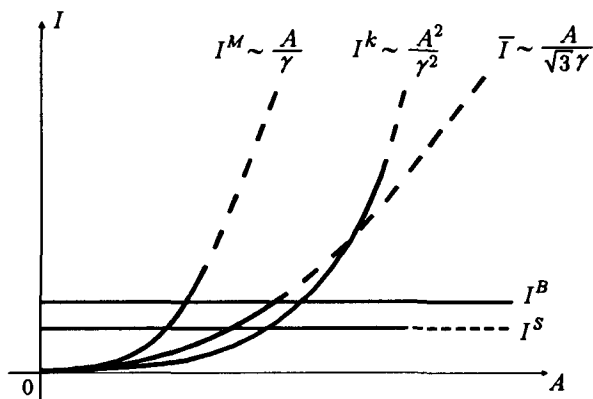


Рис. 10.4

$I^S < I^B$, так как при одних и тех же значениях коэффициентов α и k потери в оптимальности меньше для скользящего режима 2-го порядка. Знаком “ \sim ” обозначена степень роста индекса субоптимальности при увеличении “степени” неопределенности.

Перейдем теперь к рассмотрению общей теории, следуя при этом работам [29, 30, 43].

10.7. Сведение проблемы субоптимальной стабилизации к проблеме асимптотической инвариантности

Обобщением изложенных выше результатов служит подход к субоптимальной стабилизации, основанный на сведении исходной задачи к проблеме асимптотической инвариантности. Теория асимптотической инвариантности является универсальным инструментом решения различных задач управления в условиях неопределенности, и такой переход позволяет расширить область применимости уже рассмотренных идей и подходов.

10.7.1. Основные понятия теории асимптотической инвариантности

Пусть A — компактное множество и пара функций $\{\hat{x}, u_{\text{opt}}\}$ для каждого элемента $a \in A$ минимизирует функционал в форме Лагранжа

$$J(u, a) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u, a) dt + l(x_0, x_1)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = f(t, x, u, a), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Пусть, кроме того, оптимальное значение функционала не зависит от элемента $a \in A$, т.е.

$$J(u_{\text{opt}}, a) = J(u_{\text{opt}}) \quad \text{для любого } a \in A.$$

Здесь и далее $x \in \mathbf{R}^n$, u — скалярное управление. Предполагается, что функции f , L , l и классы A и \mathcal{U} таковы, что решение задачи оптимизации существует. Из сделанного предположения следует, что оптимальное управление зависит от a , т.е. $u_{\text{opt}} = u_{\text{opt}}(t, x, a)$, и его реализация, если возмущение a неизвестно, невозможна. Поэтому уместен вопрос о приближении оптимального управления u_{opt} в классе допустимых обратных связей. Для оценки качества такого приближения используем индекс субоптимальности (относительные потери в оптимальности)

$$I(u, a) = \frac{J(u, a) - J(u_{\text{opt}})}{J(u_{\text{opt}})}.$$

Понятие о качестве приближения вводится следующим определением: если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая допустимая обратная связь $u \in \mathcal{U}$, что $\sup_{a \in A} I(u, a) \leq \varepsilon$, то замкнутая система субоптимальна в классе управлений \mathcal{U} .

Понятие субоптимальной системы стабилизации можно связать с понятием асимптотической инвариантности.

Пусть ε и γ — произвольные положительные числа. Для некоторой функции $h(t, x)$ введем обозначения:

$$h_{u, a} = h(t, x(t; t_0, x_0, u, a)), \quad \sigma_u = h_{u, a_1} - h_{u, a_2}.$$

Динамическую систему $\dot{x} = f(t, x, u, a)$ назовем (ε, γ) -экспоненциально h -инвариантной относительно возмущений $a \in A$ в классе управлений \mathcal{U} , если найдется обратная связь $u \in \mathcal{U}$ и положительная при всех $x \neq 0$ функция $p(x)$ ($p(0) = 0$) такие, что при любых элементах $a_1, a_2 \in A$ и каждого $x_0 \in \mathbf{R}^n$

$$|\sigma_u| \leq \varepsilon p(x_0) e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Связь между субоптимальностью и экспоненциальной инвариантностью раскрывает следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть при некоторых положительных числах γ , q_1 , q_2 , q_3 и произвольном $\varepsilon > 0$ выполнены предположения:

- 1) динамическая система $\dot{x} = f(t, x, u, a)$ является $(\varepsilon q_1, \gamma)$ -экспоненциально L -инвариантной относительно возмущений $a \in A$ в классе управлений U ;
- 2) при любом управлении $u \in U$ существует элемент $a_* \in A$ такой, что

$$I(u, a_*) \leq \varepsilon q_2;$$

- 3) при любых $u \in U$, $a \in A$

$$|l(x_0, x(t_1; t_0, x_0, u, a)) - l(x_0, x(t_1; t_0, x_0, u, a_*))| \leq \varepsilon q_3.$$

Тогда динамическая система $\dot{x} = f(t, x, u, a)$ субоптимальна в классе U относительно лагранжиана L и существует такая реализуемая обратная связь u_* , что

$$I(u^*, a) \leq \varepsilon \left(q_2 + \frac{q_1 p(x_0) + q_3 \gamma}{\gamma J(u_{\text{opt}})} \right).$$

В приведенном утверждении указаны условия, при которых проблема субоптимизации сводится к проблеме экспоненциальной инвариантности. Для последней разработаны конструктивные методы синтеза обратной связи, благодаря чему ее решение существенно упрощается. В теории асимптотической инвариантности используются универсальные достаточные условия экспоненциальной инвариантности, являющиеся единой основой для получения законов управления, решающих конкретно поставленную задачу. Эти достаточные условия могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Положим $\eta(t) = \varepsilon p(x_0) e^{-\gamma(t-t_0)}$ ($\gamma > 0$), и пусть существуют такие константа $q > 0$ и непрерывная положительная функция $v(t) = v(t, x_0) > 0$, что:

- 1) $v(t)$ дифференцируема по t , когда $v(t) \geq \eta(t)$;
- 2) $v(t_0) < \eta(t_0)$;
- 3) при некотором $u \in U$ выполнено условие

$$\dot{v} + \gamma v \Big|_{v(t) \geq \eta(t)} \leq 0;$$

- 4) $|\sigma_u(t)| \leq q v(t, x(t))$ при всех $t \geq t_0$, $a \in A$.

Тогда равномерно по t и $a \in A$

$$|\sigma_u(t)| \leq \varepsilon q p(x_0) e^{-\gamma(t-t_0)},$$

т.е. при $h = L$ имеет место (ε, γ) -экспоненциальная L -инвариантность.

Покажем, как сформулированные выше достаточные условия экспоненциальной инвариантности используются в конкретных ситуациях, на примере субоптимальной линейно-квадратичной стабилизации неопределенной системы.

10.7.2. Субоптимальная линейно-квадратичная стабилизация

Для линейного объекта и квадратичного функционала предложенную выше схему синтеза субоптимального управления можно довести до конца. Действительно, рассмотрим в \mathbb{R}^n при $t \geq 0$ линейный стационарный управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + b(u + a), \quad x(0) = x_0,$$

где $a \in A$ — неизвестное возмущение, такое что

$$|a| \leq a_1|x|, \quad |\dot{a}| \leq a_2|x|.$$

Здесь константы a_1, a_2 известны. Требуется построить реализуемую обратную связь, минимизирующую функционал “полной” энергии

$$J = \int_0^{\infty} L(t) dt, \quad L = x^T \tilde{P} x + \dot{x}^T \tilde{Q} \dot{x}, \quad \tilde{P} > 0, \quad \tilde{Q} > 0.$$

Используя обозначения,

$$P = \tilde{P} + (A - bd^T)^T \tilde{Q} (A - bd^T), \quad Q = b^T \tilde{Q} b, \quad d = \frac{A^T \tilde{Q} b}{b^T \tilde{Q} b},$$

$$v = u + d^T x + a, \quad A_d = A - bd^T, \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

функционал и уравнение связи преобразуем к виду

$$J = \int_0^{\infty} (x^T P x + Q v^2) dt,$$

$$\dot{x} = A_d x + bv.$$

Оптимальное решение преобразованной задачи известно и дается выражением

$$v_{\text{opt}} = -\hat{k}x,$$

где $\hat{k} = Q^{-1}b^T R$, а R — решение уравнения Риккати

$$P - RbQ^{-1}b^T R + RA_d + a_d R = 0.$$

При этом поле экстремалей задачи описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}} = (A_d - b\hat{k})\hat{x},$$

а оптимальное значение функционала находится по формуле

$$J_{\text{opt}} = x_0^T R x_0.$$

Для того чтобы получить оптимальную систему стабилизации, необходимо реализовать обратную связь

$$u_{\text{opt}} = -kx - a, \quad k = \hat{k} + d^T,$$

что, разумеется, невозможно. Вместо этой нереализуемой обратной связи используем обратную связь вида

$$u = -kx + u_\epsilon,$$

где для генерации компоненты u_ϵ воспользуемся методами бинарного управления и изложенными выше принципами субоптимального управления и экспоненциальной инвариантности.

Пусть в схеме на рис. 10.2 динамический задатчик S_x определен уравнением поля экстремалей задачи

$$\dot{x}^S = A_k x^S, \quad x^S(0) = x_0, \quad A_k = A - bk.$$

Известно, что спектр $\sigma(A_k)$ матрицы A_k расположен в левой открытой комплексной полуплоскости, т.е. существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda \in \sigma(A_k)$ выполнено условие $\text{Re } \lambda \leq -\gamma_0$. Следовательно, при некотором $N > 1$

$$\|e^{A_k t}\| \leq N e^{-\gamma_0 t}.$$

В качестве $h_{u,a}$ возьмем функцию

$$L = x^T P x + Q(u_\epsilon + a)^2.$$

При помощи достаточных условий экспоненциальной инвариантности, сформулированных в предыдущем разделе, находим, что управляемая система будет экспоненциально L -инвариантна в рассматриваемом классе обратных связей, если существует обратная связь u_a такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| L(t) - \hat{x}^T(t) (P + \hat{k}^T Q \hat{k}) \hat{x}(t) \right| = 0.$$

Положим

$$u_\epsilon = -k_0 \|x\| \mu, \quad \dot{\mu} = -\alpha \text{sgn} [\sigma + \mu|\sigma|],$$

где k_0 и α — положительные параметры, а функция σ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\sigma} + l\sigma = a - k_0 \|x\| \mu \quad \dot{\mu} = -\alpha \text{sgn} [\sigma + \mu|\sigma|], \quad |\mu(t_0)| \leq 1.$$

Здесь l — произвольно назначаемое положительное число. Очевидно, что функция $\sigma(t)$ нам также неизвестна, но если пока отвлечься от

этого обстоятельства, то ясно, что надлежащим выбором k_0 , α не сложно обеспечить выполнение следующих неравенств:

$$|\sigma| \leq \varepsilon \|x_0\| e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad |\dot{\sigma}| \leq \varepsilon q_1 \|x_0\| e^{-\gamma t}, \quad t \geq \hat{t},$$

$$\text{Var} \Big|_0^{\hat{k}} \sigma \leq \varepsilon \|x_0\|, \quad \sup_{[0, \hat{t}]} |\dot{\sigma}| \leq q_2 \|x_0\|,$$

при некоторых положительных константах ε , q_1 , q_2 и γ .

Из этих неравенств и уравнения

$$\dot{x} = A_k x + b(\dot{\sigma} + l\sigma)$$

следует асимптотическая инвариантность системы, а вместе с ней и ее субоптимальность. Таким образом, все свелось к оценке функции $\sigma(t)$, и для этого годится асимптотический наблюдатель вида

$$\dot{\hat{\sigma}} = c^T x - \xi,$$

$$\dot{\xi} = c^T A_k x + l(c^T x - \xi),$$

где $c^T b = 1$. Нетрудно установить, что ошибка оценивания $e = \sigma - \hat{\sigma}$ удовлетворяет уравнению $\dot{e} + l e = 0$ и, следовательно, функция $\hat{\sigma}$ экспоненциально (с произвольно назначаемым показателем l) сходится к функции σ . Отсюда следует, что свойство субоптимальности сохранится, если вместо σ в обратной связи использовать ее оценку $\hat{\sigma}$, т.е.

$$u = -kx - k_0 \|x\| \mu,$$

$$\dot{\mu} = -\alpha \text{sgn} [\hat{\sigma} + \mu |\hat{\sigma}|], \quad |\mu(0)| \leq 1.$$

Таким образом, использование методов асимптотической инвариантности для оптимальной стабилизации при неопределенности позволяет синтезировать обратные связи, робастно стабилизирующие неопределенные объекты с качеством, сколь угодно близким к оптимальному. Решение задач оптимального управления в рамках теории асимптотической инвариантности (ввиду универсальности последней) позволяет расширить классы неопределенных объектов, подлежащих оптимизации.

В общем случае, задача оптимальной стабилизации в условиях неопределенности не решается классическими методами, но их сочетание с теорией новых типов обратной связи и идеей асимптотической инвариантности позволяет решать задачу для достаточно широкого класса неопределенных объектов. Этот факт и подтверждается в настоящей главе. Развитие и обобщение этих положений дается в работах, ссылки на которые даны на стр. 133.

Заключение

Обратная связь “пронизывает” окружающую нас действительность: она служит ключевым элементом биологической эволюции и естественного отбора; она обеспечивает регуляторный механизм в равновесных системах, в частности в природных экосистемах, и является необходимым элементом работоспособных экономических конструкций; наконец, она составляет основу саморегулирующихся и самоподдерживающихся биосистем. Этот список легко продолжить. Но до сих пор мы очень мало знаем о механизме обратной связи, так как фактически он никогда не являлся самостоятельным объектом исследования. И на то есть причины.

Действительно, идея обратной связи почти очевидна, легко воспринимается и в простых ситуациях ее применение не вызывает проблем. Однако синтез обратной связи в нестандартной ситуации, как правило, дается нелегко и требует нешаблонных решений. Это обусловлено отсутствием теории, объясняющей механизмы формирования обратной связи. Как правило, эти механизмы ускользают от исследователя, поскольку они довольно сложны. Здесь ситуация аналогична ситуации с другими законами естествознания. В свое время физик Ричард Фейнман сказал о законе тяготения: “Закон действует сложно, но его коренная идея проста. Это обстоятельство роднит все наши законы” [89].

Справедливости ради следует заметить, что регулярные попытки изучения обратной связи предпринимаются и в теории автоматического управления, и в бионике, и в экономических теориях. Однако в этих дисциплинах почти всегда упор делается на использование обратной связи, а не на механизм ее формирования. Это естественно, ибо, по мнению Энона, предметная наука вырабатывает правила решения задачи, но не способы выбора этих правил.

Отсутствие правил второго уровня принуждает нас к необходимости угадывания закона обратной связи всякий раз, когда мы имеем дело с нестандартной задачей, но новые идеи и принципы придумать очень трудно, ибо для этого требуется богатое воображение. Недаром в истории теории управления зафиксировано совсем немного подобных откровений. В результате теория управления содержит, по

сути дела, протоколы решения стандартных задач, тогда как желательно иметь правила синтеза, распространяемые на новые ситуации.

В монографии впервые предпринята попытка развития гипотезы о структуре механизма формирования обратной связи. Эта гипотеза базируется на "иерархии" сложности обратной связи. Подобное представление о структуре обратной связи кажется вполне естественным, ибо позволяет свести проблему синтеза сложного нелинейного регулятора к решению последовательности однотипных и хорошо изученных задач. Иначе говоря, видимая сложность проблемы рекуррентно порождается невидимой внутренней простотой.

Для реализации принципа иерархии потребовалось введение нового для теории управления понятия сигнала-оператора. Этот термин отражает двойственную природу сигналов в нелинейных динамических системах. В сочетании с принципом обратной связи сигнал-оператор предоставляет необходимые возможности для перехода от непосредственного решения задачи к нахождению сначала алгоритма решения задачи, а если потребуется, то и к алгоритму, определяющему алгоритм решения задачи, и т.д. Получаемая таким образом "иерархическая структура" обратной связи примечательна еще и тем, что на каждом иерархическом уровне управляющие механизмы просты, однотипны и могут быть получены стандартными для классической теории регулирования способами.

Обратим внимание читателя на то, что идея о двойственной природе переменных величин обычна для естествознания и весьма плодотворна. Так, например, Макс Борн ввел понятие оператора физической величины, которое оказалось очень продуктивным в квантовой механике, имеющей дело с объектами дуальными в первооснове, а понятие оператора-времени, введенное Ильей Пригожиным, оказалось очень полезным в физике необратимых процессов.

Авторы уверены, что появление принципа бинарности и новых типов обратных связей довольно естественно для современного этапа развития общей теории обратной связи. Для обоснования этого тезиса авторы подробно рассмотрели эволюцию важнейших принципов и методов теории регулирования по мере роста факторов неопределенности в задачах управления, что представляет самостоятельный интерес и может служить кратким введением в классическую теорию обратной связи.

Заметим также, что с математической точки зрения предложенный подход можно рассматривать как способ синтеза нелинейных динамических систем с заранее предписанными свойствами их решений, такими, например, как устойчивость, малая чувствительность по отношению к вариациям параметров задачи и т.п. Разумеется, приме-

нение предложенного принципа не ограничивается задачами стабилизации, фильтрации или оптимизации. Уже сегодня известны и другие его применения, в частности для:

- разделения близких сигналов неизвестной частоты за конечное время, тогда как линейные схемы разделения требуют, вообще говоря, бесконечно большого времени;
- робастного решения обратных задач динамики, имеющих отношение к проблемам синтеза эталонных траекторий и динамической обработке результатов измерений;
- решения задач стабилизации при неопределенности и поиска седловых положений равновесия.

Суммируя, можно сказать, что в монографии предложен иерархический принцип формирования обратной связи, основанный на дуальной природе переменных нелинейной системы и наделяющий систему автоматического управления элементами совершенного поведения в сложных неопределенных условиях. Возможно, существуют и другие механизмы синтеза сложной обратной связи, но достоинство предложенного механизма состоит в том, что он методически прост, позволяет обойтись без использования больших коэффициентов усиления или разрывных элементов управления. Напротив, нужное поведение системы автоматического управления достигается при ограниченных коэффициентах передачи и гладких сигналах управления, что особенно важно, ибо в природных системах управления совершенство регуляторных механизмов достигается именно при этих условиях.

Список литературы

1. Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 452 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностран. лит., 1960. 400 с.
5. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 118 с.
6. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972. 767 с.
7. Божуков В.М., Кузнецов В.И., Левитин В.Ф., Шумилов Б.Ф. Релейные системы автоматического управления для объектов с большими диапазонами изменения динамических характеристик // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. №6. С. 154–163.
8. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
9. Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
10. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
11. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Ч. I. Линейные системы регулирования одной величины. М.;Л.: Энергия, 1965. 396 с.
12. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Ч. II. Специальные линейные и нелинейные системы автоматического регулирования одной величины. М.;Л.: Энергия, 1966. 372 с.
13. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия. 1876.
14. Гелис А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
15. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 336 с.
16. Теория систем с переменной структурой /Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.
17. Емельянов С.В. Бинарные системы автоматического управления. М.: МНИИПУ, 1984. 313 с.

18. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Применение принципа регулирования по отклонению для расширения множества типов обратных связей // ДАН СССР. Т. 258. 1981. №5. С. 1070–1074.
19. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Расширение множества типов обратных связей и их применение при построении замкнутых динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5. С. 173–183.
20. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Теория нелинейной обратной связи при неопределенности // Университеты России. МГУ. Т.1. Математическое моделирование. 1993. С. 214–278.
21. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратных связей. Синтез нелинейного управления в условиях неопределенности // Юбилейный сб. трудов ОИВТиА РАН. Т.1. 1993. С. 115–137.
22. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // ДАН СССР. Т. 287. 1986. №6. С. 1338–1342.
23. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы второго порядка при управлении неопределенными системами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. №1. С. 112–118.
24. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Математическое моделирование. Т.2. 1990. №3. С. 89–100.
25. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левант А.* Скользящие режимы высших порядков в управляемых системах // Дифференциальные уравнения. Т. 29. 1993. №11. С. 1877–1899.
26. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г.* Метод квазирасщепления и его применение для синтеза систем автоматического управления // ДАН СССР. Т. 286. 1986. №2. С. 311–315.
27. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г.* Структурные преобразования и пространственная декомпозиция дискретных регулируемых систем — метод квазирасщепления // Техническая кибернетика. 1986. №6. С. 118–128.
28. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Нерсисян А.Л.* Бинарные алгоритмы управления одним классом неопределенных динамических систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. Т. 25. 1989. №10. С. 1670–1679.
29. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Носов А.П.* Асимптотическая инвариантность в задачах управления неопределенными объектами // ДАН СССР. Т. 311. 1990. №1. С. 44–49.
30. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Носов А.П.* Асимптотическая инвариантность и робастная стабилизация зредитарных систем непрерывным управлением // ДАН СССР. Т. 311. 1990. №2. С. 296–300.
31. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Носов А.П.* Асимптотическая инвариантность систем управления с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. Т. 27. 1991. №3. С. 415–427.

32. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Нерсисян А.Л.* Об асимптотических свойствах наблюдателей состояния для неопределенных систем с выделенной стационарной линейной частью // ДАН СССР. Т. 311. 1990. №4. С. 807–811.
33. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Нерсисян А.Л.* Стабилизация неопределенных нейтральных объектов регулятором переменной структуры // ДАН СССР. Т. 312. 1990. №4. С. 801–806.
34. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Нерсисян А.Л., Нисензон Ю.Е.* Стабилизация неопределенных систем по выходу разрывным управлением // ДАН СССР. Т. 311. 1990. №3. С. 544–549.
35. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Нерсисян А.Л., Нисензон Ю.Е.* Стабилизация многомерных неопределенных объектов по выходу // ДАН СССР. Т. 311. 1990. №5. С. 1062–1067.
36. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Нерсисян А.Л., Нисензон Ю.Е.* Асимптотические наблюдатели для класса нелинейных динамических объектов // ДАН СССР. Т. 313. 1990. №5. С. 1052–1056.
37. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Сизиков В.И.* О синтезе нелинейного управления свободным движением нестационарных систем // ДАН СССР. Т. 265. 1982. №2. С. 297–301.
38. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Сизиков В.И.* Принципы построения и общие методы синтеза бинарных систем управления неопределенными нелинейными объектами // ДАН СССР. Т. 281. 1985. №4. С. 810–814.
39. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Уланов Б.В.* О синтезе систем управления с применением координатно-параметрической и параметрической обратных связей // ДАН СССР. Т. 266. 1982. №5. С. 1077–1081.
40. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Уланов Б.В.* Управление нестационарными динамическими системами с применением координатно-параметрической обратной связи // Техническая кибернетика. 1982. №6. С. 201–212.
41. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Уланов Б.В.* Управление линейными стационарными объектами при внешних воздействиях с применением обратных связей различных типов // Техническая кибернетика. 1984. №1. С. 174–182.
42. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Уланов Б.В.* Об управлении нестационарными динамическими системами // Дифференциальные уравнения. Т. 20. 1984. №10. С. 1683–1691.
43. *Коровин С.К., Мамедов И.Г., Носов А.П.* Субоптимальность асимптотически инвариантных систем управления // Дифференциальные уравнения. Т. 28. 1992. №11. С. 1932–1945.
44. *Коровин С.К., Мамедов И.Г., Носов А.П.* Стабилизация неопределенных систем на кольцах // Университеты России. МГУ. Т.1. Математическое моделирование. 1993. С. 279–295.
45. *Коровин С.К., Нерсисян А.Л., Нисензон Ю.Е.* Управление по выходу линейными неопределенными объектами // Техническая кибернетика. 1990. №1. С. 67–73.
46. *Красовский А.А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Физматгиз, 1963. 468 с.

47. Красовский А.А. Система автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 568 с.
48. Красовский А.А., Буков В.П., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. 271 с.
49. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматизации и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
50. Красовский Н.Н. Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С. 179-244.
51. Красовский Н.Н. Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
52. Кулебакин В.С. Теория инвариантности автоматически регулируемых и управляемых систем // Труды I конгресса ИФАК по автоматическому управлению. Т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 247-255.
53. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. №4. С. 436-441; №5. С. 561-568; №6. С. 661-665; 1961. №4. С. 425-435; 1962. №11. С. 1405-1413.
54. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966. 176 с.
55. Ли Я., Вандервельде У. Теория нелинейных самонастраивающихся систем // Самонастраивающиеся автоматические системы. М.: Наука, 1964.
56. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
57. Мееров М.В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. 423 с.
58. Мизайлов А.В. Метод гармонического анализа в теории регулирования // Автоматика и телемеханика. 1938. №3.
59. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
60. Павлов А.А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966. 392 с.
61. Петров Б.Н. О применении условий инвариантности // Труды II Всесоюзного совещ. по теории автоматического регулирования. Т.2. М.,Л.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 241-246.
62. Петров Б.Н., Рутковский В.Р., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972. 260 с.
63. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
64. Основы автоматического управления /Под ред. В.С. Пугачева М.: Наука, 1968. 680 с.
65. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

66. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
67. *Уланов Г.М.* Статистические и информационные вопросы управления по возмущению. М.: Энергия, 1970. 256 с.
68. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
69. *Фельдбаум А.А.* Проблемы самонастраивающихся систем // Самонастраивающиеся системы. М.: Наука, 1963. С. 5–22.
70. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 623 с.
71. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. Т. 5. 1960. №1. С. 99–128.
72. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
73. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
74. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 399 с.
75. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 575 с.
76. *Чаки Ф.* Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Мир, 1975. 424 с.
77. *Black H.* Stabilized feedback amplifiers // Bell Syst. Tech. J. 1934. V. 13. P. 1–18.
78. *Bode H.* Network Analysis and Feedback Amplifier Design. New York: Van Nostrand, 1945.
79. *Emelyanov S.V., Korovin S.K.* Development of feedback types and their application to design of closed-loop dynamic systems // Problems of Control and Inform. Theory. Hungarian Acad. of Sci. V. 10. 1981. №3. P. 161–174.
80. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Levantovskiy L.V.* A Drift Algorithm in Control of Uncertain Processes // Problems of Control and Inform. Theory. Hungarian Acad. of Sci. V. 15. 1986. №6. P. 425–438.
81. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Mamedov I.G.* Structural Transformations and Spatial Decomposition of Control Systems: The Quasi-Decoupling Method // Problems of Control and Inform. Theory. Hungarian Acad. of Sci. V. 16. 1987. №3. P. 155–168.
82. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Mamedov I.G., Nersisyan A.L.* Stabilization of Uncertain Dynamic Delayed Processes by Binary Control Systems // Problems of Control and Inform. Theory. Hungarian Acad. of Sci. V. 18. 1989. №3. P. 135–149.
83. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Mamedov I., Nosov A.P.* Asymptotic Invariance and Stabilization of Uncertain Delay Systems // Dynamic and Control. V. 4. 1994. Boston: Kluwer Academic Publ. P. 39–58.

84. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Nersisian A.L., Nisenzon Y.Y.* Discontinuous Output Stabilizing an Uncertain MIMO plant // *Int. J. Control.* V. 55. 1992. №1. P. 83–107.
85. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Sizikov V.I.* Use of Coordinate – Parametric Feedback in Design of Control Systems // *Problems of Control and Inform. Theory.* Hungarian Acad. of Sci. V. 10. 1981. №4. P. 237–251.
86. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Sizikov V.I.* Control of Non-Stationary Plants with Coordinate-Parametric and Parametric Feedbacks // *Problems of Control and Inform. Theory.* Hungarian Acad. of Sci. V. 11. 1982. №4. P. 259–269.
87. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Ulanov B.V.* Control of Nonstationary Dynamic Systems with Quasicontinuous Generation of the Control Signal // *Problems of Control and Inform. Theory.* Hungarian Acad. of Sci. V. 12. 1983. №1. P. 11–32.
88. *Emelyanov S.V., Korovin S.K., Ulanov B.V.* Control of Dynamic Systems in Face of Exogenous Signals with Feedbacks of Various Types // *Problems of Control and Inform. Theory.* Hungarian Acad. of Sci. V. 14. 1985. №1. P. 3–16.
89. *Feynman R.P., Hibbs A.* Quantum Mechanics and Path Integral. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1965.
90. *Flugge-Lotz I.* Discontinuous Automatic Control. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1953.
91. *Hazen H.L.* Theory of servomechanisms // *J. Franklin Inst.* 1934. V. 218. P. 279–331.
92. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1969; Перевод: *Калман Р., Фалб П., Арбид М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
93. *Korovin S.K., Nosov A.P.* Synthesis of Robust Feedback Systems by the Methods of Asymptotic Invariance and it's Application of Uncertain Delay Plants // *Trans. First Asian Control Conf. (ASCC), July 27–30 1994.* Japan. Tokyo, N FE-14-4.
94. *Lee E.B., Markus L.* Foundation of Optimal Control Theory. New York: Wiley, 1967; Перевод: *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
95. *Maxwell D.* On Governors. London: Royal Soci., 1868.
96. *Nyquist H.* Regeneration theory // *Bell Syst. Tech. J.* 1932. V. 11. P. 126.
97. *Routh E.S.* A treatise on the stability of a given state of motion. London: Mc-Millan & C°, 1877.
98. *Stodola A.* Dampf-und Gasturbinen. Berlin, 1922.

Предметный указатель

Автоколебание 131

Алгоритм

- адаптации 105
- Евклида 59
- скольжения 2-го порядка 193
- стабилизации 265
- — вынужденного движения 256
- управления 84
- — бинарного 171

Амплитуда 268

Асимптота 124, 173

Астатизм

- бесконечного порядка 111
 - $(m + 1)$ -го порядка 111
- ### Аттрактор 157, 253
- условный 253

Возмущение

- волновое 236
- внешнее 22
- исчезающее 56
- координатное 22, 28
- “малое” 29
- операторное 22
- приведенное к управляющему входу 64
- регулярное 123
- сингулярное 84, 273
- функциональное 130

Возмущения

- косвенное измерение 35

Гарантированный результат 304

Граммиян управляемости 198

Граница

- области 67
- устойчивости
- — аperiodической 97
- — колебательной 97

Грубость 58

Движение

- вынужденное 26
 - в скользящем режиме 187
 - в реальном скользящем режиме 185
 - разнотемповое 88
 - свободное 26
 - собственное 26
- ## Демпфирование 176
- ## Динамика 27
- “быстрая” 38
 - системы 27
 - — разрывной 67
- ## Диссипативность 130
- замкнутой системы 104
- ## Дифференциатор 262
- бинарный 283
 - линейный 272
 - нестандартный 291
 - — бинарный 283, 291
 - переменной структуры 280
 - релейный 276
 - следящий 271
 - с “малой” амплитудой 289
 - финитный 287

Задача

- дифференцирования 265
 - некорректно поставленная 262
 - о понижении размерности системы 151
 - регулирования 22
 - стабилизации 22
 - управления 24
 - — при неопределенности 145
 - фильтрации 150
- ## Задатчик 24
- ## Задающее воздействие 22
- ## Закон регулирования
- О 210

- П 172
- ПИ 115, 172—174
- ПИД 172
- пропорционально-интегрально-ре-
лейный 206

Звено

- динамическое 44
- запаздывания 271
- инерционное 215

Иерархия

- глубоких обратных связей 88
- коэффициентов усиления 88

Инвариантность 42

- асимптотическая 314
- системы автоматического управ-
ления 39

Индекс субоптимальности, 314**Искажения**

- амплитудные 267
- фазовые 267

Колебание

- амплитудное 267
- вынужденное 258
- собственное 30

Компенсация

- возмущения
- координатного 102
- косвенная 102
- операторного 104
- компенсирующая сила 255

Компонента

- вторая 101
- компенсирующая 32, 35
- первая 101
- программная 32, 35

Координата

- регулируемая 17
- Координата-оператор 163

Коэффициент

- критический 274
- передачи 104
- усиления 37
- — бесконечный 37
- — большой 213

Критерий

- локализации нулей 96
- устойчивости 96
- — интервальной 98
- фильтрации 264
- Харитонова 96

Линия переключения 124**Метод**

- включения 98
- встроенной модели 51
- замороженных коэффициентов 125
- настраиваемого объекта 103
- фазовой плоскости 75

Многообразие

- гладкое 179
- интегральное 182
- скольжения 193
- идеального скольжения 188
- — порядка r 191

Множество

- инвариантное 253
- — условно 253
- — σ -условно 253
- притягивающее 253

Модель 106

- волновая 49
- — Кулебакина 49
- встроенная 49
- математическая 17
- операторная 138
- — линейная 136

Наблюдатель состояния 165

- Неидеальность переключений 184
- Неопределенность структурирован-
ная 108

Область скольжения 180**Обратная связь 22, 56**

- глубокая 56, 306
- динамическая 218
- знакопеременная 256
- индуцированная 92
- интегральная 54

- координатная 140
- координатно-операторная 141
- местная 37
- настраиваемая 103
- нелинейная 197
- операторная 141, 208
- операторно-координатная 141, 227
- оптимальная 301
- отрицательная 255
- по выходу 205
- по состоянию 155
- разрывная 118
- релейная 67, 70
- — координатно-операторная 310
- статическая 113
- стабилизирующая 255
- Объект
 - интервальный 94
 - К 139
 - КО 139
 - конечномерный 18
 - линейный 18
 - — нестационарный 18
 - медианный 95
 - минимально фазовый 51
 - неопределенный 100
 - неустойчивый 29, 30
 - обобщенный 101
 - О 139
 - ОК 139
 - с самовыравниванием 76
 - с переменными параметрами 215
 - скалярный 18
 - стационарный 18
 - управления 17
 - устойчивый 27
- Объекта
 - вход 17
 - выход 17
 - нули 18
 - полюса 18
 - порядок 19
- Ограничения
 - амплитудные 275
- Оператор
 - аннулирующий 49
 - вольтерровский 46
 - дифференциальный 39
 - линейный 17
 - локального проектирования 181
 - нереализуемый 52
 - обратной связи 25
 - объекта 18
 - физически реализуемый 18
- Оператора
 - квазистационарное изменение 103
 - настройка 101
- Операция
 - бинарная 153, 164
 - дифференцирования 47
- Ошибка
 - регулирования 24
 - слежения 109
 - стабилизации 28
 - статическая 28, 114
 - О 212
 - — статическая 212
 - установившаяся 114
- Параметр 164
- Переменная
 - операторная 162, 163
- Поверхность
 - разрыва 108
 - скольжения 183
- Показатель качества 264
- Полином
 - знаменателя передаточной функции 18
 - аннулирующий, 49
 - гурвицев, 54
 - устойчивый 54
 - характеристический 40
 - числителя передаточной функции 18
- Полинома
 - степень, 44
 - устойчивость 54
- Политоп 96
- Полиэдр 94
- Положение

- покоя 27
- равновесия 114
- Помеха
- постоянная 31
- случайная 270
- Порядок
- объекта 18
- относительный 74
- первый 188
- по параметру Δ 188
- полинома 78
- скольжения 179
- уравнения 19
- Преобразование
- координат 159
- Лапласа 18
- — одностороннее 18
- невырожденное 21
- Принцип
- встроенной модели 48
- генерации 137, 148
- двухканальности 40, 48
- каскадного регулирования 88
- K —изображения 48
- комбинированного управления, 111
- компенсации, 34
- максимума 134
- обратной связи 102
- оптимальности 302
- переменности структуры 108, 120
- причинности 18
- регулирования по возмущению 32
- регулирования по нагрузке 29, 56
- регулирования по ошибке 56
- скаляризации 157
- Пространство
- КО 163
- состояний 19
- фазовое 63
- Процесс переходный 27
- аperiodический 174
- колебательный 174
- монотонный 196
- Регулирующий орган 140
- Регулятор
- динамический 232
- линейный 68, 116
- нелинейный 67
- переменной структуры 108
- статический 229, 231
- универсальный 107
- Режим
- переключений 117
- скользящий 191
- — идеальный 190
- — реальный 129, 183
- Решение
- вынужденное 26
- оптимальное (субоптимальное) 301
- переходное 27
- уравнения 26
- установившееся 27
- частное 26
- Связь
- КО 215
- — динамическая 215
- компенсирующая 38
- корректирующая 43
- О 208
- — отрицательная статическая 211
- ОК 227
- обратная 20, 55
- по возмущению 128
- по заданию 26
- прямая 25
- Сигнал 262
- К 138
- координата 138
- О, 138
- оператор 138
- Система
- адаптивная, 103
- астатическая 109
- грубая 57
- декомпозированная 45
- динамическая 24
- — разрывная 67, 179
- диссипативная 102

- инвариантная 40
- интервальная 98
- каскадная 68
- каскадного регулирования 91
- координат (декартова) 19
- линейная 18
- многомерная 120
- неопределенная 98
- переменной структуры 110
- пониженной размерности 148
- предельная 58
- прочная 84, 283
- разрывная 68
- релейная 68
- статическая 109
- следящая 69
- составная 21
- субоптимальная 314
- управления 25
- — автоматического 25
- — с глубокой обратной связью 62
- — замкнутая 57, 60
- — бинарная с О-связью 212
- — прямого цифрового 134
- управляемая 198
- уравнений 229
- Системы
 - анализ 40
 - синтез 31
- Скользящий режим 82, 117, 179, 310
 - 2-го порядка 189, 191
 - в точке 71
 - высшего порядка 179
 - идеальный 190
 - стандартный 188
 - на отрезке 81
 - на прямой 120
 - реальный 132, 184
- Стабилизатор универсальный 105
- Стабилизация
 - адаптивная 102
 - глубокой обратной связью 55, 311
 - интервальная 94
 - линейная 195
 - неопределенного объекта 84
 - оптимальная 300
 - по выходу 192
 - разрывным управлением 258
 - субоптимальная 312
 - финитная 177, 199, 241
- Статизм 207
 - динамический 173, 212
- Статика 27
- Структура
 - структурная композиция 93
 - треугольная 93
- Схема
 - структурная 23
- Теория
 - систем переменной структуры 117
 - адаптивной стабилизации 102
 - управления 24
 - — адаптивного 102
- Тип обратной связи
 - координатная 143
 - координатно-операторная 143
 - операторная 144
 - операторно-координатная 144
- Точка
 - изображающая 82
 - фазовая 19
- Трансверсальность 180
- Управление 17
 - бинарное 209
 - гладкое 66
 - дополнительное 210
 - допустимое 136
 - комбинированное 111
 - непрерывное 192
 - программное 28
 - разрывное 66
 - релейное 255
 - робастное 108
 - эквивалентное 233
- Уравнение
 - Беллмана 302
 - выхода 20
 - движения
 - — аффинное по управлению 211

- системы с глубокой обратной связью 183
- дифференциального минимакса 305
- дифференциальное с разрывной правой частью 108
- наблюдателя относительно ошибок 165
- неоднородное 26
- объекта в отклонениях 64
- однородное 26
- первого приближения 246
- состояния 20
- скольжения 83, 180
- — реального 184
- характеристическое 30
- эталонной модели 306
- Усилитель
 - интегрирующий 140
 - статический 140
- Условие
 - инвариантности 51
 - квазистационарности 106
 - компенсации, 32, 35
 - МС (Matching Condition), 86, 182
 - необходимое и достаточное попадания 125, 253
 - неопределенности 56
 - несмещенности 44
 - согласованности 86, 100
 - существования скользящего режима 125
 - устойчивости 58
 - Харитоновна 96
- Устойчивость
 - замкнутой системы 61
 - асимптотическая 34
 - интервальная 96
 - нулей оператора 52
 - положения равновесия 216
 - свободного движения 31
 - системы 63
 - степень устойчивости 173
 - экспоненциальная 48
- Фаза 268
 - фазовая плоскость 77
 - фазовый портрет 65
 - фазовое пространство 64
 - фазовая точка 20
- Фильтр
 - Винера 151
 - Калмана-Бьюси 151
 - предварительной обработки сигнала 263
 - сглаживающий 284
 - стационарный 151
 - формирующий 151
- Фильтрация 264
- Функция
 - Беллмана 302
 - выхода 19
 - дробно-рациональная 18
 - задания 110
 - комплексной переменной 18
 - Ляпунова 75
 - насыщения 66
 - невырожденная 18
 - оригинал, 18
 - передаточная 18
 - — нули передаточной функции 18
 - пробная 196
 - реле 66
- Шар диссипативности 260
- Экстремаль
 - экстремалей поле 301, 303
- Элемент
 - билинейный 139
 - бинарный 139
 - — сепарабельный 140
 - разрывный 222
 - сепарабельный 142
- Эталонная модель 999
- Ячейка
 - ψ 122
 - “квазирелейное” представление ψ -ячейки 128

Научное издание

*ЕМЕЛЬЯНОВ Станислав Васильевич,
КОРОВИН Сергей Константинович*

НОВЫЕ ТИПЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ.
УПРАВЛЕНИЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Редактор *Е.Ю. Звезжинская*
Компьютерная графика *Е.Ф. Тюриной, А.С. Фурсова*
Компьютерная верстка *А.П. Носова*

ИБ № 41861

ЛР № 020297 от 27.11.91. Подписано в печать 16.06.97.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 24,2.
Тираж 1000 экз. Заказ тип. 1923 . С-014.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в Московской типографии №2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

Institute for Systems Analysis
Moscow State University

New Types of Feedback Control under Uncertainty

EMELYANOV S.V.

KOROVIN S.K.

The monograph is intended for a wide circle of specialists who are interested in the problems of cybernetics, information science, automatic control and optimization. We have made an attempt to give a systematized exposition of the main ideas and principles of the theory of control systems with new types of feedback. The new theory can find diverse applications, say, in solving problems of industrial automation by creating a new generation of controllers which will efficiently control technological processes under the conditions of great uncertainty and which will not require a regular adjustment of their parameters. The most important thing is that this theory contains simple recurrent laws of synthesis of a potentially arbitrarily complicated feedback which can cope with a nonstandard uncertainty. In this respect, the new theory is a natural development of the classical theory of automatic control and provides it with new tools which make it possible to extend the capabilities of automatic systems.

Reviewers:

Academician of Russian Academy of Sciences *V.P. Maslov*

Academician of Russian Academy of Sciences *Ya.Z. Tsyarkin*

Physical and Mathematical Literature Publishing Company,
Russian Academy of Sciences. Moscow, 1997, 352 p.
ISBN 5-02-015149-1

Contents

Preface	8
Introduction	11

Part I

The main principles of design automatic control systems

Chapter 1. Principles of design linear automatic control systems	17
1.1. Statement of a control problems and preliminaries	17
1.2. Principle of load control	28
1.3. Principle of perturbation control	31
1.4. Principle of compensation in an indirect measurement of perturbation	35
1.5. Double-channel principle	40
1.6. The method of K -representation or the method of a built-in model	49
1.7. Deep feedback, namely, a high gain	56
1.7.1. Statement of the problem, its peculiarities and the idea of its solution	56
1.7.2. Problems and limitations of the method of deep feedback	58
1.7.3. On the structural stability of systems with a deep feedback	62
1.7.4. The method of the state space in the analysis of systems with a deep feedback	64
1.7.5. Geometrical interpretation of systems with a deep feedback	65
1.7.6. The effect exerted by amplitude constraints on systems with a deep feedback	65
1.8. Literary comments	66
Chapter 2. Certain principles of constructing nonlinear controllers	68
2.1. On-off feedback	68
2.1.1. Main concepts	68
2.1.2. Sliding mode at a point	71
2.1.3. Switching mode	73
2.1.4. On the strength of a switching mode	75
2.1.5. On-off stabilization of objects with self-levelling	76
2.1.6. On-off stabilization with a high relative order	78
2.1.7. Robust stabilization: discontinuity, continuity, and information concerning the state	78
2.1.8. Robust stabilization of an object with the first relative order	80
2.1.9. Sliding mode on an interval	81
2.1.10. Actual sliding mode on an interval	82

2.1.11. On-off stabilization of a generalized object	83
2.2. Stabilization of an object with an indefinite operator	84
2.2.1. Basic principles	84
2.2.2. Principle of a cascade control	88
2.2.3. Structure of objects with cascade control	92
2.2.4. Stabilization of interval objects	94
2.2.5. Interval stability	96
2.2.6. Basic principles of the adaptive stabilization theory	100
2.3. Stabilization by a controller with a varying structure	108
2.3.1. Astatic servo system	109
2.3.2. Second order astatism	114
2.3.3. Astatism of order m	115
2.3.4. Astatic servo system of varying structure	116
2.3.5. Sliding mode on the whole straight line	120
2.3.6. Analysis of the strength of systems of varying structure relative to perturbation parameters	123
2.3.7. Systems of varying structure at the presence of an external force	125
2.3.8. Quasirelay representation of a ψ -cell	128
2.3.9. Limitations, disadvantages, and problems of the theory of systems of varying structure	130
2.4. Literary comments	131

Part II. New types of feedback

Chapter 3. Basic principles of the theory of new types of feedback	135
3.1. Preliminaries	135
3.2. Systems of basic concepts	137
3.2.1. Signal-operator	137
3.2.2. Types of dynamical objects	138
3.2.3. Binary operation	139
3.2.4. Types of controlling devices	140
3.2.5. New types of feedback	140
3.3. Structural synthesis of binary systems	141
3.3.1. Stabilization of an indefinite object	141
3.3.2. Nonlinear feedback as a means of suppressing uncertainty	148
3.3.3. Filtration problem	150
Chapter 4. Theory of the coordinate-operator feedback	154
4.1. Stabilization of Type 2 object with unknown parameters and external action	155
4.1.1. Scalarization principle and the equation of an object in the space of errors	156
4.1.2. Some remarks concerning the statement of the problem and its generalization	157
4.1.3. Coordinate-operator phase space	161
4.2. CO-algorithms of stabilization	164
4.2.1. Direct compensation	165

4.2.2.	Asymptotic evaluation or an indirect measurement of the O-perturbation	165
4.2.3.	Compensation of the wave O-perturbation	166
4.2.4.	On-off CO-stabilization	168
4.2.5.	Remarks concerning the strength of systems with a relay CO-feedback	171
4.2.6.	Linear CO-algorithms of stabilization	172
4.2.7.	Integral relay CO-algorithm of stabilization	176
Chapter 5.	Higher-order sliding modes	179
5.1.	Some preliminary information from the theory of a sliding mode	179
5.1.1.	Equations of sliding	180
5.1.2.	On the invariance of equations of sliding relative to perturbations satisfying the matching condition	182
5.1.3.	Equations of actual sliding	183
5.1.4.	Remarks concerning the order of sliding	187
5.2.	Algorithms of Type 2 sliding	191
5.2.1.	Asymptotic algorithms of Type 2 sliding	193
5.2.2.	Discontinuous asymptotic algorithms of Type 2 sliding	196
5.2.3.	Finite algorithms of Type 2 sliding: linear feedback	197
5.2.4.	Finite algorithms of Type 2 sliding: on-off feedback	199
5.2.5.	Algorithm of torsion	200
5.3.	Output finite stabilization	202
Chapter 6.	Theory of operator feedback	206
6.1.	On the purpose of the operator feedback	206
6.2.	Motion equations in the coordinate-operator feedback	209
6.3.	Static operator feedback	211
6.3.1.	Static operator and coordinate-operator feedback	212
6.3.2.	Static operator and dynamical coordinate-operator feedback	215
6.3.3.	Inertia coordinate-operator feedback	215
6.3.4.	Inertia relay coordinate-operator feedback	217
6.3.5.	Inertia relay coordinate-operator feedback for an unknown parameter in control	221
6.3.6.	Integral-relay coordinate-operator feedback	222
Chapter 7.	Theory of the operator-coordinate feedback	225
7.1.	Dynamical statism and operator-coordinate feedback	225
7.2.	Motion equations of an operator-coordinate object	228
7.3.	Static OC-controller	229
7.4.	Integral OC-controller	231
7.5.	Principle properties and peculiarities of binary systems of stabilization with different types of feedback	235
7.6.	Discontinuous OC-feedback	237
7.6.1.	Integral relay OC-controller	237
7.6.2.	Type 2 sliding modes in an OC-loop	241

Chapter 8. Limitations, the physical foundations of the compensation of perturbations, and the stabilization of forced motion in binary systems	246
8.1. Constraint on the operator variable	247
8.2. On the global behavior of a binary system	252
8.3. Physical foundations of the compensation of uncertainty	255
8.4. On the compensation of the coordinate perturbation	256
Chapter 9. Differentiation of signals	262
9.1. Statement of the differentiation problem	262
9.1.1. Filtration	264
9.1.2. RC-chain	265
9.1.3. Discrete-difference approximations	269
9.2. Differentiating servo systems	271
9.2.1. Linear differentiator	272
9.2.2. Relay differentiator	276
9.2.3. Differentiator of a varying structure	280
9.3. Asymptotic binary servo differentiator	283
9.4. Finite binary differentiator	287
9.5. Nonstandard differentiating systems	288
9.5.1. Differentiator with a "small" amplitude of discontinuities	289
9.5.2. Nonstandard binary differentiator	291
9.5.3. Results of discrete simulation of a nonstandard binary differentiator	297
Chapter 10. Suboptimal stabilization of an uncertain plant	300
10.1. Statement of the optimal stabilization problem	300
10.2. Example of an optimal stabilization problem under uncertainty	302
10.3. Optimal stabilization "in the mean"	303
10.4. Minimax optimal stabilization	304
10.5. Stabilization with the use of a reference model and deep feedback	306
10.6. Stabilization with the methods of the binary control theory	308
10.6.1. System of a variable structure	310
10.6.2. Binary stabilization with the integral CO-feedback	311
10.6.3. Stabilization with the use of Type 2 sliding	312
10.7. Reduction of the problem of suboptimal stabilization to that of asymptotic invariance	313
10.7.1. Basic concepts of the asymptotic invariance theory	314
10.7.2. Suboptimal linearly quadratic stabilization	316
Conclusion	319
References	322
Index	328

Preface

In this monograph we consider one of the central problems of the automatic control theory, namely, the stabilization problem and the method of its solution in their evolution. Beginning with the simplest statement of this problem, we gradually make it more complicated analyzing in detail the possibilities of different methods of solution. The complication begins with the increase in the uncertainty factors is the statement of the problem, and the methods of solution become more complicated respectively. This approach makes it possible to consider the general trends in the development of the principles and methods of the theory of automatic control. The latter fact is obviously very important since, in the new situation, the mastering of the general mechanisms of formation of control may prove to be useful.

It should be pointed out that the authors do not suppose that the proposed point of view concerning the development of the automatic control theory is the only possible approach since the problem under consideration (in fact, this is the problem of the mechanism of regeneration of feedback) is far from being trivial since different means of describing this mechanism are possible. The larger the number of these means, the better since they bring us closer to the understanding of the fundamental mechanisms of the functioning of feedback. This is very significant both theoretically and practically since the modern methods of stabilization are oriented, in the main, to an "intensive" solution of the problem whereas nature demonstrates remarkable examples of solving stabilization problems with the use of very limited means and under rather strained circumstances.

This essential difference testifies that a genuine feedback theory has not been worked out yet, that many things are not yet clear, and that the principal discoveries in this sphere are yet to come.

Investigating this complicated and delicate problem, we are far from laying claim to grasping the crux of the matter, but we are sure that the theory that we propose directly concerns the matter and seems to be quite natural.

Some words are due about the structure of the monograph. As was already pointed out, we try to go from simple things to more complicated ones and begin, naturally, from linear objects and the methods of the theory of linear control system. Since we lay special stress on the principles of problem solving and on the conceptual interpretation of the results, we tried to evade mathematically strict statements and proofs. It stands to reason that all facts and statements presented in the book can be strictly substantiated, and many of them are well known from literature.

In the monograph we compare the applications of different control methods for solving stabilization problems under varying conditions, namely, external forces, parameters, the structure and order of an object. For this purpose, are, obviously, especially useful simple models of objects, only models of this kind are considered in the monograph. However when carrying out the analysis, we use different forms of description of controlled objects, namely, structural, operator, differential, since some facts seem to be more convincing in a certain description and other facts are more convincing in a different description.

It can be seen from the book that as the stabilization problem becomes more complicated, the nonlinearity plays a more important part. In addition, it becomes clear that there cannot be good stabilization without nonlinear feedback and in is precisely the nonlinear feedback that provides a control system with the ability to demonstrate the needed behavior in complicated and constantly varying external and internal conditions.

It turns out that beginning with a certain level of complexity of the problem a "good" controller will necessarily be nonlinear. It is know that in the nonlinear world there are no regular ways or universal methods which are typical of local theories since the specific features of nonlinearity imposes certain constraints. For the theory developed in this monograph the structural methods of analysis and synthesis of systems turn out to be very useful, and therefore we pay so much attention to the description of these methods.

The purposeful use of nonlinearities in the control makes it possible to operate with principally new "nonintensive" or "compensational" mechanisms of suppression of uncertainty factors, in particular, the techniques based on the use of positive feedback and unstable motions, which allows the system to gather momentum by itself and work until conditions are created for suppressing the interferences and uncertainty factors. It is precisely the positive feedback and the instability that play a key role in some problems.

It should finally be pointed out that the stabilization problem should not be considered in the restricted sense since many important problems of the control theory can be reduced to the stabilization problem, say, the problems of differentiation and optimization. However, since this class of problems is important and rich in content, we devote special sections to their study.

Acknowledgment. The authors express their deepest gratitude to many people who played an important part in the appearance and development of the theory binary control: to some people for their benevolent reaction and mild criticism when we first appeared in public with our reports, to other people for their selfless and creative work on the topical problems of the theory, to our opponents for their severe, may be not always justified but, in the end, useful criticism.

We express our special gratitude to Academicians A.A. Krasovskii, E.P. Popov and Ya.Z. Tsyppkin, whose remarks were always to the point,

concerned the essence of the matter, and made for a correct development of the theory.

We are also grateful to our disciples and followers, who, for many years, worked fruitfully and with enthusiasm in this field and made a significant contribution to the new theory. First of all, we want to acknowledge the contribution made by I.G. Mamedov, A.L. Nersisyan, V.I. Sizikov, A.P. Nosov, and L.V. Levantovskii.

IT is pleasant to point out the atmosphere of well wishing, scientific creative work and self-support which was typical of the scientists of the Institute of Systems Analysis of the Russian Academy of Science, which exerted a positive influence on our work. This is mainly the merit of Academician D.M. Gvishiani, the first director of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Science.

We want to express our special gratitude to Mr. Zhivilo Mikhail Yuryevich whose sincere wish to contribute to the development of the Russian science deserves deep esteem. Without the support and real help of Mr. Zhivilo the publication of this book could be delayed for many years.

Finally, we want to point out the laborious and exceptionally useful work of putting the manuscript of the book into shape and preparation of the camera-ready copy. This work was done by A.P. Nosov, M.M. Belova, A.S. Fursov, L.A. Selivanova and the editors of the ISA of the Russian Academy of Science E.N. Sholokhova, T.S. Borshchova, and T.V. Kovalina. We are sincerely grateful to them for their highly professional work.

When writing the book, the authors received some financial support as grants of the Russian Foundation for Fundamental Research and The European Economic Association.

Introduction

It is believed now that the development of the basic problem of the automatic control theory is principally completed, and correspondingly the center of investigations shifted to the domain of applications, working out effective methods of analysis, and designing control system. It is also believed that the appearance of new ideas and principles is possible only upon a transition to objects of a new nature.

It should be noted that there are, indeed, certain reasons for this viewpoint, and these reasons are rather weighty. The automatic control theory has attained impressive successes and today it can propose a wide spectrum of solution methods for various problem of applied automatics. The field of practical application of the automatic control theory is very wide, and one cannot think of the contemporary technology without means of automatization and, hence, without the use of recommendations of control theory. This is one aspect. Another aspect is that the most modern mathematical apparatus is used more and more actively in control theory whereas the books and articles in scientific journals concerning control theory are, in the main, of a generalizing, summing up character. It may seem that there is a clear evidence that control theory is close to perfection and completes its development.

Is this really so and there are ready solutions in control theory for every specific case? In certain situations this is really the fact, but more frequently control theory gives not recipes but only recommendations which must be subjected to experimental verification as to the adequacy of the situation under consideration. Therefore it is not by chance that there exists a generally accepted sequence of stages of the development of automatic control systems, namely, the elaboration of a mathematical model of an object, the investigation and identification of the model, the formulation of requirements to the properties of the system, the choice of the law of control and performance of imitation experiment, the technological realization of the system and the conduction of a natural or seminatural experiment, and the adjustment of the system. In this sequence, the whole chain of elaboration or some of its links may be used repeatedly. If we also take into account that the realization of each stage requires certain creative efforts, it becomes clear that the creation and exploitation of control systems is a complicated process which requires the enlisting of the services of highly qualified experts. This requirement obviously contradicts the mass character of automatization.

Consequently, the elaboration, designing, and keeping the control system in working order is a "bottleneck" which retards the progress in the

technology of automatization. This is a challenge for control theory which must give the needed methods and tools that would make it possible to effectively work out and exploit control systems with the use of small effort and without a resort to highly qualified specialists.

To a certain degree, this problem can be solved with the use of systems of automated design (SAD), but not only of these systems. SAD is a tool which is effective only when it is well "equipped" theoretically. Otherwise SAD can cope with the routine phase of the development but will not promote the solution of the creative problems of automatization, and, strictly speaking, it is these problems that require high qualification. Only a developed theory, which not only gives strict recommendations for a certain class of situations but also suggests rules for reasonable actions in nonstandard and the methods of obtaining an adequate solution for every specific case, can become a foundation which will allow a further qualitative progress in automation. SAD with elements of an "intellect" in the theoretical basis is what we need today.

Does the modern control theory satisfy this requirement (of a high "intellect")? We had to state that it does not. There are many reasons for this.

The engineer who develops control systems has to resolve an objective contradiction between the elaboration of an object in detail and the possibility of a further analytic investigation of the system, and identification of its parameters, and the problems of the synthesis of the controller. Very likely, this is the most difficult stage whose formalization is hardly possible. And although a certain real process lies, as a rule, at the basis, the researchers who work in automatics strive to construct not an exact but only an imitating model of the process which reflects "most important properties" with respect to the preassigned input and output variables. This is the main thing that distinguishes the models of control theory from the models that are exploited in such fundamental disciplines as physics, chemistry, etc. And, it should be pointed out that concept "the most important properties" often has an intuitive sense which poorly gives in to formalization. It is, perhaps, the reason why when constructing a control system we have iteratively return to this stage and make necessary corrections.

Because of this circumstance, the most natural way of progressing seemed to be an elaboration of "as simple models as possible". This led to the formation of a collection of standard models which are, in the main, exploited in control theory. At present, this arsenal is quite poor and is based on linear models or models close to them. In this way, often to the detriment of the real circumstances, but in order to oblige the theory, a bank of simplified models has formed with which we deal, in the main, in control theory and which is, in the essence, one of the obstacles against which control theory "stumbles" in practice.

Thus, the priority in the direction of development of the theory was given to analytics and this, in turn, led to a hypertrophied development of analytical methods which are often similar as concerns their final re-

sults but which differ in the means of their attainment and the conditions of their application, namely, in transfer functions, differential equations, inlet-outlet representations, frequency and time characteristics, etc.

However, we cannot wring out much from simple models even when we have a powerful apparatus. This especially concerns automatic control systems (ACS) since the attention given to the solution of problems of the synthesis of controllers is inadequate. In fact, this branch of control theory remains almost virginal. There exists a rather restricted collection of techniques of syntheses for a small number of standard situations.

We can say without exaggeration that today the processes of appearance of controlling mechanisms are unclear. In all cases, the appearance of a new method of synthesis is sooner due to inversion than to theory. Therefore the problem of the search for the general principles of synthesis which would make it possible to obtain the required law of control in concrete circumstances as if automatically seems to be very attractive. The elaboration of these general principles will predetermine, in our opinion, the development of control theory in the near future.

We can try to guess certain features of this development. It is clear first of all, that nonlinearity must become an inalienable element of the theory. In the first place, it is the requirement of practice: constraints, nonlinearity of the elements, etc. But this is not only reason, examples from other branches of science (and ACS as well) clearly demonstrate that the due account of nonlinear phenomena substantively enriches the theory many times over: the nonlinear "world" is incommensurably richer than the linear one and precisely on this way new phenomena, principles, and law, originate.

As an illustration, we can cite an example when ACT was essentially enriched due to the solution of problems on absolute stability, on the investigation of self-sustained oscillation processes, adaptive control. Examples from other branches of science, say physics and chemistry, are even more expressive. However, this statement is almost obvious, and it is much more difficult to indicate some constructive way that will lead to the nonlinear "world". Does it exist?

In our opinion, it does, and this way lies in the direction of systematic use of the most important principle of cybernetics, namely, the principle of feedback. We have only to learn to use it correctly in nonstandard situations. It is clear today that this principle is the basis of self-control and the development of all living things. However, only the negative feedback and, correspondingly structurally stable processes "work" now in full measure in ACT. The "press" of linearity hinders the wide use of the positive feedback and structurally unstable processes. Only upon the transition to principally nonlinear systems, we shall be able to actively involve new effects connected with the employment of the positive or alternating feedback.

Conclusion

Feedback "penetrates" the environment and serves as a key element of biological evolution and natural selection; it ensures a regular mechanism in equilibrium systems, in particular, in natural ecosystem; it is a necessary element of successful economic constructions; finally, it serves as the basis for self-regulating and self-supporting biological system. And, although this list can be easily continued, we still know very little about the mechanism of feedback since, actually, it never was an object of investigation. There is an essential reason for this. Indeed, the idea of feedback is almost obvious, it can be easily understood, and its use in simple situation does not cause any problems. However, the synthesis of feedback in a nonstandard situation is, as a rule, not easily realized and requires nonstereotyped solutions.

This is due to the absence of a theory which would explain the mechanism of formation of feedback. As a rule, these mechanisms escape the researcher since they are very complicated. Here the situation is similar to those concerning other laws of the natural science. At his time, the physicist Richard Feynman said about the law of gravitation that: the law acted in a complicated way, but the key idea it was based on was simple and that this circumstance made all our laws related?

It should be pointed out with good reason that regular attempts to study feedback are made in the theory of automatic control, in bionics, and in economic theories. However, in these disciplines the emphasis is placed on the use of feedback and not on the mechanism of its formation. This is natural since, according to Henon, an objective science works out rules for problem solving and not rules for choosing these rules. And yet the absence of rules of the second level, i.e. the methods for working out the rules themselves, forces us to guess a feedback law every time when we deal with a nonstandard problem.

Sooner or later we manage to guess, but it is very difficult to think of new ideas and principles, this requires a very rich imagination. It is not by chance that the control theory has fixed very few revelations of this kind.

As a result, the control theory actually contains minutes of solutions of nonstandard problems where as it is desirable to have laws of synthesis which can be extended to new situations.

In this monograph, the authors make first attempts to develop the conjecture concerning the structure of the mechanism of feedback formation. This conjecture is based on the hierarchy of the complexity of feedback.

This idea concerning the structure of feedback seems to be quite natural since it makes it possible to reduce the problem of synthesis of a complicated nonlinear controller to the solution of a sequence of similar well-studied problems, i.e. the visual complexity of the problem is recurrently generated by the invisible internal need.

The concept of "signal-operator" was needed for the realization of the indicated hierarchy, which was new for the control theory. This term reflects the duality of the nature of signals in nonlinear dynamical systems. In conjunction with the principle of feedback the signal-operator presents the needed possibilities for transition from the direct solution of the problem to finding, first, the algorithm for solving the problem and, when necessary, to transition to the algorithm determining the algorithm of problem solving, and so on. The hierarchy of the structure of feedback obtained in this way is also distinguished by the fact that at every hierarchical level the controlling mechanisms are simple, single-type, and can be obtained by methods which are standard for the classical control theory.

Pay attention to the fact that the idea concerning the duality of variables is conventional for natural sciences and very fruitful. Thus, for instance, Max Born introduced the concept of an operator of a physical quantity which proved to be very fruitful in quantum mechanics theory which deals with objects that are dual in their first principle, and the concept of time-operator, introduced by Ilya Prigogin, proved to be very useful in the physics of irreversible processes.

The authors are sure that the appearance of binarity principle and new types of feedback is quite natural for the present stage of development of the general theory of feedback. In order to substantiate this thesis, the authors consider at length the evolution of the most important principle and methods of the control theory with the increase of the uncertainty factors in control problems, and this is of interest in itself and can serve as a brief introduction to the classical theory of feedback.

It should also be pointed out that from the point of view of mathematics the proposed approach can be regarded as a method of synthesis of nonlinear dynamical systems with preassigned properties of their solutions, such, for instance, as stability, law stability with respect to the variation of the parameters of the problem etc.

It stands to reason that the use of the proposed principle is not restricted to problems of stabilization, filtration, or optimization. Already today we are aware of its other applications. For instance, it can be used to separate close signals of unknown frequency in a finite time whereas linear schemes of separation require, in general, infinitely much time, for robust solving inverse problems of dynamics which refer to the problems of synthesis of standard trajectories and dynamical processing of the results of measurements, to solve stabilization problems under uncertainty and the search for saddle equilibrium positions.

Thus, in this monograph we propose a hierarchical principle of formations of feedback which is based on the duality of the variables of a nonlinear system and which provides a system of automatic control with elements of perfect behavior in complicated uncertain conditions. Other mechanisms of the synthesis of complicated feedback possibly exist, but the advantage of the proposed method is that we can do without large amplification factors or discontinuous control elements. On the contrary, the needed behavior of a system of automatic control is attained for bounded gain factors and for smooth control signals. and this especially important since in natural systems the perfect operation of control mechanisms can be attained precisely under these conditions.

Издательская фирма
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА
Академиздатцентра «Наука» РАН

Вышли в свет при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред, 1994, Пер.448, Б/о

БОРИСОВИЧ Ю.Г., БЛИЗНЯКОВ Н.М., ИЗРАИЛЕВИЧ Я.А., ФОМЕНКО Т.Н. Введение в топологию.—2-е изд., 1995, Пер.416, 81-96.П

ГОППА В.Д. Введение в алгебраическую теорию информации, 1995, Обл.112, Б/о

ЕЛКИН В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-разностный подход, 1997, Пер.320, 78-97.П

ЛАВЗОВСКИЙ Л.Н. Теория атома: Квантовая электродинамика электронных оболочек и процессы излучения, 1996, Пер.304, 81-97.П

ЛАВРОВ И.А., МАКСИМОВА Л.Л. Задачи по теории множеств, 1995, Обл.256, Б/о

ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Статистическая физика. Часть 1.—4-е изд. (Теор. физ.; Т. V), 1995, Пер.608, 93-96.П

ПИКУЛИН В.П., ПОХОЖАЕВ С.И. Практический курс по уравнениям математической физики, 1995, Пер.224, Б/о

СВЕТОЗАРОВА Г.И., КОЗЛОВСКИЙ А.В., СИГИТОВ Е.В. Современные методы программирования в примерах и задачах, 1995, Пер.432, Б/о

СТРУКОВ Б.А., ЛЕВАНЮК А.П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах.—2-е изд., 1995, Пер.304, 94-96.П

СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ЗАЙЦЕВ В.Ф., ПОЛЯНИН А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения, 1995, Пер.560, Б/о

Фундаментальные экологические проблемы в разработках Российской академии наук: Справочное руководство /Сост. А.А.Веденяпин, И.К.Козлова, Л.В.Шаумян, 1995, Обл.96, Б/о

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ИГОШИН В.И. Михаил Яковлевич Суслин (1894—1949), 1996, Обл.160, 208-96.П

КОЧИНА П.Я. Николай Евграфович Кочин.—2-е изд., 1994, Обл.240, Б/о

СОНИН А.С. «Физический идеализм»: История одной идеологической кампании, 1995, Обл.224, Б/о

СОНИН А.С., ФРЕНКЕЛЬ В.Я. Всеволод Константинович Фредерикс (1885—1944), 1995, Обл.176, 207-96.П

НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

АРУТЮНЯН Г.В. Термогидродинамическая теория гетерогенных систем, 1994, Пер.272, Б/о

БЕСОВ О.В., ИЛЬИН В.П., НИКОЛЬСКИЙ С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.—2-е изд., 1996, Пер.480, 63-97.П

БЛЕХМАН И.И. Вибрационная механика, 1994, Пер.400, Б/о

БОГАЧЕВ В.И. Гауссовские меры, 1997, Пер. 352, 72-97.П

БУХАЛЁВ В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой (Теорет. основы техн. кибернетики), 1996, Пер.304, 56-97.П

ВОЛЕВИЧ Л.Р., ГИНДИКИН С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках, 1994, Пер.336, Б/о

Воспоминания об академике М.А.Леонтовиче.—2-е изд. /Сост. В.И.Коган, В.Д.Новиков, 1996, Пер.448, 140-95.П

ГАЛАНИН М.П., ПОПОВ Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование, 1995, Пер.320, 87-96.И

ГОЛОВАЧЕВ Ю.П. Численное моделирование вязкого газа в ударном слое, 1996, Пер.376, 82-96.П

ГОРИНЕВСКИЙ Д.М., ФОРМАЛЬСКИЙ А.М., ШНЕЙДЕР А.Ю. Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях, 1995, Пер.368, Б/о

ГОРШКОВ А.Г., ТАРЛАКОВСКИЙ Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами, 1995, Пер.352, 89-96.И

ГРИГОЛЮК Э.И., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами, 1995, Пер.336, Б/о

ДОВРОВИДОВ А.В., КОШКИН Г.М. Распространение волн в сдвиговых потоках, 1997, Пер.336, 68-97.И

ЖАКОД Ж., ШИРЯЕВ А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. Т. 1, 1994, Пер.544, Б/о

ЖАКОД Ж., ШИРЯЕВ А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. Т. 2, 1994, Пер.368, Б/о

ЗАЙЦЕВ А.А. Теория несущей поверхности: Математическая модель, численный метод, расчет машущего полета, 1995, Обл.160, 92-96.И

ИВАНОВ П.М. Алгебраическое моделирование сложных систем, 1996, Пер.272, Б/о

ИВАНОВ Ю.Н. Теоретическая экономика: Экономические доктрины. Теория потребления, 1997, Обл.128, 37-97.И

ИЛЬИН В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем, 1995, Пер.288, 133-95.П

КАЦЕНЕЛЕНБАУМ В.З. Проблемы аппроксимируемости электромагнитного поля, 1996, Обл.208, 77-97.И

КЛАПДОР-КЛАЙНГРОТХАУС Г.В., ШТАУДТ А. Неускорительная физика элементарных частиц: Пер. с нем., 1997, Пер. 528, 97-97.П

Колмогоров в воспоминаниях /Под ред. А.Н.Ширяева, 1993, Пер.736, Б/о

КОЧИНА П.Я., КОЧИНА Н.Н. Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения, 1994, Обл.240, Б/о

КУЗЬМИН В.П., ЯРОШЕВСКИЙ В.А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях, 1995, Пер.304, 61-96.И

ЛАРИЧЕВ О.И., МОШКОВИЧ Е.М. Качественные методы принятия решений, 1996, Пер.224, 63-96.П

ЛЯМШЕВ Л.М. Радиационная акустика, 1996, Пер.304, 76-97.И

Математические вопросы кибернетики: Вып. 5 /Под ред. С.В.Яблонского, 1994, Пер.304, Б/о

Математические вопросы кибернетики: Вып. 6 /Под ред. С.В.Яблонского, 1996, Пер.480, 80-97.П

МИНДЛИН И.М. Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слонистой жидкости, 1996, Пер.304, 89-97.П

НИКИТИН Я.Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев, 1995, Обл.240, 130-95.П

ОЛЕЙНИК О.А., САМОХИН В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя, 1997, Пер.512, 71-97.П

ОНИЩИК А.Л. Топология транзитивных групп преобразований, 1995, Пер.384, Б/о

РОЗАНОВ Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах, 1997, Пер.336, 75-97.I

Российская наука: Выстоять и возродиться /Международный научный фонд. Российский фонд фундаментальных исследований, 1997, Пер.368, Б/о

СТЕПАНЯНЦ Ю.А., ФАБРИКАНТ А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках (Пробл. соврем. физики), 1996, Обл.240, 90-96.II

СИНАЙ Я.Г. Современные проблемы эргодической теории, 1995, Обл.208, Б/о

СТУЛОВ В.П., МИРСКИЙ В.Н., ВИСЛЫЙ А.И. Аэродинамика болидов, 1995, Обл.240, 100-96.I

Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций /Ю.В.Соколкин, А.М. Вотинов, А.А. Ташкинов и др., 1996, Пер.240, Б/о

ТОВСТИК П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы, 1995, Пер.320, Б/о

УЗДЕМИР А.П. Динамические целочисленные задачи оптимизации в экономике, 1995, Пер.288, 102-95.II

ЦАГИ: Основные этапы научной деятельности (1968-1993), 1996, Пер.576, Б/о

ЦЫПКИН Я.З. Информационная теория идентификации, 1995, Пер.336, 62-96.I

ЧЕРНЫШЕВ Г.Н., ПОПОВ А.Л., КОЗИНЦЕВ В.М., ПОНОМАРЕВ И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах, 1996, Пер.240, 71-97.I

ШЕВЧЕНКО В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования, 1995, Обл.192, 86-96.I

ВЫХОДЯТ ИЗ ПЕЧАТИ

БУЛЯРСКИЙ С.В., ФИСТУЛЬ В.И. Термодинамика и кинетика взаимодействующих дефектов в полупроводниках, 1997, Пер.320, 62-97.II

ГИНЗБУРГ В.Л. О науке, о себе и о других, 1997, Пер.272, 54-97.II

КЛАВДИЙ ПТОЛЕМЕЙ. Математическое сочинение в 13 книгах: Альмагест, 1997, Пер.800, 83-97.I

САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры, 1997, Пер.320, 62-97.II

Физика ядерного взрыва: В 2 т. Т. 1. Развитие взрыва /ЦФТИ МО РФ, 1997, Пер.528, 78-97.I

Планируемые к выпуску издания объявляются в полугодовых аннотированных тематических планах Академиздатцентра «Наука» РАН (Наука. Физматлит).

Заказывайте и приобретайте физико-математическую литературу в магазинах Торговой фирмы «Академкнига» и в магазинах книготоргов, распространяющих литературу данной тематики. Заказы принимаются также по адресу Физматлита. Телефон: (095) 955-03-30.

Поставки книжной продукции в регионы осуществляются по предварительному заказу при 100%-ной предоплате на расчетный счет Физматлита и самовывозе Покупателем. Наложным платежом книги не высылаются.

БАНКОВСКИЕ РЕКВИЗИТЫ:

Издательская фирма «НАУКА. ФИЗМАТЛИТ» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Расч. счет 362505 в Октябрьском филиале АКБ МИБ г.Москвы.
ИНН 7725031560. БИК 044583416. Кор. счет 416161400

Издательская фирма
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА
Академиздатцентра «Наука» РАН

Готовятся к изданию при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований

БАКУЛИН В.Н., ПОТОПАХИН В.А. Динамические задачи оболочек: Упругопластическое деформирование при ударных воздействиях, 82-97. II

БАКУЛИН В.Н., ПОТОПАХИН В.А. Многослойные оболочки: Действие концентрированных потоков энергии, 83-97. II

БОГОМОЛОВ А.М., САЛИЙ В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем, Б/о

БОЛДИН М.В., СИМОНОВА Г.И., ТЮРИН Ю.Н. Непараметрический знаковый анализ, 73-97. II

БРЮНО А.Д. Многогранники Ньютона в алгебраических и дифференциальных уравнениях, 70-97. II

ВИЛЬДЕМАН В.Э., СОКОЛКИН Ю.В., ТАШКИНОВ А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов, Б/о

ГРИГОЛЮК Э.И., МАМАЙ В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций, 72-97. II

ГУРМАН В.И. Принцип расширения в задачах управления, 2-е изд., Б/о

ЖУРАВЛЕВ В.Ф. Основы теоретической механики, Б/о

КАМЕНЯРЖ Я.А. Предельный анализ пластических тел и конструкций, 84-97. II

ЛАНДА П.С. Нелинейные колебания и волны, Б/о

МАЛЮГИН В.Д. Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов, Б/о

ПОНТЕКОРВО Б. Избранные научные труды (Классики науки), 59-97. II

САДОВСКИЙ В.М. Разрывные решения в задачах динамики упруго-пластических тел, Б/о

Физика ядерного взрыва: В 2 т. Т. 2. Действие взрыва /ЦФТИ МО РФ, 79-97. I

ЦИРЛИН А.М. Методы усредненной оптимизации и их приложения, 1997, 75-97. II

Планируемые к выпуску издания объявляются в полугодовых аннотированных тематических планах Академиздатцентра «Наука» РАН (Наука. Физматлит).

Заказывайте и приобретайте физико-математическую литературу в магазинах Торговой фирмы «Академкнига» и в магазинах книготоргов, распространяющих литературу данной тематики. Заказы принимаются также по адресу Физматлита. Телефон: (095) 955-03-30.

Поставки книжной продукции в регионы осуществляются по предварительному заказу при 100%-ной предоплате на расчетный счет Физматлита и самовывозе Покупателем. Наложным платежом книги не высылаются.

БАНКОВСКИЕ РЕКВИЗИТЫ:

Издательская фирма «НАУКА. ФИЗМАТЛИТ» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Расч. счет 362505 в Октябрьском филиале АКБ МИБ г.Москвы.

ИНН 7725031560. БИК 044583416. Кор. счет 416161400