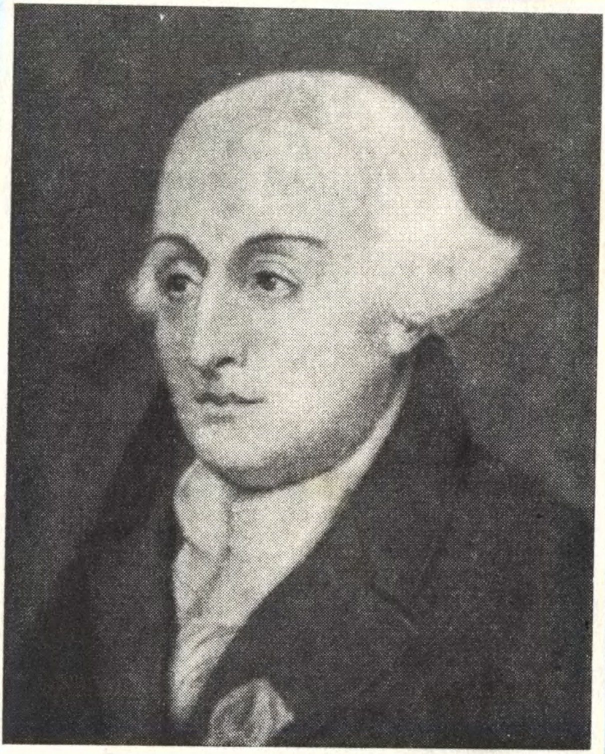


И. А. Тюлина

Жозеф Луи ЛАГРАНЖ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

И. А. Тюлина

Жозеф Луи
ЛАГРАНЖ

1736—1813

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1977

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — выдающийся французский ученый, годы научного творчества которого совпали с бурным периодом в истории Франции: Великой французской буржуазной революцией (1789—1794), термидорианской контрреволюцией и Директорией (1794—1799) и периодом Консульства и Первой империи (1799—1814).

Имя Лагранжа широко известно: нет такой области в современной математике и механике, в которой значительные достижения не были бы связаны с его исследованиями. Тщательное изучение оригинальных работ Лагранжа, его обширной переписки, знакомство с подавляющим большинством отечественной и зарубежной литературы о нем позволили автору дать анализ научной деятельности ученого и проследить его жизненный путь на широком историческом фоне.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук
К. А. РЫБНИКОВ

Т $\frac{20100-023}{054(02)-77}$ 79—76НП

Жизненный путь

Юные годы в Турине

О детстве и юности Жозефа Луи Лагранжа сохранились очень скудные сведения. Его прадед приехал в Италию из Франции, где служил в чине капитана в войсках Людовика XIV; в середине XVII в. он поступил на службу к Карлу Эммануилу I, герцогу Савойскому, оказывавшему ему высокое покровительство. Расположением двора пользовался и дед ученого, который при содействии герцога женился на знатной итальянке, имя которой известно: Бармиола ди Вичелли (вот почему две нации имеют право называть Лагранжа своим выдающимся ученым). Итальянкой, по-видимому, была и мать Жозефа Луи Лагранжа — Тереза Грос, дочь медика из местечка Гамтиано (неподалеку от Турина) [1]. Созданная специально для деда ученого должность казначея фабрик и строений герцогства перешла по наследству отцу Лагранжа и была упразднена лишь в самом конце XVIII в. Отец Лагранжа, кроме того, занимался рискованным предпринимательством финансового характера, в котором его преследовали неудачи. К моменту рождения младшего сына — Жозефа Луи (Джузеппе Луиджи) — 25 января 1736 г. состояние семьи сильно пошатнулось.

Желанию отца — сделать сына адвокатом — юноша не противился, и в 14 лет был определен в Туринский университет. Но в университете Лагранж встретился с физиком П. Беккариа и математиком Ф. Ревелли, в результате общения с которыми он почувствовал большой интерес и

---

[1] *Lorio G.* Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange.— «Isis», 1938, v. 28, N 77, p. 366—379.

влечение к физико-математическим наукам. Впоследствии Лагранж говорил [2], что если бы он имел наследство, то не создал бы себе положения в мире математиков, а в какой области он нашел бы тогда приложение своим талантам? Именно в занятиях математикой он обрел спокойную уединенную жизнь, полную труда, но приносившую удовлетворение и успех.

Наряду с штудированием римских классиков — Полибия, Юлия Цезаря, Цицерона и др.— Лагранж в университетские годы увлекался чтением трудов греческих математиков, в частности Архимеда. Так он дошел до изучения трудов И. Ньютона и Э. Галлея.

Однажды посланник Франции при Савойском дворе представился матери Лагранжа, чтобы поздравить ее и передать ей награду Парижской академии наук за победу, одержанную ее сыном в публичном математическом конкурсе. Мать была удивлена, огорчена и отказывалась принять награду за успехи в математике тому, кто был послан изучать право. Посланник сумел убедить ее в серьезности увлечений ее сына и в необходимости принять награду.

После пробы сил в геометрии юный Лагранж переключил внимание на математический анализ и вскоре послал свои изыскания известному математику того времени князю Фаньяно. Работа была написана по-итальянски. Каково же было огорчение Лагранжа, когда он узнал, что повторил результаты Лейбница! Он даже заболел от огорчения. Однако самостоятельность и ценность его исследования были признаны, и в сентябре 1755 г. Лагранж был назначен профессором Артиллерийской школы в Турине. Он преподавал там математику, в частности анализ бесконечно малых. Среди слушателей, которые в большинстве были старше своего учителя, нашлись способные математики. Лагранж сблизился с ними. Так образовалось общество любителей математики, на основе которого вскоре возникла Туринская академия наук. Лагранж, по-видимому, был руководителем, а отчасти и исполнителем работ, опубликованных членами общества (Чинья, Салюсом и др.) и вошедших в собрание записок новой академии. Очевидно, он же придал аналитическую форму мемуарам

---

[2] *Delambre J. B. J.* Notice sur la vie et les ouvrages de M. Lagrange.— Oeurves de Lagrange, t. I, p. X.

Жозеф Луи Лагранж

Фонсене, вошедшим во второй том этих записок. В одном из них речь идет о принципе сложения и разложения сил по правилу параллелограмма независимо от аксиомы о параллельных прямых или от архимедова принципа рычага. Существует мнение, что эта интересная работа Фонсене или инспирирована, или написана Лагранжем [2a]. Это мнение высказал, например, Н. И. Идельсон, который продолжил свою мысль так: «Действительно, мы знаем теперь, что начало параллелограмма сил имеет совершенно одинаковую формулировку в системах Евклида, Лобачевского, Римана; напротив, в неевклидовой статике закон рычага не сохраняется; величина равнодействующей зависит от длины рычага; она будет больше $2P$ в геометрии Лобачевского, меньше $2P$ в геометрии Римана. Как бы в предвидении всех этих глубоких вещей, Лагранж говорит: «Хотя оба начала, именно рычага и сложения сил, приводят всегда к одинаковым результатам, замечательно то

[2a] См. *А. Т. Григорьян, Б. А. Розенфельд.* Теория винтов и неевклидова механика. История механики с конца XVIII века до середины XX века, М., Изд-во «Наука», 1972, с. 343.

обстоятельство, что случай, наиболее простой для одного из них, является наиболее сложным для другого»»[3].

Уже первый том «Записок Туринской академии», вышедший в свет в 1759 г., привлек к себе внимание крупнейших математиков Европы несколькими интересными исследованиями Лагранжа, вошедшими в это собрание. Здесь была первая его работа, посвященная исследованию максимума и минимума функций нескольких переменных; в этой области Лагранж проштудировал предварительно все известные работы от Маклорена до Эйлера. Кроме того, он добавил и собственные результаты. Вторая работа Лагранжа касалась решения одного разностного уравнения в сопоставлении с дифференциальным уравнением. Далее следовал мемуар под названием «Исследования о природе и распространении звука».

Лагранж рано вступил в переписку с крупнейшими математиками того времени, в частности с Эйлером.

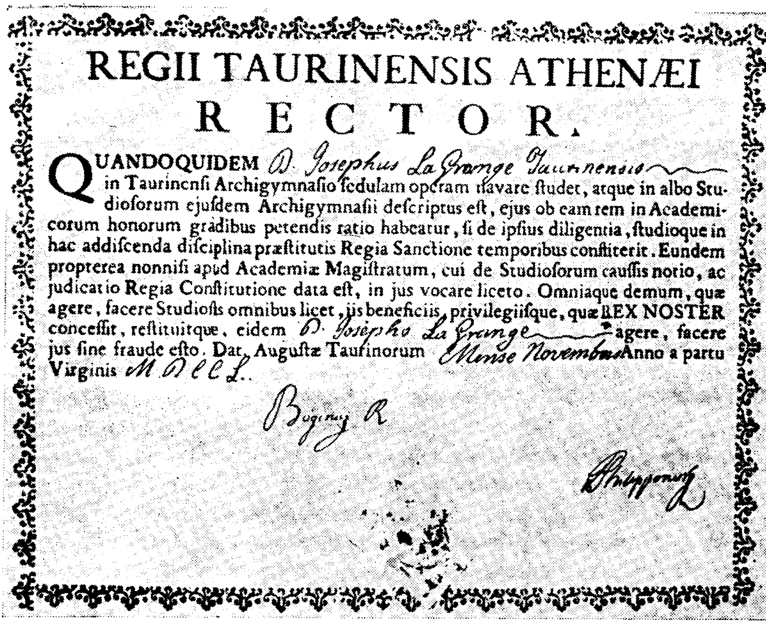
Первое письмо Лагранжа к Эйлеру было датировано только днем и месяцем, без указания года. Установлено[4], что оно относится к 1754 г., так как в нем между прочим спрашивалось об обстоятельствах смерти Христиана Вольфа, весьма влиятельного немецкого ученого, который умер в апреле 1754 г. В этом письме Лагранж излагал свои предложения о выражении производной n-го порядка произведения $x \cdot y$ по аналогии с биномиальным разложением.

В апреле 1756 г. Эйлер спрашивает 20-летнего Лагранжа, нет ли у него желания переехать на работу в Берлин. Эйлеру очень хотелось работать в личном общении с Лагранжем. Однако это еще не было официальным приглашением в Берлинскую (или Прусскую) академию. Такие дела формально решались президентом академии П. Л. Мопертюи, а на самом деле — фактическим куратором академии, самим королем Фридрихом II. Существует обширная литература, превозносящая роль этого монарха в насаждении наук, искусств и философии в Пруссии. Будучи современником французских просветителей, Фридрих находился под их большим влиянием. Он старался

---

[3] *Идельсон Н. И.* О механике Лагранжа.— В сб.: Жозеф Луи Лагранж (1736—1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1937, с. 45.

[4] *W. Lorey.* J. L. Lagrange.— «Journ. die reine und angew. Math.», 1936, Bd. 175, H. 4, S. 227.



REGII TAURINENSIS ATHENÆI
R E C T O R.

QUANDOQUIDEM D. Josephus La Grange Taurinensis in Taurinensi Archigymnasio sedulam operam navare studet, atque in albo Studiosorum ejusdem Archigymnasii descriptus est, ejus ob eam rem in Academicorum honorum gradibus petendis ratio habeatur, si de ipsius diligentia, studioque in hac addiscenda disciplina præstitutis Regia Sanctione temporibus constiterit. Eundem propterea nonnisi apud Academiæ Magistratum, cui de Studiosorum caussis notio, ac judicatio Regia Constitutione data est, in jus vocare liceto. Omniaque demum, quæ agere, facere Studiosis omnibus licet, iis beneficiis, privilegiisque, quæ REX NOSTER concessit, restituitque, eidem D. Josepho La Grange agere, facere jus sine fraude esto. Dat. Augustæ Taurinorum Mense Novembris Anno a partu Virginis MDCCL.

Матрикул о записи Ж. Л. Лагранжа в Туринский университет в 1750 г.

устроить и свой двор на французский лад. Лоск салонных бесед, литературные диспуты — все, как у французов. Король и сам сочинял литературные произведения, переписывался с Вольтером, всячески заигрывая с ним, что, видимо, льстило последнему. Однако «вольномыслие» и «свободолюбие» «короля-философа» были чисто внешними и довольно плохо прикрывали его деспотическую натуру, выражавшуюся во всем: от муштры до принудительного слушания придворными его игры на флейте. Ученых-математиков Фридрих II ценил гораздо меньше, чем литераторов, подчас заурядных. Он говорил, что слишком тяжело иметь на содержании сразу двух: Австрию и Геометрию. Даламбера он высоко чтил, поскольку тот был еще и философом, однако не стеснялся посылать ему свои сатирические стихи против геометров и геометрии, на что Даламбер отвечал мудрым молчанием. Зато Эйлер был для Фридриха предметом подшучивания. Так, он писал Вольтеру, что у его «одноглазого Геометра» (так называл он Эйлера) уши не созданы для понимания поэзии.

Нелегко было Эйлеру пригласить Лагранжа в Берлин: незаурядность молодого математика пока была видна немногим. Хлопоты осложнялись еще и тем, что президент Берлинской академии наук П. Л. Мопертюи покинул на несколько лет Берлин и пребывал в Париже, а Эйлер в роли вице-президента не мог санкционировать такие мероприятия. У Эйлера формально были связаны руки, так как во всех важных решениях он должен был добиваться согласия Мопертюи, с которым сносился средствами почты. Однако уже к осени 1756 г. Эйлер добился [5] избрания Лагранжа иностранным членом Берлинской академии, о чем сообщил ему в письме от 2 сентября.

«Так как я не хотел отвечать на твое письмо, прежде чем не узнал мнение о твоем избрании у нашего президента, который сейчас отбыл во Францию, то с радостью теперь сообщаю, что твои превосходные таланты вызвали наибольшее восхищение и мне доверили рекомендовать тебя нашей академии в число ее иностранных членов. Сегодня при общем рукоплескании было принято такое решение...» [6]

Переписка Лагранжа с Даламбером началась с обсуждения вопроса о колебании струны. Исследуя проблему распространения звука, Лагранж свел математический аппарат этой задачи к задаче о колебании струны. В свою очередь, задачу о колебании струны он начал рассматривать со случая одной точечной массы, нанизанной на колеблющуюся невесомую струну, затем нескольких точечных масс и так переходил к бесконечному числу нанизанных масс, или к сплошной струне.

До Лагранжа подобной проблемой занимались И. Ньютон, Б. Тейлор, Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли. Задача состояла в нахождении общего решения уравнения колебания струны.

Общее решение этого дифференциального уравнения (фактически, уравнения в частных производных) указал Даламбер в 1747 г. Решение содержало произвольную периодическую функцию.

Через год Эйлер установил связь произвольной функ-

---

[5] См.: *Harnack A.* Geschichte der Königlich Preusseschen Academie. Bd. 1. Berlin, 1900, S. 457—469.

[6] Oeuvres de Lagrange, t. XIV, p. 156—157.

ции, входящей в общий интеграл уравнения колебания струны, с начальной формой струны и начальным распределением скоростей в ее точках. Между Даламбером и Эйлером возникла дискуссия о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений в частных производных.

Сущность спора, в котором приняли участие многие видные математики XVIII в., сводилась к следующему. Понятие «произвольная функция» еще не было осмыслено и определено. Даламбер, в решение которого входила произвольная функция, вкладывал в понятие «произвольной» то, что его функция имеет произвольное аналитическое выражение (у него была нечетная периодическая функция). Эйлер понимал под произвольной функцией произвольно начерченную кривую. Что было более широким или более узким? Приведем фрагмент из одного яркого по форме и точного по содержанию описания этого исторического диалога:

«*Эйлер*. Конечно, произвольно начерченная кривая — более общее понятие, чем произвольное аналитическое выражение. Ведь всякое аналитическое выражение изображается какой-то кривой; а не всякая кривая может быть представлена аналитическим выражением. Например, произвольную кривую можно взять с уголками, а кривая, соответствующая аналитическому выражению, никогда не имеет уголков.

Даламбер. Это только видимость общности. Речь идет не о любых кривых, а о решениях уравнения, где фигурируют вторые производные. Прежде чем проверять, является ли ваша кривая решением, ее нужно записать аналитическим выражением — иначе как же вы будете дифференцировать? А кривая с уголками вообще не может служить решением уравнения с частными производными. Да и физически сила упругости в угловых точках должна быть бесконечной, что нелепо.

Эйлер. Моя кривая может состоять из нескольких дуг, отвечающих различным аналитическим выражениям.

Даламбер. Дуги кривых, отвечающих различным аналитическим выражениям, из которых будто бы может состоять решение, никогда нельзя сочленить сколько-нибудь гладким образом» [7].

[7] *Шилов Г. Е.* Что такое функция? — «Математика в школе», 1964, № 1, с. 8—9.

В спор вступил Д. Бернулли; он предложил общее решение уравнения, которое, как ему казалось, могло бы примирить взгляды спорящих. Его решение представляло собой бесконечный тригонометрический ряд по координате с неопределенными коэффициентами a_i, зависящими от времени.

Подобно тому как звук, издаваемый струной, слагается из основного тона и бесконечного множества обертонов, любая функция и, следовательно, кривая может быть составлена с помощью дуг синусоид, «деформированных» коэффициентами a_i.

«Но оба мэтра — и Даламбер, и Эйлер — с негодованием отвергли предложение Даниила Бернулли.

Далеко не всякое аналитическое выражение, сказал Даламбер, может быть представлено рядом (2) [8]. Сумма такого ряда обязана быть непрерывной и иметь непрерывную кривизну; а аналитическое выражение, например $\sqrt[3]{\sin x}$, не обязательно обладает такими свойствами.

Далеко не всякая кривая, сказал Эйлер, может быть представлена рядом (2). Кривая, которую я рисую, в каждой точке может пойти произвольно, а выражение (2), будучи написано, уже не допускает никакого произвола; в частности, с самого начала оно заведомо представляет нечетную и периодическую функцию».

Итак, вставал вопрос о выяснении объема класса функций, представимых тригонометрическими рядами. Этот вопрос стоял перед математиками вплоть до появления работ Ж. Б. Фурье в XIX в.

Молодой и малоизвестный Лагранж в 1759 г. дал новое оригинальное решение проблемы колебания струны, опубликовав его в первых томах «Туринских записок» [9]. Вопрос о колебании струны повторно разобран в трактате,

---

[8] Номером (2) обозначен тригонометрический ряд Д. Бернулли, введенный им для решения уравнения колебания струны длины l:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi}{l} x. \tag{2}$$

[9] Работу Лагранжа «Исследование о природе и распространении звука» см. в сочинениях Лагранжа: Oeuvres de Lagrange, t. I, p. 39—148.

явившемся итогом важнейших научных достижений Лагранжа,— «Аналитическая механика» (1788). Лагранж пришел к выводу: «Формулы, дающие движение натянутой струны, нагруженной неопределенным числом равных тел, не вызывают никаких затруднений, поскольку движение каждого тела определяется частным уравнением; ясно, что если эти же формулы можно применить к движению струны постоянной плотности, допуская, что число тел бесконечно велико, а их взаимные расстояния бесконечно малы, то закон, который отсюда получится для колебаний струны, будет совершенно независим от ее первоначального состояния; и если этот закон окажется тем же, какой получается из рассмотрения произвольных функций, то тем самым будет доказано, что эти функции могут быть любого вида, непрерывного или прерывного, лишь бы только они представляли начальное состояние струны. Этим именно путем я в первом томе „Mémoires de Tourin" доказал правильность построения Эйлера, которое до тех пор еще не было достаточно обосновано. Примененный мною там анализ, за исключением некоторых упрощений, которые я ввел с тех пор, совершенно подобен тому, какой я дал сейчас; я полагал, что его следует привести и в настоящей работе, так как он прямо приводит к строгому разрешению одного из наиболее интересных вопросов механики» [10].

Лагранж был согласен с Эйлером относительно природы произвольных функций. Вопреки твердому мнению Даламбера, что функция, заданная аналитически, не всегда может быть изображена тригонометрическим рядом, Лагранж верил, что можно доказать представимость любой функции тригонометрическим рядом. Примерно через полстолетия один из учеников Лагранжа — Ж. Б. Фурье — пытался это доказать.

Весьма убедительно, чисто аналитическими методами Лагранж пришел к такому же, как у Бернулли, решению проблемы колебания струны. Но в то время как коэффициенты ряда Бернулли предполагались неопределенными величинами, неизвестно как связанными с начальным состоянием струны, Лагранж сумел установить зависимость этих коэффициентов a_i от параметров началь-

---

[10] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. М.— Л., Гостехиздат, 1950, с. 517—518.

ного состояния струны (x_0, $\dot{x}_0$). В общем, Лагранж подтвердил, укрепил и расширил метод Бернулли, увязав его решение с решением Даламбера.

Биограф Лагранжа, его младший современник и коллега Деламбр писал об этих ранних исследованиях Лагранжа: «Этот дебют был изумителен, когда совсем еще молодой человек вмешивается в тему трактатов Ньютона, Тейлора, Бернулли, Даламбера и Эйлера и выступает внезапно среди этих великих геометров не только как им равный, но как арбитр между ними, который, чтобы прекратить трудную борьбу, указывает каждому из них, в чем он прав и в чем ошибается, исправляет эти ошибки и дает истинное решение, которое хотя и было предугадано, но не могло быть получено» [11].

Выдающийся русский механик академик А. Н. Крылов также высказал восхищение этим ранним произведением молодого Лагранжа, его обширностью и глубиной «совершенно оригинального исследования и по существу вопроса... и по новизне и изяществу математических методов, примененных для его решения» [12].

В 1759 г. Лагранж послал Даламберу первый том «Туринских записок» чтобы ознакомить великого геометра со своими результатами о природе и распространении звука. Даламберу показалось недостаточно обоснованным одно место в рассуждениях молодого Лагранжа, а именно, что всякая функция, заданная аналитически, может быть всегда представлена тригонометрическим рядом. Лагранж, как уже говорилось, верил в возможность доказательства этого положения.

Тем не менее Даламбер, несмотря на некоторые сомнения в указанном пункте, очень высоко оценил общее значение исследования еще неизвестного ученого. Даламбер понял, что имеет дело хотя и с очень молодым, но равным ему по силе математиком. По поводу нового решения задачи о колебании струны, предложенного Лагранжем, Даламбер писал: «До свидания, сударь, Вы достойны, если я не ошибаюсь, играть великую роль в науках, и я аплодирую началу Вашего успеха» [13].

---

[11] *Delambre J. B. J.*— Oeuvres de Lagrange, t. I, p. XIII.
[12] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— В сб.: Жозеф Луи Лагранж, с. 1.
[13] Oeuvres de Lagrange, t. XIII, p. 4.

Не менее выдающиеся результаты были получены в это время Лагранжем в другой, новой области математики — в вариационном исчислении. Первые шаги здесь были сделаны Л. Эйлером в сочинении «Метод нахождения кривых линий, обладающих максимумом или минимумом...» (1744). Тут ставилась задача об отыскании таких линий, которые сообщают какому-нибудь выражению экстремальное значение. По существу, Эйлер рассматривал задачи на нахождение двух видов экстремумов: абсолютных и относительных (т. е. таких, в которых накладывалось некоторое дополнительное условие на класс сравнимых линий).

Эйлер сформулировал задачу: для одного и того же отрезка оси абсцисс задан интеграл

$$J(y) = \int Z(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$$

где Z интегрируется при определенной зависимости y от x. Необходимо выбрать среди всех возможных линий на отрезке $[x_0, x]$ такую линию $f(x, y) = 0$, чтобы интеграл принимал экстремальное значение. Фактически Эйлер оперировал понятием о вариации кривой в точке [14], рассматривая вместе с основной кривой и другие кривые, бесконечно мало отличающиеся от первой в бесконечно малой окрестности точки. Эйлер сводил решение поставленной (по существу, вариационной) задачи к решению другой задачи: о нахождении экстремума функции многих переменных. При этом оставались пока недообоснованными некоторые положения. В частности, из-за отсутствия строго определенной операции варьирования функции кое-где происходили смешивания понятия «дифференциала» и понятия «вариации».

Каково же было удивление Эйлера, пользовавшегося известностью во многих странах Европы, когда в августе 1755 г. он получил письмо из Турина от мало кому известного исследователя, сумевшего восполнить пробелы в его собственных рассуждениях. Автором письма был Лагранж. Он предложил различие дифференциала от нового типа операций, вводя и новый символ δ для изменения ординат за счет перехода от одной кривой к смежной

[14] Подробнее об этом см. в главе «Вариационное исчисление» настоящей книги.

или сравнимой. Для главной части изменения функции за счет изменения ее аргумента (дифференциала) он оставлял прежнее обозначение *d*. Лагранж использовал введенное им свойство перестановочности обеих операций. Он формально распространял правила обычного дифференцирования и на операцию нового типа, обозначенную символом δ. Наиболее интересным в письме Лагранжа к Эйлеру было предложение вычислять вариацию методом интегрирования по частям (термин «вариация» был введен Эйлером значительно позже).

Эйлер был изумлен глубиной мысли Лагранжа и ответил ему в весьма доброжелательном тоне, признавшись, что после утомительных поисков решения этого вопроса он с удивлением увидел новое решение (решение Лагранжа), которое превосходит его собственный метод по простоте.

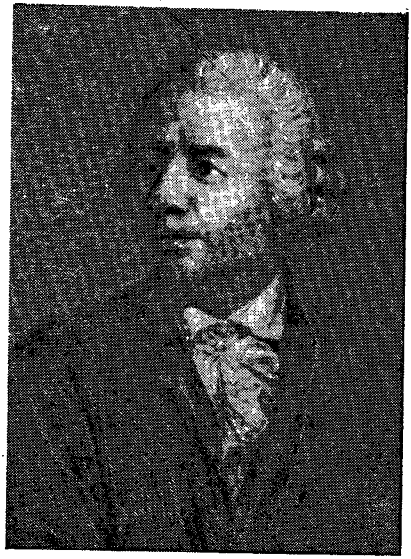
Лагранж продолжал посылать в письмах Эйлеру решения различных изопериметрических задач. Их переписка становилась все плодотворнее и прерывалась только в годы Семилетней войны. За это время у Эйлера сложился новый эффективный подход к проблеме в самом общем ее виде. Однако он не спешил публиковать полученные им результаты, чтобы дать возможность молодому ученому развивать свои замыслы. 2 октября 1759 г. он писал ему:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после первых моих попыток я занимался едва ли не один, доведена тобой до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение. Я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы» [15].

Это письмо было очень важно для Лагранжа. Он ответил Эйлеру, что не решался опубликовать свои результаты, не узнав его мнение. Теперь, получив его высокую оценку, Лагранж решил прервать на время дальнейшую

---

[15] Oeuvres de Lagrange, t. XIV, p. 162.



Л. Эйлер

разработку метода, чтобы опубликовать изложение уже найденных результатов.

Между знаменитым Эйлером и начинающим свой научный путь Лагранжем установилась регулярная переписка, показывающая, с каким необыкновенным благородством Эйлер отошел на второй план. Он не только дал Лагранжу время и возможность сформулировать свои мысли и опубликовать результаты, но и всячески помогал ему в этой работе своими письмами. В течение нескольких лет Эйлер воздерживался от публикаций собственных соображений на эту тему — соображений, весьма веских и зрелых.

Первые работы Лагранжа по вариационному исчислению появились во втором томе «Туринских записок» в 1760—1761 гг. Кроме общей теории нового исчисления (подробнее речь об этом пойдет ниже), Лагранж потратил много усилий на разработку механических приложений этой теории. В 1744 г. Эйлер дал аналитическую трактовку принципа наименьшего действия, высказанного Мопертюи для нескольких частных примеров. Принцип наименьшего действия в форме Эйлера позволял отбирать истинную траекторию материальной точки при ее движении из положения A в положение B из числа кинематически возможных траекторий, соединяющих точки A и B. Интегральному вариационному принципу Эйлера Лагранж придал новую форму, более общую и оказавшуюся чрезвычайно ценной в динамике. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа позволял отбирать (с помощью требования равенства нулю первой вариации действия) истинное движение системы материальных точек из числа кинематически возможных движений. Используя этот принцип, Лагранж решил несколько трудных задач динамики системы (гидродинамики, механики нити и др.).

Европейские академии наук имели обыкновение объявлять конкурсы на актуальные научные темы. Лучшие из поданных на конкурс работ отмечались премиями. Парижская академия наук в 1764 г. объявила конкурс по проблеме движения Луны. Предлагалось дать объяснение причины, по которой Луна обращена к Земле всегда одной и той же стороной. Кроме того, требовалось выяснить поведение собственной оси вращения Луны: имеет ли место прецессия и нутация Луны. Задача заинтересовала молодого туринца, в результате чего появилась в том же 1764 г. работа «Исследование о либрации Луны» [16], получившая первую премию на конкурсе. В этой работе Лагранж объяснил и подтвердил расчетами явление, установленное наблюдениями французского астронома Доминика Кассини, а именно: период вращения Луны вокруг своей оси в точности равен периоду обращения Луны вокруг Земли. Лагранж доказал, что это происходит по причине не вполне сферической формы Луны: притяжение Земли уничтожает разность между периодами двух вращений Луны.

Законы движения Луны продолжали интересовать Лагранжа и в дальнейшем, он много занимался этими вопросами и сделал важные выводы в этой области.

О новом успехе молодого ученого узнал Даламбер. Он писал ему:

---

[16] Recherches sur la libration de la Lune.— Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 5—64.

Ж. Даламбер

«Я прочел с большим удовольствием плоды Ваших прекрасных работ о либрации, они достойны премии, которую Вам вручат» [17].

У Лагранжа возникло желание лично познакомиться с выдающимся математиком, физиком и философом эпохи — Жаном Лероном Даламбером (1717—1783).

[17] Oeuvres de Lagrange, t. XIII, p. 10.

Ранние исследования Даламбера по математическому анализу получили признание, и он в возрасте двадцати четырех лет стал адъюнктом Парижской академии наук. Через два года Даламбер вышел в разряд известных ученых благодаря публикации трактата «Динамика» (1743), связанного с решением актуальной проблемы динамики системы или механизма. До Даламбера многие ученые делали попытки найти новые методы решения таких задач, но полученные результаты не были достаточно общими. О принципе Даламбера,— главном достижении в его трактате «Динамика» — Лагранж позже писал:

«Появившееся в 1743 г. сочинение Даламбера «Traité de Dynamique» положило конец всем подобного рода вызовам ученых; в нем предложен прямой и общий метод, с помощью которого можно разрешить, или во всяком случае выразить в виде уравнений, все проблемы механики, какие только можно себе представить» [18].

Фундаментальную роль в развитии точных наук сыграли исследования Даламбера по проблеме колебания струны, по теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), по теории функций комплексного переменного, по небесной механике, динамике твердого тела, по гидродинамике.

Политическая и литературная деятельность Даламбера, его активное участие в издании «Энциклопедии, или Толкового словаря по наукам, искусствам и ремеслам», его резкие антиклерикальные выступления создали ему много врагов. Не забывалось и происхождение Даламбера: он был внебрачным сыном генерала Детуша и канонессы Тансен. Его нашли подкинутым на ступенях церкви св. Жана ле Рон; в честь этого святого он и получил свое имя. Даламбер был воспитан в семье стекольщика, а когда знатная дама пожелала его усыновить, отказался признать ее матерью, выказав истинное сыновнее чувство благодарности к простой женщине, вырастившей его. Несмотря на выдающиеся заслуги и успехи в науке членом Парижской академии наук Даламбер был выбран только в 1754 г., после трех неудачных попыток, а утверждение его в этом звании и выплату жалованья правительство задержало еще на год.

Настойчивые приглашения Фридриха II занять место

---

[18] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 312.

президента Берлинской академии наук Даламбер не принял. Несмотря на недоброжелательное отношение к нему правящих кругов Франции, Даламбер не принял и другое выгодное предложение — занять место воспитателя наследника престола Павла, исходившее от Екатерины II.

Даламбер серьезно занимался разработкой философских проблем естествознания, в частности теорией отражения. Наиболее известны его сочинения философского характера: «Элементы философии» (1759) и обширное предисловие к «Энциклопедии» (ее первый том вышел в 1751 г.) под названием «Очерк о происхождении и развитии наук». Ограниченность научного мировоззрения Даламбера рамками упрощенного механистического материализма не снижала общей ценности этого чрезвычайно прогрессивного в XVIII в. учения. Деятельность Дидро, Даламбера, Гельвеция, Гольбаха и других просветителей второй половины XVIII в. сыграла важную роль в идеологической подготовке общества накануне Великой французской буржуазной революции.

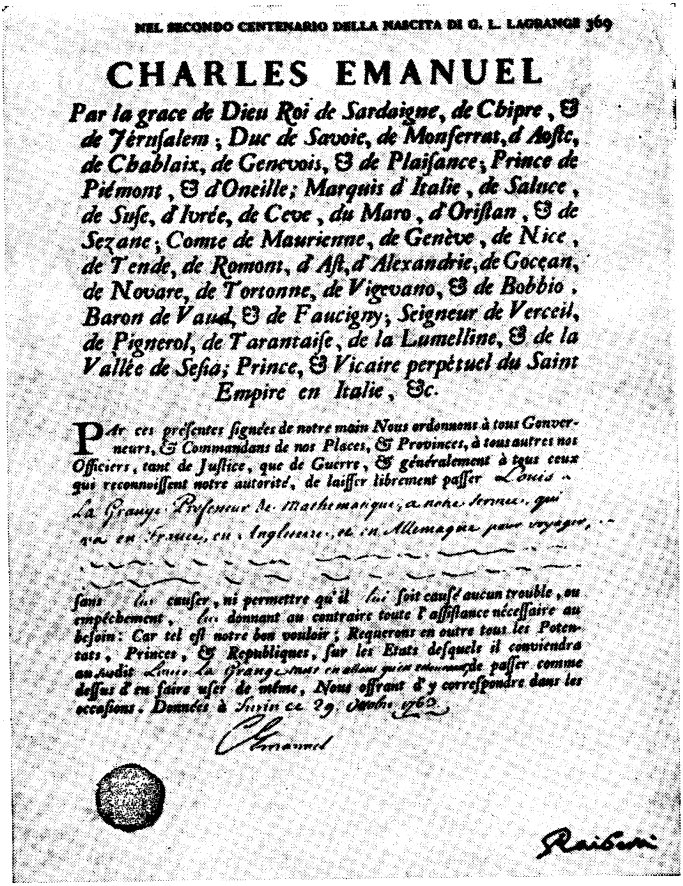
Желание Лагранжа познакомиться с Даламбером исполнилось довольно скоро. В этом ему помог его туринский друг маркиз Карачиоли, который, назначенный посланником в Лондон, должен был ехать туда через Париж. Он пригласил с собой Лагранжа, и тот охотно согласился. В Париж они прибыли в конце 1763 г. Лагранж встретился и познакомился там не только с Даламбером, но и с другими известными математиками и физиками: Клеро, Кондорсе, Фонтеном, Нолле, с которыми в дальнейшем поддерживал оживленную переписку. Тесная дружба установилась у него и с аббатом Жозефом Франсуа Мари, профессором философии в коллеже Мазарини. Это был образованный человек, сведущий и в вопросах математики и физики. Он опубликовал «Трактат по механике» и «Лекции по математике». В дальнейшем он оказал огромную услугу Лагранжу при издании его «Аналитической механики».

Однако задуманная совместно с Карачиоли поездка в Англию не состоялась из-за болезни Лагранжа. Аббат Мари внимательно и предупредительно ухаживал за больным; тогда-то и завязалась дружба этих двух людей на долгие годы. Лагранж всегда потом вспоминал о первой поездке в Париж, как о самых счастливых днях. В мае следующего года он возвратился в Турин.

Через два года в жизни молодого ученого произошли большие изменения. К этому времени Эйлер решил покинуть Берлин и возвратиться в Петербург. В юности Эйлер был учеником Иоганна Бернулли по Базельскому университету, другом его сыновей — Николая и Даниила. Когда братья Бернулли приняли приглашение работать во вновь организованной Петербургской академии наук, они обещали вызвать туда и Эйлера. Он прибыл в Петербург в 1727 г., где, кроме его друзей, работал еще один его базельский знакомый — Яков Герман. Эйлер включился в активную научную работу; вместе с Даниилом Бернулли проводил опытные стрельбы для накопления эмпирического материала о сопротивлении воздуха полету снаряда. Менее десяти лет потребовалось Эйлеру для создания фундаментального трактата «Механика» по динамике материальной точки. В Петербурге по поручению Академии наук Эйлер начал работать и над другим фундаментальным сочинением — «Корабельная наука». По протоколам ученых конференций Петербургской академии наук видно, что Эйлер часто выступал с научными докладами, иногда с двумя в один день. Один из его докладов продолжался в течение трех заседаний конференции. Эйлер вел лекции и занятия в академическом университете (который назывался Гимназией при академии) по математике и физике.

Царствование Анны Иоанновны (1730—1740) — один из самых мрачных периодов в истории российского самодержавия. Царствование сменившей ее Елизаветы тоже не принесло заметного улучшения в отношении двора к ученым и к делам Академии наук. Елизавета назначила президентом Академии наук не отличавшегося образованностью графа К. Г. Разумовского.

Сложившаяся обстановка была Эйлеру не по душе, и он, приняв приглашение прусского короля Фридриха II, переехал в Берлин, где стал директором и вице-президентом Академии наук. За четверть века работы в Берлине Эйлер успел получить чрезвычайно важные результаты в области вращения твердого тела около неподвижной точки, в области гидромеханики, небесной механики, математики. Все это время ученый не терял научных связей с Россией. Оставаясь почетным членом Петербургской академии наук, он принимал на домашнее обучение (а заодно и на пансионат) способных молодых



NEL SECONDO CENTENARIO DELLA NASCITA DI G. L. LAGRANGE 369

CHARLES EMANUEL

Par la grace de Dieu Roi de Sardaigne, de Chipre, & de Jérusalem; Duc de Savoie, de Monferrat, d'Aoste, de Chablaix, de Genevois, & de Plaisance; Prince de Piémont, & d'Oneille; Marquis d'Italie, de Saluce, de Suse, d'Ivrée, de Ceve, du Maro, d'Oristan, & de Sezane; Comte de Maurienne, de Genève, de Nice, de Tende, de Romont, d'Ast, d'Alexandrie, de Goçean, de Novare, de Tortonne, de Vigevano, & de Bobbio, Baron de Vaud, & de Faucigny; Seigneur de Verceil, de Pignerol, de Tarantaise, de la Lumelline, & de la Vallée de Sesia; Prince, & Vicaire perpétuel du Saint Empire en Italie, &c.

Par ces présentes signées de notre main Nous ordonnons à tous Gouverneurs, & Commandans de nos Places, & Provinces, à tous autres nos Officiers, tant de Justice, que de Guerre, & généralement à tous ceux qui reconnoissent notre autorité, de laisser librement passer Louis La Grange Professeur de mathematique, a notre service, qui va en France, en Angleterre, et en Allemagne pour voyager, *sans* lui *causer, ni permettre qu'il* lui *soit causé aucun trouble, ou empêchement,* lui *donnant au contraire toute l'assistance nécessaire au besoin: Car tel est notre bon vouloir; Requerons en outre tous les Potentats, Princes, & Republiques, sur les Etats desquels il conviendra au sudit* Louis La Grange *de passer comme dessus d'en faire user de même, Nous offrant d'y correspondre dans les occasions. Données à* Turin ce 29. Octobre 1762.

Emanuel

Raiberti

Заграничный паспорт Лагранжа, 1763 г.

людей из России. Адъюнктуру у Эйлера прошли ставшие затем известными учеными С. К. Котельников, С. Я. Румовский, М. Сафронов и др. Многие свои статьи и книги Эйлер посылал для публикации в Петербург, как, например, двухтомный трактат «Корабельная наука» (1749). Он давал отзывы о работах петербургских ученых, подбирал кадры на вакантные должности, брал на себя утомительные хлопоты по изысканию, закупке и отсылке в Петербург лабораторного оборудования, типографских станков, аппаратуры. Петербургская академия неоднократно приглашала Эйлера вернуться, и он окончательно не отклонял приглашения. И в 1766 г., после ряда размолвок с Фридрихом, Эйлер принял приглашение возвратиться в Петербург.

Своим преемником на посту президента физико-математического отделения Берлинской академии наук Эйлер хотел видеть Лагранжа и предложил эту кандидатуру Фридриху II. Однако король предпочитал иметь на этом посту более знаменитого ученого и обратился с приглашением к Даламберу. Но Даламбер не собирался покидать Францию. Он написал Фридриху II, что присоединяется к рекомендации Эйлера, предлагавшего на свое место Лагранжа.

Лагранж находился в ином положении, нежели Даламбер: он работал в стороне от крупных научных центров и его заинтересовало предложение Фридриха II. Получив официальное послание с предложением явиться ко двору прусского короля в качестве ординарного члена Берлинской академии наук, Лагранж попросил аудиенции у Карла Эммануила II, занимавшего тогда сардинский трон. Последний не сразу согласился удовлетворить просьбу Лагранжа об отъезде, желая удержать восходящую звезду науки в Сардинии. Тогда Лагранж показал ему письмо Фридриха II, в котором говорилось, что по справедливости необходимо, чтобы величайший геометр Европы жил при дворе самого великого короля. Карл Эммануил, видимо, не был лишен юмора и, отпуская Лагранжа, сказал ему: «Ну что ж? Отправляйтесь к самому великому королю Европы!».

В ноябре 1766 г. Лагранж прибыл в Берлин, заняв высокий пост директора физико-математического класса Берлинской академии наук. Так начался период наибольшей научной активности в жизни Лагранжа.

Работа в Берлинской академии наук

Король Пруссии Фридрих II радушно принял Лагранжа в Потсдаме и повторил ему свое предложение занять вакантное после отъезда Эйлера место. Лагранж выразил надежду, что со временем он войдет в курс дела и постарается стать достойным преемником Эйлера. Об этом же он говорил в своей краткой речи 6 ноября после выборов его в действительные члены Берлинской академии наук.

Коллегами Лагранжа в Берлине были Гастиллон, И. Бернулли (младший), И. Ламберт и др. Из них наиболее известно имя Ламберта.

Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777), сын бедного эльзасского портного, был секретарем базельского профессора Изелина. Он совершенствовал свое образование в общении с профессорами, будучи домашним учителем в их семьях. В 1760 г. в Аусбурге вышел в свет его главный труд по фотометрии. В 1764 г. Фридрих II пригласил Ламберта в Берлин и назначил его членом академии. Ламберту принадлежит одно из доказательств иррациональности числа π, работы по сферической тригонометрии, по теории перспективы и др. Едва ли не главной областью научных интересов Ламберта была астрономия: он занимался исследованием орбит комет, движения Юпитера и Сатурна. Лагранж оценил значение научных трудов Ламберта. 15 июля 1769 г. он писал Даламберу, что Ламберт один из лучших и усерднейших членов академии, на котором держится весь физико-математический класс. Однако Лагранж намекал, что в поведении Ламберта есть элементы чудачества, и, вероятно, поэтому король его недолюбливает, и добавлял, что ему понятна замкнутость и недостаток общительности Ламберта, так как и сам Лагранж чувствует себя неловким в обществе и нелюдимым. Лагранж стал посещать Ламберта, не навязывая ему своих мнений. Вскоре они подружились. Лагранж сообщил Даламберу, что оклад Ламберта составляет 500 талеров, т. е. очень скромный. Даламбер указал на это Фридриху, и оклад Ламберта был несколько увеличен.

Более десяти лет продолжалось сотрудничество и дружба Ламберта и Лагранжа. Когда в 1777 г. Ламберт умер, Лагранж 25 сентября того же года писал Даламберу, что он опечален смертью коллеги, что это незаменимая потеря не только для академии, но и для всей Германии[19]. Позже Гете в прекрасной характеристике Лагранжа отмечал его добрые душевные качества,

---

[19] См.: *Lorey W.* Joseph Louis Lagrange.— «Journ. die reine und angew. Math.», 1936, Bd. 175, H. 4, S. 228.

благородство, умение ценить талант своих коллег, пусть даже менее одаренных, чем он сам. Вряд ли Гете читал работы Лагранжа, в его обширнейшей библиотеке не было ни одного сочинения этого ученого, но впечатление современников о доброте и благородстве Лагранжа сохранилось и перешло к другим поколениям.

Одна из первых работ Лагранжа, созданных в Берлине, была связана с работой Ламберта о трехчленном уравнении вида

$$x^n + px + q = 0.$$

Метод исследования, примененный Ламбертом, основывался на разложении в ряд одного из корней уравнения по возрастающим степеням отношения p/q и на анализе сходимости такого ряда. Лагранж пошел по другому пути. Он рассмотрел уравнение более общего вида

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0$$

и записал ряд, получивший в дальнейшем его имя,

$$\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x) + \frac{1}{2}\frac{d[\varphi(x)]^2}{dx}\psi'(x) + \\ + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx^2}\psi'(x) + \ldots,$$

в котором x после дифференцирования нужно заменить на α; $\varphi(x)$ — функция, определяемая степенным рядом по степеням x с целочисленными показателями; $\psi(x)$ — некоторая другая функция. Лагранж применил этот ряд к решению проблемы Кеплера, т. е. для решения уравнения вида

$$x = t - e\sin x,$$

играющего в астрономии важную роль [20].

В берлинский период Лагранжем были созданы оригинальные работы по алгебре, которые, по мнению Коши, ознаменовали начало новой эры. Позже, в Париже, Лагранж обобщил эти результаты и включил их в добавления

---

[20] *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Лагранжа.— В сб.: Жозеф Луи Лагранж, с. 65.

и комментарии к переводу на французский язык «Алгебры» Эйлера[21].

Наиболее значительные математические работы Лагранжа, выполненные в Берлине, относились к алгебре и теории чисел. Алгебраические работы касались вопросов решения уравнений в радикалах, способов приближенного вычисления корней алгебраического уравнения при помощи непрерывных дробей, методов составления результанта. Интересные исследования Лагранжа были посвящены доказательству основной теоремы алгебры (позже Гаусс дал более корректное доказательство).

Теоретико-числовые исследования Лагранжа, выполненные во время пребывания в Берлине, касались решения квадратных неопределенных уравнений с двумя неизвестными в целых и рациональных числах. Лагранж нашел полное решение таких уравнений. Он доказал, что всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов натуральных чисел.

Лагранж занимался в Берлине также и вопросами решения уравнений в частных производных; проблемой проектирования географических карт, над которой ранее работали Эйлер и Ламберт. В этой связи Лагранжа наряду с Эйлером считают одним из основоположников идеи конформных отображений.

Значительное место в творчестве Лагранжа берлинского периода занимают труды по астрономии, небесной механике и сферической тригонометрии. Еще до переезда в Берлин он рассмотрел задачу о неправильности в движении спутников Юпитера, выдвинутую на конкурс Парижской академией наук. Эта работа[22] была удостоена премии Парижской академии наук в 1766 г. Затем была выполнена работа о прохождении Венеры по диску Солнца. Автор обзора астрономических работ Лагранжа М. Ф. Субботин подсчитал, что из 5000 страниц семи томов, где собраны мемуары Лагранжа, 2000 страниц посвящены астрономическим темам. Большинство этих работ было выполнено в берлинский период.

Официальные обязанности директора физико-математического отделения Академии наук занимали у Лагран-

---

[21] Additions aux éléments d'algèbre d'Euler.— Oeuvres de Lagrange, t. VIII, p. 7—179.

[22] Recherches sur inégalites des satellites de Jupiter...— Oeuvres de Lagrange, t. VI, p. 67—226.

жа не слишком много времени. Он вел спокойную, строго размеренную жизнь. По утрам отвечал на письма, читал. На послеобеденное время назначались деловые встречи. Потом он в одиночестве совершал недолгую прогулку, а вечером, запершись у себя дома, работал до полночи. К нему стремились попасть многие ученые, особенно иностранцы, однако он по возможности ограничивал такие визиты. Напряженный труд привел к серьезному переутомлению. Это выяснилось несколько позже, после переезда Лагранжа в Париж. Научные достижения Лагранжа снискали ему огромный авторитет. В 1776 г. ученый был избран почетным членом Петербургской академии наук.

Наиболее крупным сочинением Лагранжа, где подведены итоги всех важных ранних исследований в различных областях механики, явился двухтомный трактат «Аналитическая механика», подготовленный к изданию в Германии, но изданный уже в Париже.

В Берлине произошли изменения и в личной жизни Лагранжа: он женился на своей дальней родственнице. Узнав об этом, Даламбер писал: «Я узнал, что Вы сделали опасный скачок.. Великий геометр должен прежде всего вычислить свое счастье. Я думаю, что результатом вычисления не было бы супружество» [23].

Известный физик Ф. Араго замечает, что в те времена в обычае выдающихся математиков было уединение, безбрачная, поглощенная наукой жизнь, аскетизм: «...им, как духовным, запрещалось посещать концерты, балы и спектакли... Не сами ли геометры наложили на себя такие цепи?» [24].

Лагранж ответил Даламберу: «Я не знаю, хорошо ли, худо ли я вычислил, или лучше — я совсем не вычислял, потому что я поступил бы как Лейбниц, который не мог решиться на женитьбу. Признаюсь, что я никогда не имел склонности к супружеству... надо было сделать добро одной из моих родственниц; надо было, чтобы кто-нибудь имел попечение обо мне и о моих делах» [25].

Однако его супруга прожила недолго и умерла, по-видимому, от туберкулеза. Лагранж чутко и предупредительно ухаживал за умирающей.

---

[23] *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, т. I, СПб., 1859, с. 380.
[24] Там же.
[25] Там же.

После смерти Фридриха II, несмотря на приглашения тосканского, неаполитанского и сардинского дворов, Лагранж в 1787 г. переселился во Францию. В литературе есть намеки на то, что Герцберг — один из министров нового короля Фридриха Вильгельма II, омрачил Лагранжу дальнейшее пребывание в Берлине. Однако никогда, даже после смерти Герцберга, Лагранж ни словом не упоминал о размолвке между ними, что, как полагают, послужило причиной его отъезда из Пруссии.

Материализм французских ученых конца XVIII в.

Прежде чем во Франции назрела буржуазная революция 1789—1794 гг., там произошла революция философская, в которой выковалось идеологическое оружие демократических слоев общества.

В борьбе против схоластики и теологии, против школы солипсизма и различных течений воинствующего идеализма выросла плеяда блестящих французских материалистов-энциклопедистов: Дидро, Гельвеций, Гольбах, Даламбер, Ламетри, Кондильяк и др.

Поставив своей целью резкий критический пересмотр основ естественнонаучных знаний, основ философии, критику существующих феодальных устоев и сословных привилегий дворянства, выработку новых политических убеждений, просветители объединились вокруг издания «Энциклопедии, или Толкового словаря наук». Устами Руссо, Дидро, Вольтера, Тюрго общественная мысль передовых революционных сил страны вела активное наступление на устои старого мира. Завершали это наступление французы следующего поколения, когда требования просветителей были высечены на стенах ратуши словами Декларации прав человека и гражданина.

Главным редактором «Энциклопедии...» был Дени Дидро, который еще до появления в свет ее первого тома был заключен в Венсенский замок. После выхода первых двух томов «Энциклопедии...» издание было признано еретическим, вредным, направленным к уничтожению королевского авторитета и к укреплению духа независимости. Книга была запрещена, но через год (в 1753 г.) под давлением буржуазной оппозиции запрет был снят с условием обязательного соблюдения умеренности. Однако через

Д. Дидро

четыре года издание снова было запрещено. Лишь в 1765 г. Дидро с помощью друзей удалось закончить издание «Энциклопедии...» за пределами Франции.

Как уже говорилось, соратником Дидро и его ближайшим помощником по изданию «Энциклопедии...» был Даламбер (правда, только до 1757 г.). Подобно Дидро, Гельвецию, Ламетри, Кондильяку, Даламбер был сторонником сенсуализма, признавая ощущения и память человека главными средствами познания истины. Но, в отличие от них, он отводил разуму не менее существенную роль. Мышлению Даламбер придавал самостоятельное значение, отрывая его от свойств материи. По существу, философские взгляды Даламбера не были последовательно материалистическими, за это его критиковал Дидро (в частности, в своем сочинении «Сон Даламбера»). Рационализм Даламбера проявлялся во взглядах на построение механики, отчетливо высказанных в предисловии к трактату «Динамика» (1743). Даламбер считал, что набор всех законов механики нужно свести к наименьшему их числу, положив в основу самые ясные и разумные принципы. Понятие силы он изгонял: движение материи может возникнуть только из самого движения, ибо материя внутренне активна и не нуждается во внешнем начале, активизирующем ее.

Чрезвычайно популярен среди прогрессивно мыслящих парижан был философский кружок (салон) Поля Гольбаха — по происхождению немецкого барона, прожившего бо́льшую часть жизни во Франции, одного из соратников Дидро по «Энциклопедии...». В 1770 г. вышло в свет сочинение Гольбаха «Система природы, или О законах мира физического и мира духовного». Это ярко материалистическое произведение вызвало резкие споры и страсти даже в лагере единомышленников автора — среди просветителей.

Дидро был, очевидно, соавтором или вдохновителем этого труда. Книга вышла под вымышленным именем, анонимно, так как еще были памятны репрессии после появления томов «Энциклопедии...» и труда Гельвеция «Об уме». «Система природы» получила название «библии атеизма». Вольтер осуждал крайний атеизм книги. Отрицательно отнесся к ней и Руссо.

Сразу после выхода книга была запрещена и сожжена по приговору парижского парламента. Автор не был подвергнут репрессиям только потому, что остался неизвестен. В качестве возможных авторов и соавторов называли Дидро, Нэжона, а позже и Лагранжа [26], который одно время был учителем в доме Гольбаха.

«Эта книга — заключение французского материализма, это лапласовское «j'ai dit tout» («я все сказал».— *Ред.*). После этой книги можно было делать частные приложения, можно было комментировать „System de la nature...", но далее идти в дерзости отрицания невозможно»,— так характеризовал этот труд А. И. Герцен [27].

Враги энциклопедистов не замедлили выступить с критикой «системы природы». Их поддержал Фридрих II, носивший ранее личину «друга» просветителей. Это еще раз свидетельствовало о том, что «Система природы» — злободневное философское произведение, содержащее в себе

---

[26] *Ланге Ф. А.* История материализма. СПб., 1899, с. 283.

[27] *Герцен А. И.* Избранные философские произведения, т. I. М., Госполитиздат, 1948, с. 292.

синтез материалистического мировоззрения и новейшего для того времени механистического естествознания. Предисловие автора начиналось словами: «Человек несчастен лишь потому, что отрекся от природы. Его ум до того заражен предрассудками, что его можно было бы считать навсегда обреченным на заблуждения» [28]. Далее автор говорит, что пора разрушить иллюзии и начать черпать в природе целебные средства против них. Должен победить разум, руководимый опытом. Образ мыслей человека определяется его образом бытия. Цель человека — существовать и сделать свое существование счастливым. В двух частях книги анализируется вопрос о происхождении различных предрассудков в науке и обществе, проповедуется материалистический взгляд автора на различные проблемы.

При обсуждении проблем происхождения представления о божестве, о доказательствах его существования, о его атрибутах, о способе, каким божество влияет на счастье людей, подвергаются резкой критике теологические элементы «Начал» Ньютона: «...У великого Ньютона пропадает мужество, он добровольно становится слепым, лишь только речь заходит о предрассудке, который привычка заставляет его считать священным» [29].

Здесь речь идет о роли первотолчка в системе мира Ньютона. Согласно воззрениям французских материалистов, «идея природы необходимым образом заключает в себе идею движения. Но спросят нас: откуда эта природа получила свое движение? Мы ответим, что от себя самой, ибо она есть великое целое, вне которого ничего не может существовать. Мы скажем, что движение — это способ существования (façon d'être), необходимым образом вытекающий из сущности материи» [30].

Все формы движения материи Гольбах, как и другие энциклопедисты, сводили к механическому перемещению. Что касается вопросов социологии, то Гольбах осуждал феодальный строй и намечал переход к «царству разума», т. е. просвещенной монархии, в чем сказывалась ограниченность его социально-политических взглядов.

---

[28] *Гольбах П. А.* Избранные произведения, т. 2. М., Госполитиздат, 1963, с. 55.
[29] Там же, с. 471.
[30] Там же, с. 75.

Деятельность французских энциклопедистов приобщала к проблемам естествознания широкие круги читающей публики. Проблема устойчивости тел солнечной системы была актуальной в XVIII в., ее обсуждение проходило не только в научных журналах, но и в философской литературе. Трактовка этой проблемы в сочинении Гольбаха «Система природы» свидетельствует о знакомстве автора с современными ему работами по небесной механике.

В трудах астрономов та же проблема приобретала специальный характер: требовалось изучить вопрос об изменениях элементов орбит планет под действием возмущающих сил (т. е. сил тяготения не основного притягивающего тела). Наиболее существенные результаты в решении этой задачи были получены двумя выдающимися учеными эпохи — Лагранжем и Лапласом. В течение более десяти лет (1773—1784) оба астронома переписывались друг с другом. Этап за этапом развивалось глубокое исследование неравенств движения планет (отклонений от теоретически рассчитанного движения за счет дополнительных факторов). Эти исследования привели обоих ученых к интереснейшим общим результатам в теории тяготения.

«Все изменения оси, эксцентриситета и наклонения любой планетной орбиты постоянно заключены в тесных пределах. Возмущения, производимые планетами, заставляют эти величины претерпевать колебания определенных размеров... Таким образом, можно сказать, что, насколько это зависит от рассмотренных нами астрономических причин, устойчивость солнечной системы обеспечена» [31].

Работы Лагранжа и Лапласа современники связывали с актуальными философскими проблемами. Даламбер определял предмет космологии в «Энциклопедии...» как знание о мире, раскрывающее «часть общих законов, коими управляется Вселенная» [32]. Каждый новый факт астрономии, представлявший недавно загадку и получивший затем строго научное разъяснение, сразу же становился достоянием материалистического учения о законах приро-

---

[31] *Берри А.* Краткая история астрономии. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1946, с. 270.

[32] См.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, с. 109.

ды, развиваемого французскими просветителями. Фундаментальные результаты исследований Лапласа были включены в его пятитомную «Небесную механику» и еще более категорически, чем у Лагранжа, утверждали, что планетам солнечной системы на протяжении миллионов лет не угрожает катастрофа. Лаплас не в меньшей степени, чем Лагранж, был выразителем духа рационалистического века Просвещения. Наиболее четко выкристаллизованная формула механического детерминизма XVIII в. содержится в следующих знаменитых строках Лапласа: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, проявляющиеся в природе, и относительное положение всех ее частей... обнял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее так же, как и прошедшее, предстало бы перед его взором» [33].

Все явления природы — капиллярность, теплообмен, химические процессы, мышление — Лаплас пытался объяснить на основе закономерностей механики.

Существует рассказ о том, как Наполеон, просмотрев трактат Лапласа «Небесная механика», преподнесенный ему автором, поинтересовался, почему в книге нет упоминаний о боге, тогда как у Ньютона богу отведено значительное место. «Гражданин Первый консул, в этой гипотезе я не нуждался»,— ответил Лаплас [34].

Еще Даламбер в середине XVIII в., стремясь последовательно реализовать требования рационализма при построении системы динамики (механика была фундаментом естествознания той эпохи), искал пути свéдения этой науки к наименьшему числу наиболее ясных и разумных принципов.

«С давних пор намеревались, и даже не без успеха, выполнить по отношению к математике некоторую часть того плана, который нами только что намечен: алгебру удачно применяли к геометрии, геометрию к механике и каждую из этих трех наук ко всем остальным наукам, основанием и фундаментом которых они являются. Однако

---

[33] *Лаплас П. С.* Опыт философии теории вероятностей. М., 1908, с. 9.

[34] *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас. М., Жургаз, 1937, с. 24.

при этом не заботились ни о сведении принципов этих наук к наименьшему числу, ни о том, чтобы придать этим принципам всю ту ясность, которой можно было бы желать. Особенно пренебрегали этой задачей, мне кажется, в механике... В настоящем сочинении я поставил себе двойную цель: расширить рамки механики и сделать подход к этой науке гладким и ровным... Одним словом, я стремился расширить область применения принципов, сокращая в то же время их число» [35].

Такое программное высказывание Даламбера приведено во вводной части его «Динамики». Даламбер сделал важный шаг на пути к цели. Он предложил принцип, получивший впоследствии и его имя, который сводит задачи динамики к задачам статики. Но единообразной методики решения всех задач динамики и задач статики он не дал [36].

Задачу, поставленную в общем плане Даламбером, более успешно разрешил Лагранж, найдя самое полное выражение всех механических свойств в так называемой «общей формуле динамики». Действительно, общая формула динамики Лагранжа, сочетающая принцип Даламбера с самым широким принципом статики — принципом возможных перемещений, позволила ему вывести из нее разнообразные уравнения движения и равновесия механических систем. Так был найден стандартный аппарат решения многих проблем механики, о чем Лагранж писал в предисловии ко второму изданию «Аналитической механики»: «Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достичь, не оставит желать чего-либо лучшего» [37].

Следует подробнее остановиться на методе, которым Лагранж исследовал законы механики. Он мастерски провел анализ развития важнейших принципов статики, динамики, гидростатики и гидродинамики, опираясь на документальный исторический материал. Но при этом исто-

---

[35] *Даламбер.* Динамика. М.— Л., 1950, с. 16, 17.
[36] Более подробно об этом см. в главе «Общая формула динамики» (с. 124—128).
[37] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 9.

рические экскурсы не были для него самоцелью или данью любви к истории науки, они служили методом выявления сравнительной ценности отдельных принципов механики. При этом глубже познавалась сущность и содержание законов, широта их и общность. Именно в историческом введении «О различных принципах статики» находим мы вывод так называемой «общей формулы статики». Историческое введение к разделу «Динамика» вплотную подводит читателя к получению «общей формулы динамики» Лагранжа.

Мастерство в проведении исторического анализа развития той или иной отрасли точных наук проявляется и в других сочинениях Лагранжа, например в теоретико-числовых исследованиях. Об этой специфической черте творчества Лагранжа его современник Деламбр писал: «Это вдохновенное сочинение (речь идет об «Аналитической механике».— *И. Т.*) возвысилось над всеми его предыдущими работами, которые он мог вновь переиздать, в нем царит всеохватывающее философское рассуждение; это также наиболее прекрасная история данного раздела наук, история, которую мог написать только человек, мыслящий на высоком уровне в этой области, возвышающийся над всеми своими предшественниками; она составила раздел, наиболее интересный даже для тех, кто мало знаком с деталями этой науки и ее аппарата. Подобный очерк устанавливает наилучшим образом внутреннюю связь между всеми принципами, на которые опирались крупные ученые механики в своих исследованиях... Эти исследования не только дань любознательности весьма эрудированного автора, они также демонстрируют всю широту и плодотворность таких средств» [38].

Итак, исторический анализ в работах Лагранжа играет роль инструмента для открытия эвристических ценностей науки.

Сведя аппарат механики к совокупности операций, подчиненных планомерному и единообразному ходу, Лагранж считал, что после этого «механика становится новой отраслью анализа».

Это сказано в предисловии ко второму изданию трактата. Создатели технической механики XIX в. видели в

---

[38] *Delambre.* Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange.— Oeuvres de Lagrange, t. I, p. XLIX, L.

таком изложении ущерб другим аспектам в механике; они упрекали Лагранжа в одностороннем увлечении и даже злоупотреблении аналитическими методами.

Однако рационалистическое стремление построить наиболее целостную и стройную систему механики было для XVIII в. чрезвычайно прогрессивным явлением. Общая формула динамики Лагранжа, из которой как частный случай в определенных условиях вытекает и общая формула статики, аналитический аппарат, разработанный им для решения самых различных проблем механики — все это было результатом не только логических построений ученого, а итогом рассмотрения длинной исторической цепи познанных ранее фактов. Изящной схеме Лагранжа предшествовал обширнейший общечеловеческий опыт, глубоко проанализированный им и обобщенный. Выдающиеся ученые Франции конца XVIII в.,— Даламбер, Лаплас, Лагранж, Кондорсе, не всегда являясь философами в прямом смысле слова, во многом содействовали просветителям, помогая создавать прогрессивное мировоззрение третьего сословия.

Лагранж во Франции

Великое творение Лагранжа — трактат «Аналитическая механика» — еще находилось в одном из парижских издательств, когда в Париже появился сам автор.

Лагранж приехал в страну, имевшую для него большую притягательную силу, в страну выдающихся геометров, химиков, просветителей, философов, литераторов.

Это было в 1787 г. Лагранж стал бывать на заседаниях Парижской академии наук, иностранным членом которой он состоял в течение последних пятнадцати лет. Ему дали право голосовать с решающим голосом. А вскоре его звание иностранного члена академии было изменено на звание заслуженного пенсионера, что, по существу, равнялось званию действительного члена академии. Королева Мария Антуанетта сразу же проявила к нему благосклонность, считая, что новый академик приехал почти из Австрии, т. е. с ее родины, и осыпала его различными почестями. Лагранж получил прекрасную квартиру в Лувре. Все это порождало зависть некоторых из его новых коллег, жаждавших внимания двора.

Лагранж сблизился с учеными, собиравшимися еженедельно у Лавуазье; среди них были Кондорсе, Лаланд, Байи, Лаплас, знакомые Лагранжу своими работами в области небесной механики, Менье, Вандермонд, Монж. На этих собраниях обсуждались не только научные проблемы, но и вопросы преобразования народного просвещения и образования, а также политические вопросы. Многие из названных ученых примыкали к политическому обществу, которое с первых шагов революции стало называться «Обществом 1789 года». Это общество, возглавляемое Мирабо, Сиейесом, Кондорсе, Лавуазье, возникло еще до революции, а позже, в ходе революции, начало скатываться на позиции монархического парламентаризма. Ограничиваясь идеалом «свободной конституции», оно постепенно становилось контрреволюционным.

Ученые, составлявшие ядро общества, собирались в доме Лавуазье. Перед революцией кружок Лавуазье был так же знаменит в научном мире Европы, как и его богатейшая лаборатория.

В 1781 г. известный русский астроном А. И. Лексель писал из Парижа Альбрехту Эйлеру (сыну знаменитого Леонарда Эйлера): «Г-н Лавуазье — молодой человек очень приятной наружности, прекрасный и трудолюбивый химик. У него красивая жена, любительница литературы и председательница на собраниях академиков, когда они пьют у них чай после академических заседаний. Я несколько раз посещал эти собрания» [39].

Темы диспутов в кружке Лавуазье переходили с вопросов науки к проблемам философии, истории человеческого разума; здесь обсуждались различные религии и их происхождение, общая теория языков народов, вопросы медицины, ботаники, химии и математики. Не менее азартно обсуждались проблемы экономики и социального переустройства. Энциклопедизм ушедшего поколения, которое выполнило свою историческую роль идеологической подготовки революционных настроений,— поколения Руссо, Кондильяка, Дидро, Даламбера — был в такой же мере свойствен ученым Франции эпохи буржуазной революции: Монжу, Л. Карно, Кондорсе, Лапласу, Лавуазье.

Лагранж был подавлен разносторонностью, обширностью знаний и интересов его новых коллег. Нередко

---

[39] *Дорфман Я. Г.* Лавуазье. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1962, с. 254.

его можно было видеть рассеянно стоявшим у окна, со взором, меланхолично устремленным вдаль. Когда к нему обращались, он отвечал, но казался посторонним всему, что происходило вокруг. Когда ему сообщали о каком-нибудь интересном результате в точных науках, он обычно говорил: «Я очень рад, когда-то я начинал этим заниматься и теперь буду освобожден от этой проблемы». Однако редкие реплики и замечания Лагранжа бывали очень глубокими.

1787 г. в творчестве Лагранжа был в некотором смысле переломным. Он только что закончил работу над рукописью величайшего своего творения — «Аналитической механики». От перенапряжения, от резкой перемены обстановки он впал в депрессию. В его замкнутый мир механика и математика вдруг хлынул могучий поток всеобъемлющего учения энциклопедистов — революционеров во многих областях естественных знаний. Узкая дорога, уводящая в глубины абстрактной математики,— дорога, по которой шел Лагранж,— не позволила ему наблюдать обширный мир явлений физики, химии, биологии, медицины, не говоря уж об экономических и социальных проблемах, волновавших ученых Франции, и его начала угнетать узость своих воззрений. Наступило некоторое разочарование в математике и механике, период переоценки ценностей. Это началось раньше, в Берлине, откуда он писал Даламберу: «Я начинаю чувствовать силу моей инерции, которая понемногу увеличивается, и я не могу сказать с уверенностью, что в течение будущего десятилетия я еще буду заниматься математикой. Мне кажется, что руда слишком глубока или, по крайней мере, можно открывать только разорванные жилы и часто надобно прекращать работу. Химия и физика представляют ныне гораздо более сокровищ, и открытие их гораздо легче. Поэтому в наше время все обратились к этим источникам» [40].

Однако это состояние не было полной апатией. Активно работающая мысль Лагранжа с математики переключилась на другие предметы: его увлекала философия, история, медицина, лингвистика. Он отдавал им весь досуг. Более двух лет он не притрагивался к своей «Аналитической механике», относительно переиздания и до-

---

[40] Oeuvres de Lagrange, t. XIII, p. 368.

полнения которой у него позже появилось много идей.

Особенно увлекала Лагранжа химия. Занятия химией приносили ему огромное удовлетворение, он даже сравнивал эту область естествознания с алгеброй по достоверности и надежности научного языка, образов и моделей. Эти естественнонаучные занятия Лагранжа были столь серьезными, что нашумевшее сенсационное произведение «Система природы», автор которого скрывался под псевдонимом, многими приписывалось именно ему. Лишь позже было установлено, что автором этой ярко материалистической книги был Поль Гольбах. Но даже до сих пор существует мнение, что отдельные фрагменты книги были созданы автором ранее, чем основная часть, при участии Лагранжа и Дидро.

Однако в литературе встречается и другая точка зрения о его интересах того периода. Чаще всего авторы биографических очерков рисуют нам образ математика, отрешенного от политических событий и проблем той страны, в которую он попал и где оставался чужим, безразличным к общественным изменениям и преобразованиям, совершаемым мирным или революционным путем, к философским и экономическим воззрениям. Вот одно из высказываний подобного рода: «Он служил сперва самодержавному Фридриху Великому в Берлинской академии наук, отдав там науке около 20 лет своей жизни. Он служил потом революции 1789 г. во Франции, а умер на службе Наполеона, получив звание сенатора и графское достоинство. Он не был привязан ни к одной из властей, оппортунистически приспособляясь ко всем. Но он не мог сказать и честно не сказал, что он кого-либо любил страстно и кому-либо сделал заметное добро. Он прошел через жизнь в эгоистической замкнутости, в созерцательном самозабвении ученого, погруженного в свои замыслы» [41].

Этот фрагмент, конечно, сгущает черные тона. Даже скупые сведения о разнообразной деятельности Лагранжа во Франции разрушают вывод об «эгоистической замкнутости» математика Лагранжа. Его новые коллеги и друзья шаг за шагом вовлекали его в различные сферы деятельности, ранее чуждые ему.

---

[41] *Райнов Т. И.* Три юбилея.— «Социалистическая реконструкция и наука», 1936, № 7, с. 94.

Например, Лавуазье в это время заканчивал исследование «О территориальном богатстве Франции», во введении к которому указывал, что расчеты являются основой политической экономии. В работе детально рассматривались и анализировались статистические данные о ресурсах страны. Этот труд в неоконченном виде был доведен до сведения Национального собрания, где получил одобрение. В эту деятельность Лавуазье вовлек и Лагранжа, который принял участие в работе. Так появился труд Лагранжа «Эскиз политической арифметики», опубликованный им анонимно в 1796 г. Лагранжа ввели в администрацию Монетного двора, несмотря на иностранное подданство, он участвовал в проведении мероприятий по упорядочению финансов страны, принимал участие в создании статистической сводки об экономическом состоянии Франции в период блокады и интервенции. Ему было поручено секретное и, без сомнения, важное дело — выяснение вопроса, какое время Франция может прокормить сама себя. Результаты расчетов Лагранжа свидетельствовали о том, что в стране достаточно зерна, но потребности в мясе удовлетворяются лишь наполовину. Это важное государственное поручение показывает, сколь высок был престиж Лагранжа в республиканской Франции.

Особенности политической жизни Франции во время революции накладывали определенную печать на творчество всех ученых страны, в том числе и на Лагранжа. Закон 1793 г. предписывал каждому иностранцу покинуть пределы Франции в короткий срок. Лагранж знал, что его место в Берлинской академии остается вакантным и сохраняется для него. После казней Байи и Лавуазье, потрясших Лагранжа, он начал раздумывать, не принять ли приглашение правительства Пруссии и не вернуться ли в Берлин. Однако многие причины побудили его остаться в стране, в которой, по меткому выражению Деламбра, он нашел вторую родину.

Не только дружеское и внимательное отношение выдающихся ученых революционной Франции обусловили возрождение душевных сил Лагранжа. Отношение к нему революционного Конвента было самым доброжелательным: специальное постановление Комитета общественного спасения разъясняло, что декрет об иностранцах (они высылались из Франции) не касается Лагранжа, так как в связи с запросами войны и революции он вместе с другими учеными объявлялся «мобилизованным» для нужд обороны, а именно: для расчета взрывной силы пороха.

Это произошло в самый опасный момент становления еще не окрепшей республики, когда, кроме внутренних роялистских мятежей, перешла в наступление внешняя реакция, замкнув кольцо блокады вокруг Франции. Тяжелое положение на фронтах усугублялось недостатком сырья, металла, боеприпасов. Из-за блокады прекратился ввоз индийской селитры, и перед Конвентом встала задача организации добычи отечественной селитры из бедных почвенных пород Франции и изготовления пороха. Все население страны было мобилизовано для обороны страны; старики, женщины и дети привлекались к промывке земли и добыче селитры. Три министерства, два специальных управления и, наконец, центральная комиссия по производству селитры, пороха и разработки недр руководили этой работой. В итоге за девять месяцев было добыто в 12 раз больше того, что составляло среднегодовую добычу дореволюционной Франции.

Одновременно вставали и другие технические проблемы: разработка новых способов приготовления пороха, усовершенствование орудий, перестройка металлообрабатывающей промышленности и т. д. Ученые Франции с энтузиазмом включились в работу. Их возглавлял Гаспар Монж, теоретические и практические предложения которого сыграли важную роль в обороне страны. Ученые внесли весьма существенный вклад в дело победы республики; менее чем за год революционные войска очистили территорию страны от врагов.

Результаты исследований Лагранжем взрывной силы пороха были изложены в мемуаре «Формулы, относящиеся к движению ядра внутри пушки», который при жизни автора не был опубликован из-за секретности материала.

У Лагранжа больше не было колебаний относительно возвращения в Берлинскую академию наук: он остался в Париже. Взяло верх желание быть свидетелем исторических событий величайшей важности: «Tu l'as voulu...» («Ты этого хотел...»),— повторял он себе слова мольеровского персонажа. Позже он не раскаивался в том, что вместе с выдающимися учеными — патриотами

Франции — пережил все взлеты и падения ее политического курса, находясь в гуще событий.

Якобинский Конвент и созданный при нем Комитет общественного спасения стали штабом проведения наиболее прогрессивных мероприятий: оттуда исходили прозорливые инструкции и указания, иногда даже декреты, направляющие силы ученых и инженерную мысль на самые актуальные участки научно-технического прогресса. Именно такое действенное руководство экономикой обеспечило небывало быстрый подъем производства. Лучшие кадры страны использовались с максимально возможной производительностью, всех пронизывало чувство политической ответственности.

Лагранж активно участвовал в разработке новой метрической системы. Он был одним из самых активных членов Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел, членом Бюро долгот, созданным в 1795 г. для разработки методов навигации, для картографических работ, а также для улучшения службы времени.

Во всех прогрессивных нововведениях кульминационного периода революционной эпохи конца XVIII в.: создании Нормальной и Политехнической школ, организации периодического издания «Journal de l'Ecole politechnique», создание Института Франции — во всем этом Лагранж принимал активное участие. Именно такая жизнь, насыщенная важными событиями, сознание полезности своих усилий и эффективность приложений теоретических исследований в экономике и быте народа вывели его из депрессии. Он перестал искать новые пути вне математических наук. Он вновь ощутил прилив жизни и творческих сил.

Французские ученые — коллеги Лагранжа

Не только общая обстановка перестройки всех сфер политической, экономической и духовной жизни народа, но и личные дружеские узы оказали бодрящее действие на Лагранжа. Не все из его друзей оказались последовательными революционерами, но все самоотверженно трудились для прогресса науки и техники революционной Франции.

Краткие характеристики деятельности наиболее близких Лагранжу ученых этого периода начнем с самого яркого примера — с рассказа о Гаспаре Монже. О его геометрических исследованиях Лагранж говорил с восхищением: «Этот пострел со своим происхождением поверхностей идет к бессмертию!»

А вот и другое высказывание Лагранжа: «Этот дьявол Монж всегда полон новых и смелых идей».

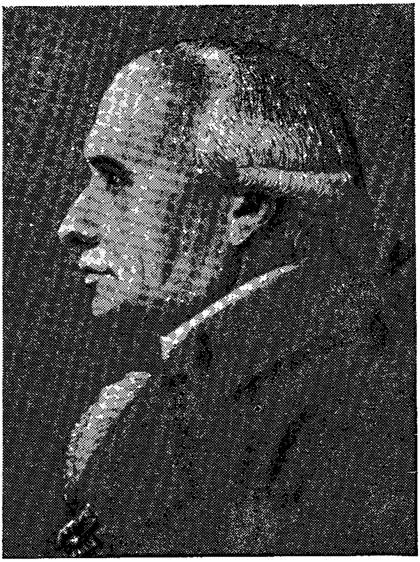
Гаспар Монж (1746—1818) родился в семье разносчика и торговца мелочью — человека трудолюбивого, разумного, сумевшего дать образование трем своим сыновьям. Старший сын — будущий ученый — окончил городское училище монашеского ордена и был направлен сначала в Лион, а позже в Мезьер для преподавания точных наук будущим лепщикам, архитекторам, строителям фортификаций и инженерам. В Мезьере Монж изобрел новые методы проектирования, от которых берет начало начертательная геометрия. Мезьерская школа хранила его открытие в тайне, поэтому известность пришла к Монжу благодаря другому его исследованию, посвященному применению трансцендентного анализа к вопросам аналитической геометрии.

Сохранились высказывания о большом педагогическом таланте Монжа. Не обладая ораторским красноречием и даже не имея четкой дикции, он был любимцем слушателей. Один из них бросил крылатую фразу: «Многие говорят лучше Монжа, но никто не умеет так хорошо преподавать». Объяснялось это любовью Монжа к своим слушателям, вниманием к ним: он всегда видел, когда кто-то в последних рядах амфитеатра терял нить рассказа. Монж подходил к слушателю и читал новую частную лекцию, начиная ее словами: «Я, мой друг, начну повторение с того места, с которого ты перестал меня понимать».

Очень удачно Монж пользовался жестикуляцией, излагая вопросы теории поверхностей. Позже, в преклонном возрасте он сказал, «Я, друзья мои, принужден оставить вас и навсегда отказаться от профессорства, потому что мои руки устарели и не повинуются мне согласно с моими намерениями» [42].

---

[42] *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, т. I, с. 506.



Г. Монж

Ценность его лекций была не только в педагогическом мастерстве, но главным образом в оригинальности того материала, который создавался им порой на глазах у слушателей. Монж творил на лекциях, думая вслух.

В 1780 г. Монж был избран членом Парижской академии наук, когда ему предложили преподавать гидравлику в Парижской морской школе.

Основные области математики, в которых Монжу принадлежат важные результаты,— это геометрия в пространстве, начертательная геометрия (основателем которой его считают), теория дифференциальных и конечных уравнений. Он оставил ряд важных работ по механике, химии, метеорологии, фортификации.

Энергия Монжа, его желание и готовность отдать все силы молодой Французской республике заражали других ученых. Усталость и депрессия Лагранжа после издания «Аналитической механики» в 1788 г. были развеяны этим энтузиазмом.

Революционные события 1789—1793 гг. Монж встретил восторженно. Он, как и большинство ученых той эпохи, понимал важность революционных сдвигов для развития экономики, техники и науки Франции.

Законодательное собрание в 1789 г. сформировало первое революционное Временное правительство. Кондорсе, которому было предложено морское министерство, отказался от этого поста, благородно назвав более подходящего, по его мнению, ученого — Монжа. В трудное время, в период преодоления разрухи и последствий безхозяйственности монархистов, в период чистки аппарата от контрреволюционных элементов Монж сделал много полезного для укрепления флота.

Выйдя в отставку в апреле 1793 г. из-за новой реорганизации морского министерства, Монж принял деятельное участие в подготовке средств для защиты родины от интервенции. Конвент в обстановке блокады контрреволюционных сил весной 1793 г. принял решение сформировать 900-тысячную армию. Но в это время выяснилось, что арсеналы пусты. Дореволюционное правительство привело в упадок не только казну и экономику страны, оно развалило и армию. Не было пороха. Не было меди для сплавов, необходимых для литья пушек. Не хватало ни оружия, ни одежды, ни обуви даже для десятой доли армии, собираемой Конвентом. Комитет общественного спасения обратился к ученым Франции.

На первом заседании представителей науки одним из труднейших был вопрос о порохе: где взять селитру? «Во французской почве,— отвечал Монж,— в конюшнях, в погребах и на кладбищах. Вы даже не думаете, как ее там много. Селитры добудем вдоволь и через три дня зарядим ею пушки». Монж возглавил распространение простых и ясных воззваний, по которым все граждане Франции тотчас принялись за дело. Проблема изготовления пороха была вскоре решена.

В деле налаживания производства оружия роль Монжа была так же велика. Днем Монж разъезжал по мастерским, налаживая их работу, ночами писал наставления. Так появились его труды «Памятка металлисту» и «О пушечном искусстве», где давались четкие инструкции по формовке литья в песке, по сверлению пушечных стволов, по обработке металла. Араго пишет: «Монж был душой всей обширной системы работ: одушевленный патриотическим энтузиазмом, он покорил себе всех своих товарищей и увлекал их за собой всепожирающею деятельностью».

Монж вел напряженную организаторскую и научную работу. При этом у него, как и у большинства граждан страны, завтрак состоял из сухого хлеба. Как-то его жена нашла возможность прибавить к завтраку кусок сыру и редис. Это дало повод недругам распространить слух: Монж начинает роскошествовать; он ест редиску... А Монж в это время был на грани полного упадка сил.

После контрреволюционного переворота 9 термидора Монж вынужден был некоторое время скрываться. Несмотря на клеветнические нападки врагов, термидорианский Конвент должен был признать заслуги Монжа перед отечеством, его недюжинный талант ученого и организатора и снять с него опалу. В октябре 1794 г. он был привлечен к преподаванию во вновь организованной Нормальной школе; в это же время он активно участвовал в организации будущей Политехнической школы.

С именем Монжа связано создание Института Франции (новой академии наук) в 1795 г., организация Консерватории (хранилища) технических искусств и ремесел, организация Института Египта. В связи с поручением правительства оценить научные материалы, передаваемые Италией в счет контрибуции, Монж познакомился с наукой, искусством и обычаями этой страны. А летом 1798 г. он принял участие в экспедиции в Египет.

Эскадру возглавлял флагманский корабль «Восток», на нем и находился Монж. Он так увлекательно рассказывал спутникам об Италии, о ее искусстве и культуре, что эти беседы постепенно превратились в ежедневные научные семинары. В ученых беседах участвовали Бонапарт, Бертолле, Бертье, Богарне, но Монж был наиболее популярным лектором. Один из этих слушателей, писатель Арно, сообщает о Монже: «Он был красноречив и, однако, не умел говорить: его красноречие, лишенное всякой напыщенности, заключалось в смеси жестов и слов, которая с помощью мимики воздействовала на ум слушателей не только через слух, но и через зрение и посредством импровизации завладевала их вниманием, пожалуй, не меньше, чем наилучшие подготовленные речи. Смотреть на него во время его речи было истинным удовольствием. Невозможно выразить, сколько ума чувствовалось в его пальцах... Его живость представляла решительный контраст важности Бертолле. Хотя Бертолле объяснял все до конца, его слушали меньше, чем Монжа, который никогда не заканчивал ни одной фразы» [43].

Монж и Бертолле были очень дружны, хоть и обладали противоположными характерами. Это проявилось в сражении с турками на пути к Каиру. Бертолле был хладнокровен и подбирал камни из затонувшей вблизи берега минералогической коллекции. Монж поднимал дух солдат и был полон энергии: заряжал пушки, наводил их на неприятеля... О мужестве обоих упомянуто в бюллетене тех времен. Они пронесли дружбу сквозь десятилетия, хоть в эти годы общественные потрясения часто делали врагами не только друзей, но и родных.

В 1798 г. в Каире был учрежден Египетский институт наук и искусств. В математическое отделение института вошли Бонапарт, Монж, Фурье, Малюс и др. Монж был избран президентом Египетского института; вице-президентом — Бонапарт, а Фурье — непременным секретарем.

В первых же записках института Монж дает правильное объяснение миража как оптического явления. До этого господствовала «теория жгучих линий».

Бонапарт решил представить институту свой научный труд; «...не потому ли,— замечает Араго,— что некогда царь Петр Великий принял титул академика не прежде, как сообщив Парижской академии наук карту и описание Каспийского моря?». Многие из окружения Бонапарта пришли в восторг от такого решения их повелителя: один лишь Монж воспротивился этому намерению. Он сказал главнокомандующему, что у того нет времени для составления хорошего труда, а посредственная продукция не должна выходить из рук вице-президента.

Монж был до конца своих дней безмерно предан Наполеону. В начале XIX в. он был сенатором от Льежа, после провозглашения империи в 1804 г. получил от императора титул графа.

Падение Наполеона подействовало на престарелого Монжа удручающе, но он не отрекся от своего кумира и после реставрации Бурбонов.

---

[43] Гаспар Монж. Сб. статей к 200-летию со дня рождения. Л., Изд-во АН СССР, 1947, с. 72—73.

Л. Карно

Реакция не пощадила знаменитого ученого: его лишили титулов, пенсии, звания академика, исключили из Политехнической школы. Монж не мог эмигрировать; его разум помутился. 28 июля 1818 г. великий ученый скончался. Общественность Франции и особенно студенты Политехнической школы, вопреки усилиям реакции, пришедшей к власти, сохранили память о выдающемся ученом.

Лазар Карно (1753—1823) родился в Нолэ в семье адвоката, у которого было восемнадцать детей. Обучение проходил в коллеже, затем в семинарии и мезьерской инженерной школе, где читал лекции Гаспар Монж. В 1773 г. в чине поручика он был направлен в Кале. Не по годам серьезный, молодой офицер много читал и разделял взгляды прогрессивной части третьего сословия предреволюционной Франции. Эти взгляды он высказал в своем первом напечатанном сочинении — «Похвальное слово Вобану».

Первым научным сочинением Карно был трактат «Опыт о машинах вообще», изданный анонимно в 1783 г. В третьем издании (1803) трактат был расширен и переименован: он стал называться «Основные принципы равновесия и движения».

Одна из главных проблем этого сочинения — вывод условия равновесия машины при помощи расчета приращения работы силы на виртуальных перемещениях точек приложения сил (термин «работа» был введен в XIX в.).

Для вывода этого условия Карно ввел заменяющую схему грузов, производящих в точках системы те же действия, что и произвольная система сил. Идея вводить заменяющую схему грузов вместо сил оказалась в XVIII в. чрезвычайно плодотворной, она использовалась в аналитической статике многими современниками Карно — Лагранжем, Фурье, Ампером и др. Заменяющие схемы (блоков, рычагов, полиспастов и т. д.) при выводе начала возможных перемещений свидетельствуют о тесной связи этого начала с техникой машин и механизмов. Само начало возможных перемещений выросло на почве изучения машин, и в обоснованиях его с помощью заменяющих схем видны следы технического происхождения этой теории.

Карно ввел понятие геометрического движения, т. е. такого, которое допускается связями (в современной терминологии следовало бы уточнить: идеальными, удерживающими). В современной механике «геометрическим движениям» соответствуют виртуальные перемещения точек системы.

Карно рассматривает некоторую механическую систему (машину), в произвольных точках которой приложены силы F (рис. 1). Скорости, которые могут иметь точ-

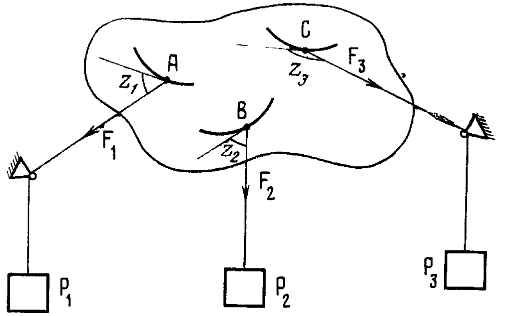


Рис. 1. Заменяющая схема Карно

ки приложения сил в первое мгновение геометрического движения, обозначаются через u, угол между направлением силы F и скорости u — через z. Карно выводит условие равновесия «машин» под действием заданных сил. Он рассуждает следующим образом.

Действие сил F в точках их приложения можно заменить действием грузов P. Для этого в каждой точке A, B, C,... приложения силы нужно прикрепить нить (невесомую, нерастяжимую), идущую вдоль направления приложенной силы F и переброшенную через неподвижный блок. К свободно свисающему отвесному концу нити ниже блока нужно привязать гирю весом P, равным по величине интенсивности силы F. В результате Карно приходит к системе грузов или гирь; равновесие полученной системы трактуется с помощью принципа Торричелли о наинизшем положении ее центра тяжести. Как и Торричелли, Карно вместо условия минимальности высоты центра тяжести системы грузов записывает условие экстремальности вертикальной координаты центра тяжести:

$$\mathrm{S}Fu\cos z = 0. \qquad (A)$$

Символ S обозначает здесь суммирование по всем точкам системы. Равенство (A) представляет собой едва ли не самую первую аналитическую запись принципа виртуальных скоростей.

Выражение, стоящее под знаком суммы, Карно называл «моментом активности». Он придавал этой количественной характеристике исключительно большое значение в теории машин. Карно считал, что именно это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь из двигателя весь тот эффект, который он способен дать. Пользуясь современным языком, это выражение под знаком суммы можно назвать виртуальной мощностью машины (т. е. работой всех приложенных сил на виртуальных перемещениях точек приложения в единицу времени). Карно приближается к введению понятия полезной мощности или полезного действия машины.

Это было время промышленного переворота в Европе. Карно главное внимание обращал на геометрическую картину движения звеньев механизма (исполнительной машины), на передачу движений от звена к звену. Он одним из первых говорил о необходимости изучать чисто геометрические закономерности движений безотносительно к силам. Карно пытался оперировать только величинами количеств движения, считая, что важнейшим типом взаимодействия материальных тел является удар или толчок. Но, как инженер, Карно понимал, что полностью без понятия силы механика не может быть построена.

Подробно исследуя явление удара, Карно вывел уравнение сохранения суммарного количества движения соударяющих тел, а затем пришел к теореме, носящей теперь его имя: при соударении произвольного числа жестких тел сумма живых сил (или суммарная кинетическая энергия) перед соударением равна сумме живых сил после удара, сложенной с суммой живых сил отдельных тел, если бы они свободно двигались со скоростями, потерянными в процессе удара. В этой формулировке теорема Карно верна только для абсолютно неупругих ударов. Карно делает вывод, что выгоднее конструировать такие машины, в которых движение передается от звена к звену безударно, чтобы не происходило потерь живой силы на удар.

Работы Карно по механике самобытны и оригинальны, в них явственно виден инженерный подход к решению проблем механики, однако из-за терминологии Карно и его стремления обойтись без понятия силы трудно подробно изложить его рассуждения. Тем не менее многие его идеи и результаты оказали заметное влияние на дальнейшее развитие механики.

В летописях французской буржуазной революции имя Лазара Карно появилось в 1791 г. и не сходило с ее страниц до конца бурных событий этого века; появлялось оно и позже.

Политические взгляды Карно, последовательность его действий, разнообразные знания привели к тому, что в 1791 г. он был выбран представителем департамента Па-де-Кале в Законодательном собрании. С этого времени научные занятия Карно уступили место политике. В 1793 г. он был избран в Конвент, где активно поддерживал политическую линию якобинцев. Тем не менее Карно не принадлежал ни к одной политической партии и придерживался убеждений более умеренных, чем якобинские, будучи при этом самым ревностным республиканцем и патриотом. В сложнейшей обстановке кульминации революционных событий 1793 г., когда монархия привела к финансовому банкротству, к состоянию глубокого экономического упадка, вражеской блокады,— тогда единственной политической силой, способной стабилизировать положение и прекратить интервенцию, измены и катастрофу, была якобинская диктатура, и прежде всего Комитет общественного спасения, куда вошел Карно. В комитете Карно отвечал за организацию войск и их действия.

В августе 1793 г. молодая Французская республика находилась на краю пропасти: главнокомандующий Дюмурье тяготел к роялистам и вступил в переговоры с австрийцами, остатки его армии в беспорядке отступали. Из Пьемонта перешла через Альпы 20-тысячная армия итальянцев. Вандейский мятеж охватил большой западный район, угрожая Нанту; тулонский порт заняли английские корабли.

Вся Европа была уверена в победе коалиции над Францией. Сила организаторского таланта Карно была не в составлении и чтении депеш и различных бумаг, а в понимании и правильной расстановке людей, военачальников. В простом сержанте Гоше, который предложил план проникнуть в Бельгию, Карно увидел будущего полководца и сказал о нем: он проложит себе дорогу. Сержант, благодаря проницательности и поддержке его начальника, меньше чем за год прошел путь до капитана, полковника, затем генерала.

Карно видел все наиболее уязвимые места и умел их устранить. Недоставало меди — был брошен клич: «По монастырям!» Колокола, башенные часы, перила, ограды были отправлены в переплавку. Карно помог наладить кожевенное производство, так как армия была разута. Всё, вплоть до сигнального телеграфа и аэростатов, к которым у Карно была особая страсть, было им употреблено на пользу армии.

Из невероятного хаоса расчлененных войсковых групп Карно создал четырнадцать армий, заново сформированных, укомплектованных, обеспеченных твердыми и знающими командирами. Карно был одним из создателей новой тактики наступления глубокими колоннами после массированной артподготовки. Очень многие сложные маневры, спланированные Карно и четко выполненные по его плану, обеспечивали победу там, где противник имел численный перевес. Например, по плану Карно генерал Гош ушел от прусской армии, перешел через горы, соединился с рейнской армией и решительным ударом освободил Эльзас. В те годы на трибуне Конвента справедливо прозвучало: Карно управляет победами.

Республика вырывалась из кольца блокады. На юге Франции был разгромлен основной центр контрреволюционного восстания: по плану молодого корсиканца капитана Бонапарта и под его командой после двухдневной упорной канонады был взят штурмом Тулон. Среди осаждавших Тулон был Огюст Робеспьер, брат Максимилиана. Он написал об этом в Париж, и примерно через месяц Бонапарт получил чин бригадного генерала. Победа на юге Франции послужила переломом и началом полного разгрома роялистского восстания.

После термидорианского переворота, после казни братьев Робеспьеров и других руководителей якобинской диктатуры Бонапарт был арестован, но через две недели освобожден за неимением данных о виновности. Он вынужден был уйти в отставку и находился в затруднительном материальном положении.

1795 г. был поворотным моментом в ходе французской буржуазной революции. Абсолютистско-монархический строй был низвергнут, однако 9 термидора 1794 г. республика лишилась самого острого своего оружия — якобинской диктатуры. Теперь термидорианский Конвент, выражавший интересы крупной буржуазии, зашел в тупик. Имущественный контраст между богатыми и плебеями особенно остро выглядел в голодную зиму и весну 1795 г. Францию сотрясали восстания рабочих и городской бедноты; с другой стороны, интриги роялистов всколыхнули мятежи самых реакционных слоев населения. В октябре демонстрации и тысячные толпы направились к Конвенту, чтобы захватить его. И тут-то глава реакционного Конвента Баррас вспомнил о скромном просителе — генерале в отставке Бонапарте.

«В этом угрюмом, хмуром молодом человеке и Баррасу, и другим руководящим деятелям очень импонировала та полная бестрепетность и быстрая решимость, с которой Бонапарт пошел на такое до тех пор не употреблявшееся средство, как стрельба из пушек среди города, в самую гущу толпы» [44].

Конвент был спасен. За это Бонапарт был назначен командующим военными силами тыла.

Карно вышел из Комитета общественной безопасности незадолго до краха якобинского Конвента. Но вскоре 14 департаментов оказали ему честь избрания в Совет законодателей; затем он был избран в Сенат, затем — в Директорию. На его долю снова выпали большие военные заботы: против Франции, пока еще республиканской, вновь собиралась сильная коалиция: Австрия, Англия, Россия, несколько германских государств, Сардиния и др. Снова со свойственной ему энергией и методичностью Карно возглавил формирование отборных войск; не жалея средств, их снабдили всем необходимым; обозы были прекрасно организованы, выдающиеся полководцы во главе с генералом Моро и Журданом были направлены на Рейн. Карно считал первостепенным участком вторжения в массив войск коалиции район юго-западной Германии и Австрии, из-за Рейна вдоль Дуная. Разгадав большие способности молодого генерала Бонапарта, Карно назначил его главнокомандующим южного направления, которое считалось второстепенным, на Ломбардию и Сардинское королевство, чтобы оба крыла (южное и северное) соединились позже под Веной. Армия Бонапарта не была так хорошо экипирована, как северные войска. Скорее она напоминала сборище недисциплинированных оборванцев, но военные действия Бонапарта поражали неудержимым натиском. Бонапарт не спрашивал разрешения Директории на свои действия, зная, что

[44] *Тарле Е.* Наполеон. М., Госполитиздат, 1942, с. 27.

победителя не судят. Он зорко наблюдал за острейшими событиями в Париже, а там готовились новые перемены. Весной 1796 г. был раскрыт заговор Бабефа; напуганные призраком коммунизма и возможностью новых народных волнений деятели Директории жестоко расправились с Бабефом и его последователями. Роялисты активизировали свои действия, подготовляя низвержение Директории.

В самой Директории среди ее пяти директоров были разногласия: Бартелеми сочувствовал оппозиции; Карно, как обычно, был против решительных мер и казней, поэтому Баррас в 3 часа ночи 18 фрюктидора (4 сентября) 1797 г. приказал арестовать обоих. Карно успел бежать в Швейцарию. Началась чистка Совета пятисот и Сената, массовые аресты роялистов и подозреваемых.

Будучи, как тогда говорилось, «фрюктидоризован», Карно претерпел самые тяжкие превратности судьбы: сначала его укрыло семейство бургундских мастеровых, затем после нескольких опасных побегов он оказался в укрытии в г. Нионе, на границе со Швейцарией. Вскоре через этот городок проезжал Бонапарт, возвращаясь из Италии. Город ликовал и встречал героя иллюминацией. Карно тоже зажег свечи в честь победителя, победам которого он немало способствовал. Именно в это время Карно был исключен из Института Франции, одним из создателей которого он был; на его место был выдвинут генерал Бонапарт.

Несмотря на огромное напряжение, связанное с политической деятельностью, Карно урывками, иногда на прогулке, иногда в часы бессонницы создал трактат «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», в котором сделал первую попытку обосновать исчисление дифференциалов Лейбница без использования метода флюксий (производных) Ньютона или теории пределов Даламбера. Проводя критический разбор различных способов обоснования математического анализа и некоторых положений аналитических теорий функций Лагранжа, Карно в какой-то мере подготовил реформу обоснования дифференциального исчисления в начале XIX в.

По возвращении из Египта 18 брюмера 1799 г. Бонапарт уничтожил Директорию под предлогом «спасения республики». С республикой он покончил несколько позже. Неприятель снова был у ворот; снова понадобился организатор всех прежних побед республики — Карно. Положение страны действительно было опасным, и Карно принял предложение возглавить военное министерство. Однако после решительных успехов в битвах при Маренго и Гогенлиндене, когда независимость Франции была снова утверждена, Карно вышел в отставку. С Бонапартом, который раньше писал ему в письмах: «...Я всегда хвалюсь вашею дружбою ко мне и к моим: я всегда остаюсь признателен», теперь у Карно были постоянные споры — споры республиканца с императором.

Карно не совсем сошел с политической арены — он был членом Трибуната. Там он открыто выступал и голосовал против пожизненного консульства Наполеона, а потом и против учреждения империи. Он выступал против мнения диктатора и по другим вопросам, например: голосовал против создания ордена Почетного легиона, считая, что это будет содействовать не подвигам, а удовлетворению тщеславия подданных и окружению престола императора покорнейшими сатрапами. Оставшись один среди развалин республики, он смело бросал вызов в лицо своим бывшим гонителям. После уничтожения Трибуната Карно удалился от политики, это пошло на пользу науке. В это время увидели свет геометрические труды Карно: «О соотношении геометрических фигур» (1801), «Геометрия положения» (1803), «Этюд о теории трансверсалей» (1806), предвосхитившие созданные впоследствии основы проективной геометрии. Тогда же появилось третье издание трактата по механике «Общие принципы равновесия и движения» (1803).

Плодом долгих размышлений, наблюдений и расчетов явился труд Карно «О защите крепостей». С 1807 г. по 1814 г. Карно занимался только наукой, прилежно исполняя обязанности академика; это звание ему было вновь присвоено после возвращения в Париж. Он составлял отзывы на труды по механике, проявляя проницательность и доброжелательность ко всякому полезному начинанию и досконально проверяя все вычисления.

Когда Наполеон, почти полностью погубив старую гвардию в русском походе, в 1814 г. встал перед необходимостью отражать наступление вновь сколоченной сильной европейской коалиции, Карно предложил ему свою помощь. Он писал Наполеону, что оставил его в момент восхождения к наибольшей славе, а теперь, когда злая фортуна испытывает твердость Франции, он не может быть в стороне. Наполеон поручил Карно оборону Антверпена, сделав его губернатором города.

В период «Ста дней», когда Бонапарт с триумфом высадился на побережье и прошел до Парижа, снова став правителем, Карно опять пришел ему на помощь, надеясь еще отстоять республику. Он стал министром внутренних дел. Об этом поступке Карно Е. Тарле пишет: «Наполеон полагался на Даву, которого оставил на правах генерал-губернатора Парижа и военного министра, полагался на старого убежденного республиканца Карно, который прежде ни за что не хотел служить деспоту, задушившему республику, а теперь, в 1815 г., сам предложил Наполеону свои услуги, считая Бурбонов наихудшим злом» [45].

Наполеон оценил, наконец, Карно, признавшись: «Карно, я худо знал тебя!». Но Карно после Ватерлоо снова стал изгнанником. Он провел свои последние годы в Варшаве и Магдебурге, посвятив их науке и воспитанию своего сына Сади Карно — будущего физика. Умер Л. Карно в бедности.

Антуан Кондорсе (1743—1794) родился в семье кавалерийского капитана. Четырех лет он лишился отца. В годы школьного обучения Кондорсе отличался разносторонностью. Он жил в уединении у своего старого учителя и в 1765 г. сочинил труд «Опыт об интегральном исчислении», который представил Академии наук. Даламбер и Лагранж высоко оценили это сочинение. Это было исследование об интегрировании дифференциальных уравнений различных порядков. В 70-х годах Кондорсе опубликовал несколько статей по математическому анализу (по теории рядов, дифференциальным уравнениям и др.) в записках Парижской, Берлинской, Болонской и Петербургской академий.

За решение труднейшего вопроса об определении параболической траектории комет по трем наблюдениям (кометы исчезали с небосклона за несколько дней) Кондорсе разделил награду на конкурсе Берлинской академии наук. Лагранж писал Кондорсе, что он получил бы полную награду, если бы не ограничивался одной тео-

---

[45] *Тарле Е.* Наполеон, с. 303.

рией, а дополнил бы ее расчетом траектории какой-либо кометы.

Кондорсе занимался и вопросами теории вероятностей, в частности приложением ее к юриспруденции. В 1769 г. он был избран в академию на пост секретаря.

Одной из обязанностей секретаря Парижской академии наук было произносить речи, посвященные памяти умершего коллеги-ученого. Кондорсе стал делать это не только по обязанности, но по вдохновенью. Он, кроме того, написал ряд биографий предшественников — Гюйгенса, Роберваля, Мариотта, Рёмера и др. Делал он это мастерски, как он сам говорил — без лишних украшений и блесток. Вольтер отзывался об этих трудах так: «Ваш сборник — драгоценный памятник. Вы везде являетесь хозяином своего предмета, но хозяином скромным и ласковым. Вы походите на короля, написавшего историю своих подданных» [46].

Общение с историком А. Тюрго разбудило интерес Кондорсе к проблемам экономики и промышленности. Когда Тюрго в 1774 г. стал министром финансов, он поручил Кондорсе курирование дел Монетного двора, а через год привлек его и еще двух академиков — Даламбера и Боссю — к разработке важной технической проблемы более рационального расчета при строительстве каналов и к разработке проблем внутреннего судоходства и кораблестроения. Все трое вошли в специальную комиссию при министерстве Тюрго. Результаты работы комиссии были ценным вкладом в развитие теории сопротивления вязкой жидкости. В 1782 г. Кондорсе был избран академиком. Через год он лишился своего друга и покровителя Даламбера: в октябре 1783 г. Даламбер умер. Образ жизни Даламбера — философа, политика, просветителя и крупнейшего ученого эпохи — был примером для Кондорсе.

Кондорсе входил в «Общество 1789 года», в котором собрались сторонники конституционной монархии, представители крупной буржуазии, колебавшиеся, по характеристике Ф. Энгельса, между королевской властью и демократией. Не от этих людей народ мог ожидать по-

---

[46] *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, т. I, с. 360.

мощи в борьбе против социального рабства. Они издавали красноречивые демагогические журналы, где восславляли свободу: «Библиотека общественного деятеля» и «Журнал Общества 1789 года». Но они обманывали в искании свободы народ и самих себя; это обнаружилось в ходе революции.

В начале буржуазной революции Кондорсе был членом парижского муниципалитета, он редактировал требование муниципалитета Законодательному собранию об изменении закона о сборе податей. В 1791 г. он был избран в национальное казначейство, а затем в Законодательное собрание. Здесь ему поручили разработку реформ народного образования.

Кондорсе активно работал в составе Законодательного собрания, сначала в качестве секретаря, потом вице-президента. Он участвовал в работе комиссии по выработке конституции. Но в период якобинской диктатуры он сам же выступил против конституции 1791 г., начав составление проекта новой конституции. Кондорсе публично выступал против якобинского Конвента и его действий. Конвент отверг проект конституции Кондорсе и издал декрет о его аресте. Тогда Кондорсе укрылся в доме вдовы скульптора Верне. Здесь он составил рукопись философско-исторического сочинения «Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума», изданного посмертно в 1795 г. Вскоре Кондорсе покинул свое убежище, опасаясь за жизнь госпожи Верне. Его узнали и схватили. В тюрьме Бург-ля-Рень Кондорсе, желая избегнуть публичной казни, принял яд, который носил в перстне.

Наиболее прогрессивные и демократические идеалы Кондорсе отражены в его проекте реформы народного образования. В своем последнем сочинении «Эскиз исторической картины» Кондорсе развивает идеи буржуазного прогресса наук, техники, изобретений и открытий.

Антуан Лоран Лавуазье (1743—1794) — родился в семье парижского прокурора. Первоначальное образование получил в знаменитом колледже Мазарини, где когда-то учился Даламбер. Вначале увлекался литературой, но по окончании коллежа Мазарини поступил на юридический факультет университета и окончил его в 1764 г.

Еще в университете Лавуазье самостоятельно начал изучать естественные науки, проявляя интерес к химии, физике и математике. Вскоре он представил Академии наук свой первый научный труд «Анализ гипса».

В 1764 г. Парижская академия наук выдвинула на конкурс тему о наилучшем и наиболее экономичном освещении улиц города. Тема заинтересовала молодого Лавуазье, и он предпринял подлинное научное исследование, результатом которого явился капитальный труд с девизом, взятым из «Энеиды» Виргилия: «...он путь свой отметит огнями». Девиз оказался пророческим — работа была удостоена Золотой медали Академии наук и послужила началом блистательной научной карьеры Лавуазье. Вскоре он был зачислен в кандидаты для будущих выборов академии. В мае 1768 г. Лавуазье был избран членом академии, а затем утвержден в этом звании королем. С 1785 г. он занял пост директора Академии наук (в отличие от почетной должности президента, эта должность была чисто административной).

В это время его интересует теория строения вещества, вопросы превратимости элементов друг в друга. Он постулирует (пока именно так) закон сохранения массы вещества. Лавуазье превратил свой дом в богато оснащенную физико-химическую лабораторию, а его жена стала помощницей при опытах.

В ранних своих мемуарах Лавуазье еще придерживался теории флогистона. Но установленные им факты последовательно развивали его мысль. Он убедился, что горение фосфора сопровождается поглощением воздуха; аналогичное явление обнаружилось и при горении серы. Лавуазье рассуждал правильно, утверждая, что образование окалины при горении металла объясняется аналогичным явлением.

Подобные опыты с прокаливанием металлов делал Роберт Бойль за сто лет до Лавуазье, он также обнаружил увеличение веса металла после его обжигания в запаянной реторте. Но Бойль приписал пламени свойство весомости. М. В. Ломоносов еще в 1744 г. в работе «Размышления о причине теплоты и холода» критиковал точку зрения Бойля, высказав предположение, что увеличение веса сожженного металла происходит за счет «пропущения внешнего воздуха». Более подробно свои взгляды на этот счет Ломоносов не решался опубликовать, делясь в письмах к Л. Эйлеру мыслями, что «может показаться, что даю ученому миру незрелый плод скороспелого ума, если выскажу многие новые взгляды, по большей части противоположные принятым великими мужами»[47].

Лавуазье с величайшей тщательностью многократно проделал такие же, как и Бойль, опыты и пришел к важнейшему выводу: порция воздуха, соединяющегося с металлом, несколько тяжелее воздуха атмосферы, а остающаяся в реторте после обжига часть воздуха несколько легче его (более тяжелая часть — кислород; оставшаяся — азот).

В 1774 г. Лавуазье, английский химик Пристли и шведский химик Шееле почти одновременно и независимо друг от друга сумели выделить свободный кислород. Пристли позже высказал претензии на приоритет этого открытия (проезжая через Париж, он рассказывал о своих опытах Лавуазье). Однако, как справедливо отвечал Лавуазье, одни и те же факты привели его и Пристли (как и Шееле) к диаметрально противоположным выводам. Лавуазье пришел к полному отказу от гипотезы флогистона, в то время как два других ученых приспосабливались к этой гипотезе. Энгельс указывал: «...Лавуазье смог открыть в полученном Пристли кислороде реальный антипод фантастического флогистона и тем самым ниспровергнуть всю флогистонную теорию»[48].

Сторонниками Лавуазье в борьбе против старой науки оказались физики и математики: Кузен, Вандермонд, Монж и Лаплас, с которым Лавуазье в течение семнадцати лет вел совместные калориметрические и термохимические исследования. Большинство химиков Европы оказывали сильное противодействие новой химии Лавуазье. Лишь постепенно прогрессивные идеи Лавуазье стали поддерживать и развивать его соотечественники: Бертолле, Фуркруа, Гитон де Морво, Шапталь и др.

Тесть Лавуазье стремился вовлечь его в финансовые спекуляции. Лавуазье еще в молодости вошел в Генеральный откуп — компанию финансистов, арендовавших у короля Франции право взимания пошлин и право торговли солью, табаком и вином. В ходе буржуазной революции, в период инфляции, разрухи, блокады, голода откупщики или, как их называли в народе, «королевские пиявки»

[47] *Ломоносов М. В.* Полное собрание сочинений, т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951, с. 98.

[48] *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг. М., Госполитиздат, 1967, с. 343.

А. Лавуазье

злоупотребляли своим положением, чем вызывали народную ярость и непрерывные нападки, пока Конвент не предал их трибуналу. Несмотря на ходатайства ученых (например, ходатайство о помиловании от Консультационного бюро искусств и ремесел, подписанное Лагранжем) Лавуазье в мае 1794 г. был гильотинирован вместе со своим тестем и другими откупщиками.

Достижения Лавуазье в области физико-химических наук носили подлинно революционный характер.

Жан Сильвен Байи (1736—1793) — астроном, близкий друг Лапласа, автор «Истории астрономии», был избран в Парижскую академию наук в 1763 г. До этого он занимался расчетами траекторий комет.

Байи провел много тонких наблюдений из маленькой обсерватории, оборудованной им в верхних этажах Лувра, отведенного для Академии наук. Именно здесь возникла его дружба с Лапласом. Интересы Байи были очень разносторонними, во многие свои занятия общественного характера он втягивал и Лапласа. Так, например, они входили в комиссию по общественному инспектированию городских больниц, яслей и боен, возглавляемую Лавуазье.

Байи был сторонником конституционной монархии. В 1789—1791 гг. он был мэром Парижа. Когда в июне 1791 г. разбушевавшиеся народные толпы на Марсовом поле требовали низложения короля, Национальное собрание поручило Лафайету и Байи вызвать войска для усмирения бунта. Войска не без ведома мэра открыли огонь по безоружной толпе. Вследствие больших жертв и широкого народного возмущения Конвент дал отставку Байи с поста мэра. Он был выслан в Нант под надзор полиции.

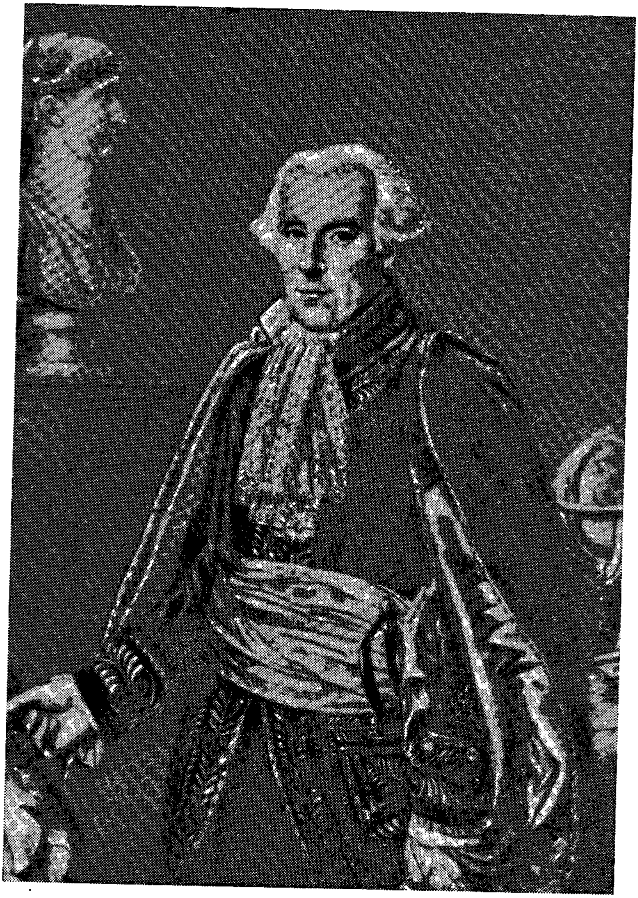
Вскоре Лаплас, имевший дачу в Мелене (местечко между Парижем и Нантом), пригласил Байи к себе, соблазнив его тишиной и покоем. Оба ученых, решив отдохнуть от политики и переждать бурное время, собирались предаться занятиям по астрономии. Байи приехал к Лапласу. Случайная встреча нарушила их планы: один из участников демонстрации на Марсовом поле узнал Байи. Сразу же Байи был арестован, доставлен в Париж и по постановлению революционного трибунала осенью 1793 г. гильотинирован. Лаплас продолжал в тишине Мелена работать над трактатом «Небесная механика».

Пьер Симон Лаплас (1749—1827) — выдающийся астроном, физик, математик и механик — родился в местечке Бомон в семье нормандского крестьянина. Семья была зажиточной, и, видимо, не без покровителей талантливый юноша был устроен в коллеж Бомона, находившийся в ведении монашеского ордена бенедиктинцев. Как и в большинстве коллежей, здесь предпочтение в преподавании отдавалось древним языкам и гуманитарным дисциплинам, не говоря о богословии и теологии. Лаплас самостоятельно изучил математику, физику, штудируя такие классические труды, как, например, «Начала» Ньютона. Во Франции к тому времени естественные науки «вошли в моду»: даже в салонах знатных дам обсуждались научные вопросы. В одном из писем Даламбера можно прочитать: «Меценатов в наше время развелось так много, что нет возможности всех их должным образом восхвалять и благодарить» [49].

К семнадцати годам Пьер Лаплас был уже самостоятельно мыслящим молодым ученым, написавшим первую

---

[49] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас. М., Жургаз, 1937, с. 20.



П. Лаплас

математическую работу; взгляды его вполне соответствовали духу века Просвещения и энциклопедизма. Довольно рано он познакомился с библией материализма — сочинением Гольбаха «Система природы».

Рекомендации покровителей Лапласа открыли ему дорогу на должность преподавателя математики в военной школе в Бомоне. Но это сдерживало научный рост молодого математика. Лаплас переезжает в Париж и вскоре становится профессором математики в Королевской военной школе. Налаживался и его контакт с Академией наук, он посылал туда свои работы. В 1772 г. освободилось место адъюнкта геометрии Академии наук; среди других была выдвинута и кандидатура Лапласа. Однако на выборах молодого ученого постигла неудача: его забаллотировали, на должность адъюнкта прошел Кузен.

Видимо, не последнюю роль в этой неудаче сыграл характер самого Лапласа, не скрывавшего уверенности в своих силах и желания идти прямо к цели. Лагранж, очень доброжелательный к людям и очень скромный и строгий к самому себе, писал непременному секретарю Академии наук Кондорсе: «Меня несколько удивляет то, что Вы мне пишете о Лапласе: это — недостаток, свойственный главным образом очень молодым людям — кичиться своими первыми успехами. Однако самонадеянность обычно уменьшается по мере того, как увеличиваются знания» [50]. Эта черта характера Лапласа и в дальнейшем нередко отталкивала от него людей.

На следующих выборах в 1773 г. Лаплас прошел на место адъюнкта-механика. Примерно через десять лет Лаплас получил место экзаменатора в Королевском корпусе артиллеристов. В 1785 г. он был назначен «пенсионером», т. е. полноправным членом Академии наук по специальности механика.

Работы Лапласа по математике (в ранней молодости и к концу жизни) относятся к проблеме интегрирования уравнений в частных производных, к теории вероятностей и к теории тяготения. Чрезвычайно важны результаты Лапласа по теории потенциала.

Основной областью естествознания, где Лаплас достиг наиболее фундаментальных результатов, были небесная механика и астрономия. Уже в 1773 г. он опубликовал чрезвычайно ценное исследование, относящееся к проблеме, в которой зашли в тупик великие его предшественники — Эйлер, Клеро и молодой Лагранж. Речь шла о неравенствах движения двух крупнейших планет солнечной системы — Юпитера и Сатурна — в свете теории тяготения Ньютона [51].

---

[50] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 19.

[51] Неравенства в движении небесного тела — отклонения координат от расчетных, полученных на базе некоторой теории.

В 1774 г. Лагранж доказал теорему об отсутствии вековых возмущений первого порядка в средних движениях планет, которую Лаплас сформулировал эмпирически. Введение Лагранжем в теорию возмущений так называемой пертурбационной [52] функции оказалось очень полезным. Этот метод в дальнейшем стал особенно плодотворным в различных разделах механики.

Лагранж в 1774 г. нашел удачное преобразование переменных, которое привело его к нахождению вековых возмущений в виде тригонометрических рядов.

Лаплас присоединился к разработке этого метода и опубликовал свои результаты, даже не дождавшись публикации мемуаров Лагранжа. В этом Лаплас усматривал преимущество: читатели быстрее познакомятся с методом Лагранжа в превосходной реализации Лапласа. Лагранж был так увлечен предметом их общих изысканий, что не только не упрекнул Лапласа в поспешности, но отошел в сторону и предоставил свободное поле деятельности молодому исследователю. Лаплас составил дифференциальные уравнения для возмущений эксцентриситета и долготы перигелия. Он показал, что форма и расположение орбит всех планет изменяются периодически, а не монотонно. Интерес обоих ученых к проблеме возрастал.

Далее они занялись исследованием значения корней векового уравнения (алгебраического уравнения для нормальных частот периодического процесса), чтобы выяснить вопрос об устойчивости движения планет. Необходимым и достаточным условием устойчивости их движения считалась вещественность всех нормальных частот и отсутствие среди них кратных. Однако со времен Даламбера до середины XIX в. никто не заметил, что требование непременного отсутствия кратных корней векового уравнения некорректно при оценке устойчивости движения планеты [53].

В конце 1780-х годов Лаплас установил свои знаменитые теоремы о свойствах движения планет солнечной

В каждом случае «неравенства» имеют свои причины и свое математическое определение.

[52] Пертурбационная функция является силовой функцией возмущающих сил. Остальные термины объясняются в главе «Небесная механика».

[53] См.: *Моисеев Н. Д.* Очерки развития теории устойчивости. М., Гостехиздат, 1949, с. 271.

системы. Все его результаты служили доказательством устойчивости планетной системы в рамках первого приближения.

«...Лапласу и Лагранжу мы обязаны знанием того, что не только в ближайшем будущем, но и на протяжении многих миллионов лет в будущем ни Земле, ни другим планетам вообще не угрожает ни гибель в раскаленных вихрях Солнца, ни медленная агония в леденящих безднах межзвездной дали» [54].

Важнейшие результаты небесной механики Лапласа относятся к теории приливов. Он установил, какую форму принимает поверхность океана, равномерно окружающего Землю, под действием вынужденных колебаний из-за приливных сил. Важнейшие достижения по астрономии Лаплас включил в знаменитое пятитомное сочинение трактат «Небесная механика» (1799—1825).

Но в это фундаментальное сочинение не вошла одна замечательная гипотеза Лапласа, которую он изложил только в примечании к седьмому изданию другого его обширного труда — «Изложение системы мира». Согласно этой космогонической гипотезе, солнечная система образовывалась в течение продолжительного времени из газообразной туманности, вращение которой около центрального, более плотного ядра породило в центре этого сгустка Солнце, а на периферии — слоистые кольца, напоминающие кольца Сатурна. Те же центробежные эффекты вместе с тяготением между частицами обеспечили сгущение материи колец в планеты. Математическую разработку гипотезы Лаплас не проводил; это сделали другие ученые. Они нашли эту гипотезу весьма правдоподобной: орбиты всех планет почти круговые, почти лежат в плоскости солнечного экватора, направления вращения у них одинаковые, а периоды обращения вокруг Солнца растут с увеличением расстояния от Солнца и приблизительно совпадают с распределением линейных скоростей частей вращающегося твердого тела. Аналогичное происхождение, по гипотезе Лапласа, имеют и спутники планет. Гипотеза Лапласа была характерным проявлением прогрессивного мировоззрения: она подрывала теологическую доктрину о сотворении мира богом, демонстрировала идею эволюции в природе, идею изменения, развития ес-

---

[54] *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 76.

тественных процессов и форм жизни. Энгельс считал гипотезу Лапласа важным звеном в развитии диалектического мышления.

В молодые годы Лаплас был сотрудником Лавуазье. Их общие исследования касались вопросов калориметрии, химии, экспериментальной физики. В начале XIX в. Лаплас занимался теорией капиллярности, развитию которой он значительно способствовал, установив ряд существенных закономерностей; опыты по распространению звука немецкого ученого Хладни в 1809 г. произвели на Лапласа сильное впечатление. Лаплас и его ученик Био посвятили несколько лет разработке акустики. Лапласу принадлежит вывод формулы для скорости распространения звука в воздухе (которую он уточнил после Ньютона). В области физики газов он также внес много ценного. Например, вывел барометрическую формулу для вычисления изменения плотности воздуха с высотой над поверхностью Земли. Важные результаты Лапласа в теории притяжения и потенциала лежат в пограничной области математической физики и гидромеханики.

Едва ли не более всех из блестящей плеяды ученых Политехнической школы Лаплас был причастен к разработке деталей механистического мировоззрения, берущего начало в программных положениях «Энциклопедии...» и в философских сочинениях старшего поколения просветителей.

Что касается общественного положения Лапласа, то оно всегда было неизменно высоким и почетным. На крутых поворотах революционного потока Лаплас мастерски лавировал, не оставаясь верным ни одной политической партии, оказываясь в числе самых послушных как при республиканских, так и при роялистских властях. Когда революция восходила к своей кульминации — якобинской диктатуре, Лаплас ничем себя не проявил в политике, а весной бурного 1793 г. уехал с семьей в тихий городок Мелен, южнее Парижа. Укрывшись в провинциальной тишине от политических бурь, он с огромным упорством работал над сочинением «Изложение системы мира». Здесь же Лаплас начал работу над пятитомным трактатом «Небесная механика». Многие его друзья погибли: сначала Байи, затем Лавуазье и астроном Бошар де Сарон. Другие коллеги Лапласа — Бертолле, Монж, Карно, Фуркруа, Фурье и даже иностранный подданный Лагранж — отдавали все силы для укрепления границ и тыла молодой Французской республике. Лаплас же в тихом уединении занимался наукой.

Когда революция пошла на спад и на политической арене появился волевой диктатор Наполеон, разогнавший 18 брюмера Совет пятисот и Директорию и установивший Консульство (1799), Лаплас проявил больше активности и занял пост министра внутренних дел. «Холодный, рассудительный ум Лапласа нравился Наполеону, и он находил в нем нечто общее с собою». Однако Лаплас не обладал задатками и опытом администратора и довольно скоро получил отставку.

Проницательный Наполеон быстро оценил его наклонности: «Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным; первые шаги на этом поприще убедили нас в том, что мы в нем обманулись. Замечательно, что ни один из вопросов практической жизни не представлялся Лапласу в его истинном свете. Он везде искал какие-то субтильности, мелочи, идеи его отличались загадочностью, наконец, он весь был проникнут духом „бесконечно малых“, который он вносил и в администрацию» [55].

Однако дружеские отношения с Лапласом Наполеон сохранил до конца власти. Лаплас был введен им в Сенат, а позже назначен председателем Сената (должность почетная, хотя и не решающая).

III том трактата «Небесная механика» Лапласа начинался обширным посвящением сочинения первому консулу, «умиротворителю Европы» и «герою» Франции Наполеону Бонапарту. Во время империи Наполеона Лаплас, как и многие из его выдающихся коллег по Институту Франции, получил от императора титул графа империи и орден Почетного легиона — высшую награду этой эпохи. А когда после Ватерлоо обстоятельства сложились не в пользу Наполеона, Лаплас подал свой голос в Сенате за низложение императора. Л. Карно, как уже говорилось, вел себя совершенно иначе в этой ситуации: он протестовал против единовластия Наполеона, когда тот был еще всего лишь Бонапартом, а накануне падения Наполеона Карно сам пришел к нему на помощь, чтобы

---

[55] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 198—199.

сохранить наиболее прогрессивные завоевания предшествующих десятилетий.

Когда возвратились Бурбоны, Монж от огорчения потерял рассудок; Карно, лишенный всего, совершил свой последний побег за пределы родины. В это время Лаплас, поддерживая монархию, получил от короля пост пэра Франции и титул маркиза.

Жан Батист Жозеф Фурье (1763—1830) родился в Бургундии в семье портного. Ф. Араго, младший его современник, известный физик начала XIX в., о происхождении Фурье говорил: «...ныне, без сомнения, никто уже не думает, что гений принадлежит только богатству и знатности» [56].

Восьми лет Фурье остался круглым сиротой. На способного юношу обратили внимание знатные прихожане. Фурье был определен в военную школу, управляемую монахами бенедиктинского ордена. Юноша проявил жадный интерес к математическим наукам. Из школы могли быть две дороги: на одной его ждали шпага и мундир, на другой — крест и сутана. Фурье выбрал род войск, в котором могли пригодиться математические знания,— артиллерию. Однако в артиллерию его не приняли из-за «недостатка состояния и благородства». Он начал преподавать математику в оксерской военной школе. Аббатство Оксера предлагало Фурье принять сан священника, однако он отказался от духовного звания, сулившего ему «благородство» первого сословия.

На 22-м году жизни Фурье добился чести быть заслушанным на заседании Парижской академии наук, где он прочел свой мемуар о решении числовых уравнений степени выше второй. Им был предложен метод определения числа корней такого уравнения, заключенных между двумя заданными числами. Фурье не терял интереса к проблеме численного решения алгебраических уравнений на протяжении всей своей жизни. Итогом его исследований по этому вопросу явилось сочинение «Анализ определенных уравнений», изданное посмертно в 1831 г.

В первый послереволюционный год Фурье был избран членом народного собрания Оксера; он проявил интерес к политической деятельности и большие ораторские способности. Позже, в 1794 г., он был приглашен для пре-

[56] *Араго Ф.* Указ. соч., с. 592.

подавания в Нормальную школу, которая в тот период просуществовала недолго, погибнув, по словам Араго, от холода и голода. В 1796—1798 гг. Фурье преподавал в Политехнической школе, где возглавлял кафедру математического анализа. Его лекции отличались отточенностью и изяществом стиля.

Затем Фурье был включен в состав египетской экспедиции Бонапарта и вскоре вступил на землю страны пирамид. Как и многие ученые, входившие в состав экспедиции, Фурье не понимал экспансионистского замысла похода. Он пытался выработать рекомендации для усовершенствования земледелия и ирригационной техники Египта. Бонапарт назначил Фурье непременным секретарем вновь созданного Египетского института, т. е. практически поручил ему руководство институтом. Фурье обладал дипломатическим даром и устанавливал дружеские отношения с арабами, что не раз избавляло обе стороны от кровопролития.

В такой сложной обстановке Фурье проводил исследования по математическому анализу, алгебре, теории чисел. Его интересовали также и вопросы техники, ирригации, конструкция каирского водопровода. Он представил Египетскому институту описание машины для орошения полей, приводимой в движение ветром. После капитуляции французской армии в Египте Фурье возвратился во Францию.

Он получил назначение на пост префекта департамента Изер и поселился в Гренобле. Отдавая много сил административной деятельности, Фурье руководил строительством дорог (по его проекту была построена дорога Гренобль—Турин), его занимали топографические работы в связи с осушением болот. Все это не помешало Фурье выполнить в Гренобле обширное оригинальное исследование по теории распространения тепла в твердом теле (1806—1811). Основным достижением Фурье по теории распространения тепла было составление дифференциального уравнения теплопроводности и разработка эффективного метода интегрирования такого уравнения — так называемого метода разделения переменных Фурье. Впоследствии этот метод оказался пригодным для более широкого класса дифференциальных уравнений. В основе метода Фурье лежит представление функций (удовлетворяющих определенным условиям) тригонометрическими рядами. В результате глубоких исследований свойств тригонометрического ряда, представляющего данную функцию, Фурье сумел привести первые примеры разложения функций в тригонометрические ряды, когда функции на разных участках заданы различными аналитическими выражениями. Это явилось важным вкладом в разрешение исторического спора ученых о понятии функции. Сам Фурье не смог строго доказать, что произвольная функция разложима в тригонометрический ряд, получивший позже наименование *ряда Фурье*. Тем не менее его работы положили начало большому циклу исследований, из которых в дальнейшем возникла и развилась теория функций действительного переменного.

Политические события снова ворвались в размеренную жизнь математика во время «Ста дней». Уважение к Бонапарту как к личности, с одной стороны, и неверие в его новое предприятие, с другой, привели Фурье к решению покинуть Гренобль. Но из Лиона, куда выехал ученый, монархисты вынудили его возвратиться снова в Гренобль. Обе стороны обвиняли Фурье в трусости и измене. Бонапарт осыпал его упреками, в ответ на это Фурье признался, что не верит в его успех. Оценив честность математика, известную ему и ранее, Наполеон дал ему титул графа и назначил префектом Роны. Фурье отнесся к получению титула равнодушно. Когда «Сто дней» второго правления Наполеона кончились, Фурье оказался без должности и средств.

В мае 1817 г. Фурье был избран в члены Парижской академии наук (так вновь стал называться Институт Франции после реставрации Бурбонов).

В 1822 г. Фурье опубликовал трактат «Аналитическая теория тепла». В том же году он был избран секретарем Академии наук и оставался на этом посту до конца жизни.

Единственной работой Фурье по механике был «Мемуар о статике, содержащий доказательство принципа виртуальных скоростей и теорию моментов». Наиболее интересным положением этой работы явилось рассмотрение случаев равновесия сил, приложенных к точкам механической системы с неудерживающими связями (такого или подобного термина у самого Фурье нет). В качестве примеров Фурье рассматривал равновесие двух твердых тел, поверхности которых прижимаются в точке их соприкосновения двумя равными и противоположно направленными силами, перпендикулярными к обеим поверхностям в точке их касания; равновесие гибкой нерастяжимой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам. Фурье утверждал (без доказательства), что необходимое условие равновесия нити под действием таких сил — это неотрицательность «полного момента сил» на виртуальных перемещениях точек приложения. По терминологии того времени «полным моментом сил» называлась сумма элементарных работ всех активных сил на виртуальных перемещениях их точек приложения, *взятая со знаком минус*. Таким образом, условие равновесия системы сил при неудерживающих связях записывалось в виде требования неположительности суммы элементарных работ всех сил на виртуальных перемещениях. М. В. Остроградский при разработке общей теории принципа возможных перемещений, начатой в 1834 г., исходил из записи этого принципа в мемуаре Фурье.

Кроме того, Фурье предложил новую заменяющую схему рычагов с грузами вместо произвольной системы сил, приложенных в точках системы. С помощью такой заменяющей схемы Фурье пытался дать строгое доказательство принципа виртуальных скоростей. В той же тетради «Журнала Политехнической школы» появилось и доказательство заменяющей схемы Лагранжа.

Перестройка Королевской академии наук

Парижская академия наук была создана в 1666 г. по инициативе Кольбера — первого министра Людовика XIV, (с 1669 г. Парижская академия наук стала называться Королевской); этот шаг Кольбер сделал под давлением запросов общественной практики: в круг важнейших задач академии входило рассмотрение новых изобретений и открытий. В Парижской академии наук работали выдающиеся иностранные ученые: Х. Гюйгенс, О. Рёмер, Д. Кассини; в XVII в. ее членами были французские ученые Ж. Роберваль, Ж. Пикар, участвовавший в знаменитом измерении дуги меридиана, Ф. де Лагир, П. Вариньон, создавший фундаментальный трактат по статике «Новая механика». В начале XVIII в. Парижская королевская академия наук уже была одним из крупнейших научных и просветительных центров Европы.

Структура академии напоминала своеобразную лестницу, на высшей ступени которой находились 12 почетных членов (honoraires), назначаемых королем, как правило, из аристократов — представителей высших сословий. Только им принадлежало право избираться президентами и вице-президентами Академии наук.

На следующей ступени стояли истинные труженики науки, действительные (а не номинальные) члены академии. Их называли членами-пенсионерами. Членов-пенсионеров было 18 человек. Эти места обычно занимали представители «третьего сословия». Правом решающего голоса обладали почетные члены и члены-пенсионеры (pensionnaires).

Далее шла ступень сотрудников (associés) и еще ниже — ступень учеников или, как стали их позже именовать, адъюнктов (adjoints).

По роду занятий все ученые разбивались на шесть классов: геометрии, астрономии, механики, анатомии, ботаники и химии. Геометрами называли в те времена всех математиков, а иногда и физиков, независимо от проблем, которыми они занимались. Позже, в 1780-х годах, по инициативе Лавуазье были организованы новые классы: общей физики, естественной истории и сельского хозяйства.

Были в академии еще две должности, занимаемые учеными: казначея и секретаря. Перед революцией 1789 г. казначеем был Лавуазье, а секретарем — Кондорсе.

Уже при Людовике XIV потребности академии выросли настолько, что король разрешил ей занять обширное здание старого Лувра. Более половины всех сотрудников академии (около ста человек) были выдающимися учеными того времени. Заседания академиков проводились два раза в неделю, по средам и пятницам, во второй половине дня. Эти заседания были закрытыми, посторонние лица могли прийти туда с докладами лишь по рекомендации секретаря академии. Наука в те времена была вне критики: считалось, что от этого выше ее престиж.

Раз в год — обычно это было в первый пасхальный понедельник — происходили публичные торжественные заседания академии. Король внимательно следил за тем, чтобы академики участвовали в заседаниях, а тех, кто пропускал заседания более двух месяцев кряду, выводил из состава академии.

То, что не разрешалось широкому кругу лиц, разрешалось аристократии и придворным. В то время было модно присутствовать на демонстрации опытов или на сенсационных докладах ради развлечения и «приобщения к учености». Например, в 1777 г. Лавуазье демонстрировал опыты с углекислотой австрийскому императору и толпе придворных. В 1781 г. на открытом воздухе в саду академии проводились опыты по совместному исследованию Лавуазье и Лапласа для измерения коэффициента теплового расширения твердых тел, а через год там же для русского престолонаследника Павла показывались опыты, демонстрирующие природу обоняния.

В функции Академии наук входило рассмотрение и составление отзывов на технические предложения и изобретения, так как патентного бюро в то время не было. Запросы обновления и расширения производства оказывали сильное влияние на деятельность Академии наук, первоначально возникшей из стихийно сложившегося научно-технического общества ученых и изобретателей. Академия наук ежегодно объявляла конкурсы, на которых предлагалось решить ту или иную актуальную проблему; так, в середине XVIII в. был объявлен конкурс на изобретение судового движителя, дополняющего действие весел или ветра. В этом конкурсе участвовали Д. Бернулли и Л. Эйлер, предложившие, в частности, проект гидрореактивного судового движителя [57]. Только лет через 20—30 в Европе появились первые попытки применения парового двигателя для передвижения речных судов.

В конце XVIII в. во Франции возникла необходимость наладить собственное производство стали, что дало бы возможность отказаться от ввоза английской стали. Специальная комиссия, куда входили Бертолле и Вандермонд, дала заключение о качестве первого отечественного металла. Монж принял участие в разработке научных рекомендаций металлургам-практикам. Академики консультировали устройство «огненной машины» Ньюкомена. После запуска аэростата братьями Монгольфье в 1783 г. интерес к воздухоплаванию во Франции вырастает в проблему, заинтересовавшую Академию наук, а в 90-е годы Л. Карно использовал аэростаты в военных целях.

[57] См.: *Тюлина И. А.* О работах Л. Эйлера по теории гидрореактивного судна и водяной турбины.— «Вопросы истории естествозн. и техн.», вып. 4. М., Изд-во АН СССР, 1957, с. 34—46.

Кроме производственно-научных вопросов Парижская академия наук проявляла интерес к проблеме санитарного состояния больниц, боен, канализации, тюрем и т. п. Периодически создавались комиссии, занимавшиеся такими вопросами.

Однако несмотря на явное влияние развивавшегося во Франции духа предпринимательства и изобретательской инициативы, в Королевской академии было немало шарлатанства и остатков средневековой схоластики. В 1785 г. Лавуазье стал директором академии. Со свойственной ему деловитостью он провел ряд рационализаторских реформ, при этом выступал резким противником тенденции правительства увеличивать штаты академии: «...не ученые нуждаются в академии, а академия нуждается в ученых; если при этих обстоятельствах вы намерены провести многочисленное пополнение, у вас не будет иного выхода, как призвать посредственные способности, полузнание, более опасное, чем невежество, и шарлатанство и интриги, которые их всегда сопровождают, и вы оставите будущим поколениям лишь выродившееся потомство, мало достойное того, чтобы поддерживать престиж академика, которого вы сделали знаменитым... Король может открывать вакансии, но не в его власти создавать ученых, гениальных людей, чтобы заполнить эти вакансии» [58].

Предложение Лавуазье поддержала специальная комиссия, и вакансии были отменены. В критике Лавуазье проскальзывал намек на то, что в Королевской академии наук существовали лазейки для шарлатанства и невежества; рядом с исключительно активной научной деятельностью таких ученых, как Даламбер, Лавуазье, Лаплас и др., в академии попадались и лжеученые.

В первые же годы буржуазной революции все больше голосов раздавалось за перестройку академических порядков. Особенно яростно на эти порядки ополчилась демократическая пресса. Марат перевел «Оптику» Ньютона, ярко проявил себя в нескольких областях наук, изобрел несколько физических приборов. Однако Академия наук его игнорировала. Его перевод «Оптики», представленный в академию под чужим именем, был одобрен. На демонстрации его опытов приезжали ученые из других стран, в частности из Стокгольма и Лейпцига. Причиной замал-

---

[58] Цит. по кн.: *Дорфман Я. Г.* Лавуазье, с. 340.

чивания заслуг Марата на его родине несомненно была злоба к представителю низов. Марат в газете «Друг народа» беспощадно разоблачал академическое шарлатанство. В 1791 г. он выпустил специальную брошюру «Современные шарлатаны, или Письма об академическом шарлатанизме, опубликованные Маратом, другом народа».

В этом памфлете Марат выступил против засилия академиков, усердствующих перед королевской властью, присвоивших себе право судить и выносить заключения об открытиях и изобретениях, в которых они даже не дают себе труда разобраться. С особым красноречием и беспощадностью Марат бичует Лавуазье, Кондорсе, Пасторе, т. е. тех, кто на первом этапе революции проявил себя активно, но, убоявшись радикализма якобинцев, отшатнулся от их политической линии. Не всегда отдавая должное научным заслугам Лавуазье, Марат называет его «корифеем шарлатанов». О Парижской академии наук он писал:

«Взятая как коллектив, академия должна быть рассматриваема как общество людей суетных, гордых тем, что собираются два раза в неделю...

Она делится на несколько групп, из которых каждая бесцеремонно ставит себя выше других и отделяется от них.

На своих публичных и частных заседаниях эти группы никогда не упускают случая обнаружить признаки скуки и взаимного презрения. Весело смотреть, как геометры зевают, кашляют, отхаркиваются, когда зачитывается какой-нибудь мемуар по химии; как химики ухмыляются, харкают, кашляют, зевают, когда зачитывается мемуар по геометрии.

Если каждая группа действует таким образом, то отдельные лица обращаются друг с другом не лучше, и собратья расточают друг другу сотни любезных эпитетов. Кондорсе у них — литературный проходимец; Ротон — зазнавшийся мужлан; Лаланд — мартовский кот, завсегдатай веселых домов» [59].

Между тем, не замечая и не отмечая даже таких событий, как взятие Бастилии, академики по-прежнему безмятежно собирались в роскошных залах королевского дворца; заслушивались доклады о колебании плоскости

---

[59] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 126—127.

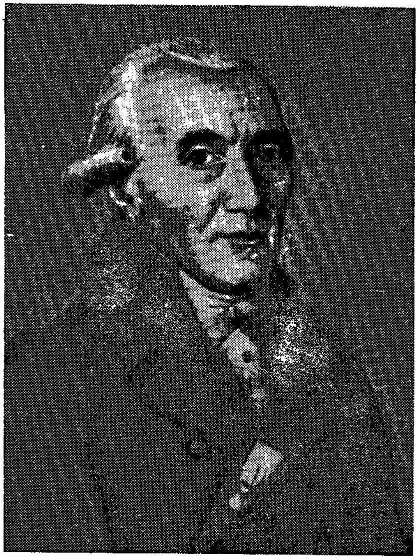
земной орбиты, об изменении состава воздуха в зале заседаний за счет дыхания людей и горения свечей; демонстрировались опыты по химии. Некоторые члены академии становились активными участниками политических событий: Кондорсе был избран в муниципалитет, а затем в Законодательное собрание и в Конвент, где поддерживал жирондистов; Лавуазье был избран депутатом Парижской городской Коммуны в самом начале революции; Карно и Монж проявили себя настолько активно, что сочетали научную деятельность с огромной организаторской работой на постах министров Революционного правительства.

Один из остро конфликтных эпизодов произошел весной 1792 г., когда химик Фуркруа, тяготевший в то время к якобинцам, внес предложение об исключении ярых сторонников монархии и эмигрировавших из республиканской Франции академиков из состава Академии наук. Прения были бурными, большинство «жрецов науки» встретило это предложение с издевкой и провалило его. Прошло предложение математика Кузена передать вопрос на рассмотрение министерства внутренних дел. Именно так и были выведены из состава Академии ученые, настроенные контрреволюционно.

Конвент все чаще стал обращаться к Академии наук с научными заданиями: относительно нового республиканского календаря, о новых видах оружия, о составе пороха, о модернизации текстильного и кожевенного производства для обмундирования новой многочисленной армии. Многие ученые активно работали и выполняли эти задания.

После эмиграции ряда академиков Конвент рекомендовал заполнить их места за счет демократических, преданных делу революции и талантливых представителей науки. Реакционно настроенные академики, в том числе Лавуазье, оказали сопротивление этому мероприятию.

После обсуждения бюджета республики Конвент пришел к решению упразднить все академии и литературные общества, сделав исключение для Академии наук, выполнявшей важные поручения Революционного правительства. Ученые Франции внесли чрезвычайно много ценных предложений для развития металлургии, литья, изготовления пороха, переоборудования текстильной промышленности, для борьбы с гниением зерна — словом, для



Ж. Л. Лагранж

укрепления боеспособности молодой Французской республики, попавшей в кольцо врагов.

Однако были и случаи саботажа, что не укрылось от внимания Конвента. Летом 1793 г., несмотря на множество острейших проблем экономики, обороны, промышленности, вопрос о перестройке научных и культурных учреждений снова встает на заседаниях Конвента. Было вынесено решение об упразднении всех культурных и научных учреждений, где еще гнездились остатки прислужников аристократии, в том числе и Академии наук.

Лавуазье удалось настроить многих членов правительства в пользу пересмотра пункта о закрытии Академии наук. Однако в конце концов победили сторонники Фуркруа, и академия была окончательно закрыта.

От Королевской академии наук сохранилась только Комиссия мер и весов. В состав комиссии входили Лагранж, Бертолле, Монж, Гаюи и др. Вокруг этого кружка стали собираться лучшие ученые Франции.

В тяжелейшей обстановке острой борьбы с превосходящими силами внешних и внутренних врагов Конвент находил время и возможность уделять внимание перестройке системы учебных и научных учреждений. В то время были созданы Нормальная, затем Политехническая школа, Школа здоровья, Школа навигации, военные школы и Школа искусств, Музей естественной истории и др.

Еще одним результатом преобразования республики был Институт Франции, устав которого разрабатывался под контролем якобинского Конвента. В этом учреждении оживали идеи энциклопедистов. Докладчик Конвента историк Дону (1761—1840) вполне четко выразил мысль, уже осознанную буржуазией, что наука должна служить экономическим и духовным потребностям общества, должна быть связана с практикой, производством, техникой, ремеслами: «Невозможно исчислить все благодетельные последствия системы, которая стремится поддержать науки и технические искусства в постоянной близости между собою и подчинить их обычно взаимному воздействию прогресса и пользы» [60].

Институт, по уставу, должен был каждый год давать отчет законодательным органам об успехах наук и о трудах каждого разряда. Разрядов было три: первый — физико-математические и экспериментальные науки; мораль и политические науки составляли второй разряд; третий — литература и искусство. Каждый год Институт должен был избирать шесть кандидатур для ознакомительных путешествий за счет республики по Франции и в другие страны.

В состав первого разряда физико-математических наук первоначально вошли 60 человек, среди них Лагранж, Лаплас, Лежандр, Деламбр, Борда, Прони, Бертолле, Гитон де Морво, Фуркруа, Ламарк, Гаюи, Кювье, Ласепед.

Председателем временного бюро физико-математического разряда был избран Лагранж, вице-президентом — Лаплас, который через год стал президентом.

Важнейшей работой ученых Института по-прежнему была разработка новой метрической системы мер и весов. Комиссия снова была пополнена: теперь в нее вошли Монж и Бертолле.

Пожалуй, одним из существенных достижений реорганизации Королевской Академии наук в Институт Фран-

---

[60] Цит. по кн.: *Старосельская-Никитина О. А.* Очерки по истории науки и техники периода французской буржуазной революции 1789—1794 гг. М., Изд-во АН СССР, 1946, с. 173.

ции было очищение его состава от реакционных элементов, от той части «ученых», которая получала звания академиков из рук короля благодаря своему аристократическому происхождению, а не за подлинные научные заслуги.

Реформы школьного и высшего образования

Просветители XVIII в. неоднократно выступали с резкой критикой состояния образования во Франции: Руссо, Кондильяк, Ламетри, Дидро, Даламбер, Тюрго, Кондорсе предлагали конкретные пути перестройки народного образования. Сущность этих предложений сводилась к требованиям расширения сети учебных заведений, носящих светский характер и доступных всем сословиям; к утверждению необходимости улучшения и расширения подготовки учителей. Кроме того, выдвигалось требование создать центральный орган для руководства системой просвещения и образования.

До революции в начальных школах детей обучали чтению, письму, реже — счету, а чаще всего — заучиванию библии. Ученые степени накануне революции в университетах Франции можно было покупать. Не только в коллежах страны, но и в двадцати двух ее университетах преимущество отдавалось гуманитарным наукам. Немногие и неглубокие сведения по естественным и точным наукам преподносились на уровне предшествующего века. Когда ученый мир уже отказывался от донаучной перипатетической физики, переходя на путь картезианства, в схоластических университетах Европы, в том числе и во Франции, господствовало еще аристотельянство. Когда наука переходила на путь ньютонианского, количественного изучения природы, университеты едва усваивали картезианские воззрения.

В октябре 1791 г. Законодательное собрание создало Комитет по народному образованию, куда вошел Кондорсе — один из самых энергичных сторонников реформы системы образования. В дальнейшем Конвент обращал пристальное внимание на мероприятия по перестройке народного образования. В самый напряженный период борьбы с внешними и внутренними врагами революции, в 1793 г., Конвент принял решение посвящать три заседания в неделю вопросам образования, ибо образование тогда рассматривалось как один из фронтов идеологической борьбы против реакции.

В ходе революции закрывались церкви, вводились гражданские обряды, богословие было исключено из школьных программ, упразднялись конгрегации и светские корпорации, субсидировавшие коллежи и университеты. Преподаватели рассеивались, университеты постепенно закрывались. Этот процесс завершился декретом от 15 сентября 1793 г., по которому закрывались богословские, медицинские и ремесленные факультеты на всей территории республики. Фактически к 1793 г. были упразднены все двадцать два университета.

Несмотря на то, что военные дела лета 93-го года помешали заслушать доклад Кондорсе от имени Комитета народного образования, главные предложения плана Кондорсе послужили основой дальнейших мероприятий и социально-культурного законодательства Конвента.

Сущность этого плана сводилась к следующему. Народное образование на всех ступенях должно быть бесплатным, всеобщим и равно доступным для всех слоев общества. Пять ступеней школ, лицеев и высших школ должны координироваться Национальным обществом наук и искусств, все должности которого должны быть выборными.

Между тем реальные возможности для проведения реформ, близких к плану Кондорсе, были недостаточными: бо́льшая часть учителей дореволюционного периода находилась под влиянием церкви и реакции. Все мероприятия революционного правительства ими саботировались, было немало и других причин, тормозивших проведение в жизнь реформы школы.

После революции 31 мая — 2 июня 1793 г. жирондисты были оттеснены, власть перешла в руки якобинцев. Якобинский Конвент в самое напряженное время внешних и внутренних сражений сумел провести огромную созидательную работу, затрагивающую все области жизни народа. Перестройка системы образования стала предметом пристального внимания не только Конвента, но и самого деятельного органа революции — Комитета общественного спасения. Комитет подготовил поправки и дополнения к Декларации прав человека и гражданина, а также и к Конституции,— поправки, касающиеся образования. Эти поправки детализировали требование: «Общество всем своим могуществом должно способствовать прогрессу общественного разума и сделать образование доступным всем гражданам». В новой Конституции было записано право на «общее для всех образование» [61].

Однако составление проекта реформы образования попало в руки реакционера Сиейеса, который с помощью двух других правых членов Комитета по народному образованию — Дону и Лаканаля — представил Конвенту в конце июня 1793 г. доклад о перестройке образования с большими отклонениями от плана Кондорсе. В проекте Сиейеса государство должно было организовать только начальное образование, а дальнейшие ступени образования оставались в руках частных лиц и корпораций. Выступление на заседании Конвента видного физика и химика Ассенфратца вскрыло серьезные недостатки проекта Сиейеса. По предложению Робеспьера была создана специальная комиссия для срочного составления плана реформы народного просвещения и образования.

Вновь организованная комиссия, куда вошел и Робеспьер, получила название «Комиссия шести» — по числу ее членов. В основу нового проекта реформы образования комиссия положила план депутата Лепелетье. В отношении высшего образования этот план был очень близок к плану Кондорсе. Однако Лепелетье предлагал делать упор на общественное воспитание детей, начиная с пяти лет. Широкое общее образование в сочетании с производительным трудом и физическим и моральным воспитанием подростков должно было проводиться за счет республики (точнее, за счет обложения богачей налогами) в специальных детских домах.

Демократическая утопия Лепелетье о равном для всех воспитании была встречена в якобинском Конвенте восторженными аплодисментами. Широкие трудовые массы приветствовали новый план системы образования.

Однако как в самой Комиссии шести, так и вне ее нашлись противники плана Лепелетье, и дискуссия в Конвенте заняла семь заседаний. Грегуар, Фуркруа и др. указывали на то, что в проекте Лепелетье нарушаются права семьи, а также на огромные расходы, которые пред-

[61] Французская буржуазная революция 1789—1794 гг. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941, с. 607.

стоят республике для проведения этого проекта в жизнь. В результате дискуссии был снят вопрос об обязательном или рекомендательном общественном воспитании девочек и детей младшего возраста, а возраст общественного воспитания мальчиков подняли до семи лет. Возражая против аргумента о дороговизне такой реформы, Дантон заявил: «После хлеба, воспитание — первая потребность народа».

В результате было принято решение об учреждении бесплатных интернатов. По желанию родителей туда принимались дети всех сословий. Остальные дети могли посещать бесплатные классы. Этот декрет был принят 13 августа 1793 г. и вызвал разочарование в плебейских слоях населения страны. Протест народа был использован различными политическими деятелями и представителями науки — такими, как Лавуазье,— которые торпедировали Конвент петициями, выступлениями с протестами и требованиями пересмотра декрета об образовании и воспитании.

Сен-Жюст опубликовал «Фрагменты о республиканских учреждениях», где пропагандировал идеи воспитания подрастающего поколения в спартанском духе. Лавуазье выступил со своим проектом под названием «Размышления о народном образовании». Идеи просветителей (Дидро, Кондильяка и др.) о том, что ничего нет в мыслях человека, чего ранее не было в ощущениях, о необходимости прививать чувственный опыт и навык ребенку наряду с умственными упражнениями — вот основное направление проекта Лавуазье и Ассенфратца, поддержанного членами Парижской коммуны. В своем проекте они предлагали с раннего детства внедрять трудовое воспитание и профессиональное образование. Это было одобрено специальной комиссией Консультационного бюро искусств и ремесел в сентябре 1793 г., а затем Конвентом был принят соответствующий декрет. И хотя через два дня этот декрет был отменен под предлогом улучшения, однако попытка создания национальных школ трех ступеней по проекту Лавуазье — первых школ детства, вторых школ детства и третьих школ, или школ юности,— была весьма характерна для законодательства якобинской диктатуры.

В 1794 г. в соответствии с проектом Комитета по народному образованию, одобренным Конвентом, был открыт ряд специальных школ нового типа. Школа военного дела должна была готовить военных инженеров и офицеров. Центральная школа общественных работ занималась подготовкой гражданских высококвалифицированных инженеров. Нормальная школа должна была готовить знающих, республикански настроенных педагогов на смену тем учителям коллежей, которые саботировали реформы образования, проводимые республикой, начиная с первых лет революции.

Учащиеся в эти школы подбирались продуманно: муниципалитеты избирали из 20 тысяч жителей одного слушателя Нормальной школы, способного к наукам и представлявшего собой образец «чистоты нравов и испытанного патриотизма». В Нормальной школе преподавали лучшие ученые Франции: математику — Лагранж, Лаплас, Монж, физику — Гаюи, химию — Бертолле, историю — Вольней.

Одновременно с преподаванием математики в Нормальной школе Лагранж разрабатывал свои прежние идеи в области теории чисел, алгебры и взаимосвязи этих наук с геометрией. Монж также сумел систематизировать свои дореволюционные соображения, издав их в виде курса «Начертательной геометрии». Сами ученые осознали важность создания новых школ. Так, Лаплас писал: «Это была поистине великая идея. Я очень сожалею, что Нормальная школа не просуществовала дольше; несмотря на очень суровую зиму и острый недостаток продовольствия, она дала прекрасные результаты, которые скоро скажутся на преподавании в центральных школах» [62].

В период якобинской диктатуры возникла и идея Политехнической школы. Проект создания такой школы разрабатывал первоначально инженер из Школы путей сообщения Ламбларди, возглавивший специальную Комиссию общественных работ и сосредоточивший внимание на плане создания Центральной школы общественных работ, которая позже стала называться Политехнической.

Конвент заинтересовался проектом и поручил Комитету общественного спасения проявить и заботу о создании Школы общественных работ. Тогда для помощи Ламбларди в Комиссию были введены Карно, Монж, Фуркруа,

---

[62] Цит. по кн.: Французская буржуазная революция 1789—1794 гг., с. 562.

Прони, Бертолле, Шапталь и др. Весной 1794 г. Комиссия приступила к разработке устава школы, основной идеей которого было уравнивание прав для поступления и выходцам из дворцов, и выходцам из хижин. Прием должен был осуществляться на основании личных достоинств кандидатов, их республиканской верности и знаний, без различия сословий. Вводилось содержание учащимся в виде стипендии. Вначале обучение предлагалось проводить за три месяца, но позже было установлено трехгодичное обучение. Окончательную редакцию устава школы возглавил Фуркруа, который не сомневался в том, что школа скоро прославит Францию.

30 ноября 1794 г. Центральная школа общественных работ была, наконец, открыта. Она размещалась в прекрасном дворце с 40 залами, принадлежавшем прежде Бурбонам. Здесь были и просторные аудитории, большой амфитеатр, физический кабинет с новейшим оборудованием, прекрасно оснащенные химические лаборатории, минералогическая коллекция, богатая библиотека. К преподаванию были привлечены крупнейшие ученые страны: Лагранж, Лаплас, Монж, Бертолле, Шапталь, Фуркруа, Прони, Гитон де Морво, Ашет и др.

Демократические порядки новой школы сказывались и на составе слушателей, и на взаимоотношениях их с профессорами.

Сын солдата Симон Дени Пуассон (1781—1840), получивший воспитание и математическое развитие в школе Фентенебло, где превзошел своего школьного учителя, явился в 1798 г. в Париж, чтобы поступить в парижскую Политехническую школу. Очень скоро его товарищи поняли, что «маленький Пуассон станет большим». Он не во всем успевал, его освободили от графических работ, но в теоретических предметах он проявлял оригинальность и остроту мысли. Однажды после лекции Лагранж получил записку, в которой один из учеников давал более краткое доказательство бинома Ньютона, чем он. Лагранж подозвал автора записки — это был Пуассон — и одобрил его метод доказательства.

Ускоренное образование высококвалифицированных инженеров, в среде которых воспитывалось немало будущих крупных математиков, физиков, химиков, геологов, было нелегкой задачей. Требовалось не только мастерство профессоров и рвение слушателей, нужно было установить взаимное понимание, некую патриархальность отношений.

После прохождения теоретической подготовки учащиеся заканчивали обучение в узкоспециализированных инженерных школах: в Артиллерийской школе, Школе мостов и дорог, Школе горного дела, в Военной школе, в Топографической школе и др. Таким образом, диапазон подготовки специалистов Политехнической школы был очень широк, а главной их особенностью была прекрасная общеобразовательная и специальная подготовка. Как в плане обучения, так и в самом преподавании выполнялся принцип сочетания самой строгой теории с практической направленностью проблем. Именно это составляло секрет необычайно большого успеха Политехнической школы. Школа имела свой журнал, где публиковались труды профессоров и талантливых учеников, который назывался «Журналом Политехнической школы». Из каждого выпуска школы выходило немало ученых, выдающихся инженеров, имена которых позже становились известны всему миру. Когда Наполеону незадолго до его падения предложили мобилизовать под ружье всех политехников, он ответил крылатой фразой: «Не стоит резать курицу, несущую золотые яйца». Действительно, наука, техника, военное искусство Франции и всего мира многое выиграли от того, что из стен Политехнической школы вышли такие ученые, как Ампер, Пуассон, Пуансо, Фурье, Коши, Араго, Гей-Люссак, Френель, Био, Малюс; такие знаменитые инженеры и полководцы, как Понселе, Кориолис, Шаброль, Друо, Бертье, Ней, Мюрат и др.

Лагранж читал в Политехнической школе математический анализ. Попутно с этим он подготовил и в 1797 г. опубликовал монографию «Теория аналитических функций». По существу, это была первая часть читаемого им курса, которому он придавал своеобразный вид учения о производных. Единая методика изложения курса математического анализа Лагранжа основывалась на свойстве разложимости аналитической функции в степенной ряд. Анализ вопроса об остаточном члене ряда Тейлора проводился одновременно с фактическим выводом теоремы о конечном приращении функции.

Вторая часть курса была опубликована Лагранжем в 1801 г. под названием «Лекции по исчислению функций». Лекции Лагранжа в Политехнической школе вызывали такой оживленный интерес, что на них ходили даже профессора. Один из них, видный математик Лакруа, рассказывал, что Лагранж прямо на глазах аудитории создавал отдельные части своего анализа.

Наконец, в этот же период Лагранж завершил работу над оригинальным трактатом «Разрешение численных уравнений», который был опубликован в 1798 г. Кроме того, Лагранж окончил начатую им ранее теорию решения сферических треугольников. Эта теория выводилась из основной формулы, которая является выражением теоремы косинусов на сфере.

Организация научной работы в процессе революции также подвергалась существенным преобразованиям. Незадолго до преобразования Королевской академии наук в Институт Франции, в сентябре 1791 г., правительство организовало Бюро консультаций прикладных искусств и ремесел, куда вошли видные ученые различных специальностей — такие, как Лавуазье, Лагранж, Лаплас, Бертолле, Борда, Вандермонд, Леблан, Ассенфратц. При создании бюро правительство имело в виду оживление технико-изобретательской инициативы. Бюро должно было отбирать полезные для промышленности и экономики труды, изобретения и предложения.

Несколько позже функции Бюро консультаций перешли в ве́дение Консерватории технических наук и искусств, основанной в октябре 1794 г. В Консерватории технических наук и искусств должны были собираться и храниться образцы машин, станков, чертежи и конструкции еще не внедренных в промышленность машин. Девизом такого учреждения было единение науки и техники. В Консерватории организовывались открытые лекции ученых, видных инженеров и конструкторов, промышленников, администраторов. На эти лекции ходили все, кто был заинтересован в прогрессе производства страны, в том числе мастера и рабочие. Позже, в первой трети XIX в., из таких публичных лекций, прочитанных учеными для мастеров и рабочих, возникло мощное направление науки, называемое индустриальной механикой. Курсы индустриальной механики в Консерватории технических наук и искусств (и в других учебных заведениях Франции) создавались Ш. Дюпеном, М. Кристианом, Ж. В. Понселе, Г. Кориолисом.

Комиссия по разработке новой метрической системы

Во Франции, как и в других странах Европы, в XVIII в. царил величайший хаос единиц измерения длин, площадей и весов. В землемерной практике Франции существовало несколько названий мер площади, разных в различных провинциях. За ними скрывались не всегда одни и те же величины площадей. Это обостряло отношения между земледельцами и феодалами, приводило к конфликтам, так как существующую путаницу использовали имущие классы в ущерб неимущим. Пестрота и неразбериха разнообразных мер, весов, единиц длины, объема тормозили развитие торговли, промышленности и всего хозяйства в целом, приводили к большому произволу в установлении таможенных пошлин. В XVIII в. делались попытки создать справочные таблицы, сопоставляющие различные по названию и по величине единицы площади, веса. Астроном Лаланд начал трудоемкую работу по составлению таблиц, сравнивающих французские меры с иностранными, но существенных успехов в этом деле не достиг. Необходимость реформы, устанавливавшей единство мер и весов, осознавалась еще в королевской Франции.

Введение стандартной системы мер и весов сразу же стало насущной задачей республики. Даже в наказах Учредительному собранию встречались лозунги типа: «Единый для всей Франции король, единый закон, единые мера и вес!». Но поскольку феодалы, торговцы и многие из привилегированных классов боялись проиграть на стандартизации мер, эта реформа могла быть осуществлена лишь революционными методами. Только в революционной Франции была подготовлена почва для введения метрической системы.

Уже в 1790 г. вопрос о реформе мер и весов был поставлен на повестку дня в Учредительном собрании. На рассмотрение этого собрания предлагалось несколько проектов, из которых предпочтение было отдано проекту Талейрана, в то время епископа, ставшего позже министром внутренних дел, который желал придать реформе международный характер, в то время как другие проекты предусматривали распространение парижских мер только на территории Франции.

Талейран предлагал создать универсальную метричсскую систему, построенную на основе единицы, взятой не по предложению какой-либо нации, а из самой природы. В качестве такой единицы Талейран предлагал взять длину секундного маятника на средней для северного полушария широте — 45°. Позже в декрете Национального собрания в марте 1791 г. отмечалось, что единственным способом распространения системы мер на другие нации было бы избрание единицы, не содержащей ничего такого, что утверждало бы особое положение какого-либо народа или нации на земном шаре. Франция и не стремилась к достижению преимущества в таком мероприятии. Парижская Академия наук предложила другой естественный способ введения основы для эталона длины: в качестве таковой предлагалось принять десятимиллионную часть длины дуги четверти меридиана. Предлагалось взять меридиан, проходящий через Париж, потому что этот меридиан содержал дугу, концы которой находятся на уровне моря (кроме того, этот же меридиан проходит и через Лондон).

Переписка Талейрана с членами Палаты общин Англии установила, что там также предпринимались шаги в этом направлении. В апреле 1790 г. в Палату общин был представлен проект введения единой системы мер в Англии. Вскоре выяснилось, что и в Соединенных Штатах Америки существовали проекты такой реформы. Попытка увязать вместе стремления трех стран не дала результатов, так как Джефферсон в Америке настаивал на эталоне, связанном с секундным маятником. Англия ввиду осложнений взаимоотношений с Испанией и с Францией отказалась от совместного проведения реформы. Во Франции победило мнение, что в качестве единицы длины следует выбрать десятимиллионную долю четверти длины дуги меридиана.

По поводу результатов этих попыток следует согласиться с автором современной популярной книжки «Меры и метрическая система» И. Я. Депманом: «Таким образом, те две страны, которые в настоящее время почти единственные не признали еще обязательной у себя метрическую систему, в 1790 г. обе были близки к ее принятию» [63].

Декрет о проведении реформы мер и весов был принят

[63] *Депман И.* Меры и метрическая система. Л., Детгиз, 1953, с. 57.

только во Франции; это произошло 8 мая 1790 г. Тогда же (вторым декретом Национального собрания) был утвержден состав комиссии из членов Академии наук по разработке проекта новой системы мер и весов. В комиссию вошли Кондорсе, Борда, Лагранж, Тилле и Лавуазье. Было рекомендовано принять единицу длины, основываясь на длине одной четверти дуги меридиана. Необходимо было произвести измерения дуги парижского меридиана от Дюнкерка до Барселоны, проделать ряд других измерительных работ. Комиссия разделилась: часть ее членов во главе с Лагранжем должна была выбрать систему счисления, которую предполагалось положить в основу новой системы монет, длин, весов, площадей. Другая часть комиссии должна была заниматься измерительными работами — геодезическими и лабораторными.

К этому времени выяснилось, что английское правительство отступило перед сложностью задачи и отказалось от проведения реформы мер и весов в Великобритании. Переговоры между Соединенными Штатами и Францией грозили затянуть проведение реформы, и их прервали, так как Комиссия по разработке новой системы мер и весов во Франции уже подготовила первый проект реформы. Борда изобрел прибор для очень точного измерения углов между данным отрезком и лучом визирования. Монж и его талантливый ученик — математик, физик и инженер Менье (он погиб в 1793 г., сражаясь за республику) — должны были измерять основания треугольников на поверхности земли, сопоставляя данные этих измерений с результатами триангуляционных измерений. Лавуазье и Гаюи измеряли вес воды при нормальных атмосферных условиях, необходимый для введения эталона веса — «грамма». Борда и Кулон измеряли длину секундного маятника на широте Парижа. Тилле, Бриссон и Вандермонд составляли таблицы перехода от старых мер к новым.

Остальные члены Комиссии во главе с Лагранжем вели теоретические работы, связанные с выбором базиса новой системы. Лагранж являлся одним из самых энергичных сторонников преобразования системы мер и весов; он был против предложений, стремящихся положить в основу новой системы число с большим количеством делителей, например число 12. В противовес этому мнению Лагранж выдвигал, как ни странно, даже простое число 11. Тогда ни половина вводимой единицы, ни треть, ни четверть ее не имели бы самостоятельного дополнительного значения и хождения и не нарушалась бы уникальность меры, так как на эти доли 11 не делится нацело. После долгих и горячих диспутов все помирились на числе 10 — базе современного счета. Но и вокруг этого числа продолжались споры. Здесь Лагранж проявил большую твердость, сумев отстоять десятичную систему во всей ее чистоте, отбросив разнообразные предложения ввести еще дополнительные меры — такие, как, например, четверть метра.

Наибольшие трудности выпали на долю академиков Деламбра и Мешена, руководивших работами по измерению дуги меридиана.

Метод триангуляции основывается на вычислении сторон ряда треугольников. Отрезок дуги меридиана, длину которого нужно измерить, покрывается сетью треугольников, вытянутой вдоль данного отрезка. В качестве вершин треугольников выбирают высокие точки местности, например: колокольни или специальные вышки. Из каждой выбранной высокой точки должны быть видны две другие. Как можно точнее измеряется по поверхности земли одна из сторон такого треугольника — базис. При помощи угломерных приборов и зрительных труб весьма точно измеряются углы, под которыми виден базис треугольника. Тригонометрия дает возможность вычислить с любой точностью длины двух других сторон треугольника. Переходя от одного треугольника к другому, соседнему, от второго к третьему и так далее, можно измерить расстояние между крайними точками дуги меридиана, покрытого такой сетью треугольников. Зная число градусов промеренного участка меридиана (дуга от Барселоны до Дюнкерка содержала 9,5°), вычисляют длину меридиана. Геодезической комиссии Парижской академии наук нужно было измерить и просчитать 115 треугольников на протяжении тысячи километров от Дюнкерка до Барселоны, причем часть пути заходила на территорию Испании. Много времени и средств пошло на заказ и изготовление измерительных приборов, многие из которых пришлось изобретать заново.

25 июня 1792 г. экспедиция Деламбра и Мешена отправилась на места геодезических работ. Трудности работы усугублялись неустойчивостью политической обста-

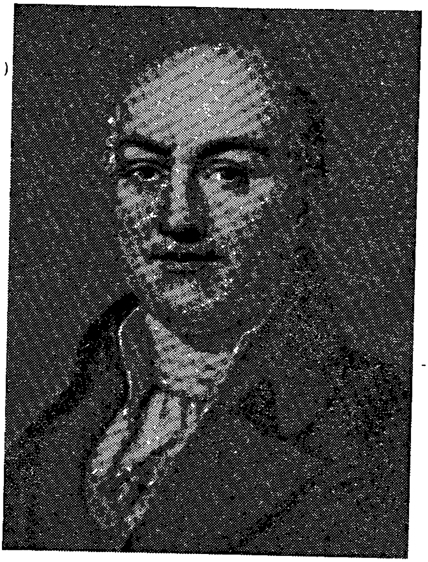
новки во Франции. Местное население, не зная задания астрономов, не раз принимало их за роялистских шпионов и от угроз иногда переходило к действиям. После нескольких арестов ученым были выданы специальные мандаты правительства республики, но бдительные революционеры часто игнорировали неприкосновенность членов комиссии. Особенно трудно приходилось Мешену в Испании после того, как Франция объявила войну этой стране. Геодезические работы затягивались, это срывало сроки проведения реформы мер и весов.

Весной 1792 г. Законодательное собрание стало проявлять нетерпение из-за медленной работы по осуществлению реформы мер и весов. Неустройство экономики революционной Франции, частые голодовки, затруднения со снабжением городов хлебом правительство связывало с отсутствием общегосударственных единиц мер и весов. Для продолжения работ по проведению реформы была создана Временная комиссия мер, в которую вошли почти все прежние члены академической комиссии. От правительства работу комиссии курировал член Законодательного собрания инженер Приёр-Дувернуа.

Осенью 1792 г. Борда делал сообщение в Конвенте о ходе геодезических работ и о результатах деятельности всей Комиссии мер и весов. Он предполагал, что геодезические работы могут быть закончены к началу 1794 г., однако его расчеты оказались слишком оптимистичными. Измерения дуги меридиана затягивались.

Весной 1793 г. Борда доложил Конвенту предложения комиссии: комиссия представляла на утверждение Конвента эталон единицы веса — килограмм — как вес одного кубического дециметра воды при нуле градусов по шкале Реомюра с поправкой на атмосферное давление. Кроме того, вводился грамм как одна тысячная доля килограмма. Большим достижением комиссии был признан простейший принцип соотношения между единицами длины, площади, объема, веса, массы — принцип десятичной системы счета. Борда от имени комиссии, чтобы не задерживать реформу, предложил ввести временный эталон единицы длины, положив в основу результат измерения меридиана аббатом Лакайем в 1740 г.

Эти предложения были приняты и претворены в декрет о введении новой (временной) метрической системы. 1 августа 1793 г. декрет был принят на том же исто-



Ж. Деламбр

рическом заседании Конвента, когда были приняты и такие важные декреты, как декрет о предании бывшей королевы Марии Антуанетты суду революционного трибунала, декрет об изгнании подданных враждебных стран. Отныне промедление и задержки в введении и принятии новых мер и весов рассматривались как проявление «ненавистных остатков тирании».

Обострение обстановки на фронтах и роялистские мятежи внутри Франции летом и осенью 1793 г. вызвали укрепление власти и привели к переменам и в составе Комиссии мер и весов: вскоре, 23 декабря 1793 г., постановлением Комитета общественного спасения была проведена чистка комиссии. По «недостатку республиканской доблести и ненависти к королям» были объявлены не заслуживающими доверия и выведены из состава комиссии Борда, Лавуазье, Лаплас, Кулон, Бриссон и Деламбр. Остались Лагранж, Монж, Бертолле, Гаюи и вновь были введены Ассенфратц, Прони, Вандермонд, Бюаш.

Как раз в этот период был гильотинирован мэр Парижа, соучастник Лафайета в расстреле народных масс на

Марсовом поле, астроном Байи, а несколько позже — и крупный ученый, но вместе с тем ловкий делец и откупщик Лавуазье. Лагранж тяжело переживал эти потрясения, высказавшись о казни Лавуазье так: «Нужен был один момент, чтобы снести эту голову, и, может быть, будет недостаточно ста лет, чтобы появилась подобная»[64].

В это суровое и чрезвычайно опасное для республики время якобинской диктатуры, когда повсюду зрели заговоры и множились предательства, взаимное недоверие все усиливалось. Везде искали врагов. Среди членов Комитета общественного спасения постепенно нарушалось единство, возникали излишние подозрения. В этот тяжелый период Лагранж нашел в себе смелость, не будучи подданным Франции, выступить в защиту несправедливо удаленного из Комиссии мер и весов Деламбра; позже ему удалось снова вернуть Деламбра в комиссию.

В апреле 1795 г. по предложению Приёра был установлен временный метр (по результатам измерений меридиана 1740 г.). Вместе с тем было решено возобновить работы для замены единицы длины на основе новых измерений меридиана. Это было время правления Директории. Министр иностранных дел Талейран добивался, чтобы новая система мер не была узко национальной. Его хлопоты привели к тому, что в 1798 г. был созван международный конгресс, который проверил длину и вес основных эталонов. Летом следующего года были изготовлены прототипы метра и килограмма и сданы в Архив Франции. Эти платиновые образцы, названные архивными, впоследствии вызывали восхищение Международной комиссии метра, работавшей в Париже в 1873 г.

В декабре 1799 г. основой новой метрической системы был признан архивный метр (платиновый образец которого хранился в Архиве Франции). Аналогично был определен килограмм как вес прототипа, хранящегося в Архиве Франции. Только через 90 лет на смену этим архивным эталонам пришли новые «международные» эталоны. В предместье Парижа в парке Сен-Клу глубоко под землей находится Бретейльский павильон. Там в нескольких футлярах хранится эталон метра — металлический стержень.

Проведение в жизнь новой метрической системы, кото-

---

[64] *Delambre*. Op. cit.— Oeuvres de Lagrange, t. I, p. XL.

рая получила название «республиканской», потребовало особой настойчивости со стороны Конвента. В декрете 1795 г. говорилось: «...пользуясь новыми мерами еще до того, как они будут объявлены обязательными, граждане дадут доказательство своей преданности единству и нераздельности республики» [65]. Однако граждане встретили новые меры без энтузиазма: сказывались вековые привычки к прежним мерам и их названиям. Более глубокие причины медленного внедрения новых мер были в нежелании имущих классов расстаться со старой запутанной системой мер, с помощью которой так легко было обманывать широкие массы народа.

Только отдаленные потомки оценили великое значение прогрессивной реформы мер и весов революционной Франции в конце XVIII в. Сразу значение этой реформы поняли лишь наиболее дальновидные политики. Так, в своем докладе Конвенту в 1795 г. Приёр говорил: «Среди удачных и полезных реформ, рожденных революцией, имеется одна, которая своей связью с вопросами морального и политического характера, с промышленностью и управлением и в то же время по своему влиянию на точные науки, на общее просвещение и нравы всего общества должна рассматриваться как мероприятие величайшей важности для республики ... это новая система мер и весов... Еще в другом отношении эта реформа мер и весов представляет интерес: она, с одной стороны, опирается на самое точное, что содержится в математике и физике, и в то же время является доказательством их успехов..., с другой стороны, она нисходит до самых глубин гражданского быта» [66].

Внутрибаллистическая проблема Лагранжа

В 1793 г., в трудный для Французской республики момент, Лагранж получил задание Комитета общественного спасения исследовать взрывную силу пороха в канале ствола пушки. Плодом его исследования явилась рукопись, которая считалась секретной в те годы и не была опубликована.

---

[65] Цит. по кн.: *Старосельская-Никитина О. А.* Указ. соч., с. 149.
[66] Там же, с. 149—150.

В 1825 г. военный министр Франции обратился к ученику Лагранжа Пуассону с поручением разработать теорию действия выстрела на лафет орудия. Пуассон заинтересовался рукописью Лагранжа, хранящейся в Академии наук. Исследование Пуассона начиналось с выяснения природы отдачи артиллерийской системы, а это имело прямое отношение к вопросам, затронутым в работе Лагранжа. Рукопись Лагранжа о взрывной силе пороха была опубликована с примечаниями Пуассона [67].

В то время, когда проводилось исследование Лагранжа, т. е. в конце XVIII в., артиллеристы-теоретики при расчете орудий пользовались теорией параболических траекторий Галилея с важными дополнениями, сделанными Ньютоном, Д. Бернулли, Эйлером и другими учеными. Однако теория квадратичного, а также зависящего от других степеней скорости сопротивления, основы которой были заложены Ньютоном, еще не была доведена до широких конкретных приложений, поэтому в проблемах повышения точности стрельбы ведущую роль играл эксперимент.

Постепенный прогресс экспериментальной техники измерения начальной скорости снаряда (а также исследования влияния отдачи на точность стрельбы) сводился главным образом к совершенствованию баллистического маятника. Сначала это был просто тяжелый кусок дерева, в который стрелял Жак Кассини в 1707 г. Баллистический маятник Б. Робинса 1740 г. представлял собой специальный приемник весом более 30 кг, отклоняющийся на цепях при попадании в него снаряда. Отклонение маятника позволяло вычислить кинетическую энергию снаряда перед попаданием.

Теория явлений, происходящих в канале орудия,— внутренняя баллистика — сложилась в самостоятельную отрасль артиллерийских наук лишь во второй половине XIX в., хотя разделение баллистики на внешнюю и внутреннюю можно найти уже в книге английского артиллериста-теоретика и математика Б. Робинса «Новая теория артиллерии», вышедшей в 1742 г. Робинс впервые проявил интерес к изучению начальной (дульной) скорости

---

[67] *Poisson S. D.* Formules relatives au mouvement du boulet dans l'interiéur du canon, extraites des manuscrits de Langrange.— «Journ. de l'Ec. pol.», t. XIII, cah. 21. 1832, p. 187—204.

снаряда в связи с вопросом о давлении пороховых газов на дно снаряда.

Основной целью внутрибаллистических исследований XVIII в. было определение начальных условий полета снаряда после вылета из пушки, а именно — определение дульной скорости. Кроме того, ученые занимались выбором рациональных величин веса заряда, длины канала ствола и толщины стенок орудия.

Д. Бернулли наметил в этом вопросе подход, основанный на анализе данных опытных стрельб. В 1727 г. он провел большую серию опытных стрельб в Петербурге, измеряя время полета сферического снаряда при стрельбе вертикально вверх различными зарядами из пушек с различной длиной канала. Опыты Д. Бернулли привлекли внимание его друга и коллеги по Петербургской академии наук Л. Эйлера к вопросам баллистики, и в том же 1727 г. Эйлер приступил к своему первому исследованию по баллистике.

Б. Робинс развил экспериментальный метод баллистических расчетов Бернулли. Как и Бернулли, Робинс считал давление пороховых газов одинаковым (средним) всюду за снарядом (в данный момент времени) и подчиняющимся закону Бойля—Мариотта. На основании более многочисленных и более достоверных экспериментальных данных, полученных с помощью весьма эффективного прибора — баллистического маятника — Робинс пришел к результатам, близким к выводам Бернулли: зависимость скорости снаряда от длины канала у него была логарифмической.

Эйлер уточнил постановку задачи о движении снаряда в канале ствола по сравнению с постановкой Бернулли. Он указал на необходимость принимать во внимание некоторый объем пороха, не превращающегося в газ, а также на неточность закона Бойля — Мариотта в данном вопросе, предложив вместо него некоторое физическое соотношение между давлением и плотностью, установленное в его раннем исследовании упругой силы воздуха. Существенным уточнением Эйлера в проблеме внутренней баллистики было предложение вместо введенной Д. Бернулли и используемой в XVIII в. гипотезы мгновенного сгорания заряда учитывать постепенность превращения пороха в газ, что было особенно важно для расчета действия новых сортов медленно горящих порохов.

Наконец, Эйлер указал на необходимость учета движения массы пороховых газов. При этом он предлагал еще учитывать непостоянство плотности по координате в заснарядном пространстве.

Все эти факторы Эйлер и пытался ввести в рассмотрение в своих баллистических исследованиях, но не добился существенных успехов, поскольку еще не было достаточных экспериментальных, технических и физических предпосылок для этого.

Эту программу в значительной мере, во всяком случае в деле уточненной постановки задачи внутренней баллистики, выполнил Лагранж. Он четко сформулировал гипотезы, намеченные Эйлером, облек их в математическую форму и записал исходные уравнения и начальные условия задачи. Кроме того, Лагранж наметил путь решения этой задачи при следующих предположениях:

1) пороховой заряд полностью превращается в газ до начала движения снаряда; до начала движения газ однороден, его давление p_0, плотность — ρ_0;

2) движение газа в канале ствола считается одномерным;

3) зависимость давления от плотности газа берется в виде

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n, \tag{1}$$

где p — давление, ρ — плотность, n — некоторая постоянная.

Используя соотношение

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}, \tag{2}$$

получаемое из закона сохранения массы, Лагранж записал дифференциальные уравнения движения:

газа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-n-1} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \tag{3}$$

снаряда

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \pi c^2 \omega \tag{4}$$

и орудия

$$m' \frac{d^2y'}{dt^2} = -\pi c^2 \omega', \tag{5}$$

где z — координата некоторого поперечного сечения газа в момент времени t, x — начальная координата этого сечения, $a^2 = \frac{n p_0}{\rho_0}$ — скорость звука в покоящемся газе; πc^2 — площадь поперечного сечения канала ствола; y, ω и y', ω' — значения величин z и p для крайних слоев газа, прилегающих к дну снаряда $x=\alpha$ и к дну канала ствола $x=0$; m и m' — массы снаряда и орудия, соответственно.

Начальные условия предполагаются нулевыми, т. е. при $t=0$, $z=x$,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dy'}{dt} = 0.$$

Вместо системы уравнений (3) — (5) рассматриваются далее следующие их интегралы:

$$m \frac{dy}{dt} + m' \frac{dy'}{dt} + \frac{\mu}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial z}{\partial t} dx = 0, \tag{6}$$

выражающий закон сохранения количества движения системы, и

$$m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + m' \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{\alpha} \int_0^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{2\pi c^2 p_0}{(1-n)} \left[\int_0^\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{1-n} dx - \alpha \right] \tag{7}$$

— результат теоремы живых сил. Здесь μ — масса газа, α — начальная длина части канала ствола, заполненной пороховым газом.

Далее Лагранж предпринимал различные попытки аналитического решения поставленной задачи.

В исследовании задачи внутренней баллистики до Лагранжа использовалась гипотеза Робинса и Эйлера о постоянстве плотности газа по координате и времени. Лагранж ввел предположение о независимости плотности от координаты, т. е. плотность газа в каждый момент времени он считал одинаковой во всех точках заснарядного пространства. Из этого предположения Лагранж получил соотношение

$$z = \frac{y - y'}{\alpha} x + y', \tag{8}$$

из которого следует линейный закон изменения скорости газа по длине канала от величины dy'/dt у дна канала до dy/dt непосредственно у дна снаряда. Поставленная задача решается полностью для случая, когда можно пренебречь массой заряда по сравнению с массой снаряда ($\mu = 0$). Из уравнений (6) и (7) $y(t)$ и $y'(t)$ определяются с помощью квадратур, тем самым с учетом (1), (2), (8) определяются z, p, ρ и v как функции x и t.

Значение работы Лагранжа состоит в четкой постановке газодинамической задачи внутренней баллистики, в записи точных уравнений движения системы и в указании на необходимость учета массы пороховых газов.

Французский ученый Г. Пиобер предложил решение баллистической задачи с прямыми ссылками на работу Лагранжа. Отправные гипотезы и уравнения у него те же самые, за исключением того, что зависимость давления от плотности, которая у Лагранжа имела вид $p = p_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-n}$, была более гибко приспособлена Пиобером к реальным случаям постепенного, а не моментального сгорания заряда. Пиобер показал неприемлемость гипотезы о мгновенном сгорании заряда, обращаясь к конкретным расчетам. Обобщив большой опытный материал, он предложил геометрическую теорию горения пороха и установил зависимость между плотностью пороховых зарядов и временем сгорания. Пиобер использовал эмпирическую формулу английского физика Румфорда для зависимости давления от плотности, которую, на основании анализа опытных данных, упростил и записал в виде

$$p = K\rho'^n \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-n}, \tag{9}$$

где K — некоторая постоянная, ρ' — переменный множитель, зависящий от времени и учитывающий полноту сгорания заряда, n — некоторая постоянная (из опытных данных Пиобер определил границы изменения для n от 1,036 до 1,121).

Полученные Пиобером результаты широко использовались во внутренней баллистике, хоть его решение проблемы содержало известный произвол в выборе зависимости z от x.

К исследованию классической задачи внутренней баллистики обращались многие ученые. Наблюдается непрерывное развитие теории, со временем в уравнениях учитывается большее количество факторов, вводится много различных допущений, связанных с горением заряда, изучается неустановившийся процесс распространения газа.

Существенно новый подход к решению лагранжевой баллистической проблемы дал французский артиллерист Г. Гюгонио в работе «О распространении движения в теле и в особенности в газе» (1889).

Не останавливаясь на рассмотрении всех ценных научных вкладов Гюгонио в теорию движения газа, отметим, что в указанной работе он эффективно применил метод характеристик для решения уравнений газовой динамики.

В настоящее время, помимо большого исторического интереса, задача Лагранжа имеет и определенное практическое значение во внутренней баллистике, так как движение газов после конца горения заряда происходит в условиях, близких к условиям классической задачи Лагранжа.

Отметим также, что решение задачи Лагранжа представляет интерес и в другом аспекте — с точки зрения приложения ее к теории движения ракет, так как идеализированная задача о реактивном орудии — это задача Лагранжа для открытой трубы, которой занимался еще Гюгонио в связи с задачей о движении газа в стволе после вылета снаряда.

Последние годы жизни

Для последнего десятилетия деятельности Лагранжа характерен новый подъем творческих сил и напряженная научная работа.

Наиболее важными исследованиями Лагранжа в этот период были разработка метода вариации произвольных постоянных в проблемах небесной и общей динамики; существенные прибавления к изысканиям Эйлера по алгебре в области теории неопределенных уравнений первой и второй степени, а также по вопросам разрешения численных уравнений; существенные дополнения к прежним результатам в области астрономии и сферической тригонометрии.

Однако больше всего сил у Лагранжа в последние его годы ушло на подготовку к переизданию самого значительного его сочинения — «Аналитической механики».

Первый том был переработан, сдан в печать и уже в 1811 г. вышел в свет. В нем были сделаны очень важные изменения. Лагранж включил сюда обоснование принципа виртуальных скоростей, впервые опубликованное в «Журнале Политехнической школы» в 1798 г.[68] Он считал это обоснование «прямым доказательством принципа виртуальных скоростей, совершенно независимым от двух других принципов» (т. е. от принципа рычага и принципа сложения сходящихся сил)[69].

Наиболее существенным дополнением первого тома была теория вариации произвольных постоянных, опубликованная Лагранжем в мемуарах Института Франции в начале XIX в. В трактат «Аналитическая механика» эта теория вошла в сильно переработанном виде. Ее переработкой Лагранж занимался в последние свои годы. Как уже отмечалось, теория вариации произвольных постоянных, зародившись в небесной механике, превратилась в руках Лагранжа в новый чрезвычайно эффективный, метод общей аналитической динамики.

В значительной мере были переработаны теория малых колебаний и теория колебаний струны, которую ученый начал разрабатывать еще в Турине в 1759 г. Теперь теория колебаний струны была изложена более просто и с учетом возражений Даламбера против раннего ее варианта.

Над подготовкой второго издания «Аналитической механики» Лагранж работал со всем пылом, со всей силой своего гения. Но от этого накапливалось утомление, которое по временам приводило к резкому упадку сил.

У него были обширные замыслы и относительно переиздания второго тома «Аналитической механики», а так-

---

[68] *Lagrange*. Sur le principe des vitesses virtuelles.— «Journ. de l'Ec. Pol.», 1798, Cah. V., ann. VII, p. 115—118.
[69] *Лагранж*. Аналитическая механика, т. I, с. 10.

же другого крупного труда — «Теории аналитических функций».

В рукописях Лагранжа уже имелись некоторые наметки к дополнению и изменению второго тома «Аналитической механики». Это относилось к некоторым проблемам небесной механики, к теории вращательного движения твердого тела и к другим вопросам. Однако здоровье Лагранжа резко ухудшилось. Его близкие иногда находили его без сознания за рабочим столом. Он предчувствовал исход событий, но относился к этому с хладнокровием исследователя, присутствующего при новом, неизведанном явлении. Незадолго до смерти Лагранж собирался прочитать в Институте Франции доклад об аксиоме параллельности прямых. На эту тему в конце XVIII в. появилось много работ. Однако неожиданно он взял доклад обратно, сказав: «Я должен об этом еще поразмыслить».

Весной 1813 г. Лагранж слег, и силы его стали быстро убывать. Три члена Института Франции, его друзья Монж, Ласепед и Шапталь навестили его 8 апреля. Они пришли проведать больного и вручить ему новую высокую награду по поручению Наполеона, который очень высоко ценил заслуги ученых Франции, особенно Монжа, Бертолле, Лагранжа, Лапласа. Лагранжа он называл «Хеопсовой пирамидой науки». Одним из свидетельств большого уважения Наполеона к Лагранжу был такой эпизод. В 1796 г., когда Франция аннексировала Пьемонт, Талейран, по просьбе Бонапарта, посетил в Турине отца Лагранжа, чтобы выразить ему восхищение его сыном. Талейран сказал, что Пьемонт может гордиться тем, что здесь родился и вырос Лагранж, а Франция может гордиться тем, что обрела его, ибо Лагранж сделал честь всему человечеству своим гением.

Ко времени посещения Лагранжа друзьями он уже более недели находился в постели. Беседа длилась несколько часов. Лагранж стал рассказывать о наиболее интересных моментах своей жизни. Видя, что ему трудно, что он слишком оживляется, напрягая память и силы, его друзья хотели уйти, несмотря на большой интерес к тому, о чем говорил Лагранж. Но он остановил их и продолжал рассказывать. Потом он заговорил о своих работах, пообещал как-нибудь в другой раз рассказать о замыслах по переизданию своих трудов, в частности второго тома «Аналитической механики». Однако об этих замыслах не суждено было узнать ни его коллегам, ни потомкам. После ухода друзей ученый впал в забытье, а утром 10 апреля умер.

В последней беседе он сказал навестившим его коллегам: «...я почувствовал, что умираю; мое тело ослабевает мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий... Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить мой путь...» [70].

В таких лаконичных, сдержанных, исполненных скромности словах Лагранж дал оценку своей жизни. Его знаменитый современник Вольфганг Гете, не встречавшийся с ним, но хорошо представлявший себе характер и прекрасный образ этого человека, писал о нем: «Математик совершенен лишь постольку, поскольку он является совершенным человеком, поскольку он ощущает в себе прекрасное, присущее истине; только тогда его творчество становится основательным, чистым, ясным, одухотворенным, действительно изящным. Все это требуется, чтобы уподобиться Лагранжу» [71].

В другом месте Гете высказал эту же мысль несколько иначе: «Лагранж был безупречным человеком и именно поэтому и великим. Если безупречный человек наделен талантами, то он всегда становится благом человечества, носителем счастья и благородства, будь то художник, исследователь природы, поэт или кто-либо другой» [72].

Лагранж целеустремленно и самоотверженно отдавал все силы той области творчества, где он чувствовал себя уверенно, где мог найти и находил истину, а вместе с тем и удовлетворение.

О своих занятиях математикой и механикой (в его эпоху эти науки принято было называть геометрией) Лагранж говорил: «Я занимаюсь геометрией спокойно и в тишине. А как меня ничто и никто не торопит, то я работаю более для моего удовольствия, нежели по должности; я похожу на вельмож, охотников строиться: я строю,

---

[70] *Delambre*. Op. cit.— Oeuvres de Lagrange, t. I, p. XLIV.
[71] Goethes Werke, Bd. XX. Berlin, 1873, S. 109.
[72] *Lorey*. Op. cit., p. 236.

ломаю, перестраиваю до тех пор, пока не выйдет что-нибудь такое, чем я остаюсь несколько доволен» [73].

После второй женитьбы, на дочери видного французского астронома Лемонье, Лагранж, хоть и любивший уединение, стал чаще бывать в обществе. Он не был бесчувственен к очарованию музыки. Когда он бывал на концертах, его не раздражали разговоры и шум окружающих: он их не слышал, весь отдаваясь музыке. Но и ее он воспринимал по-особому: «Я ее люблю, поскольку она меня изолирует; я слышу первые три такта, на четвертом такте не различаю ничего, я предаюсь своим размышлениям, ничто меня не прерывает, и тогда я решаю наиболее трудные из проблем» [74].

В разговорах с людьми Лагранж был тихим и даже робким; он больше любил расспрашивать других, чтобы остаться в тени и чтобы прибавить что-либо новое к своим обширным познаниям. Когда он высказывал какие-либо собственные суждения, то делал это в тоне сомнения, его первая фраза часто начиналась словами: «Я не знаю...». Он уважал чужие мнения, не спешил высказать свое резюме, а если был вынужден дискутировать, то делал это в форме спора с самим собой.

«Я рассматриваю споры,— говорил он,— как совершенно бесполезные для преуспевания науки и как ведущие только к потере времени и покоя» [75].

Пример одной такой вынужденной дискуссии описан Деламбром. Однажды Лагранж долго беседовал с Борда, после чего тот вышел недовольный, обронив слова, что большего упрямца он никогда не видывал. Вскоре после того, как он ушел, вышел Лагранж и сказал, что ему нравится позиция Борда, его друга и очень разумного человека, который, как и он сам, не изменяет быстро своих взглядов, усваивая их только после зрелого опыта. Что говорить — диаметрально противоположные оценки! Таким был Лагранж во всем — мягкий, терпеливый, сдержанный и ответственный.

Чрезвычайно благородно вел себя Лагранж и в вопросах о приоритете. После переезда в Париж некоторые из его новых коллег сообщили ему об изысканиях в тех же

---

[73] *Араго Ф.* Указ. соч., с. 351.
[74] *Delambre.* Op. cit.— Oeuvres de Lagrange, t. I, p. XLVIII.
[75] Oeuvres de Lagrange, t. XIV, p. 85.

областях, которыми занимался он. Лагранж искренне желал им успеха и всегда охотно уступал им тему, которой они занялись.

По многим проблемам небесной механики Лагранж и Лаплас работали в творческом и весьма полезном обоим соревновании.

В вопросе установления вековых или долгопериодических неравенств в движении планет первенство бесспорно принадлежало Лагранжу. Еще будучи в Берлине в 1774 г., Лагранж отправил свою научную работу по этой проблеме в Парижскую академию наук. С рукописью познакомился работавший там Лаплас. Отточенный, как обычно, метод решения этой задачи Лагранжем очень понравился Лапласу. Лаплас воспользовался этим методом и распространил его для изучения размеров и форм планетных орбит, тогда как Лагранж ограничился рассмотрением наклона планетных орбит к орбите Земли и положения линий пересечения этих орбит. Свои результаты, полученные на основе метода Лагранжа, он поспешил опубликовать в виде приложения к своему сочинению совершенно иного плана, но находившемуся в этот момент в печати. В качестве объяснения такой поспешности Лаплас сделал оговорку, что он торопился сообщить ученым то, чего труду Лагранжа не хватало до полноты, и, так сказать, «досрочно» познакомил их с замечательным произведением Лагранжа в своем изложении. Труд же Лагранжа вышел из печати позднее [76].

Не в пример другим ученым, которые в подобных случаях вполне резонно досадовали или обижались, Лагранж после получения сочинения Лапласа с извлечением из его еще неопубликованного метода, ответил ему, что он охотно отказывается от этого своего труда и что он очень признателен Лапласу за такое усовершенствование его идеи, ибо «от этого науки смогут лишь много выиграть» [77].

Этот эпизод ничуть не ухудшил отношений и дружеского общения обоих ученых. Это, несомненно, было заслугой Лагранжа. В 1829 г., через два года после смерти

---

[76] Более подробно о содержании работ Лагранжа и Лапласа по проблеме вековых возмущений элементов орбит планет см. в главе «Работы по небесной механике».

[77] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 101.

Лапласа, Фурье прочитал похвальное слово Лапласу, где высоко оценил научные заслуги ученого, но весьма сдержанно охарактеризовал его как человека, дав в качестве параллели блестящую характеристику Лагранжу:

«Лагранж был столько же философ, сколько и математик. Он доказал это всей своей жизнью, умеренностью желаний земных благ, глубокой преданностью общим интересам человечества, благородной простотой своих привычек, возвышенностью своей души и глубокой справедливостью в оценке трудов своих современников. Лаплас был одарен от природы гением, заключавшим в себе все необходимое для свершения громадного научного предприятия» [78].

---

[78] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 240.

О трактате Лагранжа «Аналитическая механика»

К истории издания трактата

Двухтомный трактат «Аналитическая механика» — не только важнейшее сочинение Лагранжа, стоившее ему многих усилий, но и крупная веха в истории развития точного естествознания.

Первое издание сочинения вышло в свет в 1788 г. в Париже, чему предшествовали немалые хлопоты издателей. Когда накопившиеся ценные результаты исследований Лагранжа в различных областях динамики, статики и небесной механики были собраны и подготовлены к печати, он пожелал опубликовать их в Париже, где полиграфическая техника была более развита. Из Берлина незадолго до смерти Фридриха II Лагранж переправил рукопись «Аналитической механики» своему другу аббату Ж. Ф. Мари с просьбой организовать публикацию трактата в Париже. Несмотря на сложность задачи, Мари с достоинством ответил Лагранжу, что такое поручение делает ему честь. Первой его заботой было найти издательство, которое согласилось бы взяться за это дело. Это ему удалось не сразу. Многие методы Лагранжа были новыми, почти не апробированными, трудными даже для математиков; мало можно было найти читателей, способных оценить этот труд. Естественно, издатели боялись, что книга не найдет большого спроса, что покупать ее будут только компетентные математики, рассеянные по всей Европе. Наконец, Мари удалось найти издателя, который был смелее других и согласился взять рукопись при условии, что Мари выкупит остаток тиража, если он не разойдется к некоторому, заранее обусловленному сроку.

Но хлопоты Мари на этом не кончились. Необходимо было найти редактора, достаточно образованного, чтобы следить за публикацией такого сочинения. Мари попросил об этом своего ученика — молодого способного ученого Адриена Лежандра, который взялся за работу и целиком посвятил себя ей в течение полутора лет. В дальнейшем Лагранж ответил этому математику дружбой и пониманием.

В конце жизни Лагранж приступил к работе над переизданием и дополнением «Аналитической механики». В 1811 г. вышел в свет первый том второго издания трактата. Лагранж успел дополнить исторический анализ развития принципов статики (отдел первый) новыми замечаниями и доказательством принципа виртуальных скоростей с помощью заменяющей схемы полиспастов. Статика была дополнена и другими усовершенствованиями, в частности упрощением метода вариации в учении о равновесии тел изменяющейся формы (изопериметрические задачи). Аналогичные усовершенствования выводов были внесены и в гидростатику.

Значительно больше добавлений получила «Динамика». Здесь появился совершенно новый пятый отдел, излагающий метод вариации произвольных постоянных (тема трех мемуаров Института Франции за 1808 г.). В шестом отделе, посвященном малым колебаниям тел, и в частности колебанию струны, Лагранж изложил теорию, найденную еще в Турине, но заново переработанную с упрощениями и с учетом возражений Даламбера против первого варианта этой теории.

Второй том Лагранж не успел сам переработать. За это взялись Прони, Бине и Лакруа. Они исследовали рукописи автора и его заметки на полях первого издания второго тома и все, что смогли, сделали. Лишь отдел о вращении твердого тела остался в несколько фрагментарном изложении Лагранжа. Эти фрагменты опубликовали в виде отдельных заметок в конце второго тома, вышедшего в свет в 1816 г., уже после смерти автора.

В предисловии ко второму изданию трактата Лагранж четко сформулировал цели, которые он ставил перед собой:

«Существует уже много трактатов о механике, но план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достичь, не оставит желать чего-либо лучшего.

Кроме того, эта работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и представит с одной и той же точки зрения различные принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения» [1].

Таким образом, Лагранж указывает две важнейшие цели: создание аналитической механики (т. е. механики в формулах) и обобщение, объединение всех принципов механики в единый. Такие же цели ставили перед собой и предшественники Лагранжа, ибо само развитие механики в XVIII в. нуждалось в таких путях.

Эйлер построил аналитическую динамику материальной точки и наметил обширную программу исследований аналитическими методами в других областях механики. Над выполнением этой программы он работал всю жизнь.

В том же направлении работали и другие выдающиеся ученые XVIII в.: Даламбер, Д. Бернулли, Я. Герман.

Однако наиболее совершенное решение проблемы систематизации механики на основе единого стройного аналитического аппарата мы находим у Лагранжа. Об этом он писал: «Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу» [2].

Общая формула динамики Лагранжа (сочетание принципа Даламбера с принципом виртуальных скоростей) охватывала все возможные случаи, включая механику материальной точки, абсолютно твердого тела, а также механику системы материальных точек со связями, гидромеханику, задачи о движении и равновесии упругих тел и т. п. Методы лагранжевой механики оказали чрезвычайно сильное влияние на дальнейшее развитие физико-математических наук.

---

[1] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. М.— Л., Гостехиздат, 1950, с. 9.

[2] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 9—10.

Трактат «Аналитическая механика» состоит из двух частей: «Статика» и «Динамика». Обе части имеют сходную структуру. Сначала проводится глубокий исторический анализ предшествующего развития статики (или динамики) и сравнительная оценка различных принципов механики, затем дается общая формула статики (соответственно, общая формула динамики), из которых последовательно выводятся общие свойства равновесия или движения системы и, наконец, решаются различные конкретные проблемы. Последние отделы каждой части посвящаются гидромеханике, причем и здесь общая структура та же самая: обсуждение общих принципов, вывод общих уравнений и затем их применение к отдельным частным задачам.

Общая формула статики

«Статика — это наука о равновесии сил»,— пишет Лагранж в начале трактата [3]. В дальнейшем он всюду говорит о равновесии тела или системы тел под действием приложенных к ним сил. Понятие силы Лагранж относит к числу основных понятий механики. «Под *силой* мы понимаем, вообще говоря, любую причину, которая сообщает или стремится сообщить движение телам, к которым мы представляем себе ее приложенной; поэтому силу следует оценивать по величине движения, которое она вызывает или стремится вызвать. В состоянии равновесия сила не производит реального действия; она вызывает лишь простое стремление к движению; но ее следует всегда измерять по тому эффекту, какой она вызвала бы, если бы она действовала при отсутствии каких-либо препятствий. Если принять в качестве единицы какую-нибудь силу или же ее действие, то выражение для любой другой силы представит собой не что иное, как отношение, т. е. математическую величину, которая может быть выражена с помощью чисел или линий; с этой именно точки зрения следует в механике рассматривать силы» [4].

По поводу лагранжева определения понятия силы можно услышать критические замечания: «...допущена

---

[3] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 17.
[4] Там же.

некоторая недоговоренность, которая может подать повод к ложному истолкованию»[5]. А именно: слова Лагранжа о том, что сила оценивается по количеству движения, ею сообщенному или могущему быть сообщенным, считается полезным пополнить существенно важными словами: в заданный промежуток времени. Правда, второй закон Ньютона также не упоминает о том, что сила пропорциональна изменению количества движения тела в заданный промежуток времени, но из всего содержания «Начал» видно, что именно такое дополненное понимание силы Ньютон использует всюду.

Что касается определения силы Лагранжа, то оно давалось на столетие позже, поэтому формулировка, конечно, могла бы быть полнее. Правда, из всего содержания трактата Лагранжа ясно видно, что он пользуется правильным математическим выражением силы. Наконец, слова Лагранжа «сила оценивается» можно понимать как выражение пропорциональности, а не равенства величины силы сообщенному ей количеству движения (т. е. приращению этого количества). В таком понимании формулировка Лагранжа была бы близка к понятию силы в «Началах» Ньютона.

Первый отдел «Статики» посвящен историческому анализу развития этой науки. Здесь, как и в других отделах «Аналитической механики», осуществляется надежда автора, что его «работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и представит с одной и той же точки зрения различные принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения»[6].

Это была первая в истории механики и весьма удачная попытка установить сравнительную ценность и взаимосвязь различных принципов механики, рассмотренных в процессе их становления.

Лагранж считал, что учение о равновесии с древних времен опиралось на три основных опытных факта, в ходе истории науки принявших форму трех четко выраженных

---

[5] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— В кн.: Жозеф Луи Лагранж. Сб. статей к 200-летию со дня рождения. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1937, с. 7—8.

[6] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 9.

законов статики: принципа рычага, принципа сложения и разложения сил, принципа виртуальных скоростей. Каждый из трех важнейших принципов статики ученые пытались строго доказать.

Внимательно рассмотрев различные подходы к принципу рычага (Архимеда, Галилея, Стевина, Гюйгенса), Лагранж отдает предпочтение подходу Архимеда. Едва заметно он проводит при этом мысль, что вряд ли следует стремиться к более строгим доказательствам вполне очевидных истин механики или хорошо известных из опыта ее законов.

Принцип сложения и разложения сил впервые четко сформулирован и разработан в применениях Стевином. Стевин пытался доказать этот закон, сводя его к другим, более простым и очевидным. Доказательство Стевина проведено для случая прямого угла между линиями сил, хоть применял он это правило гораздо шире.

Лагранж обнаружил тесную связь между принципом сложения движений, данным в четкой форме уже Галилеем, и принципом сложения сил по правилу параллелограмма. Доказательства параллелограмма сил на основе известного ранее принципа сложения скоростей или сложения движений впервые дали Ньютон и Вариньон независимо друг от друга в 1687 г.

Кроме таких — динамических — доказательств параллелограмма сил, делались многократные попытки чисто геометрических доказательств этого положения, без рассмотрения движения. Лагранж приводит в пример остроумное доказательство Д. Бернулли, хотя отдает явное предпочтение первому, динамическому подходу к закону сложения сил.

Весьма большое значение придает Лагранж XVI лемме П. Вариньона («Nouvelle mécanique»), называемой теперь теоремой Вариньона. Этой теоремой о моменте равнодействующей устанавливается непосредственная связь между законом рычага и законом сложения и разложения сил по правилу параллелограмма. Следует отметить, что современная геометрическая статика, созданная в основных чертах Пуансо, основывается лишь на одном принципе — сложения сил; так называемый принцип моментов (принцип рычага, понимаемый более обобщенно, по Вариньону) стал простым следствием закона сложения сил.

Переходя к третьему важнейшему принципу статики — принципу виртуальных скоростей, Лагранж прежде всего определяет понятие «виртуальной скорости»: «Под виртуальной скоростью следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения» [7]. Здесь Лагранж, как и И. Бернулли, еще недостаточно широко определяет понятие виртуальной скорости, понимая под ней действительную скорость точки [8]. В современной механике наиболее широко распространено определение виртуального перемещения точки как бесконечно малого ее перемещения, допустимого связями в данный момент времени. Действительное перемещение точки системы может и не принадлежать к ее виртуальным перемещениям.

Принцип виртуальных скоростей Лагранж формулирует так: «Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными» [9].

Обсуждая достоинства принципа виртуальных скоростей, Лагранж прежде всего отмечает его простоту: «...следует во всяком случае признать, что он обладает всей той простотой, какой можно ожидать от основного принципа» [10]. Лагранж считает этот принцип наиболее общим в статике, что впервые понял, по его мнению, Иоганн Бернулли. С принципом виртуальных скоростей связан принцип Торричелли, заключавшийся в том, что «если два груза связаны друг с другом и находятся в таком положении, что их центр тяжести не может опустить-

[7] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 39.
[8] См. примечание Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье в кн.: *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 586.
[9] Там же, с. 42.
[10] Там же, с. 41.

ся ниже, то они в этом положении находятся в равновесии» [11]. Принцип виртуальных скоростей, по мнению Лагранжа, «дал повод для появления другого принципа», предложенного Мопертюи в 1746 г. под названием «закона покоя», который позднее был развит и обобщен Л. Эйлером.

«И вообще, мне кажется,— заключает Лагранж,— можно сказать наперед, что все общие принципы, которые еще могли бы быть открыты в учении о равновесии, представляли ли бы собой не что иное, как тот же принцип виртуальных скоростей, рассматриваемый с иной точки зрения и отличающийся от принципа виртуальных скоростей лишь по своей формулировке» [12].

Но самое важное качество этого принципа, по мнению Лагранжа, это то, что он «является не только очень простым и весьма общим; он обладает еще и тем драгоценным и только ему присущим преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел». Поэтому в основу всей статики Лагранж полагает именно этот принцип.

Говоря о природе этого принципа, Лагранж отмечает, что сам по себе он не очевиден. Поэтому Лагранж приводит обоснование принципа; по существу, он сводит принцип виртуальных скоростей к более очевидным опытным фактам, вводя для этого заменяющую схему полиспастов (рис. 2) [13].

Если в точках *A, B, C*,... некоторой материальной системы приложены любые силы *P, Q, R*,..., соответственно, то их действие на точки можно заменить действием нерастяжимых нитей, берущих начало в точках *A*, *B*... и прикрепленных к подвижным блокам полиспаста, охваченного единой нитью. Один конец этой нити закреплен неподвижно. От неподвижного конца нить идет через все пары блоков (подвижный—неподвижный), делая на каждой паре столько витков, сколько единиц силы требует-

---

[11] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 41.
[12] Там же, с. 43.
[13] Весьма наглядно доказательство принципа возможных перемещений Лагранжа изложено в «Беседах о механике» известного петербургского механика В. Л. Кирпичева (Л., Гостехтеоретиздат, 1933, с. 15).

ся создать в точке ее приложения. Направления сил P, Q, R,... хорошо моделируются с помощью полиспаста, так как гибкость нити позволяет придавать ей любое нужное направление. Сделав соответствующее число витков на каждой паре блоков, свободный конец нити выходит через неподвижный блок. Здесь помещается единственный груз

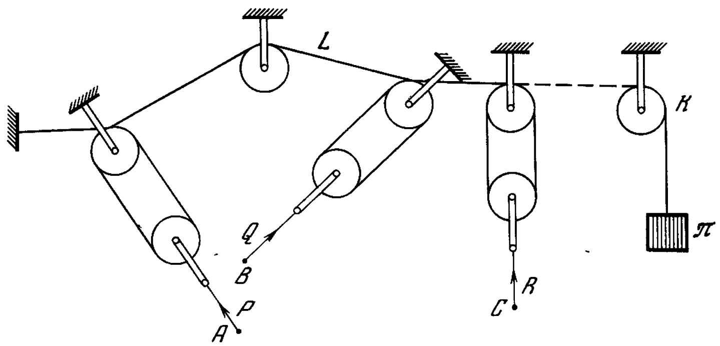


Рис. 2. Заменяющая схема Лагранжа

π — общая мера всех сил P, Q, R,..., принимаемый за единичный груз; он-то и создает нужные усилия во всех точках системы.

Опираясь на принцип Торричелли, Лагранж указывает, что груз π при равновесии системы находится в наинизшем положении, а значит, не будет опускаться. Лагранж записывает это условие математически:

$$\alpha P+\beta Q+\gamma R+...=0. \qquad (1)$$

Здесь α, β, γ,...— это проекции возможных перемещений точек A, B, C,... на направления сил P, Q, R,..., соответственно, а суммарное выражение, стоящее в левой части равенства, соответствует перемещению груза π. Приравняв нулю это перемещение, Лагранж получил условие равновесия исходной системы сил. Так он ввел знаменитую общую формулу статики, выражающую аналитическую запись самого общего и плодотворного, по мнению Лагранжа, принципа равновесия — принципа виртуальных скоростей.

Доказав, что при равновесии системы необходимо имеет место равенство (1), Лагранж доказывает и достаточность этого равенства для равновесия системы. Впервые это доказательство было им опубликовано в пятой тетради «Журнала Политехнической школы» [14] в 1798 г., после этого оно было включено во второе издание «Аналитической механики». В той же тетради «Журнала» были помещены обширные доказательства принципа виртуальных скоростей Прони и Фурье.

«Обыкновенно упрекают это доказательство,— писал Кирпичев,— в недостатке строгости и даже иногда называют рассуждения Лагранжа не доказательством, а иллюстрацией начала возможных перемещений. Но даже и противники рассуждений Лагранжа признают гениальность его соображений, находят их очень полезными для выяснения начала... Но предоставим лицам, возражающим против него, считать рассуждения Лагранжа не доказательством, а постулатом. По крайней мере, нужно сознаться, что это — постулат естественный и легко приемлемый» [15]. «Я считаю это доказательство,— заключает Кирпичев,— наилучшим и наиболее убедительным из всех предложенных доказательств начала возможных перемещений».

Мнение, близкое к этому, высказывал и А. Н. Крылов: «Доказательство Лагранжа по своей простоте и наглядности представляется всякому технику и инженеру вполне ясным и убедительным, и все они это доказательство, занимающее две страницы, знают. Математики считают это доказательство не строгим, а значит, и не убедительным, и предпочитают доказательство Фурье, занимающее 40 страниц» [16].

Все свойства равновесия сил и все формы уравнений равновесия твердого тела под действием сил Лагранж получает, выводя их из общей формулы статики. Таким образом, основная цель — сведение теории механики к простому развитию самых общих формул — в области статики была достигнута.

«Получив эту общую формулу,— писал А. Н. Крылов,— Лагранж с искусством, едва ли не ему одному присущим и, может быть, доселе непревзойденным, развивает из этой формулы общие свойства равновесия сил и дает решение главнейших задач статики...» [17].

---

[14] «Journ. de l'Ec. Pol.», Cah. V. 1798, p. 115—118.
[15] *Кирпичев В. Л.* Беседы о механике, с. 19.
[16] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— Указ. сб. статей, с. 10.
[17] Там же.

Следует остановиться на теореме Лагранжа, которую он называл «свойства равновесия, относящиеся к максимуму и минимуму» (отдел III). Здесь Лагранж рассматривает важный случай, при котором левая часть его общей формулы статики оказывается полным дифференциалом некоторой функции П, зависящей от координат системы. В современной терминологии, с учетом правила знаков перемещений Лагранжа, эта функция П есть не что иное, как потенциальная энергия системы. Условие равновесия системы, обладающей такой функцией, сводится к равенству нулю ее полного дифференциала. Следовательно, для систем рассматриваемого типа состояния равновесия совпадают с положениями, в которых функция П имеет максимум или минимум. Лагранж показывает, что положение равновесия, соответствующее минимуму функции П,— устойчивое, а положение равновесия, соответствующее максимуму функции П,— неустойчивое. Случай П=const и случай минимакса функции П не рассмотрены.

Формулировка этой важной теоремы явилась значительным вкладом в развитие теории равновесия системы и механики в целом. Доказательство теоремы страдало некоторыми неточностями, которые позже были устранены Лежен-Дирихле [18].

Другой существенно новый и совершенно оригинальный вклад Лагранжа в развитие механики — это его знаменитый метод неопределенных множителей, введенный им сначала в статике, а затем и в динамике.

Лагранж рассматривает совокупность произвольных сил, приложенных к точкам механической системы, подчиненной определенному условию:

$L \equiv f(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., 3n.$

Таких условных уравнений может быть несколько... «Они вытекают из природы системы»,— говорит Лагранж.

Первая вариация левой части условного уравнения или δL тоже равна нулю; получается соотношение между вариациями координат (виртуальными перемещениями)

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

[18] *Лежен-Дирихле П. Г.* Об устойчивости равновесия.— В кн.: *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 537.

Если умножить это новое равенство на неопределенный множитель λ и прибавить полученное произведение $\lambda \delta L$ к левой части общей формулы статики, записанной в проекциях на декартовы оси координат, то равенство нулю вновь полученной суммы не нарушится:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i + \lambda \delta L = 0.$$

Произведя группировку слагаемых при вариациях координат δx_i, можно получить при них скобки вида

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0,$$

где к обычным силам X_i прибавились дополнительные силы $\lambda \partial f / \partial x_i$.

Лагранж говорит об этих силах: «Вообще член λdL можно рассматривать как момент некоторой силы λ, стремящейся вызвать изменения значения функции L... Отсюда следует, что каждое условное уравнение эквивалентно одной или нескольким силам, приложенным к системе по заданным направлениям, или вообще стремящимся вызвать изменение значений заданных функций... И обратно, эти силы могут занять место условных уравнений, вытекающих из природы заданной системы; таким образом, применяя эти силы, можно рассматривать тела как совершенно свободные и не подчиненные каким бы то ни было связям... в этом и заключается идея метода, излагаемого в настоящем отделе» [19].

В этих строках трактата Лагранжа содержится первая в истории механики четкая формулировка принципа освобождаемости системы от связей.

Общепринята точка зрения на работы Лагранжа в области механики, как на чисто умозрительную работу математика, приводящего в порядок и в стройную систему множество известных фактов механики, разрабатывающего вычислительный аппарат науки, но не задумывающегося глубоко о содержании и механическом смысле вводимых им коэффициентов и математических приемов. Известны упреки в адрес Лагранжа-математика со стороны

---

[19] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 110.

ученых, имеющих близкое отношение к технике. Вот один из примеров: «Для Лагранжа как математика при установлении им новой отрасли анализа достаточно было показать возможность выразить числом ту величину, которую он называет «силой», а соответствует ли это понятие тому, которое в обыденной жизни, в технике, ремеслах, производствах и физике установлено, ему как математику дела нет...» [20]. И далее, «Есть ли эта «лагранжева сила» та самая, которая проявляется в натяжении снасти корабля или в натяжении постромки артиллерийской упряжки, Лагранж не рассматривает».

Такие высказывания встречаются нередко; многие считали подход Лагранжа к проблемам и понятиям механики чисто математическим.

Эта критика справедлива в отношении общей формулировки понятия силы Лагранжа. Но в конкретных примерах Лагранж говорил совершенно ясно и обыденно о различных силах, что они представляют собой не что иное, как натяжение, или давление на поверхность опоры, или давление жидкости на стенки сосуда.

Четко сформулировав принцип освобождаемости системы от связей путем введения сил реакций связей Лагранж пишет: «Собственно говоря, рассматриваемые силы заменяют сопротивления, которые могут испытывать тела вследствие взаимной их связи или же вследствие наличия препятствий, которые в силу природы системы могут противодействовать их движению; больше того, эти силы представляют собой не что иное, как самые силы этих сопротивлений, которые должны быть равны и направлены прямо противоположно силам давления, развиваемым телами. Как видим, наш метод дает средство для определения этих сил и сопротивлений; в этом заключается одно из немаловажных преимуществ данного метода» [21].

Немецкий ученый Г. Гамель считает, что принцип освобождаемости системы от связей, равно как и методы расчета реакций связей, впервые разработанные Лагранжем,— это душа его «Аналитической механики» [22].

---

[20] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— Указ. сб. статей, с. 9.
[21] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 111.
[22] *Hamel G.* Über ein Prinzip die Befreiung bei Lagrange.— Jahresbericht der D.M.W, 1910, **25**, S. 60—65.

Установив общие свойства равновесия, Лагранж переходит к решению конкретных задач статики. Он рассматривает равновесие нескольких точек на невесомой нерастяжимой нити. Оперируя множителями λ, он с предельной ясностью разъясняет их физический смысл:

«Ясно, что сила λ, вызванная в первом теле по направлению нити, соединяющей это тело со следующим, а также сила, равная λ, но противоположно направленная,— действующая на второе тело по направлению той же нити, не могут быть не чем иным, как силами, получившимися в результате реакции нити на оба эти тела, т. е. натяжения, испытываемого частью нити, содержащейся между первым телом и вторым, так что коэффициент λ выражает величину этого натяжения» [23].

Даже с точки зрения современного учения о реакциях связей невозможно высказаться более отчетливо.

Далее Лагранж переходит к следующей задаче, вводя вместо нерастяжимой нити растяжимую упругую нить. Снова пользуясь методом множителей λ, он находит уравнение равновесия и величину натяжения нити. Затем рассматривается равновесие трех или более точек на жестком стержне, на стержне упругом. Следующая ступень рассмотрения Лагранжа — равновесие непрерывно нагруженной нити: сначала нерастяжимой, затем растяжимой. Наконец, исследуется равновесие упругой пластины и некоторых других систем.

Во всех этих случаях расчет реакций связей и запись условий равновесия ведется совершенно одинаковым стандартным способом, что следует признать одним из главнейших преимуществ этого метода неопределенных множителей λ.

Этот метод применяется им с большим успехом и в гидростатике несжимаемой, а затем сжимаемой жидкости. Здесь λ означает «давление, испытываемое равномерно со всех сторон частицей жидкости, которому она противодействует благодаря своей несжимаемости» [24].

Рассматривая равновесие несжимаемой жидкости с погруженным в нее твердым телом («ядром»), Лагранж определяет величину множителя λ. Это «давление, которое жидкость производит на поверхность и которое уни-

---

[23] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 169.
[24] Там же, с. 262.

чтожается сопротивлением этого ядра»[25]. Учение о движении материального тела и системы тел строится Лагранжем на основе его общей формулы динамики и представляет собой сочетание принципа Даламбера (взятого в форме Германа—Эйлера) с принципом виртуальных скоростей. Метод неопределенных множителей распространен Лагранжем на различные случаи движения механических систем.

Общая формула статики Лагранжа и тесно связанный с нею метод неопределенных множителей открыли широкие возможности исследования самых различных случаев равновесия механических систем. Все результаты, получаемые методами геометрической статики, могут быть достигнуты и методами аналитической статики. Что касается задач о равновесии сложных механических систем (т. е. механизмов), то здесь методы аналитической статики имеют много преимуществ перед методами геометрической статики, где необходимо производить мысленные рассечения системы на части и вводить большое количество дополнительных (внутренних) сил.

Общая формула динамики

Изложение динамики Лагранж, как обычно, начинает с исторического анализа развития главных направлений, принципов и методов этого учения.

«Динамика — это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать. Это наука целиком обязана своим развитием новейшим ученым, и Галилей является тем лицом, которое заложило ее первые основы»[26].

К XVII в. накопилось большое число конкретных задач, порожденных запросами естествознания и техники: задача о движении планет, о колебании простого и составного маятника, об ударе тел. Настало время разработать общие методы постановки и решения различных задач динамики. Необходимо было создать фундамент этой науки, т. е. сформулировать ее главные понятия и основ-

---

[25] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 273.
[26] Там же, с. 291.

ные принципы. В значительной мере эта задача была выполнена Ньютоном, который, по его собственному выражению, мог далеко видеть, стоя на плечах гигантов.

Исходя из законов, сформулированных Ньютоном, Эйлер превратил механику в четкую количественную теорию с эффективным аналитическим аппаратом дифференциальных уравнений движения различных материальных объектов. Динамика отдельной материальной точки и твердого тела в основных чертах была построена, в то время как динамика системы или механизма (главного объекта науки в период промышленного переворота) представляла принципиальные трудности. Лагранж так охарактеризовал эти новые проблемы. «Однако в том случае, когда исследуют движение многих тел, действующих друг на друга путем удара или давления, будь то непосредственно, как при обычном ударе, или же при посредстве нитей или несгибаемых рычагов, к которым они прикреплены, или же вообще каким-либо иным образом, то этого рода задача не может быть разрешена с помощью приведенных выше положений. Дело в том, что в этом случае силы, действующие на тело, неизвестны и их следует определить на основании действия, которое тела должны оказывать одно на другое в соответствии с их взаимным расположением» [27].

В подобных проблемах, более сложных по сравнению с прежними, механики, как бы вызывая друг друга на соревнование, находили хитроумные, но индивидуальные для каждого случая решения. По словам Лагранжа, конец всем подобным вызовам ученых положило сочинение Даламбера «Динамика», изданное в 1743 г. Даламбер наметил путь построения механики, основанной на едином принципе, хотя на этом пути он сумел сделать только первый — важный — шаг. Даламбер создал принцип, по которому система тел остается в равновесии под действием потерянных побуждений к движению. Поясним смысл принципа, переведя его на язык сил. Силу, приложенную к каждой точке системы, Даламбер геометрически разлагает на такую, которая может быть реализована, и такую, которая теряется из-за связанности точек. Вторую составляющую называют потерянной даламберовой силой. Если на систему подействовать только такими си-

---

[27] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 299.

лами, она останется в равновесии. Сам принцип Даламбера не давал никаких уравнений, но применение к потерянным силам какого-либо принципа статики позволяло бы записать уравнения (фактически уравнение движения). Лагранж отмечал, что при всем ценном содержании принципа Даламбера, как бы сводящего динамику к статике, оставалась некоторая доля кустарных индивидуальных приемов в решении задач динамики. Ведь надо было сначала выбрать удачный принцип статики, приводящий к уравнениям движения системы. Общего алгоритма решения любой задачи динамики еще не было: его позже создал Лагранж.

Аналогичный принцип динамики, но в иной форме, чем принцип Даламбера, высказали в середине XVIII в. независимо от Даламбера Я. Герман и Л. Эйлер. Герман решал задачу о колебании физического маятника, а Эйлер — задачи о колебании твердых, а затем и гибких тел (струны, мембраны), задачи об истечении жидкости из труб. При этом оба применяли следующий принцип: в связанном совместном движении точек системы совокупность «актуальных» (т. е. активных) сил эквивалентна совокупности тех сил, которые требуются для истинного движения этих точек в случае, если бы они были свободными. Силы реакции не всегда участвовали явно, хотя в некоторых случаях Эйлер записывал их и даже определял.

Из двух эквивалентных форм принципа сведения условий движения системы к условиям равновесия некоторых сил Лагранж предпочел воспользоваться принципом Германа—Эйлера: «Этот способ сведения законов динамики к законам статики в действительности является менее прямым, чем способ, вытекающий из принципа Даламбера, но зато он приводит к бóльшей простоте в применениях; он представляет собой возврат к методу Германа и Эйлера, который применил его при разрешении многих проблем механики. В некоторых курсах механики его можно встретить под названием принципа Даламбера» [28].

Главное преимущество метода Германа и Эйлера состояло в том, что он позволил дать аналитическую запись выражения обеих категорий сил, фигурирующих в принципе Германа—Эйлера. Проекции активных сил, приложенных к точкам системы со связями, обозначались

---

[28] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 313.

Лагранжем через X_i, Y_i, Z_i. Для аналитического выражения второй категории сил, требуемых для совершения истинного совместного движения тел системы, Лагранж фактически (без специальной оговорки) применяет принцип ускоряющих сил: он записывает выражения сил в виде произведений масс точек на их ускорения, что в проекциях на декартовы оси координат дает выражения

$$m_i\ddot{x}_i;\ m_i\ddot{y}_i;\ m_i\ddot{z}_i.$$

По принципу Германа—Эйлера устанавливается динамическая эквивалентность вышеупомянутых категорий сил, что записывается посредством самого общего, по мнению Лагранжа, принципа статики — принципа виртуальных скоростей. Так приходит Лагранж к своей знаменитой общей формуле динамики:

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_1)\,\delta z_i] = 0. \qquad (2)$$

Теперь это соотношение называют общим уравнением динамики системы Даламбера—Лагранжа. Так был найден алгоритм, дающий решение любой задачи механики. Многолетняя мечта передовых ученых века рационализма — одним законом охватить все проблемы механики — исполнилась. Со времени этого открытия прошло почти двести лет, но до сих пор ученый мир не перестает удивляться: «Неужели природа механической действительности так проста, что позволяет — даже Лагранжу — объять себя в единой формуле?» [29].

Из этой формулы Лагранж поэтапно получает все закономерности динамики: ее общие теоремы, принцип наименьшего действия, все формы дифференциальных уравнений движения, теорему об устойчивости положения равновесия, все важнейшие свойства движения тел и системы.

Несмотря на совершенство формально-логических операций Лагранжа, в его трактате «Аналитическая механика» есть некоторые нечеткости в принципиальной части динамики. Об этом пишет А. Н. Крылов: «Лагранж совершенно не упоминает о знаменитых опытах Ньютона,

---

[29] *Идельсон Н. И.* О механике Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 17.

которыми установлена пропорциональность массы весу тела независимо от его химического состава, иными словами, установлено постоянство ускорения силы тяжести в данном месте земной поверхности. Без этого установления понятие о массе, которого Лагранж совсем не дает, не имеет определенности, и, значит вся динамика как бы витает в эмпиреях как отрасль анализа, не связанная с физическою природою земных вещей, и кажется приложимой лишь к изучению движения тел небесных, которое само для себя устанавливает числовую меру их масс, в долях массы Солнца, принимаемой за единицу» [30].

Далее А. Н. Крылов критикует определение силы Лагранжа, по которому «силы измеряются количеством движения» тела [31]. В записях Лагранжа количества движения тела правильно приравниваются импульсу силы, так что на вычисления такое нечеткое определение не повлияло. Но в тексте трактата эта неточность усиливается дальнейшим рассуждением о так называемой «зарождающейся силе», которую Лагранж приравнивает произведению массы на ускорительную силу (так называли тогда ускорение). Крылов разъясняет, что попытка Лагранжа назвать «зарождающуюся силу» по-другому, например давлением или движущей силой, не вносит ясности в вопрос, что такое сила. Причину этой путаницы понятий А. Н. Крылов видит в том, что Лагранж стремился одновременно с эскизом исторического развития динамики (что, по выражению А. Н. Крылова, выполнено бесподобно) дать попутно определения ее основных понятий и формулировки основных законов. Это Лагранжу не вполне удалось, особенно на фоне педантичного стиля Ньютона, очень четко формулировавшего все главные положения.

«Лагранж в век Руссо, Вольтера, Даламбера, Дидро, последовавший за веком Расина и Корнеля, т. е. в век, когда красота стиля французских писателей достигла своего совершенства, захотел избавить и общую часть своего произведения от палисада педантизма, при котором не может быть и речи о красоте стиля; но здесь он, может быть, зашел несколько дальше, чем следовало» [32].

---

[30] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— Указ. сб. статей, с. 10—11.

[31] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 300.

[32] *Крылов А. Н.* О механике Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 17.

Развитие и приложения общей формулы динамики

Рассматривая различные типы механических систем с точки зрения различных классов возможных перемещений, допустимых природой системы, Лагранж приходит к формулировке общих свойств движения, которые теперь называются теоремами динамики системы: теорема о движении центра масс, когда система может поступательно перемещаться в данном направлении; теорема об изменении кинетического момента системы, когда связи системы допускают ее вращение в целом вокруг некоторой неподвижной оси, и теорема живых сил для случаев, когда действительные перемещения точек системы принадлежат к числу возможных перемещений.

Далее Лагранж преобразовал общую формулу динамики и заново вывел все общие свойства движения для случая, когда силы импульсивные.

Наконец, он перешел к изложению принципа наименьшего действия. Первоначально принцип наименьшего действия появился в работах астронома и механика П. Мопертюи в виде общего закона природы, по которому количество действия в механических, оптических и других явлениях расходуется минимально; именно это свойство — минимум действия — отличает истинную траекторию частицы от сравнимой. Мерой действия Мопертюи считал сумму произведений масс частиц на их скорости и на элементы пути. Мопертюи применил свой принцип для расчета соударения двух упругих тел и для вывода законов отражения и преломления света. Исходя из этих, довольно специальных применений принципа, Мопертюи придавал универсальное значение этому закону. Более того, он, по словам Даламбера, извлекал отсюда новое доказательство существования бога[33]. Природа, рассуждал Мопертюи, при совершении своих действий избирает всегда наиболее простые пути, что наилучшим образом подтверждает существование бога, который мудро управляет Вселенной и совершающимися в ней изменениями. Как правильно отметил Даламбер, там, где речь идет просто об изменении скорости тел при ударе, Мопертюи говорил не иначе, как «об изменении в природе»; там, где речь идет

---

[33] См. сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, с. 111.

об экстремальности некоторой количественной характеристики при ударе тел, Мопертюи говорит о том, что природа действует всегда по самому простому пути.

Против теологического толкования механических законов и результатов Мопертюи выступили многие механики и математики, философы и публицисты. В дискуссии приняли участие Д'Арси, Кёниг, Куртиворон, Эйлер, Даламбер, Вольтер, который зло высмеивал президента Берлинской академии наук Мопертюи, критикуя все его действия и особенно «доказательство» существования бога на основе законов механики [34].

Заслуга аналитического оформления принципа наименьшего действия, новой записи выражения действия, правильного понимания принципа и его новых приложений принадлежала Л. Эйлеру, благодаря которому этот закон получил общее признание.

Лагранж заинтересовался этим принципом еще в Турине, он придал новую форму выражению действия. Эйлер записывал величину действия в виде

$$A = \oint_{A}^{B} v ds,$$

где v — скорость, s — дуга траектории точки. Он рассматривал движение материальной точки. Лагранж вводит величину действия для системы материальных точек. Он суммирует по точкам величину действия A, умноженную на массу m_i, и переходит к аргументу времени t вместо эйлерова аргумента s. Тогда действие по Лагранжу приобретает следующий вид:

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{A}^{B} v^2 dt = \int_{t_A}^{t_B} 2T dt,$$

где T — кинетическая энергия системы в данный момент времени. Как и Эйлер, Лагранж утверждает, что истинное движение системы отличается от ее кинематически возможных движений тем, что вариация действия для истинных движений равна нулю.

В начале своего творчества Лагранж придавал фундаментальное значение этому принципу механики, ука-

---

[34] См. сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, с. 785.

зывал ряд интересных приложений этой закономерности. Но ко времени создания «Аналитической механики», имеющей единую базу в виде общей формулы динамики, он изменил свой взгляд на значение принципа наименьшего действия. Он дал в трактате следующую оценку роли этого принципа: «Таков тот принцип, которому... я даю здесь название принципа наименьшего действия и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики» [35].

Далее Лагранж переходит к изложению одного из важнейших оригинальных результатов своей аналитической динамики — к выводу из общей формулы динамики так называемых уравнений Лагранжа второго рода, а затем уравнений Лагранжа первого рода (с множителями λ; они названы так, видимо, потому, что метод λ был изложен ранее).

Лагранж вводит для системы обобщенные параметры, число которых всегда меньше числа обычных координат (декартовых, сферических или других). Число обобщенных координат равно числу степеней подвижности, или степеней свободы системы. Поэтому обобщенных координат меньше, чем обычных, на число связей, наложенных на систему. Сделав в общей формуле динамики переход к новым параметрам и приравняв нулю скобки, образовавшиеся при вариациях независимых (обобщенных) параметров, Лагранж получает систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения. Зная выражения живой силы T и силовой функции U, можно обойтись без индивидуальных приемов для записи уравнений движения системы; они получаются автоматически из алгоритма, записанного в виде уравнений Лагранжа. Эти уравнения теперь называют уравнениями Лагранжа второго рода, они имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=\frac{\partial U}{\partial q_\nu}, \qquad \nu=1,2,\ldots,m,$$

где q_ν — обобщенные параметры, T — кинетическая энергия системы, U — силовая функция, m — число степеней свободы системы.

---

[35] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 320.

Из этих уравнений путем двукратного их интегрирования можно получить обобщенные координаты как функции времени, т. е. кинематические уравнения движения системы.

Но иногда (особенно в технике) требуется определить не только характер движения системы и ее частей, но и силы давления на опоры, или реакции связей. Для решения проблем такого характера Лагранж создал другой математический аппарат, обобщив на динамику метод неопределенных множителей, подробно рассмотренный им при изложении статики. Умножив соотношения для вариаций связей, как это делалось в статике, на неопределенные множители λ, μ, ν,... (по числу условных уравнений, выражающих на нашем языке соотношения для двухсторонних голономных стационарных связей), Лагранж прибавляет полученные соотношения к Общему уравнению динамики. Так получается уравнение

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + \ldots = 0, \quad (3)$$

где $L(x_1,...,x_{3n})=0$, $M(x_1,...,x_{3n})=0$, $N(x_1,...,x_{3n})=0$,... — условные уравнения или уравнения связей указанного типа. Группируя скобки при вариациях декартовых координат и приравнивая их нулю (часть за счет неопределенных множителей λ, μ, ν..., другую часть за счет независимости некоторых координат), Лагранж получает уравнения движения, которые теперь называют уравнениями Лагранжа первого рода. Вместе с уравнениями связей полученные уравнения позволяют найти кинематические уравнения движения, а также величины λ, μ, ν,... Таким образом Лагранж находит величины сил реакций опор и внутренних связей. В каждой конкретной задаче он выясняет физический смысл неопределенных множителей λ, μ, ν,...

Например, в задаче о движении тела по заданной поверхности Лагранж говорит: «Таким образом, коэффициент λ служит для определения давления тела на поверхность, заданную уравнением $L=0$; если же тело движется по заданной линии, то мы будем рассматривать последнюю, как получающуюся пересечением двух поверхностей, выраженных уравнениями $L=0$, $M=0$; два коэффициента: λ, μ послужат тогда для определения давлений, производимых телом на данную линию перпендикулярно к обеим поверхностям»[36].

В задаче о колебании простого маятника заданной длины Лагранж поясняет: «...натяжение, обозначенное через λ, определится следующим образом...»[37] — значит, механический смысл множителя λ здесь — натяжение нити.

Изучая движение несжимаемой жидкости, он пишет: «...мы докажем, что величина λ, отнесенная к поверхности жидкости, выражает давление, которое здесь производит жидкость и которое, если оно не равно нулю, должно уравновешиваться сопротивлением или действием стенок»[38].

Относительно метода неопределенных множителей Лагранжа удачно выразился Н. И. Идельсон: «Таким образом, и здесь... не было необходимости проводить внутренние сечения и изучать действующие на них поверхностные силы, не пришлось пользоваться принципом отвердевания или усиления реакции связей — единая формула и здесь сделала свое дело: она как бы автоматически привела нас к уравнениям движения изучаемых систем, а множитель λ, как некий Протей, приобретал в ней каждый раз особенное механическое значение»[39].

Лагранж отмечает далее, что из системы дифференциальных уравнений движения консервативной системы со стационарными связями можно получать интегралы движения центра инерции и интегралы площадей. Интеграл живых сил Лагранж подробно выводит из уравнений движения:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]+\Pi=\text{const},$$

где Π — некоторая функция, в нашей терминологии — потенциальная энергия.

Переходя к разработке важнейших приложений всей этой теории, Лагранж прежде всего дает «Общий прибли-

---

[36] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II. М.— Л., с. 208.
[37] Там же, с. 225.
[38] Там же, с. 312.
[39] *Идельсон Н. И.* О механике Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 21.

женный метод решения задач динамики, основанный на вариации произвольных постоянных».

Если бы Лагранж ограничился выводом общей формулы динамики, дав две разновидности дифференциальных уравнений движения, позволяющих единообразно решать всевозможные проблемы динамики, то и тогда значение его трактата было бы чрезвычайно велико. Однако Лагранж не довольствовался созданием стандартного математического аппарата аналитической механики, с помощью которого любую проблему механики можно выразить в виде дифференциальных уравнений второго порядка. Он стремился и сумел найти наиболее общие и наиболее эффективные пути решения этих уравнений и доведения до числовых результатов обширной группы динамических задач.

Лагранж замечает, что дифференциальные уравнения движения системы «требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа; поэтому приходится прибегать к приближениям, и наши формулы дают также наиболее подходящие средства для этой цели» [40].

Первоначально приближенный метод интегрирования уравнений движения динамики был навеян Лагранжу спецификой задач небесной механики и теми способами последовательных приближений, которые использовались в астрономической практике XVIII в.

Сущность метода, позже превратившегося в общий метод вариации произвольных постоянных, сводилась к тому, что, зная движение планеты под действием притяжения одного только Солнца, пытались найти движение, близкое к данному невозмущенному и вызванное также и действием соседней планеты, масса которой много меньше солнечной массы.

Метод вариации произвольных постоянных

В аналитической динамике широко используется функция, называемая кинетическим потенциалом, или функцией Лагранжа, иногда, сокращенно,— лагранжианом [41].

---

[40] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 412.

[41] Термин «кинетический потенциал» введен Гельмгольцем.

Эта функция, равная разности кинетической и потенциальной энергии консервативной системы, была введена Лагранжем и обозначена через Z. Теперь, видимо, в честь Лагранжа, ее обозначают через L — начальную букву его фамилии:

$$L = T - \Pi.$$

Уравнения Лагранжа, называемые теперь уравнениями второго рода, с введением функции L принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (4)$$

Мы будем придерживаться современных традиционных обозначений, хотя у самого Лагранжа обобщенные координаты обозначались не через q_1, q_2, q_3,..., как записано выше, а через ξ, φ, ψ... Их число равно m — числу степеней свободы системы.

Можно еще больше модернизировать форму рассуждений Лагранжа, не изменяя ее духа, введя обобщенные импульсы p_i, определяемые соотношениями такого вида: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$dp_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5)$$

Если систему таких уравнений проинтегрировать, то обобщенные координаты q_1, q_2, q_3,..., будут функциями времени t и $2m$ произвольных постоянных γ_1, γ_2, γ_3,..., γ_{2m}.

Лагранж задает такие виртуальные перемещения системы, которые соответствуют вариации произвольных постоянных $\delta\gamma_s$, где $s=1, 2,..., 2m$. Затем он задает другую совокупность вариаций координат, которым соответствуют вариации произвольных постоянных $\Delta\gamma_s$. Соответствующие изменения обобщенных координат и обобщенных импульсов можно обозначить теми же символами δq_i, δp_i и Δp_i, Δq_i. По правилам вариационного исчисления, одним из основателей которого был Лагранж, а именно: по свойству перестановочности операций $\delta(\Delta)$ и d, можно записать в применении к равенству (5):

$$\delta dp_i = d\delta p_i = \delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt,$$

$$\Delta dp_i = d\Delta p_i = \Delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt.$$

Лагранж умножает верхнюю строку на Δp_i, а нижнюю строку — на δp_i и вычитает из верхней строки нижнюю строку.

Суммируя по всем координатам, он получает

$$\sum_{i=1}^{m} (\delta p_i \Delta q_i - \delta q_i \Delta p_i) = \text{const}.$$

В результате варьирования обобщенных координат и обобщенных импульсов время t исключается; сумма, стоящая в левой части равенства, сохраняет свою величину во время движения. Этот ценный результат часто называют основной леммой Лагранжа в теории вариации произвольных постоянных[42]. Он сам заметил фундаментальное значение полученного им соотношения. Он придает ему вид, который в современной символике записывается так:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_s} - \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_s} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} \right) = 0.$$

Сумму, стоящую под знаком производной, называют скобкой Лагранжа и обозначают $[\gamma_k, \gamma_s]$. Его основная лемма утверждает постоянство всех таких «скобок» за время движения (если подставить туда вместо q_i и p_i их выражения через t и произвольные постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}$). Как уже отмечалось, Лагранж сам подчеркивал важность полученного результата. Он писал: «Здесь мы имеем новое весьма замечательное свойство функции T, выражающей живую силу всей системы, которое может дать общий критерий для суждения о точности решения, найденного с помощью какого угодно метода. Но, как мы это покажем ниже, важнейшее применение эта формула

---

[42] См.: *Идельсон Н. И.* О механике Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 27.

М. В. Остроградский

находит для варьирования произвольных постоянных в вопросах механики» [43].

Он не мог еще предугадать всех тех выгод, которые из этой формулы смогли в дальнейшем извлечь его продолжатели: С. Д. Пуассон, Р. Гамильтон, К. Г. Якоби, М. В. Остроградский, Ж. Лиувилль, А. Пуанкаре и др.

Итак, чрезвычайно плодотворной оказалась идея Лагранжа рассматривать произвольные постоянные интегрирования уравнений движения не как постоянные, а как искомые функции времени, при подстановке которых в выражения для q_i и p_i и затем в уравнения движения последние превращались бы в тождества.

Р. Гамильтон во «Втором очерке об общем методе в динамике» [44] разработал алгоритм, с помощью которого при использовании скобок Пуассона можно найти все γ_k в зависимости от времени. Это составляет основу современного метода вариации произвольных постоянных.

---

[43] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 418.
[44] *Hamilton W. R.* Second essay on a general method of dynamics «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1835, t. I, p. 95—144.

К. Якоби развивал далее этот метод Гамильтона в теории возмущений (т. е. в задачах небесной механики) для интегрирования уравнений возмущений элементов орбит планет [45]. Фактически Якоби продолжает развитие идеи Лагранжа и Пуассона — вариации элементов эллиптических орбит небесных тел. Лемму Лагранжа о свойстве так называемых скобок Пуассона (как уже указывалось, это — видоизмененные скобки Лагранжа), Якоби переработал и оценил как результат особой важности для аналитической механики и для теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Исключительно большое влияние идей Лагранжа чувствуется в работах М. В. Остроградского. Например, в своей ранней работе «Заметка о вариации произвольных постоянных» [46] Остроградский развил идею Лагранжа о вариации произвольных постоянных для получения интегралов сохранения энергии, движения центра масс системы и площадей. В другой работе — «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» [47] — он продолжает разрабатывать метод Гамильтона — Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона, опирающийся на использование скобок Пуассона.

В дальнейшем идею, изложенную Лагранжем в его основной лемме (о сохранении за время движения постоянной величины, называемой теперь скобкой Лагранжа), развивали Ж. Лиувилль [48] и А. Пуанкаре [49].

Теория малых колебаний

Важной проблемой исчисления бесконечно малых в XVIII в. было вычисление дифференциалов как некоторых величин, заменяющих истинные приращения функции с точностью до малых высшего порядка. Эта чисто математическая проблема граничила с техническими за-

---

[45] См.: *Якоби К.* Лекции по динамике. М.— Л., ОНТИ, 1936.
[46] См.: *Остроградский М. В.* Полн. собр. трудов. Киев, 1961, т. II, с. 311.
[47] См.: *Остроградский М. В.* Избр. труды. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1958, с. 280—297.
[48] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matérieles.— «Journ. math.», 1849, t. XIV, p. 257—299.
[49] *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. 1. Paris, 1892, p. 167—193.

дачами теории малых колебаний, поскольку включала в себя теорию качки корабля около центра масс, теорию прецессии и нутации Земли, теорию колебания нематериальной струны с несколькими нанизанными материальными точками, теорию малых колебаний математического, а затем и физического маятника.

Одним из важных этапов в построении аналитической теории малых колебаний консервативной системы около положения равновесия послужил фундаментальный двухтомный труд Л. Эйлера «Корабельная наука» [50], изданный в 1749 г. в Петербурге. Эйлер создал этот трактат, получив заказ от Петербургской академии наук разработать теорию устойчивости корабля.

В первом томе Эйлер развивает общую абстрактную теорию устойчивости малых колебаний плавающего тела, а во втором — разрабатывает приложение этой общей теории к конкретному случаю плавающего корабля с заданными формами и распределением масс. Он предлагает способ расчета моментов восстанавливающих сил и фактически дает аналитическую разработку методики, идущей от трудов Архимеда и Стевина. Не ограничиваясь рассмотрением задачи в аспекте теории статической устойчивости, Эйлер развивает основы теории малых колебаний простого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного тела. Он приходит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Даламбер продолжил развитие теории малых колебаний для различных конкретных приложений: для случая малых колебаний маятников (простых и составных), для случая плавающих тел, для колебаний твердого тела около неподвижной точки или около центра инерции, для колебаний материальной точки на пружине и пр. Однако общей теории малых колебаний Даламбер не создал.

Лагранж встретился с проблемами аналогичной природы в задаче о колебании струны. Он рассматривал струну как невесомую, несущую одну, затем множество, потом бесконечно много материальных точек. Позже в задачах о вековых возмущениях элементов планетных орбит в связи с проблемой устойчивости планетной систе-

---

[50] Scientia navalis seu tractatus de construendis ac derigendis navibus, auctore L. Eulero. Petropolis, 1749, t. I, II.

мы он снова встретился с такой же задачей. К 1788 г. Лагранж наметил основные пути построения общей теории малых колебаний около положения равновесия консервативной системы с независящими от времени условиями. Эта теория вошла в первый том «Аналитической механики» (1788). При переработке трактата и подготовке его ко второму изданию Лагранж существенно дополнил эту теорию.

Теория малых колебаний Лагранжа тесно связана с теорией устойчивости положения равновесия в первом приближении. В этой теории в дифференциальных уравнениях возмущенного (или колебательного) движения удерживаются только первые линейные члены. В результате получается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Эту систему дифференциальных уравнений Лагранж преобразует к другой, эквивалентной системе, выражая прежние координаты через новые независимые переменные (позже новые аргументы стали называть нормальными координатами). Новая система уравнений получается расщеплением прежней системы на совокупность уравнений, каждое из которых содержит только одну нормальную координату и является уравнением свободных гармонических колебаний, описываемых синусоидальной зависимостью во времени, типа

$$\xi = E \sin(\sqrt{k}t + \varepsilon),$$

где E и ε — произвольные постоянные, k — квадрат нормальной частоты, ξ — нормальная координата. Общее решение в первоначальных координатах строится как линейная комбинация частных решений, одно из которых было выписано выше. Алгебраическое уравнение (типа векового уравнения), корнями которого были бы квадраты нормальных частот, явно не выписано Лагранжем, но способ его составления указан.

И здесь Лагранж вводит некоторую форму нормально-частотного критерия устойчивости, лишь упомянутую, но не сформулированную ранее Даламбером. «Так как приведенное выше решение основано на допущении, что переменные ξ, ψ, φ, ... представляют собой очень малые величины, то для того, чтобы это решение было законным, требуется, чтобы указанное допущение фактически осуществлялось; а это требует, чтобы все корни k', k'',... (уравнения для квадрата нормальной частоты.— *И. Т.*) были вещественными, положительными и неравными между собою, с тем, чтобы время t, возрастающее до бесконечности, всегда находилось под знаком синуса или косинуса. Если бы некоторые из этих корней были отрицательными или мнимыми, то вместо соответствующих синусов или косинусов они ввели бы вещественные экспоненциальные величины, а если бы они были просто равны между собою, то ввели бы алгебраические степени дуги; ...так как изложение этих случаев не представляет интереса для рассматриваемого нами вопроса, то мы на нем не будем останавливаться»[51].

Задерживая внимание лишь на случае вещественных положительных неравных квадратов частот k', k'',..., Лагранж еще раз указывает на возможность тригонометрического представления решения уравнений. Отсюда вытекает утверждение о том, что наибольшее значение истинных координат относительно положения равновесия не будет превосходить по модулю суммы амплитуд нормальных колебаний, зависящих лишь от постоянных начальных условий. Фактически речь идет об устойчивом состоянии равновесия системы. Если соотношение, напоминающее вековое уравнение, имеет кратные корни, то в решении системы дифференциальных уравнений возмущенного движения появляются члены, содержащие множитель времени перед синусом или косинусом некоторых функций времени (умноженного на частоты колебаний). Таким образом, из-за неограниченного возрастания коэффициентов при периодических членах тригонометрического представления искомой функции ее величина также возрастает неограниченно. Именно это означало, по мнению Даламбера и Лагранжа, неустойчивость малых колебаний системы. Авторитет Даламбера и Лагранжа, а вслед за ними и Лапласа с Пуассоном, присоединившихся к такому утверждению, обусловили живучесть этого некорректного воззрения на протяжении столетия.

Лишь в 1858—1859 гг. берлинский академик Вейерштрасс[52] и петербургский академик И. И. Сомов почти одновременно и независимо друг от друга различными ме-

[51] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 452.
[52] *Weierstrass K.*— «Berliner Monatberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin», 1858, S. 207—220.

тодами доказали ошибочность приведенного выше утверждения. Мемуар И. И. Сомова [53], в котором дано верное разрешение парадокса Даламбера—Лагранжа, называется «Об алгебраическом уравнении, с помощью которого определяются малые колебания системы материальных точек». Во вводной части автор говорит: «В мемуаре, который я имею честь представить Академии, я показываю с помощью примеров, что уравнение, о котором идет речь, может иметь кратные корни, но что это никоим образом не влечет за собой необходимости, чтобы время имелось вне знака синуса или косинуса в общих интегралах уравнений движения. Далее я даю доказательства вещественности корней уравнения, рассматриваемого во всей своей общности. Наконец, я показываю, как должно образовывать общие интегралы уравнение движения в случае равных корней, и выясняю, почему время не фигурирует вне знаков синуса или косинуса».

Это важное открытие Вейерштрасса и Сомова прошло незамеченным в современной им научной литературе. Девятнадцать лет спустя английский ученый Раусс вновь разобрал эту проблему как совершенно новую. Раусс [54] вместе с Пуанкаре [55] в конце XIX в. завершили развитие теории малых колебаний и их устойчивости по первому приближению.

Что касается влияния лагранжевых методов исследования устойчивости состояния равновесия консервативной системы со стационарными связями на дальнейшее развитие этой теории, то здесь следует отметить еще одну характерную черту мышления Лагранжа. Он настойчиво искал и наметил признаки распознания того, все ли корни соотношения типа векового уравнения вещественны, какого они знака и нет ли среди них кратных корней. Лагранж разработал своеобразный энергетический критерий устойчивости (позже доведенный до полной корректности в трудах П. Г. Лежен-Дирихле и А. М. Ляпунова). Этот критерий основан на рассмотрении поведения знакоопределенной функции П в окрестности ее ну-

---

[53] *Somoff I.* Sur l'équation algébrique à l'aide... «Mém. de l'Ac. des sci. de Pbg.», 1859, sér. VII, N 14, p. 1—30.

[54] *Rauth J.* A treatise on the Stability of a given State of motion... London, 1877, p. 1—108.

[55] *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. 1, 1892.

левого значения, т. е. в положении равновесия. Функция П, введенная Лагранжем, как уже говорилось, на современном языке соответствует потенциальной энергии консервативной системы. При некоторых упрощениях Лагранж доказал, что изолированный минимум этой функции в положении равновесия системы означает устойчивость малых колебаний около положения равновесия.

В целом теория малых колебаний Лагранжа и отдельные его методы с некоторыми усовершенствованиями, введенными другими учеными в конце XIX в., употребляются в большинстве проблем аналитической динамики до нашего времени.

Вращение твердого тела около неподвижной точки

Одним из важных технических запросов XVIII в. была проблема колебательного движения корабля при качке. Петербургская академия наук сформулировала эту проблему как задачу об остойчивости корабля. В процессе многолетней работы по этой проблеме Эйлер увидел необходимость построения теории вращательного движения твердого тела. Такие же проблемы выдвигала и астрономия. Необходимо было изучить вращение Земли, Луны и других небесных тел около собственной оси, а также прецессию и нутацию этой оси. Наконец, уже в то время начали пользоваться гироскопическими устройствами, нуждающимися в расчете вращения твердого тела около неподвижной точки.

В монографии «Корабельная наука» (1749) Эйлер начал разработку элементов теории распределения масс в твердом теле. Он установил важнейшее понятие свободной оси, нашел число свободных осей в твердом теле, сформулировал понятие центра инерции. Затем в серии мемуаров 50-х годов Эйлер шаг за шагом отрабатывал и шлифовал кинематику и динамику твердого тела с неподвижной точкой.

В окончательном виде уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки (или около центра инерции для любого случая движения), отнесенные к системе осей, жестко связанных с самим телом и направленных по главным центральным осям инерции, появились в «Мемуарах» Берлинской академии наук в

1758 г., а в 1765 г. были включены в трактат «Теория движения твердых или жестких тел, установленная на основных принципах нашего познания и приспособленная ко всяким движениям, которые могут иметь названные тела». Эти дифференциальные уравнения движения даны Эйлером в следующем виде:

$$dx = \frac{b^2 - c^2}{a^2}\, yzdt,$$

$$dy = \frac{c^2 - a^2}{b^2}\, xzdt,$$

$$dz = \frac{a^2 - b^2}{c^2}\, xy\, dt,$$

где a, b, c означают «плечи инерции» или, на современном языке, радиусы инерции тела относительно главных центральных осей инерции; x, y, z — составляющие мгновенной угловой скорости по направлению главных осей инерции.

Проинтегрировать эти уравнения в общем виде Эйлеру не удалось. Он достаточно детально разработал решение задачи в случае движения тяжелого твердого тела, закрепленного в центре тяжести. Эйлер указал путь к полному решению этой задачи, но качественного исследования свойств движения не провел. Позже, в 1834 г., Л. Пуансо дал геометрическую интерпретацию этого случая движения твердого тела: ввел понятие эллипсоида инерции тела, показал, что в данном случае движение тела может быть рассмотрено как качение без скольжения эллипсоида инерции тела по некоторой неподвижной плоскости. Он же ввел понятия полодии и герполодии, провел геометрическое исследование случаев устойчивости вращения твердого тела вокруг главных осей эллипсоида инерции.

Лагранж исследовал вращение твердого тела некоторой формы около неподвижной точки в 1773 г., опубликовав затем на эту тему мемуар [56], в котором дал несколько усовершенствованное рассмотрение этой задачи для случая, изученного Эйлером (т. е. без действия внешних сил). Позже, при подготовке второго издания «Аналитической механики», Лагранж вернулся к этой пробле-

---

[56] *Lagrange.* Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation...— «Nouv. mém. Berlin», 1775, p. 85—120.

ме и начал более глубокое ее исследование, но не успел привести свои соображения в законченную форму. После смерти Лагранжа астроном Бинэ разобрал все отрывки исследований Лагранжа по вращению твердого тела, вплоть до его заметок на полях первого издания трактата. Все, что возможно, было включено во второе издание, а слишком отрывочные записи Лагранжа были помещены отдельно в конце второго тома, в кратком разделе под названием «Из черновых записей Ж. Лагранжа».

Исследование вращения твердого тела Лагранж начинает с выбора удобных угловых параметров, характеризующих движение системы около неподвижной точки. Вводится понятие мгновенной оси вращения (обоснование и более детальное введение этого понятия уже было сделано раньше), определяется положение мгновенной оси в неподвижном пространстве, рассматриваются так называемые кинематические уравнения Эйлера, выведенные заново в дифференциальной форме. Затем Лагранж приступает к выводу дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Повторяя этапы рассуждений Эйлера и Даламбера, проведенные ими для разделения поступательного движения тела и его вращения около центра масс, Лагранж акцентирует внимание на дифференциальных уравнениях вращательного движения тела около центра масс по отношению к абсолютно неподвижным декартовым осям координат. Лагранж отмечает, что аналогичные уравнения были получены еще Даламбером для вращательного движения тела любой формы, которые он применил при исследовании предварения равнодействий (по-видимому, Лагранж имеет в виду исследования Даламбера, относящиеся к 1747—1749 г.). Уравнения он записывает в такой форме:

$$S\left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X\right) Dm = 0,$$

$$S\left(\xi \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi Z - \zeta X\right) Dm = 0,$$

$$S\left(\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y\right) Dm = 0,$$

где символ S означает суммирование по всем элементам тела, Dm — масса элемента, ξ, η, ζ — координаты мысленно вырезаемого элемента в теле в неподвижных декартовых осях координат, X, Y, Z — составляющие внешних сил по направлениям осей [57].

Лагранж замечает, что вид этих уравнений не обладает той простотой, которая могла бы быть им придана. Он переходит к выводу уравнений, наиболее простых и наиболее удобных для вычислений, по его выражению. Вывод основан на применении уравнений, носящих теперь название уравнений второго рода. Лагранж выписывает выражения кинетической энергии системы и «полного момента» сил (по современной терминологии — суммарной элементарной работы всех сил на виртуальных перемещениях точек системы) и составляет дифференциальные уравнения. За обобщенные параметры он принимает углы Эйлера. Выведенные таким образом уравнения довольно громоздки [58]. Лагранж указывает, что в этой форме он решал уравнения движения тела в задаче о либрации Луны; имеется в виду работа, премированная Парижской академией наук в 1764 г.

Далее Лагранж говорит, что к той же цели «можно прийти еще более прямым путем и при этом получить формулы, более изящные и во многих случаях более удобные для вычислений» [59].

После выбора осей координат по методу Эйлера так, чтобы центробежные моменты инерции тела относительно этих осей были нулями, Лагранж получает уравнения вращательного движения твердого тела, которые принято называть эйлеровыми динамическими уравнениями. Лагранж упоминает свою раннюю работу, где он уже пользовался этими уравнениями [60], а также воздает должное Эйлеру за доказательство существования главных осей инерции: «Эйлер впервые доказал, что это всегда возможно, какова бы ни была форма тела, и что определенные таким образом оси являются естественными осями вращения, т. е. такими осями, что тело может свободно вращаться вокруг каждой из них» [61].

Итак, уравнения движения в форме Эйлера для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной точки,

---

[57] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 249.
[58] Там же, с. 255.
[59] Там же, с. 256.
[60] *Lagrange.* Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation... Oeuvres, t. III, p. 579—616.
[61] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 281.

совпадающей с центром тяжести тела, записываются Лагранжем в таком виде:

$$dp + \frac{C - B}{A} qrdt = 0, \tag{A}$$

$$dq + \frac{A - C}{B} prdt = 0, \tag{B}$$

$$dr + \frac{B - A}{C} pqdt = 0. \tag{C}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции, p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на главные оси.

Указав, что исследованием этого важного случая занимались Даламбер и Эйлер, Лагранж излагает их результаты, доводя решение уравнений до квадратур. Затем он переходит к постановке задачи для второго фундаментального случая вращения твердого тела (получившего впоследствии имя Лагранжа), когда точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести. Лагранж вводит упрощающие предположения о динамической симметрии тела и о расположении точки опоры на оси симметрии: $A=B$. Тогда из третьего уравнения (C) движения он получает интеграл, носящий теперь его имя: r=const.

Сама постановка задачи и нахождение нового алгебраического интеграла r=const представляли важное открытие в области аналитической механики. Кроме того, Лагранж раскрыл механический смысл последнего интеграла, означающего постоянство угловой скорости вращения эллипсоида инерции около гироскопической оси. Затем он пошел еще дальше — наметил путь интегрирования двух первых уравнений движения, доведя вычисления до квадратур в эллиптических функциях. Как частный случай, он рассматривает условия, при которых ось тела совершает очень малые колебания (они могут быть коническими) около вертикальной линии, когда само тело вращается около собственной оси. Эти исследования Лагранж не закончил, фрагменты других его вычислений в той же области помещены в конце второго тома под рубрикой «Из черновых записей Ж. Лагранжа».

Интересно отметить, что та же задача о движении тяжелого симметричного твердого тела была в 1811 г. разрешена Пуассоном как совершенно новая[62]. Решение

---

[62] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 287.

(которое он дал, не упоминая при этом Лагранжа) было опубликовано в 1815 г. Якоби в середине XIX в. выразил решение этой задачи в тэта-функциях. Большой знаток теории эллиптических функций академик Петербургской академии наук И. И. Сомов в работе «Доказательство формул Якоби, относящихся к теории вращения твердого тела» в 1851 г. довел решение задачи до конца.

Разработка проблем гидромеханики

Лагранж глубоко изучил классические сочинения по гидромеханике, чтобы представить себе динамику развития этой науки и выявить наиболее рациональные пути ее развития. В исследовании «О различных принципах гидростатики»[63] он указывает, что первыми принципами равновесия жидкостей наука обязана сочинению Архимеда «О плавающих телах»[64]. Там выводится из предварительных эмпирических постулатов теорема, которую теперь называют гидростатическим законом Архимеда: тела, погруженные в жидкость, «теряют» часть своего веса, равную весу вытесненной жидкости (точнее, тела испытывают давление жидкости, направленное вверх и равное весу вытесненной жидкости).

В XVII в. Стевин открыл парадокс, состоящий в том, что жидкость может производить давление, гораздо большее собственного веса. Модель так называемого «поверхностного сосуда» Стевина (как бы затвердевшая оболочка, окружающая любую часть покоящейся жидкости, мысленно вырезаемую из ее объема) привела его к ряду важных результатов: объяснению закона сообщающихся сосудов, расчету давления покоящейся жидкости на дно, на боковые стенки, на наклонные стенки плотин и т. д. Лагранж отмечает, что методы Стевина и его предшественников в гидростатике совершенно отличны от известных к тому времени методов статики, а значит, назрела необходимость «связать между собой эти две дисциплины и подчинить их одному и тому же принципу»[65].

Лагранж указывает далее, что Галилей был первым ученым, который сделал попытку увязать статику и гид-

---

[63] Там же, т. I, с. 234.
[64] *Архимед.* Сочинения. М., Физматиздат, 1962, с. 328—358.
[65] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 239.

ростатику на базе принципа виртуальных скоростей. В сочинении «Диалог о предметах, которые находятся в воде или которые в ней движутся» Галилей выводит из этого принципа закон равновесия воды в сифоне, равновесия тела, погруженного в жидкость и пр. Р. Декарт, Б. Паскаль и П. Вариньон также применяли этот принцип в гидростатике. Лагранж высоко оценивает идею внедрения принципа виртуальных скоростей во все отрасли механики (статики и гидростатики), но критикует несовершенство математической формы разработки этого принципа, что приводило ученых к туманным полуэмпирическим высказываниям: «Однако указанные применения принципа виртуальных скоростей были еще слишком гипотетичными и, если можно так выразиться, слишком робкими (laches), чтобы послужить основой для разработки строгой теории равновесия жидкостей» [66].

Х. Гюйгенс в исследованиях равновесия жидкости исходил из положения о перпендикулярности тяжести к поверхности жидкости, Ньютон — из принципа равенства весов центральных столбов, что не всегда согласовывалось с положением Гюйгенса. Маклорен, развивая в исследовании равновесия жидкости путь Ньютона, выдвинул положение о том, что каждая частица покоящейся жидкой массы должна одинаково сжиматься всеми прямолинейными столбами жидкости, опирающимися на эту частицу и заканчивающимися на поверхности. Клеро дал аналитическую разработку этого принципа, благодаря чему, по словам Лагранжа, гидростатика превратилась в новую науку.

Завершающим шагом на пути развития гидростатики были работы Эйлера. Он отнес все силы, действующие на жидкость в состоянии равновесия, к трем взаимно перпендикулярным осям; выделил мысленно из всей массы жидкости элементарный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, и записал три уравнения в частных производных, связывающих давление с заданными силами и выражающих условия равновесия жидкости. Лагранж высоко оценивает результаты Эйлера. Он заканчивает описание названного метода такими словами: «Этот простой способ нахождения общих законов гидростатики ведет свое начало от Эйлера («Mé

---

[66] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 240.

moires de Berlin», 1775); в настоящее время этот способ принят почти во всех руководствах по этой отрасли науки. Принцип равенства давления по всем направлениям является, таким образом, до настоящего времени основой равновесия жидкостей...» [67]

Но далее Лагранж показывает, что этот принцип легко выводится «непосредственно из самой природы жидкостей», если рассматривать последние «как собрания молекул, сильно разобщенных, независимых друг от друга и способных совершенно свободно двигаться во всех направлениях...» [68].

Именно такой способ вывода всех законов равновесия жидкостей разрабатывает Лагранж в своей «Гидростатике». Он исходит из принципа виртуальных скоростей, записанного в аналитическом виде общей формулы его статики:

$$S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm=0,$$

где X, Y, Z — составляющие всех сил, отнесенных к единице массы, dm — элементарная масса жидкости. Далее Лагранж записывает условное уравнение, выражающее свойства несжимаемости жидкости

$$L\equiv C-dxdydz=0,$$

где C — постоянная.

Лагранж, следуя методу неопределенных множителей в статике, варьирует это уравнение и, умножая результат на множитель λ, прибавляет его к правой и левой части общей формулы статики

$$S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm+S\lambda\delta L=0.$$

При этом он поясняет, что интегрирование ведется по всей массе жидкости. Далее он дает детальную разработку вывода вариации объема элементарного параллелепипеда жидкости $dxdydz$. Здесь впервые в истории механики появляются формулы для относительных удлинений. Элемент dx переходит в $dx\left(1+\frac{\partial\delta x}{\partial x}\right)$, аналогично изменяются приращения и по двум другим координатным на-

[67] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 241.
[68] Там же, с. 242.

правлениям. Здесь же выводятся формулы сдвигов: прямой угол между элементами dx и dy после деформации переходит в угол, косинус которого равен $\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}$. Аналогичны деформации двух других углов. На это важное открытие Лагранжа впервые обратили внимание редакторы русского перевода первого тома «Аналитической механики» — Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Считают, что записанные формулы вывел О. Коши.

Лагранж преобразует соотношение, выражающее принцип виртуальных скоростей с учетом условного уравнения, к следующему равенству:

$$\mathrm{S}\left[\Gamma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \lambda\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz = 0,$$

где Γ — плотность жидкости.

Интегрируя по частям, Лагранж приходит к трем уравнениям равновесия жидкости и выводит условия на свободной поверхности (или около стенок) в жидкости. Уравнения равновесия, справедливые в любой точке жидкой массы, имеют вид

$$\Gamma X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0,$$
$$\Gamma Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$
$$\Gamma Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

Затем выясняется механический смысл неопределенного множителя λ: «...сила λ стремится сжать каждую частицу жидкости $dxdydz$; таким образом, эта сила представляет собой не что иное, как давление, испытываемое равномерно со всех сторон частицей жидкости, которому она противодействует благодаря своей несжимаемости» [69].

Лагранж отмечает, что те же результаты (иным методом) были получены в 1755 г. Л. Эйлером. Преимущество нового метода состоит в том, что в механике и гидромеханике найдена единая база (общая формула динамики

[69] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 262.

и ее частный случай для статики), которая дает уравнения движения и равновесия любых механических систем.

Далее Лагранж переходит к рассмотрению важных конкретных проблем гидростатики и специальных ее разделов. Он доказывает, что если Земля представляет собой сфероид вращения, то океан должен иметь ту же форму. До Лагранжа этой задачей, поставленной еще Ньютоном, занимался Маклорен, который показал, что фигура равновесия тяжелой вращающейся жидкости — двухосный эллипсоид.

Лагранж рассматривает задачи о равновесии твердого тела, погруженного в жидкость, и о равновесии жидкости в некотором сосуде. Как в первом, так и во втором случае выясняется механический смысл неопределенного множителя λ: это — давление жидкости на твердую поверхность тела или стенки. Затем следует новая важная проблема — о равновесии сжимаемых упругих жидкостей. На этом изложение гидростатики в трактате «Аналитическая механика» Лагранжа заканчивается.

Во втором томе трактата, приступая к изложению гидродинамики на базе все того же единого метода, Лагранж, как обычно, сначала дает глубокий исторический анализ развития этой дисциплины. Он говорит, что гидродинамика представляет собой науку, возникшую только в XVIII в. До этого изучали лишь равновесие жидкостей. Эпизодически пытались и ранее, в XVII в., решать задачи о движении воды. Торричелли начал исследование движения воды, вытекающей из сосуда через малое отверстие в стенке. Он установил, опираясь на опытные данные, что скорость истечения воды из отверстия пропорциональна корню квадратному из высоты уровня жидкости над местом истечения. Ньютон сделал попытку теоретически доказать это предложение: «...следует, однако, признать, что данное место является наименее удовлетворительным во всем великом творении Ньютона»,— считает Лагранж[70], трактуя это место как утверждение того, что скорость истечения воды из сосуда соотвествует лишь половине высоты воды над отверстием, что расходилось и с выводом Торричелли, и с результатами опытов. Приближение расчетов второго издания «Начал» Ньютона к данным опыта, по мнению

[70] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 301.

Лагранжа, не улучшило теоретического подхода автора. Несколько ранее второго издания «Начал» Ньютона Вариньон дал более правдоподобное объяснение рассматриваемого явления и пришел к результату Торричелли. Однако и в его рассуждениях Лагранж находит слабые пункты, в частности утверждение, что давление воды на площадку отверстия в дне сосуда равно весу столба жидкости над этой площадкой. Это верно для покоящейся жидкости, но неверно для жидкости движущейся. Поэтому теория Вариньона тем больше приближается к действительности, чем больше размеры сосуда по сравнению с отверстием истечения жидкости. Если же сосуд напоминает трубу переменного сечения, то теория Вариньона становится неправильной.

Касаясь трактата Д. Бернулли «Гидродинамика», Лагранж называет его произведением, «которое вообще блещет анализом, столь же изящным по своему изложению, сколь простым по своим выводам» [71]. В основу исследования Д. Бернулли кладет принцип сохранения механической энергии. Он первый правильно решил задачи об истечении жидкости из сосуда, о реакции жидкости. Однако Лагранж считает энергетический принцип ненадежным, так как он к тому времени еще не был доказан в общем виде. Следует заметить, что сам Лагранж вывел этот принцип из своей общей формулы динамики для широкого круга явлений: для консервативных сил, действующих на точки системы со стационарными связями. Однако конечные алгебраические соотношения гидравлики были менее универсальными, чем дифференциальные уравнения движения жидкости. Случаи неустановившегося движения не могли быть описаны энергетическими соотношениями. Вероятно, поэтому Лагранж считал блестящий, по его мнению, анализ «Гидродинамики» Бернулли недостаточным. Лагранж заметил, что принцип Даламбера и его предшественника Я. Бернулли о равновесии потерянных и приобретенных побуждений к движению в данный момент времени давал в руки исследователей более точный метод, нежели энергетический принцип.

Потому Лагранж и считал Даламбера первым, кто свел истинные законы движения жидкостей к аналитическим уравнениям. Именно в его работах впервые появ-

---

[71] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 305.

Д. Бернулли

ляются точные уравнения движения жидкостей (как несжимаемых, так и сжимаемых) — уравнения в частных производных, которых ранее не знали. Лагранж отмечает: «Однако эти уравнения еще не обладали всей той общностью и простотой, которая им может быть придана. Только Эйлеру мы обязаны первыми общими формулами для движения жидкостей, основанными на законах их равновесия и выраженными в простой и ясной символике частных производных. Благодаря этому открытию вся механика жидкостей была сведена к вопросу одного только анализа, и если бы уравнения, содержащие эту механику, были интегрируемы, можно было бы в каждом случае полностью определить условия движения и действия жидкости, приводимой в движение любыми силами...»[72].

Казалось, что еще можно было бы добавить к развитию точных методов гидромеханики после трудов Эйлера? Однако Лагранж попытался это сделать. Он сформулиро-

---

[72] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 307.

вал свою задачу так: «Произведенное нами в первой части настоящего труда объединение в одной и той же формуле всех законов равновесия тел как твердых, так и жидких и сделанное нами применение этой формулы к законам движения, естественно, приводит нас к тому, чтобы точно так же объединить динамику и гидродинамику, как ветви единого принципа и как выводы из единой общей формулы» [73].

Уравнения движения идеальной жидкости выводятся из общей формулы динамики. Рассуждениями, аналогичными проведенным для случая равновесия жидкости, Лагранж получает три динамических уравнения, отличающихся от статических присутствием «сил инерции», т. е. членами вида $\Gamma\frac{d^2x}{dt^2}$, $\Gamma\frac{d^2y}{dt^2}$, $\Gamma\frac{d^2z}{dt^2}$.

Введение нового знака D Лагранж объясняет тем, что этот знак нужен «для выражения дифференциалов, относящихся к мгновенному положению смежных частиц, в то время как знак d будет относиться только к изменению положения той же частицы в пространстве» [74].

Условие несжимаемости записывается Лагранжем в виде

$$\delta(Dx, Dy, Dz) = 0.$$

Это уравнение преобразуется к такому:

$$\frac{Ddx}{Dx} + \frac{Ddy}{Dy} + \frac{Ddz}{Dz} = 0.$$

В совокупности получаются четыре уравнения для определения неизвестных x, y, z и λ. Полученная система четырех уравнений с четырьмя переменными преобразуется Лагранжем к форме, которую принято называть формой Лагранжа: переменными являются начальные значения координат частицы a, b, c и время t. Такие уравнения встречались и в работах Эйлера. Эти уравнения более сложной структуры, чем уравнения в переменных Эйлера, имеют преимущество для неоднородных жидкостей, когда плотность в данной частице, которой приписаны так называемые лагранжевы координаты a, b, c, t, не меняются по времени.

[73] Там же, с. 308.
[74] Там же, с. 310.

При изучении движения идеальной несжимаемой однородной жидкости Лагранж выделяет важный случай, когда скорости обладают потенциалом (хотя термина «потенциал» у Лагранжа нет). Он записывает условия безвихревого течения:

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}=0;\qquad \frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}=0;\qquad \frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}=0,$$

где

$$p=\frac{dx}{dt};\qquad q=\frac{dy}{dt};\qquad r=\frac{dz}{dt}.$$

Далее формулируется так называемая теорема Лагранжа о сохранении потенциального течения в идеальной однородной жидкости, если течение началось из состояния покоя. Формулировка этой теоремы дается в чисто математических терминах: «Если движение начинается из состояния покоя, то мы имеем $p=0$; $q=0$; $r=0$ при $t=0$; следовательно, $pdx+qdy+rdz$ будет для этого мгновения интегрируемо и, стало быть, оно будет всегда интегрируемо в течение всего времени движения» [75].

Далее Лагранж приводит пример, когда выражение $pdx+qdy+rdz$ не является полным дифференциалом, однако общее уравнение движения и в этом случае может быть проинтегрировано. Пример Лагранжа относится к случаю вращения жидкости с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. В этом частном случае им получен первый интеграл, имеющий характер энергетического соотношения.

Вводя потенциал скоростей (без названия, а просто обозначая $pdx+qdy+rdz$ через $d\varphi$), Лагранж записывает уравнение несжимаемости в виде [76]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Теперь Лагранж указывает, что уравнения движения

---

[75] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 335. Эти результаты были впервые опубликованы Лагранжем в Берлине в 1781 г.: Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides.— «Nouv. mém. Berlin», 2e pag., 1783, p. 151—198.

[76] Функция φ — потенциал скоростей жидкости была введена Эйлером. См.: *Космодемьянский А. А.* Очерки по истории механики. М., «Просвещение», 1964, с. 111.

имеют первый интеграл вида

$$\lambda - V = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

где V — потенциал внешних сил, λ — неопределенный множитель Лагранжа, имеющий здесь механический смысл работы сил давления на перемещениях частиц жидкости.

Этот результат имеет большое значение в гидродинамике идеальной баротропной жидкости, в более общем виде он был позже получен Коши и стал называться интегралом Лагранжа — Коши. Надо отметить, что в работах Эйлера этот интеграл вводится в 1755—1770 гг.

Далее Лагранж рассматривает течение несжимаемой однородной жидкости в поле силы тяжести в сосудах и каналах любой формы. Лагранж теоретически получает результаты, полученные ранее Ньютоном (движение жидкости в неглубоком почти горизонтальном канале) и Даниилом и Иоганном Бернулли (истечение жидкости из узкого почти вертикального сосуда), линеаризируя уравнения движения. Он указывает, в каких границах изменения размеров сосуда и других величин полученные результаты правильны.

Следующий отдел трактата Лагранжа посвящен гидродинамике сжимаемых и упругих жидкостей. Предполагая, что течение потенциальное и закон Бойля — Мариотта выполняется, Лагранж линеаризует уравнение для φ, считая колебания упругой жидкости малыми. Затем он еще более упрощает рассмотрение, ограничиваясь одномерным случаем «звучащей линии». Это позволяет ему проанализировать два примера: распространение звука в трубах и флейтах и распространение звука в свободной атмосфере. Полученная скорость звука отличалась от измеренной при опытах на значительную величину. Это объяснялось тем, что Лагранж, знакомый с адиабатическим законом [77] изменения давления в зависимости от объема газа, предпочел воспользоваться упрощенным законом Бойля — Мариотта.

Подводя итог изложенному, следует отметить, что в XVIII в. в гидромеханике идеальной жидкости были до-

---

[77] См. об этом страницы о разработке Лагранжем взрывной силы пороха (с. 97—103) наст. книги.

стигнуты результаты, поставившие эту область на первое место среди других областей механики сплошной среды. Действительно, в основном в трудах Эйлера и Лагранжа были получены выражения для всех шести составляющих тензора деформации через составляющие перемещений. Уровень развития теории упругости к концу XVIII в. был иным, так как уже был накоплен обширный материал решения отдельных частных задач о равновесии и движении твердого тела с учетом упругих свойств материалов. Аналитический аппарат дифференциальных уравнений был применен только к рассмотрению одномерных задач теории упругости.

Не следует понимать успехи гидромеханики как одностороннее, чисто теоретическое развитие аналитического аппарата в полном отрыве от практически интересных частных случаев. Именно «понятийный» подход к изучению явлений гидродинамики проявили Д. Бернулли и Эйлер, установив и аналитически записав закон неразрывности жидкости. Будучи физиками по существу и имея огромный эмпирический материал, Даниил и Иоганн Бернулли разработали энергетический принцип гидромеханики, особенно эффективно применимый для одномерных течений жидкости. Этот метод долгое время был важнейшим инженерным способом расчета течения жидкости в трубах, струе, каналах с учетом вязкости и внутреннего трения жидкости.

Однако и чисто теоретические методы гидродинамики идеальной жидкости дали важнейшие для науки и ее приложений результаты: условие равновесия жидкости в поле консервативных сил, теория фигуры Земли, закон сохранения потенциального движения жидкости, интеграл Лагранжа; на этой базе была начата разработка теории волн. Однако из гидродинамики идеальной жидкости вытекали явно парадоксальные следствия, например парадокс Даламбера — Эйлера об отсутствии сопротивления при потенциальном безотрывном обтекании шара жидкостью.

Именно поэтому ученые, изучавшие физические свойства реальной жидкости, считали гидромеханику идеальной жидкости весьма ограниченной[78]. Они полагали

[78] О развитии гидромеханики вязкой жидкости см.: *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехтеоретиздат, 1955.

эту теорию сложной и исчерпавшей свои возможности. Такие ученые XVIII в., как Боссю, Купле, Шези, Дюбуа, Пито, видели надежду науки о движении жидкости в эксперименте. Даламбер тоже считал необходимым обратиться к эксперименту. Он вместе с Боссю и Кондорсе входил в комиссию при Парижской академии наук, созданную для исследования сопротивления воды при движении кораблей. Сотрудники комиссии нашли величины коэффициентов сопротивления при различных законах сопротивления по отношению к скорости движения корабля. Эти и многие другие данные о движении тел в реальной жидкости были использованы при построении математической теории движения вязкой жидкости в XIX в.[79]

Знания, накопленные учеными XVIII в. о законах равновесия и движения жидкости, подвели механику начала XIX в. к обобщениям, которые выделили механику сплошной среды в самостоятельную дисциплину со своими понятиями и своим математическим аппаратом.

Работы по небесной механике

Более трети всех опубликованных работ Лагранжа посвящены небесной механике и астрономии. Главными направлениями его исследований были теория определения орбит, теория возмущений и теория либрации Луны. Исследования Лагранжа по этим вопросам оказали наиболее важное влияние на дальнейшее развитие астрономии. Несколько работ касаются практической астрономии: теории рефракции, теории часовых механизмов, вопросов геометрической оптики. При решении таких проблем Лагранжа больше всего интересовала их математическая сторона.

«Этим Лагранж отличается от Ньютона или Лапласа, которые были прежде всего естествоиспытателями, и даже от Гаусса, который был столько же естествоиспытатель, как и математик» [80].

---

[79] О развитии гидромеханики см.: *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкостей и газов. М., Физматгиз, 1959, с. 15—31.

[80] *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 48.

В двух работах по сферической тригонометрии Лагранж рассматривает некоторые тригонометрические уравнения, решая их при помощи рядов, и прилагает полученные результаты к решению сферических треугольников. Он показывает, что для обоснования всей сферической тригонометрии может быть использована одна формула и записывает ее в виде обобщенной теоремы косинусов. Другие соотношения сферической тригонометрии Лагранж выводит из этой формулы.

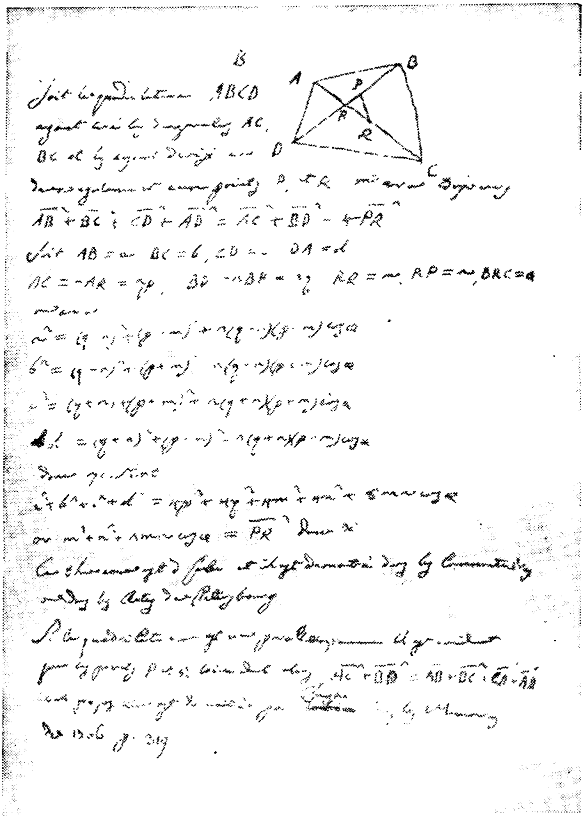
Несколько содержательных работ Лагранжа посвящены теории предвычисления затмений. В одной из работ он показывает, каким образом может быть учтено сжатие Земли, которым обычно пренебрегали, при вычислении затмений. Для всех астрономических работ Лагранжа характерны поиск наиболее общей теории, глубокое проникновение в математическую сущность вопроса и довольно слабая заинтересованность в окончательном численном решении, т. е. в практическом выходе теории. Именно за это Лагранж получил заслуженный упрек астронома-практика Деламбра. Поводом для упрека послужила попытка Лагранжа аналитически (очень сложно) найти кривые начала и конца прохождения Венеры по диску Солнца, вместо того чтобы воспользоваться более коротким и более точным численным методом, которым пользовались астрономы. Высказывание Деламбра по этому поводу стало общеизвестным: «Простые вопросы должны быть решаемы простыми способами, применение ученого анализа надо ограничивать теми случаями, где требуется это могущественное средство. Не надо уподобляться тому сказочному герою, который, чтобы избавиться от блохи, молил о перунах Юпитера и палице Геркулеса» [81].

Однако эта «палица Геркулеса» оказалась в дальнейшем очень эффективной: идея Лагранжа применения прямоугольных координат в сферической тригонометрии, против которой возражал Деламбр, была весьма плодотворно развита в дальнейшем Бесселем и Ганзеном в теории затмений.

Серия астрономических работ Лагранжа, созданная в берлинский период, относится к актуальной тогда проблеме определения орбит планет и комет по нескольким на-

---

[81] *Delambre.* Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange.— Oeuvres de Lagrange. t. I, p. XXI.



Страница рукописи Лагранжа

блюдениям. С математической точки зрения вопрос сводился к решению трех дифференциальных уравнений второго порядка, общий интеграл задачи содержал шесть произвольных постоянных. В качестве этих произвольных постоянных (элементов орбиты) обычно принимают большую полуось конического сечения, его эксцентриситет, угол наклона плоскости орбиты к плоскости эклиптики, две координаты восходящего узла и время прохождения тела через перигелий. Для получения шести элементов орбиты достаточно трех наблюдений светила, дающих по две сферические координаты. Проблема сводится к записи дифференциальных уравнений, решая которые теоретики могут предвычислить положение планеты (кометы) на небесной сфере. Астрономы-наблюдатели, руководствуясь данными таких вычислений, будут знать, где искать в благоприятный момент данное небесное тело.

Математическая сторона проблемы определения шести элементов орбиты по трем наблюдениям представляла чрезвычайно большие трудности, перед которыми остановился даже Эйлер.

В 1777 г. эта проблема была выдвинута на конкурс Берлинской академии наук. Работы Ламберта и Лагранжа, получившие премии, не вносили, однако, существенно нового в решение задачи. Важным все же оказалось то, что Лагранж всерьез заинтересовался кометной проблемой и посвятил ей ряд работ. В обычном для него историческом анализе подходов предшественников (Ньютона, Эйлера, Ламберта) Лагранж весьма высоко оценил графический метод Ньютона определения параболических орбит. Астрономы XVIII в. избегали применять этот метод, считая его неудобным. Лагранж переработал методы Ньютона, Эйлера и Ламберта. В отличие от Эйлера, определявшего орбиты по четырем наблюдениям, Лагранж дал аналитический метод определения орбиты по трем наблюдениям.

«Обращаясь теперь к проблеме точного определения геоцентрических расстояний, мы можем отметить, что Гауссу оставалось лишь полностью осуществить ту программу, которую дал Лагранж: последовательными приближениями находить все более и более точные значения n_1 и n_2, пользуясь для этого отношением площадей секторов и треугольников, заключенных между радиусами-векторами. Эту программу Лагранж выполнил лишь для случая параболической орбиты; что же касается несравненно более трудных случаев эллиптической или гиперболической орбиты, то ... Лагранж отказался здесь от проведения своей идеи до конца и перешел на другой путь» [82].

Упомянутые здесь величины n_1 и n_2 необходимы для выражения координат первого и третьего наблюдения че-

[82] *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 59.

рез соответствующие координаты второго наблюдения. Тот новый путь, которым пошел Лагранж в решении проблемы, сводится к разложению в ряды координат тела по радиусу-вектору. Лагранж нашел очень полезное промежуточное соотношение геометрического характера, упрощающее решение задачи. В дальнейшем идеи Лагранжа в этой области были развиты К. Гауссом в сочинении «Теория движения небесных тел» (1809).

Заметный научный вклад внес Лагранж в решение классической проблемы n тел. Особенно подробный анализ он провел для трех тел. Задачу об относительном движении трех тел Лагранж свел к интегрированию системы девяти дифференциальных уравнений второго порядка. Главной его заслугой было понижение порядка системы с 18 до 7: преобразованием исходной системы он получил одно дифференциальное уравнение третьего порядка и два — второго. Таким образом, сложнейшая система дифференциальных уравнений сводилась к трем дифференциальным уравнениям, эквивалентным системе уравнений седьмого порядка. Эти результаты, вошедшие в трактат «Аналитическая механика», были опубликованы впервые в 1772 г. Однако столь важное продвижение на пути решения проблемы трех тел мало приблизило окончательное ее разрешение. Вот что пишет об этом Н. И. Идельсон: «...сложность полученной Лагранжем нелинейной системы (которая в явном виде у него даже не написана) такова, что всякая надежда на возможность ее интегрирования должна была быть оставлена; и задача трех тел — с физической точки зрения столь элементарная — предстала после появления мемуара Лагранжа как некий вызов, брошенный природой человеческому уму; ничего не оставалось иного, вплоть до работы Зундмана, подошедшего к проблеме с новой точки зрения, как рассматривать отдельные частные случаи или целые классы частных решений при тех или иных ограничениях общей проблемы» [83].

Интересен один из частных случаев, рассмотренных Лагранжем: расстояния между тремя телами остаются постоянными или же сохраняют постоянные отношения во все время движения. Он довел решение этого случая до конца, рассмотрев два подслучая. К концу XIX в. было

---

[83] *Идельсон Н. И.* О механике Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 42.

обнаружено, что астероиды юпитеровой группы занимают положения, приблизительно соответствующие решению Лагранжа. Они образуют почти равносторонний треугольник с Солнцем и Юпитером. Решения Лагранжа сразу показались весьма интересными и содержательными.

Наибольшее количество работ в области небесной механики Лагранж посвятил теории возмущений. Эти работы тесно переплетались с исследованиями другого великого механика той эпохи — Лапласа.

Первым исследованием Лагранжа, имеющим отношение к теории возмущений, была работа о неравенствах в движении спутников Юпитера, удостоенная премии Парижской академии наук в 1766 г. Эйлер писал об этом достижении молодого Лагранжа астроному Байи из Берлина в Париж: «Иррациональная формула, выражающая расстояние Юпитера от Сатурна, не может быть представлена достаточно сходящимся рядом, и в этом состоит самое большое препятствие. Я сильно сомневаюсь, чтобы его можно было успешно преодолеть... Сейчас мне тем более интересно знать, каким образом г. Лагранж преодолел те же трудности в своей работе, получившей премию, и так как я не имею оснований сомневаться в успешности его решений, то можно льстить себя надеждой, что теоретическая астрономия в настоящее время доведена до наивысшей степени совершенства» [84].

В этом письме от 15 сентября 1766 г. Эйлер просит Байи прислать ему премированный труд Лагранжа, а также ранее премированную работу о либрации Луны.

Все исследователи научного наследия Лагранжа отмечают одну важнейшую идею, дающую ключ для решения проблемы взаимодействия трех тел, когда массы двух из них малы по сравнению с массой центрального тела (Солнца). Эта идея навеяна самой природой задачи: движение планеты мало отличается от невозмущенного вторым малым телом эллиптического движения. Вторая планета оказывает возмущающее действие на поведение первой планеты, движение которой как бы происходит по непрерывно изменяющемуся эллипсу. Такова идея метода вариации произвольных постоянных, мастерски разработанного Лагранжем. Последовательный путь размышлений ученого можно приблизительно проследить.

---

[84] *Эйлер Л.* Письма к ученым. М.— Л., «Наука», 1968, с. 9.

Глубоко изучая труды классиков науки, и в частности трактат Ньютона «Математические начала натуральной философии», Лагранж проникал в недосказанные и лишь намеченные методы, понимал их эффективность для данного круга задач. «В настоящее время после исследований Адамса и академика А. Н. Крылова можно считать установленным, что за теми геометрическими методами, которыми пользуется Ньютон, скрывается гораздо более глубокое проникновение в проблемы небесной механики, чем то, которое дано непосредственно на страницах «Начал». Вся теория вариации произвольных постоянных эллиптического движения и те уравнения, которые были даны впоследствии Лагранжем, по-видимому, были предвосхищены Ньютоном и применены им к решению проблем лунной теории» [85].

Естественно, у Ньютона проводилось только качественное изучение возмущенного движения Луны при возмущающем действии Солнца. В явном виде даже идеи метода вариации произвольных постоянных здесь еще не было. Идея варьирования четырех из шести произвольных постоянных элементов орбиты впервые была использована Эйлером при исследовании движения планет. Однако из-за некоторых неточностей в выкладках Эйлер не удовлетворился результатами и перестал заниматься разработкой этого метода. Выводы Эйлера Лагранж исправил, варьируя, как и Эйлер, только четыре элемента орбиты. В 1778 г. при исследовании возмущенного планетами движения комет Лагранж составил строгие дифференциальные уравнения, определяющие изменение шести элементов орбиты. Незадолго до смерти при подготовке к переизданию трактата «Аналитическая механика» он еще усовершенствовал и обобщил метод вариации произвольных постоянных. Здесь немаловажную роль сыграло использование так называемой пертурбационной функции — силовой функции возмущающего поля сил и так называемых скобок Лагранжа. Во втором издании «Аналитической механики» этот метод определения возмущений появился в виде общего приближенного метода для решения всех механических задач, когда среди сил,

[85] *Идельсон Н. И.* Закон всемирного тяготения и теория движения Луны.— В кн.: Исаак Ньютон. Сб. статей к 300-летию со дня рождения. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1943, с. 188.

действующих на систему, имеются такие, величина которых незначительна по сравнению с главными силами.

Советский астроном и механик Н. Д. Моисеев дает такую оценку этого общего метода Лагранжа: «В дальнейшем же он не только дал совершенно полные и строгие системы названных уравнений, сделавшиеся с той поры основными для аналитической небесной механики, но и развил общую теорию вариации произвольных постоянных в задачах механики, по отношению к которой предыдущие его труды в частной области небесной механики оказались лишь разработкой частных случаев» [86].

В середине XIX в. Леверрье предпринял весьма трудоемкие вычисления и дал окончательную методику, детально им разработанную, для расчета движения планет при возмущающем действии соседней планеты. Он же составил таблицы движения планет. В основе его расчетов лежал метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. В 1860-х годах Ньюком применил тот же метод для изучения движения Нептуна; правда, позже он пользовался методом Лапласа, вычисляя возмущения движения Урана, Меркурия, Венеры, Земли и Марса.

Важная составная часть теории возмущений — теория вековых возмущений (т. е. обусловленных взаимным расположением орбит планет друг по отношению к другу).

Чрезвычайно большой интерес к этой проблеме в XVIII в. хорошо объясняет М. Ф. Субботин:

«Две причины побуждали ученых того времени особенно интересоваться именно вековыми возмущениями.

Прежде всего наблюдения планет, достаточно точные для изучения периодических возмущений, были получены Брадлеем лишь около 1750 г., и надо было еще ждать десятилетия для того, чтобы был собран достаточно точный материал для сравнения теории с наблюдениями, тогда как для определения вековых неравенств можно было воспользоваться и очень грубыми старыми наблюдениями, ибо влияние ошибок наблюдений уменьшается в этом случае пропорционально промежутку времени, разделяющему наблюдения.

С другой стороны, вековые возмущения элементов ор-

---

[86] *Моисеев Н. Д.* Очерки развития теории устойчивости. М.— Л., Гостехиздат, 1949, с. 259.

бит представляли в то время большой интерес с философской точки зрения, так как наличие или отсутствие вековых членов, растущих пропорционально времени, в больших полуосях, эксцентриситетах и наклонностях орбит связывали тогда с вопросом об устойчивости солнечной системы.

Правда, Лагранж вполне ясно понимал, так же как и Лаплас, ...что появление или исчезновение вековых членов при тех или иных методах последовательных приближений отнюдь не решает вопроса о характере изменения величины и, следовательно, об устойчивости. Но интерес к вековым возмущениям, с указанной точки зрения, вышел за пределы очень узкого круга лиц, вполне понимающих математическую природу задачи, и стал одной из боевых проблем философии естествознания того времени» [87].

Проблема вековых неравенств была связана также и с теорией движения Луны, которую в XVIII в. разрабатывали Эйлер, Клеро, Даламбер, Лагранж, Лаплас.

Большой цикл работ Лагранжа относился к теории вековых возмущений планет. Работая в Берлине, Лагранж в 1774 г. послал свой мемуар в Парижскую академию наук. В это время там блистал Лаплас, молодой ученик Даламбера. Основное внимание Лаплас уделял небесной механике. Ему, как отмечалось выше, стал известен мемуар Лагранжа, где некоторые величины были выражены через элементы орбиты (через наклонение орбиты планеты к эклиптике и положение узла) и были представлены в виде бесконечных тригонометрических рядов по времени. Лаплас немедленно взял «на вооружение» метод Лагранжа, удачно преобразовав его для изучения форм планетных орбит. При этом он рассматривал разложение элементов орбит по степеням времени. Получилось так, что труд Лапласа появился раньше, чем использованный им мемуар Лагранжа. Лаплас говорил, что он давно хотел проинтегрировать дифференциальные уравнения для вековых неравенств в движении планет, но на этом пути были большие трудности. «Я не взялся бы за это дело, если бы не прочитал превосходную работу г. Лагранжа, при-

---

[87] *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 72.

сланную в академию и имеющую появиться в следующих томах»[88].

В работах 1774 г. Лагранж исследовал вековые изменения элементов орбиты, представляя некоторые функции возмущений элементов орбиты (наклонности и долготы узла) в тригонометрической форме, которая использовалась позже в работах Гюльдена, Баклунда и др. Видоизмененный Лапласом метод Лагранжа, представляющий вековые возмущения в виде разложения по степеням времени, был удобен для оценки возмущений с любой степенью точности. Этот метод нашел свое развитие в работах Леверрье и Ньюкома при создании таблиц движения больших планет.

Лагранж вывел из дифференциальных уравнений вековых возмущений замечательное интегральное соотношение[89], в котором некоторая знакоопределенная положительная квадратичная функция возмущений эксцентриситета и долготы перигелия остается все время постоянной и равной k^2. Этот интеграл используется Лагранжем для утверждения устойчивости невозмущенного состояния планетной системы.

«Из этого уравнения видно, что эксцентриситеты e', e'', e''' ... обязательно имеют пределы, которые они не могут превзойти; в самом деле, так как они необходимо вещественны, поскольку орбиты представляют собою конические сечения, то каждый член, например $m'\sqrt{g'a'}e'^2$, всегда положителен и его максимумом будет постоянная k^2»[90].

Отсюда следует, что если эксцентриситеты орбит, принадлежащих очень большим массам, в какой-либо момент очень малы, то они останутся всегда такими же, что имеет место в случае Юпитера и Сатурна; однако эксцентриситеты орбит, принадлежащих очень малым массам, могут возрасти до единицы и выше, и их действительные пределы, как мы это увидим ниже, могут быть установле-

---

[88] Цит. по кн.: *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас. М., 1937. с. 100.

[89] См.: *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 160.

[90] Положительная знакоопределенная форма, сохраняющая постоянную величину k^2, о которой говорилось выше, представляет сумму членов такого вида по всем точкам системы.

ны лишь путем интегрирования дифференциальных уравнений» [91].

Заметим, что упомянутое интегральное соотношение, инвариантное во времени, было получено Лагранжем без полной интеграции дифференциальных уравнений возмущенного движения планет. Вслед за суждением об устойчивости в отношении эксцентриситетов планет Лагранж приводит аналогичное суждение в отношении наклонности и долготы восходящего узла орбиты.

«Эта теорема была найдена эмпирически Лапласом. Лаплас безуспешно пытался дать доказательство в общем виде, и тем эффективнее был результат Лагранжа, доказавшего эту теорему, по выражению Якоби, одним штрихом пера (1776). Такой успех явился прямым следствием введения в теорию возмущений пертурбационной функции» [92].

Работы Лагранжа и Лапласа значительно продвинули развитие проблемы векового ускорения Луны. Современник Ньютона Галлей обнаружил неравенства в движении Луны вокруг Земли. Причина этого явления ускользала от ученых XVIII в. Лагранж пробовал учесть несферичность Земли и Луны, но это не привело его к объяснению явления векового ускорения Луны. Он заподозрил даже, что эти неравенства кажущиеся или же являются следствием ненадежных наблюдений предшествующих астрономов. Он расширил метод, разработанный им для исследования возмущенного движения Юпитера и Сатурна, на движение Луны. Эти рассуждения привели его к выводу о несущественности членов высших порядков относительно масс и членов второй степени относительно некоторых элементов орбит при оценке вековых возмущений средних движений Луны. Лаплас в 1787 г. обнаружил существенное влияние этих членов для оценки ускорения Луны и получил хорошее совпадение с наблюдениями. Очевидно, Лагранж не вполне представлял себе физическую сущность проблемы и не ощущал большой разницы в природе движения планет и в движении их спутников.

---

[91] *Лагранж.* Аналитическая механика, т. II, с. 160—161.
[92] *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Лагранжа.— Указ. сб. статей, с. 75.

Однако и Лаплас разрешил загадку векового ускорения Луны не полностью: наблюдаемое ускорение Луны было вдвое больше теоретического.

«Кто же устранил за истекшие полтора столетия оставшуюся неувязку? — Никто. Современные таблицы движения Луны поэтому не составляются исключительно на основании теоретических данных, как того требовал Лаплас. В них вводят эмпирические поправки, хотя и очень незначительные, взятые из прямых наблюдений» [93].

Более поздняя точка зрения астрономов сводилась к тому, что неравенства в движении Луны отчасти являются кажущимися, они происходят, по-видимому, от неравномерности суточного вращения Земли из-за тормозящего действия приливообразующих сил.

Важнейшие научные результаты двух современников — Ж. Лагранжа и П. Лапласа в вопросах небесной механики высоко оцениваются в науке XX в.

«Методы учета возмущений в движении небесных тел, как и методы классической небесной механики, разработанные Лапласом и Лагранжем, до сих пор сохраняют большое значение и применяются не только в астрономии, но и в теоретической физике; например, при изучении движения электронов в недрах модели атома, созданной Бором» [94].

Работа Лагранжа «О форме колонн»

Еще в средние века было замечено, что прочность колонн, поддерживающих тяжелые части сооружений, зависит не только от их толщины, но и от высоты.

Встречаются упоминания о том, что вопрос о сопротивлении колонн изгибу интересовал Леонардо да Винчи [95]. Он считал, что их несущая способность обратно пропорциональна длине, но прямо пропорциональна площади поперечного сечения колонны.

Известны опыты голландского физика Мусшенбрука по сжатию стержней, проделанные в 1720 г. на специ-

---

[93] *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас, с. 251.
[94] Там же, с. 73.
[95] См.: *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов. М., Гостехтеоретиздат, 1957, с. 15.

ально придуманном для этого станке. Мусшенбрук описал эмпирически установленную им зависимость: сопротивление сжатых стоек одинакового сечения обратно пропорционально квадратам их длин. Так была установлена первая количественная зависимость, относящаяся к продольному изгибу конструкции. Парижанин Ж. Бюффон, младший современник Мусшенбрука, критиковал опыты последнего, считая, что на малых образцах, какими располагал Мусшенбрук, нельзя получить данные для больших колонн. Я. Бернулли пришел к правильному выводу о том, что кривизна изогнутой балки пропорциональна изгибающему моменту в данной точке. Этой зависимостью воспользовался Л. Эйлер; методами вариационного исчисления в 1744 г. он исследовал девять частных случаев, когда угол между направлением силы, сжимающей стержень, и направлением касательной к упругой линии в точке приложения силы мал. В этом случае величина нагрузки, при превышении которой начнется выпучивание стержня или колонны, как установил Эйлер, имеет вид

$$P = C\pi^2/4l^2,$$

где C — постоянная, называемая Эйлером «абсолютной упругостью», l — длина испытуемого на продольный изгиб стержня или колонны. Эту величину принято теперь называть наименьшей критической силой продольного изгиба; Эйлер назвал ее силой колонны.

В работе 1757 г., названной «О силе колонн», Эйлер несколько детализировал свое прежнее исследование по теории продольного изгиба [96]. Он углубил понятие абсолютной упругости, зависящей от природы вещества, установив, что эта величина имеет размерность силы, умноженной на квадрат длины. Далее он исследовал продольный изгиб стержней переменного сечения. В более поздних работах Эйлер дал решение трудной задачи о продольном изгибе стержня постоянного сечения под действием собственного веса, рассмотрев стержень с шарнирами на концах.

Работы Лагранжа по продольному изгибу непосредственно примыкают к работам Эйлера. Первая его рабо-

---

[96] *Euler L.* Sur la force des colonnes.— «Mém. de l'Acad. de sci. de Berlin», (1757) 1759, t. XIII, p. 252—282.

та «О форме колонн»[97] вносит важный вклад в теорию упругих кривых. Как и Эйлер, Лагранж рассматривает призматический стержень с шарнирами на концах, получающий малый прогиб под действием продольной силы P. Приближенное дифференциальное уравнение оси стержня он записывает так же, как это делал Эйлер в работе «О силе колонн»:

$$C \frac{d^2y}{dx^2} = -Py,$$

где ось координат Ox направлена по недеформированному стержню, ось координат Oy перпендикулярна первой. Лагранж рассмотрел решение этого уравнения в виде

$$y = f \sin \sqrt{\frac{P}{C}}\, x$$

и показал, что оно удовлетворяет условиям на конце только в том случае, если

$$\sqrt{\frac{P}{C}}\, l = m\pi,$$

где m — целое число. Исходя из этого результата, Лагранж вывел величину нагрузки колонны, вызывающей лишь малый прогиб:

$$P = \frac{m^2\pi^2 C}{l^2}.$$

Отсюда следует, что изогнутая ось может иметь не одну форму, а несколько. Величины нагрузок, по Лагранжу, превышали величины, указанные Эйлером, для $m=2$ в 4 раза, для $m=4$ в 16 раз. Первому случаю соответствует малый прогиб в виде одной выпуклости, или одной полуволны, во втором — полная волна, или выпуклость и вогнутость. Лагранж исследует прогибы, появляющиеся после превышения критического значения нагрузки. Далее он исследует продольный изгиб колонн переменного сечения, в частности тел вращения. Он ставит и решает задачу о нахождении профиля колонны, которая при вращении вокруг оси обеспечила бы ей эффективную форму. В качестве меры эффективности Лагранж взял отношение критической нагрузки к квадрату объема колонны.

[97] *Lagrange*. Sur la figure des colonnes.— Oeuvres, t. II, p. 125—170.

Он пришел к выводу, что колонна наибольшей эффективности имеет форму цилиндра. Позже Лагранж пересмотрел это решение заново. Впоследствии этой задачей занимались Т. Клаусен, Е. Л. Николаи [98] и др.

Во второй работе на ту же тему — «О силе плоских пружин» (1771) — Лагранж рассматривает продольный изгиб полосы постоянного сечения, один конец которой защемлен, а к другому приложена сосредоточенная продольная сила. Решение, найденное им для этого случая, оказалось малопригодным для практики.

Итак, в трудах Эйлера и Лагранжа теория продольного изгиба была строго обоснована, однако практики XVIII в. мало пользовались этой теорией. Английские инженеры и ученые, например Робинс [99], относились к результатам математической теории Эйлера продольного изгиба с большим недоверием. Отчасти это объяснялось неудовлетворительной постановкой эксперимента. Не слишком тщательно поставленные опыты Годкинсона [100] по сжатию чугунных стоек в 40-х годах XIX в. надолго подорвали доверие инженеров к теории Эйлера. Только ряд катастроф вызвал необходимость проводить новые опыты, которые вернули заслуженное признание теории Эйлера—Лагранжа. Первые надежные испытания колонн провели Баушингер (1886), Тетмайер (1890) и Консидер (1889).

Заслуга построения точной теории продольного изгиба на базе анализа перечисленных экспериментальных данных и реабилитация теории Эйлера—Лагранжа принадлежит талантливому польскому инженеру и ученому, питомцу петербургского Института инженеров путей сообщения (а впоследствии профессору этого института) Ф. С. Ясинскому. В работе «О сопротивлении продольному изгибу» Ясинский впервые убедительно доказал состоятельность теоретического расчета точными методами критического значения нагрузки при продольном изгибе. Он провел интегрирование не приближенного, а точного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня по

---

[98] *Николаи Е. Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн.— «Изв. Петерб. политехн. ин-та», 1907, т. VIII.

[99] См. об этом: История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М., «Наука», 1971, с. 168.

[100] *Ясинский Ф. С.* Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1952, с. 308.

аргументу переменной дуги изогнутой оси. Среди рассмотренных Ясинским двенадцати случаев сжатия стержней имеется много оригинальных задач о продольном сжатии элементов многорешетчатых ферм, имеющих важное практическое значение и получивших широкое распространение не только в России, но и за ее пределами. Во многих случаях Ясинский подтвердил вслед за Лагранжем результаты Эйлера [101].

Ясинский не ограничился изучением только продольного изгиба колонн и стержней. Он составил таблицу критических значений напряжения при продольном изгибе в зависимости от гибкости. Его труды заложили основы инженерной теории расчетов сооружений на устойчивость, положив начало строительной механике.

---

[101] См.: *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов, с. 356.

Исследования Лагранжа по математике

Большинство мемуаров Лагранжа, относящихся к проблемам математики (алгебре, теории чисел, анализу, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей), были опубликованы во время его пребывания в Берлинской академии наук.

Ранние туринские исследования Лагранжа по теории звука, колебанию струны, по основам вариационного исчисления относились в равной степени и к математике, и к механике.

Два обширных сочинения по теории функций и основаниям математического анализа, созданные в Париже, также занимали промежуточное место между математикой и ее приложениями, главным образом в механике.

Занимаясь проблемами математического анализа, Лагранж видел назревшую необходимость пересмотреть «дурно освещенный вход в здание анализа» [1], необходимость найти новые принципы его изложения без использования исчезающих (бесконечно малых) величин, без пределов, без флюксий (т. е. без производных). Он также ясно сознавал, что эта задача не по плечу одному человеку. В 1774 г., будучи президентом Берлинской академии наук, он объявил конкурс на тему: о строгой и ясной теории того, что в математике называют бесконечным.

Фактически была поставлена задача вскрыть истинные закономерности, пока что представленные многими противоречивыми посылками, из которых выводят правильные заключения и находят верные положения для конкретных задач.

---

[1] См.: *Карно Л.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1933, с. 38.

Лагранж предпринял попытку заменить существующие методы изложения математического анализа более строгой, по его мнению, теорией аналитических функций.

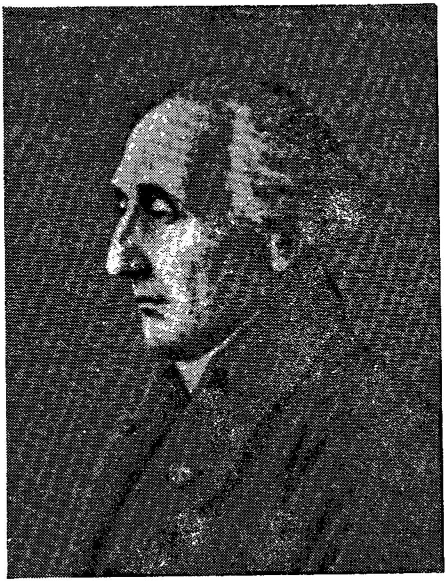
В большинстве современных математических курсов (в анализе, дифференциальных уравнениях и т. д.) встречается множество соотношений, положений и символов, введенных Лагранжем. Например, тройной интеграл, который Лагранж употреблял в задаче о притяжении эллипсоида вращения, методы получения особого решения дифференциальных уравнений и геометрическая интерпретация особого решения как огибающей семейства интегральных кривых; основы теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Вариационное исчисление

Научная революция XVII в. открыла свободный путь развитию разнообразных отраслей точного естествознания. Мысль ученых все дерзновеннее проникала в тайны природы, переводя на язык математики сложные взаимосвязи различных явлений окружающего нас мира (стали говорить, например, что луч света *избирает* кратчайший путь между двумя точками, и т. д. Этот факт записывался с помощью математической символики, сначала малосовершенной, затем все более специфической, все более четкой).

Изучая движение тел в жидкости, сопротивление которой считалось пропорциональным квадрату скорости, Ньютон решил одну из первых вариационных задач [2]. Это была задача о нахождении кривой линии, при вращении которой вокруг некоторой фиксированной оси образовывалась бы поверхность, испытывающая наименьшее сопротивление при движении тела в жидкости в направлении оси вращения. Академик А. Н. Крылов, сделавший не только прекрасный русский перевод «Начал» Ньютона, но и давший содержательные комментарии к трем книгам этого обширнейшего трактата, отмечал, что, по существу, Ньютон решил первую вариационную задачу

[2] *Кошляков Н. С.* Вариационное исчисление Эйлера.— В сб. статей к 150-летию со дня смерти Эйлера. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1935, с. 39.



Ж. Л. Лагранж

механики. Поскольку решения ее Ньютон не привел, А. Н. Крылов в развернутом подстрочном примечании дает предполагаемое решение задачи в духе времени Ньютона [3].

Одну из вариационных задач поставил И. Бернулли (1667—1748) — представитель семьи талантливых математиков и механиков. Это была задача о брахистохроне — кривой наискорейшего спуска тяжелой точки.

Бернулли объявил конкурс на тему о нахождении кривой, по которой несвободное падение тяжелой точки совершается за минимальное время.

На конкурс было подано три решения, принадлежащие Лопиталю, Я. Бернулли и Ньютону. Последнее решение было подано без подписи, но И. Бернулли, по его выражению, узнал в авторе Ньютона, как льва узнают

[3] См.: *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии.— Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1936, с. 430.

по его когтям. Позже Бернулли опубликовал и своё решение задачи о брахистохроне [4].

В геометрии к тому времени появились задачи об отыскании кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. Позже эти задачи составили широкий класс изопериметрических задач об отыскании такой кривой заданной длины, для которой некоторая величина, зависящая от вида кривой, достигает экстремума.

Двадцатилетний Л. Эйлер, ученик И. Бернулли, уже в 1730-х годах занимался исследованием и решением изопериметрических задач. Посвятив несколько работ решению вопросов подобного рода, Эйлер в 1744 г. опубликовал трактат, который в дальнейшем мы будем коротко называть «Метод...» [5]. В этом сочинении собраны все прежние результаты Эйлера, относящиеся к изопериметрическим задачам, и дан так называемый прямой метод нахождения кривых, обеспечивающих экстремум неопределенного интеграла некоторого вида.

Сущность метода Эйлера сводится к тому, что искомая кривая $y(x)$, обеспечивающая экстремум интеграла

$$I(x) = \int Z(x, y, y', y'', \ldots) dx,$$

сравнивается с другой кривой, полученной из первой изменением (как позже стали говорить, варьированием) ординаты y. Исследуя разность значений интегралов I для бесконечно близких кривых, Эйлер свел задачу об отыскании кривой $y(x)$, дающей экстремум интегралу I, к задаче отыскания экстремума функции многих переменных. Искомая кривая, как показал Эйлер, должна удовлетворять уравнению вида

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0,$$

где $N = Z'_y$; $P = Z'_{y'}$; $Q = Z'_{y''}$; ...

Таким методом Эйлеру удалось решить несколько конкретных задач механики и математического анализа. Этот

---

[4] *Бернулли И.* Избранные сочинения. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1936, с. 17—26.

[5] *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1934.

метод эффективен лишь в достаточно простых случаях, когда функция Z зависит только от одной функции $y(x)$, от ее производных и от аргумента. Эйлер понимал, что в более сложных случаях этот метод непригоден. Он решал задачи гидромеханики, механики гибких и упругих тел, опираясь на существенно переработанный им принцип наименьшего действия Мопертюи. При этом Эйлер искал способ усовершенствовать общий метод отыскания алгоритма, приводящего к записи условий экстремума интеграла для некоторой кривой $y(x)$, от которой зависит значение этого интеграла. Он подошел вплотную к отысканию такого алгоритма уже в середине XVIII в.[6]

В трактате «Метод...» Эйлер исходил из рассмотрения «дифференциального значения» интеграла I. Это было не что иное, как конечная разность значений этого интеграла для двух смежных значений всех переменных, от которых зависит подынтегральная функция Z (в простейшем случае зависящая от x, y и y'):

$$\int [Z(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p) - Z(x, y, p)]\, dx;$$

через p Эйлер обозначал производную функции y по аргументу x. Подынтегральное выражение, записанное под общим интегралом, Эйлер заменял суммой вида

$$Ndy+Pdp,$$

где

$$N=Z'_y;\ P=Z'_p.$$

Опираясь на теорему (доказательство которой было не очень строгим) об обращении в нуль «дифференциального значения» интеграла I на искомой кривой $y(x)$, Эйлер записывал равенство

$$Ndy+Pdp=0.$$

Для дальнейшего рассуждения Эйлеру необходимо было знать соотношения между dy и dp (в современной записи — соотношение между вариациями δy и δp), которое должно фигурировать в последнем уравнении. Эйлер угадал эту зависимость и записал ее в виде равенства

$$Pdp+pdP=0.$$

---

[6] См.: *Дорофеева А. В.* Развитие вариационного исчисления, как исчисления вариаций.— «Историко-матем. иссл.», вып. XIV. М., Физматгиз, 1961, с. 101—181.

Записанное без доказательства, это соотношение позволило Эйлеру вывести искомое условие экстремальности интеграла I на кривой $y(x)$. Сейчас его называют уравнением Эйлера

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

Но сам Эйлер не чувствовал полного удовлетворения от такого обоснования метода. По существу, здесь смешивались два вида «дифференциалов», разницу между которыми Эйлер понимал, но не всегда четко проводил.

12 августа 1755 г. он неожиданно получил письмо от 19-летнего туринца Жозефа Луи Лагранжа, который здесь же, в письме, заполнил основные пробелы в рассуждениях Эйлера.

Лагранж ввел различие двух видов «дифференциалов» более четко, закрепляя символ d для обозначения главной части изменения функции за счет изменения аргумента и предлагая новый символ δ для изменений, обусловленных переходом от одной кривой $y(x)$ к другой, сравнимой. Вместо того, чтобы угадывать соотношения между величинами δy и δdy, как делал это Эйлер, допуская смешение двух видов «дифференциалов», Лагранж вывел это соотношение, опираясь на свойство перестановочности символов d и δ (правда, не обосновав это свойство).

Итак, первый важный шаг Лагранжа в разработке нового исчисления — введение нового символа вариации (пока без названия) и утверждение свойства перестановочности двух операций дифференцирования и варьирования:

$$\delta dF(y) = d\delta F(y),$$
$$\delta d^2F(y) = d^2\delta F(y)$$

и т. д.

Второй важный шаг на том же пути — предложение проинтегрировать по частям то соотношение, которое на языке вариационного исчисления называют равенством нулю первой вариации интеграла I. Это равенство Лагранж считал необходимым условием экстремума интеграла по аналогии с обычным дифференциальным исчислением. Эту аналогию он неоднократно подчеркивал и использовал. Таким образом, были записаны следующие равенства:

$$\delta \int Z dx = 0 \quad \text{или} \quad \int \delta Z = 0,$$

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + \ldots,$$

где

$$N = Z'_y; \; P = Z'_{dy}; \; Q = Z'_{d^2 y} \ldots$$

Следовательно, $\int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^3 y + \ldots = 0.$

Интегрированием по частям получается:

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \ldots)\,\delta y +$$
$$+ (P - dQ + \ldots)\,\delta y + (Q - \ldots)\, d\delta y + \ldots = 0.$$

Поскольку все рассматриваемые кривые начинались и кончались в одних и тех же точках, то все члены вне интеграла Лагранж приравнивал нулю. Затем он приравнивал нулю подынтегральное выражение и приходил к уравнению Эйлера:

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R + \ldots = 0.$$

Эйлер был изумлен глубиной мысли туринского дебютанта. Разрабатывая основы вариационного исчисления, он оставил один существенный пробел, не доказав важное соотношение

$$Pdp + pdP = 0.$$

По этому поводу он сам высказывал неудовлетворенность: «Итак, необходим еще метод, свободный от геометрических приемов решения, который показал бы, что в таком способе разысканий максимума или минимума надо вместо Pdp писать—pdP» [7].

Деламбр об этом пишет: «Для того чтобы сделать более заметными мотивы, вызвавшие восхищение Эйлера, которое он засвидетельствовал с благородной откровенностью, было бы небесполезно обратиться к источникам различных исследований Лагранжа, на которые он указал нам за два дня до смерти. Первые попытки определения максимума и минимума всех видов неопределенных интегралов были сделаны в связи с кривой наибыстрей-

[7] *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых..., с. 116.

шего спуска и изопериметрами Бернулли. Эти исследования переработал Эйлер, дав общий метод в оригинальной работе, где всюду сверкает глубокое владение анализом. Но сколь бы гениальным ни был этот метод, он не имел все же той простоты, какую можно было бы желать в работе по чистому анализу. Автор и сам это понимал; он считал необходимым найти доказательство, независимое от Геометрии и от Анализа» [8].

Это и сделал Лагранж.

В письме к Эйлеру от 20 ноября 1755 г. Лагранж рассмотрел задачу о брахистохроне со скользящим концом, когда конечная точка экстремали оказывалась не фиксированной, а могла принадлежать некоторой линии, характер которой задавался граничными условиями.

Первый мемуар Лагранжа по вариационному исчислению «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегралов» [9] появился в «Туринских записках» в 1760—1761 гг. Во введении излагалась суть метода Эйлера и отмечались его недостатки. Далее Лагранж формулировал вариационную задачу об отыскании экстремума интеграла для некоторой кривой $y(x)$, от которой зависела подынтегральная функция Z. Решение излагалось почти в том же порядке, как в письмах к Эйлеру. Акцентировалось, что несмотря на различие двух категорий «дифференциалов», определенных различными символами d и δ, в самих операциях дифференцирования много общего, ибо они совершаются по одним и тем же правилам. Именно поэтому Лагранж не считал нужным обосновывать приравнивание нулю первой вариации интеграла $\delta I = 0$ для получения необходимого условия экстремальности интеграла вдоль искомой кривой $y(x)$. Существенное расширение области вариационного исчисления состояло в том, что Лагранж решал пространственные вариационные задачи.

Здесь же Лагранж рассматривает задачу об отыскании экстремума такого интеграла:

$$I = \iint f(x, y, z, z_x', z_y')\, dxdy.$$

---

[8] *Delambre J. B. J.* Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange.— Oeuvres de Lagrange, v. I. Paris, 1867, p. XVI.

[9] *Lagrange.* Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima...— Oeuvres, v. I, 1867, p. 335—362.

Требуется найти соотношение между x, y, z, при котором интеграл I имеет экстремум. Так впервые Лагранж ставит и исследует вопрос об экстремуме кратного интеграла.

Вторая статья Лагранжа была опубликована в том же томе и была ее продолжением. Называлась она «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре для решения различных задач динамики» [10]. Здесь Лагранж дает новую аналитическую форму принципа наименьшего действия. Он обобщает принцип в форме Эйлера на случай системы материальных точек и приводит «действие» к выражению

$$\delta \Sigma m_i \int\limits_A^B v_i ds_i = \delta \int\limits_{t_A}^{t_B} \Sigma m_i v_i^2 dt = \delta \int\limits_{t_A}^{t_B} 2T dt,$$

где v_i — скорости точек системы, m_i — их массы, T — кинетическая энергия системы, ds_i — элемент пути, dt — элемент времени. Тем самым круг задач механики, разрешимых с помощью принципа наименьшего действия, существенно расширяется.

Лагранж рассматривает задачу о движении тела под действием сил притяжения к нескольким неподвижным центрам, когда эти силы зависят от расстояния тела от центра. Затем он решает общую задачу о движении несжимаемой жидкости (называя ее неупругой) под действием некоторых сил. В качестве частного случая Лагранж рассматривает задачу о равновесии свободной жидкой массы, ранее поставленную Клеро, решает задачу о движении несжимаемой жидкости, ограниченной произвольными гладкими стенками. Затем следуют задачи о движении сжимаемой жидкости в поле произвольных сил и о движении нити.

При решении конкретных задач механики Лагранж снова рассматривает кратные интегралы, экстремумы которых определяются не для экстремальных кривых, а для поверхностей.

Эйлер сделал очень много для того, чтобы подчеркнуть существенные заслуги Лагранжа в создании новой отрасли математики — вариационного анализа. Дав молодому ученому возможность опубликовать свои достиже-

[10] *Lagrange*. Application de la méthode exposée... См. русский перевод в сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, с. 117—158.

ния, Эйлер задержал на несколько лет публикацию своих результатов в той же области, а когда опубликовал свой переработанный метод, изложив его, как и Лагранж, в аналитической форме, он снова указал во введении на заслуги Лагранжа: «После того, как я долго и бесплодно трудился над решением этого вопроса, я с удивлением увидел, что в «Туринских записках» задача эта решена столь же легко, как и счастливо. Это прекрасное открытие вызвало у меня тем большее восхищение, что оно значительно отличается от данных мною методов и значительно их превосходит по своей простоте» [11].

Действия Эйлера были весьма своевременны: мемуары Лагранжа вызывали сомнения и непонимание, о чем писали Фонтен и Борда. Несколько позже об этом же писал А. Крелль в примечаниях к немецкому переводу курса лекций Лагранжа «Лекции об исчислении функций».

Основные неясности возникали из-за утверждения Лагранжа, что функция $y(x)$, обеспечивающая экстремум интегралу I, изменяется по правилам обычного дифференцирования, хотя это изменение следует выделить особым символом δ вместо обычного d.

Эйлер ответил на все эти вопросы и сомнения, разъяснил сущность нового вариационного исчисления, дал ему название и разработал множество приложений метода.

«Исчисление вариаций,— писал Эйлер,— качественно новое, отличное от дифференциального исчисления...». И далее: «А кривые, бесконечно мало отличающиеся от искомой, удобнее всего рассматривать как получающиеся при увеличении или уменьшении ординат отдельных точек искомой кривой на бесконечно малые значения, т. е. при вариации ординат. Обыкновенно достаточно осуществить такую вариацию для одной-единственной ординаты, но ничто не мешает приписать такие вариации нескольким или всем ординатам, поскольку всегда должны прийти к одному и тому же решению. Но при этом не только в большей степени выявляется сила метода, но получаются также более полные решения вопросов такого рода...» [12].

Порядок оперирования вариациями очень близок к правилам дифференцирования; у них много общего, а са-

---

[11] Жозеф Луи Лагранж. Сб. статей к 200-летию со дня рождения Лагранжа. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1937, с. 2.

[12] *Эйлер Л.* Интегральное исчисление, т. III. М., Физматгиз, 1958, с. 313.

мая главная аналогия в том, что в обоих случаях к переменным прибавляются бесконечно малые приращения. Но нельзя забывать и существенную разницу между обоими исчислениями: «...когда речь идет о кривой, которая сравнивается с очень близкой к ней, то при помощи дифференциалов мы переходим от одной точки кривой к другим точкам той же кривой, в то время как, если перейти от этой кривой к другой, ей очень близкой и если этот переход является бесконечно малым, то он осуществляется при помощи вариаций...» [13].

Таким образом, Эйлер разъяснил непонятные утверждения «дифференциального исчисления» Лагранжа, оперирующего символом δ. Вариации величин — δy обозначают не что иное, как бесконечно малые приращения величин y за счет перехода от одной кривой к другой, бесконечно близкой.

Многое встало на свои места и в прежнем методе Эйлера: так называемое дифференциальное значение интеграла

$$\int Z(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p)\,dx - \int Z(x, y, p)\,dx$$

уступило место вариации интеграла.

Теперь разность подынтегральных функций записывалась по формуле Тейлора в виде

$$M\delta x + N\delta y + P\delta p,$$

где $M = Z'_x,\ N = Z'_y,\ P = Z'_p$.

Лагранж впервые рассмотрел классическую задачу о нахождении экстремума функционала при дополнительных условиях или ограничениях, налагаемых на экстремали [14]. Задача ставилась так: требуется найти экстремум интеграла

$$I = \int F(t, x, \dot{x})\,dt$$

в классе допустимых кривых $x(t)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0$$

[13] Там же, с. 313—314.

[14] См.: *Дорофеева А. В.* Развитие вариационного исчисления..., с. 121—122.

и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Лагранж наметил пути решения таких задач, не очень заботясь о доказательстве существования решения (как это было и в общих проблемах вариационного исчисления). Для решения задач на нахождение условного экстремума он ввел метод множителей, аналогичный тому, который использовался им для решения задачи об экстремуме в дифференциальном исчислении [15].

В задачах механики неопределенные множители Лагранжа приобретали конкретный физический смысл, о чем уже говорилось при разборе «Аналитической механики».

К началу XIX в. еще не был решен вопрос о том, как различать вид экстремума, как выяснить, достигает функционал максимума или минимума на кривой, найденной из уравнения Эйлера. Лагранж продолжил аналогию с дифференциальным исчислением и исследовал вторую вариацию функционала [16]. Лежандр и Лагранж наметили пути исследования достаточных условий максимума (или минимума) функционала, однако общего метода создать не смогли. Это сделал К. Якоби в 1837 г.

Подводя итог краткому обзору основных достижений методов вариационного исчисления, разработанных Лагранжем (его достижения неразрывно связаны с результатами других ученых этой эпохи и прежде всего с фундаментальными исследованиями Эйлера), следует отметить, что к концу XVIII в. вариационное исчисление сделалось самостоятельной математической дисциплиной, приняв довольно завершенную форму в рамках теории первой вариации. Объектом изучения пока еще был только слабый экстремум функционала (величины δy и $\delta y'$ молчаливо предполагались бесконечно малыми). В качестве экстремалей, в соответствии со сказанным, рассматривались гладкие кривые. Ценность нового исчисления подтверждалась разнообразными приложениями в геометрии и в механике.

Но даже в рамках такой «наивной» теории вариационного исчисления существовал ряд пробелов. Главным из них был недостаток обоснованности метода Эйлера—Лагранжа: «В вариационном исчислении уравнение Эйлера и условие трансверсальности принадлежат к так назы-

[15] См.: *Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, с. 122—146.
[16] См.: *Дорофеева А. В.* Развитие вариационного исчисления..., с. 144—147.

ваемым необходимым условиям. Они получены посредством точно таких же рассуждений, как в парадоксе Перрона: они подразумевают существование решения. Это основное предположение делается явно, а затем используется для отыскания решений, существование которых было постулировано. Для класса задач, в которых это предположение выполняется, такие рассуждения вполне правильны. Но что это за класс? Как выяснить, принадлежит ли частная задача этому классу? Так называемые необходимые условия не отвечают на подобные вопросы... Впервые метод Эйлера—Лагранжа был подвергнут критике Вейерштрассом почти сто лет спустя» [17].

Подобно математическому анализу в XVIII в., построенному по аналогии с основными алгебраическими операциями, вариационное исчисление в это же время строилось по аналогии с известными операциями анализа. Творцы этих мощных математических методов не успевали позаботиться о создании более прочного и основательного фундамента своего учения.

В наше время классическое вариационное исчисление легло в основу новейших математических методов теории оптимального управления: «Теперь видно, что задача Лагранжа по существу не отличается от задачи оптимального управления: просто последняя представляет собой более современную формулировку первой. Иногда указывают на небольшие видимые различия, но на самом деле они совсем несущественны» [18].

Теория аналитических функций

Со времени Ньютона до второй половины XVIII в. функции представляли степенными рядами, так как иначе оперировать с ними было трудно. Многие ученые считали, что любое аналитическое выражение можно разложить в степенной ряд. Лагранж наиболее четко выразил эту точку зрения в двух обширных сочинениях: «Теория аналитических функций (1797) и «Лекции об исчислении функций» (1801). Он считал аналитическими функциями

---

[17] *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., «Мир», 1974, с. 42.
[18] Там же, с. 320.

те, которые представимы степенными рядами, что не соответствует современному значению этого термина.

Ньютон применял разложение в ряды алгебраических функций, используя биномиальную формулу для целого, дробного и отрицательного показателя. Продолжали и развивали методы Ньютона разложения функций в ряды в первой половине XVIII в. Тейлор и Маклорен. Эйлер и Даламбер широко использовали разложимость функции в степенные ряды, придавая этому свойству большое значение. Но они не нашли договоренности о соотношении объемов классов аналитических и аналитически выразимых функций. Эйлер считал их равносильными: всякое аналитическое выражение можно представить в виде ряда. К этому мнению присоединилось большинство математиков XVIII в.

Именно так следует воспринимать название трактата Лагранжа «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или умаляющихся, пределов или флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных количеств» (далее это название приводится сокращенно).

Во «Введении» к трактату ставится следующая задача: «Целью этого труда является: дать теорию функций, рассматриваемых как первоначальные (примитивные) и производные; разрешить с помощью этой теории главные проблемы анализа, геометрии и механики, которые ставят их в зависимость от дифференциального исчисления; при этом дать решению этих проблем более строгие доказательства по сравнению с прежними» [19].

Такими словами заканчивается «Введение» к работе «Теория аналитических функций...», а начинается оно с определения понятия функции: «Функцией одного или нескольких количеств называют всякое вычислительное выражение, в которое эти количества входят каким-либо образом, совместно или раздельно, и которые рассматривают как значения задаваемые или независимые, в то время как количества функции могут получать все возможные значения» [20].

---

[19] *Lagrange*. Théorie des fonction analytiques.— «Journ. de l'Ec. pol.», 1797, cah. 9, t. III, p. 6.

[20] Там же, с. 1.

Для сравнения приведем другое определение функции той же эпохи. Младший коллега Лагранжа Лакруа, слушавший лекции по теории аналитических функций Лагранжа в 1810 г., так определял функцию: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или нескольких других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, знаем мы или не знаем, через какие операции нужно пройти, чтобы перейти от этих последних к первой» [21].

Близкая по смыслу, но более общая и более четкая формулировка Лакруа представляет собой дальнейшее развитие понятия функции, определенного Лагранжем.

Функцию одного переменного x Лагранж обозначает символом $f(x)$, через i он обозначает приращение аргумента x. После этого, ссылаясь на теорию рядов, Лагранж записывает для функции $f(x+i)$ разложение в степенной ряд по величине i:

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\dots$$

Лагранж пытается доказать априорно допускаемое его предшественниками предположение о том, что записанный ряд содержит только целые и положительные степени приращения аргумента i. Он указывает на те немногие известные ему случаи, когда для определенных значений x сама функция или ее производные (входящие в коэффициенты разложения) обращаются в бесконечность. Лагранж поясняет, что дифференциальное исчисление строится на исключении таких значений аргумента.

Итак, Лагранж, как и Эйлер, считает, что разложение функции в ряд по целым и дробным степеням всегда возможно. Далее оставалось изучить один вопрос: могут ли в разложении при неопределенных значениях x и i присутствовать дробные степени i.

По мнению Лагранжа, дробные степени i могут появиться лишь из-за присутствия радикала в выражении функции. Тогда и в правой части равенства появятся радикалы. Разложение будет представлено рядом

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+\dots+ui^{\frac{m}{n}}+\dots,$$

где каждое значение $f(x)$ комбинируется с каждым из n

[21] Цит. по кн.: *Рыбников К. А.* История математики. М., Изд-во МГУ, 1974, с. 207.

значений радикала $i^{\frac{m}{n}}$; таким образом, функция $f(x+i)$, разложенная в ряд, может иметь больше различных значений, чем неразложенная. Это Лагранж считает абсурдом.

«Это доказательство является общим и строгим,— пишет Лагранж,— так как x и i остаются неопределенными; однако это теряет силу, если для x задавать определенные значения; может случиться, что $f(x+i)$ содержит радикалы, которых не содержит для определенных значений fx» [22].

Таким образом, Лагранж дает обоснование факта разложимости функции в степенной ряд, базирующееся на исключении из рассмотрения особенных случаев, когда показатель степени приращения аргумента i отрицательный или дробный. Тем самым Лагранж ограничивается изучением свойств функций, разложимых в степенные ряды с целыми положительными показателями. Вейерштрасс в 1860-х годах подтвердил такую точку зрения на функции, за которыми долго сохранялось наименование аналитических. Правда, Вейерштрасс расширил класс аналитических функций, включив в него функции, разложимые в степенной ряд с учетом аналитического продолжения.

Главное значение того, что функции представимы степенным рядом, Лагранж видел в следующем. В конкретных задачах геометрии, механики и других прикладных областях знаний функцию с известной степенью точности можно заменить полиномом, объектом изучения алгебры. Лагранж сформулировал теорему, гласящую, что для всех достаточно малых значений приращения аргумента i каждый член разложения может быть сделан больше суммы последующих за ним слагаемых. Это еще не было доказательством сходимости степенного ряда, хотя некоторые математики XIX в. склонны были считать такое свойство ряда гарантией его сходимости.

Важным результатом, полученным Лагранжем в этой области, было введение в анализ специальной формулы для остаточного члена степенного ряда Тейлора и вывод теоремы о конечном приращении функции (или теоремы о среднем).

Одна из глав «Теории аналитических функций» Лаг-

[22] *Lagrange*. Théorie des fonction analytiques.— Op. cit., p. 9.

ранжа называется «Средство выражения остатков, начиная с некоторого предложенного члена». Там есть такая запись:

$$f(z+x)=f(z)+xf'(z+u),$$

$$f(z)+xf'(z)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(z+u),$$

$$f(z)+xf'(z)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(z)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(z+u).$$

Здесь роль аргумента играет z, роль его приращения — x. Остаточный член представлен в виде

$$R_{n-1}=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(z+u).$$

Буквой u Лагранж обозначает некоторую положительную величину, меньшую единицы, умноженную на приращение аргумента x[23]. Обозначим это произведение через $x\theta$, где θ — величина, заключенная между нулем и единицей. Тогда остаточный член в форме Лагранжа может быть записан в виде, привычном для нас:

$$R_{n-1}=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(z+x\theta),\qquad 0<\theta<1.$$

Если ограничиться в разложении членом первой степени по приращению аргумента x, то можно получить запись теоремы о среднем

$$f(z+x)-f(z)=xf'(z+x\theta),\qquad 0<\theta<1.$$

Эта теорема записана Лагранжем и в несколько другом виде (с помощью неравенств).

Оба эти результата играют исключительно важную роль в математическом анализе и его приложениях. С помощью теоремы о среднем можно, например, определять, какую погрешность функции дает неточное значение величины аргумента (при известных пределах погрешности). При обработке экспериментальных данных приближенные методы изучения поведения функций чрезвычайно важны.

Большое внимание в «Теории аналитических функций» уделяется исследованию исключительных случаев, когда разложение функции по положительным целым сте-

---

[23] См. там же, с. 54, 68.

пеням невозможно, а также приложению общей теории функций, названных Лангранжем аналитическими, к изучению свойств алгебраических, тригонометрических, показательных и некоторых других функций.

Вторая часть трактата посвящена приложениям теории функций к геометрии.

Третья часть называется «Приложение теории функций к механике». Здесь Лагранж, переходя от простого случая прямолинейного переменного движения точки к разнообразным типам криволинейного движения, планомерно развивает метод разложения функции в степенной ряд для составления уравнения движения. В научных исследованиях Лагранжа этот метод применялся весьма эффективно, особенно в задачах небесной механики. Так, для определения орбит планет, спутников и комет по трем наблюдениям Лагранж использовал разложение в ряд Тейлора гелиоцентрических координат тела, принимаемого за материальную точку. В разложение включались члены до второго порядка малости. Аналогичным методом Лагранж пользовался в теории возмущений (разлагал в степенной ряд пертурбационную функцию).

К. Маркс правильно оценил историческое место и значение этого трактата и наметил основные периоды в развитии обоснования математического анализа бесконечно малых, дифференциального исчисления — этого эффективнейшего аппарата новой математики [24].

Первый этап связан с эпохой зарождения дифференциального исчисления в виде теории флюксий Ньютона и теории дифференциалов Лейбница, когда в геометрии и механике некорректными рассуждениями достигались правильные, подчас изумительные результаты. Этот период развития анализа Маркс назвал мистическим, имея в виду неразработанность и кажущуюся таинственность операций дифференцирования функций.

Второй этап, кульминация которого совпадает с серединой XVIII в., характеризуется поисками путей рационализации основ математического анализа, а именно: попытками устранить пробелы, недостатки, некорректности. Наиболее ценных результатов в этом периоде развития дифференциального исчисления достигли Эйлер и

[24] См.: *Маркс К.* Математические рукописи. М., «Наука», 1968, с. 165—179.

Даламбер. Однако и теория нулей Эйлера, и теория пределов Даламбера страдали некоторыми недостатками, главным из которых была неалгоритмичность основных понятий и операций математического анализа.

В этой обстановке во второй половине XVIII в. возникла еще одна концепция обоснования анализа, которую К. Маркс назвал алгебраической. Главное стремление ученых этого направления — положить в основу математического анализа понятие производной, нахождение которой свести к определенным алгебраическим операциям. Труд Лагранжа «Теория аналитических функций» явился значительной вехой в развитии алгебраического дифференциального исчисления. Предмет своих исследований по теории аналитических функций Лагранж разъяснял следующим образом:

«Собственно говоря, алгебра есть не что иное, как теория функций. В арифметике числа ищут по данным условиям, наложенным на эти и другие числа, и найденные числа удовлетворяют этим условиям, не сохраняя никакого следа операций, служащих для их образования. Напротив, в алгебре искомые количества должны быть функциями данных количеств, то есть выражениями, представляющими различные операции, которые нужно произвести над этими количествами, чтобы получить значения искомых. В алгебре, в собственном смысле слова, рассматривают только первоначальные функции, происходящие из обычных алгебраических операций; это — первая ветвь теории функций. Во второй ветви рассматривают производные функции, и это ветвь, которую мы называем просто «Теория аналитических функций» и которая содержит все, относящееся к новым исчислениям» [25].

К. Маркс отмечал ряд недостатков и непоследовательностей в теории аналитических функций Лагранжа, в частности отсутствие четкого алгоритма нахождения производной тех или иных классов функций.

Важнейшим итогом развития математического анализа в XVIII в. (и в этом заслуги Лагранжа неоспоримы) была разработка теории степенных рядов как способа представления функций и для решения разнообразных задач геометрии, механики, астрономии и физики. В очер-

---

[25] Цит. по кн.: *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. М.— Л., Физматгиз, 1951, с. 45.

ке приводились многочисленные примеры использования этого аппарата в трудах Лагранжа по механике и астрономии. К набору приемов, созданных Ньютоном, Тейлором и Маклореном, Лагранж присоединил степенной ряд с остаточным членом специального вида. Теорема Лагранжа о среднем позволяет проводить важные исследования поведения функции в заданном интервале.

Даже без строгих критериев сходимости степенного ряда, представляющего аналитическую (по Лагранжу) функцию, метод разложения давал множество ценных результатов в небесной механике, гидромеханике, теории упругости и других областях.

Основные результаты Лагранжа в алгебре

«Поворотным пунктом в истории проблемы решения уравнений в радикалах явились исследования Лагранжа» [26].

Разработкой этой проблемы Лагранж занимался в Берлинской академии наук, результаты были изложены в мемуаре «Размышления об алгебраическом решении уравнений» (1770—1773). Лагранж проводит критический анализ всех существовавших ранее способов решения уравнений с первой степени по четвертую. При этом он стремится ответить на вопрос, почему ни один из этих способов не годится для решения уравнений пятой степени. Он надеется на этом пути наметить общие приемы решения уравнений любой натуральной степени и рассматривает уравнение с буквенными коэффициентами:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Он обращает внимание на то, что существующие способы решения сводятся к задаче нахождения среди всех рациональных функций от корней уравнения (1) таких, которые принимали бы при всевозможных перестановках корней k различных значений, причем k меньше, чем n — степень исходного уравнения.

Лагранж доказывает теорему: рациональная функция от корней уравнения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая k различных значений при всевозможных перестановках

[26] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. III. М., «Наука», 1972, с. 88.

корней, удовлетворяет уравнению степени k с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ исходного уравнения.

Схема доказательства, проводимого Лагранжем, такова. Если обозначить через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ различные k значений функции φ, то эти значения на области ее определения удовлетворяют уравнению вида

$$F(y) = (y-\varphi_1)(y-\varphi_2)\cdots(y-\varphi_k) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно записать в развернутом виде

$$y^k-(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k)y^{k-1}+\cdots+(-1)^k(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)=0. \qquad (2')$$

Коэффициенты уравнения (2′) при различных степенях переменного y являются симметрическими функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$[27]. А так как коэффициенты исходного уравнения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это элементарные симметрические функции от корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (с точностью до знака), то, учитывая свойства симметрических многочленов, можно сделать вывод, что коэффициенты уравнения (2′) рационально выражаются через коэффициенты уравнения (1). Это и доказывает теорему.

Таким образом, если $k<n$, то задача сводится к решению некоторого уравнения более низкой степени k; такое уравнение Лагранж называет разрешающим (réduite). Это уравнение послужило исходным пунктом исследований французского математика начала XIX в. Э. Галуа (впоследствии уравнение типа (2′) получило название резольвенты Галуа). Важнейшим положением теории Э. Галуа было четко сформулированное им понятие группы.

«Работы Галуа оказали очень большое влияние на дальнейшее развитие алгебры и привели, в частности, к созданию теории групп, основное содержание теории Га-

---

[27] Симметрическими называются функции, не изменяющие своих значений ни при каких перестановках аргументов. Элементарными симметрическими функциями n переменных называются многочлены вида

$$\sigma_1=z_1+z_2+\ldots+z_n;$$
$$\sigma_2=z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_{n-1}z_n;$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n=z_1z_2\ldots z_n.$$

луа составляет изучение коммутативных полей при помощи результатов и методов теории групп»[28].

Фактически понятия группы и подгруппы (без формального их определения) ввел Лагранж, рассматривая группу подстановок корней уравнения (1). Подстановки, на которых рациональная функция φ принимает одно и то же значение, образуют подгруппу. Таким образом Лагранж акцентирует внимание на выборе такой подгруппы из группы подстановок корней уравнения (1), у которой индекс был бы наименьшим. Индекс нужной подгруппы равен k — степени уравнения (2′).

Оставалось найти способ определения функции φ[29]. Лагранж эмпирически убедился, хотя и не сумел строго доказать, что при $n \geqslant 5$ нельзя построить рациональную функцию корней уравнения (1), которая принимала бы при всевозможных перестановках корней менее n различных значений, а следовательно, удовлетворяла бы уравнению более низкой степени, чем уравнение (1).

Лагранж указал способ решения уравнений, названных позже циклическими. Способ Лагранжа не потерял своего значения и в более поздней теории решения уравнений в радикалах.

К началу XIX в. все более укреплялось мнение ученых (и Лагранж был близок к такому утверждению), что буквенные уравнения пятой (и выше) степеней разрешить в радикалах невозможно. Математики стали исследовать наиболее общие выражения, содержащие радикалы, чтобы выяснить, могут ли они быть выражениями корней алгебраического уравнения пятой степени.

В 1799 г. П. Руффини дал первое доказательство невозможности разрешения в радикалах уравнения выше четвертой степени (правда, в его доказательстве было одно необоснованное допущение).

В 1824 г. Н. Абель более строго доказал невозможность решения в радикалах алгебраических уравнений пятой и выше степени. Окончательное исследование это-

---

[28] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1946, с. 250.

[29] Рациональные функции, не меняющие своего значения при подстановках одной и той же подгруппы относительно отдельных систем корней уравнения (1) и только при таких подстановках, Лагранж назвал «подобными». Функция φ является одной из подобных функций.

го вопроса было предпринято Л. Кронекером в 80-х годах XIX в.

«Метод исследования у Лагранжа гораздо более современный, чем даже в более поздних работах Руффини и Абеля. Галуа полностью воспринял этот метод, существенно дополнив его. Одним из главнейших дополнений Галуа является четко сформулированное понятие о группе» [30].

Другим чрезвычайно важным направлением развития алгебры, в котором труды Лагранжа также сыграли существенную роль, было доказательство основной теоремы алгебры. Впервые эта теорема была сформулирована в XVII в. А. Жираром и Р. Декартом. Они утверждали, что количество корней уравнения равно его степени, при этом некоторые корни могут быть мнимыми (imaginaires). В 1740-х годах Маклорен и Эйлер придали этой теореме современный смысл. «Всякое уравнение с действительными коэффициентами можно разложить в произведение множителей первой и второй степени с действительными коэффициентами — иными словами, уравнение n-й степени имеет n корней действительных, мнимых или комплексных» [31].

Первое доказательство основной теоремы алгебры было предложено Даламбером в 1746 г., но его подход к проблеме не был чисто алгебраическим[32].

Эйлер начал исследования проблемы о корнях алгебраического уравнения в те же 1740-е годы. Опираясь на свойства непрерывности многочленов и рассматривая их графики, он доказал три общие теоремы.

1. Всякое уравнение нечетной степени имеет либо один вещественный корень, либо нечетное число их.

2. Всякое уравнение четной степени либо имеет четное число вещественных корней, либо вовсе их не имеет.

3. Всякое уравнение четной степени с отрицательным свободным членом имеет, по крайней мере, два вещественных корня, при этом знаки их различны.

---

[30] *Чеботарев Н. Г.* О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре.— Указ. сб. статей, с. 95.

[31] *Башмакова И. Г.* О доказательстве основной теоремы алгебры.— «Историко-матем. иссл.», вып. X. М., Гостехтеоретиздат, 1957, с. 257.

[32] См.: *Петрова С. С.* О первом доказательстве основной теоремы алгебры.— «История и методология естеств. наук», вып. XI. М., Изд-во МГУ, 1971, с. 123—128.

Метод доказательства этих теорем не встречал серьезной критики до XIX в.

Затем Эйлер доказал, что многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители (с действительными коэффициентами) первой и второй степени. Эйлер уже знал и использовал многие важные свойства алгебраических уравнений, которые позже стали связывать с именем Лагранжа, так как последний дальше продвинулся в этих исследованиях.

Один из членов туринского кружка математиков, группировавшихся вокруг молодого Лагранжа,— Фонсене — обратил внимание на некоторые неточности в рассуждениях Эйлера, обусловленные уровнем развития алгебры в первой половине XVIII в. Фонсене предложил свое доказательство основной теоремы алгебры, но оно тоже не было строгим.

В 1772 г. Лагранж, сохранив основную идею доказательства Эйлера, постарался восполнить пробелы его рассуждений. При этом он опирался на результаты своей работы «Размышления об алгебраическом решении уравнений», где развивается теория «подобных» функций. В работе 1772 г., называвшейся «О виде воображаемых корней уравнения», Лагранж проводит доказательство основной теоремы алгебры, во многих звеньях рассуждений следуя по пути, намеченному Эйлером. В основу доказательства положен тот факт, что всякое уравнение нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень. Далее усилия Лагранжа направлены на то, чтобы разложить левую часть уравнения четной степени на многочлены более низких степеней.

Вопрос сводится к исследованию уравнения степени 2^r. Лагранж утверждает, что для коэффициентов его делителей степени 2^{r-1} получаются биквадратные уравнения. Затем он проводит более детальный анализ и показывает, что этим путем можно решить любое уравнение. Большой заслугой Лагранжа является строгое доказательство (на основе учения о «подобных» функциях) возможности редукции, сводящей нахождение корня уравнений степени 2^r к нахождению корня уравнения степени 2^{r-1}.

Гаусс указал на необоснованность в рассуждениях Эйлера, Лагранжа и их последователей. Фактически постулировалось предположение о самом факте существо-

К. Гаусс

вания корней уравнения. Во втором доказательстве основной теоремы алгебры в 1815—1816 гг. Гаусс без такого предположения построил рассуждения по тому же способу, по которому действовал Эйлер, а затем Лагранж.

Другие интересные работы Лагранжа по алгебре касаются методов приближенного вычисления корней алгебраического уравнения, метода отделения корней такого уравнения, способа построения результанта для системы уравнений и метода разложения корней буквенных уравнений в ряды.

Ценные результаты встречаются не только в основных работах Лагранжа, но и в других сочинениях, например в «Приложении к элементам алгебры Эйлера», которое Лагранж сам перевел на французский язык. Он дал систематическое изложение теории непрерывных дробей, разработав разнообразные приложения этой теории к алгебре и арифметике. Кроме того, Лагранж написал ряд интересных статей, стоящих на грани теории чисел и алгебры, например он провел разработку теории диофантовых приближений.

В целом алгебраические работы Лагранжа содержат много конкретных результатов, дающих алгоритмы решения буквенных и числовых уравнений. Из общетеоретических исследований Лагранжа по алгебре наибольшее значение имеют работы, подготовившие аппарат теории Галуа. В этих исследованиях Лагранж развил глубокие методы алгебры, которые в дальнейшем легли в основу теории групп и полей.

Основные результаты по теории чисел

Наиболее значительная работа Лагранжа в теории чисел — решение одной из проблем, поставленных еще Диофантом: о квадратных неопределенных уравнениях с двумя неизвестными.

В мемуаре «О решении проблем неопределенных (уравнений) второй степени» Лагранж исследует решение квадратного уравнения с рациональными корнями вида

$$\alpha x^2+\beta yx+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0. \qquad (1)$$

Разрешая уравнение относительно переменного x, Лагранж записывает:

$$2\alpha x+\beta y+\delta=\sqrt{(\beta y+\delta)^2-4\alpha(\gamma y^2+\varepsilon y+\zeta)}.$$

Следующий шаг — приведение подкоренного выражения к полному квадрату. Это действие можно записать в виде следующего равенства:

$$By^2+2fy+g=t^2.$$

Отсюда

$$By+f=\sqrt{Bt^2+f^2-Bg}.$$

Новое подкоренное выражение приравнивается квадрату некоторой величины

$$A+Bt^2=u^2, \qquad (2)$$

где A и B — рациональные числа. Если A или B представляют собой полный квадрат, то проблема упрощается. Так, если, например, B — полный квадрат, уравнение (2) имеет простое решение:

$$t=\frac{A-z^2}{2bz},$$

где $u=bt+z$, $B=b^2$.

В общем случае исследование вопроса о решении уравнения (2) в рациональных числах опирается на теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы уравнение

$$Ar^2=s^2-Bq^2$$

допускало решение в целых рациональных числах. Это условие может быть записано в виде равенства

$$(B/p)=+1$$

для всякого простого числа p, входящего в выражение A в нечетной степени.

Основываясь на теореме Лагранжа, Лежандр в начале XIX в. сделал первую попытку доказать закон взаимности.

Указав алгоритм для нахождения решений неопределенного уравнения (1) в рациональных числах, Лагранж ставит перед собой задачу: найти решение этого уравнения в целых числах.

Лагранж исследует уравнение $A+Bt^2=u^2$ в двух случаях: 1) коэффициент B отрицательный, 2) коэффициент B положительный.

Лагранж доказывает, что в первом случае число решений ограничено. Для второго случая ($B>0$) Лагранж использует теорию непрерывных дробей и сводит проблему к решению уравнения

$$u^2-Bt^2=\pm 1.$$

Это уравнение, называемое уравнением Пелля, было подробно исследовано Эйлером. Лагранж доказал периодичность разложений квадратных иррациональностей в непрерывные дроби и как окончательный результат высказал утверждение: чтобы решение уравнения (1) являлось целым числом, недостаточно, чтобы соответствующее решение уравнения (2) было целым. Далее Лагранж указал достаточные условия существования целых решений уравнения (1).

Вторая работа Лагранжа по теории неопределенных уравнений была опубликована в 1770 г. В ней выясняются условия, при выполнении которых уравнение вида

$$A=Bt^n+Ct^{n-1}u+Dt^{n-2}u^2+\ldots+Ku^n$$

имеет целые решения. Таким образом, Лагранж сделал первые шаги в разрешении неопределенных уравнений высших порядков.

Третья работа Лагранжа (1773—1775) содержала формулировку и доказательство теоремы о представимости числа некоторой формой

$$Bt^2+Ctu+Du^2. \qquad (t, u)=1.$$

В современной теории чисел эту теорему интерпретируют так: представимость числа A формой указанного вида выражается в том, что A есть делитель нормы некоторой квадратной иррациональности, зависящей от $\sqrt{-K}$, где

$$K=4BD-C^2.$$

В той же работе Лагранж разрабатывает приложение теории делителей квадратичных форм к разложению чисел на множители. Позже П. Л. Чебышев усовершенствовал этот метод Лагранжа в сочинении «Теория сравнений» (1849 г.), удостоенном Демидовской премии.

Еще Ферма и Эйлер исследовали вопрос о представимости натурального числа суммой четырех или менее квадратов. Окончательное решение этого вопроса дал Лагранж в 1770 г. Он воспользовался теоремой Эйлера о том, что всякий делитель суммы двух взаимно простых квадратов может быть представлен как сумма простых квадратов. Лагранж доказал, что, если произведение Aa представимо суммой четырех квадратов, где A — простое число и $A>a$, то и A представимо суммой четырех квадратов.

Позже Серре упростил важные элементы этой теории Лагранжа.

Еще один интересный результат, полученный Лагранжем в теории чисел,— доказательство теоремы Вильсона. В этой теореме (о ней впервые упоминается в работе Э. Варинга), утверждается, что число $[1\cdot2\cdot3...(n-1)]+1$ делится на n, если n — простое число. Доказательство Лагранжа этой теоремы основано на свойствах коэффициентов разложения полинома

$$(x+1)(x+2)(x+3)...(x+n-1)$$

по степеням x. Затем следуют три примечания к доказательству. В одном из них разъясняется значение теоремы Вильсона как критерия, дающего возможность различать простые и составные числа (практически этот критерий мало используется из-за трудоемких вычислений). Во втором замечании Лагранж дает другое, более простое доказательство теоремы Вильсона, основанное на применении теоремы Ферма. Сейчас теорема Вильсона и ее следствия широко используются в теории чисел.

* * *

Новое исчисление — математический анализ, открытый Ньютоном и Лейбницем, с самого начала XVIII в. получил широкое распространение: ученые быстро освоили приемы дифференцирования и интегрирования, используя их для различных приложений. Многочисленные и разнообразные задачи механики, астрономии, физики решены в трудах тех ученых, которых чаще всего называют математиками. Они получили ключ к решению труднейших и ранее недоступных проблем. Быстрота развития прикладных математических методов не соответствовала глубине разработки логических основ математического анализа. Математики не заботились о строгом обосновании вновь возникавших и развивавшихся подходов в дифференциальном и интегральном исчислении. Справедливость этих методов и всех операций нового исчисления оправдывалась практическими применениями.

«Однако этот могучий арсенал приемов нес в своих основах неразрешенное противоречие между практическими успехами и логической несообразностью приемов оперирования с бесконечно малыми величинами и особенно необоснованностью отбрасывания их. Этому противоречию суждено было в скором будущем проявиться, и притом в резкой форме» [33].

Таково было главное направление развития математики в XVIII в. Однако при всей важности и широте проблематики математического анализа она не исчерпывала актуальных направлений развития математики в целом.

Алгебра уже выходила за рамки вычислительной дисциплины, главной целью которой было отыскание алго-

---

[33] *Рыбников К. А.* История математики. М., Изд-во МГУ, 1974, с. 190.

ритмов для решения уравнений, где левая часть выражается многочленом. Кроме решения уравнений в радикалах (до четвертой степени включительно), важной проблемой алгебры была разработка общей теории алгебраических уравнений и элементов теории определителей. Задача решения таких уравнений тесно переплеталась с задачей их разрешимости в радикалах. Так определилось важное направление развития математической мысли.

В XVIII в. зародились новые математические дисциплины: вариационное исчисление — эффективный аппарат механики и теоретической физики; теория дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных); теория вероятностей, теория функций и др.

На стыке всех этих путей развития математики стоят имена выдающихся ученых, чрезвычайно много сделавших для становления и прогресса новых математических дисциплин,— Эйлера, Даламбера, Лагранжа. И если индивидуальные особенности дарования, характер и творчество каждого из них не одинаковы по масштабам, по научному стилю, то их взаимное влияние друг на друга, объединение общих усилий на центральных проблемах эпохи позволяет поставить эти три имени в один ряд.

Эти три «геометра» с полным правом считаются классиками не только математики, но и механики, теоретической физики и астрономии.

Заключение

Научная революция XVI—XVII вв., начавшаяся с развития небесной и земной механики, быстро распространилась и на другие отрасли естествознания. Наиболее родственная механике наука — математика — за короткий срок испытала ощутимые качественные изменения. Инфинитезимальные подходы к принципам виртуальных скоростей, оперирование скоростями вместо возможных перемещений, необходимость находить зависимость ускорения от параметров траектории и закона движения — все это привело к интенсивной разработке качественно нового математического аппарата точного естествознания. В трудах по механике вырабатываются операции дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальной геометрии.

Передовые и наиболее глубоко мыслящие ученые XVIII в.— века Просвещения — стояли перед задачей систематизации огромного количества решенных ранее конкретных задач, осмысливания новых методов механики и математики. Лагранж был одним из тех, кто осознал грандиозность этих задач. Манера Лагранжа глубоко изучать историю проблемы помогала ему увидеть перспективы развития данной области науки.

Наибольшего успеха он достиг в решении фундаментальной проблемы построения единообразного алгоритмического аппарата механики, позволяющего стандартными методами решать самые разнообразные задачи статики, динамики точки, динамики твердого тела, механической системы, гидромеханики, теории упругости.

Еще Даламбер ставил перед собой цель изыскать способ решения всех задач динамики «одним и притом простым и прямым методом» [1].

[1] *Даламбер*. Динамика. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1950, с. 33.

Памятник Лагранжу в Турине

Поиск такого изложения механики, при котором число принципов было бы наименьшим, а сами принципы были бы наиболее общими и плодотворными, характерен для всех выдающихся механиков XVIII в. Наиболее совершенную систему изложения механики разработал Лагранж.

Несмотря на большие заслуги Лагранжа в развитии различных областей математики, упоминания о нем в основном связаны с заслугами в механике. О. Коши, разбирая теорию функций Лагранжа, писал: «Я знаю, что знаменитый автор «Аналитической механики» взял формулу, о которой идет речь (формулу Тейлора.— *И. Т.*), в качестве основы своей теории производных функций. Но несмотря на все почтение, внушаемое таким большим авторитетом, большая часть геометров согласно признает теперь недостоверность результатов, к которым можно прийти, употребляя расходящиеся ряды...» [2]

Большая и заслуженная слава Лагранжа определяется его достижениями в области земной и небесной механики, разработкой эффективного математического аппарата, применимого ко многим областям физики, созданием трактата «Аналитическая механика».

Однако и механики часто делают серьезные упреки в адрес систематизирующей деятельности Лагранжа. Вот, например, мнение американского механика К. Трусделла об аналитических методах механики Лагранжа: «В конце столетия существовала удручающая тенденция отворачиваться от основных проблем как в механике, так и в чистом анализе. Вопреки великой традиции Якова Бернулли и Эйлера, этот формализм быстро укреплялся во французской школе и нашел отображение в «Аналитической механике». Многое в неверных суждениях историков и физиков о работах XVIII в. вызвано нежеланием, помимо «Аналитической механики», обратиться к великим творениям Эйлера и Бернулли, остающимся неупомянутыми. Как следует из ее названия, «Аналитическая механика» не трактат по теоретической механике, а скорее монография об одном методе вывода дифференциальных уравнений движения...» [3].

---

[2] Цит. по кн.: *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. М.— Л., Физматгиз, 1951, с. 62.

[3] Цит. по кн.: *Погребысский И. Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. М., «Наука», 1966, с. 77.

Труселл точно подметил основное отличие научных методов Эйлера от методов Лагранжа. Трактаты и мемуары Ньютона, Эйлера, Бернулли наполнены поиском новых фактов, они черпают их у самой природы, их анализ характеризуется глубоко понятийным подходом к явлению; они получают чрезвычайно важные элементы для создания общей теории движения и равновесия тел и сред: понятие массы, силы, давления, потенциала сил и т. д.

Лагранж, унаследовав все это богатство, принял его без пересмотра, он даже не всегда им достаточно хорошо пользовался: понятие массы он не упоминает, при формулировке понятия силы делает шаг назад по сравнению с Эйлером и Ньютоном.

Но историческая миссия Лагранжа отличается от миссии «первопроходцев» — Ньютона, Эйлера, Даламбера, Клеро, Бернулли и др. Хотя многие из названных ученых были современниками, они творили на разных исторических этапах развития механики.

В. И. Ленин ярко очертил три основных витка, или этапа, диалектического пути познания истины (объективной реальности). Он коротко и ясно охарактеризовал этот путь словами: от живого созерцания — к абстрактной теории и от нее — к практике.

Познание объекта начинается активным живым созерцанием, т. е. построением модели явления, постулированием некоторых главных для данной науки черт. Ньютон, Эйлер, Бернулли, Даламбер, желали они того или нет, значительную дань отдали именно этой задаче — построению абстрактной модели тела, среды, модели взаимодействия тел и сред.

Середина и конец XVIII столетия — эпоха Лагранжа — совпадает с началом нового этапа в развитии механики: набор главных абстрактных моделей был достаточно полным, основные законы взаимодействия материальных тел были сформулированы и записаны аналитически. Обилие фактического материала, частных закономерностей настоятельно нуждалось в обобщающей теоретической осмысливающей работе. Лагранж по своим индивидуальным возможностям и склонностям был именно тем, кто мог сказать в этом отношении решающее слово. Не останавливаясь на деталях (для него это было второстепенным), на шлифовке основных понятий механики, он чутко уловил основной запрос времени (недаром он предпринял глубокий исторический анализ подходов к проблемам механики). Он выявил доминирующую тенденцию и перспективу развития этой науки. Самой актуальной оказалась проблема построения динамики системы.

Мы уже видели, сколь удачно закончился поиск Лагранжа в этом направлении: именно он реализовал многолетнюю мечту ведущих ученых века Просвещения. Он сумел все многообразие механических явлений облечь в единую формулу. Уже это одно могло бы увековечить имя Лагранжа. Но он не остановился на этом открытии: первый вывел общие теоремы динамики — об изменении суммарного количества движения (или о движении центра масс системы), об изменении момента количества движения системы и об изменении кинетической энергии системы. Он вывел законы сохранения этих характеристик при известных условиях. Эйлер применял некоторые из этих положений. Вслед за ним Даламбер пытался придать всеобщность положению о сохранении живых сил. Однако три важнейших составных части современной динамики — три ее общих теоремы с указанием условий, когда каждая из теорем наиболее просто применяется,— принадлежат Лагранжу. Это первый этап его систематизирующей, упорядочивающей работы.

Но и этого мало. Лагранж приходит к формулировке нового для механической системы вариационного принципа механики — принципа наименьшего действия, который Эйлер использовал для рассмотрения нескольких частных случаев движения свободной материальной точки.

Подчеркивая большую широту и общность принципа наименьшего действия, его значение даже за рамками механики, венгерский ученый К. Ланцош пишет: «В то время как ньютоновы уравнения не удовлетворяют принципу относительности, принцип наименьшего действия остается справедливым, с тем лишь дополнением, что основная величина «действия» должна быть приведена в соответствие с требованием инвариантности» [4].

В результате систематизирующей работы Лагранж

---

[4] *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965, с. 23.

нашел новый подход к проблеме построения механики. Он вывел различные формы дифференциальных уравнений движения механической системы, гибко видоизменяя их и приспосабливая к различным классам динамических задач: для нахождения уравнений движения наилучшими были так называемые уравнения Лагранжа второго рода, тогда как для нахождения реакций связей и уравнений движения — уравнения первого рода. В последних важную роль играют множители λ, μ, ν, ..., принимающие в различных задачах разный физический смысл: натяжений нитей, реакций опор, давления жидкости и т. д.

Однако и этим не оканчиваются поиски и находки Лагранжа. Настойчивый поиск эффективных методов интегрирования дифференциальных уравнений движения тоже увенчался успехом — был разработан метод вариации произвольных постоянных. Лагранж видел далекие перспективы нового метода. Он применил его для приближенного интегрирования уравнений движения. В середине XIX в. метод вариации произвольных постоянных был применен для нового вывода некоторых интегралов: живых сил, центра тяжести системы, площадей. Метод вариации произвольных постоянных (в частности, скобки Пуассона, представляющие видоизменение скобок Лагранжа) эффективно используется в теории касательных преобразований и в теории уравнений в вариациях.

Достаточно широк круг и конкретных физических проблем, в разработке которых Лагранж достиг немалых успехов: теория малых колебаний и устойчивости невозмущенного состояния (в первом приближении), теория вращения твердого тела, небесная механика. При решении названных задач Лагранж никак не был формалистом или просто систематизатором ранее известных фактов. Поэтому оценка его деятельности в области механики Трусделлом ограничена и лишена объективности.

Гораздо раньше Трусделла русский ученый А. Н. Крылов отметил недостатки механики Лагранжа, указав их ясно и конкретно, но при этом дал и весьма высокую общую оценку механике Лагранжа: «... могло бы представиться, что изучение «Аналитической механики» для практика, для техника, для инженера бесполезно, между тем это есть первоисточник всех современных руководств (им же несть числа) теоретической механики, и изучение такого первоисточника в высшей степени поучительно и полезно, только в нем надо поучаться математике и общим методам решения механических вопросов, а не искать частных их приложений к технике и физике»[5].

Дав подробный анализ промахов и достижений Лагранжа, А. Н. Крылов заключает: «Таких примеров из техники и физики можно привести неисчислимое множество, но и сказанного достаточно, чтобы видеть то значение, которое имеет знаменитое сочинение Лагранжа в общем развитии науки и техники во всех их областях, и насколько Лагранж был прав, что, не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волнении, и к расчету гребного вала на корабле, к расчету полета 16-дюймового снаряда и к расчету движения электронов в атоме»[6].

Успехи точных наук в XX в. все более подтверждают правильность такой оценки творчества Лагранжа. Большинство новейших методов дифференциальной геометрии, вариационного исчисления и теории оптимального управления, аналитической динамики основаны на идеях Лагранжа. Известная монография Дж. Лича «Классическая механика» посвящена анализу выхода аппарата аналитической механики за рамки классической механики в область квантовой механики, статистической физики и теории поля. В ней говорится:

«Наиболее замечательные результаты применения методов Лагранжа и Гамильтона к непрерывным средам получаются при изучении идеализированных сред, называемых полями. Еще одной особенностью, которая может быть здесь отмечена, является релятивистская инвариантность. Оказалось, однако, что изложенную здесь теорию можно принять, в сущности, без изменений»[7].

---

[5] *Крылов А. Н.* Жозеф Луи Лагранж.— Указ. сб. статей, с. 9.
[6] Там же, с. 16.
[7] *Лич Дж. У.* Классическая механика. М., ИЛ, 1961, с. 135.

Основные даты жизни и творчества Ж. Л. Лагранжа

1736 25 января	в Турине в семье казначея родился Жозеф Луи Лагранж.
1750	Лагранж поступил в Туринский университет.
1755	преподаватель Туринской артиллерийской школы.
1756	избран иностранным членом Берлинской академии наук.
1759	выход в свет первого тома «Записок Туринской академии наук», где напечатано исследование Лагранжа.
1764	первая премия Парижской академии наук за исследование о либрации Луны
1766—1787	президент Берлинской академии наук.
1772	избран почетным иностранным членом Парижской академии наук
1776	избран почетным иностранным членом Петербургской академии наук.
1787	переезд в Париж, избран действительным членом Парижской академии наук.
1788	выход в свет трактата «Аналитическая механика».
1793	декрет Конвента о выезде иностранцев из Франции с оговоркой об исключении для Лагранжа, как мобилизованного для обороны республики.
1790, май	начало участия в работе Комиссии мер и весов.
1795	основание парижской Политехнической школы (Лагранж— в числе основных ее преподавателей).
1795	создание Института Франции вместо упраздненной Академии наук (Лагранж возглавляет класс физико-математических наук).
1797	выход в свет «Теории аналитических функций».
1811	выход в свет первого тома «Аналитической механики» (2-е изд).
1813, 10 апреля	смерть Лагранжа.

Краткая библиография

Араго Ф. Биография знаменитых астрономов, физиков и геометров, т. I—III. М., 1859—1861.

Бобылев Д. К. О начале Гамильтона или Остроградского и начале наименьшего действия Лагранжа. СПб., 1889.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963.

Вавилов С. И. Исаак Ньютон. М., Изд-во АН СССР, 1961.

Вариационные принципы механики. Сб. статей под ред. Л. С. Полака. М., Физматгиз, 1959.

Галуа Э. Сочинения. М.— Л., Гостехиздат, 1936.

Григорьян А. Т. Механика от античности до наших дней. М., «Наука», 1971.

Дорфман Я. Г. Лавуазье. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.

Жозеф Луи Лагранж. Сборник статей к 200-летию со дня рождения Лагранжа. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1937.

История математики, т. III (Математика XVIII столетия). Под ред. А. П. Юшкевича. М., «Наука», 1972.

История механики от древнейших времен до XVIII в. М., «Наука», 1971.

История механики от XVIII в. до середины XX в. М., «Наука», 1972.

Кирпичев В. Л. Беседы о механике. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1933.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1937.

Космодемьянский А. А. Очерки по истории механики. М., «Просвещение», 1964.

Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.

Лич Дж. У. Классическая механика. Под ред. Л. Н. Сретенского. М., ИЛ, 1961.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкостей и газов. М., Физматгиз, 1959.

Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. М.— Л., Физматгиз, 1951.

Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1949.

Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. М., Изд-во МГУ, 1961.

Погребысский И. Б. От Лагранжа к Эйнштейну. М., «Наука», 1966.

Проблемы Гильберта. Сб. под ред. П. С. Александрова. М., Физматгиз, 1969.

Рыбников К. А. История математики. М., Изд-во МГУ, 1960; 2-й т. — 1963; 2-е изд.— 1974.

Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.

Старосельская-Никитина О. А. Очерки по истории науки и техники в период Французской буржуазной революции. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1946.

Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. М., Гостехтеоретиздат, 1957.

Тимченко И. Ю. Основания теории аналитических функций, ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Одесса, 1899.

Уэвель В. История дедуктивных наук, т. I—III. М., 1867—1869.

Фигье Л. Светила науки, т. I—III. М., 1869—1873.

Французская буржуазная революция 1789—1794. Под ред. В. П. Волгина и Е. В. Тарле. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1941.

Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1934.

Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., «Мир», 1974.

Briano G. J. L. Lagrange (nella Collezione I contemporanei Italiani). Torino, 1942.

Delambre J. B. J. Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange.— Ouevres de Lagrange, v. I. Paris, 1867, p. I—LI.

Forti A. Intorno alla vita e alle opera di Luiji Lagrange. Roma, 1869.

Hamel G. Über ein Prinzip der Befreiung bei Lagrange.— «Jahresbericht der D.M.V.», 1916, 25, S. 60—65.

Harnack A.— «Geschichte der Königl. Preussischen Acad. der Wissenschaft. zu Berlin», 1900, Bd. 2, S. 314—321.

Julia G. La vie et l'oeuvre de J. L. Lagrange.— «Einseignement mathematique», Géneve, 1950, p. 9—21.

Lagrange J. L. Oeuvres, t. I—XIV. Paris, 1867—1892.

Lorey W. J. L. Lagrange.— «Journ. für die reine und angew. Mathematik», 1936, Bd. 175, H. 4, S. 224—239.

Loria G. Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange.— «Isis», 1938, 28, N 77, p. 366—375.

Marie M. Histoire de sciences mathematique, et phisique, t. 9.
De Lagrange et Laplace. Paris, 1886, p. 148—243.

Mayer A. Die Lagrangesche Multiplikatoren methode und das allgemeinste Problem der Varionsrechnung bei einem unabhängischen Variablen. Berlin, 1895.

Nielsen N. Géomètres francais sous la révolution. Copenhagen, 1929, p. 136—152.

Vacca G. Sui primi anni di Guiseppe Luiji Lagrange.— «Bolletino di bib. storia della scien. mathem.», 1901, t. IV.

Указатель имен

Содержание

Ирина Александровна Тюлина

Жозеф Луи Лагранж

Утверждено к печати
редколлегией научно-биографической серии
Академии наук СССР

Редактор *Н. А. Минц*
Художественный редактор *И. К. Капралова*
Технический редактор *Ф. М. Хенох*
Корректоры *И. Р. Бурт-Ящина, С. А. Владимирова*

Сдано в набор 7/I-1977 г.
Подписано к печати 28/IV-1977 г.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$
Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 11,76 Уч.-изд. л. 11,7
Тираж 18 500 Т-03295 Тип. зак. 1802
Цена 70 коп.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

70 коп.