АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

П. Я. Кочина

Карл ВЕЙЕРШТРАСС

1815—1897

Ответственные редакторы
А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, Е. М. ПОЛИЩУК

МОСКВА
«НАУКА»
1985

ББК 22.1
К 75
УДК 75 К. Вейерштрасс

Рецензенты:
доктора физико-математических наук
А. П. ЮШКЕВИЧ, Е. П. ОЖИГОВА

Кочина П. Я.

К 75 Карл Вейерштрасс: 1815—1897. — М.: Наука, 1985. — 272 с., ил. — (Научно-биографическая литература).

Карл Вейерштрасс был одним из крупнейших математиков XIX века, оставившим глубокий след в науке. Его именем названы многие теоремы математического анализа, вариационного исчисления, линейной алгебры. Он был профессором Берлинского университета, и его лекции пользовались огромным успехом, привлекая математиков из разных стран. О Вейерштрассе говорили, что он приучил математиков к математической строгости. Для нас Вейерштрасс дорог еще тем, что он помог нашей соотечественнице С. В. Ковалевской выйти на пионерскую по тем временам дорогу женщины-ученой и профессора высшей школы, открывая новый путь женщинам.

К $\frac{1702050000\text{-}510}{054\,(02)\text{-}85}$ 36-85-НП ББК 22.1

Предисловие

Вейерштрасс принадлежал к титанам мысли. Его имя знакомо всем, кто занимается теорией функций комплексного переменного, ему принадлежит логическое обоснование математического анализа, основанное на глубоком проникновении в сущность понятия функции и на конструктивном подходе к этому понятию; вместе с Коши и Риманом он является одним из главных творцов теории аналитических функций. Особое место в его творчестве занимают эллиптические и абелевы функции. Последние захватили его в молодости, и он остался верен им до конца жизни, поставив целью усовершенствование и полное развитие их теории.

Всякому, кто прослушал университетский курс математики, приходят на память: теорема Больцано-Вейерштрасса, эллиптические функции Вейерштрасса; применение рядов в теории аналитических функций (в частности, в 1841 г. 26-летний Вейерштрасс установил теорему, совпадающую с той, которую через два года опубликовал Лоран); теория аналитического продолжения; пример непрерывной функции, нигде не имеющей производной; в вариационном исчислении — исследование достаточных условий экстремума интеграла; в дифференциальной геометрии — теоремы о геодезических линиях и формулы параметрического задания минимальных поверхностей, в алгебре — теория элементарных делителей.

О Вейерштрассе по сравнению с другими математиками написано много. В своей большой статье «Первые 40 лет жизни Вейерштрасса» Г. Миттаг-Леффлер [109] старался осветить первые 40 лет жизни великого ученого, а также посвятил ему ряд других статей. Много сведений дает его статья «Вейерштрасс и Соня Ковалевская» [110], а также книга «Письма К. Вейерштрасса к С. Ковалевской» [124].

После смерти Вейерштрасса, в связи с его памятными датами, многие немецкие ученые освещали разные стороны жизни и деятельности великого ученого и замечательного человека. В особенности следует отметить сборник, посвященный 150-летию Вейерштрасса, изданный в Кельне и Опладене [88]. В нем опубликованы выступления ряда ученых, дающие биографические сведения о Вейерштрассе, излагается содержание его лекций и работ, а также приведены дальнейшие исследования в развитие его идей.

Очень ценные сведения дает книга К.-Р. Бирмана «Математика и ее преподаватели в Берлинском университете (1810—1920)» [81], а также ряд его статей.

Другими математиками, особенно А. И. Маркушевичем, освещена научная деятельность великого ученого и дана оценка его трудов. А. Пуанкаре принадлежит блестящий очерк математического творчества Вейерштрасса. Рассказывая о различных работах великого математика, я обращаюсь к их оценкам Пуанкаре, а вся его статья в переводе дается здесь в Приложении 1.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность профессору К.-Р. Бирману за предоставление мне ряда ценных сведений. Благодарю также профессора Роджера Кука, при посредстве которого я получила интересные материалы из архива Миттаг-Леффлера. Благодарю также профессора В. Эккариуса за фото отеля в Вернигероде.

Я должна выразить глубокую благодарность Е. М. Полищуку и Е. П. Ожиговой за ряд ценных советов по книге, которыми я воспользовалась. В работе над книгой большую помощь мне оказывала Н. Н. Кочина, она прочитала всю книгу и проверила ряд формул. Выражаю также сердечную благодарность И. А. Викторовой, возглавляющей Отдел научной информации Института проблем механики АН СССР и сотрудникам этого отдела за их постоянную помощь.

П. Кочина

Глава 1

Детство

> Никто лучше меня не знает, насколько я далек от той светлой и возвышенной цели, которую поставил перед собой в воодушевлении молодости, но никто не может отнять у меня сознание того, что мои стремления и моя деятельность были не совсем напрасными и что путь, которым я шел к истине, не был ложным путем.
>
> *К. Вейерштрасс*

Родители и родственники

Первые сведения о семье Вейерштрасса и местах жизни ее членов мы находим у Г. Миттаг-Леффлера [109]. Но эти сведения неполны, в частности, не было известно, откуда происходят Вейерштрассы. Для выяснения этих вопросов Франц Фласкамп (Виденбрюк, в Вестфалии) рассмотрел записи в церковных книгах ряда городов о днях рождения, крещения и смерти членов семьи Карла Вейерштрасса и его предков [89].

Фамилия Вейерштрасс обнаружилась в записях начиная с 1600 г. среди принадлежавших к реформатскому (одному из протестантских) вероисповеданию ремесленников и мелких торговцев города Меттмана, лежащего между Дюссельдорфом и Эльберфельдом.

Отец Карла Вейерштрасса, Вильгельм Вейерштрасс, родился 16 июля 1789 г. в Меттмане в семье ткача шерстяных изделий и лавочника Иоганна Генриха Вейерштрасса (1744—1813) и его жены Элизабет Марии Мюллер (1751—1796).

Вильгельм Вейерштрасс (1790—1869) в возрасте 25 лет женился на Теодоре Фондерфорст (1791—1827), дочери придворного лакея падерборнского епископа, Антона Николауса Фондерфорста, и его жены, урожденной Анны Гертруды Клейне. Тесть Антона Фондерфорста, Клейне, был слугой декана Оснабрюкенского собора.

Встретившееся где-то ошибочное написание «фон дер Форст» фамилии Теодоры Фондерфорст дало повод некоторым авторам (например, Р. фон Лилиенталю) считать ее происхождение аристократическим [89, с. 236].

Вильгельм Вейерштрасс перешел из реформатского вероисповедания в католическое. Это произошло 16 мая 1815 г., в один день с заключением брака с католичкой Теодорой Фондерфорст. Есть сведения, что Вильгельм Вейерштрасс подружился со священнослужителем католической церкви, который эмигрировал из Франции и мог оказать влияние на его верование. Родные Вильгельма Вейерштрасса отвернулись от него за измену реформатской вере. Все дети Вильгельма Вейерштрасса, в том числе и Карл, были католиками, «не будучи, однако, строго верующими» [109, с. 2].

Вильгельм Вейерштрасс много раз менял место работы. В 1808 г., в возрасте 19 лет, он был учителем. Ко времени рождения Карла (31 октября 1815 г.) — он секретарь бургомистра в городе Остенфельде (округ Варендорф).

Карл Вейерштрасс прожил в Остенфельде лишь одиннадцать детских лет. Однако Остенфельде чтит своего великого сына. Дом, в котором он родился (Дорфштрассе, 13), был отмечен в 1901 г. памятной доской; он изображен на картине, написанной в связи с днем рождения принцессы Элизабет фон Бентгейм. Картина уничтожена во время бомбежки [88, с. 71].

В 1826 г. у Вейерштрассов было семеро детей. В это время в городке Остенфельде умер покровитель Вильгельма Вейерштрасса. В апреле отец с семьей переехал в местечко Гютерсло в качестве старшего контролера по сбору податей. Новое место оказалось несчастливым. В конце апреля и начале мая от кори умерли дочка 4 лет и сын 9 лет. Через полтора года, 21 октября 1827 г., скончалась мать, Теодора Вейерштрасс, от «нервной лихорадки» (тифа). Осталось пятеро детей. Из них третья по времени рождения, Паулина (1818—1843), прожила 25 лет, но о ней никаких сведений не сохранилось. Остальные четверо были: Карл (1815—1897), Петер (1820—1904), Клара (1823—1896) и Элизабет (ее все называли Элиза) (1826—1898), которой тогда еще не исполнилось года.

В 1828 г. семья переехала в Мюнстер, где отец стал податным (налоговым) ассистентом. В 1829 г. он был переведен в Падерборн (Восточная Вестфалия) в главную таможню (податное управление). В 1831 г. он получил повышение звания. Наконец, в 1840 г. Вильгельм Вейерштрасс поселился в Вестернкоттене (Вестфалия, недалеко от Липпштадта) и стал работать в солеварне сборщиком налогов на соль. Карл Вейерштрасс называет местом окончания двух своих работ, в 1840 и 1852 гг., Вестернкоттен, где он на каникулах гостил у родителей.

В 1828 г., 5 июля, отец Вейерштрасса женился вторично на крестьянке Клементине Хольшер из Херберна в местности Людингхаузен, хорошей хозяйке, не оказавшей, по словам Миттаг-Леффлера, влияния на умственное развитие детей, но всегда заботившейся о доме и семье. Она умерла в 1859 г., и тогда Вильгельм Вейерштрасс переселился в Берлин к своему старшему сыну, где жил до своей смерти (24 августа 1869 г.).

Впоследствии, начиная с 1856 г., Карл Вейерштрасс жил в Берлине со своими сестрами, Кларой и Элизой. У его отца был брат, душевнобольной. В 1884 г. Карл Вейерштрасс взял на воспитание двухлетнего внука этого дяди, Франца, который в переписке с Ковалевской фигурирует как Френцхен.

Клара умерла в 1896 г., за год до смерти Карла Вейерштрасса, Элиза — через год после его смерти, в 1898 г. Миттаг-Леффлер в письме к Эрмиту 21 июня 1898 г. рассказывает о трагических событиях этого года в семье Вейерштрасса. Когда Элиза Вейерштрасс лежала после операции от внутренней опухоли, выстрелом из револьвера покончил с собой 16-летний Франц. Он оставил Элизе записку: «Уверяю тебя богом, я не могу сказать тебе причину» [86, с. 165]. Миттаг-Леффлер объясняет причину гибели Френцхена детской истерией.

Отец Вейерштрасса был человеком образованным, он обладал разносторонними знаниями в области физики и химии, а также в гуманитарных науках. Он свободно владел французским языком, любил общество и, как говорил Петер, не избегал выпивки, играл в шахматы, хотя не так хорошо, как Петер.

Миттаг-Леффлер пытался узнать подробности детства и молодости Карла Вейерштрасса и после его смерти обратился к его брату Петеру; тот мало что мог сказать о Карле, но показал письма, которые он получал от отца и сестер. Петер был одаренным человеком, но у него не хватало деловых качеств, и, по мнению отца, он в письмах слишком много рассуждал о своих мыслях и чувствах и ничего не писал о делах. Письма отца полны советов. Так, 24 июня 1852 г. он говорит: «Принимай мир таким, каков он есть, думай всегда так: я — часть этого мира, как и все остальные, без сомнения не хуже, но и не лучше; мое предназначение: жить, есть, пить, спать, любить, жениться и основать семью» [109, с. 4].

Однако когда в 1853 г. выяснилось, что предполагавшаяся женитьба Петера расстроилась, отец обрадовался и писал 13 октября 1853 г.: «О любви, которая там у тебя появилась, нам рассказал Карл; хорошо, что все окончилось. Без средств, <с женой> другого вероисповедания, я никогда не назвал бы условия жизни хорошими. Однако у меня было время, когда я думал иначе и был очень легкомысленным. Мне в то время и не снилось, что тот, кто хочет вступить в брак, необходимо должен представить себе круг обязанностей, которые он вынужден принять volens-nolens [1] перед женой, перед семьей своей жены и некоторым числом еще не рожденных» [109, с. 5].

В это же время старшая сестра Клара в письме к Петеру убеждала его не думать о женитьбе, прежде чем он не приобретет прочное положение: «Знаешь ли ты это стойло, в которое входят многие терпеливые овцы?» [109, с. 6]. Она напомнила брату, как они, печальные, сидели семеро, в зимние вечера, при свете одной свечи. Заработка отца не хватало на безбедное существование большой семьи. Иногда даже вставал вопрос о дороговизне хлеба. Оба брата так и остались холостяками, сестры тоже не вышли замуж.

У Вильгельма Вейерштрасса были широкие интересы. Это видно из того, что Петер, ставший школьным учителем, обращался к нему с вопросом по поводу школьной реформы 1849 г. Отец писал, что результаты переговоров правительства с депутатами от гимназических учителей по поводу реорганизации школьного дела опубликованы и скоро Петер получит их полный текст, и добавляет, что переговоры о содержании предметов его удовлетворяют, но «все остальные разглагольствования касаются принципов централизации и государственного опекунства», которые никак не годятся как меры для обеспечения умственного развития. Кроме того, он считал, что государство мало заботится о всеобщности обучения и воспитания в школах.

Несмотря на материальные затруднения Вильгельма Вейерштрасса, дети получили хорошее образование, они могли переписываться друг с другом на французском и английском языках, а Петер хорошо знал и латынь. Он стал преподавателем языков в гимназии Дейч-Кроне. Семья Вейерштрассов представляла «образованный домашний очаг, с богатыми духовными интересами, но узкими хозяйственными возможностями, каких тогда было много в Германии» [109, с. 2].

Все дети были музыкальны, кроме Карла. Однако, по-видимому, он любил музыку; уже взрослым, в 1851 или 1852 г., решил заняться музыкой и просил брата и сестер

[1] Волей-неволей (лат.).

быть его учителем. Но Элиза писала Петеру, что пока у Карла нет определенного прогресса [109, с. 3].

Перемена мест службы Вильгельма Вейерштрасса объяснялась изменениями, происшедшими в 1823 г. в прусской податной службе. Из-за переездов семьи Карлу пришлось менять школы. Короткое время он ходил в начальную школу Мюнстера. С переездом семьи в Падерборн стал учиться в гимназии этого города.

Теодорианская гимназия

Сведения о Теодорианской гимназии взяты из статьи Ф. Г. Хомана «Карл Вейерштрасс как ученик Теодорианской гимназии в Падерборне» [88].

В Падерборне был католический собор, и город являлся местом пребывания епископов. В 820 г. была основана школа при соборе. В одиннадцатом столетии в этой школе «блистали математики и астрономы, там были физик и преподаватель геометрии» [88, с. 57]. Магистр Рейнхер в 1171 г. выпустил в Падерборне календарь, в котором впервые в Германии употреблялись арабские цифры вместо римских. В XVI в. соборную школу преобразовали в гуманистическую гимназию, а в 1585 г. она оказалась в руках иезуитов.

Князь-епископ (Fürstbischof) Дитрих (по-латыни Теодор) фон Фюрстенберг с 1612 по 1614 г. строил в стиле ренессанса здания гимназии и университета, который открыл в 1614 г. Школа стала государственной гимназией с древними языками и получила название «Gymnasium Theodorianum». Преемник Теодора построил в городе кирку в стиле иезуитского барокко. После уничтожения Общества Иисуса в 1773 г. университет и гимназия перешли в ведение епископов и местных властей.

Падерборнский профессор Вильгельм Фабер (1744—1817) пользовался известностью, он производил съемку страны и занимался исправлением астрономических расчетов Лаланда.

Чиновник королевства Вестфалия в 1811 г. посетил гимназию и сказал, что в ней «математикой занимаются превосходно и при подходящих по этому предмету учителях она должна пойти очень далеко» [88, с. 58].

После основания в 1818 г. университета в Бонне университет в Падерборне формально был упразднен, однако два его факультета остались и в 1844 г. были преобразованы в Епископское философско-теологическое учебное заведение (в настоящее время Архиепископская философско-теологическая академия). Гимназия, находившаяся под одной крышей с факультетами, продолжала существование под королевским патронатом.

Прусское школьное управление — Провинциальная школьная комиссия в Мюнстере — с 1825 г. возглавлялось Фридрихом Кольраушем (1780—1865), просвещенным советником консистории.

Комиссия старалась поддерживать новогуманистическую гимназию в духе Вильгельма фон Гумбольдта (1767—1835), прусского государственного деятеля и языковеда. Был восстановлен отмененный в 1781 г. греческий язык, введен экзамен на аттестат зрелости.

Кольрауш писал, что Теодорианская гимназия «больше, чем гимназия в Мюнстере, подвергалась влиянию старых иезуитских установок, и только предпринятая забота о выборе и увеличении числа учителей привела к тому, что выпускаемые ученики удовлетворяют требованиям аттестата зрелости. Но успех появления новых сил доставил мне радость» [88, с. 58].

Ко времени поступления Карла Вейерштрасса в Теодорианскую гимназию Падерборна это была самая многолюдная школа провинции Вестфалии. Число преподавателей, вместе с директором, составляло 14 человек, среди них три профессора университета. Все учителя, кроме одного, были духовного звания. Они жили в здании бывшей коллегии иезуитов, ведя полумонастырский образ жизни. Происходили они из семейств промышленников Падерборна или его знати. Некоторые из учителей собирались учиться дальше в университетах Берлина или Бонна.

Единственным не духовным лицом был преподаватель математики Франц Луке (1804—1854), который уже учился в Бонне три года и, не закончив университета, полгода преподавал в прогимназии. В Падерборнской гимназии начал работать в 1827 г., в 1832 стал старшим учителем.

С 1825 г. учителя гимназии могли представлять свои работы в «Ежегодные отчеты» гимназии. Франц Луке в 1834 г. опубликовал в ежегоднике работу «Изложение трех первых основных случаев задачи Ферма о касании шаров».

В гимназии были и учитель чистописания, и учитель рисования, написавший много пейзажей. Семь молодых теологов являлись репетиторами в четырех младших классах и наблюдали за тишиной в них.

В 15 лет Карл вел книгу у торговки ветчиной и маслом —

этот факт шутливо рассматривают как первое приобщение Вейерштрасса к прикладной математике.

Полное число классов в школе менялось, сначала их было шесть (1823), затем семь (1827) и окончательно девять (1835). Очевидно, Карл попал в промежуточный период, так как классы, в которых он учился, последовательно нумеровались так: VI, V, IV, II^{II}, II^{I}, I (класс III был Вейерштрассом пропущен). За счет дополнительного класса II^{II} общее число классов, начиная с VII, равнялось восьми.

Карл Вейерштрасс учился в Теодорианской гимназии с 1829 по 1834 г., поступив на пасху 1829 г. в шестой класс.

В статье Ф. Г. Хомана приведена таблица недельных часов школьных уроков, полученных Карлом за все его пребывание в гимназии. Больше всего часов (сумма недельного числа часов) [2] — 53 он получил по латинскому языку, далее идут: греческий язык — 29, математика — 23, немецкий язык — 20, литература — 15, религия — 14. На еврейский язык было отведено 4 часа, по французскому языку, введенному только в 1836 г., Карл получил 6 часов, а по психологии и логике — по одному часу в неделю в последние два года обучения.

Ф. Г. Хоман посвящает специальные страницы вопросу о математическом образовании в Падерборнской гимназии в годы обучения Карла Вейерштрасса в соответствующих классах. Это был полный курс средней школы с арифметикой, алгеброй, геометрией и тригонометрией. В 1835 г. вышло постановление министерства просвещения об исключении из преподавания сферической тригонометрии и конических сечений, и в перечне уроков за годы пребывания в школе Карла эти предметы отсутствуют. В последнем, первом классе, давались: стереометрия, тригонометрия, упражнения в решении геометрических задач с помощью тригонометрии, неопределенный анализ, разложение в ряды по справочнику фон Криса [88, с. 62].

Нужно думать, что Карл получил хорошую математическую подготовку в Падерборнской гимназии. Известно, что он пользовался школьной библиотекой и просматривал там «Журнал чистой и прикладной математики» (Journal für die reine und angewandte Mathematik), начавший издаваться в 1826 г. и блиставший именами Абеля, Дирихле, Мёбиуса, Плюккера, Штейнера и Якоби. Некоторые статьи он читал, в частности работы по геометрии Якоба Штейнера. Карл

---

[2] Например, по-латыни число часов в неделю по классам, начиная с VI и кончая I, распределялось так: 11+9+9+8+8+8=53.

и один из его товарищей по школе занимались самостоятельно математикой. Но товарищ был подавлен превосходством Карла и пошел по другому пути, бросив математику.

Кто из преподавателей математики оказал наиболее сильное влияние на Вейерштрасса, трудно сказать. Сам он с благодарностью вспоминал в своей ректорской речи 1874 г. всех своих школьных учителей, «высокообразованных, думающих и гуманных духовных лиц», которых он знал в своей юности и у которых на книжной полке рядом с «Критикой чистого разума» стоял «Натан Мудрый» [3] [88, с. 64].

В Падерборнской гимназии господствовали французские порядки поощрения учеников путем воздействия на их честолюбие. Если у ученика были высшие оценки по трем предметам, то в его честь музыкальная капелла в конце школьного года исполняла какое-нибудь произведение. В честь Карла музыка обычно играла четыре раза, так как у него бывало шесть высших отметок, один раз даже семь: всегда по латыни и немецкому языку, математика чередовалась с другими предметами. Только по чистописанию не бывало высших оценок (а потом, в гимназии Дейч-Кроне, ему пришлось преподавать и чистописание). Впоследствии у Вейерштрасса выработался красивый почерк, но для тех, кто плохо знает готический шрифт, письма Вейерштрасса к С. В. Ковалевской оказались не очень разборчивыми.

Существовали в гимназии и особые премии за успехи в ученье. За промежуток от VI до II[I] класса К. Вейерштрасс получил 10 премий, из них четыре — по-латыни; по греческому же и немецкому языкам, а также по математике — по две премии.

В конце учебного года делалось определение места, которое занял каждый ученик по успехам в каждом из предметов. Карл занимал шесть раз первое место (четыре раза по латыни, один раз по математике, один раз по литературе), шесть раз был на втором месте и по три раза на третьем и четвертом местах. Первый класс он окончил в 1834 г., 19 лет.

Много лет спустя, в 1881 г., Вейерштрасс написал С. В. Ковалевской, что во время путешествия на каникулах встретил математика гимназии, в которой когда-то учился. Он добавил шутливо: «Я узнал, какая непостоянная и тленная вещь слава. Представь себе, из 27 преподавателей гимназии, гордостью которой я когда-то был, так как окончил полный курс за $5^1/_2$ лет вместо 8, никто уже не знает — прошло уже около 45 лет, что ординарный профессор госу-

---

[3] «Натан Мудрый» — драма Г. Э. Лессинга.

дарственного университета Вейерштрасс и член более 12 академий, не говоря уже о других его званиях, заложил фундамент своей научной деятельности в добром городке Падерборне и окончил школу в качестве primus omnium» [4].

В еще более шутливое настроение привел бы его рассказ, который передает К.-Р. Бирман [80, с. 191]. После смерти Вейерштрасса Вильгельм Киллинг, ректор академии в Мюнстере, где учился Вейерштрасс, выступил 15 октября 1897 г. с речью о великом ученом (Киллинг — его ученик). В числе слушателей был налоговый директор провинции, который никогда не слышал о Вейерштрассе. Речь Киллинга произвела на него такое сильное впечатление, что он велел напечатать ее и разослать циркулярно всем своим чиновникам для изучения и представления о том, чего может достичь сын королевского прусского налогового чиновника, если он будет прилежно развивать свой талант [Там же].

В 1930 г. в Падерборнской гимназии была установлена памятная доска с именами одиннадцати наиболее выдающихся учеников гимназии в XIX в., среди которых стоит и имя Вейерштрасса. В 1945 г. доска была разрушена, в 1962 г. восстановлена. На доске приведено четверостишие на латинском языке, прославляющее учредителя школы Теодора.

---

[4] Первый из всех (лат.).

Глава 2

Университетские годы

В Бонне

Замечательные успехи Карла в гимназии заставляли его семью гордиться им и ожидать от него дальнейших достижений и блестящей карьеры в будущем. Отец Карла решил, что лучше всего послать его в университет Бонна, рассадник высшего прусского чиновничества.

Бонн, порт на Рейне, расположен на юго-западной части земли Северный Рейн-Вестфалия. В нем имеются университет, открытый в 1818 г., консерватория; Бонн — место рождения Бетховена. Там Карл должен был получить основательное юридическое образование и изучить камералистику, т. е. камеральные науки, дающие разнообразные сведения и правила по сельскому хозяйству, торговле, податному обложению, финансам. И Вейерштрасс в 1834 г. поступил в Боннский университет.

Но указанные науки не увлекали Вейерштрасса. Он был захвачен университетской жизнью, вошел в корпорацию Саксония и быстро получил в ней особый чин — фуксмайора (Fuchsmajor). Он не пропускал ни одной пирушки, о чем впоследствии вспоминал с удовольствием. Искусный в фехтовании, он ни разу не был ранен на дуэли [1] и не получил ни одного шрама на лице (что было тогда модно среди студентов), о чем с гордостью вспоминал 50 лет спустя его брат Петер [109, с. 14].

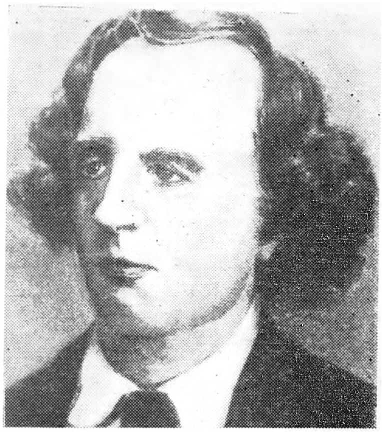
Однако воспоминания Карла и Петера Вейерштрассов о студенческой жизни Карла, вероятно, были окрашены слишком радужными красками. Были обстоятельства, заставлявшие Карла в какие-то периоды жизни в Бонне страдать «телесно и душевно», как он написал впоследствии в своем заявлении в Мюнстерскую академию, не дав этому никаких пояснений (см. ниже).

В какой-то мере Вейерштрасс занимался юридическими науками; однажды он выступил в качестве оппонента на дис-

---

[1] Имеются в виду спортивные поединки, подчас суровые: цель состояла в том, чтобы оставить шрам на каком-нибудь месте тела противника; дерущиеся обычно надевали защитные очки.

пути своего друга, студента Будде, впоследствии президента Мекленбургского верховного суда [109, с. 15]. Основное же, чем он занимался, была математика. Он прослушал односеместровый курс математики знаменитого геометра Ю. Плюккера (1801—1868), который преподавал в Бонне с 1836 г., после смерти Карла Дитриха фон Мюнхова. Однако потом Вейерштрасс вспоминал из боннских профессоров именно К. Д. Мюнхова [2] — вероятно, он близко общался с ним.



Молодой К. Вейерштрасс

Вейерштрасс самостоятельно занимался математикой, его настольными книгами были «Небесная механика» Лапласа [104] и «Новые основания теории эллиптических функций» Якоби [96].

Якоби и его книга об эллиптических функциях

Прежде чем излагать содержание книги Якоби, приведем краткие биографические сведения о нем, опубликованные А. И. Маркушевичем [138, с. 150—152] и К.-Р. Бирманом [81].

Карл Густав Яков Якоби (1804—1851) родился в Потсдаме в богатой семье банкира. Не достигнув 16 лет, он поступил в университет, где лекциям предпочитал самостоятельные занятия. Он углубленно штудировал Эйлера и всю жизнь был его поклонником. Якоби не ограничивался математикой, он активно участвовал в филологическом семинаре. В 21 год Якоби окончил университет и защитил диссертацию о разложении функции на простейшие дроби. В 1827 г. он стал экстраординарным, а в 1829 г. — ординарным профессором Кёнигсбергского университета. В 1829 г. он написал свою знаменитую книгу «Fundamenta nova. . .» [96]. В последую-

---

[2] В 1818—1836 гг. К. Д. Мюнхов был профессором астрономии, математики и физики в Бонне.

К. Г. Якоби

щих работах Якоби одной из центральных проблем явилось обращение абелевых интегралов. Он предложил рассматривать обращение не отдельных абелевых интегралов, но их систем, что привело его к Θ-функциям многих переменных. Развитием этих идей, в частности, занимался Вейерштрасс.

Якоби читал много лекций и вел математический семинар, послуживший образцом для других университетов Германии. Он ввел в программу курсов лекции по эллиптическим функциям. Его лекции по механике легли в основу книги «Лекции по динамике» [160]. В ней Якоби рассмотрел с помощью своих методов интегрирования уравнений с частными производными задачу о движении двух тел в пространстве, задачу притяжения к двум неподвижным центрам, о геодезических на поверхности трехосного эллипсоида. При изучении фигур равновесия вращающейся жидкости Якоби получил в качестве возможных форм трехосные эллипсоиды, носящие его имя. Якоби внес вклад и в вариационное исчисление (условие Якоби), и в теорию детерминантов, где функциональный определитель назван в его честь якобианом. Его имя носят обобщенные им полиномы Лежандра.

Якоби был выдающейся творческой личностью, оказавшей большое влияние на своих учеников, среди которых были Ф. Ришело, П. Кирхгоф, О. Гессе, А. Клебш. Во Франции Ш. Эрмит и Ж. Лиувилль считали себя учениками Якоби, так же как в Англии А. Кэли.

В Кёнигсберге Якоби работал до 1843 г. По совету врачей он уехал на полгода в Италию, откуда уже не вернулся в Кёнигсберг, так как получил приглашение работать в Берлинском университете. Он был избран членом Прусской академии наук. С 1839 г. стал почетным членом Петербургской академии наук; был членом ряда других академий. Он живо заинтересовался проектом, — который остался неосуществленным, — издания Петербургской академией наук полного собрания сочинений Эйлера. Он переписывался с непременным секретарем академии П. Н. Фуссом (1798—1855) и встречался с ним, когда тот приезжал за границу. К. Якоби вел переписку со своим братом Морицем Германом (Борисом Семеновичем) Якоби (1801—1874), физиком и электротехником, с 1839 г. членом Петербургской академии наук, который жил в России.

К. Якоби отличался радикальными политическими взглядами. В марте 1848 г. он стал членом оппозиционного конституционного клуба и выставил свою кандидатуру в члены Прусского национального собрания. В своей речи он заявил, что его не пугает и перспектива республики — члены клуба были за конституционную монархию. Якоби не был избран. Когда победила реакция, Якоби подвергался некоторой дискриминации: понизили его оклад, хотели перевести обратно в Кёнигсберг. Умер Якоби в 1851 г. от оспы.

Якоби был на два года моложе Абеля. Он вступил в научное соревнование с ним, но оба уважали друг друга, и Якоби, переживший Абеля, никогда не переставал относиться с глубочайшим уважением к его памяти.

Дадим теперь краткое содержание книги Якоби, оказавшей огромное влияние на все творчество Вейерштрасса. Она написана на латинском языке и называется «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum» [3] [96].

Приведем основные определения эллиптических интегралов, обращение которых дает эллиптические функции.

Интеграл вида

$$\int F\left(x, \sqrt{R(x)}\right) dx,$$

где $F\left(x, \sqrt{R(x)}\right)$ — рациональная функция x и $\sqrt{R(x)}$, а $R(x)$ — полином третьей или четвертой степени, может быть приведен после исключения алгебраической части к интегралам трех типов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

которые называются соответственно эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода *в нормальной*

---

[3] «Новые основания теории эллиптических функций» (лат.).

форме Лежандра. Подстановка $x=\sin\varphi$ приводит их к тригонометрической форме. Число k — модуль интегралов — предполагается удовлетворяющим неравенствам $0<k<1$; n — называется параметром интеграла. Приняты обозначения

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}},$$

$$F(\arcsin x,\ k)=\int_0^{x}\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}},$$

$$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}\,d\varphi_1,$$

$$E(\arcsin x,\ k)=\int_0^{x}\sqrt{\frac{1-k^2x_1^2}{1-x_1^2}}\,dx_1,$$

$$\Pi(\varphi,\ n,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi_1}{(1+n\sin^2\varphi_1)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}},$$

$$\Pi(\arcsin x,\ n,\ k)=\int_0^{x}\frac{dx_1}{(1+nx_1^2)\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}.$$

При $\varphi=\pi/2$ (или $x=1$) интегралы называются *полными эллиптическими интегралами.*

Полные эллиптические интегралы обозначаются так:

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

где $k'=\sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль.

Эллиптические интегралы первого рода — это функции, остающиеся конечными для всех значений x; интегралы второго рода имеют особые точки, в которых обращаются в бесконечность алгебраически; интегралы третьего рода обладают особыми точками, в которых обращаются в бесконечность логарифмически.

Книга Якоби начинается с рассмотрения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}}=$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}, \tag{1}$$

решение которого ищется в виде отношения полиномов

$$y=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+\ldots+b^{(p)}x^p}. \tag{2}$$

Подсчетом числа коэффициентов и соотношений между ними доказывается, что для любого p можно подобрать коэффициенты a, a', ..., b, b', ... так, чтобы соотношение (1) удовлетворилось. Иначе говоря, можно преобразовать дифференциал правой части.

Затем этот результат применяется к преобразованию эллиптического дифференциала

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

с помощью выражения (2), где числитель и знаменатель второй степени, к нормальной форме Лежандра

$$\frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

(M — постоянная). Такая же задача решается для случая, когда под знаком корня — произведение $\pm(y-\alpha)(y-\beta)\times$ $\times(y-\gamma)$.

Один из следующих разделов книги Якоби назван им «О новых обозначениях эллиптических функций».

Обозначая через u эллиптический интеграл первого рода в тригонометрической форме

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (k^2\leqslant 1),$$

Якоби рассматривает φ как функцию от u и называет φ *амплитудой* u:

$$\varphi=\operatorname{am}u.$$

Подстановка $x=\sin\varphi$ приводит интеграл к форме Лежандра:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Тогда x как функция от u записывается так:

$x = \sin \operatorname{am} u$ (*синус амплитуды*).

Вводится полный эллиптический интеграл первого рода K. Якоби называет $K-u$ дополнением функции u и вводит дальнейшие обозначения:

$$\operatorname{am}(K-u) = \operatorname{co} \operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{d \operatorname{am} u}{du} = \Delta \operatorname{am} u.$$

По Лежандру уже был введен дополнительный модуль k' $(k^2 + k'^2 = 1)$. Якоби полагает

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Гудерман в 1833 г. [92] ввел более удобные обозначения, употребляемые и теперь:

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, \quad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, \quad \operatorname{dn} u = \Delta \operatorname{am} u.$$

Якоби выводит формулы (мы пишем их в обозначениях Гудермана)

$$\operatorname{sn}(K-u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(K-u) = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

и ряд других.

Затем идет раздел о теоремах сложения и умножения, обобщающих соответствующие теоремы для тригонометрических функций. Так,

$$\operatorname{sn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{3}$$

(при $k=0$ получаем $dn = 1$, $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$), частным случаем которой является

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \tag{4}$$

Далее устанавливается двоякая периодичность эллиптических функций. Полное определение *двоякопериодической функции*: это однозначная аналитическая функция $f(z)$, имеющая только изолированные особенности на всей конечной плоскости комплексного переменного z и такая, что существуют два числа p_1 и p_2, отношение которых не является действительным числом и которые являются *периодами* $f(z)$, т. е. имеют место тождества

$$f(z+p_1)=f(z+p_2)=f(z).$$

Если p_1/p_2 рационально, то $f(z)$ — однопериодическая функция, если иррационально, то $f(z)\equiv\mathrm{const}$.

Все числа вида mp_1+np_2, где m, n — целые, образуют группу периодов, базис которой состоит из двух примитивных периодов, которые принято обозначать $2\omega_1$, $2\omega_3$. Не существует аналитических функций, имеющих более двух примитивных периодов.

Точки вида $2m\omega_1+2n\omega_3$, где m, n — целые, образуют решетку периодов, разбивающую всю плоскость z на параллелограммы периодов. За основной параллелограмм периодов принимают параллелограмм с вершинами

$$z_0, \quad z_0+2\omega_1, \quad z_0+2\omega_2, \quad z_0+2\omega_3 \quad (\omega_2=\omega_1+\omega_3),$$

где z_0 — произвольная точка.

Не существует двоякопериодической функции, регулярной во всем параллелограмме периодов, отличной от постоянной, она должна иметь в нем по крайней мере один полюс, т. е. быть *мероморфной*.

Якоби установил, что для $\mathrm{sn}\,u$ примитивными периодами являются $4K$ и $2iK'$, другими словами, имеем при целых m, n

$$\mathrm{sn}(u+4Km+2iK'n)=\mathrm{sn}\,u.$$

Затем в книге Якоби даются представления эллиптических функций в виде отношения произведения тригонометрических полиномов, разложения их на суммы дробей и т. п. Рассматривается случай мнимого аргумента.

Наконец, Якоби вводит обладающие замечательными свойствами *тэта-функцию* Θ и *эта-функцию* H:

$$\begin{aligned}\Theta(u)&=(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\times\\&\quad\times(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots,\\ \mathrm{H}(u)&=2\sqrt[4]{q}\,\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)\times\\&\quad\times(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots\end{aligned} \tag{5}$$

Эти функции могут быть представлены в виде тригонометрических рядов:

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \\ + 2q^{16}\cos 8x - \ldots, \tag{6}$$

$$\mathrm{H}(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + \\ + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots$$

В тех и других формулах обозначено $q = e^{-\pi K'/K}$, $x = \pi u/2K$.

Ряды быстро сходятся при $0 < k < 1$. Через них $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ выражаются так:

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}, \qquad \mathrm{cn}\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}. \tag{7}$$

Функции $\Theta(u)$ и $\mathrm{H}(u)$ являются периодическими. Для первой основной период $2K$, для второй $4K$. Если к u прибавить $2iK'$, то обе функции приобретают множитель $q^{-1}e^{-2\pi K'u/K}$. Отношение их дает двоякопериодические функции.

В книге Якоби, состоящей из 188 страниц (не считая трех страниц опечаток), содержится огромное количество разнообразных формул, относящихся к свойствам эллиптических функций. Не удивительно, что эта книга увлекла молодого Вейерштрасса своим богатым и интересным содержанием: формулы Якоби вошли во все справочники, содержащие сведения по эллиптическим функциям.

Биографы Вейерштрасса говорят, что сначала книга Якоби была трудной для него, так как он не знал теории эллиптических интегралов Лежандра. Но от одного студента, приехавшего в Бонн из Мюнстера, в руки Вейерштрасса попала запись лекций профессора Мюнстерской академии Христофа Гудермана (1798—1859) по теории модулярных функций. Так Гудерман называл эллиптические функции, считая принятое название слишком узким: ведь эти функции не все связаны с эллипсом.

Х. Гудерман был автором ряда статей по эллиптическим функциям. Вейерштрасс, вероятно, читал лекции, по которым Гудерман опубликовал статью «Теория модулярных функций и модулярных интегралов», напечатанную в 1838 г. в журнале Крелле [92]. Статья большая, размещена во всех четырех тетрадях 18-го тома журнала на 189 страницах. В ней излагается многое из результатов Якоби более подробно, в новых обозначениях (которые мы уже применяли при изложении книги Якоби). Сам Гудерман занимался в основном теоремами сложения.

* * *

Поздней осенью 1838 г. Вейерштрасс вернулся в отчий дом, без диплома и даже, как утверждают авторы, пишущие о нем, не сдав ни одного экзамена. Г. Миттаг-Леффлеру хотелось осветить этот период жизни Вейерштрасса, и в 1903 и 1904 гг. он навестил его брата Петера. Тот подарил Миттаг-Леффлеру портрет молодого Карла, но рассказать о возвращении брата мог только следующее: «Как плохо выглядел Карл, когда вернулся домой! Какая глубокая боль была видеть моего старшего брата в таком состоянии! Четыре года и никакого экзамена!» Как же Карл жил в Бонне, что заставляло его страдать и болеть? Это осталось неизвестным. Полгода Вейерштрасс болел и жил у родителей. Вся семья обсуждала сложившееся положение.

Отцу было бы трудно поддерживать сына еще четыре года для полного прохождения на этот раз математического курса университета. Здесь помог своим советом и влиянием председатель Высшего суда в Падерборне Шлехденталь, который в свое время присутствовал на заключительных экзаменах в этом городе и обратил внимание на исключительные способности Вейерштрасса. Он сказал, что Карл мог бы в Мюнстерской академии в более короткое время сдать государственные экзамены, которые откроют ему дорогу к деятельности учителя, а может быть, и приведут к степени доктора. Притом лекции по математике там читал Гудерман. Вопрос был решен, и Вейерштрасс имматрикулировался [4] в академии Мюнстера 22 мая 1839 г. Миттаг-Леффлер говорит, что «этот день университет Мюнстера почитает как один из своих великих памятных дней» [109, с. 18].

В Мюнстере

Город Мюнстер находится в северо-восточной части земли Северный Рейн-Вестфалия, это железнодорожный узел и порт на канале Дортмунд—Эмс. В 1780 г. в нем был открыт университет, но в 1818 г. после присоединения княжества

[4] Имматрикулироваться — получить матрикул, т. е. студенческую книжку, куда записываются лекции, которые хочет посещать студент, и ставятся оценки.

Мюнстер к Пруссии, университет потерял юридический и медицинский факультеты и стал называться «Академическим учебным заведением Мюнстера» (Akademische Lehranstalt in Münster). Такое название он носил и при Вейерштрассе, но в 1843 г. был переименован в Королевскую теологическую и философскую академию [88, с. 18].

Христоф Гудерман обучался в Гёттингене и Берлине, а с 1825 г. стал учителем гимназии в Клеве. Он публиковал в журнале Крелле статьи по сферической тригонометрии, а потом, как уже было сказано, по эллиптическим функциям. В 1832 г. его пригласили в Мюнстер преподавать математику. С 1836 г. он начал читать лекции по модулярным (эллиптическим) функциям.

Г. Бенке [88] говорит, что в 30-е годы прошлого столетия математическое образование в немецких университетах было сильно реформировано. Новшества шли из Кёнигсберга, где в 1826 г. стал читать лекции Якоби. Он расширил объем преподавания, который раньше включал лишь основы исчисления бесконечно малых, некоторые разделы математики средней школы, механику и астрономию. С 1829/30 г. Якоби начал читать 8-часовой курс эллиптических трансцендент, а также вариационное исчисление, дифференциальную геометрию, обыкновенные дифференциальные уравнения и теорию чисел. Он ввел семинары, которых до того не было. Из Кёнигсберга это расширение программы занятий стало распространяться и на другие университеты Германии. Мюнстер был одним из первых, где стали излагаться работы Абеля и Якоби на университетских лекциях, лектором был Х. Гудерман.

Число слушателей этих лекций было невелико. На летний семестр 1839 г. Гудерман объявил три курса: аналитическую геометрию, на которую явились 13 человек, исчисление бесконечно малых — на него явились 3 слушателя, и модулярные функции, на которые в первый раз пришли 13 человек, но потом остался один Вейерштрасс. Слушал лекции он в течение одного семестра. Кроме того, Гудерман стал читать еще один курс, специально для одного Вейерштрасса, об аналитической сферике. Так называлась созданная Гудерманом геометрия на сферической поверхности. Он даже изобрел специальный прибор и сделал заказ одной фирме на изготовление сферической линейки и сферического измерителя углов, но В. Лорей выражает сомнение в том, что на них нашлись покупатели [105, с. 599].

Гудерман умер внезапно, 21 сентября 1851 г. В тот день он послал в журнал Крелле две короткие заметки. Крелле поместил их со своими словами о Гудермане: «Гудерман был остроумным и притом необыкновенно трудолюбивым и усердным математиком. Он был хорошо осведомлен во всех частях этой науки и особенно необычными были его способности к вычислениям. . . При этом он был скромным человеком, далеким от всякой зависти, хорошо признающим и уважающим заслуги других. Автор пришел к такому заключению из многочисленных писем Гудермана» (J. reine und angew. Math., 1851, Bd. 80, S. 280).

Осенью 1839 г. Карл уже эксматрикулировался [5], чтобы готовиться к государственным экзаменам. Он уехал к родителям в Вестернкоттен и прислал оттуда помеченное 29 февраля 1840 г. письмо председателю исполнительной комиссии. Третий преемник Гудермана по профессуре в Мюнстерской академии, В. Киллинг, в своей ректорской речи 1897 г. воспроизвел письмо молодого Вейерштрасса. Потом это письмо было повторено Миттаг-Леффлером [109, с. 18]. Оно начинается так:

При поступлении осенью 1834 г. в университет меня побуждали внешние влияния к тому, чтобы получить камералистическую специальность, между тем как я, если бы мог следовать собственной склонности, решил бы, конечно, выбрать математику и родственные науки. Но заветное желание ближе ознакомиться с этими моими любимыми предметами влекло меня всегда к ним, и чем больше я ими занимался, тем ревностнее становилось мое стремление пытаться посвятить мои силы их изучению, причем мне выпало счастье увидеть в покойном профессоре фон Мюнхове в Бонне благожелательного советчика и руководителя. Все более растущее убеждение в том, что выбор моей будущей профессии был ошибкой, так как я чувствовал, что у меня нет склонности и способностей стать дельным камералистом или юристом, наконец, привело меня к решению посвятить себя целиком изучению того, что совпадает с моими склонностями и от чего я питаю надежду ожидать успеха.

Однако разные обстоятельства, которые подействовали на меня угнетающе и подавляюще, ослабили мои силы и волю к здоровому стремлению и, страдая телесно и душевно, я долгое время ограничивался самообразованием.

Покинув Бонн, я надеялся сам многое изучить и усвоить; но я не мог обманываться, как многого мне еще не хватает. Только после того, как я полгода пробыл дома, мне посчастливилось в Мюнстере, при благоприятных обстоятельствах, не подвергаясь внешним воздействиям и имея в виду твердую цель, продолжить мои занятия, и я надеюсь использовать это время наилучшим образом.

Я охотно согласился бы еще продолжительное время использовать возможность моего дальнейшего образования, прежде чем записаться на испытания. Однако, с одной стороны, мне этого не позволяют обстоятельства, а затем меня подбадривает уверенность моего уважаемого учителя, г-на профессора Гудермана, в том, что я способен выдержать экзамены и уже теперь получить допуск к ним.

[5] Т. е. снялся с учета как студент, слушающий лекции.

Далее Вейерштрасс пишет о своем желании скорее приобщиться к полезной деятельности и добавляет: «То обстоятельство, что мои занятия не с самого начала имели целью должность учителя, не будет помехой, если я буду в состоянии доказать другие свои способности» [109, с. 18]. Заканчивается письмо словами: «Я отваживаюсь поэтому обратиться к Вашему высокоблагородию с величайшей просьбой быть благосклонным и предоставить мне возможность скорее осуществить последнюю» [Там же, с. 19].

Из этого прошения видно, что Вейерштрасс не думал стать учителем; но судьба его сложилась иначе.

Разрешение сдавать экзамены было получено Вейерштрассом 2 мая 1840 г. Королевская научная испытательная комиссия Мюнстера дала ему задание, которое он должен был выполнить за шесть месяцев и представить в письменном виде. Это были три темы [109, с. 20].

1. Философская работа на латинском языке:

Explicitur, qui viri rempublicam Romanorum liberam domi militiaeque omnium maxime adjuverint atque auxerint [6].

2. Математическая работа на немецком или французском языке: о задачах, изложенных на приложенной, относящейся к работам, записке.

3. Педагогическая работа. Различие между принципами полезности и гуманности в воспитании и обучении, каким образом тот и другой должны применяться в каждом учебном случае (в особенности в связи с математическим обучением).

В конце каждой работы нужно было написать, что она сделана самостоятельно, без всякой посторонней помощи. Нужно было привести ссылки на использованную литературу. После получения работы комиссия назначала день устного испытания и пробной лекции.

Математическая работа состояла в решении трех задач, поставленных Гудерманом. Основная задача соответствовала собственному желанию Вейерштрасса и называлась «О развитии модулярных функций».

1°. Эта задача была задана с примечанием, что она вообще трудна для молодого аналитика и поставлена с согласия комиссии только по настоятельному его ходатайству.

2°. Второй была задача из элементарной геометрии: в данный треугольник должен быть вписан другой треугольник так, чтобы вершины второго лежали на сторонах пер-

---

[6] Указать, какие из мужей Римской республики больше всего содействовали свободе родины и военному делу.

вого и углы второго делились пополам прямыми, проходящими через противоположные углы данного треугольника.

3°. Третья задача была из теоретической механики: если действует сила, обратно пропорциональная биквадрату расстояния [от материальной точки], то требуется определить траекторию точки.

Миттаг-Леффлер приводит полный отзыв Гудермана о трех задачах, заданных Вейерштрассу:

Оценка предложенных работ

1°. В этой работе автор не только оправдал ожидания комиссии, но, исходя из системы до сих пор неизвестных дифференциальных уравнений, которые не замедлят возбудить в высокой степени интерес аналитиков и которые он выводит прямым путем, последовательно и частично одно за другим, он пролагает новый путь в теории модулярных функций и на нем, как это и можно было бы ожидать, приходит не только к известным представлениям этих величин, но также к совершенно новым результатам. *Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей.*

Если подумать, что он при слушании в Мюнстере первой лекции по модулярным функциям с ними почти не был знаком, то еще большее изумление вызывают его исключительные успехи в этой сравнительно новой области анализа. Это объясняется не только направленным к науке трудолюбием кандидата, но и в особенности наличием исключительного таланта, который, если не будет распылен, без сомнения в будущем будет успешно содействовать науке.

2°. Вполне удовлетворительно.

3°. Также и эта работа удовлетворительна.

При таких исключительных успехах кандидата для выяснения объема и основательности его математических познаний не требуется больше никакого устного испытания, если он покажет, что в состоянии дать урок по элементам математики по хорошо продуманной методике. Однако для него самого и для науки совершенно нежелательно, чтобы он стал учителем гимназии, но нужно, чтобы ему были созданы условия для того, чтобы он мог действовать в качестве академического доцента [7]. Гудерман [109, с. 21].

Наконец, 28 апреля 1841 г. наступило устное испытание, с 8 до 10 часов утра, затем следовало пробное занятие в одном из младших классов (prima) гимназии, с 10 до 13 и с 15 до 17 часов.

Основательность экзаменов заставила Миттаг-Леффлера вспомнить мнение, которое он слышал: «В первую очередь школьному учителю обязаны достижения Германии в различных областях» [109, с. 26].

Работа, так высоко оцененная Гудерманом, должна была бы быть сразу напечатанной. Однако это произошло лишь через 54 года, в качестве первой статьи собрания тру-

---

[7] Преподавателя университета.

дов Вейерштрасса. Только один раздел статьи вошел в знаменитую работу Вейерштрасса 1856 г. «Теория абелевых функций» [24].

Вейерштрасс получил facultas docendi, т. е. право преподавания в гимназии. Официальное заключение комиссии гласило: «Первая математическая работа на тему, выбранную самим кандидатом, свидетельствует о его исключительном таланте к решению задач высшего анализа. При исследовании задачи он выбрал совершенно новый путь в учении о модулярных функциях и на нем, как и следовало ожидать, пришел к до сих пор неизвестным рядам и разложениям на множители, но также достиг совершенно новых результатов. Решение двух других задач вполне удовлетворительно и свидетельствует также о математическом остроумии автора» [109, с. 26].

Отзыв комиссии гораздо сдержаннее, чем отзыв Гудермана, однако и его, мне кажется, было бы достаточно, чтобы Вейерштрассу могла быть предоставлена работа в Мюнстерском или каком-нибудь другом университете. Однако Вейерштрасс получил лишь место учителя прогимназии в маленьком городе Дейч-Кроне. По этому поводу имеются публикации и высказан ряд суждений разными авторами. Придается большое значение тому, что отзыв комиссии формален и сух, в нем отсутствуют важные, подчеркнутые Гудерманом слова: «Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей». Эти слова в заключении комиссии были выброшены.

К сожалению, Вейерштрасс почему-то не знал отзыва Гудермана, он прочел его лишь в 1853 г. Впоследствии, в письме от 12 июня 1888 г., он написал об этом Г. А. Шварцу, причем выразил сожаление: если бы он вовремя узнал это, то сам стал бы хлопотать о месте в высшей школе [86, с. 140].

Однако все же удивительно, что ни Гудерман, ни другие члены комиссии не предприняли ничего, чтобы он мог получить работу, соответствующую его способностям.

Изложим кратко содержание первой научной работы Вейерштрасса «О разложении модулярных функций», опубликованной в 1894 г. в первом томе собрания сочинений Вейерштрасса [1]. В примечании к статье Вейерштрасс пишет, что эта работа была им сделана летом 1840 г. и представлена осенью Испытательной комиссии в Мюнстере для достижения facultas docendi. «По мнению моего уважаемого учителя Гудермана, который предыдущей зимой ввел меня в теорию эллиптических функций («модулярных функций», как он их назвал), очень благосклонно оценившего ее, она должна была быть напечатанной. Этого, однако, не случилось по причинам, в которые я здесь не могу ближе входить. Часть ее содержания я изложил позднее в 52-м томе журнала Крелле» [1, с. 346].

Много раз Вейерштрасс собирался опубликовать эту работу, находя в ней кое-что интересное для математиков, интересующихся эллиптическими трансцендентами.

В кратком введении в статью Вейерштрасс говорит, что он нашел замечание в статье Абеля о том, что функция sn u (которую Абель обозначает $\lambda(u)$) может быть представлена в виде отношения двух рядов по степеням u, всюду сходящихся, коэффициенты которых — целые полиномы от модуля k.

Предлагаемая работа является попыткой вывести разложения этих рядов и рядов для других модулярных функций, а также показать, как из них вывести простым путем уже известные представления этих функций. Целесообразно также рассмотреть применимость формул для мнимых значений аргумента и модуля.

Вейерштрасс исходит из известных соотношений

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u \tag{1}$$

(при модуле $k=0$ они переходят в формулы для производных $\sin u$, $\cos u$, а dn u становится равным единице). Он берет известные ряды

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}\,u &= u + a_1u^3 + \ldots + a_ru^{2r+1} + \ldots, \\ \mathrm{cn}\,u &= 1 + b_1u^2 + \ldots + b_ru^{2r} + \ldots, \\ \mathrm{dn}\,u &= 1 + c_1u^2 + \ldots + c_ru^{2r} + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

радиусы сходимости которых зависят от модуля k. Далее, из формул сложения для sn $(u+v)$, cn $(u+v)$, dn $(u+v)$ следует, что sn u, cn u, dn u могут быть выражены через sn (u/n), cn (u/n), dn (u/n) в виде отношения полиномов от этих функций:

$$\mathrm{sn}\,u = P/S, \qquad \mathrm{cn}\,u = Q/S, \qquad \mathrm{dn}\,u = R/S. \tag{3}$$

Если a есть число такое, что sn u, cn u, dn u сходятся при $|u| < a$, то ряды sn (u/n), cn (u/n), dn (u/n) будут сходиться при $|u| < na$, а при $n \to \infty$ будут сходиться для неограниченно возрастающих $|u|$. Нужно думать, что и ряды для P, Q, R, S будут всюду сходящимися. Для этих функций на основе равенств (1) составляются дифференциальные уравнения второго порядка.

Вейерштрасс полагает, что P, Q, R, S выражены в функциях от $\operatorname{sn}(u/n)$, $\operatorname{cn}(u/n)$, $\operatorname{dn}(u/n)$, и приходит к таким дифференциальным уравнениям для P, Q, R, S:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}+\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}-k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2=0,\\
&\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2}+\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}-k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2=0,\\
&\frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2}+\frac{k^2\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}-k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2=0,\\
&\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2}+k^2\operatorname{sn}^2 u-k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

Далее вместо P, Q, R, S вводятся функции, обозначенные Вейерштрассом в честь Абеля через $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$. Они представляются в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Al}(u)_1=u-\frac{A_1}{3!}u^3+\frac{A_2}{5!}u^5-\ldots+\\
&\qquad\ldots+(-1)^n A_n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\\
&\mathrm{Al}(u)_2=1-\frac{B_1}{2!}u^2+\frac{B_2}{4!}u^4-\ldots+(-1)^n B_n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\\
&\mathrm{Al}(u)_3=1-\frac{B_1'}{2!}u^2+\frac{B_2'}{4!}u^4-\ldots+(1)^n\frac{B_n'}{(2n)!}u^{2n}+\ldots,\\
&\mathrm{Al}(u)=1-C_2\frac{u^4}{4!}+C_3\frac{u^6}{6!}-\ldots+(-1)^n C_n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\ldots
\end{aligned}\tag{5}$$

Устанавливается, что функции Абеля удовлетворяют уравнениям (4), в которых отсутствует последнее слагаемое — оно стремится к нулю при $n\to\infty$, и что функции Абеля отличаются от P, Q, R, S лишь множителем, стремящимся к единице при $n\to\infty$. Но функции Абеля не зависят от n и ряды сходятся для $|u|<na$, где n может неограниченно возрастать, следовательно, они целые функции u. Теперь эллиптические функции могут быть представлены отношениями целых функций

$$\operatorname{sn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)},\qquad \operatorname{cn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)},\qquad \operatorname{dn}u=\frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}.$$

Для определения коэффициентов рядов (5) Вейерштрасс строит уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \varphi}{\partial k} + k^2 u^2 \varphi = 0,$$

через решения которого $\varphi(u, k)$ выражаются четыре функции:

$$\sqrt{k}\,\mathrm{Al}(u)_1, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_2, \qquad \sqrt{\frac{1}{k}}\,\mathrm{Al}(u)_3, \qquad \mathrm{Al}(u).$$

Вейерштрасс приводит значения коэффициентов A_n, B_n, B_n', C_n до $n=10$. Несколько первых из них имеют простые выражения:

$$A_1 = 1 + k^2, \qquad A_2 = 1 + k^4 + 4k^2,$$
$$A_3 = 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4), \ldots,$$
$$B_1 = 1, \qquad B_2 = 1 + 2k^2, \qquad B_3 = 1 + 6k^2 + 8k^4, \ldots,$$
$$B_1' = k^2, \qquad B_2' = 2k^2 + k^4, \qquad B_3' = 8k^2 + 6k^4 + k^6, \ldots,$$
$$C_1 = 2k^2, \qquad C_2 = 8(k^2 + k^4), \qquad C_3 = 32(k^2 + k^6), \ldots,$$

но последние содержат члены до k^{20} с целочисленными коэффициентами вплоть до десятизначных.

Последующие параграфы Вейерштрасс посвящает изложению свойств функций Абеля и разного рода их разложениям. В частности, он получает представления Якоби (в других обозначениях) функций $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ в виде отношений тригонометрических рядов (см. выше выражение $\mathrm{sn}\,u$ в виде отношения $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$).

Эта работа относится ко времени пребывания Вейерштрасса в университете Мюнстера, но она помечена в конце статьи: «Вестернкоттен в Вестфалии, лето 1840». Очевидно, Вейерштрасс работал над ней или заканчивал ее в доме родителей.

Есть еще три работы, выполненные в Мюнстере: одна из них с пометкой «Мюнстер, 1841», в другой стоит «осень 1841» и в третьей — «весна 1842». Очевидно, в 1841 и в начале 1842 г. Вейерштрасс жил в Мюнстере и продолжал размышлять над различными задачами математики.

Первая из указанных работ носит длинное название «Представление аналитической функции комплексного переменного, абсолютное значение которого лежит между двумя заданными границами» [9]. Здесь речь идет о теореме, которую в 1843 г. опубликовал Лоран и которая носит его имя (см.: C. r. Acad. sci. Paris, 1843, vol. 17). Вейерштрасс доказал эту теорему на два года раньше.

Вейерштрасс ставит вопрос так:

«Пусть x будет переменной, которая может принимать каждое значение (действительное или комплексное), абсолютная величина которого лежит между двумя заданными границами A и B, и $F(x)$ — ее функция, о характере которой принимаются следующие положения:

1) для каждого значения x, лежащего внутри указанных границ, она принимает определенное конечное значение;

2) вблизи каждого такого значения x она непрерывна;

3) для каждого бесконечно малого значения k разность между отношениями

$$\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}, \qquad \frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$

бесконечно мала для всякого x внутри указанных границ и для каждого значения h, абсолютная величина которого не превышает определенной границы».

Как видим, условие 3) требует, чтобы производная $F(x)$ не зависела от пути, по которому приращение x приближается к нулю, т. е. является условием аналитичности $F(x)$.

Вейерштрасс хочет доказать, что при поставленных условиях $F(x)$ для всех x в заданных границах представима абсолютно сходящимся рядом

$$F(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu, \tag{6}$$

где коэффициенты A_0, A_1, A_{-1}, . . . не зависят от x.

Он вводит оригинальное обозначение комплексного числа:

$$a+bi=r\,\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}=rw,$$

где $r=|a+bi|$, а число λ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. При этом

$$\frac{dw}{d\lambda}=\frac{2i}{(1-\lambda i)^2}.$$

Он рассматривает интеграл, взятый по любой окружности радиуса r, $A<r<B$, от функции $x^\nu=r^\nu w^\nu$,

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}(rw)^\nu\, r\,\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda$$

и показывает, что этот интеграл равен нулю для всех n, кроме $n=-1$; в последнем случае

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw(\lambda)}{w(\lambda)} = 2i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\pi i.$$

Затем Вейерштрасс выводит формулу для коэффициентов ряда (6):

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} (x_0 w)^{-\nu} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda, \tag{7}$$

где x_0 — любое значение x внутри границ $|x| = A$ и $|x| = B$, и доказывает абсолютную сходимость ряда (6) с коэффициентами, определяемыми (7), а также то, что сумма ряда действительно есть $F(x)$ и что три условия, поставленные в начале работы, являются не только необходимыми, но и достаточными.

В последнем параграфе статьи Вейерштрасс рассматривает случай, когда граница $A=0$ и когда $F(x)$ ни для какого значения вблизи нуля не становится бесконечно большой. В этом случае $A_\nu=0$ при $\nu < 0$ и получается ряд Тейлора.

Другая статья мюнстерского периода «К теории степенных рядов» [10] касается вопроса о разложении функций многих переменных в степенные ряды.

В третьей статье «Определение аналитических функций одной переменной с помощью алгебраических дифференциальных уравнений» [11] речь идет о системе уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} - G_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \frac{dx_n}{dt} - G_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{8}$$

где $G_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ — целые рациональные функции (т. е. полиномы), а $x_1, \ldots, x_n$ — подлежащие определению функции t:

$$x_\nu = \mathfrak{P}_\nu(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu} t^\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

принимающие при $t=0$ произвольно заданные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В конце статьи Вейерштрасс делает примечание: установленная в § 1 теорема существования уже была доказана Коши как раз в том же 1842 г., о чем тогда Вейерштрасс не знал. Содержание своей работы он потом излагал в университете. Он отмечает, что его доказательство отличается от доказательства Коши и на его доказательстве основаны теоремы § 2 и 3, которых нет у Коши.

Вейерштрасс дает два способа определения коэффициентов. Он строит мажоранту вида

$$g(1+x_1+\ldots+x_n)^m,$$

где m — целое число, не меньшее, чем самая высокая степень x_k в $G_i(x_1, \ldots, x_k)$, а $g>0$ выбирается настолько большим, чтобы абсолютные значения всех коэффициентов полиномов G_i не превышали g. С помощью этой мажоранты Вейерштрасс доказывает сходимость не только абсолютную, но и равномерную рядов $x_k(t)$ для $|t| \leqslant \tau$, где τ — некоторое число, отличное от нуля. Если α есть наибольшее из чисел $|a_1|, \ldots, |a_n|$, то

$$\tau = \frac{(1+\alpha)^{-m+1}}{ng(m-1)}.$$

Следовательно, ряды (9) образуют систему однозначных аналитических функций t в области $|t|<\tau$.

В § 2 рассматривается случай, когда коэффициенты функций $G_k(x_1, \ldots, x_n)$ и величины $a_1, \ldots, a_n$ зависят от параметров $u_1, u_2, \ldots$ Вейерштрасс доказывает теорему (мы приводим ее формулировку по Миттаг-Леффлеру) [109, с. 39]:

Пусть коэффициенты функций $G_k(x_1, \ldots, x_n)$ и величины $a_1, \ldots, a_n$ являются однозначными аналитическими функциями любого числа независимых переменных $u_1, u_2, \ldots$, принадлежащих связной области, причем внутри этой области абсолютные значения указанных коэффициентов, а также величины $a_1, \ldots, a_n$ все меньше некоторой конечной границы.

Тогда ряды $\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$ сходятся для указанных систем значений $t, u_1, u_2, \ldots$ не только абсолютно, но и равномерно и образуют таким образом систему однозначных аналитических функций этих переменных.

Здесь ясно выражено понятие равномерной сходимости, которое впервые в зародыше появилось у Абеля, но, по словам Миттаг-Леффлера, никому из других математиков еще не было известно [109, с. 40].

В § 3 Вейерштрассом развито понятие аналитического продолжения решений $\mathfrak{P}_1(t), \ldots, \mathfrak{P}_n(t)$ системы уравнений (4). Он записывает решение в виде рядов $\mathfrak{P}_k(t-t_0, a_1, \ldots, a_n)$. Если взять точку $t=t_1$ внутри области T_0 сходимости всех рядов, то строятся степенные ряды $\mathfrak{P}_k(t-t_1, a_1', \ldots, a_n')$, в которых начальные значения при $t=t_1$ обозначены через $a_1', \ldots, a_n'$. Последние ряды или будут сходиться около $t=t_1$ в области T_1, выходящей за пределы области T_0, или их радиус сходимости будет равен кратчайшему расстоянию от $t=t_1$ до границы T_0. В первом случае имеем аналитическое продолжение решений и можем идти таким же образом дальше. Во втором случае или возможно дальнейшее расширение области сходимости около некоторого $t=t_2$, или найдется точка, которая никогда не сможет попасть внутрь области сходимости всех рядов, — это особая точка. Заметим, что идея аналитического продолжения была также предложена Пюизё в 1850 г. независимо от Вейерштрасса.

Приходится удивляться тому, что у Вейерштрасса в его «мюнстерский» период, т. е. в период его двухгодичного студенчества и последующие два года жизни в Мюнстере, уже вполне определился круг математических интересов и было положено начало его глубоким работам в области теории аналитических функций.

С задачей о системах уравнений Вейерштрасс не расставался и потом. В конце 1874 г. он напоминает своей ученице С. В. Ковалевской (письмо от 16 декабря 1874 г.) о совместных «научных грезах и фантазиях» того недавнего времени, когда Соня училась у него, а именно «об устойчивости мировой системы и о многих вопросах, с которыми связана проблема. Ты знаешь, что собственно математическая задача, о которой идет речь, может быть сформулирована следующим образом.

Положим, что для определения n функций действительной величины t дано n дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=G_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt}=G_n(x_1, \ldots, x_n),$$

где $G_1, \ldots, G_n$ обозначают целые функции $x_1, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами.

Спрашивается, каковы должны быть эти функции G_k и каким условиям должны удовлетворять значения $x_1, \ldots, x_n$ при $t=0$ для того, чтобы $x_1, \ldots, x_n$ были *регулярными* функциями t (в пределах $-\infty, +\infty$). Собственно говоря, следует определить, при каких условиях каждая из величин постоянно колеблется в конечных пределах. Наконец, следует по возможности найти разложения $x_1, \ldots, x_n$, соответствующие их функциональному характеру» [74, с. 193].

Вейерштрасс несколько недель занимался этим вопросом и предлагает Ковалевской путь, который должен привести к цели (Ковалевская, по-видимому, не думала над этой задачей): «если даны начальные значения $x_1, \ldots, x_n$, то всегда можно составить аналитические выражения $x_1, \ldots, x_n$ как функции t, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и существуют на *ограниченном* интервале времени. Теперь мне кажется, что если $x_1, \ldots, x_n$ — действительно такие функции, какие требуются, то всегда можно найти целые функции $y_1, \ldots, y_n$ от $x_1, \ldots, x_n$, для которых существуют подобные дифференциальные уравнения, но построенные таким образом, что из них получаются выражения от t, определенные для *большего* интервала времени» [Там же, с. 194].

Дальше можно поступать таким же образом и, если процесс будет продолжаться бесконечно, можно будет сделать выводы об области существования определяемых функций.

Вейерштрасс добавляет, что в задачах астрономии и математической физики последовательные приближения осуществляются путем решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, что приводит к сходящимся рядам.

Задача об интегрировании системы уравнений (8) продолжала занимать мысли Вейерштрасса в последующие годы. Ведь это динамическая система уравнений, важная для астрономии, в частности, в задаче n тел, где переменными являются скорости отдельных точек и их взаимные расстояния. Когда в 1884 г. по инициативе Миттаг-Леффлера была объявлена на 1888 г. премия имени Оскара II, то из четырех вопросов, предложенных на премию, вопрос № 1 был поставлен Вейерштрассом: задача трех тел. Премию получил Пуанкаре, который, в частности, исследовал в своей работе вопрос о зависимости решения системы (8) от начальных данных. Вейерштрасс сказал о работе Пуанкаре, что она открывает новые пути в механике.

Вейерштрасс писал об этих задачах и Миттаг-Леффлеру, который опубликовал полторы страницы из письма Вейерштрасса под заголовком «Высказывания Вейерштрасса по поводу трех тел» [73]. В статье [110] он вспоминает о письме Вейерштрасса к нему от 7 августа 1885 г., в котором Вейерштрасс формулирует теорему динамики n тел для случая, когда никакие два тела не сталкиваются: «Если движение n тел таково, что существует нижняя, отличная от нуля грань для расстояния между любыми двумя телами, то скорости отдельных тел и вместе с тем их координаты являются однозначными функциями времени внутри бесконечной полосы, содержащей действительную ось времени, рассматриваемого как комплексное переменное» [108, с. 44].

Вейерштрасс был прямым последователем и почитателем великого норвежского математика Нильса Хенрика Абеля, о котором мы здесь и расскажем.

Нильс Хенрик Абель

Нильс Хенрик Абель (1802—1829) родился в семье небогатого норвежского пастора, вторым из шести детей. Мальчик был болезненным и слабым. Когда ему исполнилось 10 лет, в Норвегии был большой голод, «год хлеба из коры» (l'année du pain d'écorce) [77, с. 4]. В 1814 г. Норвегия стала, после войны с Данией, независимым государством, объединенным с Швецией королевством. Подъем национального самосознания заставил в 1811 г. всех, богатых и бедных, собрать средства для университета в столице Норвегии Христиании (теперь Осло).

Маленького Нильса сначала отец обучал вместе со старшим братом, а потом, в 1814 г., послал в Христианию в лицей. Первое время Абель не отличался успехами, он был робок и стеснителен. Однако в 1817 г. наступил светлый период: в школе появился новый учитель математики, Берндт Микаэль Хольмбое (1795—1850), молодой, горячий и симпатичный. Он вывел мальчика из состояния пассивности и начал заниматься с ним частным образом. Вместе они проработали три книги Эйлера по математике. Абель сам читал Гаусса и французских математиков, в особенности Лагранжа.

В юности у Абеля был эпизод, похожий на вейерштрассовский. Его учитель Хольмбое в 1820 г. написал о своем ученике в школьном протоколе: «С ярко выраженным гением он соединяет пыл и ненасытное усердие и интерес к математике, так что он может стать и, конечно, сделается величайшим математиком мира, если проживет достаточно долго». В официальном протоколе слова «величайшим математиком мира» зачеркнуты и заменены словами «большим математиком» (см. книгу О. Оре [144], а также [77]).

В 1824 г. Абель поступил в университет Христиании, где сразу же стал заниматься новыми задачами математики. Так, ему некоторое время казалось, что он нашел формулу для решения общего уравнения пятой степени, но скоро он обнаружил ошибку и в 1824 г. опубликовал брошюру с доказательством невозможности решения общего уравнения пятой степени в радикалах.

Университету в Христиании было всего 10 лет, когда в него поступил Абель, и в нем был слабый состав профессоров. Абеля вместе с группой других студентов послали в Германию и Францию. В Берлине он был с осени 1825 до весны 1826 г. Там он познакомился и подружился с А. Крелле, только что приступившим к изданию «Журнала чистой и прикладной математики». В четырех тетрадях пер-

Н. Х. Абель

вого тома этого журнала (1826) было опубликовано пять статей и две заметки Абеля. Одна из них посвящена доказательству невозможности решения в радикалах (алгебраического решения) общих алгебраических уравнений, степень которых превосходит четвертую.

Заметим, что Вейерштрасс наряду со многими другими учеными, занимавшимися ею, отдал дань этой великой теореме: на заседании Берлинской академии наук 12 декабря 1859 г. он сделал доклад на тему: «Новое доказательство фундаментальной теоремы алгебры» [20].

В том же первом томе журнала Крелле Абель дал статью об исследовании биномиального ряда

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

для всех действительных или мнимых m и x [76]. Он приводит общую теорему о сходимости рядов, которую теперь принято рассматривать как две теоремы [140, с. 142]:

«Если ряд $f(\alpha)=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots+v_m\alpha^m+\ldots$ сходится для определенного значения α, равного δ, то он сходится также для всякого значения, для которого $\alpha<\delta$, и для постоянно убывающих значений β функция $f(\alpha-\beta)$ неограниченно приближается к пределу $f(\alpha)$ в предположении, что α равно или меньше δ». (Очевидно, Абель считает α и δ положительными числами.)

Статья Абеля «Об интегрировании дифференциала $\frac{\rho dx}{\sqrt{R(x)}}$, если ρ и R — целые функции» [76] посвящена вопросу о том, когда интеграл от этого дифференциала выражается в явном виде. При этом Абель применяет непрерывные или цепные дроби.

Чтобы напомнить это понятие, приведем простейший пример разложения функции в периодическую цепную дробь:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{2}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ldots}}}}}$$

Общее определение: непрерывной или цепной дробью называется выражение вида

$$A_n=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}},$$

где a_k, b_k — комплексные числа (или функции от некоторых переменных). При этом обычно предполагается, что для $k\geqslant 0$

$$A_k=a_kA_{k-1}+b_kA_{k-2}\neq 0 \quad (A_{-1}=1,\ A_{-2}=0).$$

Под выражением

$$A=a_0+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}+\cdots$$

понимается предел, если он существует, выражения для A_n:

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n.$$

Абель доказал теорему: если возможно для ρ найти целую функцию (т. е. полином) такого рода, что

$$\int\frac{\rho dx}{\sqrt{R(x)}}=\log\frac{y+\sqrt{R(x)}}{y-\sqrt{R(x)}}, \qquad (*)$$

то цепная дробь, возникающая из $\sqrt{R(x)}$, должна быть периодической и иметь следующую форму:

$$\sqrt{R(x)}=r+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\ddots+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\text{etc.}}}}},$$

и, обратно, если $\sqrt{R(x)}$ разлагается в цепную дробь такого вида, то всегда возможно для ρ найти целую функцию, которая удовлетворяет равенству (*) [76, т. 2, с. 114].

И дальше формулируется предложение:

«Если интеграл формы (*), где ρ, R — целые функции, выражается через логарифмы, то он всегда может быть выражен следующим образом:

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R(x)}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}, \qquad A = \text{const},$$

p, q — целые функции x» [Там же].

Вершиной математических исследований Абеля является теория интегралов и функций, носящих его имя, — с ними мы познакомимся дальше. В 1828 г. в журнале Крелле была опубликована статья Абеля «О некоторых общих свойствах определенного вида трансцендентных функций», представляющая частный случай его исследований по гиперэллиптическим интегралам. Но уже и эта работа привела в восторг Лежандра [140, с. 164], который назвал ее по Горацию «monumentum aere prennius» (монумент крепче бронзы). Основная же статья Абеля «Мемуар об одном общем свойстве весьма обширного класса трансцендентных функций», представленная в Парижскую академию наук 30 октября 1826 г., по вине Коши была опубликована лишь в 1841 г. во французском журнале.

Абель умер рано, «как будто хотел сделать только то, чего никто не мог, предоставив остальную работу другим», — сказал Якоби на своей лекции, посвященной теореме Абеля (69-я лекция из числа записанных Розенхайном [153, с. 1]).

Абель любил свою родину и заботился о своих близких, что проявляется в его письмах. Они были опубликованы в большом томе, посвященном 100-летию со дня рождения Абеля [77].

Хотя А. Крелле делал повторные попытки приглашения его в Берлин, Абель колебался. Между тем он испытывал лишения и болел туберкулезом. В речи по поводу столетия Абеля Л. Силов сказал, что Абель согласился принять предложение из Берлина после того, как стало ясно, что в университете Христиании он не может рассчитывать на твердое положение. Извещение о том, что такое решение было принято, было написано через два дня после его смерти. Он умер в возрасте 27 лет. Величайшего сына Норвегии Абеля вспоминали как светлую личность, скромного человека.

Эллинг Холст в «Историческом введении» к книге «Мемориал Абеля» [77] пишет: «Имя Н. Х. Абеля — это имя, которое Норвегия, самая молодая и самая бедная страна Европы, запечатлела как первое среди великих имен, с которыми связано будущее цивилизации и которое потомство повторяет с постоянной почтительностью» [77, с. 4].

Норвежский математик Ойстейн Оре написал обстоятельную биографию Н. Х. Абеля [144], основанную на письмах и документах. Она читается с большим интересом и волнением.

Глава 3

Школьный учитель

Работа в школах

В гимназии небольшого города Восточной Пруссии Браунсберга (недалеко от Кёнигсберга) однажды произошел необыкновенный случай: утром не пришел на занятия школьный учитель. Сам директор гимназии, Фердинанд Шульц, уважавший этого учителя, пошел к нему в комнату, находившуюся в школьном здании, чтобы узнать, в чем дело. Оказалось, что учитель сидит за столом при свете свечи, с задернутыми занавесками, хотя уже наступил день, и углублен в какие-то математические выкладки. Этим учителем был Карл Вейерштрасс.

Он объяснил директору, что никак не мог прервать свою работу, так как она представляла важное исследование, которое должно оставить след в математике [102, с. 64]. Слова Вейерштрасса не были проявлением нескромности, этим недостатком он не страдал. Работа действительно была важной и сложной.

В Браунсберг Вейерштрасс был приглашен осенью 1848 г. (именно Фердинандом Шульцем, который хотел обновить преподавание в королевской католической гимназии, основанной еще в 1565 г.).

До Браунсберга Вейерштрасс шесть лет (1842—1848) проработал в совсем глухом городке Западной Пруссии Дейч-Кроне, в 30 км к северу от Шнейденмюля. Там он преподавал в младших классах прогимназии (т. е. неполной гимназии) математику и физику, немецкий язык, ботанику, географию, литературу и, короткое время, чистописание.

В 1844 г. оказалось вакантным место преподавателя гимнастики. Оно было предложено Вейерштрассу при условии, что он получит в Берлине соответствующую подготовку на курсах гимнастики. Поездка в Берлин была очень кстати, так как, согласно свидетельству Петера, у Карла Вейерштрасса были в то время тяжелые личные переживания: расстроилась его помолвка. В условиях маленького городка это обстоятельство давало повод к сплетням и злословию.

Некоторые подробности об этой печальной для Вейерштрасса истории 1845—1846 гг. передает Г. А. Шварц

[86, с. 167]. Он пишет, что в Дейч-Кроне Вейерштрасс пользовался успехом у молодых женщин, которых видел в семье одного почтенного адвоката. Там он встретил молодую девушку, родственницу адвоката, и обручился с нею. Но оказалось, что у нее был друг — инспектор имения ее отца. Родители считали его неподходящим в качестве жениха, и девушку послали к родственникам, чтобы прекратить эту дружбу. После обручения с Вейерштрассом девушка продолжала встречаться с инспектором, и Вейерштрасс должен был отказаться от женитьбы. Он долго болел и медленно поправлялся, причем все больше стал уходить с головой в работу. Полученное потрясение, как говорит Шварц, наложило тень на всю последующую духовную жизнь ученого и привело его к некоторой робости и замкнутости.

Впрочем, он не стал женоненавистником. Л. Киперт описывает эпизод из последующей жизни Вейерштрасса, лет через 20 после его неудачи [97, с. 62]. Берлинское математическое общество устраивало время от времени вечера в честь какой-нибудь годовщины своего основания. Однажды (около 1868—1869 гг.) по этому поводу был дан большой бал у математиков, о котором долго вспоминали. Один студент прочел стихи в честь дам и провозгласил приветствие им. Тогда встал Вейерштрасс и с большим воодушевлением произнес хвалебную и остроумную речь в честь девушек.

Но вернемся к жизни Вейерштрасса в Дейч-Кроне. Не только школьная загрузка была тяжелым бременем для ученого редких способностей. В Дейч-Кроне совершенно не было подходящих для Вейерштрасса людей с близкими интересами, не было там ни библиотеки, ни математических книг и журналов.

Впоследствии Вейерштрасс вспоминал о своей жизни школьного учителя-отшельника в глуши, в скучном обществе духовных лиц, как о месте ссылки. В письме к П. Дюбуа-Реймону от 6 июня 1875 г. он пишет, что даже постоянная корреспонденция с интересными для него учеными была бы затруднена из-за дороговизны в то время пересылки писем, при низком жаловании, которое первое время составляло всего 29 талеров в месяц [1] [69, с. 210]. Позже, с 1 октября 1844 г., была установлена ставка преподавателя в 400 талеров в год [80, с. 196].

В Дейч-Кроне Вейерштрасс работал над поставленными им самим задачами в полной изоляции.

---

[1] По-видимому, в то время талер равнялся трем маркам.

Мартовские события буржуазно-демократической революции 1848 г. Вейерштрасс пережил в Дейч-Кроне К.-Р. Бирман говорит [80, с. 197], что математики того времени в Германии были демократами, — это не значит, что они были республиканцами. Дирихле был умеренно средним, Куммер — правым во взглядах, они стояли за конституционную монархию. Якоби был сторонником революции. До городка Дейч-Кроне долетали лишь слабые отзвуки революции, но и Вейерштрасс отдал ей некоторую дань. Будучи помощником цензора по надзору за беллетристической частью местной газеты, он пропустил песни свободы Георга Гервега, считавшегося певцом зари германской революции 1848 г., поэта, находившегося в зените славы, но не пользовавшегося любовью двора. Вейерштрасс с улыбкой рассказывал потом об этом эпизоде своей жизни, добавляя, что досталось не ему, а цензору [109].

Математические работы в Дейч-Кроне

К пребыванию Вейерштрасса в Дейч-Кроне относятся две его работы: «Замечания об аналитических факультетах (факториалах)» [12] и «Приведение некоторого определенного трехкратного интеграла» [13]. Первая была напечатана в Приложениях к годичному отчету прогимназии Дейч-Кроне за 1842/43 учебный год и, конечно, осталась неизвестной математикам. Вторая работа, напечатанная в Дейч-Кроне (1844), была опубликована в широкой печати лишь в 1894 г. в первом томе собрания трудов Вейерштрасса. Обе работы выходят из круга основных направлений работы ученого. Сделаем по их поводу несколько замечаний.

К теме об аналитических факультетах Вейерштрасс вернулся позже, в 1856 г., в большой статье «К теории аналитических факультетов» [16]. Аналитическим факультетом (или факториалом) названа функция трех переменных u, x, y, имеющая вид

$$f(u,\ x,\ y)=\prod_{\nu=0}^{y-1}(u+\nu x)=$$

$$=u(u+x)(u+2x)\ldots[u+(y-1)x],$$

где u и x — неограниченно изменяющиеся переменные, а под y понимается целое положительное число. Вандермонд и Крамп установили следующие пять соотношений между этими функциями:

(a) $f(u, x, y + y') = f(u, x, y) f(u + yx, x, y')$,

(b) $f(u, x, 1) = u$,

(c) $f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y)$,

(d) $f(u, x, y) = f(u + yx - x, -x, y)$,

(e) $f(u, 0, y) = u^y$.

Трем первым условиям удовлетворяет функция u^y для любых значений y. Это дало повод Крампу искать аналитическую функцию для любых y, зависящую также от x, которую он обозначил через $u^{y/x}$. Однако Вейерштрасс утверждает, что такой функции не существует, так как условия (a) —(e) несовместны, если y не является целым числом. Он указывает также на противоречия, которые возникли у последующих авторов: Бесселя, Ома, Оттингера и Крелле. Ко времени написания второй статьи Вейерштрасс познакомился с Крелле, и тот, узнав о возражениях Вейерштрасса против его исследований, благородно предложил ему опубликовать подробную статью об аналитических факультетах в своем журнале. В примечании к этой статье Вейерштрасс говорит, что в его глазах теория аналитических факультетов не имеет важного значения, однако надеется, что его исследования будут небесполезны для математиков. И он вносит ясность в вопрос об этих своеобразных функциях, выводит их свойства, дает разложения некоторых функций в ряды по другим функциям, используя аналитические факультеты.

Эта работа особенно интересна тем, что в ней уже содержится концепция аналитической функции как ряда Тейлора и его аналитического продолжения. Здесь также Вейерштрасс показывает эквивалентность сходимости и расходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ и бесконечного произведения $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + |u_n|)$ [16] (см. [1, с. 175]).

Трехкратный интеграл, о котором идет речь во второй статье, имеет вид

$$S = \iiint F(r, u)\, dx dy dz, \tag{1}$$

где r и u удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} r^2 &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy, \\ u &= fx + gy + hz, \end{aligned} \tag{2}$$

r^2 — неотрицательная квадратичная форма.

Область интегрирования ограничена поверхностями $r=a$ и $r=b$, причем $F(r, u)$ остается конечной для всех точек области.

С помощью преобразования (2) и еще двух

$$v=f'x+g'y+h'z, \qquad w=f''x+g''y+h''z$$

Вейерштрасс приводит r^2 к виду

$$r^2=\lambda^2(u^2+v^2+w^2)$$

и переходит к сферическим координатам

$$u=\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi, \quad v=\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sin\varphi\cos\psi,$$

$$w=\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sin\varphi\sin\psi, \; r=s.$$

Получается интеграл

$$S=\int\limits_a^b\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{s^2}{\sqrt{G}}F\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi ds d\varphi d\psi,$$

в котором интегрирование по ψ выполняется, так что задача сводится к двойному интегралу

$$S=\frac{2\pi}{\sqrt{G}}\int\limits_a^b\int\limits_0^\pi s^2F\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi ds d\varphi =$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{G}}\int\limits_a^b s ds\int\limits_{-s/\sqrt{\lambda}}^{s/\sqrt{\lambda}}F(s, u)\,du.$$

Здесь G — детерминант квадратичной формы:

$$G=ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF.$$

Выводится формула для λ, которая принимает особенно простой вид для

$$r^2=Ax^2+By^2+Cz^2,$$

а именно здесь

$$\lambda=\frac{f^2}{A}+\frac{g^2}{B}+\frac{h^2}{C}, \quad G=ABC.$$

Отдельно Вейерштрасс рассматривает $F(r, u)$ вида

$F(r, u) = \varphi(r) u^m$ и получает простой интеграл

$$S = \frac{2\pi}{(m+1)\sqrt{G}} \lambda^{-m/2} [1 - (-1)^{m+1}] \int_a^b s^{m+2} \varphi(s) ds.$$

Это дает правило вычисления интегралов, если $F(r, u)$ разлагается в ряд по степеням u. Интересно было бы знать, по какому поводу встретился Вейерштрассу интеграл рассмотренного вида, но преобразовал он его к простейшему виду очень искусно.

Еще одна статья была опубликована Вейерштрассом в Дейч-Кроне, в годовом отчете прогимназии за 1844/45 учебный год, это статья: «О сократовом методе учения и его применимости в школьном обучении» [63].

Это сочинение было написано по заданию экзаменационной комиссии в университете Мюнстера в 1841 г., напечатано после переработки в 1845 г.

Вейерштрасс пишет, что о беседах Сократа с юношами и другими гражданами известно по тому, что писали о нем другие философы: Ксенофонт и Платон и что говорили персонажи диалогов Платона: Менон и Федон, Тэетет. Ксенофонт говорил о сценах из жизни Сократа, когда он беседовал с разными лицами; этим самым он исполнял свой долг, который, по его словам, возложили на него боги. Он должен был помогать согражданам советом, увещанием, наставлением и побуждением. Разговоры по большей части имели практическую моральную тенденцию, и их темы были в высшей степени популярны. Обсуждения научных вопросов происходили редко. Такие беседы Сократа мало помогают при изучении его метода.

Платон в своих «Диалогах», напротив, показывает мудреца, который, хотя и постоянно утверждал, что ничего не знает, поднимался до понимания самого высокого и святого. Он предостерегал людей от суетных и пагубных стремлений к богатству, могуществу, благосостоянию, советовал уклоняться от «словесной мудрости» софистов и серьезно стремиться к тому, что вечно, истинно, правдиво. Он показывал пустоту суждений софистов и направлял молодежь, падкую на почести и награды, на путь истинного творчества.

Вейерштрасс, желая понять, что́ можно взять у Сократа для современного обучения, обращался к высказываниям Менона и Теэтета. После персидских войн, начиная с которых греческая культура сделала значительные успехи, среди греческой молодежи стало развиваться стремление к более высокому образованию, в то время как они должны были заниматься военным делом и гимнастикой. Те, кто хотел достичь успеха как оратор на народном собрании или в суде, нуждались в соответствующем образовании. Стали формироваться группы для занятий. Многие приходили к Сократу, чтобы он научил их искусству «управления людьми».

Сократ говорил об идеях. Идеям нельзя дать никакого представления в чувственном мире, они не могут быть полностью реализованы ни в каких чувственных предметах. Сократ рассматривает их как воспоминания души из первоначального, совершенного состояния. Отсюда следует, что душу нельзя познать никаким другим путем, кроме оживления памяти.

Сократ сравнивает свое искусство с помощью при родах, которую оказывала его мать. «Юноша, который ко мне приходит, — говорит Сократ (по Теэтету), — не обучается чему-нибудь у меня, но в самом деле открывает много прекрасного и твердо усваивает это. Помощь новорожденному при этом оказываем мы, бог и я» [63] (см. [3, с. 320]). Самым большим достижением своего искусства Сократ считает утверждение юноши в понимании того, что его душа рождена «не как что-то уродливое и фальшивое, но как что-то имеющее образ и подлинное» [Там же, с. 322].

Самопознание ставится во главу угла. Рассказывают, что один раб ответил на вопрос Сократа очень дерзко и самоуверенно. Но Сократ привел его к сознанию его невежества в поставленном вопросе, и именно поэтому раб сделал значительный шаг вперед к поставленной цели — познания себя.

Внешняя форма сократова метода катехитическая, состоящая из вопросов и ответов, которыми обмениваются друг с другом учитель и ученик. Если ответ ученика неверен, то предлагается другой, наводящий вопрос. Этот метод Вейерштрасс сравнивает с эвристическим, где тоже действует форма вопросов и ответов, но в методе Сократа большая роль принадлежит учителю.

Сократову методу противопоставляется акроаматическая форма обучения (по-гречески акроама — приятное чтение вслух или музицирование). Вейерштрасс находит в нем большие достоинства: учитель в связной речи излагает предмет перед учениками, деятельность которых состоит в восприятии, продумывании и запечатлении в памяти преподнесенного. Но этот метод — собственно лекционный метод — требует, чтобы ученик был уже со зрелой душой. Вейерштрасс ставит вопрос: «Кто знает, какая образующая сила лежит в превосходном докладе?. . . Иногда не только обогащаются знания, но действует и убеждение. Можно ожидать сильнейшего

4 Заказ № 160

й длительного впечатления от дышащей умом и жизнью речи» [63] (см. [3, с. 326]).

В результате Вейерштрасс приходит к заключению, что сократов метод имеет границы применимости. Его область — философские науки, математика, теория общих законов языка. В школе прежде всего внешнее обстоятельство — большое число учеников — препятствует применению этого метода. Сократ начинал свои занятия с одним учеником! И доводил его до определенной высоты состояния. Сократов метод требует исключительного таланта и присутствия в учителе «сократова духа». От учеников требуется определенная зрелость ума и души.

Вейерштрасс заканчивает свой очерк так: «Общий метод для школы Сократ не мог установить. Но было бы прекрасно, если бы его дух, из которого проистекало его влияние, всюду составлял душу воспитания и образования — его высокое стремление к истине, красоте и добру и любовь его чистого нрава» [63] (см. [3, с. 329]).

Математические работы в Браунсберге

Осенью 1848 г., как уже сказано, Вейерштрасс начал преподавание в Браунсберге. Здесь была библиотека, в которой имелись и математические книги. Вейерштрасс подружился с несколькими католическими прелатами [2], образованными людьми, преподававшими в гимназии.

В результате напряженной работы в 1850 г. 35-летний Вейерштрасс заболел и два года не мог заниматься научными исследованиями. Болезнь заключалась в мучительных, длившихся часами головокружениях с тошнотами. Это были спазмы сосудов головного мозга, или, как говорили врачи, «утомление мозга». Некоторое время Вейерштрасса лечили варварским способом, сопровождавшимся сильной болью, но безуспешно. Приступы этой болезни повторялись на протяжении 12 лет.

В Браунсберге была написана очень важная работа Вейерштрасса, положившая начало его исследованиям по теории абелевых функций, «Вклад в теорию абелевых интегралов» [14]. Но опубликована она была в годовом отчете Королевской католической гимназии Браунсберга, в 1848/49 учебном году, где вряд ли кто-нибудь из математиков мог ее обнаружить.

---

[2] Т. е. представители высшего духовенства.

В этой работе, как и в ряде последующих, относящихся, к абелевым интегралам, фигурируют важные основные понятия, которые мы здесь напомним.

Абелевым интегралом называется интеграл вида

$$\int F(x,\ y)\,dx,$$

где $F(x,\ y)$ — рациональная функция своих аргументов, а y удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\varphi_0(x)\,y^n+\varphi_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+\varphi_n(x)=0, \tag{1}$$

$\varphi_k(x)$ — целые полиномы от x.

В первых работах Вейерштрасс занимается частным случаем уравнения (1):

$$y^2=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

(a_k — постоянные), или иначе

$$y=\sqrt{R(x)},\qquad R(x)=a_0x^n+\ldots+a_n.$$

Интегралы вида

$$\int F\left(x,\ \sqrt{R(x)}\right)dx$$

называются гиперэллиптическими, если $n\geqslant 5$.

Если в выражении $F\left(x,\ \sqrt{R(x)}\right)$ четные степени $\sqrt{R(x)}$ заменить полиномами, то останется иррациональность только в первой степени:

$$F\left(x,\ \sqrt{R(x)}\right)=\frac{f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}}{f_3(x)+f_4(x)\sqrt{R(x)}}=\frac{f_5(x)+f_6(x)\sqrt{R(x)}}{[f_3(x)]^2-[f_4(x)]^2R(x)}.$$

Наконец, выделив часть, не содержащую иррациональности, придем к такому выражению:

$$F\left(x,\ \sqrt{R(x)}\right)=f_7(x)+f_8(x)\sqrt{R(x)}=f_7(x)+\frac{f_9(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

где $f_7(x)$ и $f_9(x)$ — рациональные функции от x. Нас будет интересовать только член, содержащий $\sqrt{R(x)}$:

$$J=\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{2}$$

Предположим, что $R(x)$ полином нечетной степени, $n=2\rho+1$. Если бы он был степени $2\rho+2$, то соответствующей подстановкой его можно было привести к случаю $2\rho+1$.

Из функции $f(x)$ может быть выделен полином, а оставшаяся часть разложена на простейшие дроби:

$$f(x) = \sum_k A_k x^k + \sum_{k,\,p} \frac{B_{kp}}{(x-a_k)^p}. \tag{3}$$

(Здесь я пользуюсь книгой М. А. Тихомандрицкого [152].)

Каждый член суммы для $f(x)$ дает интеграл вида

$$J_m = \int \frac{(x-a)^m\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{4}$$

где m — целое положительное или отрицательное число или нуль. Можно показать, что все интегралы вида (4) выражаются через 2ρ интегралов простейшего вида. Чтобы это доказать, рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)^m \sqrt{R(x)}\right] = \frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\,[2mR(x) + (x-a)\,R'(x)],$$

или, разложив $R(x)$ и $R'(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$ и интегрируя:

$$(x-a)^m \sqrt{R(x)} + C = \Sigma\,(2m+k)\,\frac{R^{(k)}(a)}{k\,!} \int \frac{(x-a)^{m+k-1}}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

Полагая последовательно $m=0, 1, 2, \ldots$ и $m=-1, -2, \ldots$, получим соотношения, из которых вытекает, что интегралы, в которых показатель степени выше, чем $2\rho-1$, или ниже нуля, выражаются через $2\rho+1$ интегралов J_m для $m=-1$, 0, 1, 2, ..., $2\rho-1$. При этом для $m=-1$ имеем интеграл

$$J_{-1} = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

Полученные основные интегралы разбиваются на три группы:

$$1.\ \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \int \frac{(x-a)\,dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \ldots,\quad \int \frac{(x-a)^{\rho-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{5}$$

Эти ρ интегралов обладают тем свойством, что они представляют функции, нигде не обращающиеся в бесконечность. Такого рода интегралы называются гиперэллиптическими интегралами первого рода.

$$2.\ \int \frac{(x-a)^{\rho}\,dx}{\sqrt{R(x)}},\quad \ldots,\quad \int \frac{(x-a)^{2\rho-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Эти ρ интегралов являются интегралами второго рода.

Характерное свойство таких интегралов: они обращаются в бесконечность при $x \to \infty$, при этом обращаются алгебраически, т. е. ведут себя как $x^{k+1/2}$, где $k \geqslant 0$.

3. К этой группе относится один интеграл — третьего рода:

$$J_{-1} = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

(Предполагается, что a не является корнем $R(x)$.) Этот интеграл обращается логарифмически в бесконечность при $x=a$, т. е. вблизи $x=a$ он ведет себя как

$$\frac{1}{\sqrt{R(a)}} \log(x-a).$$

Выделенная система интегралов 1-го рода является системой линейно независимых интегралов, т. е. ни один из этих интегралов не может быть выражен линейно через другие. Число ρ линейно независимых интегралов 1-го рода называется рангом гиперэллиптических интегралов, содержащих $\sqrt{R(x)}$, или рангом уравнения $y^2=R(x)$.

В качестве нормальной системы линейно независимых интегралов первого рода Якоби принимал интегралы (5) при $a=0$. Однако можно принять за нормальную систему любую систему интегралов вида

$$\int \frac{a_{m0}+a_{m1}x+\ldots+a_{m\rho-1}x^{\rho-1}}{\sqrt{R(x)}}\,dx, \tag{6}$$

если только определитель $\| a_{mn} \|$ отличен от нуля.

Вейерштрасс выбирает такие интегралы (6) специальным образом, несколько видоизменяя их от одной статьи к другой.

В статье «Вклад в теорию абелевых интегралов» [14] он полагает

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n+1}) = P(x)\,Q(x),$$

причем $P(x)$ — полином степени $n+1$, $Q(x)$ — степени n:

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n+1}),$$

$$Q(x) = (x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n}).$$

Вводя постоянные g_α, он строит полином $F_\alpha(x)$:

$$F_\alpha(x) = \frac{g_\alpha P(x)}{x-a_{2\alpha-1}},$$

$$g_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1})P'(a_{2\alpha-1})}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

$F_\alpha(x)$ — система n линейно независимых полиномов степени n, которые могут быть приняты за нормальную систему полиномов. Затем строится система функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$u_1 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int\limits_{a_3}^{x_2} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int\limits_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$u_2 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int\limits_{a_3}^{x_2} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int\limits_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int\limits_{a_3}^{x_2} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int\limits_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассматриваются как функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Их характер определяется соотношениями

$$\sqrt{\frac{x_\alpha - a_{2\alpha-1}}{a_{2\alpha} - a_{2\alpha-1}}} = u_\alpha + (u_1 u_2 \ldots u_n)_3 + \\ + (u_1 u_2 \ldots u_n)_5 + \ldots \qquad (8)$$ [3]

Скобки со значками обозначают однородные полиномы соответствующей степени. Ряды в правой части (8) сходятся, если абсолютные значения u_m не превосходят некоторых определенных границ. Функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оказываются корнями уравнения n-й степени относительно x:

$$\frac{a_2 - a_1}{x - a_1} p_1^2 + \frac{a_4 - a_3}{x - a_3} p_2^2 + \ldots + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{x - a_{2n-1}} p_n^2 = 1, \qquad (9)$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — однозначные нечетные функции $u_1, \ldots, u_n$, имеющие характер рациональных функций.

При этом p_α как функции $x_1, \ldots, x_n$ имеют вид

$$p_\alpha^2 = \frac{(a_{2\alpha-1} - x_1)(a_{2\alpha-1} - x_2) \ldots (a_{2\alpha-1} - x_n)}{(a_{2\alpha-1} - a_{2\alpha}) P'(a_{2\alpha-1})}. \qquad (10)$$

Если ранг $n = 1$, т. е. имеем эллиптические функции, то, вводя x, u, p вместо x_1, u_1, p_1, получим

---

[3] Здесь и дальше Вейерштрасс не ставит запятых между определенными совокупностями букв u_1, u_2 и т. п.

$$u=\frac{1}{2}\int\limits_{a_1}^{x}\frac{\sqrt{a_3-a_1}\,dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}},$$

$$p=\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}},\quad u=\int\limits_0^p\frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)(1-k^2p^2)}},\qquad k^2=\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1},$$

откуда, как это принято обозначать, будет $p=\operatorname{sn}u$.

Обобщая, Вейерштрасс вводит функции

$$\operatorname{sn}(u_1u_2\ldots u_n)_\alpha=p_\alpha=\sqrt{\frac{(a_{2\alpha-1}-x_1)(a_{2\alpha-1}-x_2)\ldots(a_{2\alpha-1}-x_n)}{(a_{2\alpha-1}-a_{2\alpha})P'(a_{2\alpha-1})}},$$

$$\operatorname{cn}(u_1u_2\ldots u_n)_\alpha=\sqrt{\frac{(a_{2\alpha}-x_1)\ldots(a_{2\alpha}-x_n)}{P'(a_{2\alpha})}},\tag{11}$$

$$\operatorname{dn}(u_1,u_2\ldots u_n)=\sqrt{\frac{(a_{2n+1}-x_1)(a_{2n+1}-x_2)\ldots(a_{2n+1}-x_n)}{P'(a_{2n+1})}},$$

$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Подобно тому как в теории эллиптических функций имеется теорема сложения

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2v}{\operatorname{sn}u\;d\operatorname{sn}v/dv-\operatorname{sn}v\,d\operatorname{sn}u/du}=$$

$$=\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2v}{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v-\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u},$$

устанавливаются теоремы сложения для гиперэллиптических функций

$$\sum_\alpha\operatorname{sn}(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \ldots,\ u_n+v_n)_\alpha\times$$

$$\times\left\{e_\alpha\operatorname{sn}(u_1\ldots u_n)_\alpha\frac{d\operatorname{sn}(v_1\ldots v_n)_\alpha}{dv_\beta}-\operatorname{sn}(v_1v_2\ldots v_n)_\alpha\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\operatorname{sn}(u_1\ldots u_n)_\alpha}{du_\beta}\right\}=e_\beta\{\operatorname{sn}^2(u_1u_2\ldots u_n)_\beta-$$

$$-\operatorname{sn}^2(v_1v_2\ldots v_n)_\beta\}\qquad(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$e_\alpha=\frac{a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1}}{2g_\alpha},\qquad g_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1})P'(a_{2\alpha-1})}}.$$

Далее Вейерштрасс выясняет вопрос о периодичности введенных им функций, с каковой целью строит интегралы

$$K_{\alpha\beta}=\int\limits_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},\qquad \bar K_{\alpha\beta}=i\int\limits_{a_{2\beta}}^{a_{2\beta+1}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

и полагает

$$K'_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=\beta}^{\gamma=n}\bar{K}_{\alpha\gamma}=\bar{K}_{\alpha\beta}+\bar{K}_{\alpha\beta+1}+\ldots+\bar{K}_{\alpha n}.$$

Он замечает, что $2n^2$ интегралов $K_{\alpha\beta}$ и $K'_{\alpha\beta}$ для абелевых трансцендент играют ту же роль, что и величины K, K' для эллиптических функций. Так, если положить

$$\omega_\alpha=m_1K_{\alpha 1}+\ldots+m_nK_{\alpha n}+i(n_1K'_{\alpha 1}+\ldots+n_nK'_{\alpha n}), \quad (12)$$

где m_k, n_k — целые числа, положительные и отрицательные, то имеют место уравнения

$$\operatorname{sn}(u_1+2\omega_1,\ldots,u_n+2\omega_n)_\alpha=(-1)^{m_\alpha+n_1+\ldots+n_{\alpha-1}}\operatorname{sn}(u_1u_2\ldots u_n)_\alpha,$$

$$\operatorname{cn}(u_1+2\omega_1,\ldots,u_n+2\omega_n)_\alpha=$$
$$=(-1)^{m_\alpha+n_1+\ldots+n_\alpha}\operatorname{cn}(u_1u_2\ldots u_n)_\alpha,$$

$$\operatorname{dn}(u_1+2\omega_1,\ldots,u_n+2\omega_n)=$$
$$=(-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_n}\operatorname{dn}(u_1u_2\ldots u_n).$$

(При $\alpha=1$ нужно положить $n_0=0$.)

Между полными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода имеет место соотношение Лежандра $EK'+E'K-KK'=$ $=\pi/2$.

Вейерштрасс для своих функций получает ряд формул, соответствующих соотношению Лежандра. Для этого он рассматривает абелевы интегралы 2-го рода

$$J(u_1u_2\ldots u_n)_\alpha=\sum_\beta\int\limits_{a_{2\beta-1}}^{x_\beta}\frac{a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1}}{x-a_{2\alpha-1}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Полные гиперэллиптические интегралы он обозначает так:

$$J_{\alpha\beta}=\int\limits_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}}\frac{a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1}}{x-a_{2\alpha-1}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\bar{J}_{\alpha\beta}=i\int\limits_{2\beta}^{2\beta+1}\frac{a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1}}{x-a_{2\alpha-1}}\frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$J'_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=\beta}^{\gamma=n}\bar{J}_{\alpha\gamma}=\bar{J}_{\alpha\beta+1}+\ldots+\bar{J}_{\alpha n}.$$

Сохраняя прежнее обозначение (12) для ω_α, Вейерштрасс вводит величины

$$\mathscr{E}_\alpha=\sum_\beta(m_\beta J_{\alpha\beta}+n_\beta J'_{\alpha\beta}i)$$

и получает

$$J(u_1 + 2\omega_1, \ldots, u_n + 2\omega_n)_\alpha = J(u_1 u_2 \ldots u_n)_\alpha + 2\mathcal{E}_\alpha.$$

Далее он выводит соотношения между полными интегралами первого и второго рода:

$$\sum_\alpha (K_{\alpha\beta} J_{\alpha\gamma} - J_{\alpha\beta} K_{\alpha\gamma}) = \begin{cases} 0, & \gamma \neq \beta, \\ \pi/2, & \gamma = \beta, \end{cases}$$

и еще несколько соотношений такого же рода, содержащих $J'_{\alpha\beta}$ или $K'_{\alpha\beta}$.

Вейерштрасс предполагал, что корни полинома $R(x)$ действительны и расположены в возрастающем порядке, но он делает оговорку, что это не обязательно. Кратко сообщает он о возможности обобщения понятия Θ-функций Якоби на случай многих переменных.

Рассмотренная нами работа в конце имеет пометку: Браунсберг, 17 июня 1849 г. В Браунсберге же он писал другую работу по теории абелевых функций: «К теории абелевых функций» [15]. Она помечена так: Солеварня Вестернкоттен в Вестфалии, 11 сентября 1853 г. Вейерштрасс заканчивал статьи в доме родителей, куда приезжал на каникулы. На этот раз он решил послать свою статью в большой математический журнал — журнал Крелле, в 47-м томе которого она и вышла в свет. Возможно, что ему придало смелость то обстоятельство, что как раз в 1853 г., как мы уже говорили, ему стало известно высокое мнение Гудермана о его способностях, высказанное в отзыве на его письменные работы в Мюнстерском университете.

Эта статья сразу обратила на себя внимание математиков, что повлекло коренное изменение судьбы Вейерштрасса. Но об этом будет сказано в следующем разделе, а здесь мы коротко расскажем об этой второй работе Вейерштрасса по абелевым функциям.

Сначала он, в других обозначениях, повторяет содержание первой статьи, а затем обобщает ее результаты. За $R(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ он принимает полиномы

$$R(x) = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{2n}),$$

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_{2n-1}),$$

$$Q(x) = (x - a_0)(x - a_2) \ldots (x - a_{2n}).$$

Вводятся функции Абеля многих переменных, которые с точностью до постоянных множителей совпадают с функциями (11):

$$\mathrm{al}(u_1 u_2 \ldots u_n) = A_\gamma \sqrt{(a_\gamma - x_1)(a_\gamma - x_2)\ldots(a_\gamma - x_n)},$$

$$A_{2\alpha-1} = \sqrt[4]{\frac{-Q(a_{2\alpha-1})}{P'(a_{2\alpha-1})}}, \qquad A_{2\beta} = \sqrt{\frac{P(a_{2\beta})}{Q'(a_{2\beta})}}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Далее Вейерштрасс вводит полные интегралы, аналогичные интегралам $K_{\alpha\beta}$ первой работы, и рассматривает вопрос о периодах абелевых функций. Наконец, он вводит такую функцию:

$$\mathrm{Sl}(u_1 u_2 \ldots u_n) = \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где a — произвольная постоянная величина (не совпадающая ни с одним из корней $R(x)$).

Это логарифмического типа функция от $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которая может быть представлена как:

$$\mathrm{Sl}(u_1 \ldots u_n) = A \log \varphi(u_1 \ldots u_n) + \varphi_1(u_1 \ldots u_n),$$

где φ, φ_1 — однозначные функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

С помощью функции Sl строится ряд соотношений и определяются функции $\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)_\alpha$ и $\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)$, аналогичные Θ-функциям. Через них функции $\mathrm{al}(u_1 \ldots u_n)_\alpha$ определяются в виде отношений

$$\mathrm{al}(u_1 \ldots u_n)_\alpha = \frac{\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)_\alpha}{\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)}.$$

Разложения в ряды функций Al имеют вид

$$\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n) = 1 + (u_1 \ldots u_n)_2 + (u_1 \ldots u_n)_4 + \ldots,$$

$$\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)_{2\alpha-1} = \sqrt[4]{\frac{-Q(a_{2\alpha-1})}{P'(a_{2\alpha-1})}} \times$$

$$\times \{u_\alpha + (u_1 \ldots u_n)_3 + (u_1 \ldots u_n)_5 + \ldots\},$$

$$\mathrm{Al}(u_1 \ldots u_n)_{2\beta} = \sqrt[4]{\frac{P(a_{2\beta})}{Q'(a_{2\beta})}} \{1 + (u_1 \ldots u_n)_2 +$$

$$+ (u_1 \ldots u_n)_4 + \ldots\}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n; \; \beta = 0, 1, \ldots, n),$$

причем эти ряды сходятся для всех значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Выясняется вопрос о периодичности введенных Вейерштрассом абелевых функций и устанавливается ряд их свойств.

Высокую оценку этой работе дал Дирихле, о чем мы будем говорить в следующем разделе. Однако он отметил, что не для всех положений автором даны доказательства, хотя он не сомневается в справедливости этих положений.

Через два года, в 1856 г., Вейерштрасс опубликовал в этом же журнале Крелле развернутую статью «Теория абелевых функций» [24], в которой, между прочим, ввел такие обозначения (в дальнейшем всегда ρ — ранг абелева интеграла):

$$R(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2\rho+1}),$$

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho),$$

$$Q(x) = A_0(x - a_{\rho+1})(x - a_{\rho+2})\ldots(x - a_{2\rho+1}).$$

В этих работах браунсбергского периода Вейерштрасс решил основную задачу, поставленную Якоби, — обращение абелевых интегралов первого рода.

Приглашение Вейерштрасса в Берлин

Мы уже рассказывали о том, что Вейерштрасс работал школьным учителем в провинциальных городках Германии, упомянули также о внезапном перевороте в жизни Вейерштрасса. Это было не так просто, как может показаться с первого взгляда. По словам К.-Р. Бирмана, исследовавшего вопрос о приглашении Вейерштрасса в Берлин, необходимо было стечение ряда обстоятельств, чтобы изменить судьбу ученого [79, с. 41].

Первым обратил внимание на статью 1854 г. Карл Борхардт (1817—1880). В то время он, доцент Берлинского университета, был уже хорошо известен в математических кругах. Он приехал к Вейерштрассу в Браунсберг, чтобы познакомиться с только что открытым гением [79, с. 43]. Борхардт был учеником Якоби и мог сразу оценить работу Вейерштрасса как продолжателя Якоби. Борхардт записал лекции Якоби, читанные им в Кёнигсбергском университете в 1835/36 г. по теории эллиптических функций [95, т. 1, с. 479 и след.], а также его лекции 1842/43 г. по уравнениям с частными производными и вариационному исчислению [95].

Вейерштрасс и Борхардт подружились и оставались большими друзьями до самой смерти Борхардта.

После Борхардта Вейерштрасса в Браунсберге посетила делегация из Кёнигсберга во главе с Ф. Ришело (1808—1875), чтобы вручить ему диплом доктора наук. Ф. Ришело, также ученик Якоби, тоже понял глубину работы Вейерштрасса 1854 г., и по его представлению философский факультет Кёнигсбергского университета присудил Вейер-

Л. Крелле

штрассу степень доктора honoris causa. При вручении диплома Ришело сказал знаменательные слова: «Все мы нашли в г-не Вейерштрассе своего учителя» [109, с. 51]. Эти слова Вейерштрасс всю жизнь вспоминал как самые дорогие. Вспомнил их и в день своего 80-летия, причем с грустью добавил: «Однако все в жизни приходит слишком поздно» [Там же].

Докторский диплом повлек назначение Вейерштрасса 30 июня 1854 г. старшим преподавателем в школе Браунсберга.

Одним из первых оказал поддержку Вейерштрассу Август Леопольд Крелле. Он долгие годы состоял консультантом по математическим вопросам в министерстве просвещения.

В письме в министерство по поводу дотации на свой журнал 27 ноября 1854 г. Крелле обратил внимание министра на только что появившуюся работу Вейерштрасса и высказал мнение о желательности предоставления ему подходящего места. Затем, 4 января 1855 г., незадолго до смерти, Крелле опять написал министру письмо о том, что надо поддержать такой выдающийся талант. Он сравнил одаренность Вейерштрасса с талантами рано умерших Абеля (27 лет), Якоби (44 лет) и Эйзенштейна (29 лет). Если Вейерштрассу не скоро будет предоставлено подходящее место для работы, то «этот уже не совсем молодой и вследствие двойной нагрузки — учителя и исследователя — уже склонный к болезням человек рано погибнет, как это случилось с Абелем и Эйзенштейном. Но это была бы новая прискорбная потеря для математики. Ведь если имеется много выдающихся учителей, то редко появляются настоящие ученые, являющиеся учителями самой науки, т. е. учителями учителей» [79, с. 45].

Вскоре, 1 февраля 1855 г., сам Вейерштрасс обратился к министру с письмом. К нему он приложил оттиски своих статей и сообщил о том одобрении, которое они получили.

При этом он добавлял: «Но чем дороже для меня это одобрение и чем больше оно побуждает меня приняться с удвоенным усердием за завершение начатых мною больших работ, тем болезненнее чувствую я, что шаткое состояние моего здоровья угрожает сделать это почти невозможным, если я останусь в моем теперешнем положении» [79, с. 45]. Если сейчас еще невозможно предоставить ему подходящее положение, то Вейерштрасс просит обеспечить ему отпуск на 6—9 месяцев для восстановления здоровья и завершения начатой работы.

П. Дирихле

Не так легко было Вейерштрассу получить отпуск, пришлось еще писать и добиваться свидания с тем, от кого это зависело, но, наконец, он получил годовой отпуск, начиная с 29 сентября 1855 г.

Непосредственное участие в дальнейшей судьбе Вейерштрасса принял П. Г. Дирихле. Он написал 19 мая 1855 г. для прусского министра просвещения К. О. фон Раумера (1805—1859) обстоятельный отзыв о работе Вейерштрасса [78, с. 303—312]. Начинается этот отзыв историческим очерком исследований в области эллиптических и гиперэллиптических функций. Приведем сокращенное его изложение.

Дирихле говорит, что после бесплодных усилий великих математиков Ньютона и Лейбница свести эллиптические интегралы, встречающиеся в различных задачах геометрии и механики, к более простым интегралам, выражающимся через логарифмы и дуги окружностей, бессмертный Эйлер в середине XVIII в. нашел, что они, подобно логарифмам и дугам окружностей, обладают свойствами сложения и умножения.

Далее Лагранжем, Ланденом, Лежандром и особенно Абелем и Якоби была развита обширная теория этих трансцендент, которая является «такой достойной восхищения благодаря красоте и богатству ее теорем, а также таким неистощимым вспомогательным средством, которое она представляла для прикладной математики и продолжает ежедневно вновь представлять» [78, с. 304].

Ближайшая попытка — обращения абелевых интегралов таким же способом, как это было сделано блестящим образом Абелем и Якоби, оказалась неприемлемой в общем случае и приводила к неразрешимым противоречиям. Но Якоби сразу выяснил, что эти обратные функции должны быть четырехкратно или выше периодическими, в то время как аналитическая функция допускает не более двух периодов[4].

После того как Якоби в течение нескольких лет исследовал задачу со всех сторон, он нашел, что здесь при обращении получаются две или несколько функций с таким же числом аргументов. Это открытие он изложил на десяти страницах, за которыми следовало обстоятельное изложение, — в нем аналитическая природа этих обратных функций была разъяснена полностью.

В 1840 г. Берлинской академией наук была объявлена премия за исследование обращения абелевых интегралов. Этот вопрос оставался без ответа, но самая постановка его была своевременна. Через несколько лет Парижская академия наук поставила тот же вопрос, и премия была вручена приват-доценту И. Г. Розенхайну (1816—1887)[5].

Одновременно с Розенхайном другой молодой математик, необыкновенно одаренный, работающий в здешней Королевской библиотеке, доктор Гёпель (1812—1847), не участвуя в конкурсе на премию, разрабатывал ту же тему с таким же успехом. Гёпель выступил со статьей, которая была опубликована после его смерти, с теми же основными результатами, что и у Розенхайна.

Совпадение исследований обоих математиков основано на том, что они ограничиваются изучением того класса интегралов, которые следуют сразу за эллиптическими и содержат квадратный корень из полинома, степень которого не превышает шести. В своем заключении Гёпель утверждает, что его метод может быть применен ко всем интегралам от алгебраических функций, однако Якоби в некрологе Гёпеля опроверг это, указав на новые трудности, которые здесь возникают [78, с. 309].

Переходя к оценке статьи Вейерштрасса, Дирихле пишет:

Для тех более высоких классов интегралов, в которых иррациональность входит только через квадратный корень, кажется, г-ну д-ру Вейерштрассу удалось преодолеть все трудности и полностью установить соответствующие функции, притом таким путем, который, вероятно, подобен методу, применяемому в теории эллиптических функций Абелем и Якоби, так как г-н Вейерштрасс переходит от интегралов к их обращению. Я говорю здесь не с полной определенностью только потому, что для каждого, кто должен высказать суждение о математических успехах, встает долг совести, прежде чем сделать такую небольшую оговорку, как отметить неполное, не удовлетворяющее всем требованиям научной строгости, обоснование установленной теоремы. Но до сих пор г-н Вейерштрасс дал только беглое представление своих исследований, в котором отсутствуют все промежуточные выкладки.

---

[4] По поводу числа периодов аналитической функции см. далее.

[5] Даты рождения и смерти приведены К.-Р. Бирманом.

Добавлю, однако, что в этом кратком обзоре его исследований обнаруживается такое основательное и глубокое понимание предмета, что едва ли остается сомнение, что он в дальнейшем, в специальном изложении, даст полное обоснование всему, что здесь неясно. Я говорю это с тем большей уверенностью, что подробное изложение одного пункта его работы в школьной программе соответствует сказанному мною.

Такое же впечатление, которое произвела на меня статья и которое усилилось благодаря личному общению с г-ном Вейерштрассом, появилось и у товарищей по специальности, среди которых можно отметить г-на Лиувилля ⟨. . .⟩, который, бесспорно, обладает самыми обширными познаниями в математической литературе среди всех ныне живущих французских математиков. Г-н Лиувилль не только побудил г-на д-ра Вёпке (1826—1864) перевести работу Вейерштрасса на французский язык для издаваемого им журнала, но прошлой осенью, когда я был в Туле и посетил его, он письменно изложил свое одобрение работы Вейерштрасса в самых теплых выражениях.

Отмечая большое значение, которое я вместе с другими коллегами придаю работам г-на д-ра Вейерштрасса, я считаю в высшей степени желательным, чтобы ему было предоставлено такое положение, в котором он мог бы не спеша проработать свои начатые исследования и мог бы целиком посвятить науке свое редкое дарование. И я чувствую себя тем более вынужденным настоятельно просить, чтобы это могло произойти как можно скорее благодаря просвещенной заботе Вашего превосходительства, так как, к сожалению, состояние здоровья г-на Вейерштрасса нуждается в большой пощаде, которой у него не было в его теперешнем положении, при большем чем 20 числе еженедельных часов и соответствующих корректурах.

Г-н Вейерштрасс, как я узнал от него, страдает приступами мозговых спазмов, при появлении которых он делается на короткое время неспособным ни к какому умственному напряжению [78, с. 310].

Как мы уже указывали, через два года, в 1856 г., Вейерштрасс написал статью в том же журнале Крелле «Теория абелевых функций». В ней он доказал и обосновал предложения, которые Дирихле отметил как недоказанные. Давид Гильберт (1862—1943) в статье, посвященной памяти Вейерштрасса, писал: «Решение якобиевой проблемы обращения, которую Вейерштрасс в этих работах дал впервые и которая для любых абелевых интегралов сначала была дана Риманом, а потом другим путем приведена в лекциях самим Вейерштрассом, представляется мне одним из величайших достижений анализа» [94, с. 62].

В 1855—1856 гг. среди немецких математиков произошли большие перемещения. В 1855 г., 23 февраля, в Гёттингене скончался Гаусс, и на его место был приглашен Дирихле как его последователь. Дирихле до того работал в Берлине и на свое место рекомендовал Э. Куммера (1810—1893). Вторым он поставил Ришело, а как дальнейших возможных кандидатов указал Гессе, Розенхайна и Вейерштрасса. Место получил Куммер, работавший раньше в Бреслау.

Вейерштрассу захотелось получить должность в университете Бреслау, и он 10 августа 1855 г. снова написал министру и одновременно на философский факультет в Бреслау. Он известил об этих своих шагах директора гимназии в Браунсберге Ф. Шульца.

Но на место Куммера претендовали несколько математиков, и оно досталось Ф. Иоахимсталю (1818—1861) из Галле. Заметим, что Иоахимсталь вместе с К. Борхардтом прослушал в 1847 г. курс лекций Лиувилля по теории двоякопериодических функций. Занимался он в основном дифференциальной геометрией.

Против предложения места Вейерштрассу высказался сам Куммер по соображениям, которые он изложил в письме Ф. Шульцу от 14 августа 1855 г. Он считал, что Вейерштрассу следует читать курсы по абелевым функциям в каком-нибудь большом университете. В Бреслау же таких возможностей не было, Вейерштрассу пришлось бы нести большую педагогическую нагрузку и читать общие курсы математики. Куммер хотел, чтобы Вейерштрасс работал в Берлине, и поднял вопрос о присуждении ему звания члена Берлинской академии наук.

Вейерштрассом начал интересоваться Александр фон Гумбольдт (1769—1859). К.-Р. Бирман, много написавший об А. Гумбольдте, перечисляет случаи, когда А. фон Гумбольдт оказал поддержку математикам: вместе с Крелле он искал место в Берлине для Абеля, выдвигал Якоби и покровительствовал Эйзенштейну, содействовал переводу Дирихле из Парижа в Бреслау, а затем в Берлин, оказывал протекцию Куммеру, Розенхайну, Штейнеру, Ришело и Вёпке, называл Плюккера своим другом, наполовину финансировал журнал Крелле и, наконец, ему обязано окончательное приглашение Вейерштрасса [79, с. 49].

А. Гумбольдт был великим естествоиспытателем и путешественником; он не был математиком и писал так о своей деятельности: «Уходя скоро из очень подвижной, трудовой жизни, я думаю, что как ученый исполняю свой долг, когда говорю о тех, кто обещает в астрономии, физике, химии, математике благодаря выдающемуся таланту и учебной деятельности поддерживать и обновлять старую славу немецкой нации» [79, с. 50].

А. Гумбольдт обратился по поводу Вейерштрасса к директору Промышленного института (Gewerbeinstitut) Друкенмюллеру, и тот написал 8 мая 1856 г. министру торговли. С 14 июня Вейерштрасс был зачислен в Промышленный институт со ставкой в 1500 талеров в год. На несколько дней раньше, 9 июня, Куммер обратился в Берлинский университет с предложением назначить Вейерштрасса и Борхардта экстраординарными[6] профессорами. Но факультет, выразив единогласно уверение в том, что появление Вейерштрасса в стенах университета было бы для него величайшей честью, решил подождать избрания Вейерштрасса в академию наук, когда он сможет по праву читать лекции как академик. Дело было отложено.

В сентябре 1856 г. Куммер и Вейерштрасс приехали в Вену на собрание естествоиспытателей. Австрийский министр просвещения граф Тун предложил Вейерштрассу персональную профессуру в любом австрийском университете с окладом в 2000 гульденов. Вейерштрасс колебался, но Куммер по возвращении из Вены, в обход факультета, обратился к прусскому министру просвещения с просьбой учредить добавочное место экстраординарного профессора для Вейерштрасса. Уже через три дня министр известил Вейерштрасса о предоставлении ему должности с последующим утверждением королем. Вейерштрасс согласился и никогда потом не раскаивался в принятом решении [Там же].

Осенью 1856 г., 19 ноября, Вейерштрасс был избран действительным членом Берлинской академии наук. Начинался новый период его жизни.

---

[6] Экстраординарный — сверхштатный, в противоположность ординарному, т. е. штатному.

5 Заказ № 160

Глава 4

В Берлине

Вейерштрасс и его соратники

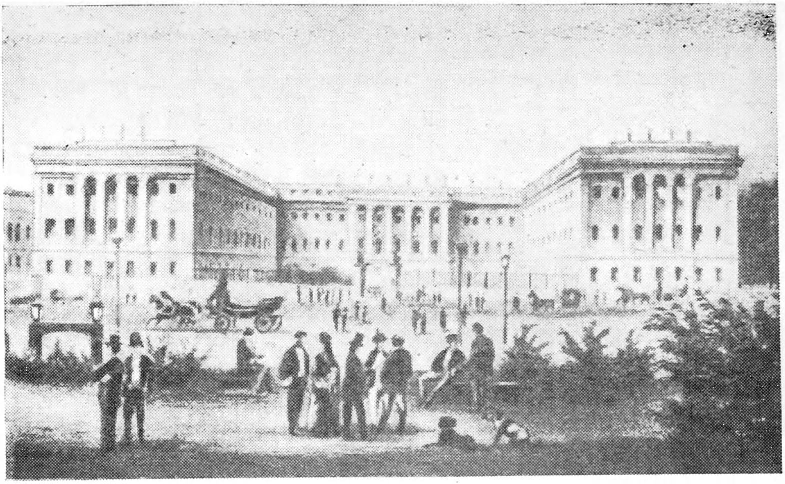
В день Лейбница [1], 9 июля 1857 г., Вейерштрасс выступил на открытом собрании Берлинской академии наук с академической вступительной речью. Он поблагодарил Академию за высокую честь избрания его в свои члены, добавив: «Хорошо зная, как далеко мои работы из-за многочисленных препятствий отстоят от цели, поставленной мною в воодушевлении молодости, я не сомневаюсь в том, что Академия руководствовалась в своем выборе не столько моими теперешними достижениями, сколько главным образом благожелательной оценкой возможных ожиданий» [17] (см. [1, с. 223]).

Затем Вейерштрасс кратко говорит о своих исследованиях: «Сравнительно новая ветвь математического анализа, теория эллиптических функций, с тех пор как я с нею познакомился в первый раз под руководством моего глубокоуважаемого учителя Гудермана, которому я всегда буду обязан благодарной памятью, произвела на меня мощное притягивающее воздействие, которое остается определяющим для всего хода моего математического развития» [Там же, с. 224].

Перечислив заслуги в теории эллиптических функций Эйлера, Лежандра, Абеля и Якоби, он продолжает: «Представить на самом деле и ближе изучить свойства этих величин совершенно нового рода, не имевших себе подобных в анализе, отныне становится одной из главных задач математики, которую решил исследовать и я, когда ясно представил ее смысл и значение. Однако было бы безумным, если бы я желал размышлять только о решении подобной проблемы, не будучи подготовленным путем углубленного изучения средств, которые должны мне способствовать, и не упражняясь сначала в решении менее трудных проблем» [17] (см. [1, с. 224]). Дальше Вейерштрасс, которого мы знаем как теоретика, заботящегося о строгости решения задач, говорит

---

[1] День Лейбница отмечался в Берлинской академии наук ежегодно в один из четвергов начала июля (день рождения Лейбница — 1 июля 1646 г.).



Берлинский университет в середине XIX в. (из книги [122])

о прикладном значении математики в таких словах: «Но я считал бы для себя удачей, если бы в дальнейшем я мог найти применение моих исследований по математике, а именно к физике <. . .>. Мне совсем не безразлично, пригодна теория для таких приложений или нет. Я не боюсь, что при этом будет снижено значение математики как чистой науки, на которое она с полным правом претендует. Никто охотнее меня не согласится с тем, что цель науки нужно искать не вне ее и что это не только повредило бы ее значению, нет, было бы грешно, если бы на нее вместо полной любви и преданности смотрели как на служанку <. . .>. Я думаю, что связь между математикой и естествознанием должна пониматься глубже, чем это может иметь место, когда физик видит в математике только неизбежную вспомогательную дисциплину или когда математик смотрит на поставленные физиком вопросы, только как на собрание примеров для пояснения своих методов» [Там же, с. 225].

По поводу вопроса о том, приложимы ли математические теории непосредственно к естествознанию, Вейерштрасс приводит в качестве примера, что греки изучали конические сечения «раньше, чем кто-нибудь из них заподозрил, что они определяют пути планет». И он продолжает: «Я живу надеждой, что будет найдено еще много функций со свойствами, подобными тем, которыми Якоби прославил свои Θ-функции, позволяющие узнать, на сколько квадратов можно

К. Борхардт

разложить каждое число, как спрямить дугу эллипса, и, кроме того, добавлю я, они и только они в состоянии установить истинный закон движения маятника» [Там же, с. 225].

Замечу, что впоследствии Вейерштрасс читал курс приложения теории эллиптических функций к задачам геометрии и механики. Эти лекции заняли целый том (том VI) трудов Вейерштрасса.

Итак, во вступительной речи Вейерштрасс рассказал о поставленных им перед собой задачах в своей будущей деятельности. И он с честью выполнял намеченное.

Поселился Вейерштрасс в Берлине с двумя сестрами, Кларой и Элизой. Потом к нему приехал овдовевший отец и прожил у него 10 лет, до своей смерти в 1869 г. Вейерштрасс несколько раз менял квартиру. Судя по его письмам к Ковалевской, в то время когда она была его ученицей, он жил на Потсдамерштрассе, 40 (письма от 16 декабря 1874 г. и от 12 января 1875 г.), затем это была Линкштрассе, 33 (письма от 28 октября 1880 г. до 11 апреля 1882 г.) и, наконец, Фридрих-Вильгельмштрассе, 16 (письмо от 22 мая 1888 г.) — до конца жизни.

С переездом Вейерштрасса в Берлин для него началась новая, но по-прежнему напряженная жизнь. Двенадцать часов в неделю в Промышленном институте, две лекции в неделю в университете (а ко всем лекциям надо заново готовиться), научные работы и публикации — все это создавало большую нагрузку. Кончилось дело тем, что 16 декабря 1861 г. во время лекции в университете у Вейерштрасса произошло сильное головокружение и он упал в обморок. Вейерштрасс перестал ходить в Промышленный институт, хотя еще числился в нем до 1864 г. Со 2 июля 1864 г. он был утвержден ординарным профессором вместо ушедшего в отставку Мартина Ома (1792—1872). До самой смерти он состоял профессором университета, хотя лекции читал лишь до зимнего семестра 1889 г., последним его курсом было вариационное исчисление.

В Берлине Вейерштрасс сразу же быстро сошелся со своими коллегами К. Борхардтом, Э. Куммером и Л. Кронекером.

Лампе говорит, что они составили «сиятельный застольный круг» (erlauchte Tafelrunge) в Берлинском университете. Слушатель Вейерштрасса Киперт, приехав в Берлин после каникул, навестил одного за другим всех четырех профессоров, последним Вейерштрасса. Оказалось, что тот уже был осведомлен о всех предыдущих визитах [97, с. 63].

Карл Вильгельм Борхардт был учеником и другом Якоби. С 1848 г., после получения ученой степени, он стал приват-доцентом Берлинского университета. Среди его лекций были: алгебраический анализ, теория движения упругих тел и теория эллиптических функций. Борхардт обратил на себя внимание математиков двумя работами по системам дифференциальных уравнений, играющих важную роль в небесной механике. Заслугой Борхардта является запись лекций Якоби, о чем мы уже говорили, а также обработка и издание лекций Лиувилля, которые тот читал в 1847 г. перед Борхардтом и Иоахимсталем [140, с. 160].

После смерти Крелле Дирихле уговорил Борхардта взять редактирование «Журнала чистой и прикладной математики». Борхардт, человек состоятельный, вносил и свои средства в издание журнала.

В 1869 г. Клебш основал журнал «Mathematische Annalen», и Борхардт, хотел уже отказаться от своего журнала, «но долг заставил его остаться» [81, с. 60].

В конце 1885 г. Борхардт по предложению Дирихле был избран в Берлинскую академию наук. Как член академии, он читал лекции в университете в 1861/62 г. и после большого перерыва из-за болезни—зимой 1877/78 г. и в 1879/80 г., последние два семестра — по теории детерминантов и их приложениям. Профессуры он не получил, несмотря на попытку Куммера в этом направлении.

О дружеских отношениях между Борхардтом и Вейерштрассом свидетельствует письмо Вейерштрасса С. В. Ковалевской от 23 сентября 1875 г. из Рюдерсдорфа, под Берлином. Он пишет:

Начиная с 3 августа я нахожусь у моего друга Борхардта, имеющего в трех милях от Берлина прелестное поместье. Несколько недель здесь также были мои сестры, а в течение 14 дней и коллега Кирхгоф. Мы много бываем на воздухе, но также и работаем ежедневно по нескольку часов (11 этого месяца я послал Тебе вновь изданную Борхардтом переписку между Якоби и Лежандром). Мы освободили письма Якоби от бесчисленных опечаток, искажавших их в издании Бертрана, и сделали впервые доступными письма Лежандра из архива Якоби [74, с. 215].

После смерти Борхардта Вейерштрасс пишет С. В. Ковалевской 28 октября 1880 г.:

Ты, без сомнения, знаешь, что мой друг Борхардт умер прошлым летом после тяжелой болезни. Уже с 1 апреля я принял от него редактирование журнала и в существующих условиях мне вместе с Кронекером приходится продолжать его. Затем мы решили в Академии приступить к изданию полных собраний трудов Якоби, Дирихле и Штейнера. Борхардт взял Якоби, я Штейнера; после того как Борхардт заболел, мне пришлось продолжать издание трудов Якоби, так как для этого не нашлось подходящего лица. Я раньше и не подозревал, сколько времени и труда потребует такое предприятие. Кроме того, Борхардт назначил меня опекуном его шести детей. При тех тесных отношениях, в которых я в течение 25 лет находился с Борхардтом и его семьей, я не мог отказаться и делом и советом помочь г-же Борхардт в управлении ее значительным состоянием, так как она совершенно неопытна в таких делах [74, с. 221].

Эрнст Эдуард Куммер

Мы уже говорили об Э. Куммере и его помощи Вейерштрассу в устройстве в Берлине. Куммер был последователем Дирихле в его работах и его преемником в Берлине с 1855 г., когда Дирихле переехал в Гёттинген.

Раньше, до 1842 г., в течение 11 лет Куммер был учителем гимназии в Лигнице, однако он продолжал заниматься наукой и переписывался с математиками. Родился он в Горау (теперь Зары в ПНР) в семье врача. Он рано потерял отца, его мать бралась за всякую работу, до шитья солдатского белья. В 1828 г. он поступил в университет в Галле, где изучал теологию. Его интересовала математика, причем сначала он рассматривал ее как науку, подготовительную к философии. Философские науки продолжали интересовать его всю жизнь.

В научной деятельности Куммера различают три периода. В Лигнице был его аналитический период. В частности, он занимался теорией гипергеометрического ряда. Эти исследования вызвали интерес Дирихле и побудили его выдвинуть Куммера в члены-корреспонденты Берлинской академии наук в 1838 г. С 1842 г. Куммер стал работать в университете Бреслау (теперь Вроцлав). Наступил 20-летний период его занятий теорией чисел, в которой, в частности, он ввел понятие «идеальных чисел», доставивших ему наибольшую славу. В 1855 г. Дирихле выдвинул Куммера в ординарные члены Берлинской академии наук.

После пяти лет пребывания в Берлине начинается третий период творческого пути Куммера — развитие его геометрической теории прямолинейных конгруэнций (лучевых систем, Strahlensysteme). Он занимался также физическими и баллистическими системами.

Куммеру дается такая характеристика: «Простой и прямой, здравомыслящий и деловой, консервативный также и в математической области, в чем его упрекал Вейерштрасс, он был равнодушен к тому, что происходило в математике. С другой стороны, он был заботливым учителем, блестящим лектором» [83, с. 61].

Э. Куммер

Вейерштрасс в письме к С. В. Ковалевской от 27 августа 1883 г., рассуждая о том, что в среде старых математиков есть люди разного сорта, сравнивает Кронекера и Куммера и говорит:

Мой дорогой друг Куммер, например, и в то время, когда он все свои силы тратил на нахождение доказательств более высоких законов взаимности, и затем, когда он их истощал, не интересовался тем, что происходит в математике. Он относится к этому если не отрицательно, то во всяком случае безразлично. Если Ты его спросишь, основывается ли евклидова геометрия на ложном положении, то он с этим согласится. Но если рассмотреть евклидову геометрию без этого положения, то это будет противоречить его взглядам и основанные на этом общие или эмпирические исследования он будет считать никчемными, даже вызывающими отвращение [74, с. 241].

Среди учеников Куммера были Л. Кронекер, П. Дюбуа-Реймон, П. Гордан, Г. А. Шварц, Г. Кантор. Из русских лекции Куммера слушали многие, в том числе Д. Ф. Селиванов. Потом Селиванов, читая лекции на Высших женских курсах, вспоминал иногда время пребывания за границей. Однажды при изложении в теории конечных разностей вопроса о погрешностях вычислений он рассказал, как прогуливался с Куммером и еще одним студентом. Куммер, подняв с дороги булыжник, сказал: «Это эллипсоид, все зависит от степени приближения».

В 1875 г. Вейерштрасс получил учрежденный королем Фридрихом Вильгельмом IV орден Pour le Mérite (За заслуги), но ему казалось, что орден должен был получить Куммер, старший по возрасту. Этот орден выдавался 20 немецким ученым и 10 деятелям искусства и такому же числу иностранных ученых. Каждый раз, когда кто-нибудь умирал, остальные 29 выбирали нового, который утверждался королем. По поводу своего награждения Вейерштрасс пишет Ковалевской 17 июня 1875 г.:

Обладатель ордена становится предметом поздравлений, а еще больше — зависти и критики <. . .>. Ты знаешь, что ко всему этому я очень равнодушен и искренне радовался бы, если бы мне предпочли Куммера. Тем не менее я без церемонии сознаюсь, что если я по своему положению должен в некоторых обстоятельствах носить орден, то я охотнее, чем всякий другой [орден], надену эту звезду, которую до меня носили Гаусс, Якоби и Дирихле [74, с. 213].

В 1881 г., когда Куммеру исполнился 71 год, отмечался его юбилей — пятидесятилетие получения им степени доктора. На философском факультете Берлинского университета 10 сентября 1881 г. Вейерштрасс произнес приветственную речь от имени декана и профессоров факультета. Речь была опубликована в 1903 г., в третьем томе Математических трудов Вейерштрасса.

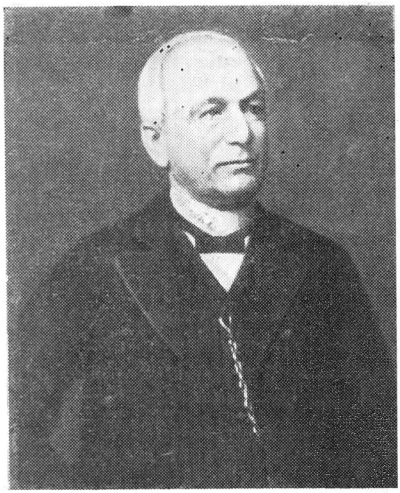
После слов приветствия и похвалы Вейерштрасс сказал, что, одаренный всеми способностями и свойствами, которые определяют ученого, а также большим трудолюбием, Куммер продвинулся в трех областях математики: анализе, теории чисел и геометрии, у него большие заслуги в распространении математических знаний и он имеет тысячи учеников, среди которых есть выдающиеся математики.

Леопольд Кронекер

Леопольд Кронекер (1823—1891) родился в Лигнице (теперь Легница, ПНР), в гимназии он был учеником Куммера. Между учителем и учеником возникла дружба, они переписывались друг с другом начиная с 1842 г. Кронекер слушал лекции в Берлине у Якоби, Штейнера и Дирихле, затем в Бонне, в Бреслау — у Куммера и потом опять в Берлине, где он познакомился с А. Гумбольдтом [81].

По окончании университетского образования Кронекер по желанию отца должен был заняться управлением имением. Но он продолжал заниматься математикой и вести научную переписку с Куммером. Материально совершенно независимый, Кронекер в 1855 г. переехал в Берлин, чтобы общаться с видными математиками, и решил отдаться целиком науке. Если он находил внимательного слушателя, то мог до глубокой ночи рассказывать ему о своих идеях. Он начал интенсивно работать в области теории чисел, алгебры и теории эллиптических функций.

В 1860 г. Куммер при поддержке Борхардта и Вейерштрасса выдвинул Кронекера в ординарные члены Берлинской академии наук. С 1861/62 учебного года Кронекер начал читать лекции в Берлинском университете и проработал в нем 30 лет до своей смерти. Сначала он читал лекции как член академии наук и только в 1883 г., после ухода в отставку Куммера, стал ординарным профессором университета.



Л. Кронекер

В письме С. В. Ковалевской от 27 августа 1883 г. Вейерштрасс, говоря о том, что Куммер не любит читать чужие работы по математике, противопоставлял ему Кронекера: «Кронекер другой, он быстро знакомится со всем новым. Его способность к быстрому восприятию содействует этому, но он это делает не проникновенно, он не может относиться к хорошей чужой работе с тем же интересом, как к своей собственной» [74, с. 241].

Учениками Кронекера были Гензель, Мольк. Из русских лекции Кронекера слушали А. В. Васильев (1853—1929) и Д. Ф. Селиванов.

Вейерштрасс всегда мечтал о дружеском кружке сверстников, объединенных общими научными интересами, и теперь с началом его работы в Берлине эта мечта осуществлялась. В университете он работал не изолированно от своих коллег. Сам Вейерштрасс характеризовал эпоху 1864—1883 гг. как время общих усилий Куммера, Кронекера и самого себя, как стремление дать молодежи в университете на протяжении двух лет «общее формирование базы с очень большим веером самых важных математических дисциплин» [81, с. 123]. Это было «блестящее созвездие трех» (das glänzende Dreigestirn): Куммер, Вейерштрасс и Кронекер [Там же, с. 123]. В эту эпоху Берлин был мировым центром, привлекавшим молодежь всех стран к изучению новых разделов математики [81, с. 62].

В 1873 г., 15 октября, Вейерштрасс выступил с ректорской речью в Берлинском университете (он был ректором в 1873/74 учебном году). Академик А. Н. Крылов высоко оценил эту речь и перевел ее на русский язык в «Успехах физических наук» (2-й выпуск 1918 г.) [125]. В кратком предисловии переводчик пишет: «В этой речи великий ученый в образных, глубоко продуманных словах излагает преемственно выработанный немецкими математиками взгляд на надлежащую постановку высшей школы». А. Н. Крылов добавляет, что России того времени нужно было «упорно работать, чтобы восстановить свою мощь одновременно с переустройством всего строя своей жизни на новых началах. В этой созидательной деятельности наука должна занимать высокое положение». Крылов считает, что ознакомление русских читателей с речью Вейерштрасса будет полезным.

Вейерштрасс приветствует собравшихся сердечным «добро пожаловать» и добавляет:

«Вы вступаете в новый круг вашей жизни и, наверное, все преисполнены самых радостных надежд и самых благоприятных намерений. Желаю, чтобы эти надежды осуществились в полной мере, а намерения претворились в плодотворную деятельность» [125, с. 87].

Вейерштрасс вспоминает о своих предшественниках, ректорах Берлинского университета, и их речах. Если бы эти речи собрать умелой рукой, то получилось бы превосходное наставление студентам [2]. Он приводит цитаты из этих речей, в частности из речи первого выборного ректора И. Г. Фихте (в 1810 г.): «Высшая школа существует для того, чтобы обеспечить непрерывность и надежность успехов образования человеческого рода» [Там же].

Сам Вейерштрасс считает, что прежде всего высшая школа должна научить учиться. Он говорит: «Установлено, что нет более бесплодного занятия, нежели за многое браться и ни во что не углубляться <. . .>; лишь посвятив себя более глубокому изучению одного главного предмета, вы вообще научитесь понимать сущность научного исследования».

Несмотря на то что теперь «все научные области не только заключают громадное накопление материала, но многие находятся и в состоянии весьма быстрого развития, никто не может освоиться со всей совокупностью знаний», необходимо каждому студенту наряду с основательным изучением главного предмета ознакомиться и с другими научными отраслями. «Это даже безусловно необходимо, если он не хочет утратить впоследствии интерес к индивидуальным стремлениям, не хочет быть чуждым стремлениям других и не хо-

---

[2] Впоследствии это пожелание Вейерштрасса было выполнено, выпущен сборник [114].

чет, не имея опоры, колебаться взад и вперед в ходе жизни и в житейской борьбе. Поэтому ни один студент не должен бы покинуть университет, не прослушав лекций политической истории, общей истории культуры, в особенности истории философии» [125, с. 88]. Студент не должен также расставаться с классической литературой [3].

Вейерштрасс считает, что и по математике, и по естественным наукам могли бы читаться лекции, которые были бы доступны и поучительны для юристов и филологов. «Лишь в стройной совместной деятельности всех наук кроется истинное счастье человечества... Все науки образуют как бы одну цепь, которая, начинаясь с математики как крайнего звена, протягивается через различные отрасли естествознания и исторических наук в широком смысле этого слова к философии как другому крайнему звену» [Там же, с. 90]. А от науки лишь тот получает высшую награ́ду, кто, по словам поэта, «смотрит на нее, как на небесную богиню, и не ищет в ней жену или рабыню» [Там же, с. 92].

Но постепенно кружок замечательных математиков начал распадаться. В 1880 г. умер Борхардт, самый близкий друг Вейерштрасса. Куммер стал отходить от общения с друзьями. У Кронекера стали все больше проявляться черты характера, связанные с его тщеславием и доставившие много огорчений как Вейерштрассу, так и в особенности Георгу Кантору. В 1883 г. в упоминавшемся уже письме от 27 августа к С. В. Ковалевской Вейерштрасс пишет о Кронекере: «Я боюсь, что он будет, так же как и Штейнер, считать, что все хорошее в математике сделано прямо или косвенно им, а все остальное ничего не стоит» [74, с. 241].

Кронекер начал громко выступать против основных понятий математики того времени, против теории действительных чисел Больцано—Вейерштрасса, а в последнее время — теории Кантора. Кронекер заявлял, что все в математике должно быть построено на понятии целого числа, и обещал «арифметизировать» математику сам или с помощью своих учеников.

Идеи Кронекера не получили признания. Но он не ограничивался критикой, а выступал с личными выпадами устно и в печати.

Вейерштрасс в письме к Ковалевской от 24 марта 1885 г. пишет:

---

[3] Сам Вейерштрасс, по-видимому, — если судить по его цитатам из Шиллера и фон Платена, — хорошо знал немецкую литературу.

. . . чего мне не хватает все больше и больше — дружественного сотрудничества с коллегами, основанного на согласии в принципах и искреннем взаимном признании. В нашем университете это в течение ряда лет нарушено, причины мне не вполне ясны. Одно лишь могу с уверенностью сказать, не я этому причиной.

Мой друг Кронекер, с которым у нас прежде было единодушие по важнейшим вопросам, а также и Фукс противодействуют мне: один сознательно и намеренно, другой — отчасти покоряясь авторитету первого, а отчасти недостаточно представляя себе значимость вопроса, о котором идет речь. Нередко бывает так, что я на лекции доказываю какое-нибудь положение, которое на другой лекции признается неправильным и не выдерживающим критики [74, с. 255].

В 1884 г. был объявлен конкурс на премии имени короля Швеции Оскара II, которая должна была присуждаться к дню шестидесятилетия короля в 1889 г. Были выдвинуты четыре математические темы, из которых четвертая, поставленная Эрмитом, представляла задачу анализа из области автоморфных функций. Однако Кронекер думал, что это алгебраическая задача, и обиделся, что она была поставлена без его ведома. Кроме того, он был обижен тем, что его не ввели в состав жюри по премии, состоявшего из Миттаг-Леффлера, Эрмита и Вейерштрасса. Миттаг-Леффлеру пришлось объяснять Кронекеру, что ему предпочли Вейерштрасса из-за почтенного возраста последнего.

Кронекер написал Миттаг-Леффлеру письмо, выдержки из которого Миттаг-Леффлер послал в письме Ковалевской. Приведу некоторые из них: «. . .ни один из современных математиков даже в отдаленной степени не обладает той компетентностью для постановки и суждения об алгебраическом вопросе, которую я приобрел путем работы целой жизни», — пишет Кронекер. — «По поводу дела о премиях я просто обращусь непосредственно к Вашему королю ⟨. . .⟩. Я буду опираться на мою более вескую компетентность в алгебраических исследованиях, которую я выявил в целом ряде моих работ и особенно в моем юбилейном сборнике» [137, с. 247].

Кронекер обижен, что комиссия, ни один член которой не знаком с его фундаментальной работой, ставит алгебраический вопрос и будет давать по нему оценку, — это он считает «беспримерной аномалией». Он добавляет: «Но Ваш король при этом должен узнать еще больше об истинном положении математики, дабы его добрая воля действительно осуществила нечто хорошее» [Там же, с. 247].

Свою угрозу пожаловаться королю Кронекер не осуществил. Он понял, что «пересолил», и в последующих письмах к Миттаг-Леффлеру пытался сгладить впечатление. Он всегда так поступал: после какой-нибудь своей выходки по поводу ущемленного самолюбия, он «почти как ребенок», по словам Миттаг-Леффлера, старался загладить свою вину.

Но Вейерштрасс болезненно воспринимал выпады и выходки Кронекера. Он пришел к заключению, что ему нужно покинуть Берлин и переселиться в Швейцарию. В письме к Ковалевской от 22 сентября 1885 г. он пишет, что уже подал министру свою просьбу о разрешении ему отпуска не неопределенное время с сохранением всех прав.

В самом конце 1885 г., отметив свое 70-летие, Вейерштрасс с сестрами уехал в Швейцарию, где пробыл весь 1886 год. По возвращении он уже перестал думать об отставке. Он хотел заняться изданием своих работ.

О собрании трудов Вейерштрасса

Последние 10 лет жизни Вейерштрасс был болен и силы его слабели. Он начал думать об издании созданных им математических работ. Профессор К.-Р. Бирман рассказал на XI Интернациональном конгрессе истории наук 1967 г. об истории издания трудов К. Вейерштрасса [123].

Фирма Майер и Мюллер, взявшая на себя издание трудов Вейерштрасса, внесла залог в 12 000 марок в виде гарантии добросовестного выполнения обязательств [123, с. 236]. Шесть томов были изданы этой фирмой, а седьмой том, в 1927 г., академическим издательством в Лейпциге, преемником переставшего существовать к тому времени издательства Майер и Мюллер.

Первые три тома посвящены статьям Вейерштрасса, как вышедшим в свет, так и не изданным. Том первый появился в 1894 г., второй — в 1895 г.[4] под редакцией самого Вейерштрасса, при участии Кноблауха. При жизни Вейерштрасса было набрано 18 листов третьего тома. Однако этот том издан только в 1903 г. Кноблаухом при сотрудничестве Кёттера, Роте, Шоттки и Шварца. Объясняется это тем, что Вейерштрассу хотелось скорее издать свои лекции по теории абелевых функций. Четвертый том вышел в 1902 г. под названием «Лекции по теории абелевых трансцендент» под редакцией Хеттнера и Кноблауха, в основном по их записям лекций.

Особенно деятельное участие в издании трудов принимал Кноблаух, который в течение десяти лет откладывал свои

---

[4] Статьи второго тома были просмотрены и корректированы Г. Фробениусом, К. Гензелем, Г. Хеттнером, Г. Мангольдтом и Р. Роте [2, с. 363].

собственные планы научных работ. В 1915 г. он издал пятый том, в который вошли «Лекции по теории эллиптических функций» (здесь ему помогал Рудольф Роте), и шестой том «Лекции по применению эллиптических функций». Этими томами Кноблаух ознаменовал 100-летие со дня рождения своего любимого учителя. Сам он умер в том же 1915 г.

В 1927 г. вышел седьмой том «Лекции по вариационному исчислению» под редакцией Р. Роте (1873—1942). Макс Планк с 1915 по 1939 г. занимал место председателя комиссии по изданию трудов Вейерштрасса. Он побуждал Роте ускорить дело издания запланированных восьмого («Лекции по теории гиперэллиптических функций») и девятого («Лекции по общей теории эллиптических функций с функционально-теоретической точки зрения, исходя из алгебраической теоремы сложения») томов. Но Роте не удалось этого сделать. Несколько математиков, взявшихся готовить тома, умерли до окончания работы. Рукопись одной работы Вейерштрасса — по вариационному исчислению, объемом около 50 печатных листов, была найдена среди наследия Шварца, рукопись по гиперэллиптическим функциям — в наследии другого математика.

К.-Р. Бирман сетует на то, что издание трудов Карла Теодора Вильгельма Вейерштрасса осталось незавершенным к его 150-летию, в 1965 г. «Изложенная здесь история издания должна нам напомнить о том, что долг чести по отношению к этому великому математику, которому математическая наука столь бесконечно многим обязана, еще далеко не погашен полностью из-за причин, относящихся не только к внешним обстоятельствам, но и к персональным моментам» [123, с. 238].

В Берлинском университете

К.-Р. Бирман назвал эрой Куммера—Вейерштрасса—Кронекера период жизни Берлинского университета с 1855 по 1892 г. [81]. При этом он различает ряд периодов, связанных с активностью деятельности этих ученых. Первый период, с 1856 по 1864 г., когда Вейерштрасс был экстраординарным профессором, можно считать подготовительным к деятельности Вейерштрасса. Второй период, с 1864 по 1892 г., был временем высшего расцвета в истории математического образования и математической науки в Берлинском университете. Этот период в свою очередь К.-Р. Бирман разбивает на два: 1864—1883 — годы, когда Куммер еще работал в университете, и 1883—1892 — после Куммера, ушедшего в отставку, когда большую роль стали играть наряду с Вейерштрассом преемник Куммера по кафедре Кронекер и Фукс.

Четверка ученых, долгие годы определявшая роль Берлинского университета, охарактеризована К.-Р. Бирманом так: «Наряду со сдержанным и точным Борхардтом, дисциплинированным и полным сознания ответственности Куммером, критичным и глубоким мыслителем Вейерштрассом, был темпераментный и подвижный Кронекер, который определял математическую жизнь в Берлине и давал ей окраску» [81, с. 62].

Кроме этих четырех профессоров, курсы в университете читали профессор Мартин Ом и приват-доценты Ф. Арндт (1817—1866) и Р. Хоппе (1816—1900). Арндт был хорошим лектором, его охотно слушали. В 1862 г. он стал экстраординарным профессором. После его смерти в 1866 г. его преемником стал Л. Фукс.

Кроме этих постоянных преподавателей, появлялись временные. Из них дольше других преподавал Э. Кристоффель (1829—1900). Он получил степень доктора в 1859 г. и читал основные курсы до лета 1862 г., а осенью покинул Берлин, получив место после Дедекинда в Политехникуме Цюриха.

В 1872 г. умер Ом. Была создана комиссия для выбора кандидата, в которую вошли Куммер, Вейерштрасс и Гельмгольц. В 1874 г. для замещения вакансии она избрала 25-летнего Георга Фробениуса (1849—1917), который, однако, уже осенью 1875 г. уехал в Цюрих, что очень огорчило Вейерштрасса: он считал, что Фробениус женился на совсем для него неподходящей женщине, которая уговорила его покинуть Берлин. А «такое место редко предлагается столь молодому человеку и давало бы ему наилучшие гарантии на будущее», — писал Вейерштрасс Ковалевской 13 сентября 1875 г. [74, с. 214]. Через 17 лет Фробенуис вернулся в Берлин.

Вильгельм Томé (1841—1910) обучался в Бонне и Мюнхене естественным наукам, но с 1863 г. в Берлине целиком отдался математике. В 1865 г. получил ученую степень доктора, в 1870 г. стал экстраординарным профессором. В 1874 г. Фукс переехал в Гёттинген и Томé перешел на его место в Грейфсвальде.

После ухода Томé и Фробениуса опять была основана комиссия, в которую вошли Гельмгольц, Кирхгоф, Куммер и Вейерштрасс. На две вакансии было подано 13 заявлений. Избраны были А. Вангерин и Г. Брунс. Оба работали в Берлине по шесть лет, читая дифференциальное и интегральное исчисление и введение в анализ. В качестве специальных курсов Брунс читал математическую географию и приложения эллиптических функций. Он был астрономом, перед приглашением в Берлин работал в Дерпте (теперь Тарту).

К периоду 1861—1864 гг. относится организация математического семинара и Математического общества в Берлинском университете.

Что касается семинара, то сначала это был семинар для решения задач. Много задач, в особенности из его теории лучевых систем, давал Куммер. Но постепенно семинар все больше переходил на доклады. Вейерштрасс выдвигал идеи для работ, из которых иногда получались диссертации. В качестве примера приведем доклады 1883 г.:

«К. Гензель (1861—1941). Отыскание особого делителя дискриминантной формы уравнения деления круга.

А. Кнезер (1862—1930). Об эффекте алгебраических функций одного переменного.

Д. Селиванов (1855—1932). Разложение целых алгебраических функций на неприводимые множители.

Г. Валленберг. Рассмотрение некоторых эллиптических функций» [81, с. 77].

Вейерштрасс заботился о библиотеке семинара. Сначала она находилась в его квартире, потом был куплен шкаф и установлен в аудитории. В ней по средам вечером собирались участники семинара. Первыми книгами были сочинения Коши, Абеля, Пуассона, Монжа и Эйлера. Затем стали поступать дары Академии наук и авторов статей. Академия жертвовала свои издания по ходатайству Вейерштрасса. В своей ректорской речи 15 октября 1873 г. он сказал о более старых, мало читаемых статьях: в них, так же как в научной переписке ученых прежних времен, содержится необычайно много материала, из которого тот, кто умеет, может найти многое для своих работ и узнать кое-что полезное [81, с. 78].

К.-Р. Бирман приводит интересные сведения о берлинском семинаре [81]. За промежуток с 1862 по 1884 г. 49 его участников получили 56 премий, среди них Г. А. Шварц был премирован три раза. Ф. Клейн не был слушателем Вейерштрасса, но участвовал в семинаре и получил премию, которая составляла 50 талеров, или 150 марок, что для многих студентов было существенной поддержкой. Ряд премий вносился дарителями, например родителями Эйзенштейна.

Математическое общество было широкого состава, число его членов не ограничивалось. Среди его организаторов —

Г. А. Шварц и Лампе, в 1864/65 г. в нем председательствовал Г. Кантор.

Кроме чтения лекций и проведения семинаров, в обязанность профессоров входили разного рода экзамены: испытания студентов и испытания на получение ученых степеней, а также чтение работ, диссертационных и представленных на премии. Первое время, пока Вейерштрасс был экстраординарным профессором, чтение работ лежало на одном Куммере. Кроме первой диссертации (Promotion) на ученую степень доктора наук, примерно соответствовавшей нашей степени кандидата наук, существовала вторая диссертация (Habilitation), примерно соответствовавшая нашей степени доктора наук, которую представляли немногие. Из учеников Куммера вторую диссертацию представили А. Клебш и Э. Кристоффель. Первым учеником Вейерштрасса, прошедшим у него испытания и получившим ученую степень в 1860 г., был Лео Кёнигсбергер.

Диссертация Г. А. Шварца основана на его работе об огибающих поверхностях, премированной на семинаре. За устные испытания он получил редко присуждавшуюся оценку: eximia cum laude (с исключительной похвалой).

В 1864 г. с похвалой прошла защита Э. Лампе (1840—1918). Выступая с воспоминаниями о Вейерштрассе, он сказал: «Только современники великого человека могут сказать потомству, каким они видели его натуру, его сущность как человека» [81, с. 83].

Одной из замечательных была защита в 1867 г. Г. Кантора — о диофантовых уравнениях второй степени. Хвалебный отзыв о ней подписали Куммер и Вейерштрасс.

В 1872 г. появилась первая диссертация на немецком языке, а с 1879 г. уже никто не писал диссертаций полатыни.

Ряд рецензий Вейерштрасса, ставшего ординарным профессором, открывается в 1865 г. рецензией на диссертацию Вильгельма Бирмана (1841—1888) по лекциям Вейерштрасса о применении эллиптических функций в геометрии и механике. В. Бирман стал впоследствии учителем гимназии. Другой Бирман, Отто (1858—1909), также слушал лекции Вейерштрасса и написал книгу «Теория аналитических функций».

В статье Г. Бенке [88, с. 35] приведены сведения (неполные) о «математиках около Вейерштрасса», среди них указаны 33, у которых Вейерштрасс был первым или вторым рецензентом.

Другие преподаватели

Один из любимых учеников Вейерштрасса, Георг Хеттнер (1854—1914), в противоположность другим, являлся долголетним экстраординарным профессором Берлинского университета: он проработал в нем 32 года начиная с 1882 г. Этот превосходный лектор пользовался большим успехом у слушателей. Хеттнер отличался скромностью, сдержанностью трудолюбием. Много энергии в ущерб собственным работам он отдал изданию трудов своего почитаемого учителя Вейерштрасса. Лекции Вейерштрасса и Куммера в Берлине Хеттнер слушал после трехсеместрового пребывания в Лейпциге, Вейерштрасса — вместе со своим другом Кноблаухом. Они вместе обработали лекции зимнего семестра 1875/76 г. и летнего семестра 1876 г. по теории абелевых функций, составившие основу четвертого тома «Математических трудов» Вейерштрасса. При жизни Вейерштрасса Хеттнер помогал ему издавать труды Борхардта и Якоби.

Диссертация Хеттнера связана с лекциями Вейерштрасса, защитил он ее в Гёттингене у Шварца. Там он получил также facultas docendi и представил вторую диссертацию в 1879 г.

Из Гёттингена Хеттнер получил приглашение в Берлин в 1882 г. на должность экстраординарного профессора. В 1885 г. он хотел было, к досаде Вейерштрасса, принять приглашение в Гёттинген в качестве ординарного профессора, но остался в Берлине, где только в 1894 г. получил звание ординарного профессора в Шарлоттенбургской технической высшей школе (под Берлином), оставаясь в университете до самой смерти экстраординарным.

Хеттнер читал лекции по разнообразным предметам: кроме исчисления бесконечно малых с упражнениями и аналитической геометрии, читал по Вейерштрассу приложения эллиптических функций к геометрии и механике, теорию потенциала, теорию чисел, теорию минимальных поверхностей, теорию поверхностей, о трансцендентности чисел e и π [81, с. 105].

Иоганнес Кноблаух (1855—1915) родился в Галле и там начал учиться в университете, перейдя затем в Берлин, Гейдельберг и опять в Берлин. Короткое время он работал учителем; в 1882 г. в Берлине защитил диссертацию об общих волновых поверхностях, тема которой была поставлена, как думает К.-Р. Бирман, Вейерштрассом или Кирхгофом. Он стал доцентом университета, а в следующем году прошел Habilitation по побуждению Куммера и Вейерштрасса. Между Вейерштрассом и Кноблаухом установились теплые отношения. Кноблаух почитал и любил своего учителя, который сделал его доверенным лицом. После смерти Вейерштрасса Кноблаух вплотную занялся изданием его трудов. Весной 1889 г. Кноблаух получил звание экстраординарного профессора и оставался в этом звании 25 лет, до самой смерти.

Как приват-доцент Кноблаух читал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию детерминантов, дифференциальные уравнения, аналитическую и синтетическую геометрию, механику, теорию алгебраических кривых и поверхностей. Слушали его обычно около 23 человек. Как экстраординарный профессор он читал теорию пространственных кривых и теорию поверхностей. Он любил затрагивать исторические темы: о знаменитых математиках XVIII в., о Леонарде Эйлере. Читал он и основы математики для начинающих и давал свои задачи в качестве упражнений на первых семестрах, что находило большой отклик у учащихся. Для студентов Кноблаух был старшим другом и советчиком.

Хеттнер и Кноблаух наряду с ординарными профессорами оказали большое влияние на математическую жизнь Берлинского университета [81, с. 107].

Из приват-доцентов эры Куммер—Вейерштрасс—Кронекер отметим еще Курта Гензеля (1861—1941), ученика Кронекера. Вейерштрасс не противился его избранию (в 1886 г.), что, по мнению К.-Р. Бирмана, свидетельствует об объективности маститого ученого.

Сравнительно короткое время был приват-доцентом в Берлинском университете Карл Рунге (1856—1927), ученик Куммера, Вейерштрасса и Кронекера. Он читал лекции начиная с зимнего семестра 1883/84 г. до летнего семестра 1886 г.: по алгебраическим уравнениям (с огромным числом слушателей: 131!), по дифференциальным уравнениям, по теории детерминантов, теории рядов, механике, аналитической геометрии. Рунге был прекрасным лектором, на его лекциях бывало не меньше 44 слушателей. Потом Рунге стал профессором в Высшей технической школе Ганновера, с 1905 г. — ординарным профессором по прикладной математике в Гёттингене. Рунге специализировался по приближенным вычислениям (известен способ Рунге—Кутта интегрирования дифференциальных уравнений) и по физической оптике. Его дочь Ирис Рунге написала о нем книгу [116].

На склоне жизни

Уже в 1884 г. немецкие математики начали готовиться к юбилею Вейерштрасса, его 70-летию, которое исполнялось 31 октября 1885 г. Была организована комиссия по чествованию Вейерштрасса, возглавлявшаяся Л. Фуксом, были разосланы письма математикам разных стран. С. В. Ковалевская, жившая в то время в Стокгольме и бывшая членом комиссии, получила от Г. Кантора письмо с выражением недовольства составленным юбиляру адресом. Ковалевская присоединилась к мнению Кантора. Потом Вейерштрасс нашел, что в окончательном обращении было сказано слишком много. Комиссия решила изготовить бюст Вейерштрасса. Однако некоторые математики высказались против этого, так как на юбилее Куммера бюста не имелось. Ковалевская писала по этому поводу Миттаг-Леффлеру, что было бы печально, если бы поднесение бюста стало предлогом к обмену враждебными высказываниями между различными немецкими математиками.

Однако юбилей прошел хорошо и Вейерштрасс остался доволен им. Через некоторое время он описал это событие в письме к своей ученице (которая не приехала на юбилей) 14 декабря 1885 г.

> . . . Прежде всего я должен Тебе откровенно признаться, что празднование моего 70-летнего юбилея, организованное моими старыми и молодыми слушателями, действительно явилось большой для меня радостью. Без официальной окраски — только министр культуры прислал мне полуофициальное поздравление — оно выразилось в не вполне свободную от преувеличения, ничем не омраченную демонстрацию чувств всех ее участников. Кроме моих здешних коллег, для передачи мне почетных подарков от имени Комитета лично присутствовали Кантор, Шварц, Линдеман, Киллинг, Томé, П. Дюбуа. Фукс произнес хорошо составленную речь, охраняемый боязливыми взорами своей жены, так что и женщина украшала празднество. Затем выступали ректор университета и декан. На этом закончилась официальная часть, и осталась только «целая толпа» поздравляющих [74, с. 263].

К удивлению Вейерштрасса, Кронекер пришел на его чествование и выступил с приветствием, причем сказал: «Многие проблемы математики давно и каждому знакомы, как, например, квадратура круга, алгебраическое решение уравнений. Но проблемы, которым Вейерштрасс посвятил дело своей жизни, по большей части им самим сформулированы и не являются всем доступными, они не могут быть объяснены в коротких словах».

Тепло прошедший юбилей подбодрил Вейерштрасса. Он взял длительный отпуск, на который имел право по возрасту, и поехал с сестрами в Швейцарию на целый год. Однако состояние его здоровья все ухудшалось. Последние восемь или девять лет он тяжело болел. К «утомлению мозга» присоединилась болезнь ног. За три года до кончины он перестал ходить. Два служителя переносили его с постели в кресло и выносили на улицу, иногда возили в кресле по Берлинскому парку. Но почти до конца жизни он сохранял ясность мысли и мог беседовать с учениками, которые навещали его.

День 80-летия Вейерштрасса в 1895 г. был отмечен скромно, в узком кругу близких. Собравшиеся около него ученики и товарищи, по предписанию врача, не могли с ним беседовать больше двух часов. Брат Петер был болен и находился в другом городе. Он прислал приветственную телеграмму в стихах. Немецкое математическое общество преподнесло Вейерштрассу адрес, составленный на конгрессе немецких естествоиспытателей и врачей, состоявшемся в Любеке. К этому адресу присоединились присутствовавшие на конгрессе Н. Е. Жуковский, П. М. Покровский и Г. К. Суслов. Текст адреса приведен в статье П. М. Покровского [146].

Глава 5

Лекции Вейерштрасса

Вейерштрасс — профессор университета

В Берлинском университете Вейерштрасс читал лекции с 1856 по 1889 г., сначала как член академии наук (академики имели право объявлять любые курсы), с 1861 г. как экстраординарный, с 1864 г. как ординарный профессор. Всего он прочел 72 курса. Кроме того, девять курсов были объявлены, но не прочитаны из-за болезни Вейерштрасса (список курсов дан в третьем томе «Собрания трудов» Вейерштрасса, с. 355—360, см. у нас Приложение 3).

Из списка видно, что в первые годы, до зимы 1861 г., ряд курсов читался всего один раз. Очевидно, Вейерштрасс, обладая познаниями в разных областях математики и физики, еще искал материал для изложения. Первый прочитанный им курс осенью 1856 г. носил название «Избранные главы математической физики». Затем зимой 1857 г. был прочитан курс «Теория и применение тригонометрических рядов и определенных интегралов к представлению произвольны функций». Летом 1858 г. излагались «Избранные главы интегрального исчисления» и «Новая геометрия».

Зимой 1859 г. читался курс из области физики «Аналитическая диоптрика». Интерес Вейерштрасса к диоптрике, вероятно, начался еще тогда, когда он работал в средней школе. В самом начале своей академической деятельности, 22 сентября 1856 г., в Вене на математической секции естествоиспытателей и врачей Вейерштрасс сделал доклад под названием: «К диоптрике».

Статья под таким же названием опубликована в «Собрании трудов» Вейерштрасса, т. III, с. 175—178. В ней дается геометрическое построение пути луча, проходящего через несколько преломляющих поверхностей — концентрических сфер. В. Лорей говорит, что эта красивая конструкция подходит для школы и он нашел ее описание в одной школьной книге по физике [105, с. 606].

Продолжим перечень одноразовых курсов.

Летом 1860 г. — курс аналитической механики, осенью 1861 г. — лекции о поверхностях 2-го порядка.

Позднее, зимой 1867 г., Вейерштрасс выбрал для чтения теорию детерминантов, зимой 1886 г. — теорию и приложения билинейных и квадратичных форм. В собрании трудов Вейерштрасса опубликована статья «К теории детерминантов» [59, с. 271—286]. В примечании к ней указано, что эта статья появилась в результате обработки Паулем Гюнтером (1867—1891) хранящихся в Математическом обществе Берлинского университета лекций зимнего семестра 1886/87 г. по теории и применению билинейных и квадратичных форм. При этом делается добавление о том, что в еще более ранние годы Вейерштрасс уже излагал на математическом семинаре университета основные теоремы детерминантов «при помощи изложенных выше трех характеристических свойств» [59, с. 286].

Действительно, в указанной статье ставится задача определения функции A n^2 величин $a_{\alpha\beta}$, обладающих следующими свойствами: 1) по отношению к каждой строке A — линейная функция, 2) A меняет знак, если поменять местами две строки, и 3) если диагональные элементы равны единице, а остальные — нулю, то $A=1$.

Работа Вейерштрасса «К теории билинейных и квадратичных форм» [26, с. 19—44] была напечатана в 1868 г., но лекции по этой теории он прочитал лишь в 1886 г. В этой статье вводится важное понятие элементарного делителя. Годом раньше, в 1867 г., Ч. Л. Доджсон (1832—1898), автор знаменитых сказок об Алисе, опубликовал книгу «Элементарное пособие по детерминантам», в которой сформулирована теорема: для того чтобы система n неоднородных уравнений с m неизвестными была совместной, необходимо и достаточно, чтобы порядок наибольшего отличного от нуля минора был одинаков в расширенной и нерасширенной матрицах системы [139, с. 69]. Здесь автор близок к идее об элементарном делителе, но Вейерштрасс вряд ли был знаком с этой работой или находился под ее влиянием.

Еще одна тема временно фигурировала в курсах Вейерштрасса вплоть до лета 1873 г., это синтетическая геометрия, лекции по которой он читал семь раз. И это не потому, что он очень любил этот предмет, но потому, что хотел отдать дань Якобу Штейнеру (1796—1863), после смерти которого некому было читать этот курс. Своим долгом Вейерштрасс считал также издание трудов Штейнера.

Если исключить указанные курсы, то можно заметить в лекциях Вейерштрасса начиная от лета 1857 до лета 1887 г. установившиеся циклы из трех предметов: 1) теории аналитических функций, 2) теории эллиптических функций и 3) тео-

Я. Штейнер

рии абелевых функций. Эти темы дополнялись лекциями по приложениям теории эллиптических и абелевых функций.

Начиная с лета 1865 г. десять раз читался курс вариационного исчисления, он объявлялся Вейерштрассом в последний раз в 1889 г., но, по-видимому, была прочитана лишь одна лекция.

Основные курсы Вейерштрасса составляли единый цикл, в этом состояла важная особенность его метода преподавания. Все здание математики Вейерштрасса строилось как единое целое, снизу доверху, начиная от понятия о числе и кончая вершиной математического анализа — теорией абелевых функций. Все теоремы, на которые ссылался Вейерштрасс, были доказаны им самим.

Карл Рунге приехал в Берлин осенью 1877 г. с друзьями Адольфом Гурвицем и Максом Планком. Зимой 1877/78 г. Вейерштрасс читал курс абелевых функций. Он внимательно выслушал Рунге, выяснил, какова его подготовка, и посоветовал не слушать этот курс, а начать весной с нового цикла. К удаче Рунге, Вейерштрасс читал весной «Введение в теорию аналитических функций». Лектор начал с целых положительных чисел, показал, как исторически возникали понятия отрицательных, дробных, иррациональных и комплексных чисел. Затем он ввел понятия функции, аналитической функции, определяемой рядом и его продолжением [115, с. 176]. После этого вводного курса теория эллиптических функций и их приложения, а также абелевы функции уже воспринимались без большого труда, вариационное исчисление было «полно прелести» [Там же, с. 177].

«С той строгостью, с помощью которой Вейерштрасс преобразовал математику, при большом числе учеников и долголетнем преподавании в университете, Вейерштрасс приобрел большое влияние» [Там же, с. 178]. Рунге называет имена 19 студентов, слушавших вместе с ним лекции Вейерштрасса и ставших видными деятелями науки и просвещения. В их числе были француз Жюль Мольк и русский Дмитрий Федорович Селиванов.

Какими же средствами достиг Вейерштрасс такой большой популярности среди математиков? Приведем воспоминания ряда его учеников.

Лекции Вейерштрасса никогда не бывали легкими. Да и учителем он был, по-видимому, не из легких. На 70-летии Вейерштрасса его брат Петер вспоминал с шутливым ужасом, как его, мальчика, учил Карл математике: доказательства были главным образом «ударными» (schlagende) [97, с. 58].

Сначала лекции Вейерштрасса по форме оставляли желать лучшего. К.-Р. Бирман собрал сведения от некоторых из его ранних учеников. Один из слушателей Промышленного института вспоминал, что Вейерштрасс у доски очень смущался, исписывал всю доску, прежде чем успевал объяснить формулы, для вытирания доски мог употреблять зонт вместо губки. Студенты подсмеивались над его манерами, но потом стали относиться к нему с уважением, поняв его глубокую ученость. Лекции обычно записывались машинально, и только домашний разбор раскрывал их значимость.

Лео Кёнигсбергер вспоминал первые лекции в университете летом 1857 г. по теории эллиптических функций: профессор, производящий импонирующее впечатление своей внешностью, смущался на кафедре. Вейерштрасс раскладывал целый пакет исписанных формулами листков, которые потом приходили в беспорядок, и тратил много времени на розыски нужного листка. Иногда он пропускал лекции, объявляя, что завтра будет католический праздник. Число слушателей к концу семестра дошло до четырех или пяти.

Э. Лампе утверждал, что с самого начала лекции Вейерштрасса отличались оригинальностью и глубиной мысли, а также богатством взглядов. Однако лектор еще не достиг полного осмысливания своих обильных идей и умения их хорошо изложить. Слушатели в Промышленном институте не проявляли достаточного интереса к математике и у большинства из них не было времени на проработку лекций, кроме нескольких учеников, таких, как Г. А. Шварц, Э. Лампе, М. Гамбургер.

В 1869 г. Киперт слушал 6-часовые лекции Вейерштрасса по абелевым интегралам. Он сговорился с товарищем о том, что тот будет стенографически записывать все слова Вейерштрасса, не вникая в их смысл, а Киперт — записывать формулы и делать заметки. Потом они вместе прорабатывали лекцию, задерживаясь до двух часов ночи и подбадривая себя крепким кофе. Только таким образом смогли они прослушать до конца весь курс; к концу из 107 слушателей осталось только семь. Зато у выдержавших до конца возникало чувство большого удовлетворения, когда суть лекций бывала понята и затем еще раз проработано «все художественное произведение» [97, с. 60]. И когда они бросали взгляд на целое, видели, какое ценное содержание заключается в нем и как Вейерштрасс владеет предметом [Там же].

Киперт сравнивает лекции Вейерштрасса с лекциями Куммера. Куммер читал основные, установившиеся по содержанию и по форме курсы: аналитическую геометрию, теорию чисел, аналитическую механику. Лекции Куммера отличались совершенством, излагались «элегантно», за ними легко было следить. Но Вейерштрасс рассказывал о сложных, иногда только что появившихся у него теоремах. Куммер, говорит Киперт, мог бы повторить слова Якоби: «Математика — наука, в которой все понятно само собой», Вейерштрассу же подходило другое известное высказывание Якоби: «Нет королевского пути в математику» [1] [Там же].

Постепенно Вейерштрасс в чтении лекций достиг мастерства, которое стало привлекать к нему слушателей из всех стран мира. Сама наружность его была импозантна: с великолепной головой, красивыми седыми локонами, блестящими голубыми глазами, он внушал уважение студентам уже своим видом. На портретах Вейерштрасса мы видим умное лицо, полное достоинства. Рунге добавляет, что Вейерштрасс был всегда безупречно одет и ухожен — сестры хорошо следили за ним.

Но и ко времени наивысшего расцвета его популярности Вейерштрасс читал лекции без внешнего блеска. Он шепелявил, запинался, часто останавливался, как бы обдумывая следующую фразу [105, с. 606]. Ему стало трудно из-за полноты и болезни ног записывать формулы на доске, и кто-нибудь из студентов делал это, что считалось большой честью. Неудобство состояло в том, что писавший на доске не мог делать записи в своей тетради. Среди писавших на доске были Э. Киперт, А. Верникe, К. Рунге.

Рунге говорит, что изложение Вейерштрасса, внешне менее заботливо приготовленное, являлось более увлекательным, чем изложение Кирхгофа, который произносил каждое слово так, как будто писал. Если Вейерштрассу не нравилось доказательство (он часто импровизировал), то

---

[1] Очевидно, Якоби перефразировал высказывание Евклида: «Нет царского пути в геометрию».

на следующий час он мог дать другое, вполне ясное [115, с. 177].

На лекции Вейерштрасс приходил точно, кончал их иногда с запозданием. Киперт припоминает два случая опоздания Вейерштрасса. Один раз он пришел за пять минут до окончания лекции и сказал: «Извините меня, пожалуйста, господа, я еще вчера завел свои часы очень точно, но точно на один час позже». В другой раз, опоздав на 45 минут, он сказал: «Господа, Вы сами математики и знаете, как бывает, если сильно увлечься какой-нибудь задачей» [97, с. 60].

При чтении лекций Вейерштрасс исходил из того, что его ученики одарены по крайней мере такими же способностями, как он сам. Он вовлекал их в свой творческий процесс. Однажды в геометрии положения [2] Вейерштрасс хотел доказать трудную теорему и не смог. Тогда он предложил писавшему на доске Киперту продолжить доказательство, но тот не смог этого сделать. После перерыва Вейерштрасс сказал, что теорема неверна [Там же, с. 61].

Студент А. Вернике (1857—1915), впоследствии директор Высшего реального училища и профессор Высшей технической школы в Брауншвейге, писавший на доске, чувствовал себя непринужденно и позволял себе поправлять Вейерштрасса. Однажды профессор стер букву, написанную Вернике, но тот опять ее написал, и так несколько раз, пока Вейерштрасс не сдался. . .

Вейерштрасс просматривал записи своих лекций, сделанные слушателями. Однажды он взял у К. Рунге записанные им и проработанные лекции по введению в теорию аналитических функций (летом 1878 г.) и потерял, оставив их в пролетке, в которой ехал из университета. Рунге в своих воспоминаниях добавляет, что эти лекции остались у него в голове и в такой форме им не страшна была потеря в пролетке [115].

Введение в теорию аналитических функций

Лекции Вейерштрасса по введению в теорию аналитических функций не вошли в собрание трудов Вейерштрасса, и сам он, намечая программу издания своих сочинений, не собирался включать их туда. Некоторые части этих лекций вошли в его книгу «Очерки по теории функций» [68], несколько глав которой включены в Собрание сочинений [16, 20, 32, 34—36].

[2] Курс «Новейшая синтетическая геометрия» Вейерштрасс читал осенью 1869 и летом 1871 г. — тогда его мог слушать Киперт.

Вейерштрасс сам их не опубликовал потому, что не был удовлетворен ими и считал, что его теория «не доведена до конца, многие трудные места еще не приведены к полной ясности» (из письма Вейерштрасса Шварцу от 12 июня 1888 г.) [86, с. 142].

Отдельными слушателями Вейерштрасса были опубликованы работы с использованием его лекций. Таковы публикации: «Элементы арифметики» Е. Коссака, по лекциям 1865/66 г., «Лекции по вейерштрассовой теории иррациональных чисел» В. Дантшера [85], «Теория аналитических функций» О. Бирмана (эти книги в некоторых частях подверглись критике [86]). С. Пинкерле напечатал книгу «Опыт введения в теорию аналитических функций по принципам Вейерштрасса», в которой использовал запись лекций 1878 г. и заметки к предыдущим курсам учеников Вейерштрасса.

В 1885/86 г. Отто Штольц издал в двух книгах «Лекции по общей арифметике. По новейшим взглядам» [117]. В предисловии он пишет: «Те части анализа, которые обычно рассматривали как элементарные, в последнее время вновь переработаны и существенно развиты». Первая книга посвящена общим вопросам арифметики действительных чисел, вторая — арифметике комплексных чисел. Автор часто ссылается на Вейерштрасса, в качестве преемников которого названы Пинкерле, Кантор, Гейне и др.

П. Дюгак в большой статье 1973 г. «Элементы анализа Карла Вейерштрасса» [86] проанализировал имеющиеся публикации, а также вновь найденные им записи лекций Вейерштрасса по теории аналитических функций. Это — лекции, записанные Г. А. Шварцем в 1861 г., Г. Хеттнером в 1874 г., А. Гурвицем в 1878 г. и Г. Тиме в 1886 г.

Другой автор, К. Копферман, в статье «Лекции Вейерштрасса по теории функций» [88] пользуется записями Хеттнера того же летнего семестра 1874 г., но экземпляром, который хранится в Институте Миттаг-Леффлера в Дьюрсхольме. Дюгак же ссылается на экземпляр, находящийся в Математическом институте Гёттингена. Дюгак дает ряд выдержек из указанных записей.

По этим материалам попробуем дать краткую характеристику теории иррациональных чисел Вейерштрасса, с которой он начал свои лекции по введению в теорию аналитических функций.

Прежде всего приведем определение Вейерштрасса целого числа по лекциям Гурвица: «Понятие числа возникает при мысленном объединении вещей, в которых открыт общий признак, специально мысленно идентичных вещей. Эту вещь мы обозначаем как единицу числа» [86, с. 96].

В статье К. Копфермана дается более лаконичное определение: «Целое число есть представление объединения однородных вещей» [88, с. 78].

Комплексное число определяется так: «Под комплексным числом мы понимаем агрегат чисел с разными единицами a) RG, b) Gr, c) Pf [3]. Эти различные единицы мы называем элементами комплексного числа» [88, с. 96].

Определяются основные понятия и правила действий над целыми числами. Говорят, что две вещи a и b равны между собой, если между ними имеется связь, обозначаемая $a=b$ и такая, что одновременно и $b=a$, и из $a=b$ и $b=c$ вытекает $a=c$. Два целых числа a и b можно назвать равными друг другу, если при сопоставлении единицы числа a единице числа b, затем другой единицы a — другой единице b и т. д. каждой единице числа a найдется соответствующая единица числа b так, что никакая единица a не остается вне строя. Если этого нет, то или $a > b$, или $a < b$.

Далее устанавливаются законы сложения целых чисел, их коммутативность и аддитивность, и умножения — коммутативность, аддитивность и дистрибутивность.

Операция вычитания как действия, обратного сложению, приводит к расширению понятия о числе и к введению отрицательных чисел. Вейерштрасс понимает под разностью $a—b$ число, которое, будучи прибавлено к b, дает сумму a. Но операция деления у него не приводит к новым числам, так как он вводит понятие *точной части единицы*. Дается определение $1/n$ как элемента, от которого приходим к единице как главному элементу, т. е. $1/n+1/n+...+1/n=1$ (берется n слагаемых). Точная часть $1/n$ есть такое число, для которого $n\cdot(1/n)=1$. Точная часть от точной части также есть точная часть, так что рассматриваются числа $1/mn$, $1/n^2$, $1/n^3$, ... Теперь числа рассматриваются как составленные из единиц и их точных частей, причем число тех и других может быть как конечным, так и бесконечно большим [88, с. 98]. В записи Гурвица дальше речь идет уже о бесконечно большом числе слагаемых.

При конечном числе слагаемых имеем *рациональное число*. Нерациональное число называется *иррациональным*. Чтобы доказать существование иррациональных чисел, в качестве

[3] Вейерштрасс приводит в качестве примера единиц RG — Reichsgulden (государственный гульден), Gr — Groschen (грош), Pf — Pfennig (пфенниг).

примера рассматривается $\sqrt{2}$. В книге В. Дантшера [85] приводится такое рассуждение.

Нужно доказать, что не существует рационального числа a/b (a и b не имеют общих делителей), квадрат которого был бы равен 2. Предположим обратное, т. е. что $a^2=2b^2$. Тогда a должно делиться на 2, можно написать $a^2=4a'^2$, откуда $2a'^2=b^2$; следовательно, b делится на 2 и имеет общий делитель с a, что противоречит условию.

Но если нельзя найти точного рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2, то можно построить последовательность рациональных дробей, выбрав какую-нибудь точную часть единицы $1/n$, где n — целое положительное число. Из чисел $0, 1, \ldots, n-1$ можно подобрать такое число c_1, а также такое целое число c_0, что

$$\left(c_0+\frac{c_1}{n}\right)^2<2<\left(c_0+\frac{c_1+1}{n}\right)^2$$

(здесь $c_0=1$). Затем, взяв точную часть $1/n$, т. е. $1/n^2$, и соответствующее число c_2, будем иметь

$$\left(c_0+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}\right)^2<2<\left(c_0+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2+1}{n^2}\right)^2.$$

Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность положительных рациональных чисел

$$c_0,\ c_0+\frac{c_1}{n},\ \ldots,\ c_0+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\ldots+\frac{c_s}{n^s}+\ldots,$$

предел которой представляет число новой природы — иррациональное число. За n можно принять любое целое положительное число, например 10.

А. Пуанкаре так сказал по поводу взглядов Вейерштрасса на целые числа, сопоставляя их с взглядами Кронекера: «Аналитические понятия для Вейерштрасса, как и для Кронекера, являются конструкциями, сделанными из одних и тех же материалов, целых чисел. Но есть разница между двумя концепциями; Кронекер особенно озабочен тем, чтобы выставить на вид философский смысл математических истин; целое число есть основа всего, и он хочет, чтобы это оставалось всюду очевидным; для него единственные допустимые операции это сложение и умножение; только иногда, делая уступку современным предрассудкам, он соглашается допускать деление» (Приложение 1).

Вейерштрасс же, по словам Пуанкаре, «как только построена конструкция, забывает, из какого материала она сделана, и видит в ней только новую единицу, которую он сделает элементом более грандиозной конструкции. Он может это сделать без боязни, так как раз и навсегда он доказал ее прочность» (Там же).

Условие равенства двух положительных иррациональных чисел формулируется так: a равно b, если каждая составная часть одного является также составной частью другого. Рассматриваются также операции сложения, вычитания, умножения и деления как для конечного, так и для бесконечно большого числа членов.

Специальный интерес представляют лекции Вейерштрасса 1861 г., записанные и обработанные Г. А. Шварцем; это первая по времени из известных записей, единственная, относящаяся к Промышленному институту. Рукопись этих лекций хранится в Институте Миттаг-Леффлера.

Во вступлении Шварц говорит, что он не включил в предлагаемые обработанные лекции доказательство предложения о том, что дифференцируемая функция, производная которой внутри определенного интервала значений аргумента всюду равна нулю, сводится к постоянной. Однако в письме от 27 февраля 1870 г. к Георгу Кантору [86, с. 87—89], где Шварц дает корректное доказательство этой теоремы, он говорит, что заимствовал элементы доказательства из лекций Вейерштрасса 1861 г.

Запись лекций начинается словами: «В противоположность неизменяющейся величине или константе, которая может принимать только одно значение, называют переменной величиной такую, которая может принимать не только несколько отдельных, но и бесконечно много значений» [86, с. 118].

Далее отмечается, что дифференциальное исчисление имеет дело только с *непрерывными* переменными, каковые должны принимать все возможные значения между двумя границами. Дается определение функции, сформулированное Дирихле: «Если две переменные величины могут быть связаны таким образом, что каждому определенному значению одной соответствует определенное значение другой, то вторая величина есть функция первой» [86, с. 119]. Это определение распространяется и на случай нескольких переменных. В другом месте, в записи Гурвица, Вейерштрасс дает определение функции, которое он приписывает Иоганну Бернулли: «Если две переменные величины связаны друг с другом так, что каждому определенному значению одной соответствует некоторое число определенных значений другой, то каждую из этих величин называют функцией другой».

Вейерштрасс недоволен этим определением. Он говорит, что «прежде всего оно пригодно только для действительных чисел. Но оно совершенно бессодержательно и не плодотворно. Из него нельзя вывести никаких общих свойств функции [Там же, с. 116].

Вейерштрасс говорил, что он не будет давать общего определения функции, но будет возвращаться к корректному и действительно плодотворному представлению функции мало-помалу в процессе своих лекций. «Таким образом цель этого введения в теорию аналитических функций, — замечает П. Дюгак, — с самого начала указана Вейерштрассом: разработать понятие функции, которое будет главным понятием анализа» [86, с. 71].

Далее Вейерштрасс дает определение *непрерывности* функции $y=f(x)$ «по способу дельта-эпсилон» [4]: составляется приращение функции $\Delta y=f(x+h)-f(x)$; если возможно для h установить такую границу δ, что для всех значений h, меньших δ по абсолютной величине, Δy остается меньшим некоторой достаточно малой величины ε, то говорят о непрерывной функции своего аргумента.

Вейерштрасс вводит понятие *окрестности* точки x: это те значения x, для которых абсолютное значение разности $x-x_0$ не превосходит определенной границы.

Затем идет доказательство теорем: 1°. Если $f(x)$ непрерывна и $f(x_0)\neq 0$, то в окрестности x_0 можно найти такие значения x, что $f(x)$ будет иметь одинаковый знак с $f(x_0)$. 2°. Если имеем $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ и y_3 есть любое число между y_1 и y_2, то найдется такое значение $x=x_3$, для которого $y_3=f(x_3)$ [86, с. 120].

Здесь уместно вспомнить о фундаментальных теоремах теории непрерывных функций на замкнутых промежутках, принадлежащих Вейерштрассу: 1°. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем. 2°. Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. 3°. Теорема о приближении функции: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., равномерно сходящихся на $[a, b]$ к $f(x)$ [42]. Эта теорема короче может быть сформулирована так: для функции, непрерывной на отрезке, для любого $\varepsilon>0$ найдется полином $P(x)$ такой, что $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ на всем $[a, b]$.

---

[4] Члены семьи А. Гурвица называли Гурвица в шутку «эпсилонистом» (Epsilonistisch) [86, с. 65].

Но вернемся к записям Гурвица лекций Вейерштрасса.

Производную Вейерштрасс определяет исходя из выражения приращения функции, которое он записывает в виде

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = ph + h \cdot (h),$$

где (h) — величина бесконечно малая вместе с h. Производная — это коэффициент p при h, т. е. при линейной относительно h части приращения: $p=f'(x)$.

Можно записать, вводя дифференциал функции dy:

$$\Delta y = dy + h \cdot (h), \qquad dy = f'(x)\, dy.$$

Вейерштрасс считает, что определение производной как предела отношения $[f(x+h)-f(x)]/h$ затемняет понятие производной и служит источником ошибок, которые заставляют думать, что всякая непрерывная функция всегда дифференцируема.

В своих лекциях Вейерштрасс рассматривал также основные понятия из области функций многих переменных, в том числе теорему о функции $f(x, y)$, непрерывной вместе с первыми и вторыми производными. Доказывалось, что смешанная производная при соответствующих условиях не зависит от порядка дифференцирования. Дифференциал функции многих переменных Вейерштрасс определяет как главную часть приращения $pdx+qdy$ (мы ограничиваемся случаем двух независимых переменных), записывая приращение в виде

$$f(x+dx, y+dy) = pdx + qdy + p'dx + q'dy,$$

де p, q не зависят от dx и dy, а p', q' — бесконечно малые вместе с dx, dy.

Далее Вейерштрасс приводит формулу конечных приращений и выводит правило Лопиталя. Он заключает часть курса о дифференцировании теоремой, которую называет «действительно фундаментальной теоремой всего анализа» [86, с. 65], а именно: если действительная функция действительного переменного n раз непрерывно дифференцируема и если все производные до порядка $n-1$ включительно равны нулю в точке x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Наконец, Вейерштрасс переходит к задаче о максимуме и минимуме функции.

Большое место в курсе лекций 1861 г. уделено теории рядов. В качестве первого примера рядов Вейерштрасс указывает на иррациональные числа: «есть величины, которые не выражаются через единицу или доли единицы, к ним применима форма бесконечных рядов» [86, с. 121]. Если какая-нибудь величина выражается в форме бесконечного ряда, то это означает, что сумма n первых членов не равна ей, но при увеличении n может быть как угодно сильно приближена к ней; *остаток* после n членов при увеличении n может быть сделан по величине меньше любого заданного числа.

Вейерштрасс вводит понятие о *равномерной* сходимости и ставит вопрос: при каких условиях ряд непрерывных функций, сходящийся для всех x в некотором конечном интервале, дает также непрерывную функцию? Дюгак замечает, что Шварц допустил ошибку при редактировании этой теоремы, назвав принятые условия необходимыми и достаточными, тогда как на самом деле они только достаточны [86, с. 66].

Дальше Вейерштрасс ставит задачу о почленном дифференцировании ряда непрерывных функций. Считая данный ряд и ряд производных равномерно сходящимися, он доказывает, что сумма второго ряда есть производная суммы первого. При этом Вейерштрасс цитирует слова Абеля из письма к Хольмбое от 16 января 1826 г.: «Теория бесконечных рядов в общем до сих пор очень мало обоснована. К бесконечным рядам применяют все операции так, как если бы они были конечны; но позволительно ли это? Я думаю, что нет. Где доказано, что получают производную бесконечного ряда, взяв производную от каждого его члена? Нет ничего легче, чем дать примеры, в которых это неверно» [86, с. 67].

Вейерштрасс рассматривает разложения в ряд функций e^x, $\log x$, тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Он заканчивает курс отысканием ряда для функции $f(x)$, если известно разложение в ряд ее производной.

Лекции 1861 г. произвели большое впечатление на математиков. Так, Э. Гейне, опубликовавший в 1872 г. «Элементы теории функций» [93], говорит, что курс Вейерштрасса побудил его написать свою статью и что в ней он использовал некоторые принципы Вейерштрасса, о которых получил устные сведения от Шварца и Кантора [86, с. 67].

Курс 1861 г. показывает, что Вейерштрасс пользовался новыми понятиями теории функций. Но об иррациональных числах и о непрерывной функции без производной он еще не упоминает.

В. Лорей, рассказывая о лекциях Вейерштрасса, говорит, что в курсе 1861 г. он привел некоторый способ построения приближенных парабол для пояснения теоремы Тейлора.

Лорей добавляет, что, вероятно, это было слишком сложно для его слушателей [105].

Заметим, что в лекциях 1878 г., записанных Гурвицем, есть краткий, на одну страницу, раздел, скорее план или конспект, посвященный основам теории функций комплексного переменного. В нем указывается, что действия над комплексными числами проводятся по тем же правилам, что и над действительными, с учетом, что $\sqrt{-1}$ определяется из уравнения $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$. Это расширение позволяет, используя разложение e^x в степенной ряд, получить формулу Эйлера $e^{xi}=\cos x+i\sin x$.

Вейерштрасс рассматривает функцию как совокупность действий над числами a, b, c,. . ., причем расширяет круг действий, вводя, кроме четырех арифметических, еще возведение в степень и извлечение корня, распространяя целочисленный показатель на любой, и вводит понятие логарифма.

Затем дается понятие о дифференцировании функции комплексного переменного. «Пусть $f(x)$ будет выражением, составленным из a, b,. . ., x, причем $x=u+iv$; тогда можно положить $f(u+iv)=p+iq$. Далее

$$f'(u+iv)=\frac{\partial p}{\partial u}+i\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad if'(u+iv)=\frac{\partial p}{\partial v}+i\frac{\partial q}{\partial v},$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{\partial q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{\partial q}{\partial u}. \tag{1}$$

Дается определение аналитической функции: «$p+iq$ является аналитической функцией $u+iv$, если p, q так зависят от u, v, что удовлетворяются уравнения (1). Это определение на самом деле оправдывает себя <. . .>, так как оно выполняется для всех функций, с которыми приходится сталкиваться. Однако оно допускает знание и возможность отклонений, поэтому плохо приспособлено для того, чтобы с его помощью обосновать теорию аналитических функций» [86, с. 117].

Вейерштрасс предлагает исходить из простейших функций, рациональных. Тогда понятие функции можно будет расширить, «будет показано, что тогда уже мы будем иметь средство рассматривать любые соотношения зависимостей между величинами» [86, с. 118]. На этом цитирование рукописи прерывается.

Из записей Хеттнера 1874 г. Дюгак приводит только то, что относится к понятию числа. В статье К. Копфермана [88] подробно говорится о функционально-теоретической части этих лекций.

Для Вейерштрасса функция комплексного переменного — это *аналитическая* функция, т. е. представимая степенным рядом. Класс таких функций широк: они встречаются в основных вопросах математики и ее приложениях к естествознанию и технике.

Определение аналитической функции уточняется таким образом. Функция $f(z)$, определенная в области D, называется *аналитической* (или *голоморфной*) *в точке* z_0, принадлежащей D, если существует окрестность этой точки, в которой функция представляется степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

Если это свойство имеет место в каждой точке z_0 области D, то функция f называется *аналитической* (или *голоморфной*) *в области* D. Вейерштрасс пользуется понятием *аналитического образа* (analytisches Gebilde), который представляет класс всех возможных элементов вида (2), получающихся друг из друга путем аналитического продолжения. Понятие «аналитический образ» распространяется и на случай, когда вместо ряда (2) имеется ряд с дробными показателями степеней.

Точки, в которых нарушается свойство аналитичности, называются *особыми точками*. Если $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$, то она разлагается в этой области в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Как уже упоминалось, такое представление аналитической функции было дано Вейерштрассом до Лорана [9].

Если ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней, то $z = z_0$ называется *существенно особой точкой*. Если число членов с отрицательными степенями конечно, так что имеем

$$f(z) = \sum_{n=-r}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad r > 0, \qquad a_{-r} \neq 0,$$

то точка $z = z_0$ называется *полюсом* функции f кратности r.

Функция, представимая в виде отношения двух функций, аналитических в области D, называется *мероморфной в области* D. Такая функция будет голоморфной в области D, за исключением, может быть, конечного или счетного множества полюсов.

Важные теоремы теории аналитических функций изложены Вейерштрассом в его «Очерках по теории функций» [68], воспроизведенных во втором томе его трудов в статьях [32, 34—36, 20, 16]. В ряде мест в этих статьях Вейерштрасс указывает, что он уже раньше излагал рассматриваемый вопрос на своих лекциях.

Знаменитую теорему о представлении целой функции в виде бесконечного произведения Вейерштрасс знал уже в 1874 г. В письме С. В. Ковалевской от 16 декабря 1874 г. он говорит, что в связи с его лекциями ему пришлось пополнить пробел в теории функций: «Ты знаешь, что до сих пор еще не был решен следующий вопрос: если произвольно берется бесконечный ряд величин

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \infty \qquad (a_i \neq 0), \tag{3}$$

то спрашивается, всегда ли будет существовать такая целая трансцендентная функция одной переменной x, что при $x=a_1, a_2, \ldots$ она исчезает, а при любом другом значении x нет? <. . . .>.

Для утвердительного ответа на этот вопрос оказывается необходимым условие, чтобы, как только n превысит определенный предел, a_n по своей абсолютной величине было постоянно больше произвольно заданной величины. Но до сих пор мне не удавалось доказать, что выполнения этого условия *достаточно*» [74, с. 191].

Затем Вейерштрасс формулирует теорему, о которой дальше мы расскажем более подробно, следуя его работе [32], а пока продолжим историю вопроса. В 1875 г. Вейерштрасс излагал свою теорему на лекциях; 16 октября 1876 г. он представил ее Берлинской академии наук и в том же году опубликовал [32].

В статье «К теории однозначных аналитических функций» [32] интересно проследить за развитием идеи Вейерштрасса. Он берет в качестве примера произведение $(1+x)(1+x/2)(1+x/3)\ldots$ и говорит, что оно расходится. Однако Гаусс, введя специальные множители, дал сходящееся бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\exp\left(-x\log\frac{n+1}{n}\right)\right\},$$

имеющее те же нули и одну особую точку (∞).

Далее Вейерштрасс говорит, что величинам (3) можно бесчисленным множеством способов сопоставить ряд целых положительных чисел $m_1, m_2, m_3, \ldots$, таких, что сумма

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

для каждого значения x будет иметь конечное значение. Затем составляется функция

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}$$

и доказывается, что существует функция $G(x)$ такая, что

$$dG/dx=F(x)\,G(x)$$

и для которой $a_1, a_2, \ldots$ являются нулями.

Для доказательства проводятся выкладки

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{r=0}^{\infty}x^r=\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r+1}}{r+1}, \qquad 1-x=$$

$$=\exp\left\{-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r+1}}{r+1}\right\}$$

и вводятся обозначения

$$E(x,0)=1-x,\; E(x,1)=(1-x)e^x, \ldots,$$

$$E(x,m)=(1-x)\exp\left\{\sum_{r=1}^{m}\frac{x^r}{r}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{m+r}}{m+r}\right\}. \tag{4}$$

Двойной ряд, безусловно сходящийся,

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}$$

может быть превращен в степенной ряд $\mathfrak{P}(x, n)$, если собрать все члены, содержащие одинаковые степени x. Если взять x, причем $|x|$ меньше любого из чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots,$ то сходятся все ряды

$$\mathfrak{P}(x,1), \quad \mathfrak{P}(x,2), \ldots, \quad \mathfrak{P}(x,n), \ldots$$

Можно записать

$$\mathfrak{P}(x, 1) - \mathfrak{P}(x, n+1) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu},$$

откуда

$$e^{-\mathfrak{P}(x, 1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \cdot e^{-\mathfrak{P}(x, n+1)}.$$

Положим

$$e^{-\mathfrak{P}(x, 1)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = G(x),$$

где $G(x)$ — однозначная целая функция, $\lim \mathfrak{P}(x, n+1) = 0$, а потому

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right),$$

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \exp\left\{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{x^r}{r}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}\right]\right\}. \qquad (5)$$

Таких функций бесчисленное множество. В частности, можно взять $m_\nu = \nu$. Если еще умножить $G(x)$ на x^λ, $\lambda > 0$, и на $e^{\bar{G}(x)}$, где $\bar{G}(x)$ — произвольная аналитическая функция, то получим общее выражение для целой функции, имеющей указанные нули:

$$G(x) = Cx^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{\bar{G}(x)} \quad (C \text{ — константа}). \qquad (6)$$

Лекции Вейерштрасса слушал Миттаг-Леффлер, что дало ему толчок к открытию аналогичной теоремы для функций «рационального характера» (см. [35]). Об исследованиях Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера написал статью Ф. Казорати [5].

В статье «К учению о функциях» [36] исследуются ряды функций, в частности степенные ряды, а также вопрос об аналитическом продолжении. Рассматриваются *моногенные* функции, т. е. функции, имеющие производную [6]. Вводится

[5] *Casorati F.* Aggiunte a recenti lavori dei Sig^i Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. — Ann. Mat. pura ed appl., Ser. II^a, 1882, vol. 10.

[6] Более детальное определение моногенной функции см., например, в [141, т. 3].

понятие области существования функции. В качестве примера рассматривается ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu}+x^{-\nu}}. \tag{7}$$

Этот ряд представляет две моногенные функции, одна из которых существует в области $|x|<1$, другая — в области $|x|>1$.

Чтобы построить пример функции, имеющей разные значения в разных областях, Вейерштрасс прибегает к теории эллиптических функций. Пусть ω, ω' будут периоды эллиптических функций. Полагая $\omega'/\omega i=x$, Вейерштрасс строит функцию

$$\chi(x)=\frac{2}{\pi}(x+x^{-1})+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}{}' \frac{x}{(1-2\nu-2\nu' xi)(2\nu+2\nu' xi)^2}+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'} \frac{x^{-1}}{(1-2\nu-2\nu' x^{-1}i)(2\nu+2\nu' x^{-1}i)},$$

которая равна $+1$, если действительная часть x положительна, и -1, если она отрицательна.

Статья [36] была опубликована в 1880 г., в сборнике же [68] и в «Собрании трудов» Вейерштрасса она содержит добавление, в котором сообщается, что Жюль Таннери придумал более простой пример: функция

$$\psi(x)=\frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}}+\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x^{m_\nu-1}(x^{m_\nu-m_{\nu-1}}-1)}{(x^{m_\nu-1}-1)(x^{m_\nu-1}-1)}$$

равна $+1$ при $|x|<1$ и -1 при $|x|>1$. Особенно простое выражение она имеет при $m_\nu=2^\nu$.

В сборнике [68] помещена также большая статья Вейерштрасса «Некоторые теоремы, относящиеся к теории аналитических функций многих переменных» [68, с. 105—164]. В ней рассматриваются степенные ряды функций и их аналитические продолжения, а также подготовительная теорема, о которой мы будем говорить в заключительной главе.

Лекции по теории эллиптических функций

Лекциям Вейерштрасса по теории эллиптических функций посвящен пятый том его «Собрания трудов», вышедший в 1915 г. под редакцией Иоганнеса Кноблауха. Книга содержит 34 главы, из которых 11 составлены на основании рукописей, продиктованных Вейерштрассом Ф. Мертенсу, в основе одной главы лежит рукопись, происхождение которой неизвестно, остальные воспроизведены по записям И. Кноблауха 1874/75 г. По некоторым главам были переработки Г. Хеттнера и Ф. Миллера. В предисловии указано, что согласно общему плану Вейерштрасса не все из того, что читалось на лекциях, было включено в книгу.

Пятый том начинается с рассмотрения эллиптического интеграла

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad R(x)=Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4B'x+A', \tag{1}$$

который Вейерштрасс преобразует к простейшему каноническому виду.

Форма записи полинома четвертой степени соответствует принятой в теории инвариантов бинарной форме четвертой степени

$$P=Ax_1^4+4Bx_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4B'x_1x_2^3+A'x_2^4. \tag{2}$$

Для этой формы полная система инвариантов относительно *унимодулярной группы преобразований*, т. е. состоящей из матриц второго порядка с определителем, равным единице, представляется величинами

$$g_2=AA'-4BB'+3C^2,$$

$$g_3=\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & B' \\ C & B' & A' \end{vmatrix}=ACA'+2BCB'-$$

$$-A'B^2-AB'^2-C^3. \tag{3}$$

Дискриминант формы P представляется так:

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2. \tag{4}$$

Первая глава лекций Вейерштрасса называется «Преобразование дифференциала $dx/\sqrt{R(x)}$».

Прежде всего вводится дробно-линейное преобразование

$$x_1=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

и доказывается, что имеет место равенство

$$dx/\sqrt{R(x)}=dx_1/\sqrt{R_1(x_1)},$$

где $R_1(x_1)$ — также полином четвертой степени. Обозначая x_1 через s, а R_1 через S, Вейерштрасс преобразует выражение $dx/\sqrt{R(x)}$ к виду, где под знаком радикала стоит полином третьей степени

$$dx/\sqrt{R(x)} = -ds/\sqrt{S}, \tag{5}$$

причем $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$ — уже многочлен третьей степени. Величины g_2, g_3 — фундаментальные инварианты функции $R(x)$ — выражаются через коэффициенты $R(x)$ по формулам (3), а S может быть представлено в форме определителя

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = -\begin{vmatrix} A & B & C-2s \\ B & C+s & B' \\ C-2s & B' & A' \end{vmatrix}.$$

Между s, $\sqrt{S}$ и x устанавливаются такие соотношения:

$$s = {}^1/_2\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + {}^1/_2 Ax^2 + Bx + {}^1/_2 C,$$

$$\sqrt{S} = -{}^1/_4\sqrt{A}\,R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}.$$

(То, что из них следует равенство (5), видно непосредственно.)

Из уравнения (1) можно получить дифференциальное уравнение

$$(dx/du)^2 = R(x).$$

При условии $dx/du = a_1 = \sqrt{R(x_0)}$ при $x = x_0$ его решение имеет вид

$$x = \varphi(u) + \sqrt{R(x_0)}\,\varphi_1(u).$$

Для $\varphi(u)$ и $\varphi_1(u)$ получаются ряды

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu}(x_0)}{(2\nu)!}u^{2\nu}, \qquad \varphi_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu+1}(x_0)}{(2\nu+1)!}u^{2\nu+1},$$

где

$$F_{2\nu+1}(x) = \frac{dF_{2\nu}(x)}{dx},$$

$$F_{2\nu}(x) = R(x)\frac{dF_{2\nu+1}(x)}{dx} + \frac{1}{2}F_{2\nu+1}(x)\frac{dR(x)}{dx},$$

$$F_0(x) = x, \qquad F_1(x) = 1.$$

Доказывается сходимость рядов $\varphi(u)$ и $\varphi_1(u)$.

Обращение интеграла

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

обозначается через $\wp u$ (говорят, что Вейерштрасс изобрел этот символ $\wp$, когда давал уроки чистописания в Дейч-Кроне).

Третья глава посвящена функции $\wp u$, для которой имеет место разложение в ряд

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

причем все последующие коэффициенты — рациональные функции от g_2 и g_3 с положительными рациональными коэффициентами.

Устанавливаются теоремы сложения и умножения для

$$\wp'(u \pm v), \qquad \wp(u+v) \pm \wp(u-v), \qquad \wp(u+v)\,\wp(u-v).$$

Для кратных аргументов получено

$$\wp(2u) = \frac{(\wp^2 u + {}^1/_4\, g_2)^2 + 2g_3 \wp u}{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3},$$

$$\wp(nu) = \frac{G_1(\wp u)}{G_2(\wp u)}, \qquad \wp u = \frac{P_1(u/n)}{P_2(u/n)},$$

где G_1, G_2, P_1, P_2 — целые полиномы.

В следующих главах рассматриваются дальнейшие свойства функции $\wp u$ и функции σu, которая вводится равенством

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}.$$

Для нее имеет место разложение в ряд

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{2} \frac{u^5}{5!} - 6g_3 \frac{u^7}{7!} + \ldots,$$

где последующие коэффициенты—рациональные функции от g_2 и g_3. Как функция трех аргументоз, $\sigma(u, g_2, g_3)$ удовлетворяет уравнению

$$u \frac{\partial \sigma}{\partial u} - 4g_2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 6g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - \sigma = 0.$$

Далее устанавливается двоякая периодичность $\wp u$:

$$\wp(u + w) = \wp u, \qquad w = 2m\omega + 2n\omega',$$

где m, n — целые. Полупериоды ω, ω' выражаются так:

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \qquad \omega' = i\int_{e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^2 - g_2 s - g_3}},$$

причем нижние пределы интегралов — действительные корни полинома

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) \quad \text{и}$$

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Для σu получаются соотношения

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \quad \sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$

где 2ω, $2\omega'$ — основные периоды функции $\wp u$. При этом выражения для η, η' Вейерштрасс записывает так:

$$\eta = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega, \quad \eta' = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' \quad (\sigma' \text{ — производная}).$$

Между η, η' и полупериодами существует соотношение $\eta\omega' - \omega\eta' = \pi i/2$.

Вводятся еще три сигма-функции:

$$\sigma_1 u = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega},$$

$$\sigma_2 u = e^{(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega + \omega' - u)}{\sigma(\omega + \omega')},$$

$$\sigma_3 u = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega' - u)}{\sigma\omega'}.$$

Выводится ряд соотношений между функциями Вейерштрасса. Так,

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = \wp u - e_\alpha, \quad \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Подстановка $\frac{\xi}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{\sigma}{\sigma_3}u$ приводит u к виду

$$u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}} \qquad \left(k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right),$$

откуда устанавливается связь с функциями Якоби:

$$\frac{\sigma}{\sigma_3}u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\sin\operatorname{am}\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right),$$

а также

$$\cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right),$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right).$$

Далее идет представление σ-функций бесконечными произведениями, а функции $\wp u$ — суммой рациональных функций, выражение эллиптических функций через σ-функции.

Наконец, вводятся четыре ϑ-функции, связанные с σ-функциями:

$$\sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,\frac{e^{\eta u^2/2\omega}}{\sqrt[8]{G}}\,\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega};\ \frac{\omega'}{\omega}\right),$$

$$\sigma_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,\frac{e^{\eta u^2/2\omega}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}}\,\vartheta_\alpha\left(\frac{u}{2\omega};\ \frac{\omega'}{\omega}\right) \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3),$$

$$G = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27g_3^2\right) = \frac{\Delta}{16} \qquad (e_\beta > e_\gamma).$$

Вейерштрасс вводит также в рассмотрение θ-функцию с двумя параметрами, μ и ν[7]:

$$\theta(u;\ \mu,\ \nu) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{nu^2}{2\omega} + \left(n + \frac{\nu}{2}\right)\left[\frac{u}{\omega} + \mu + \left(n + \frac{\nu}{2}\right)\frac{\omega'}{\omega}\right]\pi i\right\}. \qquad (7)$$

При $\mu = \nu = 0$ получаем простую θ-функцию

$$\theta(u) = \theta(u;\ 0,\ 0).$$

θ-функции Вейерштрасса имеют аналог с Θ-функциями Якоби.

Рассмотрены теоремы сложения и умножения σ-отношений.

В главе 25 Вейерштрасс переходит к эллиптическим интегралам. Он вводит в рассмотрение *нормальные* интегралы трех родов. В качестве *нормального интеграла первого рода* берется рассмотренный выше интеграл

$$J(s) = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{g_2}{40}\frac{1}{s^2} + \frac{g_3}{56}\frac{1}{s^3} + \dots\right).$$

---

[7] Под θ-функциями понимают ряды, в которых логарифм общего члена — полином второй степени относительно индексов суммирования и первой или второй степени относительно независимых переменных.

Нормальный интеграл второго рода

$$J_1(s) = \int\limits_s^{\infty} \frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = -\int \wp u\,du = \int \frac{d^2 \log \sigma}{du^2}\,du =$$

$$= \frac{\sigma'}{\sigma} u = \sqrt{s}\left(1 - \frac{g_2}{24}\frac{1}{s^2} - \frac{g_3}{40}\frac{1}{s^3} + \ldots\right).$$

Интегралом третьего рода является интеграл

$$\int \frac{ds}{(s - s_0)\sqrt{S}},$$

но Вейерштрасс берет в качестве *нормального интеграла третьего рода* такой:

$$J(s,\ s_0) = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{1}{2}\int \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}\,du =$$

$$= \int \left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u - v) - \frac{\sigma'}{\sigma} u + \frac{\sigma'}{\sigma} v\right] du, \tag{8}$$

или

$$J(s,\ s_0) = \log \frac{\sigma(v - u)}{\sigma u \sigma v} + u \frac{\sigma'}{\sigma} v =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log s - \frac{s_0}{s} + \ldots\right) \quad (s_0 = \wp v).$$

Для интегралов 1-, 2- и 3-го рода рассматриваются теоремы сложения. Даются способы определения периодов $\wp$-функции приведением к интегралам в форме Лежандра.

В последних главах рассматриваются различные соотношения между $\wp$- и σ-функциями и ряд преобразований этих функций.

Эллиптические функции у Якоби и Вейерштрасса были определены как обращения эллиптических интегралов. Они двоякопериодичны и имеют полюсы. Общее определение эллиптических функций таково: это мероморфные двоякопериодические функции.

По заданным периодам ω_1 и ω_2 (при условии, что $\tau = \omega_2/\omega_1$ не является действительным числом) можно построить соответствующую им функцию $\wp(u)$ и ее инварианты g_2 и g_3 по формулам

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$

Здесь $w = m\omega_1 + n\omega_2$, причём m и n проходят все целые значения, положительные, отрицательные и равные нулю.

Функция $\wp(u)$ имеет двукратный полюс при $u=0$ и не имеет других полюсов в параллелограмме периодов.

Справедлива теорема: всякая эллиптическая функция $f(u)$ с периодами ω_1, ω_2 выражается рационально через функцию $\wp(u)$ с теми же периодами и ее производную $\wp'(u)$ таким образом:

$$f(u) = R(\wp(u)) + \wp'(u) R_1(\wp(u)),$$

где R и R_1 — рациональные функции.

Можно провести параллель между теорией эллиптических функций у Вейерштрасса и Якоби. Пуанкаре (см. Приложение 1) говорит, что теория Вейерштрасса свободна от тех недостатков, которые он считает присущими теории Якоби. Так, основные функции Якоби $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ имеют различные периоды (соответственно $4K$ и $2iK'$; $4K$ и $2K+ +2iK'$; $2K$ и $4iK'$). Если взять общие для них периоды $4K$ и $4iK'$, то $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$ и $\mathrm{dn}u$ не будут простейшими, так как среди них будут имеющие четыре полюса, а у простейших эллиптических функций их два. В системе же Вейерштрасса вместо трех якобиевых функций фигурирует только одна функция $\wp(u)$, и она простейшая среди тех, которые имеют те же периоды.

Чтобы отметить другое преимущество теории Вейерштрасса, рассмотрим понятие *эквивалентной системы периодов.*

Если существуют числа ω_1', ω_2' такие, что

$$\wp(u; \omega_1, \omega_2) = \wp(u; \omega_1', \omega_2')$$

при всяком u, то необходимо и достаточно, чтобы множество w периодов, составленных из ω_1 и ω_2,

$$w = m\omega_1 + n\omega_2,$$

совпадало с множеством периодов w', составленных из ω_1' и ω_2':

$$w' = m\omega_1' + n\omega_2'.$$

В этом случае две пары чисел (ω_1, ω_2) и (ω_1', ω_2') называются *эквивалентными.*

Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух пар чисел (ω_1, ω_2) и (ω_1', ω_2') состоит в том, чтобы существовали два уравнения вида

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где α, β, γ, δ — целые числа, причем $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$.

Второе достоинство функций Вейерштрасса, отмеченное Пуанкаре, состоит в том, что $\wp(u)$ не меняется при замене одной системы периодов эквивалентной ей.

В некоторых задачах, считает он, более естественны другие функции, но Вейерштрасс с успехом заменяет их тремя функциями

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}, \qquad \sqrt{\wp(u)-e_2}, \qquad \sqrt{\wp(u)-e_3}$$

(по формулам (6) это $\sigma_1(u)/\sigma(u)$, $\sigma_2(u)/\sigma(u)$, $\sigma_3(u)/\sigma(u)$).

Пуанкаре подчеркивает, что формулы, связывающие функции Вейерштрасса, симметричны, чего нет для функций Якоби. Модуль k, рассматриваемый как функция $\tau=\omega_2/\omega_1$, не является простейшей из модулярных функций, так как одной и той же системе периодов может соответствовать несколько значений модуля.

Самой простой из модулярных функций Пуанкаре считает абсолютный инвариант

$$J=g_2^3/g_3^2.$$

Приложения эллиптических функций

«Лекции о приложениях эллиптических функций», вышедшие в свет в 1915 г. [6], составляют шестой том «Собрания трудов» Вейерштрасса, обработанный Рудольфом Роте. В нем рассмотрено семь задач. Первая задача: определение площади поверхности косого конуса с круговым основанием. На плоскости $(x0y)$ дан круг с центром в начале координат, на него опирается конус с вершиной в точке $(a, 0, h)$. Площадь поверхности выражается через интеграл третьего рода

$$\int_{e_1}^{\infty}\frac{\sqrt{S_0}\,ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}, \qquad S=4s^3-g_2s-g_3,$$

который подстановкой $s=\wp u$, $\sqrt{S}=-\wp' u$, $s_0=\wp u_0$, $\sqrt{S_0}= -\wp' u_0$ $(\wp' u=d\wp u/du)$ приводится к интегралу, выражающемуся через фукции σ:

$$\int_0^{\omega}\frac{\wp' u_0\,du}{\wp u-\wp u_0}=\left[\log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}+2u\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}+C\right]_0^{\omega}=$$
$$=-2\eta u_0+(2k+1)\pi i+2\omega\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}.$$

Здесь ω — полупериод функции $\wp u$. Исследуется вопрос о выборе целого числа k.

Следующая задача — поверхность трехосного эллипсоида. Здесь вводятся эллиптические координаты и определяется площадь треугольника, ограниченного линиями кривизны эллипсоида. При вычислении площади поверхности эллипсоида встречается логарифм, поэтому подробно исследуется вопрос об определении его значения.

Далее ищется потенциал однородного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида. Здесь появляется необходимость подробно исследовать эллиптический интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi + c + 2a'\sin\psi + 2b'\cos\psi + 2c'\cos\psi\sin\psi}}.$$

Ищется также как частный случай потенциал равномерно нагруженной массой поверхности эллипсоида.

По поводу задач об эллипсоидах заметим, что Вейерштрасс давно уже интересовался этими телами. В 1859 г. вышла статья русского геодезиста, генерала Ф. Ф. Шуберта (кстати, Вейерштрасс никак не мог тогда предположить, что жизнь сведет его с внучкой этого генерала С. В. Ковалевской), в которой излагались результаты различных градусных измерений для определения вида Земли. Шуберт пришел к заключению, что Земля — эллипсоид с неравными осями. В 1861 г. как отклик на статью Шуберта Вейерштрасс опубликовал статью «О геодезических линиях на трехосном эллипсоиде» [1, с. 257—266]. Если λ_1, λ_2 — эллиптические координаты точки на поверхности, то Вейерштрасс получает для них систему уравнений

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}}, \qquad \sqrt{c}\,dt = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

где $R(\lambda)$ — полином 5-й степени.

Это уравнения, которые даны Якоби в его «Лекциях по динамике» [160].

В лекциях 6-го тома в последнем, девятом разделе Вейерштрасс более детально, чем в приведенной статье 1861 г., рассматривает геодезические линии на эллипсоиде вращения. Декартовы координаты точки геодезической линии выражаются в эллиптических функциях. Определяется также длина дуги геодезической линии.

Много места в книге занимает задача «Деление лемнискаты и комплексное умножение эллиптических функций». Гаусс рассматривал лемнискатические функции, происхождение которых связано с вычислением длины s дуги лемнискаты Бернулли $r^2 = \sin 2\theta$. Нетрудно видеть, что здесь $ds = dr/\sqrt{1 - r^4}$ и, следовательно,

$$s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

т. е. s представляется эллиптическим интегралом частного вида, а $r = \sin \operatorname{lemn} s$ — *лемнискатический синус* — двоякопериодическая функция, для которой существует теорема сложения [140, с. 128].

Короткий раздел посвящен теории сферического и плоского маятников.

Самый большой раздел (77 с.) относится к теории движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Здесь Вейерштрасс дает подробный вывод уравнений Эйлера, для случая Эйлера выражает три направляющих косинуса в виде отношения σ-функций, уделяет много места представлению девяти направляющих косинусов через четыре параметра.

Вейерштрасс уже давно интересовался задачей о вращении и работой по ней С. В. Ковалевской, но ее результаты здесь не отражены. Во время триумфа Ковалевской Вейерштрасс болел и вряд ли мог переработать ее исследования для лекций. Последний раз лекции по приложениям теории эллиптических функций Вейерштрасс читал летом 1877 г.

Лекции по теории абелевых трансцендент

Абелевыми функциями называют обобщение эллиптических функций одного комплексного переменного на случай многих комплексных переменных. Вейерштрасс считал абелевы функции вершиной математического анализа. Он преклонялся перед гением Абеля, заложившего основы их теории, и с молодых лет поставил перед собой цель: построить полную и завершенную теорию этих функций. Он не был вполне доволен достигнутыми им результатами, — «не все цветы дали плоды», как он однажды выразился, — но все же считал, что его стремления и его деятельность не были совсем напрасными, а «путь, которым он шел к истине, не был ложным» [74, с. 256]. По словам Ф. Клейна, общая высокая оценка теории абелевых функций продолжалась вплоть до первой мировой войны; каждый из молодых математиков «испытывал честолюбивое стремление самостоятельно продвинуться в этой области. А теперь? Молодое поколение вряд ли вообще знакомо с абелевыми функциями», — писал Ф. Клейн.

С приведенной цитаты из книги Клейна А. И. Маркушевич начинает свою книгу «Введение в классическую теорию абелевых функций» [138]. Он говорит, что после полувекового перерыва интерес к «временно устаревшей» области науки снова оживился. Однако теперь она приобрела совсем иной характер и «трактуется не как глава теории функций, а скорее как глава или, вернее, область применения идей и методов коммутативной алгебры, алгебраической геометрии, комплексного анализа» [138, с. 5]. Книга А. И. Маркушевича содержит исторический очерк накопления и развития идей в XIX в. и последовательное построение основ теории абелевых функций, рассматриваемой как учение о мероморфных функциях p комплексных переменных с максимально возможным ($2p$) числом независимых периодов.

Мы здесь расскажем о четвертом томе «Собрания трудов» Вейерштрасса. Он носит название «Лекции по теории абелевых трансцендент» [4] и содержит 624 страницы — почти в 2 раза больше, чем остальные тома.

Во введении Вейерштрасс приводит основные понятия теории и дает краткий исторический очерк.

Абелевым интегралом по предложению Якоби называется интеграл от алгебраической функции с произвольной алгебраической иррациональностью, а именно: если y определено как алгебраическая функция x посредством неприводимого алгебраического уравнения

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

то вместе с функцией y рассматриваются все рациональные функции $R(x, y)$ обоих аргументов x и y, связанных указанным уравнением, и исследуются интегралы вида

$$\int R(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Остановимся на первом разделе книги.

Алгебраические основы теории

Совокупность пар величин (xy), удовлетворяющих уравнению (1), Вейерштрасс называет *алгебраическим образом* уравнения (1), а каждую отдельную пару значений $(x\ y)$ —

местом (Stelle) или *точкой* (Punkt) этого образа. Всегда можно считать $f(x, y)$ целой рациональной функцией x и y (полиномом) и притом рассматривать неприводимые функции — тогда образ, определяемый уравнением (1), называется *моногенным*. *Особыми точками* образа называются точки, в которых одновременно $\partial f/\partial x=0$, $\partial f/\partial y=0$.

Пусть имеем неприводимое алгебраическое уравнение (1), причем

$$f(x, y)=f_0(x)y^n+f_1(x)y^{n-1}+\ldots+f_n(x)=0, \tag{3}$$

где $f_k(x)$ — целые полиномы степени m. Тогда каждому значению x отвечает n значений y, вообще различных и конечных. Но при $x=x_0$, где $f_0(x_0)=0$, от (3) остается лишь полином степени $n-1$. В качестве n-го корня для y можно принять $y=\infty$. Действительно, перепишем наше уравнение так:

$$f_0(x)+\frac{f_1(x)}{y}+\frac{f_2(x)}{y^2}+\ldots+\frac{f_n(x)}{y^n}=0.$$

Тогда при $f_0(x_0)=0$ принимается $1/y=0$, $y=\infty$, причем $y=\infty$ может быть и кратным корнем. Точка (x_0, ∞) называется *бесконечно удаленной*. Если разложить $f(x, y)$ по степеням x, то можно найти бесконечно удаленные точки вида (∞, y_0). Наконец, перепишем $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y)=\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu} \qquad (0\leqslant\mu\leqslant m,\ 0\leqslant\nu\leqslant n). \tag{4}$$

Тогда, если обращается в нуль коэффициент a_{mn}, можно переписать $f(x, y)$ так:

$$f(x, y)=x^m y^n\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-\mu}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-\nu},$$

откуда видно, что можно в пределе принять $x=\infty$, $y=\infty$ за корень уравнения $f(x, y)=0$. Вейерштрасс различает три вида бесконечно удаленных точек алгебраического образа:

$$(x_0, \infty), \qquad (\infty, y_0), \qquad (\infty, \infty).$$

Он доказывает, что общее число их равно *порядку* r уравнения $f(x, y)=0$, т. е. наибольшему значению суммы показателей $\mu+\nu$.

Курс лекций Вейерштрасса разбивается на три раздела, из которых самый большой посвящен алгебраическим основам теории.

Здесь прежде всего Вейерштрасс доказывает теорему: пусть (ab) — произвольная точка образа (1), тогда все точки

(xy) — образы, лежащие в окрестности (ab), т. е. такие, для которых $|x-a|$ и $|y-b|$ не превосходят достаточно малых положительных величин, могут быть представлены двумя рядами, расположенными по степеням независимого переменного t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{5}$$

так что каждой такой паре значений (xy) соответствует одно значение t. Совокупность таких пар значений $(\varphi(t), \psi(t))$ называется *элементом* алгебраического образа, а точка (ab) его центром (Mittelpunkt). Подстановка выражений (5) в определенный абелев интеграл

$$J = \int\limits_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx \tag{6}$$

дает

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} g(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (ct^{-1} + g_1(t))\,dt =$$

$$= c \log \frac{t_1}{t_0} + h(t_1) - h(t_0). \tag{6'}$$

Если $c \neq 0$, то интеграл J будет бесконечно многозначной функцией от t_0 и t_1 или от двух пар величин $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, принадлежащих одному элементу [8]. Если же эти пары не принадлежат одному элементу, то можно найти между ними конечное число пар $(x'y')$, $(x''y'')$, . . ., $(x^{(n)}y^{(n)})$ так, чтобы каждые две соседние пары величин принадлежали одному элементу. И тогда значение интеграла J определится посредством суммы

$$J = \int\limits_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx =$$

$$= \int\limits_{(x_0 y_0)}^{(x'y')} + \int\limits_{(x'y')}^{(x''y'')} + \cdots + \int\limits_{(x^{(n)} y^{(n)})}^{(x_1 y_1)} R(xy)\,dx. \tag{7}$$

Видим, что интеграл J зависит не только от своих пределов, но также от *пути интегрирования*. Доказывается, что

---

[8] Из (6′) имеем $dJ = g(t)\,dt$ (t — комплексная переменная) — это *абелев дифференциал* (см. [141, т. 1]).

все значения интеграла J различаются на *периоды*, т. е. выражения вида

$$2m\omega + 2m'\omega' + 2m''\omega'' + \ldots,$$

где m, m', ... — целые числа или нуль, 2ω, $2\omega'$, ... — конечное число констант, зависящих только от функций $f(x, y)$ и $R(x y)$, но не от пределов интегрирования. Величины 2ω, $2\omega'$, ... называются *примитивной системой периодов* интегралов, если через них всякий другой период может быть составлен путем сложений и вычитаний, в то

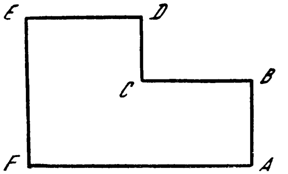


Рис. 1

время как никакой из них не может быть составлен из других.

Вопрос о числе независимых периодов однозначной аналитической функции подвергался обсуждению (см. [140, с. 168]). Якоби считал, что у нее не может быть больше двух таких периодов. Так, если бы функция имела три примитивных периода, то среди ее периодов должны бы быть сколь угодно малые по модулю, но отличные от нуля, что Якоби казалось абсурдным. А. И. Маркушевич [140, с. 169] говорит, что попытку обращения интеграла

$$w = \int_0^z \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{8}$$

где $R(x)$ — полином пятой степени с действительными различными нулями, Якоби считал абсурдной, так как функция $z = \lambda(w)$ должна иметь четыре периода. Однако дело в том, что это многозначная функция.

А. И. Маркушевич объясняет «парадокс Якоби» с помощью геометрических соображений. А именно уравнение (8) соответствует конформному отображению полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на шестиугольник с прямыми углами плоскости w (рис. 1). Каждая его сторона соответствует полупериоду, за независимые полупериоды могут быть приняты длины четырех отрезков: AB, BC, CD, DE. Если шестиугольник зеркально отражать в каждой из его сторон, то плоскость w покроется бесконечным множеством слоев «паркета» из шестиугольников. В каждой окрестности точки $w=w_0$ найдется бесконечное множество точек, образы которых представляются одним и тем же числом $z=z_0$, но располагать их нужно на различных штуках многослойного паркета [140, с. 169].

Однако А. И. Маркушевич считает, что «парадокс Якоби» оказался плодотворным, так как заставил Якоби ввести понятие об абелевых функциях, состоящее в том, что вместо одного интеграла (6) рассматривается сумма двух интегралов с независимыми верхними пределами [Там же, с. 170]. Мы уже видели такие выражения в теории гиперэллиптических функций, для которых алгебраический образ имеет вид $y^2-(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=0$.

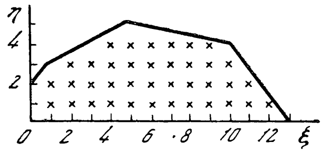


Рис. 2

Вейерштрасс обобщает теорию гиперэллиптических интегралов и функций на случай произвольного образа $f(x, y)=0$. С этой целью он рассматривает уравнения

$$u_\beta=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \mathrm{H}(xy)_\alpha dx \qquad (\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ \rho), \tag{9}$$

где $\mathrm{H}(xy)_\alpha$ — система ρ линейно независимых алгебраических функций специального вида, ρ — ранг алгебраического образа (1), a_α, b_α — постоянные. Тогда каждая рациональная симметричная функция пар значений $(x_\alpha y_\alpha)$ (а следовательно, и сама пара $(x_\alpha y_\alpha)$), рассматриваемая как функция от $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$, называется *абелевой функцией* ρ переменных $u_1, \ldots, u_\rho$.

Входящие в (9) абелевы интегралы делятся на всегда конечные интегралы *первого рода*, обращающиеся алгебраически в бесконечность — *второго рода* и обращающиеся в бесконечность логарифмически — *третьего рода*. Ранг ρ алгебраического образа (1) соответствует числу линейно независимых интегралов 1-го рода.

Число Вейерштрасса ρ совпадает с числом p — *родом* алгебраической кривой по Клебшу [140, с. 49]. Многообразие применения понятий ранга и рода видно, например, из теоремы Римана: при $p=0$ координаты алгебраической кривой могут быть выражены рациональными функциями одного параметра t, при $p=1$ — эллиптическими, при $p>1$ — гиперэллиптическими интегралами.

Ввиду важности понятия ранга ρ Вейерштрасс приводит два вывода, довольно сложных и длинных, для его вычисления.

Замечательный геометрический способ определения числа ρ, удобный для применения, дает Пюизё. Мы формулируем его в изложении И. П. Долбни [127].

В уравнении (4) каждому слагаемому вида $a_{ik}x^i y^k$ сопоставим точку с координатами $\xi=k$, $\eta=i$ и нанесем на плоскости (ξ, η) все точки, соответствующие данному образу. Затем проведем через эти точки *выпуклую* ломаную, такую, что все точки будут или на границе ломаной, или внутри нее, а затем сосчитаем все *внутренние* целочисленные точки полученного многоугольника. Их число как раз и будет равняться рангу ρ данного образа. И. Долбня проиллюстрировал это правило примером Абеля: дано уравнение

$$X(x, y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{12} y^{12} + y^{13} = 0.$$

Абель выписал показатели степеней x у множителей при степенях y:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
2	3	2	3	4	5	3	4	2	3	4	1	1

На рис. 2 нанесены все точки (i, k). Выпуклый шестиугольник, построенный по некоторым из этих точек и охватывающий все точки (i, k), внутри себя содержит точки, помеченные крестиками. Нужно сосчитать число целых точек, т. е. число вершин всех квадратов внутри многоугольника. Их 38, что и дает $\rho=38$.

Этим способом легко получается, что для уравнения $y^2=P_{2\rho+1}(x)$, где $P_{2\rho+1}(x)$ — полином степени $2\rho+1$, ранг равен ρ. Для этого нужно построить прямоугольный треугольник со сторонами $\xi=2$, $\eta=0$; $\xi=0$, $\eta=2\rho+1$; внутри него имеется ρ «целых» точек. Для уравнения $y^2=P_{2\rho+2}(x)$ также получается ρ «целых» точек, и, следовательно, ρ — ранг и этого уравнения.

Вернемся к функции $\mathrm{H}(xy)_\alpha$, записав ее в виде

$$\mathrm{H}(xy)_\alpha = \frac{G^{(\alpha)}(xy)}{f(x, y)_2}, \qquad f(x, y)_2 = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

В случае гиперэллиптических интегралов

$$f(x, y) = y^2 - P_{2\rho+1}(x),$$

где $P_{2\rho+1}(x)$ — полином степени $2\rho+1$, и

$$\partial f/\partial y = 2y = 2\sqrt{P_{2\rho+1}(x)}\,.$$

При этом в качестве $G^{(\alpha)}(xy)$ можно взять не зависящие от y величины $1, x, x^2, \ldots, x^{\rho-1}$ или другую совокупность линейно независимых полиномов. В общем случае абелевых интегралов дело обстоит сложнее, так как $G^{(\alpha)}(xy)$ зависят и от x, и от y.

Вейерштрасс показывает, что можно выбрать $G^{(\alpha)}(xy)$ так, чтобы этот полином от двух переменных был по x степени не выше $m-2$, по y — не выше $n-2$ и имел порядок не выше $\rho-3$.

Важнейшей частью исследований Вейерштрасса в области абелевых интегралов и функций является построение специальных рациональных функций пары (xy), которые обладают заданными бесконечно удаленными точками. С их помощью затем строится вся теория абелевых функций.

Вейерштрасс говорит [4, с. 60], что рациональная функция одного переменного определена, если известны ее нули и точки бесконечности и, кроме того, ее значение в какой-нибудь точке, причем должен быть известен порядок нулей и бесконечностей. Целая функция n-й степени определяется ее n нулями и значением в какой-нибудь точке, для $x=\infty$ она является бесконечной n-го порядка.

Аналогично определяется рациональная функция пары (xy), а именно функция $F(xy, x'y')$, которая является бесконечно большой первого порядка в точке $(x'y')$, оставляемой неопределенной, и, кроме того, бесконечно большой в ρ заданных точках $(a_1b_1), (a_2b_2), \ldots, (a_\rho b_\rho)$. В качестве примера берется уравнение 2-й степени для $f(x, y)$

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{11}$$

и принимается

$$F(xy, x'y') = \frac{g(xy)}{x-x'}.$$

Значению $x=x'$ в уравнении (11) соответствуют два значения y: y' и y''. Ставится условие, что для $y=y''$ функция $F(xy, x'y')$ не обращается в ∞, тогда $g(x'y'')=0$. При этом вблизи $y=y'$ имеем

$$f(x', y) = f(x', y')_2(y-y') + {}^1/_2 f(x', y')_{22}(y-y')^2,$$

причем

$$f(x', y')_2 = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\Big|_{x=x',\ y=y'},$$

$$f(x', y')_{22} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)\Big|_{x=x',\ y=y'}.$$

Отсюда

$$\frac{f(x'y)}{y-y'}=f(x',\ y')_2+{}^1/_2 f(x',\ y')_{22}(y-y')$$

и функция

$$F(xy,\ x'y')=\frac{f(x',\ y)}{(x-x')(y-y')}$$

есть искомая функция, так как она является бесконечно большой первого порядка в точке $(x'y')$. Для $x=\infty$ она конечна, так как y/x всюду конечно.

Если $f(x,\ y)$ выше второго порядка и степень полинома $f_0(x)$ есть $m>2$, то построение функции $F(xy,\ x'y')$ усложняется. Здесь принимается

$$F(xy, x'y')=\frac{f(x,\ y')-f(x,\ y)}{(x-x')(y-y')}+\sum_{\lambda=1}^{\rho} F^{(\lambda)}(x'y')F_\lambda(xy),$$

где множители $F^{(\lambda)}(x'y')$ — целые полиномы, $F_\lambda(xy)$ — рациональные функции.

Вводится еще одна функция $\mathrm{E}(xy,\ x'y')$ с помощью равенства

$$F(xy,\ x'y')-F(a_0b_0,\ x'y')=\frac{\mathrm{E}(xy,\ x'y')}{(x'-x)(x'-a_0)}, \tag{12}$$

которую можно записать в таком виде:

$$\mathrm{E}(xy,\ x'y')=\frac{(x'-a_0)[f(x,\ y')-f(x,\ y)]}{y'-y}-$$

$$-(x'-x)f(a_0b_0,\ x'y')+\sum_{\mu} F^{(\mu)}(x'y')\{F_\mu(xy)-F_\mu(a_0b_0)\}.$$

Это целая рациональная функция x' и y' не выше степени m от x' и не выше степени $n-1$ от y'.

Абелевы интегралы

Дифференцируя уравнение (1), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

или в обозначениях Вейерштрасса

$$f(x,\ y)_1\,dx+f(x,\ y)_2\,dy=0,$$

откуда

$$\frac{dx}{f(x,\ y)_2}=-\frac{dy}{f(x,\ y)_1}. \tag{13}$$

Рассматривая элементы алгебраического образа $(x'_\tau y'_\tau)$ согласно уравнению (5)

$$x'_\tau = \varphi(\tau), \qquad y'_\tau = \psi(\tau)$$

и умножая обе части (13) на $F(xy,\ x'y')$, заменив в (13) xy на $x'_\tau y'_\tau$, получим

$$\frac{F(xy,\ x'_\tau y'_\tau)}{f(x'_\tau y'_\tau)_2}\frac{dx'_\tau}{d\tau} = -\frac{F(xy,\ x'_\tau y'_\tau)}{f(x'_\tau y'_\tau)_1}\frac{dy'_\tau}{d\tau}.$$

Теперь Вейерштрасс вводит свою основную функцию $\mathrm{H}(xy,\ x'y')$, полагая [4, с 195]

$$\frac{F(xy,\ x'y') - F(a_0b_0,\ x'y')}{f(x',\ y')_2} = \mathrm{H}(xy,\ x'y'), \tag{14}$$

где F $(xy,\ x'y')$ имеет $\rho+1$ бесконечно удаленных точек $(x'y')$, $(a_1b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$. Поэтому H $(xy,\ x'y')$ является рациональной функцией пары (xy), которая, кроме $(x'y')$, обращается в бесконечность первого порядка также в точках (a_1b_1), $\ldots$, $(a_\rho b_\rho)$ и исчезает в точке (a_0b_0).

Вейерштрасс выясняет свойства функции H $(xy,\ x'y')$ и приходит к заключению, меняя обозначения, что если около обыкновенной точки (x_1y_1) положить

$$x_t = x_1 + t, \qquad y_t = y_1 + t\mathfrak{P}(t),$$

то функция $\mathrm{H}(x_ty_t,\ x_1y_1)$ и ее производная по t будут иметь вид

$$\mathrm{H}(x_ty_t,\ x_1y_1) = -t^{-1} + \mathfrak{P}_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{H}(x_ty_t,\ x_1y_1) = t^{-2} + \mathfrak{P}_2(t),$$

где $\mathfrak{P}(t)$, $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2(t)$ — степенные ряды по положительным степеням t, а для самой функции $\mathrm{H}(x_ty_t,\ x_1y_1)$ около точки $(a_\alpha b_\alpha)$ имеют место разложения

$$\mathrm{H}\left(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x_1y_1\right) = t^{-1}\mathrm{H}(x_1y_1)_\alpha + \overset{0}{\mathrm{H}}(x_1y_1)_\alpha - t\mathrm{H}'(x_1y_1)_\alpha + \ldots, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{H}\left(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x_1y_1\right) = -t^{-2}\mathrm{H}(x_1y_1)_\alpha - \mathrm{H}'(x_1y_1)_\alpha + t\mathfrak{P}(t).$$

Точно такие же равенства можно написать для $\mathrm{H}\left(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x_2y_2\right)$ и ее производной. Составляя разность производных и отбирая в ней коэффициент при t^{-1}, заменяя затем (x_1y_1) на (xy) и (x_2y_2) на $(x'y')$, получаем формулу [4, с. 254], которая является основой для теории Вейерштрасса абелевых трансцендент:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{H}(xy,\ x'y') - \frac{d}{dx'}\mathrm{H}(x'y',\ xy) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\rho} \{\mathrm{H}(x'y')_\alpha \mathrm{H}'(xy)_\alpha - \mathrm{H}(xy)_\alpha \mathrm{H}'(x'y')_\alpha\}. \qquad (16)$$

Рассмотрим примеры.

1°. Вейерштрасс подробно останавливается на изучении свойств простейшего абелева интеграла нулевого ранга

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x},$$

для которого

$$\mathrm{H}(xy,\ x'y') = \frac{1}{x'-x} - \frac{1}{x'-1}.$$

Для вычисления периода I берется замкнутый путь в виде квадрата со сторонами (1, 0), (0, i), (—1, 0), (0, —i). Получается

$$2\omega = \overline{\int} \frac{dx}{x} = 2\pi i.$$

(Вейерштрасс чертой наверху обозначает замкнутый контур.)

2°. Для гиперэллиптического образа ранга ρ имеем

$$y^2 = R(x),$$

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{2\rho}).$$

Сначала Вейерштрасс строит функцию $\mathrm{H}(xy,\ x'y')$, которая в точках $(x'y')$; (x_1y_1), ..., $(x_\rho y_\rho)$ является бесконечно большой, а для $x=\infty$ равна нулю:

$$\mathrm{H}(xy,\ x'y') = -\frac{\Pi(x)}{2y'}\left\{\frac{y}{(x-x')(x-x_1)\ldots(x-x_\rho)} - \right.$$

$$- \frac{y'}{(x'-x)(x'-x_1)\ldots(x'-x_\rho)} - \frac{y_1}{(x_1-x)(x_1-x')\ldots(x_1-x_\rho)} -$$

$$\left. - \ldots - \frac{y_\rho}{(x_\rho-x)(x_\rho-x')\ldots(x_\rho-x_{\rho-1})}\right\},$$

где $\Pi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\rho)$.

В качестве точек (x_1y_1), (x_2y_2), ..., $(x_\rho y_\rho)$, обращающих $\mathrm{H}(xy,\ x'y')$ в бесконечность, принимаются точки

$$(a_10),\ (a_30),\ \ldots,\ (a_{2\rho-1}0).$$

Тогда все члены выражения для $\mathrm{H}(xy, x'y')$, содержащие $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$, обращаются в нуль и остается всего два слагаемых, которые при

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{2\rho-1})$$

приводят к такому результату:

$$\mathrm{H}(xy, x'y') = \frac{P(x')}{2(x' - x)y'}\left\{\frac{y}{P(x)} + \frac{y'}{P(x')}\right\}. \qquad (17)$$

Рассматривается также другой полином

$$Q(x) = (x - a_0)(x - a_2)\ldots(x - a_{2\rho}),$$

так что

$$R(x) = P(x)Q(x),$$

и вводится параметр t таким образом:

$$P(x)/y = y/Q(x) = t,$$

откуда $t^2 = P(x)/Q(x)$.

Разложение t^2 в ряд по степеням $x - a_{2\alpha-1}$ дает

$$t^2 = \frac{P'(a_{2\alpha-1})}{Q(a_{2\alpha-1})}(x - a_{2\alpha-1}) + \ldots,$$

а ряды для x_t и y_t имеют первые члены

$$\overset{\alpha}{x}_t = a_{2\alpha-1} + \frac{Q(a_{2\alpha-1})}{P'(a_{2\alpha-1})}t^2 + \ldots,$$

$$\overset{\alpha}{y}_t = Q(a_{2\alpha-1})t + \ldots$$

Если ввести параметр t таким образом:

$$Q(x)/y = y/P(x) = t,$$

то можно получить разложения $\overset{\alpha}{x}_t$ и $\overset{\alpha}{y}_t$ около точки $(a_{2\alpha}, 0)$ с четным значком у a_i. Из полученных для x_t и y_t выражений видно, откуда берутся множители

$$Q(a)/P'(a), \qquad Q(a),$$

которые у нас встретились, когда мы говорили о гиперэллиптических функциях.

Бесконечно удаленный элемент $x = \infty$, $y = \infty$ гипергеометрического образа может быть представлен в виде

$$x_t = t^{-2}, \qquad y_t = t^{-2\rho-1}\{1 + t^2\mathfrak{P}(t^2)\}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (17) дает для $\mathrm{H}(xy, x'y')$ около точки $x = \infty$, $y = \infty$ выражение вида

$$-\frac{P(x')}{2y'}t+\ldots,$$

т. е. H исчезает на бесконечности (при $t=0$), причем является нулем первого порядка относительно t.

Равенство (16), представляющее разложение производной вейерштрассовой функции H $(xy,\ x'y')$ по функциям H $(xy)_\alpha$ и H$'$ $(xy)_\alpha$, служит для определения периодов абелевых интегралов.

Пусть (x_0y_0) и (x_1y_1) будут две не особенные точки, принадлежащие одному и тому же алгебраическому образу $f(x,\ y)=0$. Произведем интегрирование (16) по x' от (x_0y_0) до (x_1y_1) по пути, не проходящему через точки (xy), (a_0b_0), $\ldots$, $(a_\rho b_\rho)$.

Вейерштрасс доказывает законность перестановки интегрирования и дифференцирования и вводит новую функцию [4, с. 302]:

$$\int\limits_{(x_0y_0)}^{(x_1y_1)} \mathrm{H}(xy,\ x'y')\,dx' = \Omega(xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0), \tag{18}$$

причем получает [4, с. 304]:

$$\frac{d}{dx}\Omega(xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0) = \mathrm{H}(x_1y_1,\ xy) - \mathrm{H}(x_0y_0,\ xy) +$$
$$+\sum_\alpha\left\{\mathrm{H}'(xy)_\alpha \int\limits_{(x_0y_0)}^{(x_1y_1)} \mathrm{H}(x'y')_\alpha\,dx' -\right.$$
$$\left.-\mathrm{H}(xy)_\alpha \int\limits_{(x_0y_0)}^{(x_1y_1)} \mathrm{H}'(x'y')_\alpha\,dx'\right\}.$$

Беря последовательные пары значений (x_0y_0), (x_1y_1), $\ldots$, (x_ry_r), (x_0y_0) так, чтобы два места, следующих одно за другим, принадлежали одному и тому же алгебраическому образу, получим интегралы по замкнутому контуру (которые Вейерштрасс обозначает чертой наверху):

$$\overline{\int} \mathrm{H}(xy,\ x'y')\,dx' = \Omega(xy), \tag{19}$$

$$\overline{\int} \mathrm{H}(x'y')_\alpha\,dx' = 2\omega_\alpha, \quad \overline{\int} \mathrm{H}'(x'y')_\alpha\,dx' = 2\eta_\alpha. \tag{20}$$

Величины $2\omega_1$, $\ldots$, $2\omega_\rho$ называются *системой совместных* (simultane) *периодов* ρ интегралов первого рода, $2\eta_1$, $\ldots$,

$2\eta_\rho$ — *системой периодов* интегралов второго рода. Тогда можно написать равенство

$$\frac{d\Omega(xy)}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \{2\omega_\alpha \mathrm{H}'(xy)_\alpha - 2\eta_\alpha \mathrm{H}(xy)_\alpha\}. \tag{21}$$

Таким образом, $\Omega(xy)$ имеет свойство: его производная является рациональной функцией пары (xy), а именно агрегатом функций $\mathrm{H}(xy)_\alpha$ и $\mathrm{H}'(xy)_\alpha$.

Наряду с неоднозначной функцией $\Omega(xy)$ вводится функция $\mathrm{E}(xy)$, имеющая характер целой функции:

$$\mathrm{E}(xy) = e^{\Omega(xy)}.$$

Следующее интегрирование по замкнутым контурам (на плоскости x) с учетом того, что около обыкновенной точки (x_0y_0) имеет место соотношение

$$\mathrm{H}(xy,\ x'y')\,dx' = \left\{\frac{1}{x'-x} + \mathfrak{P}(x-x_0,\ x'-x_0)\right\} dx', \tag{22}$$

дает

$$2\varepsilon\pi i = \sum_{\alpha=1}^{\rho} (2\omega_\alpha \cdot 2\bar{\eta}_\alpha - 2\eta_\alpha \cdot 2\bar{\omega}_\alpha)$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} (\omega_\alpha\bar{\eta}_\alpha - \eta_\alpha\bar{\omega}_\alpha) = \frac{\varepsilon\pi i}{2}, \tag{23}$$

где ε равно 0 или ± 1, смотря по тому, как обходится замкнутый контур; $\bar{\omega}_\alpha$ и $\bar{\eta}_\alpha$ — значения интегралов (20), взятых по другим замкнутым контурам [4, с. 313].

Соотношение (23) является обобщением известного соотношения Лежандра в теории эллиптических функций.

Вернемся к выражению (18) для функции $\Omega(xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0)$; эта функция во всех точках образа, кроме $(a_1b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$, (x_1y_1), (x_0y_0), имеет характер целой функции; в ρ точках $(a_1b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$ она бесконечно большая первого порядка, в точках (x_1y_1) и (x_0y_0) логарифмически бесконечно большая. Она однозначно определена, за исключением точек, принадлежащих пути интегрирования, для которых она двузначна, причем оба ее значения различаются на $2\pi i$.

Подобно тому как с помощью функции $\Omega(xy)$ была образована функция $\mathrm{E}(xy)$, теперь вводится еще одна функция

$$\mathrm{E}(xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0) = e^{\Omega(xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0)}. \tag{24}$$

Для пояснения смысла этой функции Вейерштрасс рассматривает рациональную функцию от одной переменной x, которая обращается в нуль в точке x_1, а в точке x_0 — в бесконечность порядка 1 и в некоторой точке a_0 равна единице. Это функция

$$(x;\ x_1,\ x_0) = \frac{x - x_1}{x - x_0}\ \frac{a_0 - x_0}{a_0 - x_1}.$$

Каждая рациональная функция $R(x)$ одной переменной столько же раз обращается в нуль, сколько в бесконечность, если иметь в виду, что нули и бесконечности считаются с правильными порядковыми числами. Допустим, что эти нули в точках $x_1, x_2, \ldots, x_r$, бесконечности — в точках $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ (если порядковый номер какого-нибудь числа больше 1, то оно входит несколько раз). Тогда $R(x)$ может быть представлена в виде

$$R(x) = R(x_0) \prod_{\nu=1}^{r} (x;\ x_\nu,\ x'_\nu).$$

Функции $(x;\ x_\nu,\ x'_\nu)$ Вейерштрасс называет *рациональными примфункциями.* Таким образом, каждая рациональная функция может быть представлена в виде произведения постоянной на рациональные примфункции.

Функция $\mathrm{E}\ (xy;\ x_1y_1,\ x_0y_0)$ исчезает, не считая существенно особых точек $(a_1b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$, только в точке (x_1y_1) и обращается в бесконечность в точке (x_0y_0), в обоих случаях с порядковым числом 1. Она названа *трансцендентной примфункцией.* Всякая рациональная функция $R\ (xy)$ от пары (xy), связанной алгебраическим уравнением, представима в виде произведения примфункций. Если $R\ (xy)$ исчезает в точках $(x_1y_1), \ldots, (x_ry_r)$ и делается бесконечно большой в точках $(x'_1y'_1), \ldots, (x'_ry'_r)$, то

$$R(xy) = R(a_0b_0) \prod_{\nu=1}^{r} \mathrm{E}\ (xy;\ x_\nu y_\nu,\ x'_\nu y'_\nu).$$

С помощью введенных Е-функций Вейерштрассу удается доказать сравнительно просто теорему, которую Якоби назвал теоремой Абеля и оценил как величайшее математическое открытие своего времени [95, т. 1, с. 379].

Теорема Абеля

Вейерштрасс излагает историю опубликования теоремы Абеля. Ей посвящены три сообщения Абеля. Первая статья была опубликована в журнале Крелле в 1828 г. и относилась только к гиперэллиптическим интегралам; вторая, опубликованная в том же журнале в 1829 г., содержала краткое изложение общей теоремы. Третья объемистая статья с полным изложением общей теоремы была представлена Абелем в 1826 г. в Парижскую академию наук. Мы уже говорили об этой статье, она была опубликована лишь в 1841 г. во французском журнале «Savants étrangers». Вейерштрасс добавляет некоторые подробности. По обычаям Парижской академии наук мемуар Абеля должны были смотреть два математика. Назначены были Коши и Лежандр. Но Коши, по-видимому, не посмотрел работу или не понял ее важности и задержал ее у себя, не передав Лежандру. Штейнер, который узнал от самого Абеля о передаче его рукописи в Парижскую академию наук, после смерти Абеля сообщил об этом Якоби, который позаботился об опубликовании.

Абель формулирует теорему таким образом: сумма произвольного числа интегралов от алгебраического дифференциала сводится к сумме некоторого числа интегралов от того же дифференциала и некоторого алгебраически-логарифмического выражения. «Однако определение этого наименьшего числа слагаемых, т. е. числа ρ, у Абеля недостаточно, оно годится, только если лежащий в основе алгебраический образ $f(x, y)=0$ подчинен ограничительным условиям», — говорит Вейерштрасс [4, с. 403].

Статья Абеля начинается с его теоремы о том, что если интеграл от рациональной функции $F(xy)$ от пары (xy), связанной алгебраическим уравнением $f(x, y)=0$, выражается через алгебраические и логарифмические операции, то он всегда представим в виде

$$\int F(xy)\,dx = F_0(xy) + \sum_k C_k \log F_k(xy),$$

где $F_0(xy)$, $F_1(xy)$, . . . — рациональные функции пары (xy).

Поэтому Вейерштрасс думает, что Абель пришел к своей общей теореме через поиски условий интегрируемости.

Вейерштрасс формулирует теорему Абеля более подробно с помощью своих функций $\mathrm{H}(xy)_\beta$ таким образом.

Абелева теорема для интегралов первого рода. Сумма любого числа интегралов

$$\sum_{\nu=1}^{r} \int_{(x'_\nu y'_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)} \mathrm{H}(xy)_\beta\,dx \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho),$$

у которых верхние и нижние пределы $(x_\nu y_\nu)$, $(x'_\nu y'_\nu)$ заданы произвольно, всегда может быть представлена как сумма ρ интегралов

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(g_\alpha h_\alpha)}^{(x_{r+\alpha} y_{r+\alpha})} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx \quad (\beta = 1, 2, \ldots, \rho),$$

в которых нижний предел $(g_\alpha h_\alpha)$ может быть выбран произвольно, а верхние пределы $(x_{r+\alpha} y_{r+\alpha})$ являются алгебраическими функциями пар $(x_\nu y_\nu)$, $(x'_\nu y'_\nu)$ и $(g_\alpha h_\alpha)$, причем это одни и те же функции для каждого индекса β.

Другими словами, если имеем ρ трансцендентных и ρ алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{r} \int\limits_{(x'_\nu y'_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(g_\alpha h_\alpha)}^{(x_{r+\alpha} y_{r+\alpha})} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx$$

$$(\beta = 1, 2, \ldots, \rho), \tag{25}$$

$$f(x_{r+\alpha}, y_{r+\alpha}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho),$$

то теорема Абеля гласит, что 2ρ неизвестных $(x_{r+\alpha}, y_{r+\alpha})$ могут быть определены алгебраически.

Вейерштрасс добавляет, что эта формулировка теоремы Абеля обладает некоторой неопределенностью, которая во времена Абеля не была известна, так как еще не была развита теория периодов интегралов алгебраических функций. Теорема говорит только о том, что при определенном выборе пути интегрирования возможно разрешить представленные 2ρ уравнений. На самом деле пути интегрирования r интегралов слева и $\rho-1$ интегралов справа можно выбрать произвольно, однако в ρ интегралах, для которых $\beta=1$, $2, \ldots, \rho$, соответствующие пути интегрирования должны быть выбраны одинаковыми и так, чтобы удовлетворялись написанные равенства.

Теорема Абеля распространяется и на случай интегралов 2-го и 3-го рода, только вместо равенства (25) будем иметь для интегралов 2-го рода

$$\int\limits_{(x'_\nu y'_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)} \mathrm{H}'(xy)_\beta \, dx = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int\limits_{(g_\alpha h_\alpha)}^{(x_{r+\alpha} y_{r+\alpha})} \mathrm{H}'(xy)_\beta \, dx +$$

$$+ F_0(x_1 y_1, \ldots, x'_1 y'_1, \ldots, g_1 h_1, \ldots),$$

а для интегралов 3-го рода

$$\sum_{\nu=1}^{r}\int\limits_{(x'_\nu y'_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)}\{\mathrm{H}(\xi\eta,\ xy)-\mathrm{H}(\xi_0\eta_0,\ xy)\}\,dx=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\int\limits_{(g_\alpha h_\alpha)}^{(x_{r+\alpha}y_{r+\alpha})}\{\mathrm{H}(\xi\eta,\ xy)-\mathrm{H}(\xi_0\eta_0,\ xy)\}\,dx+$$

$$+\log F_1(\xi\eta,\ \xi_0\eta_0;\ x_1y_1,\ \ldots,\ x'_1y'_1,\ \ldots,\ g_1h_1,\ \ldots).$$

Здесь F_0 и F_1 — рациональные функции своих аргументов, следовательно, алгебраические функции от $x_1, \ldots, x_r$, $x'_1, \ldots, x'_r$, $g_1, \ldots, g_r$.

Теперь Вейерштрасс кратко формулирует *теорему Абеля*: сумма любого числа интегралов от рациональной функции пары (xy) может быть приведена к сумме ρ интегралов от нее плюс алгебраически-логарифмическое выражение, образованное из пределов интегрирования.

После проведенных рассуждений Вейерштрасс приходит к заключению, что искомые величины $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+\rho}$ являются корнями уравнения ρ-й степени

$$P_0x^\rho+P_1x^{\rho-1}+\ldots+P_\rho=0, \tag{26}$$

коэффициенты которого — рациональные функции пар $(x_\nu y_\nu)$, $(x'_\nu y'_\nu)$ и $(g_\alpha h_\alpha)$. В случае неприводимости этого уравнения y_{r+}, представимо в виде

$$y_{r+\alpha}=\frac{Q_1x_{r+\alpha}^{\rho-1}+Q_2x_{r+\alpha}^{\rho-2}+\ldots+Q_\rho}{Q_0}, \tag{27}$$

где Q_k обладают такими же свойствами, как P_k.

Якоби занимался теоремой Абеля в применении к гиперэллиптическим интегралам. Он показал, что полное интегрирование системы ρ дифференциальных уравнений между $\rho+1$ переменными $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$:

$$\sum_{\nu=0}^{\rho}\frac{1}{2}\,\frac{P(x_\nu)}{x_\nu-a_{2\beta-1}}\,\frac{dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}}=0\qquad(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

в которой

$$R(x)=(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{2\rho}),$$

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2\rho-1}),$$

дается теоремой Абеля.

Действительно, пусть для гиперэллиптического образа $y^2-R(x)=0$ выбраны пары (xy) так, что они в $\rho+1$ произвольно выбранных местах

$$(g_0h_0),\ (g_1h_1), \ldots, (g_\rho h_\rho)$$

являются бесконечно большими первого порядка и в произвольно выбранной точке (x_0y_0) равны нулю. Функция $y^2-R(x)$ обращается в нуль еще в ρ других точках:

$$(x_1y_1),\ (x_2y_2), \ldots, (x_\rho y_\rho),$$

причем координаты этих пар точек зависят алгебраически от (x_0y_0), (g_0h_0), ..., $(g_\rho h_\rho)$. Тогда можно построить ρ линейно независимых функций $\mathrm{H}(xy)_\beta$, где

$$\mathrm{H}(xy)_\beta=\frac{P(x)}{2y(x-a_{2\beta-1})} \qquad (\beta=1,\ 2, \ldots, \rho).$$

По теореме Абеля для интеграла первого рода имеем

$$\int\limits_{(x_0y_0)}^{(g_0h_0)} \frac{1}{2}\frac{P(x)}{x-a_{2\beta-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\int\limits_{(g_\alpha h_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \frac{1}{2}\frac{P(x)}{x-a_{2\beta-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (\beta=1,\ 2, \ldots, \rho),$$

что можно переписать так:

$$\sum_{\nu=0}^{\rho}\int\limits_{(g_\nu h_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)} \frac{1}{2}\frac{P(x)}{x-a_{2\beta-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=0.$$

Из этих интегральных уравнений дифференцированием получается заданная система дифференциальных уравнений, которая теперь оказывается проинтегрированной. Пары (x_1y_1), ..., $(x_\rho y_\rho)$ являются алгебраическими функциями (x_0y_0) и пар (g_0h_0), (g_1h_1), ..., $(g_\rho h_\rho)$.

Абелевы функции

Редакторы 4-го тома трудов Вейерштрасса Г. Хеттнер и И. Кноблаух в предисловии написали: «Хотя содержащиеся в предлагаемом томе лекции Вейерштрасса всегда объявлялись как «Теория абелевых функций», мы назвали их, с согласия Вейерштрасса, как абелевы трансценденты, потому что теория собственно абелевых функций в них только кратко намечена, в то время как основные алгебраические исследования и теория абелевых интегралов достаточно продвинуты» [4, с. V]. Очевидно, Вейерштрасс не был вполне доволен полученными результатами и не считал их окончательными, однако все же решился дать согласие на их опубликование.

Третья часть книги об абелевых трансцендентах носит название «Абелевы функции». Рассматривается ρ алгебраических уравнений

$$f(x_\alpha, y_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho)$$

и ρ дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} du_1 &= \sum_{\alpha=1}^{\rho} \mathrm{H}(x_\alpha y_\alpha)_1\, dx_\alpha, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ du_\rho &= \sum_{\alpha=1}^{\rho} \mathrm{H}(x_\alpha y_\alpha)_\rho\, dx_\alpha \end{aligned} \tag{28}$$

с условиями: при $u_1 = u_2 = \ldots = u_\rho = 0$ пара $(x_\alpha y_\alpha)$ равна заданной паре значений $(a_\alpha b_\alpha)$. Требуется представить 2ρ величин x_α, y_α как функции ρ независимых переменных $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$. При этом $(a_1 b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$ принимаются за ρ различных точек бесконечности функции $\mathrm{H}(xy, x'y')$. Предполагается, что детерминант $|\mathrm{H}(a_\alpha b_\alpha)_\beta|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \rho)$ отличен от нуля. Функции x_α, y_α и будут *абелевыми функциями*.

Вейерштрасс замечает, что можно было бы рассматривать задачу об определении x и y как функций *одной* переменной u из уравнений $f(x, y) = 0$ и

$$u = \int_{(ab)}^{(xy)} \mathrm{H}(xy)\, dx.$$

Но оказывается, что такие функции одной переменной не имеют аналогии с эллиптическими функциями, в то время как функции многих переменных, предложенные Якоби в задаче обращения, такую аналогию имеют.

Если исходить не из функций $\mathrm{H}(x_\alpha y_\alpha)_\beta$, но из другой системы ρ линейно независимых функций $\overset{\gamma}{\mathrm{H}}(x_\alpha y_\alpha)$, также определяющихся из функции $\mathrm{H}(xy, x'y')$ как коэффициенты ее разложения, то в силу линейной зависимости между этими системами функций

$$\overset{\gamma}{\mathrm{H}}(xy) = \sum_{\beta=1}^{\rho} C_{\gamma\beta} \mathrm{H}(xy)_\beta \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \rho)$$

и, обратно,

$$\mathrm{H}(xy)_\beta = \sum_{\gamma=1}^{\rho} C'_{\gamma\beta} \overset{\gamma}{\mathrm{H}}(xy)$$

можно взять

$$du'_\beta = \sum_{\gamma=1}^{\rho} C'_{\gamma\beta} du_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \mathrm{H}(x_\alpha y_\alpha)_\beta \, dx_\alpha.$$

Получается система того же вида для функций u'_β.

Из системы (28) при поставленных условиях получаем

$$u_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho). \tag{29}$$

Вейерштрасс ищет решения для x_α, y_α в виде степенных рядов по $u_1, \ldots, u_\rho$:

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\rho), \qquad y_\alpha = \psi_\alpha(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\rho) \tag{30}$$

$$(\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho),$$

и доказывает их сходимость в некоторой области U. Элементы функций $\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho)$ и $\psi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho)$ обладают *алгебраической теоремой сложения*. Пусть будут

$$u_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx, \qquad v_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x'_\alpha y'_\alpha)} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx,$$

$$u_\beta + v_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x''_\alpha y''_\alpha)} \mathrm{H}(xy)_\beta \, dx.$$

По теореме Абеля x''_α и y''_α являются алгебраическими функциями пар $(x_1 y_1), \ldots, (x_\rho y_\rho)$, $(x'_1 y'_1), \ldots, (x'_\rho y'_\rho)$, и так как $(x_\alpha y_\alpha)$ и $(x'_\alpha y'_\alpha)$ удовлетворяют уравнению $f(x,\ y) = 0$, то получаются зависимости вида

$$\varphi_\alpha(u_1 + v_1,\ \ldots,\ u_\rho + v_\rho) = F_\alpha[\varphi_1(u_1,\ \ldots,\ u_\rho),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \varphi_\rho(u_1, \ldots, u_\rho); \quad \varphi_1(v_1,\ \ldots,\ v_\rho),\ \ldots,\ \varphi_\rho(v_1,\ \ldots,\ v_\rho)],$$
$$\psi_\alpha(u_1 + v_1,\ \ldots,\ u_\rho + v_\rho) = \bar{F}_\alpha[\psi_1(u_1,\ \ldots,\ u_\rho),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \psi_\rho(u_1,\ \ldots,\ u_\rho);\ \psi_1(v_1,\ \ldots,\ v_\rho),\ \ldots,\ \psi_\rho(v_1,\ \ldots,\ v_\rho)],$$

где F_α и $\bar{F}_\alpha$ — алгебраические функции своих аргументов.

Функции (30) x_α, y_α удовлетворяют уравнениям (26) и (27), которые Вейерштрасс переписывает в виде

$$x^\rho + \frac{P_1}{P_0} x^{\rho-1} + \ldots + \frac{P_\rho}{P_0} = 0,$$

$$y_\alpha = \frac{Q_1}{Q_0} x_\alpha^{\rho-1} + \frac{Q_2}{Q_0} x_\alpha^{\rho-2} + \ldots + \frac{Q_\rho}{Q_0}. \qquad (31)$$

Величины x_α, y_α являются однозначными функциями u_1, $u_2, \ldots, u_\rho$ в некоторой области.

Далее рассматривается некоторая функция $F(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_\rho y_\rho)$, рациональная и симметричная по отношению к парам $(x_\alpha y_\alpha)$, т. е. остающаяся неизменной при перестановке каких-нибудь двух пар из $(x_1y_1), \ldots, (x_\rho y_\rho)$. Функция F будет также рационально выражаться через коэффициенты P_k/P_0 и Q_k/Q_0.

Можно положить

$$F(x_1y_1, \ldots, x_\rho y_\rho) = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_\rho),$$

где Φ будет однозначной функцией от $(u_1, \ldots, u_\rho)$.

Если между парами $(x_1y_1), \ldots, (x_\rho y_\rho)$ и переменными $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ существует зависимость (29), то каждая рациональная симметричная функция пар значений $(x_\alpha y_\alpha)$, рассматриваемая как функция от $u_1, \ldots, u_\rho$, называется *абелевой функцией* ρ переменных $u_1, \ldots, u_\rho$ [4, с. 462].

Рассматривается система ρ независимых друг от друга рациональных функций, симметричных относительно пар значений $(x_\alpha y_\alpha)$:

$$F_\alpha(x_1y_1, \ldots, x_\rho y_\rho) = \Phi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Функции Φ_α обладают теоремой сложения, которая формулируется так. Имеются три системы функций:

$$\Phi_1(u_1, \ldots u_\rho), \ldots, \Phi_\rho(u_1, \ldots, u_\rho),$$

$$\Phi_1(v_1, \ldots, v_\rho), \ldots, \Phi_\rho(v_1, \ldots, v_\rho),$$

$$\Phi_1(u_1 + v_1, \ldots, u_\rho + v_\rho), \ldots, \Phi_\rho(u_1 + v_1, \ldots, u_\rho + v_\rho).$$

Тогда каждая функция третьего ряда выражается алгебраически через функции двух первых рядов.

Эти функции обладают также свойством периодичности, т. е. существует *система совместных периодов* $2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_\rho$ таких, что

$$\Phi_\alpha(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots, u_\rho + 2\omega_\rho) = \Phi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho).$$

Если рассматривать одновременно абелевы интегралы первого и второго рода

$$\int \mathrm{H}(xy)_\beta\, dx, \qquad \int \mathrm{H}'(xy)_\beta\, dx \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho),$$

то полная *примитивная* система периодов будет состоять из $4\rho^2$ чисел:

$$\begin{matrix} 2\omega_{\beta 1}, \ \ldots, \ 2\omega_{\beta\rho}; & 2\omega'_{\beta 1}, \ \ldots, \ 2\omega'_{\beta\rho} \\ 2\eta_{\beta 1}, \ \ldots, \ 2\eta_{\beta\rho}; & 2\eta'_{\beta 1}, \ \ldots, \ 2\eta'_{\beta\rho} \end{matrix} \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho).$$

Для функций $\Phi_\alpha(u_1, \ldots, u_\rho)$ период $2\omega_\beta$ выражается через примитивные периоды верхней строки:

$$2\omega_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\rho} (2m_\alpha \omega_{\beta\alpha} + 2m'_\alpha \omega'_{\beta\alpha}) \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho),$$

где m_α, m'_α — целые числа или нуль. Абелевы функции $\Phi(u_1, \ldots, u_\rho)$ называют 2ρ-периодическими.

Вейерштрасс подробно рассматривает свойства $\mathrm{H}(xy, x'y')$, $\mathrm{E}(xy;\ x_1y_1,\ x'y')$ и других введенных им функций.

О θ-функциях

Большое место уделяет Вейерштрасс θ-функциям, которым посвящено 10 последних глав из общего числа 34. Он обобщает понятия θ-функции на случай многих переменных и изучает свойства этих замечательных функций, представимых быстро сходящимися рядами. θ-функции являются вспомогательным средством для изучения абелевых функций.

В разделе «Лекции по теории эллиптических функций» мы видели представления θ-функции от одной независимой переменной Вейерштрасса (формула (7)).

Вейерштрасс дает обобщение своей функции на случай многих переменных. Для этого он рассматривает систему совместных периодов абелевых интегралов первого и второго рода и полагает

$$2\omega_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\rho} (2m_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2n_\beta \omega'_{\alpha\beta}),$$

$$2\eta_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\rho} (2m_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2n_\beta \eta'_{\alpha\beta})$$

$$(m_\beta,\ n_\beta \text{ — целые}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho).$$

Тогда θ-функция — целая функция, обладающая свойством

$$\theta(u_1+2\omega_1, \ldots, u_\rho+2\omega_\rho)=$$
$$=(-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho} m_\alpha n_\alpha}\theta(u_1, \ldots, u_\rho)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\rho} 2\eta_\alpha(u_\alpha+\omega_\alpha)\right\}.$$

И такое же соотношение имеет место, если заменить ω_α, η_α на ω'_α, η'_α.

В теории эллиптических трансцендент рассматриваются четыре θ-функции: θ, θ_1, θ_2, θ_3. Подстановки в случае простейшей из них $\theta_3(u)$ дают

$$v=\frac{u}{2\omega}, \qquad \tau=\frac{\omega'}{\omega}, \qquad \theta_3(u)=e^{2\eta\omega v^2}\vartheta_3(v),$$

$$\vartheta_3(v)=\sum_n e^{\pi i n^2\tau-2n\pi v i}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2}\cos 2n\pi v$$

и приводят к функции $\vartheta_3(v)$ с более простыми свойствами:

$$\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v), \qquad \vartheta_3(v+\tau)=\vartheta_3(v)\,e^{-\pi i(2v+\tau)}. \tag{32}$$

Аналогичные замены можно произвести для θ-функции ρ переменных $v_1, \ldots, v_\rho$ (вместо $u_1, \ldots, u_\rho$) таким образом:

$$u_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\rho} 2\omega_{\alpha\beta}v_\beta. \tag{33}$$

При этом система периодов

$$\begin{matrix} 2\omega_{11}, & 2\omega_{21}, & \ldots, & 2\omega_{\rho 1}, \\ 2\omega_{12}, & 2\omega_{22}, & \ldots, & 2\omega_{\rho 2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2\omega_{1\rho}, & 2\omega_{2\rho}, & \ldots, & 2\omega_{\rho\rho} \end{matrix} \tag{34}$$

перейдет в систему

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1. \end{matrix} \tag{35}$$

Преобразование (33) приведет к цели только в том случае, если определитель $|\omega_{\alpha\beta}|$ отличен от нуля. И Вейерштрасс посвящает целую главу исследованию этого детерминанта и доказательству того, что всегда можно выбрать систему величин $\omega_{\alpha\beta}$ так, чтобы $|\omega_{\alpha\beta}|\neq 0$.

Заметим, что сложением и вычитанием систем периодов (35) мы можем получить систему периодов

$$\begin{array}{l}\mu_1, 0, \ldots, 0, \\ 0, \mu_2, \ldots, 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, \ldots, \mu_\rho\end{array} \qquad (36)$$

так, что $\vartheta(v_1+\mu_1, \ldots, v_\rho+\mu_\rho)=\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)$, и вместо (32) будет иметь место уравнение

$$\vartheta(v_1+\tau_1, \ldots, v_\rho+\tau_\rho)= \\ =\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)\exp\left\{-\sum_\alpha \nu_\alpha(2v_\alpha+\tau_\alpha)\pi i\right\}.$$

Чтобы дать представление о ϑ-функциях Вейерштрасса с многими аргументами, выпишем выражения двух из них:

$$(-1)^\mu\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho;\ \mu, \mu')= \\ =\sum_n(-1)^{\sum\limits_\alpha n_\alpha\mu_\alpha}e^{\chi(n_1+1/2\mu_1', \ldots)}\cos\left\{\sum_\alpha(2n_\alpha+\mu_\alpha')v_\alpha\pi\right\},$$

$$(-1)^{\mu+1/2}\vartheta'(v_1, \ldots, v_\rho;\ \mu, \mu')= \\ =\sum_n(-1)^{\sum\limits_\alpha n_\alpha\mu_\alpha}e^{\chi(n_1+1/2\mu_1', \ldots)}\sin\left\{\sum_\alpha(2n_\alpha+\mu_\alpha')v_\alpha\pi\right\}.$$

Здесь

$$\chi(n_1, \ldots, n_\rho)=\pi i\sum_{\alpha=1}^{\rho}n_\alpha\tau_\alpha,$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_\rho$ — система независимых периодов, μ_α и μ_α' ($\alpha=1, 2, \ldots, \rho$) — система периодов (36) и аналогичная ей.

θ-функции Вейерштрасса служат для представления через них абелевых интегралов второго и третьего рода.

Наряду с Вейерштрассом θ-функциями многих переменных занимался Риман. Его θ-функция имеет вид (при $\rho=2$ эта функция встречалась у Гёпеля и Розенхайна)

$$\theta(v_1, \ldots, v_\rho)= \\ =\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sum_{\lambda=1}^{\rho}\sum_{\lambda'=1}^{\rho}a_{\lambda\lambda'}m_\lambda m_{\lambda'}+2\sum_{\lambda=1}^{\rho}v_\lambda m_\lambda\right),$$

где внешние суммы распространяются на всевозможные упорядоченные наборы целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_\rho$ [140, с. 238]. На коэффициенты $a_{\lambda\lambda'}$ налагается условие: действительная часть квадратичной формы $\sum\limits_{\lambda=1}^{\rho}\sum\limits_{\lambda'=1}^{\rho}a_{\lambda\lambda'}m_\lambda m_{\lambda'}$ должна быть отрицательной при всех наборах $m_1, \ldots, m_\rho$, в которых не все числа равны нулю (условие сходимости рядов).

В своей работе 1869 г. [27] Вейерштрасс заметил, что функции Римана не являются самыми общими 2ρ-кратно периодическими функциями, и стал искать общее определение функций $\theta(u_1, \ldots, u_\rho)$ как целых функций ρ независимых переменных, причем отношения двух целых функций — 2ρ-кратно периодические функции.

А. И. Маркушевич указывает, что Риман и Вейерштрасс уже в 1859 г. интересовались θ-функциями: в письме Римана Вейерштрассу от 26 октября 1859 г. (опубликованном Вейерштрассом после смерти Римана) приводится полное доказательство теоремы о том, что однозначная аналитическая функция n переменных не может иметь более $2n$ систем линейно независимых периодов. Мы упоминали, что частный случай этой теоремы для $n=1$ был доказан Якоби. Работа Вейерштрасса «Общие исследования о $2n$-кратно периодических функциях n переменных» [44] была опубликована посмертно, но написана, по предположению А. И. Маркушевича, после 1870 г. [140, с. 239].

Теорема существования общих абелевых функций ρ комплексных переменных была высказана независимо Риманом и Вейерштрассом, но доказана в 1883 г. в совместной статье Пуанкаре и Пикара. «При этом авторы опирались на высказанное перед тем в печати, но также без доказательства утверждение Вейерштрасса (1862) о том, что между любыми $\rho+1$ абелевыми функциями с одними и теми же периодами должно выполняться алгебраическое соотношение» [Там же, с. 240]. Доказательство было дано Пуанкаре в 1897 г.

Из многочисленных работ по теории абелевых функций А. И. Маркушевич отмечает статью Г. Фробениуса 1884 г., посвященную систематическому изучению тэта-функций p независимых переменных. П. Аппель в 1891 г. построил на основе этих результатов полную теорию абелевых функций для $p=2$. В XX в. была построена развитая теория абелевых функций, получившая применение в алгебраической геометрии p-мерных многообразий (см., например, [84]).

Лекции и статьи по вариационному исчислению

Курс «Вариационное исчисление» был объявлен Вейерштрассом десять раз, но прочитан лишь восемь раз начиная с летнего семестра 1865 г. и кончая летним семестром 1884 г.

Зимой 1887 и 1889 гг. Вейерштрасс по болезни не мог читать намеченного курса, в 1889 г., по-видимому, была прочитана лишь одна лекция.

Лекции Вейерштрасса по вариационному исчислению были изданы только в 1927 г. в последнем, седьмом томе собрания его трудов [7]. Издание было подготовлено Рудольфом Роте, учеником И. Кноблауха, как мы знаем, много поработавшего над изданием предыдущих томов.

В предисловии Р. Роте указывает, что в состав тома включены записи лекций Вейерштрасса, сделанные разными слушателями в разные годы: подготовленные Г. Буркардтом (1861—1914) лекции летнего семестра 1882 г., затем лекции летнего семестра 1879 г. — Г. Мазером, Э. Гуссерлем [9], Г. Мюллером, Ф. Рудио (1856—1929) и К. Рунге, отредактированные Г. Мазером; наконец, использованы: отдельная запись тех же лекций И. Генлейна и запись Г. Хеттнера лекций летнего семестра 1875 г.

Никаких манускриптов Вейерштрасса к лекциям по вариационному исчислению найти не удалось, за исключением трех четвертей страницы с выводами формулы для $\mathcal{E}$-функции Вейерштрасса, которая здесь у нас значится формулой (16). Издание тома было начато в 1917 г., но затянулось на десять лет. Сам Вейерштрасс не опубликовал свои исследования в систематическом изложении, есть лишь несколько статей [53—56] по отдельным вопросам. Методы Вейерштрасса были известны главным образом из учебника А. Кнезера по вариационному исчислению [99]. Для Кнезера источниками были диссертация Цермело 1894 г. и запись Кобба 1892/93 гг. Кнезер и Кобб развили методы Вейерштрасса применительно к многократным экстремальным интегралам.

После того как, наконец, в 1927 г. появился седьмой том математических трудов Вейерштрасса, К. Каратеодори, внесший большой вклад в теорию вариационного исчисления, написал в «Немецкой литературной газете» в 1928 г.:

«На протяжении поколения математики всех стран, занимающиеся вариационным исчислением, сожалели, что основополагающие открытия, которые сделал Вейерштрасс в вариационном исчислении, нельзя было найти ни в какой подлинной его публикации. Возможно, что это единственный случай с начала книгопечатания, когда идеи большого мастера, который революционизировал целую науку, только через подземные каналы доходят до сведения общества.

[9] Э. Гуссерль (Хуссерль, 1859—1938) стал впоследствии основоположником и главой феноменологической школы в философии.

И достойной историков является задача по источникам проверить, каким образом через диссертации, через устные и письменные сообщения в конце концов все существенное из работы Вейерштрасса стало всем известным» [88, с. 184].

Каратеодори считает, что выход в свет седьмого тома является слишком запоздалым для того, чтобы оказать существенное влияние на дальнейшее развитие вариационного исчисления. Он сожалеет, что в этой книге нельзя проследить за последовательным ходом идей Вейерштрасса и выделить лекции разных лет. Открытие $\mathcal{E}$-функции Вейерштрасса относится к 1879 г., а как излагался им курс в 1875 и в 1882 гг., неизвестно, и совсем отсутствует представление о лекциях 1864 г., которые слушал Г. А. Шварц.

Отметим некоторые основные этапы лекций Вейерштрасса.

Во введении дается краткий исторический очерк развития вариационного исчисления как учения о максимальных и минимальных величинах. Еще Евклид (III в. до н. э.) решал задачу о кратчайшем расстоянии точки от прямой. Аполлоний (III в. до н. э.) в пятой книге о конических сечениях рассматривал такую же задачу для точки и окружности, причем здесь уже имеет место и минимум, и максимум. Другие задачи древности — о треугольнике заданного периметра, имеющем наибольшую площадь, а также о многоугольнике наибольшей площади, о круге как контуре, ограничивающем наибольшую площадь.

Появление дифференциального исчисления оказало существенное влияние на развитие теории maxima и minima. Здесь Вейерштрасс отмечает заслуги Лагранжа и его предшественника Ферма. Первая глава посвящена теории максимумов и минимумов функций одной и многих переменных, причем рассматриваются регулярные функции, т. е. разложимые в ряды Тейлора.

В качестве приложения теории подвергаются разбору три задачи.

1°. Найти наибольшую и наименьшую кривизны поверхности в неособенной точке.

2°. Из данной точки провести к точке данной поверхности прямую линию, длина которой максимальна или минимальна. Эта задача решается с применением множителей Лагранжа.

3°. Среди всех лежащих в одной плоскости многоугольников с заданным числом сторон и заданной величиной периметра найти такой, который ограничивает наибольшую площадь. Получается ответ: многоугольник должен быть правильным.

В этом же первом разделе много места уделено теории квадратичных форм.

Второй раздел, занимающий большую часть книги, посвящен вариационному исчислению. Он начинается с предварительных замечаний, развиваемых на примере минимальной поверхности вращения. Искомая площадь поверхности выражается интегралом в параметрической форме:

$$J = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \frac{ds}{dt} dt = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

где уравнения кривой, образующей поверхность вращения, ищутся в параметрической форме: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. На концах кривой, в точках A и B, t принимает значения t_0 и t_1.

В качестве другой типичной задачи вариационного исчисления Вейерштрасс рассматривает задачу Иоганна Бернулли о брахистохроне, или кривой скорейшего спуска. Еще раньше эта задача была поставлена Галилеем, но не получила у него правильного решения.

Третья типовая проблема — задача о кратчайшей линии на поверхности между двумя точками. Нужно найти минимум интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{P\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + Q\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + R\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt,$$

где P, Q, R — заданные функции x и y.

Вейерштрасс говорит о распространении этой задачи и на случай, когда граничные точки A и B не зафиксированы, но лежат на заданных линиях. В одной из последующих глав подробно рассматривается частный случай — о кратчайших линиях на сфере.

Наконец, четвертая задача — *изопериметрическая*: построить замкнутую кривую заданного периметра, ограничивающую наибольшую площадь. Это задача на экстремум при дополнительных условиях.

Обычно в курсах вариационного исчисления начинают с рассмотрения экстремума интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y'(x))\, dx. \tag{1}$$

Необходимое условие экстремума выражается уравнением Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0.$$

Вейерштрасс был первым, кто рассматривал задачи вариационного исчисления в параметрической форме. Пусть x и y будут функциями параметра t. Тогда получим

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t),\ y(t),\ \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)x'(t)\,dt.$$

Если бы мы перешли от t к другому параметру τ, то выражение для I имело бы такой же вид:

$$I=\int_{\tau_0}^{\tau_1} f\left(x(\tau),\ y(\tau),\ \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\right)x'(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, оно зависит лишь от вида кривой, а не от способа ее параметрического задания.

Полагая

$$F(x,y,x',y')=f(x,y,y'/x')\,x', \tag{2}$$

интеграл I можно переписать так:

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ x',\ y')\,dt. \tag{3}$$

Из (2) видно, что $F(x,\ y,\ x',\ y')$ — однородная функция относительно x', y', т. е. что при произвольном $k>0$ имеем

$$F(x,y,kx',ky')=kF(x,y,x',y'). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по k, найдем известное равенство для однородных функций

$$F=x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Дифференцируя это соотношение по x' и y', найдем

$$x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=0,\qquad x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=0,$$

что можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}:\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}:\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=y'^2:-x'y':x'^2.$$

Вейерштрасс вводит функцию $F_1(x,\ y,\ x',\ y')$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1y'^2,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=-F_1x'y',\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=F_1x'^2. \tag{5}$$

Прежде чем перейти к построению первой и второй вариации интеграла (3), Вейерштрасс уточняет понятие *близких* кривых, или *варьированных* кривых. Пусть будут (x, y) координаты любой точки кривой, рассматриваемые как функции t. Заменим x, y на $x+\xi$, $y+\eta$, где ξ, η — малые функции t, т. е. не превосходящие по абсолютному значению любое заданное положительное число.

Функции ξ, η, называемые *вариациями* x, y, должны иметь производные. Но из малости ξ, η не вытекает малость их производных, как показывает пример: $\xi = k \sin(tk^{-\lambda})$. При $\lambda > 1$, $k < 1$ производная $d\xi/dt$ может стать сколь угодно большой (это случай, когда рассматривается сильная вариация, в случае слабой вариации $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ также должны быть малыми).

Вводится понятие *полной вариации* интеграла I:

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x+\xi,\ y+\eta,\ x'+\frac{d\xi}{dt},\ y'+\frac{d\eta}{dt}\right) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Delta F dt. \tag{6}$$

Функция $F(x, y, x', y')$ считается регулярной и ΔF можно разложить в ряд по степеням ξ, η, $d\xi/dt$, $d\eta/dt$. Члены с первыми степенями составляют первую вариацию δI, которая преобразуется интегрированием по частям, интеграл от суммы членов второго порядка называется второй вариацией $\delta^2 I$, и т. д.

Затем обычными рассуждениями получаются уравнения Эйлера

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0, \qquad G_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{7}$$

Эти равенства не являются независимыми друг от друга. Производя указанные в (7) дифференцирования, можно после некоторых преобразований получить уравнение

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + F_1\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = 0, \tag{8}$$

где F_1 определяется равенством (5) и

$$G_1 = -y'G, \qquad G_2 = x'G. \tag{9}$$

Доказывается, что уравнение (8) эквивалентно уравнениям (7). Оно называется *вейерштрассовой формой* уравнения Эйлера. Вейерштрасс называет условия (7) или (8) первыми необходимыми условиями максимума или минимума (слово «экстремум» он не употребляет).

Для определения того, действительно ли полученное решение дает экстремум, исследуется вторая вариация интеграла (3). Для этого в формуле (6) подынтегральная функция, т. е. полная вариация F, представляется в виде

$$\Delta F = \delta F + \frac{1}{2!}\delta^2 F + \frac{1}{3!}\delta^3 F + \ldots \tag{10}$$

Длинное выражение для $\delta^2 F$ Вейерштрасс путем введения новых функций u и w приводит к виду

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left\{\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{w}{u}\frac{du}{dt}\right\}^2 dt, \tag{11}$$

причем замечает, что к аналогичному виду уже пришел Лагранж, однако у него вместо функций F_1, u и w другие функции.

Из представления (11) вытекает, что знак интеграла $\delta^2 I$ зависит от поведения функции F_1, а отсюда следует: чтобы значение интеграла I, определяемое уравнением $G=0$, было минимальным (максимальным), необходимо, чтобы функция F_1 во всей области интегрирования нигде не была отрицательной (положительной) [7, с. 145]. Это, по Вейерштрассу, *второе необходимое условие* экстремума.

В формуле (11) u есть решение линейного дифференциального уравнения Якоби

$$Fu + \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) = 0. \tag{12}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$, где u_1, u_2 — два линейно независимых решения. Выражение (11) имеет смысл в том случае, если u нигде внутри области (t_0, t_1) не исчезает.

В применении к задаче о минимальной поверхности вращения

$$F = y\sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad F_1 = \frac{y}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}}.$$

Решением, вообще говоря, является цепная линия, проходящая через точки A и B.

При $y > 0$ имеем $F_1 > 0$, так что условие минимума выполняется. Однако условие необращения в нуль решения $u(t)$ уравнения (12) здесь не имеет места.

Якоби рассматривал выражение

$$\Theta(t, t') = u_1(t)\, u_2(t') - u_1(t')\, u_2(t)$$

и ввел понятие о сопряженных точках: это последовательные нули функции $\Theta(t, t')$. Один из них очевиден: $t = t'$; ближайший к нему $t = t''$, причем $t'' > t'$ образует вместе с t' сопряженные точки. Теорема Якоби гласит: если внутри области интегрирования (t_0, t_1) не имеется двух сопряженных точек, то всегда возможно найти решение уравнения (12) $u(t)$, которое внутри названной области не обращается в нуль. Если же есть две такие точки или если интегрирование может быть продолжено за точку, сопряженную с t_0, то рассматриваемый интеграл I не имеет экстремума. Если сопряжен-

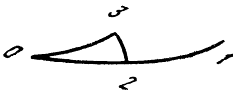


Рис. 3

ными являются концы интервала (t_0, t_1), то нельзя сделать заключения о наличии экстремума. Это *третье необходимое условие* у Вейерштрасса.

Для задачи о минимальной поверхности вращения проведем в начальной точке A касательную к цепной линии до пересечения с осью x, а из точки пересечения проведем касательную к другой части кривой AB. Если новая точка касания A', которая является сопряженной с точкой A, лежит внутри дуги AB, то AB не дает минимума поверхности вращения; может быть так, что другая цепная линия, проходящая через точки A, B, дает таковую; поверхность вращения может состоять из двух дисков, образованных вращением отрезков AC и BD, пересекающих ось x в точках C и D, причем AC и BD перпендикулярны оси x.

Далее Вейерштрасс выводит необходимое условие существования экстремума, которое он называет четвертым необходимым условием. Для этого он рассматривает криволинейный треугольник (рис. 3). Здесь *01* — часть кривой, удовлетворяющей уравнению $G=0$. В точке *2*, не сопряженной с точкой *0*, проводится дуга — элемент произвольной кривой *23*, проходящей через точку *3* соседней кривой *03*, удовлетворяющей уравнению $G=0$, σ — длина дуги, отсчитываемой от точки *2* к точке *3*.

Вейерштрасс вводит специальную $\mathcal{E}$-функцию[10], свя-

[10] В книге [88, с. 207] она названа Exzeß-Funktion — эксцесс-функция.

занную с функцией $F(x, y, x', y')$, в которой фигурируют обозначения:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = F^{(1)}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = F^{(2)},$$

и именно [7, с. 213]

$$\mathscr{E}(x, y;\ p, q;\ \bar{p}, \bar{q}) = F(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - \\ - F^{(1)}(x, y, p, q)\,\bar{p} - F^{(2)}(x, y, p, q)\,\bar{q}. \qquad (13)$$

Вследствие указанного выше соотношения

$$F = x'F^{(1)} + y'F^{(2)}$$

имеем

$$F(x, y, p, q) = F^{(1)}(x, y, \bar{p}, \bar{q})\,\bar{p} + F^{(2)}(x, y, \bar{p}, \bar{q})\,\bar{q},$$

поэтому $\mathscr{E}$ можно записать так:

$$\mathscr{E}(x, y;\ p, q;\ \bar{p}, \bar{q}) = [F^{(1)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(1)}(x, y, p, q)]\,\bar{p} + \\ + [F^{(2)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(2)}(x, y, p, q)]\,\bar{q}. \qquad (14)$$

Здесь p, q — величины, пропорциональные x', y' в точке *2* кривой, $\bar{p}$, $\bar{q}$ — те же величины в другой точке.

Теорема Вейерштрасса. Функция $\mathscr{E}(x, y;\ p, q, \bar{p}, \bar{q})$ для всех значений аргументов x, y, p, q, которые принадлежат кривой, удовлетворяющей уравнению $G=0$ (вдоль нее берется интеграл), и для всех значений аргументов $\bar{p}$, $\bar{q}$ никогда не становится отрицательной, если имеет место минимум, и никогда не положительна, если имеется максимум.

Доказательство теоремы основано на том, что функция $\mathscr{E}$ в точке *2* есть главная часть вариации интеграла (3), а именно

$$I_{03} + \bar{I}_{32} - I_{02} = \mathscr{E}(x_2, y_2;\ p_2, q_2;\ \bar{p}_2, \bar{q}_2)\,\sigma + S\sigma.$$

Здесь I_{03}, I_{02} — интеграл I, взятый соответственно по дугам *03*, *02*, $\bar{I}_{32}$ — среднее значение интеграла по дуге *32*.

Вейерштрасс доказывает, что четвертое условие является также *достаточным* условием существования экстремума. Заменив переменные

$$p = r\cos\chi, \qquad q = r\sin\chi, \qquad \bar{p} = \bar{r}\cos\bar{\chi}, \qquad \bar{q} = \bar{r}\sin\bar{\chi},$$

он получает

$$\mathscr{E}(x, y;\ p, q;\ \bar{p}, \bar{q}) = \bar{r}\mathscr{E}(x, y;\ \cos\chi, \sin\chi;\ \cos\bar{\chi}, \sin\bar{\chi}).$$

Используя свойства функций $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$

$$F^{(i)}(x, y, kx', ky') = F^{(i)}(x, y, x', y') \qquad (i = 1, 2),$$

а также уравнения

$$\frac{d}{d\varphi}F^{(1)}(x,\ y,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi)=-\sin\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+\cos\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'},$$

$$\frac{d}{d\varphi}F^{(2)}(x,\ y,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi)=-\sin\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}+\cos\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$

и далее переписав соотношения (5) в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=\sin^2\varphi F_1,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=-\cos\varphi\sin\varphi F_1,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\cos^2\varphi F_1,$$

он получает такое равенство:

$$\mathcal{E}(x,\ y;\ \cos\chi,\ \sin\chi;\ \cos\bar{\chi},\ \sin\bar{\chi})=$$
$$=\int\limits_{\chi}^{\bar{\chi}}F(x,\ y,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi)\sin(\bar{\chi}-\varphi)\,d\varphi. \tag{15}$$

Всегда можно считать, что функция $\sin(\bar{\chi}-\varphi)$ знакопостоянна (отрицательна) и монотонна на промежутке интегрирования $\chi<\varphi<\bar{\chi}$. Поэтому на основании второй теоремы о среднем значении интеграла

$$\mathcal{E}(x,\ y;\ \cos\chi,\ \sin\chi;\ \cos\bar{\chi},\ \sin\bar{\chi})=$$
$$=F_1(x,\ y,\ \cos\tilde{\chi},\ \sin\tilde{\chi})\int\limits_{\chi}^{\bar{\chi}}\sin(\bar{\chi}-\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$\tilde{\chi}=\bar{\chi}+\Theta(\bar{\chi}-\chi),$$

что дает равенство

$$\mathcal{E}(x,y;\ \cos\chi,\ \sin\chi;\ \cos\bar{\chi},\ \sin\bar{\chi})=$$
$$=F_1(x,y,\cos\tilde{\chi},\ \sin\tilde{\chi})[1-\cos(\bar{\chi}-\chi)]. \tag{16}$$

Так как $1-\cos(\bar{\chi}-\chi)$ положительно, то знак $\mathcal{E}$ зависит от знака F_1, но в несколько расширенном виде, а именно: если функция $F_1(x,y,p,q)$ сохраняет знак не только для тех значений аргументов p, q, которые пропорциональны направляющим косинусам первоначальной линии, но для любых значений p, q, то это же имеет место для функции $\mathcal{E}$ и тогда выполняется четвертое необходимое условие.

$\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса была им введена на лекциях

1879 г. Она лежит в основе теории вариационного исчисления. Л. Янг говорит, что она произвела революцию в этом исчислении [161, с. 49]. $\mathcal{E}$-функция может быть также выражена через функцию Понтрягина, представляющую его *принцип максимума* [148].

Беря в качестве примера минимальную поверхность вращения, Вейерштрасс переписывает уравнение (16), полагая $\cos\chi=p$, $\sin\chi=q$, $\cos\bar{\chi}=\bar{p}$, $\sin\bar{\chi}=\bar{q}$, так:

$$\mathcal{E}(x, y;\ p, q;\ \bar{p}, \bar{q}) = (1 - p\bar{p} - q\bar{q})\,\bar{F}_1(x, y, \bar{p}, \bar{q}).$$

При этом $p^2+q^2=1$, $\bar{p}^2+\bar{q}^2=1$, $\bar{F}_1$ — значение функции F_1, в которой x' лежит между p и $\bar{p}$, y' — между q и $\bar{q}$.

Так как для минимальной поверхности вращения

$$F_1 = \frac{y}{\sqrt{(x'^2+y'^2)^3}}, \qquad \bar{F}_1 = y,$$

то $\mathcal{E}(x, y;\ p, q;\ \bar{p}, \bar{q}) = (1 - p\bar{p} - q\bar{q})\,y \geqslant 0$.

Отсюда вытекает, что дуга цепной линии, лежащая между двумя сопряженными точками, действительно дает наименьшее значение поверхности вращения.

Изопериметрической проблемой Вейерштрасс называет задачу о нахождении экстремума интеграла

$$I^0 = \int_{t_1}^{t_2} F^0(x,\ y,\ x',\ y')\,dt,$$

если в то же время сохраняет свое значение другой интеграл:

$$I^1 = \int_{t_1}^{t_2} F^1(x,\ y,\ x',\ y')\,dt.$$

Все рассуждения повторяются для функции $F=F^0-\lambda F^1$.

Пример изопериметрической задачи, когда предполагаемый минимум не существует, дает такая задача. Найти тело вращения, которому воздух оказывает наименьшее сопротивление при движении вдоль его оси при условии, что объем тела задан. Эта задача была поставлена Ньютоном. Сопротивление, испытываемое элементом поверхности, считается пропорциональным квадрату скорости. Ньютон не довел до конца решение этой задачи, но из его рисунка видно, что он считал форму тела яйцевидной с узким концом впереди. Эйлер же дал рисунок тела, с острием впереди.

Здесь принимается

$$I^0 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{xx'^3}{x'^2 + y'^2} dt, \qquad I^1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} x^2 y' dt = \text{const}.$$

Следовательно, $F = \frac{xx'^3}{x'^2 + y'^2} - \lambda x^2 y'$, и необходимое условие $G_2 = 0$ дает

$$\frac{2xx'^3 y'}{(x'^2 + y'^2)^2} - \lambda x^2 = C.$$

Интегрируя и полагая $y'/x' = -1/t$, находим

$$x = \frac{2}{\lambda} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad y = y_0 - \frac{1}{\lambda} \frac{(3+t^2)\,t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Получается семейство алгебраических кривых с тремя углами: прямым в точке A и равным нулю в точках B и C

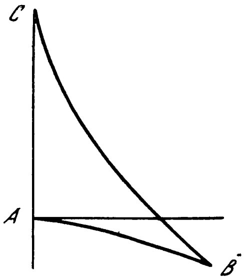


Рис. 4

(рис. 4). Вейерштрасс замечает, что функция $F(x, y, x', y')$ меняет знак, когда его меняют x' и y', поэтому, закрепив в функции (13) p, q, можно дать $\bar{p}$, $\bar{q}$ сначала положительные, потом отрицательные значения и убедиться, что экспресс-функция будет иметь противоположные знаки. Следовательно, полученное решение не обладает экстремальным свойством.

Последняя, тридцать первая глава книги посвящена задачам с подвижными концами и с несвободными вариациями. Вейерштрасс переписывает уравнение (6) в таком виде:

$$\delta I = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta F dt + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1 \xi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1 \eta_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0 \xi_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \eta_0,$$

где ξ_0 η_0 и ξ_1, η_1 — вариации концевых координат.

Полагая $\xi = \sigma \cos \alpha$, $\eta = \sigma \sin \alpha$, найдем, что для существования экстремума необходимо выполнение условий

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_0 \cos\alpha_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \sin\alpha_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1 \cos\alpha_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

называемых *условиями трансверсальности.*

В качестве примера рассматривается задача: дан угол (меньший или равный 2π); линия заданной длины скользит концами по сторонам угла. Найти наибольшую площадь, ограниченную этой линией и сторонами угла. Получается дуга окружности, ортогональной к сторонам угла, — в данном случае условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

В качестве примера на *несвободные вариации* рассматривается такая изопериметрическая задача. Дана ограниченная часть плоскости и замкнутая линия заданной длины. Требуется расположить ее так, чтобы она охватывала наибольшую площадь, если окружность, образованная данной линией, не умещается на данном куске площади (очевидно, что длина заданной линии не должна превышать периметр заданной площади).

В лекциях Вейерштрасса, представленных в седьмом томе его трудов, из минимальных поверхностей рассматриваются только поверхности вращения. Однако у него были опубликованы статьи по общей теории минимальных поверхностей, в которых рассматривается задача: среди поверхностей, ограниченных данной кривой, найти такую поверхность, площадь которой наименьшая. Нужно найти минимум функционала

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy,$$

где $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$, $z = f\,(x, y)$ — уравнение поверхности.

Уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0. \tag{17}$$

Оно выражает геометрическое свойство такой поверхности: в каждой ее точке средняя кривизна равна нулю. Поверхности, обладающие таким свойством, называются *минимальными поверхностями*, хотя они могут и не давать минимума площади поверхности.

Вейерштрасс рассматривает кусок M искомой поверхности, лежащий в конечной области. Ему сопоставляется кусок плоской поверхности E так, что координатам (x, y, z) точки на M отвечает точка $w=u+iv$ области E. Тогда для минимальной поверхности получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

решение которых ищется в виде

$$x=\operatorname{Re} f(w), \qquad y=\operatorname{Re} g(w), \qquad z=\operatorname{Re} h(w),$$

причем

$$(f'(w))^2+(g'(w))^2+(h'(w))^2=0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, Вейерштрасс полагает

$$f'(w)=G^2-H^2, \qquad g'(w)=i(G^2+H^2), \qquad h'(w)=2GH,$$

откуда

$$x=x_0+\operatorname{Re}\int_{w_0}^{w}(G^2-H^2)\,dw, \qquad y=y_0+\operatorname{Re}\int_{w_0}^{w} i(G^2+H^2)\,dw,$$

$$z=z_0+2\operatorname{Re}\int_{w_0}^{w} GH\,dw. \tag{18}$$

Здесь $G(w)$ и $H(w)$ — голоморфные функции, определенные в круге или во всей плоскости изменения внутренних изотермических координат u, v, где $w=u+iv$ [43, с. 42]. Эти формулы, данные Вейерштрассом в 1866 г., содержат как частные случаи найденные ранее формулы других авторов. Г. А. Шварц использовал формулы (18) при построении минимальных поверхностей, ограниченных пространственными прямолинейными многоугольниками.

Далее, произведя замену переменных

$$s=\xi+i\eta=\frac{H(w)}{G(w)}, \qquad G^2(w)\frac{dw}{ds}=F(s),$$

Вейерштрасс получает другую форму уравнений минимальных поверхностей [43, с. 43]:

$$dx=\operatorname{Re}[(1-s^2)F(s)\,ds], \qquad dy=\operatorname{Re}[i(1+s^2)F(s)\,ds],$$

$$dz=\operatorname{Re}[2sF(s)\,ds].$$

Для каждой заданной аналитической функции $F(s)$ получается некоторая минимальная поверхность. Вопрос о том, осуществляется ли при этом минимум площади какого-нибудь куска этой поверхности, был рассмотрен Г. А. Шварцем [118, т. 1]. По поводу встретившегося при этом вспомогательного уравнения Шварц написал письмо С. В. Ковалевской [157]. Затем расширенное содержание этого письма было включено Шварцем в его работу о минимальных поверхностях, посвященную 70-летию Вейерштрасса [118, т. 1, с. 241].

В третьем томе собрания трудов Вейерштрасса приведена в обработке Г. А. Шварца и Р. Роте статья: «О задаче Делоне вариационного исчисления, относящейся к пространственным кривым постоянной кривизны» [53]. Рукопись возникла в процессе переписки Вейерштрасса со Шварцем в 1884 г. Задача формулируется так.

Среди кривых с заданной постоянной кривизной, проходящих через две заданные точки и не имеющих внезапных изменений направления, определить такие кривые, длина дуги которых достигает максимума или минимума. Задача сводится к отысканию интеграла

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

при условии, имеющем вид дифференциального уравнения

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2}:\left(\frac{ds}{dt}\right)^3=\frac{1}{r},$$

где

$$P=y'z''-z'y'',\qquad Q=z'x''-x'z'',\qquad R=x'y''-y'x''.$$

Если концы искомой линии свободны, то решение представляется дугой окружности заданного радиуса r (при расстоянии между заданными точками, не превышающем 2 r). Но если заданы условия на концах, например направления касательных, то задача становится сложной, и в особенности сложно исследование второй вариации. Вейерштрасс ограничился отысканием решений задачи, которые выражаются через эллиптические трансценденты.

Говоря о работах Вейерштрасса в области вариационного исчисления, нельзя не упомянуть о его критике принципа Дирихле.

В широком смысле под принципом Дирихле понимают свед́ение краевой задачи уравнений с частными производными к вариационной задаче. В узком смысле принцип Дирихле означает решение первой краевой задачи: найти $u\,(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую на границе области G условию

$$u\,(x_1,\ldots,x_n)\,|_{\partial G}=\varphi\,(x_1,\ldots,x_n) \qquad (19)$$

и уравнению Лапласа в области G

$$\Delta u = 0. \tag{20}$$

Дирихле свел эту задачу к отысканию минимума интеграла

$$D(u) = \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dG. \tag{21}$$

Нужно при этом добавить, что решение следует искать в классе функций, удовлетворяющих условию

$$D(u) < +\infty.$$

Дело в том, что Вейерштрасс в статье «О так называемом принципе Дирихле» [28] показал на примере, что дифференциальная краевая задача (19), (20) при некоторой граничной непрерывной функции может иметь решение, а соответствующая вариационная задача — нет, так как интеграл (21) при этом обращается в бесконечность. Обоснование принципа Дирихле в предположении, что существует хоть одна допустимая функция, принадлежит Д. Гильберту. Дальнейшее существенное развитие проведено С. Л. Соболевым [141, т. 2, с. 182].

Возвращаясь к лекциям Вейерштрасса, заметим, что сравнение их с современными курсами вариационного исчисления показывает, что хотя последние содержат дальнейшие обобщения и пользуются современной математической символикой, основное их содержание мало отличается от вейерштрассовского. Вейерштрассом разработаны до конца основы современного вариационного исчисления, его идеи прочно вошли в эту область математики, играющую большую роль в теории оптимального управления и в других разделах математики и механики.

Глава 6

Вейерштрасс и Ковалевская

Ковалевская становится ученицей Вейерштрасса

Осенью 1870 г. в монотонную жизнь Вейерштрасса влилась новая струя, оказавшая глубокое влияние на всю его дальнейшую жизнь. К 55-летнему ученому пришла 20-летняя женщина маленького роста, казавшаяся девочкой, и обратилась к нему с необычной просьбой: она хотела слушать его лекции в Берлинском университете. Это была Софья Васильевна Ковалевская, прослушавшая в 1869—1870 гг. на протяжении трех семестров в Гейдельберге лекции профессоров Гельмгольца, Кирхгофа, Дюбуа-Реймона и Кёнигсбергера. Каждый из этих профессоров дал свое согласие на посещение его лекций и занятий, но общего разрешения на любые лекции Гейдельбергского университета Ковалевская не получила.

Кёнигсбергер был учеником Вейерштрасса. Ковалевская, много слышавшая о знаменитых лекциях Вейерштрасса, решила, как сказал Миттаг-Леффлер, «сесть у ног самого учителя» [110, с. 134].

Вейерштрасс не был сторонником появления женщин в университетах. Уже позже, после занятий с Ковалевской, 3 июля 1874 г., он писал Л. Фуксу (когда переписывался с ним по поводу присуждения С. В. Ковалевской ученой степени): «Вы знаете, что я противник допуска женщин к университетским занятиям (или, скорее, к их обучению в наших университетах)» [133, с. 349].

Появление Ковалевской у Вейерштрасса 3 октября 1870 г. овеяно легендой. Даже Миттаг-Леффлер в серьезной научно-биографической статье «Вейерштрасс и Соня Ковалевская» [110] не удержался от поэтического описания первой встречи Вейерштрасса и Ковалевской. Он пишет: «Скромно и не без волнения она приблизилась к человеку, который был в ее глазах самым великим ученым эпохи. В своем решении она проявила такую силу воли, которая в критические моменты ее жизни превышала всякие мерила. Она явилась к нему в большой шляпе с опущенными полями, чтобы скрыть застенчивость своего двадцатилетнего возраста

К. Вейерштрасс, 1870 г.

и волнение, вызванное этим испытанием, которое должно было решить ее будущее. Вейерштрасс не заметил ее чудесных глаз, красноречию которых никто не мог противостоять, если только она этого хотела» [110, с. 135].

Женщины - писательницы добавляют к этому, что когда Соня второй раз пришла к Вейерштрассу с решенными задачами, которые он задал ей при первом посещении, и сбросила шляпу, то Вейерштрасс увидел ее лицо, напомнившее ему его невесту, с которой ему не удалось связать судьбу, и он проникся симпатией к юной Соне, как он потом стал ее называть.

Так это было или иначе, мы не знаем, но во всяком случае Вейерштрасс заинтересовался таким феноменом, как молодая женщина, которая хочет слушать лекции по математике, по ее высоким разделам. И он дал Ковалевской свою рукопись по теории гиперэллиптических функций.

Год 1870 был годом военных действий между Пруссией и Францией, и Вейерштрасс пишет Кёнигсбергеру 25 октября 1870 г.: «В университете мы будем, вероятно, в весьма сильной степени чувствовать влияние военного времени. Я сегодня начал чтение своего курса по эллиптическим функциям с двадцатью слушателями, в то время как два года тому назад моя аудитория состояла из пятидесяти человек <. . .>. Тем острее задевает нас то обстоятельство, что неумолимая — пока что — воля высокого сената [1] не дает нам возможности воспользоваться заменой, которую Вы нам предлагаете от себя в лице Вашей бывшей слушательницы Софьи Ковалевской, каковая замена, снабженная справедливым весовым коэффициентом, оказалась бы весьма ценной» [110, с. 133).

В связи с тем что через неделю должно было состояться заседание сената, на котором будет предметом обсуждения вопрос о допущении Ковалевской к слушанью математиче-

[1] Т. е. совета университета.

ских лекций, Вейерштрасс просит Кёнигсбергера письменно сообщить его мнение «об этой даме и о ее способностях к более глубоким математическим студиям» [Там же, с. 135], что очень важно для решения сената, так же как и то, «что личность дамы представляет требуемые гарантии» [там же, с. 135]. Дело в том, что в то время о русских студентках, учившихся в Швейцарии, распространялись неблагоприятные слухи.

С. В. Ковалевская, 1868 г.

Ковалевская была хорошо подготовлена к восприятию лекций Вейерштрасса, после того как активно прослушала гейдельбергских профессоров и участвовала в их семинарах. Ее подруга Ю. В. Лермонтова вспоминала потом, что Соня пользовалась хорошей репутацией даже среди жителей Гейдельберга: одна женщина на улице указала своему ребенку на русскую девушку, которая хорошо учится. Однажды лектор допустил ошибку где-то на доске и никак не мог ее найти. Тогда Соня, трепеща от волнения, подошла к доске и выяснила недоразумение.

Кёнигсбергер прислал хвалебный отзыв о способностях Ковалевской. Но университетский сенат был непреклонен и не допустил ее к слушанию лекций.

Вейерштрасс убедился, что Ковалевская вполне разобралась в его лекциях по гиперэллиптическим функциям. Он предложил прочитать ей частным образом свой университетский курс. Это было большим успехом Ковалевской. По словам Феликса Клейна, быть учеником Вейерштрасса было нелегко, так как «его интеллектуальное превосходство скорее подавляло его слушателей, чем толкало их на путь самостоятельного творчества» [132, с. 327]. С Софьей Васильевной, однако, дело обстояло совсем иначе. Она легко, с энтузиазмом воспринимала учение Вейерштрасса и часто ее интерес к математическим исследованиям учителя служил для него побудительным поводом для размышлений.

Клейн говорит также, что Вейерштрасс «пользовался абсолютным и непререкаемым авторитетом, все его теории принимались его слушателями как непреложные нормы мышления» [Там же, с. 327]. Клейн обладал независимым характером, он не терпел подчинения и из духа противоречия не стал слушать лекции Вейерштрасса, о чем потом сожалел.

Занятия Ковалевской с Вейерштрассом проходили таким образом. Она приходила к нему (жившему с двумя сестрами) по воскресеньям после обеда и еще раз в неделю, учитель отдавал ей визит среди недели. Соня жила недалеко от Вейерштрасса со своей подругой Юлией Лермонтовой, занимавшейся химией в лаборатории профессора Гофмана.

На занятиях Вейерштрасс повторял содержание лекций, прочитанных студентам, рассказывал своей ученице содержание неопубликованных работ и обсуждал с нею новости науки. Он выписывал формулы на листах бумаги, а Соня потом сама прорабатывала материал. Она слушала его с живым интересом и полным пониманием.

В более позднем письме Вейерштрасс говорит о том, что его утомляют лекции перед большой аудиторией. То, что он не видит лиц студентов, склоненных над тетрадями, в которые они усердно записывают, его тяготит, так как он не знает, все ли они понимают. Другое дело было с Соней, оживленное лицо которой всегда показывало ему, как она воспринимает то, что он ей сообщает.

Между членами семьи Вейерштрасса и Ковалевской скоро установились теплые дружеские отношения. Сестры Вейерштрасса на зимних каникулах устраивали елку для обеих девушек, Сони и Юли, как-то Вейерштрасс съездил с ними в театр.

Ученики Вейерштрасса вспоминают, каким он был для них другом и советчиком, — по отношению к Ковалевской эти качества проявились наивысшим образом. Учитель называл свою ученицу своим единственным настоящим другом и делился с нею своими сомнениями и раздумьями, а себя считал ее духовным отцом.

Мы увидим дальше, что после «измены» своему учителю и науке, когда Ковалевская уехала в Россию, все реже и реже стала писать ему, а потом на три года и совсем перестала давать знать о себе, она вернулась к Вейерштрассу. Дружба восстановилась и продолжалась до самой смерти Ковалевской в 1891 г., которую Вейерштрасс перенес очень тяжело. Он пережил свою ученицу на 6 лет.

Профессор В. В. Голубев сравнивал отношения между Вейерштрассом и Ковалевской с отношениями героя повести А. П. Чехова «Скучная история», старым профессором и его любимой воспитанницей, которая с легким сердцем уехала от него, сильно загрустившего.

Письма Вейерштрасса к Ковалевской (1871—1874)

С. В. Ковалевская сохранила письма Вейерштрасса — их почти сто, вместе с записками, некоторые из которых даже не датированы. К сожалению, Вейерштрасс сжег письма Ковалевской, так как в некоторых были сведения о ее личной жизни. Он считал, что после смерти человека должны оставаться только его дела.

Письма Вейерштрасса дают богатый материал для ознакомления с жизнью и творчеством ученого в годы 1871—1889. Часть этих писем уже цитировалась.

К периоду обучения, т. е. к 1870—1874 гг., относятся 44 письма Вейерштрасса, первое из которых написано 11 марта 1871 г., последнее — 18 августа 1874 г. За этот промежуток времени Ковалевская несколько раз выезжала из Берлина. Первая ее поездка, которая продолжалась с 5 апреля по 12 мая 1871 г., была в Париж, вместе с мужем, Владимиром Онуфриевичем, где они попали в самую гущу событий Парижской Коммуны. Дело в том, что сестра Софьи Васильевны, Анна Васильевна Жаклар (1843—1887), и ее муж Виктор Жаклар были активными участниками Коммуны, и именно беспокойство об их судьбе заставило Ковалевских предпринять такое опасное путешествие.

Осенью 1870 г. Вейерштрасс, как уже было сказано, читал курс эллиптических функций, а в предыдущем семестре прочел введение к нему, 8-часовой курс теории аналитических функций. Так как Ковалевская в Гейдельберге прослушала такой курс у Кёнигсбергера, то она была подготовлена к лекциям Вейерштрасса по теории эллиптических функций.

Весной 1871 г. Вейерштрасс читал лекции «Избранные геометрические и механические задачи, решаемые с помощью теории эллиптических функций» — четырехчасовой курс и «Новую синтетическую геометрию». Осенью 1871 г. он завершил свой цикл лекций 6-часовой теорией абелевых функций. В весеннем семестре 1872 г. Вейерштрасс читал два четырехчасовых курса: «Вариационное исчисление» и «Введение в теорию аналитических функций». Таким образом, за рассматриваемый промежуток времени Ковалевская могла познакомиться со всем циклом лекций, которые читал Вейерштрасс, включая вариационное исчисление.

Первое письмо (вернее, записка) Вейерштрасса было написано в субботу, накануне воскресенья, когда Соня должна была прийти к нему. Оно такого содержания:

Милостивая государыня!

Я не мог, к сожалению, нанести Вам визит вчера вечером и, в связи с непредвиденными обстоятельствами, был лишен возможности известить Вас об этом. Но надеюсь, что завтра Вы обрадуете меня своим посещением.

С дружеским приветом
Преданный Вам Вейерштрасс
Берлин
(суббота) 11 марта 71 [74, с. 151]

Во второй записке, от 3 июня (суббота) 1871 г., он пишет, что завтра будет дома и будет рад видеть Софью Васильевну у себя.

К осени 1871 г. относятся два письма о библиотеке: 6 ноября он посылает ей записку с приложенным письмом университетского библиотекаря, профессора Конера, дающим Ковалевской разрешение пользоваться библиотекой университета, а 14 ноября пишет более подробно по поводу этого разрешения. Кроме того, тут же он пересылает ей экземпляр работы Шварца о минимальных поверхностях. «Как я уже упоминал, — добавляет он, — Вы, очевидно, сможете найти в рукописи материал для работы. Мы еще будем иметь возможность более подробно поговорить об этом. Вы и в дальнейшем можете обращаться ко мне по всем интересующим Вас математическим вопросам, не боясь затруднить меня этим. Для меня всегда будет большой радостью иметь возможность помочь Вам в Ваших занятиях. Нынешней зимой, кроме сред и четвергов, все послеобеденное время я буду проводить дома. Берлин 15 ноября 71» [74, с. 152].

К весеннему семестру 1872 г. относятся письмо и две записки. В письме от 14 января Вейерштрасс пишет, что простужен и не может принять ее завтра. Но он посылает ей наброски на тему, которая должна быть предметом их обсуждения. Они настолько полны, что Ковалевская сможет сама в них разобраться. Речь идет о подборе простейшей функции $\mathrm{H}(xy, x'y')$, играющей важную роль в теории абелевых функций Вейерштрасса:

$$\mathrm{H}(xy,\ x'y')=\frac{1}{2}\left(1+\frac{P(x')}{P(x)}\frac{y}{y'}\right)\frac{1}{x-x'},$$

где $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\rho)$ есть делитель степени ρ полинома $R(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_\rho)(x - a_{\rho+1}) \cdot \cdot$

$\cdots (x - a_{2\rho+1})$ степени $2\rho + 1$; при этом $y = \sqrt{R(x)}$.

Вейерштрасс пишет о свойствах этой функции: «Именно она будет бесконечной в точках

$$x = x', \ a_1, \ldots, a_\rho, \qquad y = y', \ 0, \ldots, 0,$$

притом для каждой — первого порядка. Далее, ее разложение по степеням $x - x'$ вблизи (x', y') начинается с члена $1/(x - x')$. Наконец, она будет нулем для $x = \infty$, $y = \infty$.

Тогда уравнение $\frac{d}{dx}$ Н $(xy, \ x'y') \ldots$ совпадает с уравнением, примененным мною в теории гиперэллиптических вспомогательных функций, с помощью которых я определил соотношения между периодами интегралов первого и второго рода» [74, с. 152].

Уже 19 января Вейерштрасс просит Софью Васильевну «обрадовать его своим посещением». А сегодня у него объявился иногородний коллега, которого он должен принять [74, с. 153].

Наконец, имеется записка от 25 марта 1872 г., в которой Вейерштрасс просит свою ученицу переписать для него доказательство теоремы, о которой они вчера рассуждали и которой он хотел поделиться с одним другом, — сам он не любит писать что-нибудь два раза.

Осенью 1872 г. Вейерштрасс, как уже сказано, ведет второй цикл, читает теорию эллиптических функций. Но с Ковалевской он продолжает заниматься вариационным исчислением. Это видно из его письма, посланного утром 26 октября. Он пишет:

Моя дорогая Софья!

Я только что нашел в своих бумагах еще несколько старых заметок насчет простейшего случая вариационного исчисления, который мы обсуждали. Несмотря на иную систему обозначений, Вы, как я думаю, сможете хорошо использовать их для работы. Поэтому я их и посылаю, предполагая, что Вы еще не начали свой трудовой день [Там же, с. 154].

Прежде чем продолжать цитирование этого важного письма, нужно коснуться некоторых фактов личной жизни Софьи Васильевны. В 1868 г., восемнадцати лет, она вышла замуж за Владимира Онуфриевича Ковалевского (1842—1883), не по любви, а из идейных соображений. Девушки того времени, желая освободиться от опеки родителей и поехать за границу для получения высшего образования, недоступного для них в России, заключали фиктивный брак с сочувствовавшим им человеком. В качестве замужней женщины они могли получить заграничный паспорт и поехать — обычно в Швейцарию, где женщин пускали в высшую школу. «Муж» предоставлял девушке полную свободу.

В. О. Ковалевский, имевший юридическое образование, занимался изданием книг, главным образом переводных иностранных. Но, познакомившись с юной Соней Корвин-Круковской, он решил заняться естественными науками. В особенности его заинтересовала палеонтология, в которой ему вскоре удалось сделать большие открытия.

В 1869 г. Владимир Онуфриевич и Соня приехали в Вену, но потом решили обосноваться в Гейдельберге, немецком университетском городе, где были лучшие, чем в Вене, профессора математики. Там, как мы знаем, Соню допустили к слушанию некоторых лекций. В. О. Ковалевский также стал посещать лекции по физике, геологии и минералогии. Вскоре в Гейдельберг приехала Юлия Всеволодовна Лермонтова (1846—1919), девушка, которую Софья Васильевна убедила в том, что ей надо учиться за границей для занятий химией. По воспоминаниям Ю. В. Лермонтовой, жизнь в Гейдельберге втроем, с Соней и Владимиром Онуфриевичем, была прекрасной, все усердно занимались наукой, между ними были хорошие, товарищеские отношения. Но вот в Гейдельберге появилась сестра Сони, Анна Васильевна Корвин-Круковская (1843—1887), которую родители отпустили к «замужней» сестре, со своей подругой Жанной Евреиновой (1844—1919), будущим юристом. Старшие девицы нарушили существовавшую идиллию. Им казалось, что отношения между Владимиром Онуфриевичем и Соней начинают принимать слишком интимный характер, чего, по их мнению, не должно быть при «идейном» браке. Владимиру Онуфриевичу пришлось выехать из квартиры, где он жил с Соней и Юлией, а его место заняли Анюта и Жанна. В отношениях В. О. и С. В. Ковалевских образовалась трещина, которая увеличивалась. Владимир Онуфриевич, горячо полюбивший Софью Васильевну, стал чувствовать ложность фиктивного брака.

После переезда Сони в Берлин Владимир Онуфриевич уехал в Вену, а затем в другие города Европы, где работали интересовавшие его крупные ученые по геологии. Отношения между «супругами» совсем разладились. Больше года они не встречались. Между ними возникла переписка, в которой Владимир Онуфриевич предлагал Софье Васильевне развод, полагая, что фиктивный брак тяготит ее. Она отвечала ему, что не нуждается в этом. В конце концов

Софья Васильевна поняла, что у Владимира Онуфриевича страдает самолюбие. Она почувствовала нежность к нему и написала веселое письмо, в котором с чистым сердцем уверяла его, что у него нет никаких оснований для ревности к ее занятиям, учителям и т. д. Супруги встретились, и в 1873 г. их фиктивный брак перешел в фактический.

Но осенью 1872 г. Соне было очень трудно, ее тяготила размолвка и разлука с Владимиром Онуфриевичем. Вейерштрасс видел подавленное настроение своей ученицы, вероятно, догадывался о чем-то неестественном в отношениях между Ковалевскими (Соня часто не знала, где ее муж и что он делает). И однажды Соня открылась Вейерштрассу, рассказав о своем состоянии. Он решил направить мысли ученицы на определенную цель — писание диссертации, и стал обдумывать тему для нее. Продолжение письма, от 26 октября 1872 г., таково:

> В эту ночь я много думал о Вас, иначе и не могло быть. Мои мысли обращались ко многому, но все время возвращались к одному и тому же предмету, о котором я еще сегодня должен переговорить с Вами. Не бойтесь, что я коснусь вопросов, о которых мы, по меньшей мере теперь, условились не говорить. То, что мне надо Вам сказать, тесно связано главным образом с Вашими научными стремлениями, но я не уверен, что при милой скромности, с которой Вы судите о том, чего Вы уже и теперь достигли, Вы были бы склонны согласиться с моим планом. Но все это лучше обсудить при встрече [Там же, с. 154].

И Вейерштрасс предлагает прийти к ней на часок перед обедом и высказать свои мысли. С этого времени Вейерштрасс и Ковалевская переходят на ты. Очевидно, Вейерштрасс уже придумал темы для ее диссертации. Ковалевская сделала три работы, каждая из которых могла служить для этой цели. Но в письмах осеннего семестра 1872 г. это не отражено. Вейерштрасс продолжает обсуждать с Соней задачи вариационного исчисления (письмо 8) и соотношения между θ-функциями (письма 9—11). Вейерштрасс ищет все новые выражения для полной вариации и вносит дополнения к тому, о чем шла беседа накануне. Потом он собирается говорить о тех видоизменениях, которые должны появиться в выражениях первой и второй вариаций, «если несвободные концы кривой будут изменяться согласно наложенным на них условиям» [74, с. 156]. В этом же письме Вейерштрасс упоминает о двух своих набросках по поводу линейных дифференциальных уравнений. Миттаг-Леффлер говорит, что Вейерштрасс углубил теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которые дали толчок и теории элементарных делителей, и, возможно, занимался также уравнениями с переменными коэффициентами. Но Вейерштрасс не держал в большом порядке свои рукописи и охотно раздавал их. А один раз пропала его большая шкатулка из белого дерева, в которую он складывал свои записи на разные математические темы: она была сдана в багаж вместе с другими вещами, но из багажа не была получена.

Что касается содержащихся в письмах Вейерштрасса записей по θ-функциям, то в них даются различные преобразования этих функций и формулы преобразования одной квадратичной формы в другую. Он просит Соню тщательно проверить эти формулы, так как он только что составил их.

В письмах 1872 г. учитель переходит на ласковые обращения: мой дорогой друг, милая Соня и т. д. На рождественские каникулы Соня и Юлия оставались в Берлине, и Вейерштрасс пригласил их поехать с ним на концерт (письмо от 27 декабря 1872 г.).

В основном письма Вейерштрасса 1871—1872 гг. представляют записки, извещающие о невозможности занятий, иногда они сопровождаются посылкой страниц с формулами, дополнительных к прочитанной лекции. За пять семестров был пройден «цикл Вейерштрасса». В 1873 г. и первой половине 1874 г. Софья Васильевна работает над вопросами, которые должны составить диссертацию.

Весной 1873 г. и Вейерштрасс и Соня болели. По выздоровлении Соня собиралась поехать в Цюрих к сестре, которая с мужем и только что родившимся сыном жила в Швейцарии после событий, связанных с Парижской Коммуной. 6 апреля Вейерштрасс пишет, что его еще держат под домашним арестом. Он рад, что Соня поправляется и даже чувствует склонность к математическим занятиям. Но он советует не спешить с работой, а стараться здесь и в Цюрихе восстановить силы.

Вскоре Софья Васильевна уехала в Цюрих, о чем свидетельствует письмо Вейерштрасса от 18 апреля 1873 г. Он рад, что Соня совершает дальние прогулки, и желает, чтобы она побольше была на воздухе и убедилась в справедливости слов одного медицинского светила, что, «кроме чая из ромашки, существует только одно лекарство, о котором твердо установлено, что оно действует благотворно, а именно чистый, мягкий воздух». Соня должна сберечь силы для регулярных занятий по возвращении в Берлин. «Надеюсь, мы достигнем по меньшей мере того, что ты соберешь в летние месяцы материалы для стóящей работы, которую сможешь выполнить в течение осени» [74, с. 161].

О себе Вейерштрасс говорит: опасение Сони, что он на каникулах перегрузит себя работой, не обосновано, так как он еще чувствует недомогание и еще только собирается выйти из дому. За это время у него побывало довольно много гостей, которые приехали в Берлин на пасхальные каникулы и оказали внимание учителю. Главным образом он разговаривал с Гейне из Галле и Бальцером из Гиссена. С Бальцером он беседовал о «геометрии конечного пространства».

Соня написала ему из Цюриха, что у нее есть некоторые вопросы к учителю, поэтому он может надеяться получить от нее по крайней мере одно обстоятельное письмо.

Во время пребывания в Цюрихе Соня познакомилась с Германом Амандусом Шварцем (1843—1921), человеком, как о нем говорили, «полным и полным жизни». Е. Ф. Литвинова (1845—1923), обучавшаяся в Цюрихе математике, написала на основе дневника воспоминания о времени своего студенчества, в которых много говорит о встречах с Ковалевской [128]. Как раз перед ее приездом Литвинова посетила Шварца, и у них зашел разговор о Ковалевской. Шварц оживился и сказал: «О, это замечательная женщина; мне так много пишет о ее занятиях наш общий великий учитель Вейерштрасс. Недавно он прислал мне свои лекции об абелевых функциях, составленные ею. Это труднейший предмет в математике, и немногие мужчины отваживаются им заниматься» [128, с. 37].

Соня сказала Литвиновой, что Вейерштрасс хотел послать какую-то ее работу в математический журнал, но раздумал, так как получил от Шварца уже напечатанную им статью по этому вопросу. Судя по тому, что в последнее время Вейерштрасс занимался с Соней вариационным исчислением, ее статья относилась к этой области, да и Шварц в это время занимался теорией минимальных поверхностей.

После знакомства с Шварцем у Софьи Васильевны появилось желание работать с ним. Ей захотелось остаться в Цюрихе вблизи любимой сестры, тем более что от Шварца она узнала о назначении Вейерштрасса ректором Берлинского университета. Как бы услышав эти мысли, проницательный Вейерштрасс написал ей большое письмо, в котором говорит:

То, что Ты останешься моей ученицей в лучшем смысле слова, пока Ты хочешь и можешь чему-нибудь научиться у меня, я бы не подчеркнул специально, если бы одно место в Твоем письме не навело меня на это. Ты считаешь, что если не в качестве друга, то в качестве ученицы можешь меня обременить (lästig werden) — так звучит употребляемое Тобой скверное слово <. . .>. Говоря серьезно, милая, дорогая Соня, будь уверена, я никогда не забуду, что именно я обязан моей ученице тем, что обладаю не только моим лучшим, но и единственным настоящим другом. Поэтому если Ты сохранишь и в будущем прежнее отношение ко мне, то можешь быть твердо уверена: я также всегда преданно буду поддерживать Тебя в Твоих научных стремлениях [74, с. 164].

Соня отказалась от намерения остаться в Цюрихе. Между Ковалевской и Литвиновой произошел такой разговор.

— Итак, значит, мне не судьба остаться здесь, надо ехать в Берлин, да и Юленька уже там.

— Разве Вы ставите Шварца выше Вейерштрасса? — спросила я.

Она сказала:

— Ах, вовсе нет, но с идеями Вейерштрасса я уже освоилась, а здесь, знаете ли, прелесть новизны меня привлекает. Но, разумеется, я всегда сумею с собой справиться и буду жить там, где должна.

И на мой вопрос: чем же обусловливается это «должна» — она ответила:

— Моим назначением или, если хотите, главною целью в жизни, но я больше люблю слово «назначение», потому что цель жизни — это во мне самой, а назначение — высшего происхождения. Я чувствую, что предназначена служить истине — науке и прокладывать новый путь женщинам, потому что это значит — служить справедливости. Я очень рада, что родилась женщиной, так как это дает мне возможность одновременно служить истине и справедливости. Но не всегда бывает легко не уклоняться от назначения [128, с. 45].

Ковалевская с юных лет была воспитана на идее шестидесятников — служения народу и просвещению. Она мечтала, как они с сестрой откроют школу, непременно в Сибири, и как будут вести аскетическую жизнь. Детские мечты сменились более реальной, но также возвышенной целью. И она чувствовала, что достижение этой цели нелегко.

Вероятно, Софья Васильевна поняла, что если бы она осталась в Цюрихе, то нанесла бы тяжелый удар Вейерштрассу. Она написала ему теплое письмо, очень его обрадовавшее. Учитель пишет ей 25 апреля 1873 г.: «Я не могу удержаться от того, чтобы не сказать Тебе, как сильно я был обрадован тем сердечным тоном, который звучит в его строках, и как он благотворно повлиял на мое все еще несколько подавленное душевное состояние» [74, с. 163]. Он пишет о состоянии своего здоровья: он поправляется и надеется почувствовать себя здоровым, как только потеплеет. Вначале он боялся, что повторится его прежний недуг — «утомление мозга», но это опасение не оправдалось, и он думает, что сможет провести лето в обычной деятельности.

Соня вернулась в Берлин. Из письма Вейерштрасса от 9 июня 1873 г. видно, что Ковалевская занималась задачей о кольце Сатурна, которая потом вошла в число задач, представленных на соискание ученой степени доктора [133].

9 июня 1873 г. Вейерштрасс посылает ей краткие соображения относительно потенциала кольца (тора) и выражает

надежду, что по этим заметкам она сможет работать, не прерываясь.

В конце лета Софья Васильевна и Владимир Онуфриевич уехали в Россию, но к осени Соня опять в Берлине. На каникулах и Вейерштрасс поехал отдыхать. Из Засница на острове Рюген (в Балтийском море) он посылает 20 августа 1873 г. длинное письмо, в котором описывает, как он с сестрами отдыхает в этом прекрасном месте. В письме содержатся замечательные строки, характеризующие отношение Вейерштрасса к своей ученице. Выражая сожаление, что Сони нет с ним среди такой восхитительной природы, он добавляет: «Как прекрасно было бы нам — Тебе с Твоей душой, полной фантазии, и мне, возбужденному и освеженному Твоим энтузиазмом, помечтать тут над многими задачами, которые нам предстоит разрешить: о конечных и бесконечных пространствах, об устойчивости мировой системы и обо всех других великих задачах математики и физики будущего. Но я давно уже научился смиряться с тем, что не каждый прекрасный сон осуществляется» [74, с. 167]. Так как в Пруссии, в частности в Берлине, была холера, то Вейерштрасс просит Соню не приезжать, пока он не сообщит ей данные о прекращении эпидемии. Хотя Вейерштрасс будущей зимой будет сильно занят, он говорит, что оставит для Сони «наши воскресенья», да и в другие дни сможет выкроить часочек, который посвятит своему милому другу.

В конце письма Вейерштрасс делится с Соней тем, что ему пишет Ришело, полагая, что это место ее заинтересует, так как оно относится к тому пути, который Вейерштрасс, наконец, избрал в теории функций Абеля. «Наибольшее значение имеет для меня именно то обстоятельство, — пишет Ришело, — что в решении главной математической проблемы этого столетия Вы избираете иной, более естественный путь, чем Риман, Клебш и Гордан, и что Вы ему следуете до ясно выраженного предела. Я все еще сожалею о том, что Вы не издали второй части Вашего первого исследования (о гиперэллиптических функциях), которое уже содержит сущность Вашего метода. Ни работы Римана, ни тем более книга Клебша и Гордана не должны были бы удержать Вас от этого. Однако для этого у Вас, вероятно, имелись основательные причины» [Там же, с. 167]. Известно, что Вейерштрасс отложил печатание своей работы, узнав о работе Римана по тому же вопросу.

В следующем письме, от 8 октября 1873 г., Вейерштрасс сообщает, что он серьезно готовится к вступительной речи в качестве ректора университета, и добавляет: «Речь моя, если я вообще не переменю тему, будет иметь очень серьезное содержание и навлечет с разных сторон на меня нападки. Не всегда можно избежать этого, я должен взвешивать каждое слово с тем, чтобы выбрать наиболее подходящее». Мы уже говорили о том, что Вейерштрассу удалось достичь большего, чем другим ректорам, в осуществлении некоторых реформ. В следующем письме, от 12 октября 1873 г., Вейерштрасс пишет, что выбрал уже другую тему доклада. У нас об этом докладе говорится выше.

В ноябре 1873 г. Соня приехала в Берлин, чтобы продолжить работу над своими исследованиями для диссертации. Из писем Вейерштрасса конца 1873 г. видно, что он сильно занят и вынужден менять сроки встречи с Соней. В трех письмах этого периода много формул, однако они не имеют прямого отношения к ее диссертационным работам. В письме от 19 ноября говорится о том, что учитель посылает еще целую серию «песен без слов», которые относятся к линейчатым минимальным поверхностям, т. е. вопросам, не затрагиваемым ни в какой из трех работ Ковалевской. 27 ноября Вейерштрасс пишет письмо в зале совета университета «во время глубокомысленного экзамена по строению вещества» и приводит дополнительные выкладки к задаче, о которой он беседовал с Соней утром. Через два дня опять говорится о теории минимальных поверхностей, которую он надеется этим и закончить.

Наконец, 9 декабря Вейерштрасс пишет о предмете, совсем уже не относящемся к диссертации Ковалевской, — о теории комплексных единиц, причем предлагает Соне подумать дальше над этим вопросом.

Последнее письмо 1873 г., от 24 декабря, относится к теории эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода, записанных в вейерштрассовской нормальной форме, причем видно, что Вейерштрасс накануне дал своей ученице задание относительно их преобразований, одобрил то, что она получила, и дает ей следующее задание. По всей вероятности, Вейерштрасс в то время как раз обдумывал те формулы, о которых мы говорили раньше.

Первое полугодие 1874 г. у Вейерштрасса также загружено. В частности, 17 марта он пишет, что не может сегодня встретиться с Соней, так как только что получил случайно запоздавшее приглашение явиться в 5 часов к королевскому столу. «Такое приглашение равносильно приказу», — добавляет он [74, с. 175].

Большое письмо 6 мая показывает, что Соня подходит к концу в своей теме по теории дифференциальных уравнений с частными производными. Здесь Ковалевской удалось самостоятельно открыть неожиданное по тем временам обстоятельство: степенной ряд, формально удовлетворяющий такому уравнению, может быть расходящимся при всех значениях независимых переменных. Это открытие «явилось для меня,— пишет Вейерштрасс, — исходной точкой для интересных и многое разъясняющих исследований. Я желал бы, чтобы моя ученица и впредь таким же образом выражала благодарность своему учителю и другу» [74, с. 177].

Ковалевская обнаружила возможность расходимости рядов для более общего уравнения, чем уравнение теплопроводности, но в ее диссертации приводится случай простейшего уравнения теплопроводности

$$\partial\varphi/\partial t = \partial^2\varphi/\partial x^2. \qquad (1)$$

Если поставить условие: $\varphi(x, t)=1/(1-x)$ при $t=0$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

формально удовлетворяет уравнению, однако расходится при всех t, кроме $t=0$. Следовательно, *аналитического* решения такого рода не существует.

Пример Ковалевской выяснил важность приведения уравнения с частными производными к *нормальной* форме, когда в левой его части стоит производная самого высокого порядка [2], — это условие в уравнении (1) не выполнено.

Этот результат заставил Вейерштрасса задуматься специально об уравнении теплопроводности и искать его решение в другой форме. В цитированном письме он рассматривает решение уравнения (1) вида

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-(\lambda-x)^2/4t} d\lambda \qquad (2)$$

и доказывает, что если действительная часть t всегда положительна, тогда как x изменяется неограниченно, то при условии, что $(\log|f(\lambda)|)/\lambda^2$ исчезает для $\lambda=\pm\infty$, интеграл может быть разложен в ряд вида

$$e^{-x^2/4t}\{\varphi_0(t)+\varphi_1(t)x+\cdots+\varphi_n(t)x^n+\cdots\},$$

---

[2] Те или иные начальные условия задачи задаются в зависимости от порядка производной в левой части уравнения.

где $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ... — регулярные функции от t [Там же, с. 177].

В следующем письме, от 9 мая, Вейерштрасс возвращается к уравнению теплопроводности и приводит его решение, которое теперь называют *автомодельным*:

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x - \lambda),$$

где λ, μ, ν обозначают произвольные постоянные, а $F(u)$ должно удовлетворять уравнению

$$F''(u) + {}^1/_2\,\mu u F'(u) + \mu\nu F(u) = 0.$$

Вейерштрасс задает Соне вопрос: каково общее решение этого дифференциального уравнения? При $\mu=1$, $\nu={}^1/_2$ можно взять

$$F(u) = f(\lambda)\, e^{-u^2/4},$$

где $f(\lambda)$ — произвольная функция, и тогда получить интеграл (2) предыдущего письма. Что будет при других значениях μ, ν? Неизвестно, занималась ли Соня этой задачей.

В письме от 19 мая 1874 г. Вейерштрасс пишет о своих сомнениях по поводу одного вопроса в теории гиперэллиптических интегралов 3-го ранга, который он называет «математическим парадоксом». Эти его размышления связаны с третьей работой Софьи Васильевны «О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам» [133].

Весной 1874 г. Вейерштрасс болел, у него было воспаление горла, сильная лихорадка и абсолютная бессонница.

Летом 1874 г. Соня интенсивно трудилась над оформлением своих диссертационных статей и Вейерштрасс помогал ей в этом. Он внимательно просматривал то, что она писала и, как он писал Дюбуа-Реймону 27 сентября 1874 г., исправлял многочисленные грамматические ошибки Сони в немецком языке, добавляя, что в остальном она проводила работу самостоятельно.

Однако из писем Вейерштрасса видно, что он не только исправлял грамматические ошибки, но и тщательно редактировал содержание работы. Так, 4 июня 1874 г. он пишет, что полученный от Сони лист ее статьи случайно погиб, но он восстанавливает по памяти содержание этого листа, одновременно указывая, как можно было бы развить исследование наилучшим образом. Речь идет о приведении уравнения с частными производными к нормальной форме путем линейного преобразования переменных.

В следующем письме (без даты) Вейерштрасс, получив написанное Соней, говорит: «Уже видно, насколько Ты сориентировалась в прилагаемых листах. Твои формулы и общий ход изложения я сохраняю, в выражениях же многое следует изменить. Введение функций $\theta(u_1, \ldots)$, которое осложнило бы дело, как Ты уже знаешь, не обязательно. Конец разработки пришли мне поскорее» [74, с. 187].

Теперь, когда у Сони дело подходит к концу, Вейерштрасс начинает хлопотать о представлении в Гёттингенский университет диссертации Ковалевской и Юлии Лермонтовой (по химии) и ведет переписку с гёттингенскими профессорами. Лермонтова должна сдавать устный экзамен по химии, Соню же он хочет освободить от экзамена, объясняя мотивы этого: Юлия имела больше возможностей общаться с людьми, занимающимися химией, так как работала в лаборатории. Соня же вела уединенный образ жизни, плохо владеет немецким языком и, если ее смутит какой-нибудь вопрос, может запнуться и не ответить из-за волнения. Вейерштрасс пишет Л. Фуксу в Гёттинген: «Что касается математического образования Ковалевской, то могу заверить, что я имел очень немного учеников, которые могли бы сравниться с нею по прилежанию, способностям, усердию и увлечению наукой» [133, с. 346].

Ковалевская получила ученую степень доктора философии от Гёттингенского университета in absentia, т. е. заочно, summa cum laude, т. е. с отличием, Юлия Лермонтова также стала доктором философии за превосходную работу по химии, причем очень хорошо сдала экзамен.

18 августа 1874 г. Вейерштрасс прислал последнюю записку Соне, и вскоре она уехала на родину.

Вейерштрассу было грустно расставаться с любимой ученицей. Он с нетерпением ждал от нее известия и уже стал волноваться, не получая его, — не заболела ли она. Но вот пришло письмо, написанное, по-видимому, 14 сентября и полученное Вейерштрассом 21 сентября. Он сразу же стал писать длинный ответ, в котором рассказал о многих событиях, происшедших за время ее отсутствия. Прежде всего: ее диссертация напечатана, качество бумаги хорошее, 35 экземпляров он оставляет себе для распределения, 65 отправляет ей в Петербург, 250 он послал в Гёттинген. Отправил оттиски Э. Лампе.

Вейерштрасс с сестрами три недели с удовольствием путешествовал, сперва вверх по Рейну, от Кёльна до Страсбурга, с остановками там, где им нравилось. Под конец провели четыре дня в Бадене и четыре дня в Гейдельберге, где было необычайно красиво. На Рейне Вейерштрасс отдался своим воспоминаниям юности.

«Странное чувство овладело мною, — пишет Вейерштрасс, — когда я снова разыскал дорожку, по которой много лет тому назад проходил с другом, убедившим меня, наконец, осуществить давно задуманное решение стать математиком. Только на этом пути, полагал он, мне суждено будущее; сам же он надеялся добиться положения в научном мире в качестве ученого юриста. Я остался верен своей цели и доволен достигнутыми результатами, несмотря на то, что не все цветы дали зрелые плоды» [74, с. 188]. Друг же Вейерштрасса продвинулся на практической государственной службе и занимал высокий пост.

В Страсбурге Вейерштрасс совершил героический, по его мнению, поступок: два раза в течение 16 часов он поднимался на площадку башни кафедрального собора (375 ступеней).

В Гейдельберге он встретил Кирхгофа, Кёнигсбергера и Бунзена и провел с ними много времени. По словам Вейерштрасса, у Кёнигсбергера очаровательная жена, соединяющая неподдельную любезность и приятный нрав с очень хорошим образованием. Кёнигсбергер сильно изменился. Вполне заслуженное им признание как следствие преподавательской деятельности придало ему больше, чем следует, самодовольства, а суждения о других математиках стали резкими. «Впрочем, мне было приятно, что он остался действительно чрезвычайно честным человеком, каким и обещал быть» [74, с. 189].

В Гейдельберге чаще всего Вейерштрасс общался с Кирхгофом. У него возникла мысль перевести Кирхгофа в Берлин. Нужно заметить, что у Кирхгофа стали сильно болеть ноги и работа в лаборатории начала его утомлять. Вейерштрасс полагал, что должность в Академии наук даст Кирхгофу необходимый досуг для того, чтобы разработать полную систему математической физики, и этим будет оказана большая услуга науке и ему самому. (Хлопоты Вейерштрасса увенчались успехом, и Кирхгоф переехал в Берлин.)

В том же письме Вейерштрасс сообщал, что Бунзен очень переменился и постарел, но сохранил свой восхитительный юмор. Сенсацией в Гейдельберге является то, что завзятый курильщик, похищавший сигары у студентов, Бунзен не курит уже 8 дней, «и не потому, что спалил драгоценный манускрипт от недокуренной сигары, — по этому поводу он утешает себя мыслью, что второй вариант будет лучше первого, а потому, что, не куря, он может позволить себе безнаказанно нарушать диету» [74, с. 189].

Когда Вейерштрасс был в гостях у Кёнигсбергера, то пришел Бунзен с газетой, где было напечатано, что одной русской даме из Москвы, госпоже С. фон Ковалевской, Гёттингенским философским факультетом присвоена степень доктора — честь, которая была оказана, кроме нее, только одной-единственной женщине, знаменитой Доротее Шлёцер [3]. «Это явилось для всех сенсацией — я умышленно ничего об этом не говорил» [74, с. 189].

Потом было много разговоров о Соне, ее сестре Анюте и Жанне Евреиновой, которые, как мы знаем, некоторое время жили с нею в Гейдельберге. Бунзен шутливо назвал Соню «опасной женщиной» на основании следующего. Он поклялся не брать в свои лаборатории женщин, особенно русских. Так и Юлию Лермонтову он не хотел взять к себе работать. Но тогда Соня пришла к Бунзену и стала так нежно просить за подругу, что он не мог устоять и изменил решение.

Ответное письмо Софья Васильевна написала примерно через месяц, а Вейерштрасс ответил ей почти через два месяца. 16 декабря он пишет, что если он задержался с ответом, «то это не мелкая месть и не проверка, сдержишь ли Ты свое обещание писать мне, если я когда-нибудь на одно из твоих писем не отвечу своевременно. У меня не было недостатка времени в обычном смысле, но после того, как 15 октября я снова стал свободным человеком [4], я почувствовал такое стремление к математическим занятиям, что последние два месяца пролетели для меня совершенно незаметно, и сегодня я даже не поверил своим глазам, когда, взяв в руки требующее ответа письмо, увидел, что оно датировано 19 октября». Однако некоторое недовольство ее письмом он выражает, так как оно кратко и поверхностно.

Вейерштрасс говорит, что он с самого начала рассчитывал на то, что в первые месяцы пребывания Сони в Петербурге, после того как она так долго была лишена возможности бывать в обществе, она не возьмется за постоянную и серьезную работу по математике. Однако он выражает уверенность: «Твой серьезный ум, Твое воодушевление идеальными стремлениями не дадут Тебе на слишком долгое время оторваться от научной работы <. . .>. Я знаю, что Ты не изменишь науке и что жажда творчества, временно уступившая совершенно

[3] Доротея Шлёцер в 17 лет получила ученую степень доктора за работу по финансам в России под названием «De re metallica» [132, с. 294]. Среди русских академиков был Август Людвиг Шлёцер (1735—1809), историк и статистик, отец Доротеи Шлёцер. Он написал «Опыт русских летописей».

[4] Окончился срок ректорства Вейерштрасса.

понятному утомлению, снова оживет в Тебе с еще большей силой. Я не отрицаю, конечно, что Ты нередко будешь нуждаться в стимулирующем и подбадривающем влиянии» [74, с. 191].

В письме от 16 декабря 1874 г. Вейерштрасс рассматривает систему дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt=G_i\ ((x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,\ x_n)\ (i=1,\ 2,\ .\ .\ .,n),$$

где G_i — целые функции (т. е. полиномы) от $x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,\ x_n$.

Пока еще его идеи незрелы, но все же ему хотелось бы поделиться ими со своей ученицей. В беседе с нею он скорее довел бы некоторые мысли до полного развития, чем это достигается простым размышлением.

Он продолжает заботиться о диссертации Софьи Васильевны, разослал ее нескольким лицам и получил благоприятные отзывы от Кирхгофа, Гейне, Шварца, Шеринга и прежде всего от П. Дюбуа-Реймона, от которого Соня скоро должна получить письмо, возможно полное восхищения. Но наилучшим образом понял ее работу Гейне.

В постскриптуме Вейерштрасс говорит, что чувствует себя хорошо, его рука еще побаливает, но не сильно и не очень мешает ему писать.

Заканчивается письмо Вейерштрасса такими теплыми словами: «До свидания, мое сердце, и не заставляй своего друга опять так долго ждать от Тебя признаков жизни. Ты же видишь, что он снисходительный духовный отец, которого благополучие его духовного дитяти очень волнует и которому знакомы слабости человеческой натуры» [74, с. 195].

Вейерштрасс был рад, когда в одном из писем Ковалевская обратилась к нему с просьбой порекомендовать математическую литературу для ее брата, Федора Васильевича Корвин-Круковского, который учился в Петербургском университете и окончил его по отделению математики: он думал, что Соня будет иметь около себя близкого человека с общими научными интересами. Вейерштрасс порекомендовал «Упражнения в высшем анализе» Шлёмильха и курс анализа Ш. Эрмита. Однако Федор Васильевич не проявлял сколько-нибудь глубокого интереса к математике. Он стал чиновником в страховом деле.

В день нового, 1875 года Вейерштрасс благодарит Соню за прекрасный рождественский подарок: она написала ему письмо, в котором выражены ее научный энтузиазм и привязанность к своему учителю и другу. И он делится с Соней намерением довести до конца свои старые работы и опубликовать их. Он не должен медлить с этим и по следующей причине. «С тех пор как молодые математики пришли к убеждению, что писание толстых книг (кстати, без указания источников) является наиболее действенным средством, чтобы получить признание масс и добиться хорошего места, как раз в этой области анализа, основательному изучению которой я посвятил лучшую часть своей жизни, было сделано слишком много безобразного и настала пора помешать этому» [74, с. 196]. Вейерштрасса возмущает, что его самый старый ученик, которым он так дорожил, опубликовал толстую книгу об эллиптических функциях, в которой каждая страница нуждается в переделке, а теперь выбрал себе в жертву и абелевы функции, в которых сам ничего не сделал. «Я считаю, — добавляет он, — что не принадлежу к ученым педантам и даже не признаю в математике единой душеспасительной церкви. Чего я, однако, требую от научной работы, так это единства метода (от последовательного выполнения определенного плана до надлежащей проработки деталей), придающего ей печать самостоятельного исследования» [Там же, с. 196].

Он недоволен тем, что учебные руководства часто пишутся не специалистами. При этом у французов недостаток глубины отчасти искупается ясностью и изяществом изложения. «Что же касается наивысших и труднейших частей науки, где нечто способен дать только тот, кто отдает этому все свои силы, то они не должны быть предметом легкомысленного книгописания» [Там же, с. 196].

Вейерштрасс поддерживает благое намерение Софьи Васильевны в ближайшую зиму заняться главным образом пополнением пробелов ее образования. Он рекомендует ей «наиболее элементарные области математики»: аналитическую механику и математическую физику. Наряду с английскими авторами он рекомендует читать Пуассона и Коши, работы старшего и младшего Нейманов (т. е. Франца Неймана (1798—1895) и Карла Неймана (1832—1925)) по электродинамике. Но если бы она получила в руки книгу Гамильтона о кватернионах, то изучение ее было бы напрасной потерей времени. Советует обратить внимание на работы Сен-Венана по теории упругости. Правда, везде ее (ведь она ученица Вейерштрасса, который, по словам Ф. Клейна, приучал математиков к строгости) неприятно поразит отсутствие строгости выводов. Но главное ведь в том, чтобы ознакомиться со всем, что сделано до сих пор в математической физике, и выяснить, какие вопросы не решены.

При этом Вейерштрасс дает Соне задачи для упражнения. Одна из них: в n-мерном пространстве, где квадрат расстояния между точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ равен $(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$, требуется определить кратчайшую линию на поверхности эллипсоида вращения и евклидовом пространстве:

$$\frac{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}{a^2}+\frac{x_n^2}{b^2}=1.$$

Другая задача относится к одной теореме Абеля, доказательство которой он не довел до конца.

Вейерштрасс просит свою ученицу как-нибудь употребить неделю, чтобы написать статью о кольце Сатурна для печати, так как некоторые друзья хотели бы ознакомиться с нею. А будет ли статья пригодна для печати, он скажет Соне совершенно откровенно. Но Софья Васильевна не прислала статью (она опубликовала ее лишь в 1885 г.), она все больше удалялась от математики и от своего учителя, все реже отвечала на его письма. Вейерштрасс в письме от 21 апреля 1875 г. выражает беспокойство по поводу молчания и считает нужным написать ей, не дожидаясь письма, о следующих обстоятельствах, вызвавших его волнение. В «Докладах Парижской академии наук» появились статьи Дарбу (в выпусках 2 и 5) и Мере́ (в выпуске 6), посвященные тому же вопросу, который исследовала Соня в своей диссертации, — о существовании интеграла в уравнениях с частными производными. Дарбу написал также обстоятельный доклад, который передал на рассмотрение одной комиссии. Вейерштрасс беспокоится о приоритете своей ученицы и посылает по экземпляру ее диссертации Дарбу и Эрмиту. Затем он просит Борхардта, редактора «Журнала чистой и прикладной математики», в 80-м томе которого была опубликована статья Софьи Васильевны, в заключении тома при перечислении опечаток в ее работе «категорически отметить, что она уже печаталась в течение августа» [74, с. 207].

Но Эрмит написал Вейерштрассу, что Дарбу с большой похвалой отозвался о статье Ковалевской. Вейерштрасса интересует теперь вопрос, встретился ли Дарбу с тем исключительным случаем, как у Ковалевской в уравнении теплопроводности. «Я не отрицаю, — добавляет он, — что испытал бы некоторое злорадное чувство, если бы ему не удалось справиться с этим исключительным случаем» [74, с. 206]. Вейерштрасс дорожил достижениями Ковалевской гораздо больше, чем она сама!

В одном письме Софья Васильевна обрадовала Вейерштрасса своими сообщениями, что в июне (1875) приедет в Берлин. Но затем последовало письмо с извещением о ее заболевании корью. Вейерштрасс пишет (17 июня 1875 г.):

> Право же, сердце мое, Ты не можешь себе представить, как мне недостает Тебя. В течение четырех лет я привык видеть в Тебе поверенную моих мыслей и стремлений, с которой я мог говорить, как с другом, близким мне в течение всей моей жизни. Я никогда не находил никого, кто выражал бы такое понимание высочайших целей науки, кто так радостно отзывался бы на все мои взгляды и принципы, как Ты. О! Мы не должны были бы еще разлучаться. Тебе следовало бы еще один-два года оставаться моей ученицей, работающей вместе со мной. Но это оказалось невозможным [74, с. 211].

В письме Вейерштрасс сообщает Софье Васильевне некоторые новости математической жизни в Германии: после умершего Ришело в Кёнигсберг приедет из Цюриха Генрих Вебер, а Шварц, вероятно, получит профессуру в Гёттингене.

Из последнего письма Вейерштрасса 1875 г. (от 23 октября) видно, что Соня написала ему о смерти своего отца, Василия Васильевича Корвин-Круковского (1801—1875). Вейерштрасс отвечает ей полным сочувствия письмом, причем приводит четверостишие, которое в переводе звучит примерно так: «Большой благородный человек не умирает от состояния глубокой тоски. Пусть даже ценой больших мук, но он находит в самом себе силы пережить утрату» [74, с. 216] [5].

На это письмо Вейерштрасс не получил ответа. Ковалевская перестала писать, на три года переписка прекратилась. Чтобы понять, как это получилось, мы вернемся к осени 1874 г., когда Софья Васильевна с Владимиром Онуфриевичем вернулись в Россию. В. О. и С. В. Ковалевским пришлось думать о своем будущем, о работе по специальности, о заработке для жизни. В конце 1874 г. В. О. Ковалевский сдал магистерские экзамены. Но Софья Васильевна, подавшая в 1875 г. заявление в Петербургский университет, не была допущена к сдаче магистерских экзаменов. Позже, в 1878 г. открылись Бестужевские высшие женские курсы. Софья Васильевна предлагала бесплатно читать на курсах, но ей было отказано. Этот факт вызвал тогда общее удивление и негодование, а несправедливость глубоко огорчила ее.

---

[5] У Вейерштрасса написано так:

Nicht in das Grab, nicht übers Grab verschwindet
Ein edler Mensch der Sehnsucht hohen Wert!
Er kehrt in sich zurück und findet staunend
In seinem Busen das Verlorne wieder!

Супруги решили заняться такими делами, которые доставили бы им в будущем доход, чтобы не быть стесненными ничем, стать независимыми от университетских партий, среди которых Владимир Онуфриевич был чужаком. Тогда они могли бы спокойно думать о занятиях наукой и посвятить себя исключительно им.

Перед женитьбой В. О. Ковалевский занимался издательской деятельностью, главным образом переводом научных книг. Первое время книги хорошо раскупались, в русском обществе был большой интерес к естествознанию, которому в основном посвящались переводы (Ч. Дарвина, Ч. Лайеля и др.). Потом спрос на них упал, и Владимир Онуфриевич впал в долги. Вообще он не проявлял способностей к практической деятельности. Однако Софья Васильевна верила в них и поддерживала его замыслы: они стали строить дома, но на этом разорились. Владимир Онуфриевич вступил в «Общество русских фабрик минеральных масел Рагозина и К^0» в качестве директора, хотя и чувствовал что-то неладное в деятельности этого общества. В конце концов он и здесь впал в долги и ему угрожало полное разорение.

Софья Васильевна некоторое время работала в газете, писала очерки о достижениях науки и театральные рецензии [137, с. 84—86 и 214—217]. Когда направление газеты стало принимать реакционный характер, она (так же как и ее муж, участвовавший в издании газеты) перестала в ней сотрудничать.

Софья Васильевна бывала в обществе, и первое время положение женщины, имеющей ученый диплом, доставляло ей удовольствие. Потом настроение ее изменилось. В 1878 г., в ожидании ребенка, она стала вести более спокойный образ жизни, снова заниматься математикой. Вспомнила о своем учителе и написала ему письмо с какими-то математическими вопросами, на которое он отвечает ей письмом:

Курорт Засснец (остров Рюген),
15 августа 1878 г.

Мой милый друг!

Даже по получении Твоего, почти уже неожиданного письма от . . . впрочем, число опять не поставлено, как и в некоторых прежних письмах, мне все же непонятно, почему Ты как долго оставляла меня без всяких сведений о себе ⟨. . .⟩. Ты обещала написать мне подробное письмо, в котором хочешь сообщить обо всем, что Ты пережила и делала за последние три года, если только увидишь из моего ответа, что мое отношение к Тебе не переменилось. Могла ли Ты хотя бы на мгновение поверить этому, милая Соня? [74, с. 218].

За эти годы Вейерштрасс лишь два раза слышал о Ковалевской от Миттаг-Леффлера и от Борхардта, которому Чебышев сказал, что она бросила занятия математикой. Г. Миттаг-Леффлер приезжал в Петербург 10 февраля 1876 г. По поручению Вейерштрасса он навестил Ковалевскую, которая его очаровала и как женщина, и как ученая. Она «отличается редкой ясностью и точностью выражений и исключительно быстрой сообразительностью. Нетрудно убедиться в глубине, какой она достигла в своих занятиях, и я вполне понимаю, что Вейерштрасс считает ее лучшим из своих учеников», — писал Миттаг-Леффлер профессору Мальмстену [110, с. 172].

После этого отступления вернемся к письму Вейерштрасса. В нем он начинает с того, что говорит о себе. За последние три года у него не было серьезных недомоганий. Но он начинает чувствовать, что двухчасовая лекция его утомляет, так что после обеда ему приходится отдыхать. Много времени он уделяет подготовке к лекциям. Он проработал коечто по введению в анализ и по вариационному исчислению. В последнем семестре, летом 1878 г., он впервые читал курс «Применение теории абелевых функций к решению избранных геометрических задач». Этот двухчасовой курс читался им privatissime и gratis, т. е. бесплатно. По-видимому, такой курс был прочитан всего один раз.

Собственные исследования Вейерштрасса за последние годы относились к $2n$-периодическим функциям, правильнее — к системам n функций от n аргументов, для которых существует алгебраическая теорема сложения. Он уже собирается напечатать их. Менее счастлив он был в исследованиях решения динамической задачи путем разложения в ряды.

Вопросы, затронутые Ковалевской в ее письме, Вейерштрасс пока отказывался рассматривать, так как предварительно должен ознакомиться с соответствующей литературой. Неизвестно, о каких задачах идет речь, по-видимому, о таких, которыми занимались русские ученые, так как Вейерштрасс просит указать ему литературу не на одном только русском языке.

Но опять наступила пауза в переписке, на этот раз двухлетняя. У Софьи Васильевны 17 октября 1878 г. родилась дочка Софья (в семье ее называли Фуфой), после чего Софья Васильевна долго болела. В заботах о ребенке она совсем перестала думать о математике.

Из этого состояния ее вывел Чебышев, предложивший ей сделать доклад на Съезде русских естествоиспытателей и врачей, состоявшемся в Петербурге в начале 1880 г.

Софья Васильевна радостно откликнулась на предложение Чебышева. В одну ночь она подготовила к докладу свою неопубликованную еще работу об абелевых интегралах, прочла ее на съезде, где произвела хорошее впечатление.

Весной 1880 г. при новом, более либеральном, чем старый, министре просвещения Софья Васильевна опять возбудила ходатайство о допуске к сдаче магистерских экзаменов и стала, второй раз уже, к ним готовиться. Но ей опять было отказано. Между тем Софьей Васильевной все сильнее стала овладевать мысль о возвращении к науке. Осенью 1880 г. Владимир Онуфриевич собирался за границу по делам рагозинского общества. Софья Васильевна также решила поехать в Берлин, оставив Фуфу на попечение Юлии Лермонтовой и преданной ребенку няни. Она написала Вейерштрассу письмо, на которое он ответил 28 октября 1880 г.: «Прежде всего, милый друг, Ты можешь быть уверена в том, что я буду сердечно рад снова увидеться с Тобой после столь долгой разлуки». Однако на такие занятия, которые он когда-то проводил с нею, теперь ей нельзя рассчитывать, так как он будет сильно занят. Он подробно описывает, чем именно будет занят, об этом мы говорили уже раньше. О своем здоровье он пишет, что оно прошедшей весной было неважным: он перенес серьезное воспаление легких и болезнь печени (желчная лихорадка). Он взял на лето отпуск и жил до августа за городом, а потом в Швейцарии. Теперь здоровье восстановилось, но лекции (при 150 слушателях) его несколько утомляют.

Вейерштрасс не успел получить ответа на письмо, как Соня приехала в Берлин (31 октября 1880 г.). Вейерштрасс сразу же посылает ей записку, что навестит ее после обеда, а пока шлет сердечный привет и лучшие пожелания по случаю ее приезда.

Софья Васильевна в самом начале января 1881 г. уже была в России, куда должен был вернуться Владимир Онуфриевич. Она послала своему учителю в Берлин письмо 6 января, он ответил ей 1 февраля 1881 г. Вейерштрасс видит, что она не совсем неудовлетворена своим пребыванием в Берлине, хотя он не мог уделить ей столько времени, сколько хотел бы. Беседы в Берлине велись по поводу задачи, которой начала заниматься Софья Васильевна, — о преломлении света в кристаллах. Вейерштрасс дал своей ученице на время рукопись о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Она должна была применить их в задаче о свете в кристаллической среде. По-видимому, он просил вернуть рукопись к 24 января, чего Софья Васильевна не сделала. Из этого Вейерштрасс заключает, что она еще мало продвинулась в работе. Но он просит ее не смущаться, если эта трудная задача на первых порах оказывает ей упорное сопротивление.

Впоследствии С. В. Ковалевская вставила статью Вейерштрасса об интегрировании линейных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами в качестве первого параграфа в свою работу о преломлении света в кристаллах со ссылкой на Вейерштрасса, а потом эта статья была издана отдельно в первом томе «Собрания трудов» Вейерштрасса [1, с. 275—295].

Со времени отъезда Софьи Васильевны Вейерштрасс упорно работал над линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, встречающимися в аналитической механике (уравнения Гамильтона):

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}},$$

$$\frac{dx_{n+\alpha}}{dt}=-\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

знакопостоянная для всех действительных t, x_1, . . ., x_{2n} функция

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n})=\sum_{\lambda,\,\mu} F_{\lambda\mu}(t)\, x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots, 2n)$$

имеет коэффициенты, состоящие из членов вида

$$A\cos(\nu_1 a_1+\nu_2 a_2+\cdots)t+B\sin(\nu_1 a_1+\nu_2 a_2+\cdots)t,$$

где ν_1, ν_2, . . . — целые, положительные или отрицательные числа.

Тогда наиболее общие выражения x_1, x_2, . . ., x_{2n}, удовлетворяющие этим уравнениям, имеют вид

$$x_\lambda=\sum_\rho \{f_{\lambda\rho}(t)\cos m_\rho t+f'_{\lambda\rho}(t)\sin m_\rho t\} \qquad (\lambda=1,\ 2, \ldots,\ 2n),$$

причем $\rho \leqslant n$ и величины m_ρ, вообще говоря, не зависят от a_1, a_2, . . .

Вейерштрасс строго доказал высказанную теорему только для случая, когда все a_k, кроме одного, равны нулю. Он добавляет, что если бы ему удалось справиться с этими уравнениями, то он справился бы и с уравнениями, определяющими пути планет. «Я больше чем уверен в том, что все испробованные до сих пор способы их интегрирования не могут привести к цели» [74, с. 224].

Через месяц, 6 марта 1881 г., не получив еще ответа на свое предыдущее письмо и думая, что, может быть, в этом виновата почта (бывали уже случаи большой задержки писем), Вейерштрасс пишет Софье Васильевне письмо, в котором кратко рассказывает о своей работе. В этом году он был прилежен, но без соответствующего результата. Присутствие Софьи Васильевны около него побудило его возобновить старые исследования по интегрированию дифференциальных уравнений динамики. Он все больше убеждается в том, что здесь надо идти какими-то иными путями, но они представляются ему только в тумане. «Если бы я имел здесь кого-нибудь, с кем можно было бы ежедневно говорить о моих попытках, то, пожалуй, многое стало бы мне более ясным», — говорит Вейерштрасс [74, с. 225].

Во время пасхальных каникул, которые начнутся с 15 марта, Вейерштрасс будет писать работу по однозначным аналитическим функциям, о чем, в частности, его настойчиво просят во Франции, — по-видимому, Эрмит. Он хочет этой работой дать своим слушателям что-то, что компенсировало бы им сокращение числа часов лекций. Действительно, если раньше на курс «Введение в теорию аналитических функций» он отводил шесть часов в неделю, то на два семестра 1881 г. Вейерштрассом был объявлен пятичасовой курс. Однако весной из-за болезни он не был прочитан.

Вейерштрасс дорожит своими исследованиями по теории однозначных функций, в особенности потому, что они указали молодым математикам путь в этом направлении, «что является наилучшим успехом, какого может себе пожелать учитель и писатель» [74, с. 225]. Интересные исследования, примыкающие к его работам, провели Миттаг-Леффлер, Пикар и Жюль Таннери. Последний придумал более простой, чем у Вейерштрасса, пример функции, принимающей в различных областях различные значения, а именно ряд

$$\psi(x)=\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{2x^4}{x^8-1}+\frac{2x^8}{x^{16}-1}+\ldots,$$

сумма n первых членов которого равна

$$\frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

откуда при $n\to\infty$ получается

$$\psi(x)=1 \quad \text{при} \quad |x|<1, \qquad \psi(x)=-1 \quad \text{при} \quad |x|>1.$$

Вейерштрасс жаждет знать, насколько его ученица продвинулась в своей работе.

Во всех письмах Вейерштрасс передает дружеский привет от своих сестер, а в некоторых напоминает об обещании Софьи Васильевны прислать им письмо на французском языке (что она, наконец, выполнила). Он вспоминает о рождественском подарке Софьи Васильевны — цветах, которые долго сохранялись благодаря хорошему уходу сестер.

После встречи с учителем Софья Васильевна была властно захвачена научными интересами. В ней просыпалось самолюбие человека, зарывшего свой талант и забывшего о своем назначении. Однако в Петербурге и в Москве (куда она приехала 8 января) она столкнулась с тем, что дела ее и мужа принимали мрачный оборот: Владимир Онуфриевич был должен правлению рагозинского общества значительную сумму.

Весной 1881 г. Софья Васильевна поспешно уехала в Берлин, взяв на этот раз с собою дочку и ее няню. Владимир Онуфриевич, проводив их, тотчас же отправился к брату в Одессу. М. В. Нечкина [135, с. 501] высказывает предположение, что поспешность выезда супругов была связана с боязнью репрессий, которым мог подвергнуться в то время любой человек, подозреваемый в нигилизме, — после убийства революционерами Александра II 1 марта 1881 г.

Вейерштрасс и его сестры пригласили Софью Васильевну с Фуфой провести с ними лето в Мариенбаде. Она согласилась поехать туда на две-три недели, «чтобы не обидеть старичков». Вернулась в Берлин она ненадолго, так как Владимир Онуфриевич вызвал ее в Париж, где он был по делам Рагозиных.

Через три месяца, 9-го июня 1881 г., Вейерштрасс пишет из дачного места Вильгельмсхёэ, близ Касселя, о том, что здесь парк, переходящий в прекрасный дикий массив, — один из лучших, которые он знает. Вблизи него — замок, относящийся к середине прошлого века. В Вильгельмсхёэ он ненадолго, проездом. Перед этим он побывал в Гёттингене, где пробыл 24 часа, и все они, кроме часов отдыха, были посвящены математике. Шварц задал ему огромное количество вопросов. Своим пребыванием в Гёттингене Вейерштрасс, как он считает, сэкономил время минимум на дюжину писем. Он беседовал с обоими Шерингами, отцом и сыном, и с любезной супругой старшего из них, а также с Хеттнером и Штерном. Последний, несмотря на свои 75 лет, проявляет большой интерес к работе Вейерштрасса о теореме Миттаг-Леффлера [35]. В университете Вейерштрассу показали коллекцию моделей, из которых его особенно заинтересовала модель поверхности с постоянной отрицательной кривизной, сконструированная по данным Бельтрами.

Все математики справлялись о Софье Васильевне и просили передать ей привет «любыми путями». Сам Вейерштрасс передает дружеский привет Фуфе (которой в то время не было еще трех лет).

Софья Васильевна была, как мы уже сказали, в Париже, с самого начала 1882 г. Ей пришлось там хлопотать, по поручению мужа, о каких-то делах, связанных с Рагозиными. В ее дневнике записано 30 января 1882 г., что она весь день писала процесс для адвоката, а вечером — письма Л. И. Рагозину, одному из членов общества минеральных масел, и Мариону — человеку, связанному с делами общества. А 31 января есть запись о ее приезде в Берлин.

По-видимому, в Берлине Софья Васильевна была только проездом, так как Вейерштрасс пишет ей 11 апреля 1882 г. (из Берлина), что прошло уже более четверти года со времени ее отъезда из Берлина. Ее письмо из Парижа взволновало его, так как показало, насколько ее захватили волнения и заботы, грозящие надолго помешать ее горячему желанию работать. «Как Твой искренний друг и духовный отец, я едва ли мог бы молчаливо пройти мимо того, о чем Ты сообщаешь намеками и что мне удалось понять», — пишет Вейерштрасс [74, с. 228].

О себе Вейерштрасс говорит, что он довел до конца свои лекции о гиперэллиптических функциях. Многие слушатели отнеслись к ним с интересом, а большинство прилежно выдержали их до конца. Много хлопот ему стоило издание трудов Штейнера.

Вейерштрасс был очень внимательным редактором. Так, при редактировании работ Штейнера он сделал вставку в них — собственное доказательство одной теоремы. Потом эта вставка была включена в «Собрание трудов» Вейерштрасса в виде статьи «Чисто геометрическое доказательство основной теоремы проективной геометрии» [50].

Труды Якоби для Вейерштрасса были интереснее, и их издание было менее обременительным. Кроме того, он писал в то время «не слишком обширный» обзор по теории абелевых трансцендент, основанный на тех же положениях, что и упомянутые лекции.

В конце письма Вейерштрасс выражает свое восхищение молодым поколением математиков Франции. «Обратила ли Ты внимание на последние работы Пуанкаре? — спрашивает он. — Это во всяком случае крупный математический талант <. . .> Исследования, начатые Пуанкаре в связи с работами Фукса, Шварца и Клейна, во всяком случае приведут к новым аналитическим трансцендентам <. . .> Только жаль, что Академия является слишком манящей целью для молодых французских исследователей. Каждую неделю представлять в «Comptes rendus» статью, действительно ценную, — это все-таки невозможно. Даже талантливый Пикар расточает свой талант таким образом, а Эрмит слишком поощряет эту беспокойную погоню за внешним успехом» [74, с. 230].

Следующее письмо настолько характерно для отношения Вейерштрасса к Ковалевской как ее друга и духовного отца, что я приведу целиком его первую четверть.

Берлин 14. 6. 82

Мой дорогой друг!

Меня очень огорчило, хотя и не удивило, все, что Ты сообщаешь в первой части Твоего долгожданного письма.

В действительности я уже давно догадался о настоящей причине Твоего продолжительного пребывания в Париже и Твоего абсолютного молчания. Достаточно было нескольких часов, в течение которых мне пришлось познакомиться с г-ном Ковалевским, чтобы убедить меня в том, что в Ваших отношениях есть внутренняя трещина, угрожающая их полным разрывом.

У него нет ни интереса, ни понимания Твоих идей и стремлений, а Ты не можешь сжиться с беспокойным течением его жизни. Ваши характеры слишком различны, чтобы Ты могла надеяться найти в нем то, что необходимо для счастливого брака, именно опору и поддержку, а он — получить в Твоем лице дополнение к собственному существу. В противном случае даже некоторые заблуждения с его стороны не помешали бы честному примирению.

Если я считал своим долгом возражать против Твоего плана — занять в Стокгольме место приват-доцента, в то время как он будет работать в своей должности в Москве, то это происходило из убеждения, что подобные отношения между супругами неестественны. Во всяком случае, меня нельзя разубедить в том, что подобный план никогда не пришел бы Тебе в голову, если бы Ты чувствовала себя внутренне связанной со своим мужем и любила бы его так, как хочет быть любимым каждый муж.

Я не могу упрекать его в том, что он отклонил Твой план, и, быть может, поэтому он еще больше вооружился против Твоих математических стремлений.

При теперешнем положении вещей ваши прежние взаимоотношения, по-видимому, стали невозможными. Я хотел бы только, чтобы все разрешилось так, чтобы Ты обрела свободу от волнений и забот, необходимую для Твоего существования. Ты должна как можно скорее выйти из Твоего теперешнего одиночества и иметь возле себя маленькую Соню [6]. Заботы о ней и наблюдение за ее развитием благотворным образом займут Твое время и будут Тебя радовать.

Выше я откровенно, без лишних фраз, высказал свою точку зрения. Благодарю за проявленное ко мне доверие. Я слишком хорошо знаю

---

[6] В июле уже девочка была у матери в Париже.

Тебя, чтобы навязывать какой-нибудь совет, и убежден, что Ты достаточно сильна, чтобы самостоятельно справиться со своей судьбой. Если Ты думаешь, что мой совет и моя поддержка могут быть так или иначе полезны Тебе, то ведь Ты знаешь, что ко мне Ты можешь обратиться без всякого смущения [74, с. 230].

В последующих частях этого очень длинного письма Вейерштрасс опять говорит о французских математиках. Эрмит написал ему о том, что познакомился с Софьей Васильевной и пришел в восторг от беседы с нею; он перечислил Вейерштрассу все затронутые во время беседы вопросы. Пуанкаре, по мнению Вейерштрасса, наиболее способный из молодых математиков. Его теоремы об алгебраических уравнениях с двумя переменными и линейных дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами открывают анализу новые пути, которые приведут к неожиданным результатам. Вейерштрасс высказывает свои соображения по поводу этих исследований. Он не знает, где помещены работы Пуанкаре, заинтересовавшие Софью Васильевну, по поводу системы уравнений $dx/X = dy/Y = dz/Z$, и просит сообщить ему это.

Что касается предложенного Пуанкаре метода интегрирования дифференциальных уравнений механики, то Вейерштрасс думал об этом две зимы тому назад и кое-что высказал по этому предмету на семинаре.

Далее в письме Вейерштрасс отвечает Софье Васильевне на вопрос, который ей задали Эрмит и Пикар по поводу $2r$-периодической функции от r переменных.

В заключение Вейерштрасс сообщает очень интересную и значительную новость: Ф. Линдеман во Фрейбурге доказал, что π есть трансцендентное число, путем обобщения теоремы Эрмита, посредством которой тот доказал трансцендентность e.

Через месяц, 15 июля 1882 г. Вейерштрасс пишет Ковалевской, что в первых числах августа он покинет Берлин на пять-шесть недель для лечения, так как его мучает боль в ноге при ходьбе — он не может двигаться дольше чем 20—25 минут. Врач должен определить, на какой курорт ему направиться: в Гастейн в Тироле, Рагац в Швейцарии или еще куда-нибудь.

О работе Линдемана Вейерштрасс пишет, что ее результаты правильны, однако вначале они были основаны на ложно понятой теореме и не доказаны им достаточно строго и теперь. Вейерштрасс пришел к вполне строгому и несложному доказательству теоремы (обобщение теоремы Эрмита):

«Если z_0, z_1, . . ., z_n отличны друг от друга, а N_0, N_1, . . ., N_n — произвольные алгебраические числа, то уравнение

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \ldots + N_n e^{z_n} = 0$$

может удовлетворяться лишь тогда, когда все N равны нулю» [74, с. 237].

Вейерштрасс опубликовал в 1885 г. статью об этой теореме под названием «К статье Линдемана „О числе Лудольфа“» [41].

В письме от 26 июля 1882 г. Вейерштрасс повторяет сообщение о болезни ноги и о своем намерении лечиться на курорте. Кроме того, он пишет кое-что о математиках: Ф. Шоттки получил профессорскую кафедру в политехникуме Цюриха. Вейерштрасс очень рад этому, так как оказался правым в оценке Шоттки, которого Куммер недооценивает. В докторской диссертации Шоттки есть много, что относится к области исследований Пуанкаре.

Вейерштрасс рекомендует Софье Васильевне принять любезно, если ей доведется с ним встретиться, своего ученика, эльзасца Ж. Молька. Заканчивается письмо сообщением, что сегодня Вейерштрасс ждет Г. Миттаг-Леффлера с женой и предвкушает удовольствие от этой встречи [74, с. 238].

В письме из Инсбрука (Тироль) от 3 августа 1882 г. Вейерштрасс сообщает, что он лечит расширенные вены ног в теплых источниках. Его сестры поедут 15 августа в Баден (близ Фрейбурга), куда он приедет после лечения.

В ближайшие дни он собирается заняться небольшой работой для журнала Миттаг-Леффлера, который на днях был у него с молодой женой, всем очень понравившейся. Все восхищались ее простым и элегантным платьем. Миттаг-Леффлер по существу сделал математическое турне: Страсбург, Гейдельберг, Гёттинген, Лейпциг, Галле, Берлин, Париж. Скоро к Софье Васильевне явится Мольк с переписанной для нее работой Вейерштрасса по вариационному исчислению.

Весной 1883 г. Софья Васильевна жила в Париже у своей приятельницы М. Янковской. Неожиданно она получила ужасное известие: 27 апреля ее муж Владимир Онуфриевич покончил с собой. Он не выдержал мучений, которые ему пришлось переносить в связи с возраставшей запутанностью его дел в рагозинском товариществе и угрозой предстоящего суда.

Софья Васильевна очень тяжело восприняла этот удар и заболела. Уединившись в своей комнате, она не принимала пищи и на пятый день лишилась сознания. Доктор, которого она отстраняла, теперь мог приступить к лечению. На шестой день она очнулась и, взяв карандаш и бумагу, принялась за математические вычисления. Ее друг, Мария Викентьевна Янковская, оказала ей большую поддержку.

Немного поправившись, чрезвычайно похудевшая, Софья Васильевна поехала в Берлин, где около учителя и его сестер несколько окрепла физически и духовно, и во второй половине августа вернулась в Россию.

Она получила предложение Г. Миттаг-Леффлера — переехать в Стокгольм для чтения лекций в новом Стокгольмском университете.

Софья Васильевна советуется с Вейерштрассом, который принимает живейшее участие в осуществлении проекта Миттаг-Леффлера о приглашении его ученицы на необычную для женщины роль — профессора математики в высшей школе. Он пишет Софье Васильевне 27 августа 1883 г. из курортного города Гранд Рив в Савойе, что написал Миттаг-Леффлеру письмо на пяти листах, четыре из которых посвящены ей. Он написал о ее работе по преломлению света в кристаллической среде, затем высказал свое мнение о том, как она должна начать свою педагогическую деятельность, чтобы не потерпеть неудачи. Нужно начать со специального курса, не более двух часов в неделю, чтобы иметь время для тщательной подготовки к лекциям.

Вейерштрасс жалуется на тяжелый характер Кронекера, с которым прежде хорошие отношения теперь ухудшаются. Он добавляет: «Что касается моих научных стремлений, я имею право сказать, что, как бы ни было мало их значение для развития науки, они всегда были посвящены служению ей. Но я давно отказался от того, чтобы искать того же отношения у моих старших коллег. Я обращался к молодежи и у нее находил понимание и воодушевляющее меня сочувствие» [74, с. 242].

Во втором письме из Гранд Рив, от 12 сентября 1883 г., в ответ на вопрос Софьи Васильевны: «Что же мне написать Миттаг-Леффлеру?» — Вейерштрасс приводит монолог Валленштейна из трагедии Шиллера «Смерть Валленштейна»:

Ужель в своих я действиях не волен?
Назад вернуться не могу? Поступок

Ужель свершить я должен потому,
Что думал я о нем?[7]

«Так бывает нередко, — поясняет Вейерштрасс, — мы вынашиваем какое-либо решение годами, думаем, что взвесили его со всех сторон, предусмотрели все возможные препятствия, затем наступает момент его осуществления, и вот возникают сомнения в правильности решения, в том, это ли то, чего мы хотели, достаточно ли взвесили свои силы и т. п.» Он советует написать Миттаг-Леффлеру, что она приедет, как только ее дела в России позволят это сделать. Но вначале не должно быть и речи о том, чтобы занять штатную должность. Для начала нужно прочесть лекции по какой-нибудь части математики, в которой Софья Васильевна сильна, нескольким молодым людям, которых подберет Миттаг-Леффлер. Она могла бы использовать работы самого Вейерштрасса, Миттаг-Леффлера, Пуанкаре. Ее задача будет нелегкой, так как у нее нет опыта преподавания. «Со мной было так же, — пишет он, — но слушатели зачтут даже начинающему доценту недостатки его лекций в актив, если убедятся в том, что преподнесенное им действительно имеет научную ценность» [74, с. 243].

Вейерштрасс твердо выступает в поддержку идеи Миттаг-Леффлера и говорит: «При создавшихся обстоятельствах я вижу, что на родине для Тебя нет места для плодотворной и удовлетворяющей Тебя деятельности. Поэтому у меня в большей части исчезли сомнения относительно Твоего плана переселиться в Стокгольм» [74, с. 243].

О себе Вейерштрасс пишет, что он послал Г. А. Шварцу этим летом письмо на восьми листах по теории общих комплексных чисел и тот хочет напечатать его в Ученых записках Гёттингена, поэтому вернул его обратно Вейерштрассу для окончательного просмотра. Статья Вейерштрасса «К теории комплексных величин, составленных из n главных единиц» была опубликована в 1884 г. [40].

В третьем письме из Гранд Рив, от 13 октября 1883 г., Вейерштрасс пишет, что чувствует себя хорошо, но совсем разленился, спит, как дитя. Он взял отпуск и собирается еще куда-нибудь поехать, в Ниццу или Монтрё. Он стыдится того, что не пишет Соне ничего математического, и был бы рад, если бы она побудила его к этому, ведь он три месяца ничего не читал (из-за болезни).

---

[7] У Вейерштрасса это написано так:

Wär's möglich? Könnt'ich nicht mehr, wie ich wollte?
. . .Ich müsste Die Tat vollbringen, weil ich sie gedacht?

Вейерштрасс выбрал городок во Франции Кларан, чтобы провести в нем свой отпуск. Его состояние начиная с осени не было удовлетворительным. Он очень страдал от сильного кашля и потому не переносил ветра и холода. Им овладела апатия, он был неспособен к работе и три месяца мог заниматься только корректурой. В последнее время он стал вновь чувствовать желание работать, но тут появилась новая неприятность — опухание ног, которое болезненно и требует лежания. Это особенно неприятно потому, что стоит прекрасная погода. «Но что поделаешь, — добавляет Вейерштрасс, — нужно терпеливо переносить недомогания, которые приходят с возрастом» [74, с. 245].

Софья Васильевна с 18 октября 1883 г. была в Стокгольме, и Вейерштрасс много говорит о лекциях, которые ей предстоит начать с 1884 г. Он пишет: «Итак, Ты перешла рубикон. Я не думал, что Ты решишься на это этой же зимой <. . .>. Важно, чтобы Ты создала надежную основу для Твоей будущей работы. То, что о Тебе предварительно так много говорили и продолжают говорить, нехорошо, это свойственно шведам. Этого не лишен даже наш добрый Миттаг-Леффлер» [74, с. 245]. На самом деле именно Миттаг-Леффлер создал рекламу Ковалевской. Газеты писали, что в Швецию приезжает «не какой-то пошлый принц крови», но «принцесса математики» [137, с. 116].

Вейерштрасс одобрил выбор курса для первых лекций Ковалевской — уравнения с частными производными. Но предварительно она должна дать понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Советует остановиться на уравнениях математической физики, в частности на внешне близких уравнениях

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

«большое различие в характере которых очень удивительно и поучительно» [74, с. 247].

Вейерштрасс вынужден ограничить себя размером письма, так как ему трудно писать из-за того, что он должен лежать. Он просит передать привет Миттаг-Леффлеру, скоро молодой коллега Хеттнер пошлет ему несколько экземпляров только что напечатанной работы Вейерштрасса об определении встречающейся в теории θ-функций величины q как функции k^2 [39].

В новом, 1884 г. Вейерштрасс желает своей ученице «не восхищений со стороны стокгольмских журналистов, но удовлетворения, которое обеспечивается серьезным стремлением и успешной работой человека» [74, с. 247].

Первые месяцы 1884 г., вероятно до 20 апреля, Вейерштрасс проводит в Кларане. Оттуда он посылает Ковалевской еще два письма, 15 января и 27 февраля. Письма «без математики», в которых опять говорится о ее преподавательской работе.

Софья Васильевна приготовила краткую заметку «О преломлении света в кристаллических средах» [133] и советовалась с Вейерштрассом, можно ли отправить ее Эрмиту для опубликования в «Comptes rendus», и Вейерштрасс благословляет ее на это.

Весной 1884 г. Ковалевская прочитала в качестве приват-доцента в Стокгольмской высшей школе курс по теории уравнений с частными производными. Аудитория состояла из 15 человек, в числе которых были доценты и сам Миттаг-Леффлер. Ковалевская предварительно записывала каждую лекцию и показывала ее Миттаг-Леффлеру. Первая лекция (запись ее рукою Ковалевской и переписанная Миттаг-Леффлером, так же как и другие лекции, сохранилась в архиве Миттаг-Леффлера) относилась к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве первого примера в ней приведено довольно замысловатое уравнение

$$e^{ax+b\,dx_1/dx} = cx + \partial \frac{dx_1}{dx}\ [8].$$

Вейерштрасс, как мы уже говорили, был в длительном отпуске и собирался начать свой курс лекций только в ноябре 1884 г.

Письмо от 12 сентября 1884 г. из Вильгельмсхёэ свидетельствует о том, что Вейерштрасс все еще болен, им владеет ужасная усталость, физическая и душевная, внушающая ему отвращение ко всякой умственной и письменной работе,— как мы уже говорили, врачи называли это усталостью мозга. Он вспоминает, как проводил лето: они с младшей сестрой Элизой ездили в Аугсбург, где находилась старшая сестра Клара. Там в течение нескольких недель у них была штаб-квартира, откуда они совершали экскурсии в Эвианские Альпы. Все летние курорты сильно переполнены, так как никто не поехал в Италию из-за холеры.

Следующее письмо из Вильгельмсхёэ, от 17 октября 1884 г., уже содержит математику, хотя Вейерштрасс лежит

---

[8] Я получила ксерокопию этой лекции благодаря любезности г-на Роджера Кука, за что выражаю ему благодарность.

С. В. Ковалевская, 1889 г.

в постели и пишет карандашом. Перед тем он долго не писал ей из-за ревматизма правой руки. А теперь — расширение вен правой ноги, которую поместили в резиновый бандаж и два раза в день массируют. Врач, однако, надеется, что на следующей неделе его пациент сможет выехать.

В математической части письма Вейерштрасс дает Софье Васильевне ряд советов по поводу оформления ее большой статьи о преломлении света: хотелось бы, чтобы она в качестве примеров привела простейшие уравнения математической физики. Он рекомендует некоторые изменения в записях формул в своей части, с которой будет начинаться статья. Впоследствии Вито Вольтерра обнаружил ошибку в статье Ковалевской, повторяющую ошибку Ламе (см. [133, с. 279]), но, по-видимому, Вейерштрасс во время подготовки Ковалевской статьи к печати был в таком состоянии, что не углублялся в ее содержание, а смотрел лишь на внешнюю сторону. Кроме того, ему хотелось, чтобы Софья Васильевна скорее опубликовала статью, что упрочило бы ее положение. Уже летом 1884 г. благодаря энергии Миттаг-Леффлера Софья Васильевна была утверждена штатным профессором Стокгольмской высшей школы, и теперь ей нужно было оправдать доверие. И Вейерштрасс пишет ей: «Твоей главной задачей должно быть быстрое окончание Твоей работы» [74, с. 254]. Статья Ковалевской была напечатана в «Acta mathematica» в 1885 г.

На зимних каникулах 1884/85 г. Софья Васильевна побывала в Берлине у Вейерштрасса. Он долго не отвечал на ее письмо, и, наконец, сделал это 24 марта 1885 г., обвиняя себя в лености.

Он рад успеху Ковалевской, у которой довольно много слушателей, и говорит: она на опыте узнает, что многие из них обладают доброй волей, но слабыми возможностями. Он добавляет: «Если бы можно было объединить вокруг себя кружок не более чем из 12 талантливых и хорошо подготовленных слушателей, одушевленных преданностью науке, тогда академическое преподавание было бы самым ценным и интересным занятием в мире» [74, с. 254].

Весной 1885 г. выяснилось, что профессор механики Стокгольмской высшей школы и Политехникума Я. Хольмгрен тяжело болен и вскоре встанет вопрос о его преемнике. Миттаг-Леффлер просит у Вейерштрасса совета по поводу возможного преподавателя. Тот обсуждает этот вопрос в письме к Ковалевской. По его мнению, желательно, чтобы такой человек нашелся в Швеции, Норвегии или Финляндии. Француз никогда не сможет научиться шведскому языку. Для немца это тоже было бы трудно, но он первое время может читать лекции на немецком языке. Раньше Вейерштрасс мог бы рекомендовать Генриха Герца в Киле, но того пригласили в политехникум в Карлсруэ, где есть прекрасный физический кабинет. А Герц не только теоретик, но и экспериментатор.

Вейерштрасс теперь интенсивно работает над математическими вопросами и сообщает Софье Васильевне, что он стал заниматься теорией функций с *действительными* аргументами (т. е. теорией функций действительного переменного), и обобщает понятие интеграла Римана, а именно: «Пусть $f(x)$ будет однозначной функцией действительного переменного x в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, причем между a и b может быть бесконечно много значений x, для которых она не определена, и счетное или несчетное множество точек разрыва непрерывности. Предполагается лишь, что в каждой сколь угодно малой части интервала (a, b) имеются точки, в которых функция определена, и что $f(x)$ ограничена. Тогда можно дать определение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, при котором все свойства интеграла, вытекающие из определения Коши и Римана, сохранятся.

Это можно вывести очень просто из введенного Кантором в 4-м томе «Acta mathematica» понятия меры произвольного множества точек» [74, с. 259]. Это значит, что Вейерштрасс подходит близко к интегралу Лебега. Далее Вейерштрасс рассматривает теорему:

Если в интервале (a, b) $f(x)$ всюду непрерывна и если $f_\nu(x)$ есть ряд Фурье с *конечным* числом членов:

$$f_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (A_\lambda \cos \lambda kx + B_\lambda \sin \lambda kx), \qquad k = \frac{2\pi}{b-a},$$

где n — целое число, возрастающее вместе с ν, то $f(x)$ всегда можно представить в виде

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu(x).$$

Тогда ряд будет сходиться во всем интервале (a, b) *абсолютно и равномерно*. Если же разложить в ряд Фурье выделенную линейную функцию от x и свести все члены двойного ряда, содержащие то же кратное λk, в один ряд, то получим обыкновенный ряд Фурье, который, однако, не всегда будет сходиться.

Если $f(x)$ будет неопределенной или не непрерывной в произвольном (может быть, бесконечно большом) числе точек, то приведенный двойной ряд будет представлять собой функцию во всех точках непрерывности и будет сходиться абсолютно и равномерно на каждом отрезке непрерывности.

Дальше Вейерштрасс говорит о тригонометрических рядах для непрерывных и разрывных функций, добавляя, что теперь это уже тривиально.

Вейерштрасс спрашивает о планах Софьи Васильевны на каникулы. Сам он в этом году хочет остаться дома, если врач не будет настаивать на курорте. Прошлогоднее путешествие, когда он шесть недель был вынужден лежать в Вильгельмсхёэ, отбило у него это желание. Он не знает, будет ли читать лекции зимой, но этим летом у него все идет хорошо, он читает примерно для 100 слушателей теорию эллиптических функций.

Осенью, 9 сентября 1885 г., Вейерштрасс пишет Софье Васильевне грустное письмо: он собирается покинуть Берлин. Ему очень хотелось бы поговорить со своим другом о том, что у него лежит на сердце, но он боится, что когда она приедет, то увидит уже, как он и сестры с большими муками занимаются упаковкой вещей. В конце июля он просил министра просвещения предоставить ему отпуск на неопределенный срок с сохранением всех прав, но еще не успел подать письменное заявление. А теперь министр в отъезде, поэтому возможно, что Вейерштрассу придется пробыть в Берлине весь октябрь.

О причинах такого решения Вейерштрасса Софье Васильевне известно. Основное — это поведение Кронекера, о чем мы уже говорили раньше.

Вейерштрасс радуется, что Софья Васильевна собирается взять свою малышку в Стокгольм, в особенности что с ними собирается приехать и Ю. В. Лермонтова (этот проект не состоялся).

Он посылает ей с Миттаг-Леффлером две свои статьи по теории функций действительного переменного [9], а за ними последуют еще две. В конце октября будет опубликована целая коллекция его старых работ по теории функций.

Возможно, что усиленное печатание работ Вейерштрасса было связано с предстоявшим 31 октября его юбилеем.

Мы уже писали о том, как проходило 70-летие Вейерштрасса. Здесь я только отмечу, что ни Ковалевская, ни Миттаг-Леффлер, много хлопотавший об оформлении номера «Acta mathematica» и о составлении хорошего адреса к этому юбилею, на чествование Вейерштрасса 31 октября не приехали. Ковалевская поступила легкомысленно, поздравив своего учителя на неделю позднее юбилея (конечно, под общим адресом ее подпись была). Великодушный Вейерштрасс писал ей 14 декабря 1885 г. из Мон Флери, куда он приехал отдохнуть после юбилея: «Мой дорогой друг! Ты ярая софистка. Являясь моей ученицей особого рода, Ты не пожелала 31 октября смешаться «со всей толпой», а предпочла дать о себе знать на неделю позже. Пожалуй, Ты вправе называться egregia [10]. Но не лучше ли было бы приветствовать старого друга раньше всех?» [74, с. 263].

Вейерштрасс жалеет, что Ковалевская не приехала; на своем торжестве он прочитал стихотворение, в котором говорится о женщине как носительнице красоты и истины, и в первую очередь такой женщиной была Софья Васильевна.

Вот это стихотворение:

«*Красота* есть тайна мира, что в искусстве вновь живет,
Изгони ее из жизни — с ней любовь навек умрет.
Вздрогнет все от отвращенья, ночь людей повергнет в страх,
И с последним из поэтов все погаснет в небесах».
Так сказал поэт. Ученых же бог вещий одарил
Пониманьем духа мира и гармонии светил:
Истина есть солнце, светом озаряющее все,
Благо высшее познанья им приносит бытие.
Все прекрасное, что людям сердце может обновить,
Все высокое, что в думах — прах наносный удалить,
В душах благородных женщин сплетено в венок один —
То любви уста вещают из сердец своих глубин [11].

---

[9] Эти две статьи были опубликованы в 1885 г. в «Acta mathematica» под общим названием «Об аналитической представимости так называемых произвольных функций действительного аргумента» [42].

[10] Избранная (лат.)

[11] Пер. автора. В оригинале стихотворение звучало так:
Schönheit ist das Weltgeheimnis das uns lockt in Bild und Wort,
«Wollt ihr sie dem Leben rauben, zieht mit ihr die Liebe fort.

Возможно, что торжественное и теплое празднование юбилея Вейерштрасса способствовало тому, что он перестал думать о том, чтобы окончательно покинуть Берлин. По уставу германских университетов 70-летний возраст дает профессору право, сохраняя звание, не читать больше лекций. Вейерштрасс на длительный срок уехал в Италию.

К 1886 г. относится только одно письмо Вейерштрасса, от 26 марта. Он опять нездоров и проводит время близ Монтрё в пансионате с видом на озеро и снежные горы Савойи. Занимается корректурами: пишет письма, т. е. «в сущности, не работает» [74, с. 266], но думает, что желание продуктивно работать появится. О Берлине у него мало сведений. Иногда пишет Фукс, у которого всегда кто-нибудь болен, иногда Кирхгоф и Ауверс — лаконичные люди. Кронекер совсем не пишет, правда, и Вейерштрасс ему тоже.

Вейерштрасс думает, что Ковалевская уже получила его работу о теореме Линдемана [41], а скоро получит и его работы по теории функций. На предстоящей художественной выставке в Берлине будет демонстрироваться бюст Вейерштрасса, выполненный к его юбилею.

Софья Васильевна в 1886 г. достигла большого успеха в своей работе о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки: она открыла новый случай интегрируемости. При решении задачи о вращении требуется проинтегрировать систему шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями: проекциями p, q, r мгновенной угловой скорости вращения на подвижные оси $0x$, $0y$, $0z$, неизменно связанные с телом и направленные по главным осям инерции, и с направляющими косинусами γ, γ', γ'' неподвижной оси $0Z$ по отношению к подвижным осям $0x$, $0y$, $0z$. Нужно найти общее решение системы, содержащее пять произвольных постоянных: шестая постоянная определяется из соотношения

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=l^2=1. \tag{1}$$

Was noch atmet, zuckt vor Abscheu, alles sinkt in Nacht und Graus,
Und des Himmels Lampen löschen mit dem letzten Dichter aus».
Also der Poët. Der Forscher, dem ein gütger Gott verlieh
Zu verstehn des Geistes Welten und der Sphären Harmonie,
Sagt uns: *Wahrheit* ist die Sonne, deren Licht das All erhellt,
Und des Wissens Gut das Höchste, was an Schätzen beut die Welt.
Alles Schönste aber, das des Menschen sehnend Herz beglückt,
Alles Höchste, das des Menschen Geist dem Erdenstaub entrückt,
Im Gemühte edler Frauen ist's vereint zu schönem Bund,
Daβ uns allen kund es werde durch der Liebe Zaubermund.

В общем случае известны три первых алгебраических интеграла системы; кроме (1), еще два: интеграл живой силы и интеграл площадей

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = C_1 = h, \qquad (2)$$

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2 = k. \qquad (3)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела относительно подвижных осей, M — масса тела, g — ускорение силы тяжести, (x_0, y_0, z_0) — координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат. Были известны два случая существования четвертого алгебраического интеграла: случай Эйлера, когда $x_0=y_0=z_0=0$, и случай Лагранжа, когда $A=B$, $x_0=y_0=0$. Долгое время новых случаев не было обнаружено, пока Ковалевская не нашла свой случай: $A=B=2C$, $z_0=0$. Четвертый алгебраический интеграл в случае Ковалевской имеет вид

$$[C(p^2-q^2)+Mgx_0]^2+[2Cpq-Mgx_0\gamma']^2=C_4. \qquad (4)$$

В случае Эйлера четвертый интеграл — значительно более простое соотношение:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=C_4,$$

а в случае Лагранжа совсем уже простое:

$$r=C_4.$$

Пятого интеграла не требуется, принцип последнего множителя позволяет получить соотношение, содержащее еще одну произвольную постоянную.

Для полного решения задачи нужно найти все величины $(p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma'')$ как функции времени. В случаях Эйлера и Лагранжа они выражаются через эллиптические функции. В случае Ковалевской задача получилась значительно более сложной и заставила Ковалевскую основательно потрудиться над ее полным решением, причем она проявила большое мастерство и умение обращаться с гиперэллиптическими фунциями.

Летом 1886 г. Ковалевская в Париже сделала доклад группе французских математиков об основных результатах своей задачи, и они решили выдвинуть задачу о вращении на конкурс Парижской академии наук на 1888 г. с формулировкой: «Усовершенствовать в каком-нибудь важном пункте теорию движения твердого тела», предложив Софье Васильевне участвовать в этом конкурсе. Весной и особенно летом

1888 г. она напряженно работала над задачей, выкладки к которой оказались огромными.

За 1887 г. от Вейерштрасса писем нет. Зимой он много болел и не читал объявленного курса вариационного исчисления.

Первое письмо 1888 г., от 22 марта, написано в ответ на письмо Ковалевской от 4 марта, в котором она просит у Вейерштрасса совета по поводу некоторых формул, встретившихся у нее в задаче о вращении. Вейерштрасс извиняется за задержку ответа, но говорит, что он не мог сразу ответить из-за нездоровья, только несколько дней тому назад ему разрешили попробовать заняться математикой. «Поэтому не могло быть и мысли о том, чтобы я мог как-либо помочь Тебе» [74, с. 268].

Вейерштрасс говорит, что верны обе формулы, полученные Ковалевской:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}-\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}=\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}},\qquad \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}=\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}},$$

где $R(x)$ — полином 5-й или 6-й степени, S_1 и S_2 — полиномы 3-й степени.

Он сожалеет, что Ковалевская не прислала ему вывод этих формул, и предлагает свой вариант. Затем он обсуждает уравнения, полученные Ковалевской для введенных ею вспомогательных переменных s_1, s_2:

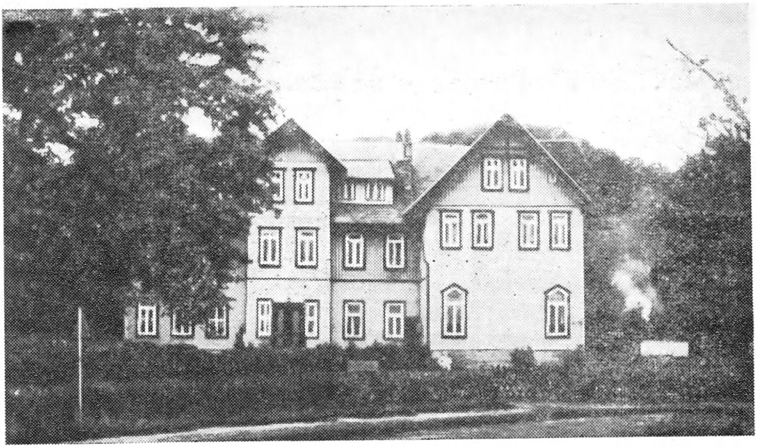
$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}-\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}=0,\qquad \frac{s_1ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}+\frac{s_2ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}=dt,$$

из которых t определяется как функция от s_1, s_2.

В приложении к письму дается вывод некоторых соотношений между (x_1, x_2) и (s_1, s_2), причем s_1, s_2 выражаются в эллиптических функциях Вейерштрасса: $s_1=\wp(u_1)$, $s_2=\wp(u_2)$.

Вейерштрасс кончает письмо выражением надежды, что на каникулах повидается с Соней. «Я хотел бы Тебе еще многое сказать. Будет ли это возможно, неизвестно. Истекшая зима очень сильно подорвала мои силы» [74, с. 271].

Через три месяца, 22 июня 1888 г., Вейерштрасс пишет, что опять плохо себя чувствовал и не смог ответить на два ее последних письма. Теперь он с сестрами 2 июля собирается в Вернигероде, в Гарце. Он хотел бы, чтобы Софья Васильевна приехала туда; от него, как математика, она получила бы мало, но могла бы отдохнуть, так как эта местность отличается очень здоровым воздухом. Отель считается хоро-



Отель в Вернигероде, где отдыхал Вейерштрасс. Лето, 1888 г.

шим, «в особенности для такой нетребовательной дамы, как Ты» [74, с. 275].

Так как истекал срок подачи работ на конкурс, то Вейерштрасс советует Ковалевской подать в Парижскую академию наук свою работу в виде, не вполне удовлетворяющем ее. Во время каникул, по мнению Эрмита, никто ее читать не будет, а осенью она сможет прислать второй вариант.

Вейерштрасс дает Ковалевской ряд советов по поводу ее формул, ссылаясь на диссертацию Хеноха «О периодах функций Абеля», относительно интегрирования уравнений

$$du_1 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}, \qquad du_2 = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}$$

и приводит ряд дифференциальных уравнений для введенных Ковалевской функций p_α, p_β, p_γ, $p_{\alpha\beta}, \ldots$, где

$$p_\alpha = \sqrt{\pm(x_1 - a_\alpha)(x_2 - a_\alpha)},$$

а $p_{\alpha\beta}$ — алгебраические функции от x_1, x_2, $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$.

По-видимому, Вейерштрасс считал возможным существование других случаев интегрируемости, кроме найденного Ковалевской; он пишет: «Исследование в самом общем виде задачи о зависимости, которая должна существовать между величинами A, B, C, x_0, y_0, z_0, чтобы, кроме двух известных интегралов (очевидно, Вейерштрасс исключает третий интеграл $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$) задачи о вращении, существовал еще третий алгебраический интеграл, достаточно интересно;

однако прежде нужно закончить начатую работу» [74, с. 278].

Третье письмо 1888 г., от 13 июля, послано Вейерштрассом из Вернигероде. Он радуется скорому приезду Ковалевской и пишет, что стал чувствовать себя бодрее и будет наблюдать за своей ученицей, чтобы она прилежно работала. «Не только для того, — добавляет он, — чтобы работа (которая у Тебя уже в руках) была закончена своевременно, но и чтобы она удовлетворяла всем требованиям по своей форме, от чего зависит многое» [74, с. 279].

Вейерштрасс дает Ковалевской совет во время ее пребывания в отеле в Вернигероде: «Тебе <. . .> будет целесообразно назвать свою фамилию с приставкой «фон», это значительно повлияет на обслуживание <. . .>. Ты хорошо сделаешь, если возьмешь с собой чай, так как здешний чай отвратителен, но шоколад вполне приемлем» [74, с. 279]. Он ждет, что летом его здесь навестят Миттаг-Леффлер и другие математики.

В конце июля Ковалевская была в Вернигероде, где вокруг ветерана Вейерштрасса собрались более молодые математики: Миттаг-Леффлер, Кантор, Шварц, Гурвиц, Хеттнер, Вольтерра. Ковалевская усердно трудилась над изложением своей работы. В сентябре Вейерштрасс переехал в городок Тале в Гарце, где пробыл несколько дней с Софьей Васильевной. Вейерштрасс чувствовал себя неважно. Он пробовал читать какую-то статью Пуанкаре, но не мог в ней разобраться, подозревая ошибку или незавершенность доказательства, что его раздражало.

По поводу исследований Ковалевской Вейерштрасс написал 16 августа 1888 г. Г. А. Шварцу [12] о том, что она хотела бы приложить к своей работе, посланной в Парижскую академию наук, модель своего случая вращающегося тела. Известно, что Шварц придумал такую модель и Ковалевская описала ее в конце своей первой статьи о вращении [133, с. 247].

В письме Шварцу Вейерштрасс говорит: «Фрау Ковалевская после многих неудавшихся попыток решить общую задачу о вращении поставила вопрос, при каких условиях девять косинусов α, β, γ, . . .[13] будут *однозначными* функциями времени. Кроме известных и исследованных случаев, она нашла, что существует еще один, очень специальный, но неожиданным образом трудный для исследования. Если

---

[12] Избранную часть этого письма мне сообщил профессор Роджер Кук, за что я выражаю ему большую благодарность.

[13] Имеются в виду косинусы углов Эйлера.

главные моменты инерции относительно центра тяжести вращающегося тела будут A, B, C, то новый случай имеет место, если

$$A = 2(B - C), \quad A > B, \quad B > C,$$

а неподвижная точка лежит на главной оси, соответствующей A, и ее расстояние от центра тяжести равно $(A-B)/M$, где M — масса тела. Величины α, β, . . . выражаются тогда через θ-функции двух аргументов, являющихся линейными функциями времени.

Это, по-видимому, первая значительная проблема механики, кроме очень остроумной надуманной задачи в докторской диссертации Е. Неймана[14] о движении материальной точки без внешних сил, вынужденной оставаться на поверхности второго порядка, которая решается в гипергеометрических функциях».

В цитируемом письме Вейерштрасс сообщает также, что Ковалевская попутно вывела, и притом более коротким путем, чем это сделал когда-то он, ряд формул для выражения $\wp u$, $\wp v$ через $\wp\,(u+v)$ и $\wp\,(u-v)$, $\wp\,(u/2)$ и $\wp'\,(u/2)$ через σ-функции и $\wp$-функцию.

Ковалевская 24 декабря 1888 г. получила премию Бордена Парижской академии наук. Ввиду особых достоинств работы премия была повышена с 3000 до 5000 франков. Вейерштрасс поздравил свою ученицу лишь в письме от 1 февраля 1889 г., объясняя запоздалость поздравления тем, что был болен и что она, как он полагал, «окруженная поклонением всего Парижа», не нуждается в этом. И Вейерштрасс пишет: «Нечего и говорить о том, что мы, т. е. прежде всего мои сестры и я, а затем и Твои друзья: находящиеся здесь Фукс, Хеттнер, Кноблаух, Гензель, П. Дюбуа и недавно возвратившийся Ханземан[15] — серьезно радовались Твоему успеху. Я испытывал особое удовлетворение от того, что, как это констатировали компетентные судьи, моя „верная ученица“, моя „слабость“ не является пустым хвастовством» [74, с. 280].

От Миттаг-Леффлера до Вейерштрасса дошли сведения о том, что в начале 1889 г. у Ковалевской были сильно расстроены нервы в связи с ее личными переживаниями, и он

---

[14] Инициал Е. ошибочен, речь идет о диссертации К. Неймана: *Neumann K.* De problemate quodam mechanico, quod ad primum integratium ultra-ellipticorum classem revocatur. Berlin, 1856.

[15] Г. Ханземан (1829—1902) был физиком, не занимавшим официального положения. Он вращался в кругу математиков и был в дружеских отношениях с Ковалевской.

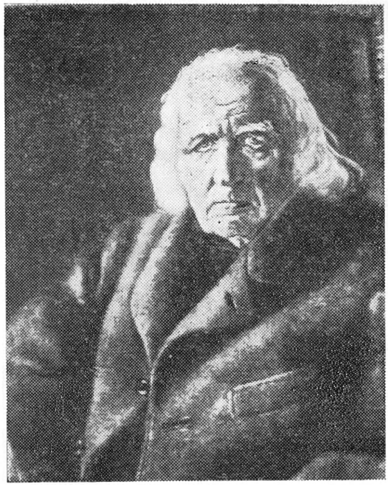
пишет 1 февраля 1889 г.: «Прежде всего Тебе необходимо укрепить здоровье. Я думаю, Ты страдаешь частью от чрезмерной работы, частью от волнений, которые Тебе пришлось пережить в это Твое пребывание в Париже. Я Тебе очень советую, когда Ты сможешь, не подвергая себя опасности, вернуться в Стокгольм» [74, с. 281]. В этом году кончался пятилетний срок утверждения Ковалевской профессором Стокгольмского университета, и Вейерштрасс боялся, что если она будет вдали от Стокгольма, то дело с ее утверждением на новый срок затянется.

«Было бы прекрасно, если бы Ты на обратном пути [т. е. из Парижа в Стокгольм] побывала в Берлине. Празднеств я Тебе не обещаю, но Ты этим принесла бы радость верным Тебе сердцам» [74, с. 281]. Оказывается, приемный сын Вейерштрасса Францхен, услышав, что тетя Соня получила большую премию, сказал, что теперь она привезет Фуфе прекрасные игрушки из Парижа.

Софья Васильевна упросила Миттаг-Леффлера исхлопотать ей отпуск на весенний семестр 1889 г. Причиной ее нервного расстройства была размолвка с Максимом Максимовичем Ковалевским. Впоследствии у них установились хорошие отношения и весной 1891 г. они решили пожениться, но смерть Ковалевской помешала этому.

Теперь, в начале 1889 г., произошло примирение С. В. и М. М. Ковалевских и Софья Васильевна стала думать о том, чтобы покинуть Стокгольм и жить в Париже. Она ничего не пишет Вейерштрассу, и он в письме 12 июня 1888 г. упрекает ее в этом, говоря: «Знаю, что не в Твоем характере в критические минуты жизни искать совета и поддержки у других, хотя бы они были самыми лучшими друзьями. Но как самый старший из Твоих друзей я считаю себя вправе и без Твоей просьбы советовать Тебе, предупреждать и объяснять Твои поступки, если я убежден, что Тебе угрожает опасность оказаться на пути, который может отвести Тебя в сторону от ясно намеченной цели Твоей жизни» [74, с. 281]. Он не рассчитывает на то, что Софья Васильевна сможет получить в Париже подходящую для нее должность. По его мнению, место в Высшей женской школе означало бы деградацию для нее, сказали бы, что она почувствовала себя слабой для университетской профессуры и тем самым «показала бы, что женщины непригодны как преподаватели и представители точных наук». Далее Вейерштрасс продолжает: «И все же когда-то (я думаю, что это так и сейчас) Твоим идеалом было доказать на деле несправедливость отстранения женщин от участия в высших стремлениях человека» [74, с. 281].

От Миттаг-Леффлера Вейерштрасс узнал, что Ковалевская наметила другой план — защитить докторскую диссертацию в Париже, чтобы открыть себе доступ на французский факультет. Но Вейерштрасс не думает, что это гарантирует ей получение должности. А главное: «Тот, кому присуждено звание доктора на каком-нибудь факультете, не может причинить этому факультету большей обиды, чем приняв ту же степень от другого факультета той же категории. При публичной защите берется даже клятва не делать этого» [74, с. 282]. Он полагает, что Гёттингенский университет может лишить ее диплома, а в Германии и Швеции произошел бы скандал и даже хорошо относящиеся к ней люди отвернулись бы от нее. Во всяком случае она ничего не должна предпринимать, пока ее не утвердят в Стокгольме на следующий срок.



К. Вейерштрасс, 1895 г.

Со здоровьем у Вейерштрасса неважно, с февраля он не может заниматься ничем серьезным. Ноги у него болят, как только он встает с дивана. Он просит Софью Васильевну передать нрилагаемое незапечатанное письмо Миттаг-Леффлеру, а если его уже нет в Париже, то содержание письма сообщить Пуанкаре.

Последнее письмо Вейерштрасса, стоящее в архиве Миттаг-Леффлера под номером 84 (есть еще ряд записок без даты, вплоть до номера 98), было написано 5 февраля 1890 г. Его он начинает с обращения: «Мой самый любимый друг!» — и говорит, начиная о себе, что больные люди — эгоисты. Он постоянно очень болеет, с конца ноября ни разу не выходил из дому. Четыре раза он страдал инфлюэнцей, как-то были спазмы в легком, очень встревожившие врача.

Ковалевская получила звание члена-корреспондента Петербургской академии наук, и Вейерштрасс пишет: «Теперь прими сердечное поздравление в связи с наградой, присужденной Тебе Петербургской академией. Она вполне заслужена. Я искренне радовался, что первая академическая почесть Тебе оказана именно в России» [74, с. 283]. Он просит Ковалевскую сообщить что-либо о ее успехе.

Одна вещь угнетает Вейерштрасса: он обещал написать подробный реферат о работе Пуанкаре, премированной в Стокгольме на конкурсе 1889 г. по случаю 60-летия короля Оскара II. Часть отзыва он давно написал, она находится у Миттаг-Леффлера (очевидно, эта часть отзыва и содержалась в предыдущем письме Вейерштрасса к Ковалевской с просьбой передать Миттаг-Леффлеру или Пуанкаре). Но закончить реферат он никак не может, так как у него появились сомнения в правильности и точности некоторых полученных Пуанкаре результатов. Затем вследствие болезни он был вынужден отложить работу. В настоящее время у него нет перспективы скоро заняться научными вопросами. От попытки обсуждать работу Пуанкаре с Фрагменом Вейерштрассу пришлось отказаться. Кроме того, он уже забыл то, что наметил. Поэтому он просит Ковалевскую поговорить с Миттаг-Леффлером о двух возможных выходах: или подождать, пока он напишет реферат, и напечатать его в «Acta mathematica», или опубликовать предварительную аннотацию Вейерштрасса, которая была представлена королю при присуждении премии. В аннотации была дана очень высокая оценка работы Пуанкаре.

Заканчивается письмо сердечным приветом Софье Васильевне, Фуфе и семье Миттаг-Леффлера, а также Фрагмену и просьбой скорее ответить.

На зимних каникулах 1890/91 г. Ковалевская была в Берлине. Возвращаясь в Стокгольм, она простудилась и заболела. Она попросила женщин, ухаживавших за нею, написать в Берлин Г. Ханземану такую записку: «Она [Соня] многократно приветствует Вас и желает, чтобы Вы ничего не говорили о ее болезни г-ну профессору Вейерштрассу, чтобы не обеспокоить его» [137, с. 259]. Умерла Софья Васильевна 10 февраля 1891 г. в расцвете сил, в возрасте 41 года. Вейерштрасс был так потрясен известием о кончине любимой ученицы, что близкие боялись за его жизнь. На гроб Ковалевской было возложено много венков. Один из них был из белых лилий с надписью «Соне от Вейерштрасса».

Глава 7

Вейерштрасс и иностранные ученые

Вейерштрасс встречался с иностранными учеными, когда они навещали его в Берлине, вел обширную переписку, читал их работы и откликался на них в печати. Оживленная переписка была с Эрмитом и Миттаг-Леффлером. Молодые ученые из разных стран приезжали в Берлин слушать лекции Вейерштрасса, участвовали в его семинарах, некоторые возвращались домой с темами для диссертаций, а иногда и готовыми диссертациями. Здесь мы расскажем о трех ученых, с которыми у Вейерштрасса было научное и личное общение, непосредственное — с Эрмитом и Миттаг-Леффлером и при посредничестве Ковалевской — с Чебышевым. Кроме того, пойдет речь о русских ученых, слушавших лекции Вейерштрасса и находившихся под влиянием его идей.

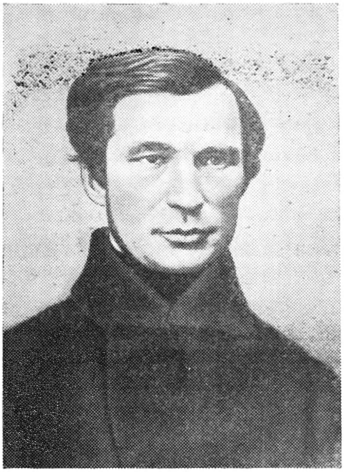
Вейерштрасс и Чебышев

Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) во второй половине XIX в. стоял во главе математиков в России. Такую роль в Германии играл К. Вейерштрасс, а во Франции — Шарль Эрмит.

П. Л. Чебышев обладал проницательным острым умом, его работы отличались богатством новых идей. Известны его исследования по интегрированию иррациональных дифференциалов, по теории наилучших приближений.

В конце 50-х годов установилось научное общение между тремя великими математиками. Вейерштрасс и Эрмит прочитали статью Чебышева 1857 г. об интегрировании иррациональных дифференциалов в журнале Лиувилля [120], и Вейерштрасс сразу, 26 февраля 1857 г., откликнулся на нее статьей «Об интегрировании алгебраических дифференциалов посредством логарифмов» [18]. Статья начинается словами: «Первая тетрадь этого года журнала Лиувилля (2-я серия, т. 2, с. 1) содержит статью г-на Чебышева, в которой развивается способ определения, будет ли дифференциал вида

$$\rho dx/\sqrt{R(x)}, \tag{1}$$



П. Л. Чебышев

где R — целая функция четвертой степени от x, а ρ — произвольная рациональная функция, интегрироваться через логарифмы или нет, и если имеет место первое, то содержит способ действительной интеграции» [18, с. 227].

Вейерштрасс напоминает теорему Абеля о том, что если интеграл (1), в котором ρ и R — полиномы любой степени, выражается через логарифмы, то это выражение имеет вид

$$\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

где p, q — также полиномы от x. При этом справедлива теорема: это возможно только тогда, когда цепная дробь, в которую разлагается $\sqrt{R}$, периодическая.

Опираясь именно на эти результаты, Чебышев рассматривает задачу для случая, когда $R(x)$ — полином 4-й степени, ρ — любая рациональная функция.

Вейерштрасс останавливается на интеграле вида ($F(x)$ — рациональная функция):

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

к которому путем простых подстановок может быть приведен любой интеграл вида, рассматриваемого Чебышевым. Вейерштрасс применяет подстановку

$$x=\operatorname{sn}^2 u, \qquad \frac{dx}{du}=2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = 2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}.$$

По теории Якоби в его книге «Fundamenta nova. . .» [96] преобразованный интеграл может быть представлен в виде

$$V_0+\alpha_1W_1+\alpha_2W_2+\cdots+\beta u+\gamma E(u), \tag{2}$$

где $E(u)$ — эллиптический интеграл 2-го рода.

Показано, что W_i представляется в виде

$$W_i=\frac{1}{2n_i}\log V_1+\varepsilon_i u,$$

где n_i — целые положительные числа, V_i — рациональные функции x и $\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}$, т. е. однозначные функции u с периодами $2K$ и $2K'i$. Для того чтобы в разложении (2) отсутствовали члены с u и $E(u)$, необходимо выполнение равенства

$$\gamma = 0, \quad \beta = -(\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots).$$

Вейерштрасс заканчивает статью заявлением о том, что у него есть некоторые результаты относительно интеграла

$$\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\,dx.$$

На появление работ Чебышева и Вейерштрасса быстро откликнулся Ш. Эрмит. Он написал Чебышеву письмо 27 июня 1858 г. [155, т. 5, с. 427], в котором сообщал о статье Вейерштрасса и французского математика Э. Руше на ту же тему — о приведении эллиптических интегралов. Эрмит считает, что Э. Руше недостаточно оценил значение работы Чебышева, и добавляет: «Эта теория принадлежит Вам в гораздо большей степени, чем это признает г-н Руше» [155, т. 5, с. 427].

Начав переписку с Чебышевым, Эрмит продолжал ее до самой смерти русского ученого. Десять его писем опубликовано в 5-м томе «Собрания трудов» Чебышева. В одном из первых писем он советует Чебышеву обратиться к более общим методам, основанным на применении эллиптических функций. Но Чебышев не мог принять этого совета, он пользовался «алгебраическим» методом, предоставляя другим, в первую очередь своему ученику Е. И. Золотареву, расширение задачи и метода ее решения.

Интересно, что Чебышев к концу жизни написал работу, где искусно применил эллиптические функции Якоби к приближенному вычислению интегралов. При этом до публикации он изложил содержание этой статьи в письме С. В. Ковалевской от 6 сентября 1889 г. [156]. По-видимому это единственная статья Чебышева с эллиптическими функциями. Она была опубликована в «Acta mathematica» вскоре после смерти Чебышева в 1894 г.

Вернемся к работам Чебышева о приведении эллиптических интегралов. Он исследует интеграл (1) после выделения из него алгебраической части. В статье 1857 г. [120] он рассматривает интеграл

$$\int \frac{x+\varkappa}{\sqrt{R(x)}}\,dx. \tag{3}$$

Чебышев говорит, что способ Абеля затруднен невозможностью убедиться в периодичности разложения $\sqrt{R}\ (x)$ в непрерывную дробь ввиду того, что число членов в периоде остается неопределенным, и задается целью: найти «методу, которая позволяет посредством конечного числа алгебраических действий или найти интеграл (3) при известной величине $\varkappa$, или убедиться, что интеграл этот в конечном виде невозможен ни при какой величине $\varkappa$» [120].

Когда Ковалевская по окончании занятий с Вейерштрассом в 1874 г. вернулась в Россию, ей приходилось беседовать с Чебышевым и другими математиками по поводу теории абелевых интегралов, которую русские математики считали скучной и не имеющей никаких приложений. В письме от 12 января 1875 г. Вейерштрасс пишет своей ученице: «Ты мне писала некоторое время тому назад, что Чебышев любит задавать Тебе вопросы, касающиеся интегрирования эллиптических дифференциалов. Это побудило меня снова заняться своей старой работой по этому предмету, чтобы изложить Тебе его, применяя знакомый Тебе метод и обозначения» [74, с. 201].

Вейерштрасс рассматривает интеграл Чебышева (3), несколько видоизменяя запись выражения для $R\ (x)$; он полагает

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

и получает для интеграла формулу, аналогичную формуле (8) (см. раздел «Лекции по теории эллиптических функций» в гл. V).

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)+\wp'(u_0)}{\wp(u)-\wp(u_0)} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}du$$

и, следовательно,

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\log\frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u)-\sigma(u_0)} + \left(\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)} - \varkappa + \frac{B}{A}\right)u\right\}.$$

Вейерштрасс добавляет, что он «не ставит целью дать метод интегрирования для случая, когда коэффициенты представляют числовые величины, но хочет алгебраически выразить все интегралы рассматриваемого вида и требуемых свойств» [74, с. 203].

Ученик Чебышева Е. И. Золотарев полностью решил задачу Чебышева в статье «О методе интегрирования г-на Чебышева». Золотарев пользуется эллиптическими функциями для преобразования интеграла (2) и применяет преобразование Ландена. Он находит способ определения при помощи конечного числа действий интегрируемости этого интеграла в логарифмах.

Вейерштрасс интересовался и более общей задачей, чем Чебышев, — о приведении гиперэллиптических интегралов к более простому виду. Он дал своему ученику Лео Кёнигсбергеру задачу о приведении интегралов второго ранга, т. е. с $R(x)$ — полиномом 5-й или 6-й степени, к интегралам низшего ранга, а С. В. Ковалевской — аналогичную задачу для абелевых интегралов 3-го ранга (для которых $R(x)$ — полином 7-й или 8-й степени) к эллиптическим интегралам, т. е. интегралам 1-го ранга.

После того как Ковалевская покинула Берлин, Вейерштрасс продолжал думать над задачей о приведении. В письме от 23 октября 1875 г. он написал своей ученице: «У меня есть прекрасная теорема о сведении интеграла любого ранга к интегралу низшего ранга, которая в достаточно общем виде составляет необходимый и достаточный критерий» [74, с. 217].

Свою статью о приведении абелевых интегралов С. В. Ковалевская решила опубликовать только в 1884 г., когда стала преподавать в Стокгольме. Пуанкаре узнал об этой работе от самой Ковалевской и прочитал ее в рукописи. У него сейчас же появились новые мысли по поводу двух теорем, сформулированных Вейерштрассом и приведенных у Ковалевской без доказательства. В том же 1884 г. Пуанкаре опубликовал две статьи под названием «О приведении абелевых интегралов» [111, т. 3, с. 339—351], где несколько обобщает теоремы Вейерштрасса и дает их доказательство. Он добавляет: возможно, что эти обобщения известны Вейерштрассу, но он, Пуанкаре, хочет опубликовать их вместе с доказательством. Опираясь на открытия Пикара, Пуанкаре также обобщает исследования самой Ковалевской.

Можно вспомнить о спорах по поводу абелевых интегралов и функций между С. В. Ковалевской и русскими математиками в гостях у Д. И. Менделеева осенью 1874 г. [137, с. 226]. Споры эти продолжались и потом: русские математики считали теорию абелевых функций и интегралов сухой и не имеющей приложений. Об этом Ковалевская писала Миттаг-Леффлеру в письме от 8 января 1881 г. [137, с. 228].

Но интерес Ковалевской к абелевым интегралам на этом не закончился. Ей суждено было в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки применить ультраэллиптические интегралы ($\rho=2$), являющиеся частным случаем абелевых интегралов.


Ш. Эрмит

Вейерштрасс и Эрмит

Знаменитый французский математик Шарль Эрмит (1822—1901) был в рассматриваемые нами годы главой математиков Франции [1]. Эрмит был в дружеских отношениях с учеными многих стран, в том числе с Вейерштрассом, Чебышевым и Миттаг-Леффлером.

Когда молодой Миттаг-Леффлер приехал в Париж для усовершенствования своего математического образования и обратился к Эрмиту, тот ему посоветовал ехать к Вейерштрассу, учеником которого он себя считал.

В письме к С. В. Ковалевской 27 января 1882 г. Эрмит говорит о группе французских математиков, «самым тесным образом связанных с немецкой наукой. Наш общий учитель — это г-н Вейерштрасс, и наши лекции в Сорбонне и Политехнической школе имеют главным образом целью изложить слушателям его труды и его великие открытия. К тому же и Вы, милостливая государыня, являетесь звеном симпатии между мной и великим геометром» [158, с. 654].

Ш. Эрмит играл большую интернациональную роль в математической среде того времени. Феликс Клейн говорит, что благодаря личному обаянию и обширной переписке Эрмит «был в течение ряда десятилетий одним из важнейших центров всего математического мира». Он старался «поднять математику выше того одностороннего национализма, который постепенно стал охватывать молодое французское поколение [132, с. 249].

Когда С. В. Ковалевская в самом начале 1882 г. приехала из Берлина в Париж, то по совету Вейерштрасса познакомилась с Ш. Эрмитом и между ними началась дружеская переписка. В письме от 21 апреля 1882 г. Эрмит сообщает, что

---

[1] См. о нем прекрасную книгу Е. П. Ожиговой: Шарль Эрмит. 1822—1901. Л.: Наука, 1982.

президент Франции подписал приказ о присвоении Вейерштрассу звания кавалера ордена Почетного Легиона. Эрмиту пришлось хлопотать об этом, что для него было тяжким делом: «Вы ведь знаете, — пишет он, — какой я дикарь, избегающий людей, дикий зверь, никогда не покидающий своей берлоги» [158, с. 657].

А. Пуанкаре

Но, очевидно, Эрмит избегал не всех людей, а только высокопоставленных, с математиками же он охотно общался и устно, и письменно.

Результаты его хлопот не удовлетворили Эрмита: он хотел, «чтобы великий геометр получил, как г-н Гельмгольц и г-н Кирхгоф, степень офицера, ввиду того что он по своей гениальности по меньшей мере равен им и занимает в науке такое же крупное положение, как и они» [Там же, с. 657].

Эрмит «с большим восторгом» написал Вейерштрассу о знакомстве с Ковалевской и перечислил все вопросы, которых они коснулись с ней в своей беседе (из письма Вейерштрасса от 14 июня 1882 г. [74, с. 231]).

Круг исследований Эрмита был очень широк. Он занимался вопросами алгебры, анализа, теории чисел, дифференциальных уравнений. В 1873 г. он доказал теорему: невозможно равенство

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \cdots + e^h N_n = 0,$$

если a, b, . . ., h, а также N, N_1, . . ., N_n — целые числа. Полагая $a=1$, $b=2$, . . ., $h=n$, он получает, что e не может быть корнем полинома. Этот блестящий результат вызвал восхищение всех математиков, в том числе и Вейерштрасса.

Вейерштрасс советовал Ковалевской познакомиться в Париже и с учениками Эрмита П. Аппелем, Э. Пикаром и А. Пуанкаре, причем он выделил Пуанкаре как наиболее талантливого. «Только бы он не рассеял свой исключительный талант и дал созреть своим исследованиям», — добавляет Вейерштрасс [74, с. 231]. Однако Пуанкаре иногда не давал созреть своим исследованиям в силу особенностей своей природы: его мысли забегали так далеко вперед, что он не

Э. Пикар

мог останавливаться на деталях.

Эрмит писал Ковалевской о своих талантливых учениках: «Г-н Пикар работает вовсю и печатает замечательные работы, как, впрочем и г-н Аппель и г-н Пуанкаре, и меня с чрезвычайной горечью упрекают, что я их слишком хвалю» [158, с. 656].

Эрмит много лет читал лекции по анализу, дополняя их все новыми появлявшимися в свет открытиями. Его «Курс анализа» много раз выходил на французском языке. В Советском Союзе был выпущен его перевод с четвертого французского издания.

После смерти Вейерштрасса Эрмит выступил с речью о нем на заседании Парижской академии наук [159].

Вейерштрасс и Миттаг-Леффлер

Отец Миттаг-Леффлера, Иоган Олаф Леффлер, был школьным учителем в Стокгольме. Гёста (Густав) Магнус Миттаг-Леффлер очень любил свою мать, Густаву Вильгельмину, урожденную Миттаг, и присоединил ее фамилию к фамилии отца, став Миттаг-Леффлером. Его сестра, Анна-Шарлотта Леффлер (1849—1892), писательница, дружила с С. В. Ковалевской. Из двух братьев Миттаг-Леффлера старший, Фриц Леффлер (1847—1921), был филологом и поэтом (он написал хорошее стихотворение на смерть Ковалевской), младший, Артур Леффлер (1854—1938), — инженером.

Математические способности у Миттаг-Леффлера обнаружились рано, в старших классах гимназии его освободили от уроков математики и он сам стал заниматься высшей математикой. Он учился в университете в Упсале, где в 1872 г. получил степень доктора и в том же году стал доцентом.

В 1873—1876 гг. Миттаг-Леффлер получал стипендию, чтобы совершенствоваться в математике за границей. Впоследствии, в 1900 г., на Втором международном математическом конгрессе в Париже Миттаг-Леффлер сделал доклад

«Страница из жизни Вейерштрасса», в котором вспоминал, что Эрмит посоветовал ему ехать к Вейерштрассу.

Посетив Гёттинген, Миттаг-Леффлер направился в Берлин, где в 1874 и 1875 гг. слушал лекции Вейерштрасса.

В письме профессору Яльмару Хольмгрену от 19 февраля 1875 г. Миттаг-Леффлер делится с ним своими впечатлениями от Берлина. Письмо опубликовано О. Фростманом в переводе на немецкий язык [88]. Приведем часть этого письма:

Г. Миттаг-Леффлер

Моим пребыванием в Берлине в научном отношении я очень доволен. Нигде я не нашел так много для изучения, как здесь. Вейерштрасс и Кронекер имеют необычное для Германии свойство избегать, насколько возможно, печатных публикаций. Вейерштрасс почти ничего не печатает, а Кронекер печатает только результаты без доказательств,

В лекциях они излагают результаты своих исследований. Едва ли может математика наших дней показать что-нибудь, что может сравниться с теорией функций Вейерштрасса или с алгеброй Кронекера.

Вейерштрасс излагает теорию функций в двух- или трехгодичном цикле лекций и строит на простейших и самых ясных понятиях полную теорию эллиптических функций и ее приложения к абелевым функциям, вариационному исчислению и т. д. Его систему характеризует преимущественно то, что она полностью аналитична. Геометрию он применяет редко и, если это случается, только для иллюстрации. Это кажется мне несомненным преимуществом перед школой Римана, так же как и Клебша.

В действительности хорошо известно, что, исходя из теории римановых поверхностей, можно совершенно строго построить теорию функций и что геометрическая система Римана достаточна, чтобы выяснить до сего времени неизвестные свойства абелевых функций, но, с другой стороны, она недостаточна, чтобы выяснить свойства трансцендент высшего порядка, — в противном случае элементы теории функций были бы введены также таким путем, который им полностью чужд <. . .>.

Другое свойство Вейерштрасса — он избегает всех общих определений и всех доказательств, которые относятся к функциям вообще. Для него функция есть степенной ряд, и из степенного ряда он выводит все. Это, однако, кажется мне в высшей степени трудным путем, и я не убежден, что вообще говоря, нельзя к этому прийти так, как Коши и Лиувилль, из общих и вполне строгих определений.

Как Вейерштрасс, так и Кронекер отличаются полнейшей ясностью и строгостью доказательств. В то же время они унаследовали от Гаусса страх перед всяким видом матафизики при установлении основных математических понятий, и это дает их выводам простоту и естественность, которые раньше едва ли вводились так систематически с такой высокой степенью строгости [88, с. 54].

Дальше Миттаг-Леффлер дает замечательную характеристику Вейерштрасса как лектора:

С совершенно формальной точки зрения, по крайней мере, способ чтения Вейерштрасса ниже всякой критики и даже самый незначительный французский математик был бы сочтен с такой лекцией полностью неспособным как преподаватель. Однако если кому-нибудь удается после большой и тяжелой работы привести лекцию Вейерштрасса к такому виду, в каком он ее задумал, тогда все становится ясным, простым и систематичным. Вероятно, этот удивительный недостаток формального таланта объясняет, что очень немногие из его многочисленных учеников понимают его полностью и что литература в развиваемом им направлении все еще так незначительна. Однако это не препятствует тому, что он пользуется почти идолопоклонническим почитанием [Там же, с. 55].

Когда Миттаг-Леффлер стал слушать лекции Вейерштрасса, великий ученый обратил на него внимание и отнесся к нему с симпатией. В письме от 15 августа 1878 г. Вейерштрасс пишет Ковалевской: «Миттаг-Леффлер был для меня очень приятным учеником; наряду с основательными знаниями он обладает удивительными способностями к усвоению предмета и умом, направленным к идеалу; я уверен, что общение с ним оказало бы на Тебя стимулирующее действие» [74, с. 218].

Далее Вейерштрасс говорит о положении Миттаг-Леффлера в Гельсингфорсском университете, находя его мало благоприятным: «Там идут дальше, чем где бы то ни было, в создании *национально-финской* математики, и так как за время пребывания там Леффлера в местных газетах в каждом семестре появляются передовые против математики Вейерштрасса, Леффлер допускает неосторожность, упоминая мое имя в своих лекциях и статьях чаще, чем это необходимо» [74, с. 218]. Из этих слов Вейерштрасса видно, что в Финляндии о высшей школе писали много в газетах. То же самое было и в шведских газетах.

Одно исследование Вейерштрасса было исходным для работы Миттаг-Леффлера, в результате чего возникла носящая его имя теорема. В письме от 16 декабря 1874 г. Вейерштрасс писал своей ученице, что в связи с лекциями он думает об одном пробеле в теории функций, о еще не решенном вопросе: «Если произвольно берется бесконечный ряд чисел a_1, a_2, . . ., ∞, то спрашивается, всегда ли будет существовать такая целая трансцендентная функция одного переменного x, что при $x=a_1, a_2, \ldots$ она исчезает, а при любом другом значении нет? <. . .> Для утвердительного ответа на этот вопрос оказывается необходимым условие, чтобы, как только n превысит определенный предел, a_n по своей абсолютной величине было больше произвольно заданной величины» [74, с. 191].

Вейерштрасс доказал и достаточность условия, представив искомую функцию в виде $\prod\limits_{\nu_n} \mathrm{E}\left(\frac{x}{a_{\nu_n}}\right)_{\nu_n}$, где ν_n — целое положительное, в частности $\nu_n = n$, а

$$\mathrm{E}(x)_{\nu_n} = (1-x)\exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\nu_n}}{\nu_n}\right).$$

Это *первичные множители*. Их открытие Пуанкаре считал главным вкладом Вейерштрасса в теорию функций (см. Приложение 1).

Вейерштрасс говорит, что доказательство элементарно и Ковалевская сама может провести его, пользуясь главой из ее «эллиптической тетради» об изображении целых трансцендентных функций в виде бесконечных произведений. Он присоединяет к высказанной теореме еще две и добавляет, что у него получилась «довольно хорошенькая статья», которую он третьего дня доложил в Берлинской академии наук и которая выйдет в декабрьском выпуске докладов академии. На самом деле статья вышла в 1876 г. под названием «К теории однозначных аналитических функций одного переменного» [32].

Высказанные в статье теоремы Вейерштрасс излагал еще летом, читая лекции по введению в теорию аналитических функций. О. Фростман пишет, что среди слушателей Вейерштрасса был Г. Миттаг-Леффлер и эти лекции побудили его поставить аналогичную проблему в случае, когда для функции рационального характера вместо нулей заданы «константы точек бесконечности» (главные части) [88]. Первое сообщение Миттаг-Леффлера на шведском языке было представлено в Шведскую академию наук 7 июня 1876 г. и опубликовано в том же году под длинным названием, начинающимся словами: «Метод аналитического представления функции рационального характера». В следующем году в финском журнале появилась статья «Аналитическое представление функции рационального характера с произвольно выбранной граничной точкой». В этих статьях дана теорема, носящая имя Миттаг-Леффлера, которая может быть сформулирована так:

«Для любой последовательности чисел β_n $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащих комплексной плоскости, не имеющей в ней предельных точек, существует мероморфная функция G с полюсами в точках β_n (и только в этих точках), главные части которой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $1/(z-\beta_n)$. При этом функция G может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечной) суммы мероморфных функций, каждая из которых имеет полюс только в одной точке» [141, т. 1, с. 266].

Теорема Миттаг-Леффлера заинтересовала Вейерштрасса, и он в 1880 г. написал статью «Об одной функционально-теоретической теореме г-на Миттаг-Леффлера» [35], которой привлек внимание к молодому ученому и где упрощал доказательство автора.

В 1880 г. всеобщий интерес математиков вызвала теорема Пикара, о которой Миттаг-Леффлер пишет Ковалевской 19 октября: «Знаете ли Вы весьма замечательный мемуар Э. Пикара «О целых функциях»? <. . .> Он там доказывает теорему о том, что *целая функция* — в смысле Вейерштрасса — $g(x)$, которая не принимает значений ни a, ни b, где a и b — конечные определенные числа, необходимо должна быть константой» [145, с. 21].

Речь идет о так называемой «малой» теореме Пикара, опубликованной в двух статьях «Comptes rendus». «Большая» его теорема, относящаяся к поведению целой функции в окрестности существенно особой точки (см. [140, с. 224]), напечатана там же. Миттаг-Леффлер говорит, что доказательство Пикара далеко не элементарно, оно предполагает значение $K'i/K$ как функции от k, и Вейерштрассу хотелось бы иметь элементарное доказательство.

Миттаг-Леффлер пытался дать более простое доказательство, но не смог. Просто получается у него лишь такой результат: «Если существует целая функция, которая не принимает значений нуль и единица, то найдется такая другая целая функция, которая не принимает ни одного из значений: 1, 1/2, . . ., $1/n$, . . .» [145, с. 21].

Миттаг-Леффлер в 1882 г. начал издавать журнал «Acta mathematica», получивший международное признание. Конечно, он хотел, чтобы Вейерштрасс стал автором. Вейерштрасс все давал обещание представить небольшую статью, но никак не мог собраться. Миттаг-Леффлер опубликовал в своем журнале в 1885 г. перевод на французский язык статей Вейерштрасса под общим названием «К теории эллиптических функций» [39]. Позже, уже в 1925 г., была опубликована в этом журнале статья Вейерштрасса «К теории функций» [75]. Миттаг-Леффлер продолжал дело Вейерштрасса построения теории аналитических функций.

В 1884 г., когда Ковалевская начала свою работу в университете Стокгольма, и до конца ее жизни Миттаг-Леффлер оставался неизменно ее другом, относившимся к ней так же по-братски, как и к своей сестре Анне-Шарлотте Леффлер, лишь на полтора года пережившей Ковалевскую. В кабинете Миттаг-Леффлера стояло два мраморных бюста: сестры и Сони Ковалевской, как называли Ковалевскую в Швеции

В 1916 г. Гёста Миттаг-Леффлер и его жена Сигне написали завещание, в котором передавали свою большую виллу в Дьюрсхольме, пригороде Стокгольма, а также прекрасную математическую библиотеку и значительное состояние Шведской королевской академии наук для организации института, который теперь носит их имя. Целью Миттаг-Леффлера было создание международного центра математических исследований и содействие развитию математики, особенно в скандинавских странах.

В 1968 г. из фонда Валленберга были выделены средства для постройки помещений около института, чтобы математики, приезжающие в институт, могли с удобством работать в нем и пользоваться его библиотекой и большим архивом.

В институте регулярно разрабатываются программы исследований, частично при поддержке правительств Швеции и Финляндии. Кроме «Acta mathematica», институт издает журнал «Arkiv för matematik». Долго директором института был профессор Л. Карлесон, иностранный почетный член Академии наук СССР. Сейчас институтом руководит профессор Л. Хёрмандер.

Русские ученики и последователи Вейерштрасса

Молодые русские ученые часто получали заграничные командировки, чтобы послушать лекции иностранных ученых или познакомиться с их педагогическим опытом, — как тогда писали, «с ученой целью для приготовления к профессорской деятельности».

Особенно много слушателей приезжало на лекции Вейерштрасса. Среди них были и русские ученые, их можно считать учениками Вейерштрасса. Бывало и так, что приехавшему в Берлин не удавалось прослушать курс Вейерштрасса, но он доставал запись его лекций, которые затем внимательно

Е. И. Золотарев

изучал. Некоторые потом писали книги или статьи с изложением идей Вейерштрасса, их развитием или переработкой доказательств. Для иных поездки за границу служили стимулом к тому, чтобы на своих лекциях излагать теорию эллиптических или абелевых функций. Вейерштрасс был учителем в широком смысле для многих.

Одним из первых русских ученых, кто во время заграничной командировки (в 1863 г.) слушал лекции Вейерштрасса, был петербургский математик Александр Николаевич Коркин (1837—1909). В 1863 г. он слушал также Куммера и Кронекера в Берлине, а годом раньше — Лиувилля и Бертрана в Париже [142].

Другой петербургский математик, приват-доцент А. В. Бессель (1839—1870), позднее профессор Новороссийского [2] университета, вернулся из заграничной командировки летом 1864 г. Он стал читать теорию эллиптических интегралов и функций, уделяя внимание и абелевым функциям. На его курсе отразилось близкое знакомство с исследованиями Вейерштрасса, лекции которого он посещал.

Егор Иванович Золотарев (1847—1878) был за границей два раза, в 1872 и 1876 гг. В первый раз в Берлине весной 1872 г. он слушал Куммера — высшую алгебру и Вейерштрасса — теорию аналитических функций и вариационное исчисление. Золотарев был хорошо знаком с работами Вейерштрасса и развивал исследования Чебышева, используя некоторые из работ Вейерштрасса.

Теперь расскажем о русских математиках, излагавших и развивавших теории Вейерштрасса в своих книгах.

Учеником и последователем Вейерштрасса был Матвей Александрович Тихомандрицкий (1844—1921). Он родился в Киеве. Его отец, Александр Никитич Тихомандрицкий, занимал кафедру чистой и прикладной математики в Киевском университете. В 1848 г. отец получил должность главного инспектора по учебной части Главного педагогического института в Петербурге. В средней школе М. А. Тихоман-

[2] Новороссийский университет был основан в 1865 г. в Одессе.

дрицкий находился под влиянием преподавателя Е. Ф. Сабинина, впоследствии профессора Новороссийского университета, исследователя в области вариационного исчисления. В 1861 г. Тихомандрицкий стал студентом математического отделения физико-математического факультета Петербургского университета. Из всех лекций, по его признанию, наибольшее впечатление произвели на него лекции О. И. Сомова, который читал дифференциальное исчисление, и П. Л. Чебышева, читавшего много курсов: интегрирование уравнений, определенные интегралы, вариационное исчисление, конечные разности, теорию вероятностей, теорию чисел. Сочинение Тихомандрицкого на заданную факультетом тему «О параболическом интерполировании» было удостоено золотой медали. Некоторое время он преподавал математику в реальном училище и был репетитором по анализу и механике в Институте инженеров путей сообщения.

В 1876 г. он получил степень магистра чистой математики за диссертацию «О гипергеометрических рядах», по которой официальными оппонентами были А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев, а неофициальными — П. Л. Чебышев, Ю. В. Сохоцкий и К. А. Поссе.

После этого Матвей Александрович читал в Петербургском университете лекции по эллиптическим функциям и по начертательной геометрии и одновременно — по аналитической геометрии на Бестужевских высших женских курсах.

Затем Тихомандрицкий переехал в Харьков, на должность штатного доцента в университете. Там ему представилась возможность получить заграничную командировку на 1883—1884 гг. в Лейпциг, Берлин и Париж. За границей он работал в математических семинарах и библиотеках, общался с различными учеными (Ф. Клейном, Л. Кронекером, К. Вейерштрассом, Ш. Эрмитом, Э. Пикаром), слушал особенно интересовавшие его лекции Вейерштрасса.

За полуторалетнюю командировку Тихомандрицкий написал докторскую диссертацию на тему «Обращение гиперэллиптических интегралов» и защитил ее в 1885 г. Это очень обстоятельное исследование, ясное по манере изложения, с введением понятия о римановых поверхностях.

В дальнейшем он поддерживал связи с иностранными учеными, печатался в заграничных журналах, ездил в заграничные командировки и на математические конгрессы. Так, он был на 2-м Интернациональном конгрессе математиков в Париже в 1900 г. и сделал там доклад о нулях θ-функций многих переменных. Болезнь жены заставила Матвея

Александровича поселиться в Крыму и выйти на пенсию. Но с сентября 1917 г. он принял деятельное участие в организации университета-здравницы на Южном берегу Крыма. Целью создания этого филиала Киевского университета было сохранить жизнь людей, преданных науке и страдающих туберкулезом. Вскоре университет из Ялты перевели в Симферополь и назвали Таврическим университетом. В. И. Смирнов, будущий академик, провел несколько лет в Симферополе.

Тихомандрицкий много преподавал и опубликовал много учебников: по высшей алгебре, теории конечных разностей, по курсу дифференциального и интегрального исчисления, по теории абелевых интегралов, эллиптических интегралов и функций, теории вероятностей. Некоторые из этих книг переиздавались, каждый раз расширяясь по содержанию.

После магистерской диссертации 1876 г. в 1883—1885 гг. он опубликовал ряд статей в харьковских журналах и в «Mathematische Annalen» (т. 22, 25) по теории эллиптических и гиперэллиптических интегралов, завершившихся в 1885 г. упомянутой докторской диссертацией. Итог своим исследованиям Тихомандрицкий подвел в книге [152], во втором издании дополненной и переведенной на французский язык. По поводу последней работы Поль Мансион писал в своем обзоре [152]: «В этой работе автор дает изложение прекрасной теории Вейерштрасса в простой форме, наиболее близкой к элементам анализа, и приводит способы, позволяющие глубоко изучить каждый частный случай; он прибегает к римановым поверхностям, так как они доставляют удобное средство указать пути интегрирования, о которых идет речь; но он не предполагает предшествующего знания этих поверхностей. Словом, для понимания его книги предполагается только знание высшей алгебры, элементов дифференциального и интегрального исчислений и теории функций комплексного переменного» [152, с. 4].

Из переписки Тихомандрицкого с французскими учеными видно, что они высоко ценили его работы. Так, по поводу одной статьи, которую он хотел опубликовать в французском журнале, Эрмит пишет 1 сентября 1892 г.:

«Согласно выраженному Вами желанию я обратился к г-ну Дарбу, и знаменитый геометр немедленно согласился опубликовать Вашу прекрасную научную статью в журнале „Annales de L'Ecole Normale Superieure", являющемся одним из наших первых научных сборников» [152, с. 5].

За книгу «Теория эллиптических функций и эллиптических интегралов» Тихомандрицкий получил премию имени В. Я. Буняковского Петербургской академии наук. Профессор А. В. Васильев писал в отзыве 4 декабря 1891 г.: «Работа эта, представляющая ценный вклад в литературу вопроса, резюмирует многие исследования Матвея Александровича по теории эллиптических интегралов и функций, отдельно появившихся в различных русских и иностранных математических журналах, представляет собой едва ли не первый опыт в русской научной литературе систематического изложения теории эллиптических функций Вейерштрасса, являясь, по нашему мнению, настольной книгой для всякого, изучающего эту имеющую столь обширные практические применения область анализа» [Там же, с. 5].

Дальше А. В. Васильев говорит, что книга М. А. Тихомандрицкого выгодно отличается от «Трактата по теории эллиптических функций» Альфана большей систематичностью изложения теории в том направлении Вейерштрасса, которое позволяет дальнейшее обобщение на случай высших трансцендент — гиперэллиптических и абелевых: «В основании этого метода лежит одно тождество, выведенное Вейерштрассом, причем при выводе следствий из этого тождества автор пользуется тем наглядным пособием, которое доставляют римановы поверхности», — добавляет А. В. Васильев.

М. А. Тихомандрицкий написал ряд биографических очерков о русских математиках.

Александр Васильевич Васильев (1853—1929) также был слушателем лекций Вейерштрасса и участником его семинара в 1882/83 г. Но научное направление он выбрал, следуя Л. Кронекеру, по высшей алгебре. В 1884 г., после заграничной поездки, он защитил докторскую диссертацию на тему «Теория отделения корней совокупных уравнений» и стал доцентом, а с 1887 г. — профессором Казанского университета, одним из основателей и председателем физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей, с 1890 г. — Казанского физико-математического общества. В 1907 г. А. В. Васильев переехал в Петербург и стал председателем математического общества. Он написал ряд научно-популярных книг: «Числовые суеверия» (Казань, 1886), «Из истории и философии понятия о целом положительном числе» (1891), «Математика» (1921), «Целое число» (Пг., 1919; 2-е изд., 1922) и т. д.

В Берлине А. В. Васильев познакомился с С. В. Ковалевской. Перед юбилеем Вейерштрасса (его 70-летием) она написала ему в Россию письмо с просьбой помочь собрать средства для чествования юбиляра. Васильев ответил в 1885 г. (без даты) письмом, в котором говорил:

Само собой разумеется, что Ваше лестное предложение принять участие в подписке на подарок Вейерштрассу мне как нельзя более приятно. Подумавши, я решился поступить следующим образом: напечатал воззвание, один из экземпляров которого я Вам прилагаю; я разослал его всем русским математикам, мне известным по имени, затем в каждом из университетских городов я просил кого-нибудь принять на себя более деятельное участие в подписке, в Петербурге — Сохоцкого, в Москве — Бугаева, в Киеве — Ермакова, в Одессе — Слешинского.

Деньги было бы неудобно пересылать ко мне в Казань, поэтому я просил пересылать их в Берлин профессору Фуксу. Но я думаю, что, кроме того, многим нашим соотечественникам будет всего приятнее послать деньги на подарок Вейерштрассу через его знаменитую русскую ученицу, и поэтому я осмелился выставить также адрес С. В. Ковалевской. Надеюсь, что она мне извинит это <. . .>. Через неделю я думаю послать деньги отсюда, пожертвованные нашим маленьким математическим обществом [137, с. 133].

Лекции Вейерштрасса слушал также Дмитрий Федорович Селиванов. Он делал доклад на семинаре Вейерштрасса. Однако в основном он занимался высшей алгеброй у Кронекера. Вернувшись в Россию в 1885 г., он защитил магистерскую диссертацию на тему: «Теория алгебраического решения уравнений», а потом, в 1889 г., — докторскую диссертацию «Об уравнениях пятой степени с целыми коэффициентами».

Селиванов был за границей в 1882—1884 гг. В архиве Миттаг-Леффлера сохранилось 11 писем Селиванова к Ковалевской. Первое из них, от 11 июля 1882 г., написано в Цюрихе, где он слушал лекции профессора Рудио, который хорошо излагал эллиптические функции по лекциям Вейерштрасса.

Из Берлина в 1883 г. Селиванов пишет Ковалевской о лекциях Вейерштрасса: «Нынешний семестр он читал великолепно, так ясно и просто, прелесть! Многое себе разъяснил, что у меня было в тумане» [137, с. 235]. Летом 1883 г. Ковалевская обратилась к Селиванову с просьбой прислать ей «формулы Шварца», рукописные лекции Вейерштрасса по теории абелевых функций и Кронекера — об абелевых уравнениях третьей степени. Селиванов отвечает ей 7 июня 1883 г., что у него пока еще нет хорошего переписчика.

Весной 1883 г. С. В. Ковалевская испытывала свои лекторские способности в небольшом кружке математиков, среди которых были Селиванов и Рунге. Осенью 24 ноября Селиванов, узнав, что она уже в Стокгольме, писал ей:

«Многоуважаемая Софья Васильевна! Ваше письмо всех нас очень обрадовало. Мечты Ваши сбылись, работа пойдет у Вас весело и оживленно [вероятно, так она шла в кружке математиков. — *П. К.*]. Вполне понимаю то наслаждение, когда передаешь свои познания другим. Однако только жаль, что Вы нам не будете излагать теорию преобразования функции θ» [137, с. 236].

Ковалевская собиралась пробыть в Берлине осень 1883 г., для того чтобы лучше подготовиться к чтению лекций в Стокгольме (тогда она, очевидно, собиралась прочитать в кружке математиков теорию θ-функций Вейерштрасса). Но этот план изменился, и 18 ноября 1883 г. Софья Васильевна приехала в Стокгольм.

Автору этой книги довелось слушать лекции и А. В. Васильева, и Д. Ф. Селиванова. У Васильева была довольно обычная для профессора внешность, у Селиванова же более оригинальная: рыжая курчавая бородка, более темные волосы, голубые глаза и тонкий нос с горбинкой. Происходил он из Пензы. Васильев начал читать курс синтетической геометрии, но бросил, не закончив его. Селиванов излагал нам на Бестужевских высших женских курсах высшую алгебру и теорию конечных разностей. Читал четко, ясно, всегда был безукоризненно одет, подтянут. Иногда делал вставки, вспоминая время своего ученья за границей.

К числу учеников Вейерштрасса относится киевский математик Василий Петрович Ермаков (1845—1922). Его отец, Петр Иванович Ермаков, из крестьян, был писарем в имении Паскевича, потом учителем церковно-приходской школы. Сначала В. П. Ермаков учился в той школе, где работал отец, потом перешел в Гомельскую, а затем Черниговскую гимназию. Окончив курс в 1864 г., он получил премию за сочинение. В том же году он поступил в Киевский университет на математическое отделение физико-математического факультета [126].

По окончании университета В. П. Ермаков был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию со стипендией в 600 руб в год. К концу 1870 г. он успешно сдал устные и письменные испытания на степень магистра.

В августе 1871 г. в Киеве происходил III съезд русских естествоиспытателей и врачей. На нем В. П. Ермаков сделал сообщение о новом признаке сходимости и расходимости рядов. Это открытие сделало его имя известным среди математиков. Признак сходимости Ермакова таков: ряд $f(0)+ +f(1)+f(2)+\ldots$ будет сходящимся, если отношение $[e^x f(e^x)]/f(x)$ с возрастанием x до бесконечности стремится к пределу, меньшему единицы, и расходящимся, если этот предел больше единицы.

На VII съезде русских естествоиспытателей и врачей в 1883 г. В. П. Ермаков развил эту тему в докладе «О сходимости рядов». На съезде он познакомился с С. В. Ковалевской. В дальнейшем он проявлял интерес к ее научным работам и на одном из заседаний физико-математического общества в 1890-е годы сделал доклад «О задаче Ковалевской». В нем он отметил удачу в применении Ковалевской методов теории аналитических функций в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки [126, с. 43].

В. П. Ермаков получил заграничную командировку с 1 октября 1871 г. на два года. Декан физико-математического факультета И. И. Рахманинов предложил ему съездить на десять дней в Петербург, чтобы посоветоваться с математиками по поводу намеченной программы заграничной поездки, согласно которой нужно было познакомиться с «теорией упругих тел» и теорией сопротивления материалов. После пребывания в Петербурге и бесед со столичными учеными планы В. П. Ермакова расширились и конкретизировались, получив более математический уклон.

В. П. Ермаков посетил Берлин, Гейдельберг и Париж. В Берлине он слушал лекции Гельмгольца по теоретической физике, других физиков — по теории света и теории звука, а также математиков Куммера и Кронекера; у Вейерштрасса он слушал лекции по абелевым функциям осенью 1871 г. и по вариационному исчислению весной 1872 г.

Вернувшись в Россию, В. П. Ермаков первое время занимался в основном теорией дифференциальных уравнений. Его магистерская диссертация носила название «Общая теория интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными и с постоянными коэффициентами». Он защитил ее 23 декабря 1873 г., получив высокие отзывы оппонентов П. Л. Чебышева и А. Н. Коркина. Докторская диссертация «Интегрирование дифференциальных уравнений механики» была защищена 13 сентября 1877 г., и вскоре В. П. Ермаков стал экстраординарным, а затем и ординарным профессором.

Диссертационные работы В. П. Ермакова не были непосредственно связаны с идеями Вейерштрасса, но как лектор он пользовался своим опытом ученика Вейерштрасса. В особенности это проявилось в вариационном исчислении, где результаты его преподавания и размышлений вылились в статьи «Вариационное исчисление в новом изложении» и

«Вариационное исчисление по Вейерштрассу», а потом были опубликованы во Франции в статье «Calcul des variations d'après Weierstrass» [126].

В. П. Ермаков отдал дань и теории Вейерштрасса абелевых функций, написав книгу «Теория абелевых функций без римановых поверхностей» [129]. Оригинальное заглавие этой книги объясняется тем, что В. П. Ермаков захотел «очистить» изложение М. А. Тихомандрицкого теории абелевых интегралов от поверхностей Римана и дать изложение целиком по Вейерштрассу.

У В. П. Ермакова были исследования и по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье «Разыскание критических точек в интегралах дифференциальных уравнений» развиваются исследования С. В. Ковалевской об условиях однозначности общих интегралов дифференциальных уравнений задачи о вращении тела вокруг неподвижной точки, а также анализируются результаты П. Пенлеве об условиях неподвижности критических точек в интегралах дифференциальных уравнений высшего порядка.

В. П. Ермаков был разносторонним ученым, он работал также в области механики, астрономии, методики математики. Любопытную характеристику его дал Андрей Белый, сын математика Н. В. Бугаева: «В Киеве есть математик — буян Ермаков, борода Черномора; и все-то воюет, кричит <. . .>. А в Москве математики тихие» [3].

Нужно заметить, что в Киевском университете много занимались теорией эллиптических и ультраэллиптических функций. Можно указать в этом направлении последователя Вейерштрасса, Петра Михайловича Покровского (1857—1901), воспитанника Московского университета, работавшего в Киеве. Он построил теорию ультраэллиптических функций, как и М. А. Тихомандрицкий, комбинируя методы Вейерштрасса и Римана. Им написана книга «Исторический очерк теории ультраэллиптических и абелевых функций» (М., 1886).

П. М. Покровский был одним из самых ревностных почитателей Вейерштрасса. Однако ему довелось увидеть великого математика лишь на склоне его лет, в 1889 г., когда Покровский получил годичную заграничную командировку. Вейерштрасс в это время болел и не читал теории абелевых функций, которая интересовала П. М. Покровского,

[3] *Белый Андрей.* На рубеже двух столетий. М.; Л., 1930, с. 58.

а в 1889 г. начал, но не прочел свой последний курс — вариационное исчисление. П. М. Покровский лишь один раз видел Вейерштрасса; престарелый Вейерштрасс произвел на него грустное впечатление.

П. М. Покровский работал в библиотеке Берлинского университета и познакомился с молодыми немецкими математиками, учениками Вейерштрасса. Они ввели его в число членов Немецкого математического общества, в библиотеке которого он нашел рукопись лекций Вейерштрасса по теории ультраэллиптических функций, читанных в 1887 г. Петр Михайлович переписал эти лекции и потом хранил их как реликвии.

В 1890 г. П. М. Покровский вернулся в Россию с готовой диссертацией «О преобразовании ультраэллиптических функций 1-го класса». Функциями первого класса называются функции, содержащие под знаком квадратного корня полином пятой или шестой степени.

П. М. Покровский скончался от туберкулеза в возрасте 44 лет.

Киевский профессор Борис Яковлевич Букреев (1859—1962) был слушателем лекций Вейерштрасса по теории абелевых функций и последователем его идей. Так, в 1887 г., еще до поездки за границу, он защитил магистерскую диссертацию «О разложении трансцендентной функции на частные дроби», в которой касается теории эллиптических функций Вейерштрасса. А через два года, очевидно после поездки за границу, он защищает докторскую диссертацию «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметричным основным полиномом» [131].

Е. М. Полищук, слушавший с 1933 по 1938 г. в Киевском университете лекции Б. Я. Букреева, вспоминает, что профессор часто рассказывал студентам о своем пребывании в Германии и говорил о посещении Вейерштрасса: «Вейерштрасс принимал нас в своем кабинете, лежа на кушетке, укрывшись пледом, — он страдал подагрой (на самом деле тромбофлебитом. — *П. К.*). Говорил тихим голосом, но очень отчетливо. Он позаботился, чтобы каждый из нас имел консультанта, и поручил меня Л. Фуксу».

В. Я. Букреев интересовался вопросами геометрии и теории функций, высшей алгеброй и дифференциальными уравнениями. Занимали его и вопросы преподавания элементарной математики. Он умер 103 лет, из которых более 75 посвятил научной и педагогической деятельности.

Ездил за границу и Николай Васильевич Бугаев (1837—

1903). В 1859 г. он окончил Московский университет, в 1863 г. защитил магистерскую диссертацию и сразу после защиты отправился за границу. В Берлине он слушал Куммера, Кронекера и Вейерштрасса, а в Париже — Лиувилля, Ламе и Дюамеля. В 1867 г. защитил докторскую диссертацию и стал профессором Московского университета. Он был одним из членов-учредителей Московского математического общества, а в 1891—1903 гг. его президентом. В 1897 г. Н. В. Бугаев был избран в члены-корреспонденты Петербургской академии наук. Специальностью его была теория чисел.

Борис Николаевич Бугаев, писавший под псевдонимом «Андрей Белый», в книге «Котик Летаев» пишет, что отец Котика (т. е. Н. В. Бугаев) был в переписке с Дарбу, что отвечает действительности. Он добавляет, что «Пуанкаре его (т. е. отца) любил, а Вейерштрассе [так!] не очень» [с. 174]. А. Белый изобразил своего отца в главе «Московский чудак» книги «Москва» (М., 1927).

Глава 8

О переписке Вейерштрасса

Вейерштрасс говорил, что его считают ленивым на писание писем. Частично он соглашался с этим, но полностью признать этого не мог. Действительно, когда он болел или был увлечен очередным математическим исследованием, он мог забыть о своем долге — отвечать на письма, которые некоторое время могли у него накапливаться. Но Вейерштрасс умел писать письма, и притом длинные. Так, его большое письмо Г. А. Шварцу о комплексных числах n единиц превратилось в статью, опубликованную Шварцем [40]. В процессе подготовки к печати трудов Штейнера помощник Вейерштрасса Киперт получил от него 25 писем и 15 записок [97]. Много писем, как мы знаем, написал Вейерштрасс своей ученице С. В. Ковалевской [124].

В 1912 г. Г. Миттаг-Леффлер в статье «К биографии Вейерштрасса» [108] начал публикацию писем Вейерштрасса. Это письма и извлечения из писем, относящиеся к задаче n тел, которые Вейерштрасс послал С. В. Ковалевской (извлечения из 6 писем 1875—1882 гг.) и Г. Миттаг-Леффлеру (извлечения из 12 писем 1883—1889 гг.). Здесь же приведен манускрипт Вейерштрасса об автономной системе дифференциальных уравнений, а также дана часть отзыва Вейерштрасса о работе Пуанкаре, получившей премию Оскара II.

В 1923 г. Миттаг-Леффлер опубликовал письма Вейерштрасса П. Дюбуа-Реймону [69], Л. Кёнигсбергеру [70], Л. Фуксу [72], одно письмо к Томé и часть письма Миттаг-Леффлеру — о задаче n тел [71]. Два письма Г. А. Шварцу опубликовал П. Дюгак [86]. В архиве Берлинской академии наук хранится переписка Вейерштрасса с Г. А. Шварцем, на которую ссылается ряд авторов (см., например, [81]).

Письма Вейерштрасса С. В. Ковалевской на немецком и в переводе на русский язык были опубликованы в 1973 г. [74]. Они уже цитировались нами неоднократно. Здесь же мы остановимся на других письмах.

Письма П. Дюбуа-Реймону. Поль Дюбуа-Реймон был профессором Гейдельбергского университета. В 1873 г. он послал в редакцию «Журнала чистой и прикладной математики», которой тогда руководил Борхардт, свою статью. Борхардт передал ее на редактирование Вейерштрассу, так как в статье фигурировала в качестве одного из примеров функция Вейерштрасса

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad (1)$$

не имеющая производной ни при каком x, если $ab > 1$.

Вейерштрасс пишет 23 ноября 1873 г. Дюбуа-Реймону, что он не нашел в его работе погрешностей, за исключением того, что необходимо небольшое пояснение в начале статьи, которое можно будет вставить в корректуре. Но он хочет сделать несколько замечаний, и прежде всего по истории вопроса.

Ф. Фробениус

В 1861 г. Риман показал некоторым своим слушателям пример непрерывной функции, не имеющей производной:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}. \qquad (2)$$

Однако Риман не указал, во всех ли точках она не имеет производной или только в некоторых, и не сообщил доказательства. Вейерштрасс знает уже давно, что можно построить функцию, которая в иррациональных точках имеет производную, а в рациональных — нет. В этом случае $f'(x)$ не является функцией в обычном смысле, но в смысле Римана и Дюбуа-Реймона является.

Интересно отметить, что на протяжении многих лет функцией Римана (2) занимался ряд математиков, которым удалось доказать, что эта функция не имеет производной для бесчисленного множества значений x определенного вида: $\frac{2p\pi}{4q+1}$, $\frac{(2p+1)\pi}{2(2q+1)}$ и всех иррациональных. Наконец, в 1970 г. Дж. Джервер [91] доказал, что функция Римана имеет производную в некоторых точках, а именно, в точках

$$x=\frac{(2p+1)\pi}{2q+1},$$

где p и q — целые, причем производная равна $-^1/_2$. А для $x=(2p+1)\,\pi/2^q$ Джервер показал, что нет производной [Там же].

После этого отступления вернемся к письму Вейерштрасса. По поводу своей функции, которую он представляет в записи Дюбуа-Реймона так:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(a^n x)}{b^n},$$

он замечает: «Легко доказать, что при $a/b>1$ для любого значения x оба выражения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

при бесконечно малом положительном значении h будут бесконечно большими. Но если хотим доказать, что представленные отношения приращений *не оба* приближаются к границе $+\infty$ или к границе $-\infty$, когда h становится бесконечно малым <. . .>, то для a/b нужно принять бо́льшую границу» [69, с. 200]. (В статье Вейерштрасса 1872 г. [30] считается $a/b>1+3\pi/2$.)

П. Дюбуа-Реймон принял во внимание замечание Вейерштрасса и вставил его в свою статью, так же как исторические указания на ошибки некоторых математиков (например, Ампера), пытавшихся доказать, что непрерывная функция всегда имеет производную.

В следующем письме (от 30 ноября 1873 г.) Вейерштрасс в ответ на просьбу Дюбуа-Реймона дать ему совет (вероятно, в связи с печатанием все той же работы) высказывает свои мысли о необходимости осторожной формулировки общих математических заключений и советует воздерживаться от дискуссий в научном журнале. «Теперь мы знаем функции, — пишет он, — с такими свойствами, о которых раньше не было ни малейшего подозрения, которые, как Вы сами говорите, противоречат всем нашим более ранним представлениям» [Там же, с. 201].

Вейерштрасс дает высокую оценку результатов Дюбуа Реймона по теории тригонометрических рядов, приведенных в его статье, подлежащей опубликованию, и выражает уверенность, что у Борхардта не будет замечаний по поводу нее.

В 1876 г. Дюбуа-Реймон доказал теорему о единственности разложения функции в тригонометрический ряд: если сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда интегрируема по Риману, то этот ряд является ее рядом Фурье.

По поводу обсуждавшейся статьи Дюбуа-Реймона Вейерштрасс замечает, что ему не понравилась в ней одна фраза: «Фурье оперирует таким способом, каким теперь даже начинающему не подобало бы» [69, с. 212].

Вейерштрассу такая фраза кажется проявлением непочтительности по отношению к Фурье, работы которого оказали неизмеримое влияние на науку, и «без Фурье не было бы Дирихле!» [69, с. 212].

По-видимому, Дюбуа-Реймон собирался выступить в печати по поводу одного неточного высказывания В. Л. Томе́. Вейерштрасс не советует этого делать: «Если нет абсолютной необходимости начинать с кем-нибудь полемику, предоставьте это течению. Большого вреда это не повлечет, а в дальнейших Ваших исследованиях <. . .> выяснится Ваша правота» [69, с. 211].

В недатированном письме и другом, от 20 апреля 1885 г., Вейерштрасс говорит о недостаточности понятия об определенном интеграле, данного Риманом. Этот же вопрос он обсуждает и в письме к Ковалевской от 16 мая 1885 г. В примечании 16 к письмам Вейерштрасса Дюбуа-Реймону Миттаг-Леффлер говорит о еще более общем определении Вейерштрассом определенного интеграла, записанного Шлезингером по лекциям 1886 г. Оно применимо к функции, обладающей свойством: в каждой сколь угодно малой части промежутка (a, b) есть точки, в которых функция определена [69, с. 225].

Три письма Вейерштрасса относятся к 1888 г., они написаны летом в Гарце, где Вейерштрасс отдыхал. В письме от 7 июля он вспоминает, как хорошо, по-дружески Дюбуа-Реймон навещал его в Берлине, и хочет выразить ему благодарность и послать привет, прежде чем он покинет Берлин. Своим пребыванием в Гарце Вейерштрасс доволен, голова стала уже более свободной, сон спокойнее, он может уже гулять по полтора часа в день. Его отель примитивен, но очень удачен: на широком балконе можно чувствовать себя как на воле. Пока еще у него мало посетителей, но скоро он ждет их и будет рад, если к ним присоединится и Дюбуа-Реймон.

Пока Вейерштрасс еще не работает, но перед тем был сильно занят в связи с премией имени шведского короля: на имя комиссии по премии пришло много работ и две из них достались на долю Вейерштрасса, остальные попали к Эрмиту и Миттаг-Леффлеру.

В Гарце будут рады Дюбуа-Реймону, и он встретит здесь интересных для него людей, в том числе Миттаг-Леффлера и Ковалевскую. Она приехала из Лондона и Парижа, брыз-

Г. А. Шварц

жущая прекрасным юмором, и по вечерам дает забавные описания ученого мира Стокгольма, Упсалы, Парижа и Лондона. Чебышев и Сильвестр доставляют ей богатый материал для забавных историй. При этом Сильвестр представляется «старым огурцом», который считает, что после Мильтона он единственный англичанин, который пишет хорошие сонеты [Там же, с. 221].

Последнее письмо Вейерштрасса Дюбуа-Реймону датировано 13 января 1889 г. Он пишет, что на прошлой неделе начал читать небольшой курс, на этот раз без особых затруднений, так что надеется на благополучное продолжение его. Это был последний курс Вейерштрасса, по вариационному исчислению, который он читал. В конце письма он просит Дюбуа-Реймона написать ему несколько строк или, еще лучше, присоединиться к его прогулке. У Вейерштрасса лекции по средам, четвергам и субботам, с 12 часов до часу.

Письма Л. Кёнигсбергеру. Первое письмо Вейерштрасса Кёнигсбергеру, от 22 октября 1864 г., относится к тому времени, когда тот занимался решением задачи, предложенной ему Вейерштрассом, о приведении абелевых интегралов 2-го ранга к эллиптическим. Вейерштрасс рассматривает гиперэллиптические интегралы и их связь с θ-функциями. Он прочитал статью Кёнигсбергера и нашел в ней описки.

Письмо от 25 октября 1870 г. мы уже цитировали, когда рассказывали о хлопотах Вейерштрасса в связи с допуском С. В. Ковалевской к слушанию его лекций.

В длинном письме от 10 февраля 1876 г. Вейерштрасс обсуждает вопрос о своей непрерывной функции, не имеющей производной, несколько обобщая его по сравнению с тем, что он писал в письме Дюбуа-Реймону. Он приводит также пример функции, не имеющей экстремумов и, однако, не дифференцируемой в бесчисленном множестве точек. Это ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \varphi(x - a_n)$$
$$(0 < k < 1),$$

где a_n — перенумерованные (по Кантору) алгебраические числа, а

$$\varphi(x) = x + \frac{x}{2} \sin\left[\frac{1}{2} \log(x^2)\right].$$

Л. Фукс

Письма Л. Фуксу были написаны Вейерштрассом в 1874 г. в связи с его хлопотами о присуждении Гёттингенским университетом ученой степени доктора С. В. Ковалевской. Лацарус Фукс (1833—1922) весной 1874 г. получил профессуру в Гёттингене, и Вейерштрасс обращается к нему за содействием. В книге [133] опубликованы четыре письма Вейерштрасса Фуксу в переводе на русский язык, поэтому я ограничусь приведением лишь одной выдержки из них.

В письме от 27 июня 1874 г. Вейерштрасс напоминает о том, что Гаусс на юбилейном торжестве Гёттингенского университета высказал сожаление, что уже нет в живых французской ученой Софи Жермен (1776—1831), «которая доказала миру, что и женщина может сделать в области абстрактных наук нечто дельное, и потому была бы вполне достойна почетного диплома» [72, с. 246]. Заметим, что С. Жермен в 1808 г. получила наполеоновскую премию за работу по теории упругости.

Письма Г. А. Шварцу. С Г. А. Шварцем у Вейерштрасса была постоянная переписка. В Архиве Академии наук ГДР, в фонде Г. А. Шварца, имеются письма Вейерштрасса, на которые делает ссылку К.-Р. Бирман [81]. П. Дюгак опубликовал выдержки из пяти писем Вейерштрасса Шварцу. Первое из них относится к концу 1874 г. (16 декабря), когда Вейерштрасс, а вслед за ним и другие математики были увлечены построением «странных» функций. Вейерштрасс пишет: «Чтобы иметь пример еще более пикантный, чем Ваш [4],

[4] Г. А. Шварц придумал пример непрерывной недифференцируемой функции [118, т. 2, с. 269].

некоторое время тому назад я придумал функцию с помощью канторова разложения в ряд алгебраических чисел, которая всюду <. . .> непрерывна, не имеет ни максимумов, ни минимумов и все же так капризна, что отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при неограниченном уменьшении h все время колеблется между двумя *конечными* границами, как скоро x является алгебраическим числом, и, напротив, ведет себя вполне разумно, если это трансцендентное число» [86, с. 140]. Очевидно, речь идет об указанной выше функции $f(x)$.

В письме от 28 мая 1885 г. Вейерштрасс говорит, что он работает над вторым, улучшенным изданием четырех лекций по теории функций, появившихся в 1877—1880 гг. [32, 36]. К ним он должен прибавить пятую главу, содержащую его «вероисповедание» в теории функций. Это составляет большой труд для него.

Кроме того, он скоро должен сдать свою работу о представлении произвольной функции тригонометрическим рядом [42]. С этим связаны важные мысли. Так, Вейерштрасс приходит к убеждению, что риманово определение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, которое обычно считают самым общим, не является ни достаточно общим, ни вообще допустимым. «Оно должно быть заменено другим, для обоснования которого мне существенную помощь оказали новые исследования Кантора (но не относящиеся к трансфинитным числам)» [86, с. 141].

По поводу замечания Вейерштрасса в скобках замечу, что теория трансфинитных чисел Г. Кантора была встречена математиками с сомнением. Жюль Таннери назвал ее «мистикой», Пуанкаре первое время считал плодом больного воображения. Миттаг-Леффлер, охотно печатавший статьи Кантора по теории множества, усомнился в том, стоит ли печатать уже набранную в печать статью о трансфинитных числах, и Кантор взял ее обратно (см. [145, с. 248]). Можно объяснить такое отношение тем, что Г. Кантор сопровождал свою статью пространным обещанием того, что его новые исследования помогут объяснить все законы мироздания и все явления природы.

В письме от 12 августа 1885 г. Вейерштрасс делится со своим учеником раздумьями о своей будущей жизни. Он пишет: «Я пришел к заключению, что мне отныне, — сколько лет мне еще суждено и сколько сил еще остается, — лучше отдаться исключительно научной работе. Деятельность в университете мне по многим причинам стала тягостной. О согласном взаимодействии с Кронекером нечего больше и думать» [86, с. 242].

В последнем письме, от 12 июня 1888 г., Вейерштрасс благодарит Шварца за присылку копии его рукописи 1884 г. и старой тетради лекций по дифференциальному исчислению, которые он потом вернет. Он отвечает на некоторые вопросы Шварца, а затем пишет о себе. В настоящее время здоровье не позволяет ему сердиться, хотя сердиться есть на что. Статья Кронекера «О последних работах Дирихле» (Журнал Крелле, 1888) — давно подготавливаемый выпад против него.

В статье Дюгака [86] приведены также выдержки, по большей части краткие, из шести писем Г. А. Шварца Вейерштрассу, с 1872 по 1892 г. В последнем письме Шварц сообщает, что принял предложение работать в Берлинском университете и скоро приедет в Берлин.

Письмо к Л. В. Томе́. Вильгельм Людвиг Томе (1841—1910) в 1865 г. получил ученую степень; Вейерштрасс был его первым рецензентом. Потом он получил профессуру в Грейфсвальде. В 1888 г. он прислал в «Journal für die reine und angewandte Mathematik» свою статью с критикой метода Пуанкаре интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Вейерштрасс как один из редакторов журнала (другим был Кронекер) прочитал статью и написал, что в таком виде она не может быть опубликована. В письме на имя Томе́ он разъясняет смысл работы Пуанкаре, в которой применялась теория *автоморфных*, или, как их раньше называли, по предложению Пуанкаре, *фуксовых* функций.

По-видимому, Томе́ считал, что по методу Пуанкаре нельзя определить показатели — корни некоторого уравнения. В письме Вейерштрасс разъясняет, как это можно сделать, и добавляет: «Я далек от того, чтобы думать, что предложенный путь определения этих экспонент самый прямой и простой <. . .> Мне только хочется убедить Вас в том, что Вы сделаете плохо, если будете отрицать значение теории Пуанкаре или захотите унизить ее, так как сейчас не очевидно, как она, надлежаще развитая, будет подходить для решения задачи, выполнение которого Вы правильно считаете крайне необходимым для теории линейных дифференциальных уравнений» [71, с. 244].

Статья Томе́ вышла в 1888 г., очевидно, в такой форме, какую Вейерштрасс принял. Так Вейерштрасс заботился о сохранении авторитета ученых.

Глава 9

Памятные даты

Столетие со дня рождения Вейерштрасса — 31 октября 1915 г. — пришлось на время первой мировой войны. Эта памятная дата была отмечена математиками Берлина на заседании Математического общества, где Э. Лампе сделал доклад [103].

В том же 1915 г. была установлена памятная доска на доме, в котором жил Вейерштрасс в последние десять лет своей жизни: Фридрих-Вильгельмштрассе, 14.

7 ноября 1915 г. село Остенфельде (близ Варендорфа, в Вестфалии), в котором родился Вейерштрасс, было по-праздничному украшено, собралась почти целиком вся община. От имени Рейн-Вестфальского общества точных наук выступил его представитель, обер-лейтенант Торхорст-Герне. Была установлена доска с надписью золотыми буквами: «В этом месте 31/X.1815 родился Карл Вейерштрасс, светило Берлинского университета» [105, с. 607].

Через десять лет в университетском городе Мюнстере решили посвятить 110-летию великого ученого научную сессию. Как мы уже говорили, в Мюнстере проявился огромный талант Вейерштрасса, его университетская дипломная работа была высоко оценена Гудерманом. Мюнстером же, в 1841 г., помечена его работа, в которой он открыл теорему о разложении в ряд (получивший название ряда Лорана) и которая оставалась в рукописи до 1894 г., когда, согласно желанию Вейерштрасса, ее включили в собрание его сочинений [9].

Организатором «Недели Вейерштрасса в Мюнстере» было Вестфальское математическое общество, которое возглавлял профессор Роберт Кёниг. В отпечатанной заранее повестке заседаний, со 2 по 6 июня 1925 г., содержались воспоминания Г. Миттаг-Леффлера о Вейерштрассе и сообщение Л. Бибербаха о переписке Вейерштрасса и Г. А. Шварца. С научными докладами должны были выступить: Д. Гильберт («О бесконечном и об основаниях математики»), Г. Миттаг-Леффлер («Что такое число, бесконечность непрерывность»), О. Перрон («Полная индукция в континууме» и «Об особом классе разложений по полиномам»), П. Кёбе («Методы конформных отображений и униформизация»), К. Кнопп

(«Суммирование по Эйлеру») и А. Вейль («О представлении непрерывных групп с помощью линейных преобразований»). Был также указан доклад по вариационному исчислению, без имени автора.

Барельеф Вейерштрасса

На самом деле программа получилась иной. Миттаг-Леффлер не смог приехать из-за болезни. Он прислал письмо, в котором приветствовал открытие «Недели Вейерштрасса» и писал, что Вейерштрасс был его любимым учителем и другом, который поддерживал его начиная с 1873/74 г., когда он впервые посетил учителя. Миттаг-Леффлер добавляет: «Вейерштрасс не только как математик превосходил всех, кого я знал в течение моей долгой жизни, — может быть, за исключением Анри Пуанкаре, — но и как человек он с его неистощимым стремлением к высшему принадлежал к немногим избранным» [88, с. 68].

Вместо Миттаг-Леффлера выступили с воспоминаниями об их великом учителе К. Рунге, Л. Киперт и Р. Лилиенталь. Из докладов о собственных исследованиях особый интерес вызвали доклады Гильберта, Перрона и Кёбе. Они были опубликованы Кипертом [97].

Гильберт в письме Р. Кёнигу от 17 ноября 1924 г. выражает свое удовлетворение по поводу организации «Недели Вейерштрасса» и пишет: «Я могу рассматривать свои научные исследования последних лет как необходимое продолжение трудов Вейерштрасса по основаниям математики. Вейерштрасс успешно преодолел трудности исчисления бесконечно малых, проистекающие из понятия бесконечно малого. В то же время я поставил задачу о парадоксах, возникших из понятия сверхразмерного (überdimensionalen) бесконечно большого, как оно было освещено в теории Кантора классов чисел, что удалось выяснить удовлетворительно. Если Вы хотите теперь же знать название моего доклада, то я могу предложить такое: «О бесконечном и об основаниях математики» [88, с. 70].

О. Перрон изложил свои новые исследования о полной индукции в континууме и основанные на них новые методы суммирования расходящихся рядов (суммирование по Перрону). Последней теме был посвящен также доклад Г. Кноппа.

П. Кёбе за исследования по теории аналитических функций получил от короля Швеции Густава V премию в виде золотой медали с изображением К. Вейерштрасса. П. Кёбе сделал доклад «Методы конформных отображений и униформизация».

Докладчиками о новых исследованиях по вариационному исчислению выступили Р. Курант и Р. Лилиенталь.

Г. Вейль рассказал о своих работах по теории непрерывных групп, побуждение к которым появилось у него после изучения тома трудов Вейерштрасса, относящихся к анализу и алгебре.

Р. Кёниг [88, с. 71] выражает удовлетворение по поводу того, что в математической школе Мюнстера интенсивно развивается теория функций многих комплексных переменных.

Таким образом, «Неделя Вейерштрасса в Мюнстере» была посвящена воспоминаниям о Вейерштрассе и математическим задачам, по которым Вейерштрасс высказал основополагающие идеи.

Следующей большой памятной датой Вейерштрасса было его 150-летие, отмеченное в 1965 г. особенно широко в Мюнстере и в Дюссельдорфе, административном центре земли Северный Рейн-Вестфалия. Доклады, которые были там сделаны, опубликованы Г. Бенке и К. Копферманом в книге «Празднование памятной даты Карла Вейерштрасса 1815—1965» [88].

Книга состоит из трех частей. Первая содержит биографические сведения о Вейерштрассе. Г. Бенке (Мюнхен) написал о Вейерштрассе и его школе, К.-Р. Бирман (Берлин)— о приглашении Вейерштрасса в Берлин, О. Фростман (Дьюрсхольм) — о письме Миттаг-Леффлера профессору Я. Хольмгрену, в котором он рассказывает о своих впечатлениях от встречи с Вейерштрассом и Кронекером, о различных подходах Вейерштрасса и Римана к теории комплексного переменного и т. п. Мы уже приводили выдержки из этого письма.

Далее в книге идут статьи Ф. Г. Хомана (Падерборн) с подробными сведениями о Теодорианской гимназии в Падерборне и Р. Кёнига (Мюнхен) — о праздновании столетия Вейерштрасса в Мюнстере.

Вторая часть книги посвящена работам Вейерштрасса по теории функций или непосредственным их продолжениям.

Отдельные статьи написаны К. Копферманом (Мюнстер), Р. Неванлинной (Хельсинки), В. Тиммом (Бонн), А. Картаном (Париж) и А. Дингхазом (Берлин). Совместная статья четырех авторов: Э. Хёльдера (Майнц), Р. Клётцера (Лейпциг), З. Гелера (Берлин) и С. Гильдебрандта (Майнц) трактует о развитии вариационного исчисления после Вейерштрасса.

Наконец, в третьей части книги приводится тринадцать статей разных авторов из разных стран, относящихся к развитию теории функций.

В Москве под председательством академика П. С. Александрова состоялось заседание Московского математического общества, посвященное 150-летию Вейерштрасса. На нем мною был сделан доклад «Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс», опубликованный в «Успехах математических наук» [147].

150-летие Вейерштрасса отмечалось во многих городах Германии и других стран. Конечно, оно было отмечено и Берлинской академией наук на заседании 19 октября 1965 г., где профессор К.-Р. Бирман сделал доклад «Карл Вейерштрасс. Избранные аспекты его биографии» [80].

Заключение

Трудно охватить все многообразие вопросов, которыми занимался Вейерштрасс. В заключение дадим краткий обзор математических работ великого ученого, пополнив его сведениями о некоторых вопросах, не нашедших места в предыдущем изложении.

Вейерштрасс проявлял большой интерес к неевклидовой геометрии, в особенности к геометрии Лобачевского, по которой он в 1872 г. вел специальный семинар. В книге В. Ф. Кагана «Основания геометрии» [130] указаны специальные координаты, названные вейерштрассовыми, представляющие один из видов координат в неевклидовом пространстве. О семинаре Вейерштрасса говорит В. Киллинг в книге «Неевклидовы пространственные формы в аналитической трактовке» [98]. Он приходит к координатам Вейерштрасса, рассматривая пространство, в котором отказывается от пятого постулата Евклида и от бесконечности прямой линии. Для двумерного пространства, т. е. на плоскости, определение которой дается описанием ее свойств, рассматривается бесконечно малый треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ. Для вывода соотношений между сторонами и углами треугольника получается дифференциальное уравнение первого порядка, интеграл которого содержит произвольную постоянную k^2. Получается ряд соотношений вида

$$\sin\frac{b}{k}\sin\gamma = \sin\frac{c}{k}\sin\beta, \qquad \cos\frac{a}{k} = \\ = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{c}{k}\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{k}, \qquad \sin\gamma\cos\alpha = \\ = \sin\beta\cos\frac{a}{k} - \cos\gamma\sin\alpha\cos\frac{b}{k}. \tag{2}$$

Эти формулы совпадают с формулами сферической тригонометрии, если $k=R$ — радиус сферы. Число k зависит от выбранной единицы длины. При $k=\infty$ формулы (1) дают тождества, формулы (2) — теоремы сложения для косинуса и синуса.

Вводятся координаты Вейерштрасса:

$$p = \cos\frac{r}{k}, \qquad x = k\sin\frac{r}{k}\cos\varphi, \qquad y = k\sin\frac{r}{k}\sin\varphi, \quad (3)$$

где (r, φ) — полярные координаты точек $P(r, x, y)$.

Если расстояние между точками $P(r, x, y)$ и $P'(r', x', y')$ есть $e = PP'$, то

$$\cos\frac{e}{k} = \cos\frac{r}{k}\cos\frac{r'}{k} + \sin\frac{r}{k}\sin\frac{r'}{k}\cos(\varphi - \varphi'), \quad (4)$$

или

$$k^2\cos(e/k) = k^2pp' + xx' + yy'. \quad (5)$$

При $P = P'$ получим

$$k^2 = k^2p^2 + x^2 + y^2. \quad (6)$$

Если $e = 2k\pi$, то $k^2 = k^2pp' + xx' + yy'$ или

$$k^2(p - p')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2 = 0.$$

Отсюда при $k^2 > 0$ получаем $p = p'$, $x = x'$, $y = y'$, т. е. точки P и P' совпадают. Если $e = k\pi$, то получим $k^2(p+p')^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2 = 0$, т. е. точки P и P' полярны друг другу. Все это наглядно видно на сфере или для геометрии Римана.

При $k^2 < 0$ получается геометрия Лобачевского. На плоскости Лобачевского (6) можно переписать так: $(-k^2p^2) = (-k^2) + x^2 + y^2$, откуда видно, что $p^2 \geqslant 1$.

Прямая линия определяется как геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек. Если это точки $P'(r', x', y')$ и $P''(r'', x'', y'')$, то с помощью уравнения (5) найдем уравнение прямой

$$k^2p(p' - p'') + x(x' - x'') + y(y' - y'') = 0. \quad (7)$$

Формула (5) распространяется на n-мерное пространство, в котором точка определяется вейерштрассовыми однородными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Расстояние r между точками $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $P'(x_0', x_1', \ldots, x_n')$ дается уравнением

$$k^2\cos\frac{r}{k} = k^2x_0x_0' + x_1x_1' + \ldots + x_nx_n'. \quad (8)$$

Положение точки в n-мерном пространстве можно, по Вейерштрассу, определить с помощью системы n взаимно ортогональных плоскостей, пересекающихся в этой точке.

Оценка научного вклада Вейерштрасса в математику делалась многими математиками-специалистами. Ряд статей, посвященных творчеству великого ученого и развитию его идей, помещены в сборнике, изданном к 150-летию со дня рождения Вейерштрасса [88].

Рольф Неванлинна в статье «Развитие теории однозначных аналитических функций одной комплексной переменной после Вейерштрасса» [88] начинает с изложения заслуг в этой области Коши, Римана и Вейерштрасса, трех великих основателей теории функций.

Коши дал интегральную теорему и теорию вычетов, которые стали фундаментом теории функций и новым инструментом при решении *реальных* задач.

Риманова теория поверхностей занимает центральное место в теории функций, которая связана с основными вопросами учения о *конформных отображениях* и *аналитической теории чисел.*

Переходя к Вейерштрассу, Р. Неванлинна говорит, что его исследования в высшей степени формальны и, с одной стороны, носят арифметико-алгебраический характер, с другой — строго и систематично *конструктивно* отчеканены. Со всеми частями этой характеристики можно согласиться, за исключением начала. Вейерштрасс считал естественным переход от простейших алгебраических функций — полиномов — к бесконечным рядам, что не является формальным подходом.

Вейерштрасс исходит из понятия аналитической функции как степенного ряда. Далее, выбирая последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$, можно провести *аналитическое продолжение* функции на всю область ее существования и получить *аналитический* образ.

Было дано много способов аналитического продолжения функции, в частности с помощью рядов Миттаг-Леффлера, сходящихся к максимальной звезде Миттаг-Леффлера (см. [141, т. 1]).

Вейерштрассу принадлежит развитие теории целых и мероморфных функций. Им дано каноническое представление целой функции, имеющей конечное или бесконечное множество нулей.

В статье [32] Вейерштрасс доказал теорему: если $f(z)$ имеет характер целой рациональной функции в окрестности каждой конечной точки, то она может быть представлена в виде отношения двух целых функций. Пуанкаре в 1883 г. обобщил эту теорему на случай двух переменных, П. Кузен в 1895 г. доказал теорему для любого числа переменных.

В той же статье [32] в 1876 г. Вейерштрасс приводит теорему: вблизи существенно особой точки c функция $f(x)$ может к любому заданному числу приблизиться сколь угодно близко; при $x=c$ она не имеет определенного значения.

На восемь лет раньше эта теорема была дана независимо друг от друга Казорати и Сохоцким. В книге [140] приведена формулировка, данная в 1868 г. Ю. В. Сохоцким:

«Если данная функция $f(z)$ в некоторой точке z_0 обращается в ∞ бесконечного порядка, то непременно в этой же точке функция $f(z)$ должна принимать всевозможные значения».

Здесь имеется в виду существенно особая точка z_0, а под значением функции $f(z)$ в точке z_0 подразумевается множество предельных значений функции в этой точке [140, с. 217]. Теперь эту теорему называют теоремой Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса.

В 1879 г. Э. Пикар доказал, что мероморфная функция $w(z)$ не только аппроксимирует, но эффективно принимает все значения w ($|w| \leqslant \infty$), за исключением двух значений w; так, для функции $\operatorname{tg} z$ это числа i и $-i$.

По поводу исследований Пуанкаре по теории автоморфных функций Р. Неванлинна говорит, что они явились естественным продолжением вейерштрассовской конструкции эллиптических функций [88, с. 99].

В цитируемой статье Р. Неванлинна, подчеркивая субъективность своего выбора, приводит 31 пункт разного рода задач, представляющих в настоящее время развитие идей Вейерштрасса и Римана.

Исследования Вейерштрасса распространялись на случай функций многих переменных (статьи [34, 20]). Остановимся на так называемой *подготовительной* теореме (Vorbereitungssatz) Вейерштрасса, которой А. Картан посвятил отдельную статью в юбилейном сборнике [88]. Эта теорема сформулирована Вейерштрассом в его работе 1886 г. «Очерки из учения о функциях» [88] таким образом:

«Пусть $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет аналитической функцией в окрестности начала; предположим, что $F(0, 0, \ldots, 0)=0$, $F_0(x)=F(x, 0, \ldots, 0)\neq 0$ и пусть будет p такое целое число, что $F_0(x)=x^p G(x)$, $G(0)\neq 0$. Тогда существует «избранный полином

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p$$

(коэффициенты которого аналитические функции a_j (x_1, . . ., x_n) в окрестности начала) и функция g (x, x_1, . . ., x_n), аналитическая и $\neq 0$ в окрестности начала, такие, что

$$F = f \cdot g$$

в окрестности начала».

Из подготовительной теоремы вытекает, что при $n > 1$ в отличие от случая одного комплексного переменного во всякой окрестности любого нуля аналитической функции находится бесконечное множество ее нулей [141, т. 1, с. 618].

Вейерштрасс говорит по поводу подготовительной теоремы, что он сообщал ее своим слушателям уже в 1860 г. и она была представлена в литографированном издании 1879 г. Теперь эта теорема является важным орудием в развитии новых разделов дифференциальной геометрии.

Прекрасные и полные исследования Вейерштрасса по теории эллиптических функций известны, и мы на них останавливались.

Говорили мы и о теории абелевых функций, отмечали, что она не была полностью завершена и отшлифована Вейерштрассом так, как он хотел бы.

В юбилейном сборнике [88] большая статья Вальтера Тимма «Теорема Вейерштрасса об алгебраической зависимости абелевых функций и ее обобщения» посвящена теории Вейерштрасса абелевых функций и ее дальнейшему развитию.

Понятие *абелевых* функций, т. е. $2p$-периодических мероморфных функций p переменных, было введено Вейерштрассом на основе якобиевой проблемы обращения. В 1869 г. Вейерштрассом сформулирована фундаментальная теорема о том, что между $p+1$ абелевыми функциями с одинаковыми периодами имеет место алгебраическая связь [27], однако к доказательству он не пришел. В последующие десятилетия он возвращался к этой теореме, но без успеха, прежде всего потому, что представление мероморфных функций усложняется с повышением размерности. Но интенсивные поиски и новые аналитические методы привели теперь к удовлетворительному решению старой задачи Вейерштрасса [88, с. 123].

О лекциях Вейерштрасса по вариационному исчислению и об опубликованных им статьях в этой области мы говорили довольно много. В юбилейном сборнике [88] помещена статья «Развитие вариационного исчисления после Вейерштрасса» четырех авторов: Эрнста Гёльдера (сына Отто Гёльдера), Рольфа Клёцлера, Зигфрида Гелера и Стефана Гильдебрандта, каждый из которых написал свой раздел: геодезические линии, минимальные поверхности, вейерштрассов криволинейный интеграл в метрической теории вариационного исчисления, прямые методы вариационного исчисления. Все авторы высоко оценивают основополагающие исследования Вейерштрасса.

Наиболее сжатая характеристика научного творчества Вейерштрасса дана в блестящей статье Пуанкаре (см. Приложение 1), которую мы уже не раз цитировали. Пуанкаре говорит, что больше всего его поражает в деятельности Вейерштрасса замечательное единство мысли на всем ее протяжении и вместе с тем разнообразие его работ. С самого начала он поставил перед собой определенную цель и создал методы для ее достижения. Он применял эти методы к другим задачам, но никогда не терял из вида конечную цель.

Заметим в заключение, что в «Математической энциклопедии» [141] имя Вейерштрасса упоминается много раз: приведены пять теорем Вейерштрасса, четыре его функции, есть кольцо Вейерштрасса, его координаты, критерий минимальной поверхности, признак сходимости, точка Вейерштрасса, условия экстремума. Есть теоремы, носящие два имени: Вейерштрасса—Стоуна, Вейерштрасса—Эрдмана. Мы упоминали о теореме с тройным именем: Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса. Вероятно, еще и другие понятия и теоремы современной математики, опирающиеся на идеи Вейерштрасса, будут названы его именем.

Вейерштрасс был не только великим ученым, он был замечательным человеком, человеком большого сердца и широкой души. Он благожелательно относился и к ученикам, и к коллегам, с радостью встречал открытия других ученых, защищал их авторитет.

Для нас память о Вейерштрассе дорога и потому, что он соприкасался с русской наукой (вспомним работы П. Л. Чебышева, Ф. Ф. Шуберта, на которые он откликался своими работами), среди его слушателей были русские, которые развивали и распространяли его учение. Мы ценим его благотворное влияние на нашу соотечественницу, его любимую ученицу С. В. Ковалевскую, которое дало ей возможность развернуть свои способности и создать работы, вошедшие в золотой фонд математических знаний, и тем самым открыть путь женщинам в науку.

Приложение 1

А. Пуанкаре

Математическое творчество Вейерштрасса *

1. Что меня поражает в математической деятельности Вейерштрасса, так это замечательное единство мысли, стойко проходящее на всем ее протяжении, и разнообразие его работ.

С самого начала он поставил перед собой определенную цель и создал методы для ее достижения; и если иногда он применял эти методы к другим задачам, то он никогда не терял из вида конечный предмет своих исследований.

Впрочем, он сам позаботился о том, чтобы уведомить нас об этом.

В 1857 г., войдя в состав Берлинской академии, во вступительной речи он сказал так:

«Я должен теперь в нескольких словах объяснить, каков был до сих пор ход моих исследований и в каком направлении я буду стараться продолжать их.

С тех пор как под руководством моего учителя Гудермана я впервые познакомился с теорией эллиптических функций, эта новая ветвь математического анализа произвела на мой ум мощное притягательное воздействие, влияние которого на развитие моей мысли оказалось решающим.

Эта дисциплина, основанная Эйлером, развитая с жаром и успехом Лежандром, сначала развивалась в одном направлении; но за последние десять лет она полностью преобразована введением двоякопериодических функций, открытых Абелем и Якоби. Эти трансценденты, подарив анализу новые величины с замечательными свойствами, нашли также приложения в геометрии и механике и показали тем самым, что они являются нормальным плодом естественного развития науки.

Но Абель, привыкший всегда становиться на самую высокую точку зрения, нашел теорему, которая распространяется на все трансценденты, вытекающие из интегрирования алгебраических уравнений и являющиеся для них тем же, чем для Эйлера были эллиптические функции. Погибший в цветущем возрасте, он не смог сам продолжить свое великое открытие, но Якоби вскоре сделал другое, не менее важное;

---

* *Poincaré H.* L'oeuvre mathématique de Weierstrass. — Acta math., 1899, vol. 22, p. 1—18. Пер. П. Я. Кочиной.

он доказал существование периодических функций нескольких переменных, главные свойства которых основаны на теореме Абеля, и тем самым указал истинное значение этой теоремы.

Эффективное представление этих величин, анализ которых еще не имел примера, детальное исследование их свойств делались, таким образом, одной из фундаментальных проблем математики; и как только я понял их смысл и важность, я решил испытать себя в них.

Было бы настоящим безумием, если бы только я стал думать о решении подобной задачи, не подготовившись к ней углубленным изучением средств, которые должны были помочь мне в этом, и не поупражнявшись предварительно на менее трудных задачах. . .»

Таким образом, с самого начала у него была честолюбивая мысль создать полную и когерентную теорию абелевых функций. С того времени, как он приступил к работе, еще будучи учеником Гудермана, он ясно увидел цель, к которой будет идти всю жизнь, которую он никогда не забудет и к которой беспрестанно будет стремиться.

Можно было бы сравнить ученого с инженером, атакующим очень сильную крепость; несмотря на сложность работ к подходу, несмотря на долгие перипетии осады, единство его мысли является стойким и остается всегда явным.

Однако, разумеется, инструменты, которые он создавал таким образом, могли служить многим другим нуждам; направо и налево от прямой дороги, которой он шел, он открыл много боковых дорог и прошел по ним достаточно вперед, чтобы показать нам, куда они вели. По ним он направлял первые шаги своих учеников и каждому из них назначил свою цель. Как ни были многочисленны его ученики, его наследство было достаточно большим, чтобы каждый из них мог выделить себе большую часть.

2. Для достижения своей цели великий геометр должен был подниматься по трем ступеням.

1. Углубить общую теорию функций, сначала функций одной переменной, затем функций двух переменных; это была база, на которой должна была подняться вся пирамида.

2. Так как абелевы функции являются естественным развитием эллиптических функций, то следовало усовершенствовать теорию последних трансцендент и представить ее в форме, которая является легкой для обобщения.

3. Наконец, оставалось, атаковать сами абелевы функции.

3. Но было бы неверно полагать, что, преследуя единственное намерение, он пренебрегал другими частями анализа. Он касался других проблем не только для упражнений, как можно было думать по одной из фраз его академической речи, которую я выше процитировал. Напротив, ни у кого не было более широкого ума, и если он оставался связанным своим полевым планом, то только потому, что он ожидал результатов универсального значения.

Таков общий поход прямо на столицу врага с сознанием того, что, как только она будет покорена, вся местность попадет под его власть.

Он мечтал, следовательно, если не для себя самого, то по крайней мере для своих последователей, о гораздо более обширных победах. Если эти надежды, казавшиеся ему вначале очень отдаленными, в конце концов в большей части реализовались, то это потому, что он был не один. Его лекции сформировали многочисленных учеников, которые составили ему целую армию, принимавшую его направление, — армию, которую он бросал вперед, так как не мог всюду двигаться сам.

Вот почему трудно дать точный отчет о математических работах Вейерштрасса, и это не только потому, что напечатанные им работы значительны; в особенности же потому, что эти статьи не содержат всех его работ.

Долго самые важные из этих работ оставались неизданными, и только в устном изложении он расточал сокровища своего знания; сколько еще богатств на сегодняшний день остается сохранившимися лишь в памяти его слушателей!

К счастью, ученики сосредоточивались толпою вокруг его кафедры и потом разносили его влияние. Ум Вейерштрасса возбуждал также не только тех, кто имел счастье слушать его слово, но и тех, кто получил о нем лишь непрямое эхо. Также в работе многих среди нас он мог бы законно отстаивать права на свою долю.

В последние годы его здоровье вынудило его покинуть преподавание, он старел, окруженный почтением и восхищением всех, спокойно занимаясь публикацией своих работ, с радостью видя свое дело продолжаемым людьми, которых он воодушевлял своим умом.

Теория функций

4. В начале века идея функции была понятием одновременно слишком узким и слишком неопределенным.

В самом деле, с одной стороны, разрывные функции — функции, лишенные производных, — или были неизвестны, или рассматривались. как чисто искусственные порождения, недостойные внимания геометра.

Таким образом, из анализа исключалась целая область, которую анализ впоследствии присоединил к себе; но, с другой стороны, все были бы очень смущены, если бы речь шла о провозглашении ясным и точным образом необходимых и достаточных условий для того, чтобы доставить функции право гражданства. Граница между аналитическими и другими функциями была далека от полного описания. В действительности, в продолжение традиций основателей исчисления бесконечно малых, которые вначале были озабочены приложениями, [математики] бессознательно обращались к модели, доставляемой функциями, рассматриваемыми в механике, и отбрасывали все, что отклонялось от этой модели; руководствовались они не ясным и строгим определением, но некоторым видом интуиции и темным инстинктом.

Надо было дать определение, так как анализ мог только такой ценой достичь совершенной строгости.

В настоящее время все сильно изменилось; различают две области, из которых одна безграничная, другая более узкая, но лучше отработанная. Первая — функции вообще, вторая — аналитические функции. Для первой все фантазии дозволены и каждое мгновение наши привычки получают удар, а наши ассоциации идей ломаются; мы приучаемся таким образом не доверять некоторым рассуждениям, которые казались убедительными нашим отцам, и воздерживаться от таких заключений, которые им казались бы законными.

Во второй области, напротив, эти заключения дозволены; но мы знаем, почему: достаточно вначале дать хорошее определение и мы увидим, что появится строгая логика.

Вот пройденный путь; посмотрим, как Вейерштрасс содействовал тому, чтобы вести нас по нему.

Прежде всего я процитирую доклад, читанный в Академии Берлина 18 июля 1872 г., где Вейерштрасс указал примеры непрерывных функций действительного переменного, которые ни для какого значения этого переменного не имеют определенной производной.

Сто лет тому назад подобная функция рассматривалась бы как оскорбление здравого смысла. Сказали бы, что непрерывная функция по существу может быть представлена кривой, а кривая, очевидно, всегда имеет касательную.

Подобное рассуждение не имеет никакого математического смысла; оно основано на интуиции, или, скорее, на чувственном представлении. Но это представление грубо и обманчиво.

Мы думаем, что представляем себе кривую линию без толщины, но мы представляем ее себе только как черту малой толщины. Также мы видим касательную в виде прямолинейной полосы малой толщины; и когда мы говорим, что она касается кривой, мы хотим просто сказать, что эти две полосы налагаются одна на другую не пересекаясь. Если это то, что называется линией и касательной, то ясно, что всякая кривая имеет касательную; но это уже не имеет ничего общего с теорией функций.

Мы видим, к каким ошибкам нас приводит безрассудное доверие к интуиции. Открытием этого поразительного примера Вейерштрасс дал нам полезное предупреждение и научил нас больше ценить методы безупречные и чисто арифметические, которыми он, более чем кто-нибудь другой, одарил науку.

Тем же самым он обогатил область неаналитических функций, где нас ожидает еще столько неожиданностей.

5. Но это была только короткая экскурсия вне той прямой дороги, которую он наметил и от которой никогда не уклонялся надолго.

На этой дороге он встретил область аналитических функций, которую сначала должен был разработать до глубины, если хотел достичь своей цели.

Современная теория аналитических функций имела четырех основателей: Гаусса, Коши, Римана и Вейерштрасса.

Гаусс при жизни ничего не опубликовал; он, можно сказать, никому ничего не сообщил, а его рукописи были найдены много лет спустя после его смерти. Поэтому он не оказал никакого влияния.

Трое других геометров, способствовавших созданию нового понятия функции, шли совершенно разными путями.

Коши предшествовал двум другим и показал им путь; однако все три концепции оставались различными, и это большое счастье, так как у нас есть теперь три инструмента, из которых мы можем делать выбор и часто можем комбинировать действия.

У Коши определение функции сохраняет еще некоторую неясность, которая имелась у его предшественников. Он только налагает на аналитические функции некоторые ограничительные условия, например такое, как иметь непрерывную производную. Все покоится на очень простой теореме, относящейся к комплексным интегралам и к понятию вычета. Произвольная функция может быть представлена интегралом и делается при этом удобной в работе для аналитика, как бы неясно она ни была определена вначале. Это драгоценное преимущество, и до сих пор еще «вычеты» дают нам решение задач, которое мы не могли бы получить без них.

Теория Коши содержала в зародыше одновременно геометрическую концепцию Римана и арифметическую — Вейерштрасса, и легко понять, как она могла, развиваясь в двух различных направлениях, дать рождение и той и другой.

Для Римана геометрический образ играет доминирующую роль; функция есть только один из законов, по которым может преобразовываться поверхность; стараются представить себе эти преобразования, а не анализировать их; самая их возможность установлена только общими рассуждениями, которые значительно позднее удалось сделать строгими лишь ценой глубоких модификаций и сложных уверток.

Вейерштрасс занял крайнюю, противоположную позицию; исходная точка — степенной ряд, «элемент функции», ограниченный кругом сходимости; чтобы проследить за функцией вне этого круга, существует процедура аналитического продолжения; все становится, таким образом, следствием теории рядов, а сама эта теория основана на арифметической и солидной базе. Мы избавлены от сомнений, которые в последнем веке часто одолевали мыслителей по поводу принципов исчисления бесконечно малых, а также по поводу того, что могла вызвать теория аналитических функций Лагранжа из-за ее пробелов. Теперь все это только давняя история.

Концепция Вейерштрасса представляет двойное преимущество.

1. Она является, как мы видели, вполне строгой, и эта строгость достигнута самыми простыми средствами.

2. Она с большой простотой применима для обобщений и может быть распространена на функции многих переменных.

Остережемся выбирать между этими тремя концепциями; каждая играет свою необходимую роль. С инструментом Римана интуиция позволит одним взглядом увидеть общий аспект вещей; как путешественник, который обозревает с горной высоты топографию равнины, которую он собирается посетить, и думает, каким образом сориентироваться. С инструментом Вейерштрасса анализ осветит последовательно все закоулки, в которые будет внесена полная ясность.

Одним словом, метод Римана есть прежде всего метод открытий, метод Вейерштрасса прежде всего есть метод доказательства.

6. Главный вклад Вейерштрасса в прогресс теории функций — это открытие *первичных множителей*.

Наиболее простыми трансцендентами являются целые функции, имеющие особую точку только на бесконечности. Такая трансцендента всегда является произведением бесконечного множества «первичных множителей»; каждый из этих множителей сам является произведением полинома первой степени на экспоненциальную функцию, показатель степени которой есть полином степени q; говорят, что имеем простейший множитель жанра q.

С этим открытием связана классификация целых функций по жанрам, арифметическое значение которых недавно выяснено г-ном Адамаром.

Вейерштрасс равным образом нашел здесь средство построения целой функции по заданным нулям.

С этой теоремой непосредственно связана теорема г-на Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях.

Эти две теоремы позволяют легко построить функции $\sigma(u)$ и $\wp(u)$, которые стали, как мы увидим дальше, главными инструментами Вейерштрасса в теории эллиптических функций.

Несомненно, что эта именно перспектива направляла усилия великого немецкого ученого по этому методу; но он извлек из него много других плодов. Важность нового метода в действительности сильно превосходила частный вопрос, который он хотел разрешить и для которого он его создал.

Он легко был распространен в работах самого Вейерштрасса, а также г-на Миттаг-Леффлера на функции, которые имеют существенно особые изолированные точки, а затем и на те, которые допускают более сложные особенности и даже особые линии.

Следовательно, это один из самых общих методов анализа.

В этом круге идей Вейерштрасс был приведен к изучению представления функций рядами, члены которых являются рациональными функциями.

Умножая число примеров, он показал, как подобный ряд может представлять в двух разных областях две различные функции; по этому поводу он разъяснил понятие естественных границ функции, а тем самым фундаментальное понятие самой аналитической функции. Начиная с этого мемуара всякая неясность, наконец, исчезла.

7. Но для изучения абелевых трансцендент теория функций одной переменной недостаточна; нужно углубить теорию функций многих переменных.

И знаменитый немецкий геометр не перестает ею заниматься; он должен был найти в ней новые трудности, так как вынужден был отказаться от употребления простейших множителей, которые были так полезны ему в его исследованиях функций одной переменной.

Однако он смог вывести строго множество теорем, необходимых ему для его цели, которые часто применяли, не понимая их истинного смысла и значения. Его задача облегчалась для него постоянным употреблением созданных им понятий, а именно элементов функции.

8. Чтобы иметь право представлять таким образом все функции рядами и быть в состоянии безбоязненно пользоваться этим представлением во всех вопросах интегрального исчисления, надо было показать, что можно приравнять степенному ряду всякую неявную функцию, полученную из системы уравнений, первые члены которых — степенные ряды, или являющуюся интегралом дифференциального уравнения, коэффициенты которого — степенные ряды. Эта важная теорема должна была быть для Вейерштрасса одним из основных кирпичей его системы.

Известно, что впервые она была установлена Коши.

В 1842 г. Вейерштрасс опубликовал статью, где снова доказывал это предложение способом, аналогичным способу Коши.

Он был опережен, не зная того, французским ученым, однако он в широкой степени оригинален. Равномерность сходимости, способ, которым элементы функции выводятся один из другого аналитическим продолжением, являются вопросами, которые он основательно изучает.

С другой стороны, с дидактической точки зрения его способ изложения представляет большие преимущества; у него «мажорантная функция» проще и удобнее, чем у Коши; начальные неравенства выводятся из элементарных свойств рядов, но не из рассмотрения комплексных интегралов. В этом прогресс, было интересно показать, когда это рассмотрение необходимо и когда можно обойтись без него.

На этом примере видно, как способ, которым немецкий математик исследует функцию, вытекает из концепции Коши, но облегченным от бесполезного балласта.

Сам Вейерштрасс применял этот метод ко множеству вопросов и даже к доказательству существования корней алгебраического уравнения. Но он дал важные результаты, нашедшие приложение в работах его учеников. Г-жа Ковалевская применила его метод к уравнениям с частными производными, а г-н Фукс к линейным дифференциальным уравнениям с общеизвестным успехом.

9. Последняя работа, которая косвенно относится к теории функций, посвящена знаменитым математиком принципу Дирихле. Дав поразительный пример, он показал, каким хрупким является доказательство этого принципа, которым долго довольствовались.

Однако на этом принципе Риман захотел построить всю теорию функций; эта основная позиция не была прочной, и если не хотели видеть, как она рушится, заставляя падать все здание, то надо было его тщательно укрепить; это сделали потом г-н Шварц и другие ученики Вейерштрасса.

Эллиптические функции

10. Форма, которую Якоби дал теории эллиптических функций, была далека от совершенства; ее недостатки бросаются в глаза.

В ее основе мы видим три фундаментальные функции sn, cn и dn. У этих функций неодинаковые периоды; у первой $4K'$ и $2\,iK'$, у второй $4K$ и $2K\pm 2iK'$, у третьей $2K$ и $4iK'$. Если мы захотим отнести их все три к одной системе периодов, то следует взять $4K$ и $4iK'$; но среди трансцендент, допускающих эти периоды, функции Якоби sn, cn, dn не являются самыми простыми; у них четыре точки бесконечности, а у самых простых их только две.

В системе Вейерштрасса вместо трех основных функций мы имеем только одну $\wp(u)$, и она самая простая из всех, у которых те же периоды. У нее только одна, двойная, точка бесконечности; и, наконец, ее определение таково, что оно не меняется, если заменить систему ее периодов другой, эквивалентной системой; напротив, эта подстановка произвела бы среди функций Якоби перемещения, закон которых был бы бесполезно усложнен.

В большинстве задач достаточно рассматривать $\wp(u)$, а введение sn, cn, dn было бы искусственным усложнением. Без сомнения, есть другие случаи, где это введение было бы более естественным; но как раз в этих случаях Вейерштрасс удачно заменяет их тремя функциями:

$$\sqrt{\wp(u)-e_1}, \qquad \sqrt{\wp(u)-e_2}, \qquad \sqrt{\wp(u)-e_3}.$$

Формулы, которые связывают их между собой, замечательным образом симметричны, и функции могут выводиться одна из другой круговыми перестановками. Этого не было со старыми трансцендентами sn, cn, dn; модуль входил в соотношение, которое связывает sn и dn, но не входил в то, которое связывает sn и cn. Ничто не оправдывает эту диссимметрию, которая иногда становится обременительной.

11. С другой стороны, преимущественная роль, которую играет модуль k, малопонятна. Модуль k не является простейшей из всех модулярных функций [1], так как одной и той же системе периодов может

[1] Имеется в виду зависимость $k=k(\tau)$, где $\tau=\omega_2/\omega_1$ — отношение периодов.

соответствовать несколько значений модуля. Роль модуля не одинакова по отношению к двум периодам, откуда проистекает искусственная диссимметрия в формулах.

Для вычисления модуля нужно решить уравнение четвертой степени; этого решения можно избежать, если за основные аргументы принять коэффициенты первого члена этого уравнения или, скорее, инварианты этого полинома. Эти инварианты Вейерштрасс назвал g_2 и g_3. Абсолютный инвариант

$$J = g_2^3/g_3^2$$

является самой простой из всех модулярных функций; это существенный и натуральный элемент, который должен заменить k, как $\wp(u)$ заменила sn, cn, dn.

12. Другой категорией трансцендент, значение которой фундаментально, являются функции θ. Введенные Якоби функции неудобны ввиду отсутствия симметрии.

Четыре функции Θ и H Якоби являются только частным случаем функций θ различных порядков, как это показал г-н Эрмит в содержательном и важном мемуаре. Но эти функции г-на Эрмита сами могут быть обобщены, и существует целая категория функций, которые Брио и Буке, не знаю почему, назвали промежуточными и которые воспроизводятся умноженными на экспоненциальную функцию при увеличении аргумента на период.

Какие среди них должны быть выбраны как простые элементы? Ими не могут быть четыре функции Якоби, отношения которых составляют sn, cn и dn, уже осужденные по причинам, которые мы изложили выше. Это тем более не какая-нибудь из функций г-на Эрмита, так как в этих функциях два периода не играют одинаковой роли; так что эти трансценденты принимают бесконечное множество различных форм, если заменить одну систему периодов другой, эквивалентной.

Вейерштрасс с самого начала занят этим выбором простого элемента и принял сначала функцию, которую обозначил Al, не изменяющуюся при изменении системы периодов, но *при условии, что модуль остается тем же самым*.

Позже он отказался от этой функции Al и одновременно от самого модуля и нашел в качестве нового элемента функцию σ, которая по определению не меняется при замене системы периодов любой другой эквивалентной системой.

Таким образом, функции достигают максимума простоты. Но, однако, функция σ не окончательно снимает с трона функции θ, в частности функции г-на Эрмита, как $\wp(u)$ сняла с трона sn, cn и dn.

Простота разложения θ-функций, быстрота сходимости, элегантность их свойств утверждают за ними важное место, с которого они никогда не будут свергнуты. Надо только уметь быстро переходить от σ к θ и от θ к σ.

13. Есть много способов начинать изложение теории. Тот, который предпочитал Вейерштрасс, очень любопытен; он задает вопрос, при каких условиях функция допускает теорему сложения.

Это предпочтение объясняется легко: таким образом он предполагал ввести слушателей в область абелевых функций, когда закончит их теорию; этот способ представления предмета нравился ему своей общностью, делавшей легким распространение, которое он имел в виду. Формулы Вейерштрасса, относящиеся к теории эллиптических функций, можно найти собранными в сборнике г-на Шварца, опубликованными в высшей степени заботливо; но нельзя сделать полного отчета о ходе его идей, не обращаясь к оригинальным мемуарам.

Абелевы функции

14. Вейерштрасс, как я уже сказал, всю жизнь занимался абелевыми функциями; в первый период своей деятельности он старается распространить на эти трансценденты, и в частности на гиперэллиптические функции, известные свойства sn, cn и dn; в этот период он еще не дал окончательной формы своей собственной теории эллиптических функций; позднее же он должен будет довести до конца результаты, которые получил тогда.

Но в это время появился мемуар Римана, который оказал большое влияние на развитие этой дисциплины. Гиперэллиптические функции перестали играть исключительную роль в работах аналитиков, и они стали рассматривать абелевы функции, порождаемые самыми общими алгебраическими кривыми. Но уже доказанные Вейерштрассом теоремы легко распространялись на них.

В этом круге идей все покоится еще на изучении абелевых интегралов и рациональных функций двух переменных x и y, связанных алгебраическим уравнением. К этому кругу идей относится одна важная работа Вейерштрасса, результаты которой изложены в письме г-ну профессору Шварцу. В ней определены действительно существенные особенности алгебраических кривых, такие, которые не изменяются при бирациональных преобразованиях и которые теперь называют «точками Вейерштрасса». Берлинский геометр показал также, как взаимные связи между этими особенностями позволяют нам определить бирациональные преобразования кривой в себя.

15. Но абелевы функции, определенные Риманом, не являются самыми общими периодическими функциями. В самом деле, мы знаем, что число модулей кривой порядка p равно $3p-3$; число произвольных коэффициентов функции θ с p переменными равно $p\,(p+1)/2$; эти два числа равны только для $p=2$ и $p=3$; для $p>3$ второе больше первого. Следовательно, есть функции θ, которые не соответствуют алгебраическим кривым.

Таким образом, Вейерштрасс был вынужден подойти к вопросу другим путем и искать самые общие периодические функции. Прежде всего возникает первый вопрос: сколько периодов может иметь функция n переменных? Задача была решена Якоби, который показал, что максимальное число этих периодов $2n$. Вейерштрасс дал новое доказательство теоремы Якоби и отчетливо указал условия, при которых она применима.

Затем он занялся изучением свойств самых общих функций, зависящих от n переменных и имеющих $2n$ периодов. Он выяснил, что они обладают свойствами, аналогичными свойствам эллиптических трансцендент.

Между $n+1$ функциями, имеющими одни и те же периоды, всегда существует алгебраическое соотношение; отсюда следует прежде всего, что эти функции обладают теоремой сложения и удовлетворяют дифференциальным уравнениям.

Наконец, Вейерштрасс доказал, что подобная функция является всегда отношением двух рядов θ и что самые общие абелевы функции могут быть выведены из функций Римана известным процессом «приведения абелевых интегралов».

Цель была достигнута.

Разное

16. О других работах Вейерштрасса я скажу немного, несмотря на их важность и разнообразие.

Два ранних мемуара посвящены аналитическим факультетам, которые были предметом многочисленных и давних попыток, часто довольно плохо сделанных, и которые очень просто приводятся к эйлеровым функциям.

Вопрос о комплексных единицах также занимал Вейерштрасса в его последние годы; возлагали большие надежды на ряд изобретений комплексных чисел; ожидали от этого тех же неожиданностей, которые принесли мнимые числа. Надо от них отказаться; теперь известно, что все комплексные числа — я хочу сказать все те, для которых умножение коммутативно, — сводятся к мнимым и мы о них ничего больше не узнаем.

Открытие г-на Эрмита, доказавшего трансцендентность e, скоро повлекшее открытие г-на Линдемана, который установил трансцендентность π, привлекало в течение 15 лет внимание всех геометров; это не могло помешать тому, что доказательство Вейерштрасса значительно усовершенствовало доказательства его предшественников.

Отметим еще мемуар о представлении функций действительного переменного рядами полиномов; два других — по теории квадратичных форм; работу над проблемой вариационного исчисления; другую — по основной теореме проективной геометрии, и т. д.

Эти примеры достаточны для нас, чтобы показать, как, оставаясь всегда верным одному и тому же духу, он затронул все части математических наук и с какой гибкостью приспосабливались к самым различным задачам плодотворные методы, которые он создал.

Заключение

17. Заканчивая этот краткий анализ, я хотел бы охарактеризовать в нескольких словах тот дух, который во всех работах воодушевлял учителя и его учеников.

Прежде всего это постоянная забота о совершенной строгости. Для этого Вейерштрасс отказывается пользоваться интуицией или по крайней мере оставляет ей только часть, которую не может у нее отнять. Интуитивные понятия проанализированы и сведены к их элементам; среди этих элементов философы, конечно, нашли бы такие, которые сохраняют интуитивный характер; но они выброшены из области чистой математики, которая может развиваться без них; только одни физики будут ими заниматься. Те, что сохраняются, анализируются в свою очередь, и этот анализ проводится до тех пор, пока не приходят к крайнему элементу, целому числу.

Отсюда по отношению к геометрии некоторое недоверие, характерное для берлинской школы; можно сказать, что она ищет не [способ] видеть, но [способ] понимать.

Следовательно, все происходит от целого числа и соучаствует в достоверности арифметики; сама непрерывность сводится к этому началу, и все равенства, составляющие объект анализа и где фигурируют непрерывные величины, являются только символами, заменяющими бесконечное множество неравенств между целыми числами.

Итак, аналитические понятия для Вейерштрасса, как и для Кронекера, являются конструкциями, сделанными из одних и тех же материалов, целых чисел. Но есть разница между двумя концепциями; Кронекер особенно озабочен тем, чтобы выставить на вид философский смысл математических истин; целое число есть основа всего, он хочет, чтобы это оставалось всюду очевидным; для него единственные законные операции — это сложение и умножение; только иногда, делая уступку современным предрассудкам, он соглашается допускать деление.

Не такова точка зрения Вейерштрасса. Как только он возвел конструкцию, он забывает, из каких материалов она сделана, и хочет видеть в ней только новую единицу, которую он сделает одним из элементов более грандиозной конструкции. Он может это сделать без боязни, так как раз и навсегда он доказал ее прочность.

Эти промежуточные единицы, несомненно, являются только вспомогательными; но наш ум настолько слаб, что не может обойтись без них, так как не может постичь сразу все детали большого ансамбля. Следовательно, эти ухищрения необходимы, если мы хотим постоянно двигаться вперед, чего как раз хочет Вейерштрасс. Кронекер также сделал много открытий; но приходил он к ним, только забывая, что был философом, и отбрасывая сам свои принципы, которые с самого начала были осуждены на бесплодие.

Вейерштрасс действует в своей конструкции, исходя из целого числа; он идет все время от простого к более сложному. Он отличается этой тенденцией от других аналитиков, которые исходят из общего и неопределенного и затем определяют его мало-помалу с помощью ограничительных гипотез. Отсюда различие в способах понимания аналитической функции между ним и его предшественниками.

Кажется, еще одна мысль руководила им. В 1875 г. он писал Шварцу: «Чем больше я думаю о принципах теории функций — а я непрестанно это делаю, — тем более основательно убеждаюсь, что они основаны на алгебраических истинах и, следовательно, не является истинным путь, когда обратно прибегают к трансценденте, чтобы доказать простые и фундаментальные теоремы алгебры; это остается верным, какими бы ни казались проницательными с самого начала рассуждения, с помощью которых Риман открыл столько важных свойств алгебраических функций».

Я мог бы привести другие примеры, где он руководствовался той же идеей. Он постоянно старался идти к цели наименее окольным путем, который не всегда является самым быстрым и самым элегантным, но единственно логичным.

Приложение 2

Лекции Вейерштрасса в Берлинском университете *

1856/57, зима. Избранные главы математической физики.

1857, лето. Общие теоремы, относящиеся к представлению аналитических функций сходящимися рядами (1 час).
Теория эллиптических функций (4 часа).

1857/58, зима. Избранные геометрические и механические задачи, решаемые с помощью теории эллиптических функций (2 часа).
Теория и применение тригонометрических рядов и определенных интегралов, служащих для определения произвольных функций (3 часа).

1858, лето. Некоторые избранные главы интегрального исчисления (2 часа).
Новая геометрия (1 час).

1858/59, зима. Общие теоремы, относящиеся к представлению аналитических функций посредством бесконечных рядов (1 час).
Теория эллиптических функций (5 часов).

1859, лето. Однородные функции 2-й степени с бесконечно многими переменными (2 часа. Только объявлено).

1859/60, зима. Формулы аналитической диоптрики (1 час. Только объявлено).
Введение в анализ (5 часов).

---

* Список взят из [3, с. 355—360].

1860, лето. Некоторые избранные главы аналитической механики (2 часа).
Введение в анализ (продолжение) (4 часа).
1860/61, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1861, лето. Некоторые избранные задачи геометрии и механики, решаемые с помощью эллиптических функций (4 часа).
1861/62, зима. О поверхностях 2-го порядка (2 часа. Только объявлено).
Общая теория аналитических функций (4 часа. Только объявлено).
1862/63, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1863, лето. Избранные задачи геометрии и механики, решаемые с помощью эллиптических функций (4 часа).
Введение в теорию абелевых функций (3 часа).
1863/64, зима. Общая теория аналитических функций (6 часов).
1864, лето. Новая синтетическая геометрия (5 часов).
1864/65, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1865, лето. О применении теории эллиптических функций к геометрическим и механическим задачам (3 часа).
Вариационное исчисление (4 часа).
1865/66, зима. Теория аналитических функций (6 часов).
1866, лето. Теория абелевых трансцендент (4 часа).
Новейшая синтетическая геометрия (6 часов).
1866/67, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1867, лето. Приложения эллиптических функций к геометрическим и механическим задачам (4 часа).
Вариационное исчисление (4 часа).
1867/68, зима. Теория детерминантов и ее приложения (2 часа).
Новейшая синтетическая геометрия (4 часа).
1868, лето. Теория аналитических функций (6 часов).
1868/69, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1869, лето. Теория абелевых функций (4 часа).
Различные приложения эллиптических функций (4 часа).
1869/70, зима. Вариационное исчисление (4 часа).
Новейшая синтетическая геометрия (4 часа).
1870, лето. Теория аналитических функций (6 часов).
1870/71, зима. Теория эллиптических функций (8 часов).
1871, лето. Новейшая синтетическая геометрия (4 часа).
Избранные геометрические и механические проблемы, решаемые с помощью теории эллиптических функций (4 часа).
1871/72, зима. Теория абелевых функций (6 часов).
1872, лето. Введение в теорию аналитических функций (4 часа).
Вариационное исчисление (4 часа).
1872/73, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1873, лето. Элементы новой синтетической геометрии (4 часа).
Избранные геометрические и механические проблемы, решаемые с помощью теории эллиптических функций (4 часа).
1873/74, зима. Теория абелевых функций (6 часов).
1874, лето. Введение в теорию аналитических функций (6 часов).
1874/75, зима. Теория эллиптических функций (6 часов) *.
1875, лето. Избранные задачи геометрии и механики, решаемые с помощью теории эллиптических функций (4 часа).
Вариационное исчисление (4 часа).

---

* Еще читался курс «Дифференциальные уравнения» трем слушателям, в том числе Миттаг-Леффлеру.

1875/76, зима. Теория абелевых функций (6 часов).
1876, лето. Ввведение в теорию аналитических функций (6 часов). Дополнения к теории абелевых функций (2 часа).
1876/77, зима. Теория эллиптических функций (6 часов).
1877, лето. Применение теории эллиптических функций к решению геометрических и механических задач, разъясненное избранными примерами (4 часа).
Вариационное исчисление (4 часа).
1877/78, зима. Теория абелевых функций (6 часов).
1878, лето. Введение в теорию аналитических функций (6 часов). Применение теории абелевых функций к решению избранных геометрических задач (2 часа).
1878/79, зима. Теория абелевых функций (6 часов).
1880, лето. Введение в теорию аналитических функций (6 часов).
1880/81, зима. Введение в теорию аналитических функций. (Только объявлено).
1881, лето. Теория эллиптических функций (5 часов).
1881/82, зима. Теория абелевых функций (5 часов).
1882, лето. Вариационное исчисление (4 часа).
1882/83, зима. Введение в теорию аналитических функций (5 часов).
1883, лето. Теория эллиптических функций (5 часов. Только объявлено).
1884, лето. Вариационное исчисление (5 часов).
1884/85, зима. Введение в теорию аналитических функций (5 часов).
1885, лето. Теория эллиптических функций (5 часов).
1885/86, зима. Избранные главы из теории функций (Только объявлено).
1886, лето. Избранные главы из теории функций (5 часов).
1886/87, зима. Теория и приложения билинеарных и квадратичных форм (3 часа).
1887, лето. Теория гиперэллиптических функций (5 часов).
1887/88, зима. Вариационное исчисление ($4^1/_2$ часа. Только объявлено).
1888/89, зима. Основные понятия и теоремы теоретической физики (3 часа. Только объявлено).
1889/90, зима. Вариационное исчисление (3 часа).

Библиография

Труды К. Вейерштрасса

1. Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Abh. 1. B.: Mayer und Müller, 1894. Bd. 1. 356 S.
2. Mathematische Werke. Abh. 2. B.: Mayer und Müller, 1895. Bd. 2. 363 S.
3. Mathematische Werke. Abh. 3 / Hrsg. von J. Knoblauch. B.: Mayer und Müller, 1903. Bd. 3. 362 S.
4. Mathematische Werke. B.: Mayer und Müller, 1902. Bd. 4. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten von Karl Weierstrass / Bearb. von G. Hettner, J. Knoblauch. 624 S.
5. Mathematische Werke. B.: Mayer und Müller, 1915. Bd. 5. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen von Karl Weierstrass / Bearb. von J. Knoblauch. 312 S.
6. Mathematische Werke. B.: Mayer und Müller, 1915. Bd. 6. Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen von Karl Weierstrass / Bearb. von R. Rothe. 355 S.
7. Mathematische Werke. Leipzig: Akad. Verl., 1927. Bd. 7. Vorlesungen über die Variationsrechnung von Karl Weierstrass / Bearb. von R. Rothe. 324 S.
8. Über die Entwicklung der Modular-Functionen. — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 1—49, Anmerkung *, S. 50.
9. Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 51—66.
10. Zur Theorie der Potenzreihen. — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 67—74.
11. Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen. — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 75—84, Anmerkungen, S. 85.
12. Bemerkungen über die analytischen Facultäten. — Jahresber. Königl. Progymnasium im Deutsch Crone vom Herbst 1842 bis zum Herbst 1843, S. 3—17 [1, S. 87—103].
13. Reduction eines bestimmten dreifachen Integrals. — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 105—109.
14. Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale. — Jahresber. Königl. katholischen Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848/49, S. 3—23 [1, S. 111—131].
15. Zur Theorie der Abelschen Functionen. — J. reine und angew. Math., 1854, Bd. 47, S. 289—306 [1, S. 133—152, Anmerkung, S. 152]. Пер. (F. Woepcke): Sur la théorie des fonctions abeliennes. — J. math. pures et appl., 1854, vol. 19, p. 257—278.
16. Über die Theorie der analytischen Facultäten. — J. reine und angew. Math., 1856, Bd. 51, S. 1—60 [68, S. 183—260; 1, S. 153—221].

* Все примечания (Anmerkungen) сделаны издателями трудов Вейерштрасса.

17. Akademische Antrittsrede. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1857, S. 348—351 [1, S. 223—226].
18. Über die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1857, S. 148—154 [1, S. 227—232].
19. Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben suf die Theorie der kleinen Schwingungen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1858, S. 207—220 [1, S. 233—246].
20. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften an 12. December 1859). — In: Mathematische Werke, Bd. 1, S. 247—256.
21 Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1861, S. 986—987 [1, S. 257—266].
22. Bemerkungen über die Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1862, S. 127—133 [1, S. 267—273].
23. Zur Integration der linearen partiellen Differential-Gleichungen mit constanten Coefficienten. — Acta math., 1884, vol. 6, p. 254—279 [1, S. 275—295; Anmerkung, S. 296]; см. также: *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 75—135.
24. Theorie der Abelschen Functionen. — J. reine und angew. Math., 1856, Bd. 52, S. 285—339 [1, S. 297—355, Anmerkungen, S. 356].
25. Über eine Gattung reeller periodischer Functionen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, S. 97—115, 185 [2, S. 1—18].
26. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1868, S. 310—338 [2, S. 19—44].
27. Über die allgemeinsten Eindeutigen und $2n$-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1869, S. 853—857 [2, S. 45—48].
28. Über das sogennante Dirichlet'sche Princip. — In: Mathematische Werke, Bd. 2, S. 49—54.
29. Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1876, S. 680—693 [68, S. 165—182; 2, S. 55—69, Anmerkungen, S. 70].
30. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872). — In: Mathematische Werke, Bd. 2, S. 71—74.
31. Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differential-Gleichungen mit constanten Coefficienten (Gelesen Akad. Wiss. 28. Oct. 1875). — In: Mathematische Werke, Bd. 2, S. 75—76.
32. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. — Math. Abh. Akad. Wiss. Berlin, 1876, S. 11—60 [68, S. 1—52; 2, S. 77—124]. Пер. (E. Picard): Sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable. — Ann. École norm. Super. Sér. 2, 1879, vol. 8, p. 122—150.
33. Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen. — J. reine und angew. Math., 1880, Bd. 89, S. 1—8 [2, S. 125—133, Anmerkung, S. 134].
34. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. B., 1879 [68, S. 105—164; 2, S. 135—188].

35. Über einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1880, S. 707—717 [68, S. 53—66; 2, S. 189—199].
36. Zur Functionenlehre. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1880, S. 719—743 [68, S. 67—101; 2, S. 201—223; Anmerkungen, S. 224—230]. Nachtrag. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1881, S. 228—230 [68, S. 102—104; 2, S. 231—233]. Пер. (J. Tannery): Remarques sur quelques points de la théory des fonctions analytiques. — Bull. sci. math. et astron. Sér. 2, 1881, vol. 5.
37. Aus einem bisher noch nicht veröffentlichten Briefen an Herrn Professor Schwarz, von. 3. Oktober 1875. — In: Mathematische Werke, Bd. 2, S. 235—244.
38. Zur Theorie der elliptischen Functionen. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1882, S. 443—451 [2, S. 245—255].
39. Zur Theorie der elliptischen Functionen. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1883, S. 193—203, 265—275, 1271—1297 [2, S. 257—309]. Пер. (A. Pautonnier): Sur la théorie des fonctions elliptiques. — Acta math., 1885, vol. 6, p. 169—228.
40. Zur Theorie der aus n Hauptainheiten gebildeten complexen Grössen. — Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, 1884, S. 395—414 [2, S. 311—332]; Zusätzliche Bemerkungen von Herrn H. A. Schwarz. — In: Mathematische Werke, Bd. 2, S. 332—339, 414—419, 516—519.
41. Zu Hrn Lindemann's Abhandlung: Über die Ludolph'sche Zahl. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1885, S. 1067—1085 [2, S. 341—362, Anmerkung, S. 363].
42. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1885, S. 320—332, 633—639, 789—805 [3, S. 1—37]. Пер. (Laugel): Sur la représentation analytique des fonctions nommées arbitraires de l'argument réel. — J. math. Sér. 4, 1886, vol. 2, p. 109—146.
43. Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist (Umarbeitung einer am 25. Juni 1886 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gelesenen). — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, S. 612—625 [3, S. 39—52].
44. Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 53—114.
45. Über die Convergenz der θ-Reihen beliebig vieler Argumente. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 115—122.
46. Verallgemeinerung einer Jacobi'schen Theta-formel. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 123—137.
47. Nachtrag zu der am 4. Marz 1858 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesenen Abhandlung: Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1882, S. 505—508 [3, S. 139—148].
48. Über die Bedingungen zur Zerlegbarkeite einer ganzen rationalen Function von mehr als zwei Veränderlichen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 149—153.
49. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1882, S. 505—508 [3, S. 155—159].
50. Reingeometrischer Beweis des Hauptsatzes der projectivischen Geometrie. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 161—174.
51. Zur Dioptrik. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 175—178.

52. Zur specielle Flächen vierter Ordnung (Aus Jacob Steiner's Gesammelten Werken, Bd. II (Berlin, 1882), S. 741—742, mit geringer Veränderung abgedruckt). — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 179—181, Anmerkung, S. 182.
53. Über eine die Raumcurven constanter Krümmung betreffende, von Delaunay herrührende Aufgabe der Variationsrechnung. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 183—217.
54. Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen. — Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, S. 855—856 [3, S. 219—220].
55. Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächenstücke, deren Begrenzung aus geradlinigen, ganz im endlichen liegenden Strecken besteht. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 221—238, Anmerkung, S. 239.
56. Über eine besondere Gattung von Minimalflächen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 241—247, Anmerkung, S. 248.
57. Einfacher Beweis eines hermiteschen Satzes. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 249—250, Anmerkung, S. 250.
58. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1891, S. 1085—1101 [3, S. 251—269, Anmerkung, S. 270].
59. Zur Determinantentheorie. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 271—286, Anmerkung, S. 287.
60. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 289—294, Anmerkung, S. 295.
61. Über Normalformen algebraischer Gebilde. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 257—307, Anmerkung, S. 308.
62. Zur Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 309—312.
63. Über die Sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte. — Jahresber. Königl. Progymnasium im Deutsch Crone von Herbst 1844 bis zum Herbst 1845, S. 1—11 [3, S. 315—329].
64. Aussprache bei der Übernahme des Rectorats der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 15. Oktober 1873. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 331—339.
65. Rede Zur Gedächtniss-Feier der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 3. August 1874. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 341—349.
66. Zu E. E. Kummers fünfzigkjährigen Doctorjubiläum (Im Auftrage der philos. Facultät d. Kön. Friedrich Wilhelms-Universität zu Berlin überreicht zum 10. September 1881). — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 351—359.
67. Verzeichnis der von Weierstrass an der Universität zu Berlin gehaltenen und angekündigten Vorlesungen. — In: Mathematische Werke, Bd. 3, S. 355—360, Anmerkungen. S. 361.
68. Abhandlungen aus der Functionenlehre. B., 1886. 260 S. Книга охватывает содержание статей [16, 20, 32, 34—36].
69. Briefe an Paul du Bois Reymond. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 199—225.
70. Briefe an L. Koenigsberger. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 226—239.
71. Brief an Thomé: Weierstrass über Poincarés Théorie der Fuchsschen Funktionen. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 240—245.
72. Briefe an L. Fuchs. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 246—256.

73. Eine Äusserung von Weierstrass an Mittag-Leffler über das Dreikörperproblem. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 257—258.
74. Briefe von Karl Weierstrass an Sofie Kowalewskaja. Moskau: Nauka, 1973. 312 S. (см. [124]).
75. Zur Funktionentheorie. — Acta math., 1925, vol. 45, p. 1—10.

Использованная литература

76. *Abel N. H. L.* Oeuvres complètes / Red. par B. Holmboe. Christiania: Grøndahl. 1839. T. 1, 2. 2 Nouv. éd. / Par L. Sylow, S. Lie. Christiania: Grøndahl, 1881. T. 1, 2.
77. Niels Henrik Abel: Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania etc., 1902.
78. *Biermann K.-R.* Dirichlet über Weierstrass. — Prax. Math., 1965, Bd. 7, S. 303—312.
79. *Biermann K.-R.* Die Berufung von Weierstrass nach Berlin. — In: Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. Köln; Opladen: Westdt. Verl., 1966, S. 41—52.
80. *Biermann K.-R.* Karl Weierstrass: Ausgewählte Aspekte seiner Biographie. — J. reine und angew Math., 1966, Bd. 223, S. 191 —220.
81. *Biermann K.-R.* Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810—1920. B.: Univ. Bibl., 1968. 265 S.
82. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen. B.: Springer Verl., 1932.
83. *Cauchy A. L.* Oeuvres complétes. P.: Gauthier-Villars, 1882—1974. T. 1—27.
84. *Conforto F.* Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. B.: Springer Verl., 1956.
85. *Dantscher V.* Vorlesungen über die Weierstraß'sche Theorie der irrazionalen Zahlen. Leipzig: Teubner, 1908.
86. *Dugac P.* Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. — Arch. Hist. Exact Sci., 1973, vol. 10, p. 41—176.
87. *Eccarius W.* August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals. — J. reine und angew. Math., 1976, Bd. 286/287, S. 5—25.
88. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815—1965 / Hrsg. von H. Behnke, K. Kopfermann. Köln; Opladen: Westdt. Verl., 1966. 612 S.
89. *Flaskamp F.* Herkunft und Lebensweg des Mathematikers Karl Weierstrass. — Forsch. und Fortschr., 1961, H. 8, S. 236—239.
90. *Fuchs L.* Gesammelte mathematische Werke. B.: Mayer und Müller, 1904—1908. Bd. 1—3.
91. *Gerver J.* The differentiability of the Riemann function at certain rational multiplies of π. — Amer. J. Math., 1970, vol. 92, p. 33—50.
92. *Gudermann Chr.* Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. — J. reine und angew. Math., 1838, Bd. 18.
93. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre. — J. reine und angew. Math., 1872, Bd. 74, S. 172—188.
94. *Hilbert D.* Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass. — Götting. Nachr. Geschäft. Mitt., 1897, S. 60—69.
95. *Jacobi C. G.* Gesammelte Werke. B.: Reimer, 1881—1891. Bd. 1—7.
96. *Jacobi C. G.* Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiomonti, sumtibus fratrum Bontraeger, 1829, p. 191.
97. *Kiepert L.* Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstrass. — Jahresber. Dt. Math. Verein., 1926, Bd. 35, S. 56—65.
98. *Killing W.* Nichteuklidische Raumformen in analytischen Behandlung. Leipzig, 1885.

99. *Kneser A.*. Lehrbuch der Variationsrechnung. 2. Aufl. Braunschweig, 1925. VIII, 397 S.
100. *Koenig R.* «Weierstrass-Woche» in Münster. — Jahresber. Dt. Math. Verein., 1925, Bd. 34, Abt. 2, S. 106—108.
101. *Lagrange J. L.* Oeuvres. P., 1881. T. 9. 428 p.
102. *Lampe E.* Zum Gedächtnisse von Karl Weierstrass. — Verh. Phys. Ges. Berlin, 1898, N 51, S. 50—71.
103. *Lampe E.* Zur 100. Wiederkehr des Geburtstages von Karl Weierstrass. — In: Sitzungsber. Berlin. Math. Ges., Leipzig: Teubner, 1915, S. 36—58.
104. *Laplace P. S.* Oeuvres complètes. P.: Gauthier-Villars, 1878—1912, T. 1—14.
105. *Lorey W.* Karl Weierstrass zum Gedächtnis zur 100 Wiederkehr seines Geburtstages. — Ztschr. math. und naturwiss. 46. Jahrg. 1915, H. 12, S. 597—607.
106. *Mittag-Leffler G.* Weierstrass. — Acta math., 1897, vol. 21, p. 79—82.
107. *Mittag-Leffler G.* Une page de la vie de Weierstrass. — In: C. r. 2^e Congr. intern. math., Paris, 1900. P., 1902, p. 131—153.
108. *Mittag-Leffler G.* Zur Biographie von Weierstrass. — Acta math., 1912, vol. 35, p. 29—65.
109. *Mittag-Leffler G.* Die ersten 40. Jahre des Lebens von Weierstrass. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 1—57.
110. *Mittag-Leffler G.* Weierstrass et Sonja Kowalewsky. — Acta math., 1923, vol. 39, p. 133—198.
111. *Poincaré H.* Oeuvres. P.: Gauthier-Villars, 1928—1956. T. 1—11.
112. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. — Acta math., 1890, vol. 13, p. 1—270.
113. *Reimann B.* Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. 2 Aufl. Leipzig: Teubner, 1892.
114. Reden von Rectoren der Berliner Universität, 1810—1932. B., 1977.
115. *Runge C.* Persönliche Frinnerungen an Karl Weierstrass. — Jahresber. Dt. Math. Verein., 1926, Bd. 35, H. 5.
116. *Runge I.* Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk. Göttingen, 1949. 214 S.
117. *Stolz O.* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: Nach der neueren Ansichten, Leipzig, 1885. Th. 1. 343 S.; 1886. Th. 2. 326 S.
118. *Schwarz H. A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. B.: Springer, Verl., 1890. Bd. 1, 2.
119. *Schwarz H. A.* Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen: Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass / Bearb. und hrsg. von H. A. Schwartz. Göttingen, 1883; 2. Aufl. B., 1893.
120. *Tchebycheff P.* Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynom du troisième ou du quatrième degré. — J. math. pures et appl. Sér. 2, 1857, vol. 2, p. 1—42.
121. *Tchebyscheff P.* Angenährte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittels einfacher Brüche. — Acta math., 1894, vol. 18, p. 113—132.
122. *Wussing H.*, *Arnold W.* Biographien bedeutender Mathematiker. B.: Volk und Wissen, 1975. 534 S.
123. *Бирман К.-Р.* О незавершенном издании трудов К. Вейерштрасса: (К 150-летию со дня рождения великого математика). — In: Actes XI Congr. intern. hist. sci. Varsovie, 1966, vol. 3, p. 235—239. (Заседание 26 авг. 1965 г.).

124. [*Вейерштрасс К.*] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской, 1871—1891 / Под ред. П. Я. Кочиной. М.: Наука, 1973. 312 с. (см. [74]).
125. *Вейерштрасс К.* Речь при вступлении в должность ректора Берлинского университета / Пер. А. Н. Крылова. — УФН, 1918, вып. 2, с. 85—93.
126. *Добровольский В. А.* Василий Петрович Ермаков. М.: Наука, 1981. 89 с.
127. *Долбня И. Л.* Исследования по теории абелевых интегралов. СПб., 1896.
128. *Ель Е.* [*Литвинова Е. Ф.*] Из времени моего студенчества. Знакомство с С. В. Ковалевской. — Женское дело, 1899, № 4, с. 34—63.
129. *Ермаков В. П.* Теория абелевых функций без римановых поверхностей. Киев, 1897.
130. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. М.: Гостехиздат, 1949—1956. Ч. 1. Геометрия Лобачевского и ее предыстория. 492 с.
131. Киевские математики-педагоги / Ред. А. Н. Боголюбов. Киев: Вища школа, 1979. 312 с.
132. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. 432 с.
133. *Ковалевская С. В.* Научные работы / Ред. и коммент. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
134. *Ковалевская С. В.* Воспоминания и письма / Отв. ред. М. В. Нечкина; Коммент. С. Я. Штрайха. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 576 с.; 2-е изд., 1961. 576 с.
135. *Ковалевская С. В.* Воспоминания, повести / Ред. П. Я. Полубаринова-Кочина. М.: Наука, 1974. 559 с.
136. Письма С. В. Ковалевской от иностранных математиков / Публ. П. Я. Кочиной: Препр. Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979. 66 с.
137. *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891). М.: Наука, 1981. 312 с.
138. *Маркушевич А. И.* Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука. 1979. 240 с.
139. Математика XIX века: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1978. 255 с.
140. Математика XIX века: Геометрия. Теория аналитических функций / Ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1981. 269 с.
141. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия. Т. 1. А—Г. 1977; Т. 2. Д—Коо. 1979; Т. 3. Коо—Од. 1982; Т. 4. Ок—Сло; 1984; Т. 5. Слу—Я, 1985.
142. *Ожигова Е. П.* Александр Николаевич Коркин. Л.: Наука, 1968. 148 с.
143. *Ожигова Е. П.* Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982. 289 с.
144. *Оре О.* Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М.: Физматгиз, 1961. 343 с.
145. Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера / Сост. П. Я. Кочина, Е. П. Ожигова. М.: Наука, 1984. 312 с.
146. *Покровский П. М.* Памяти Карла Вейерштрасса. Киев, 1898. 16 с.
147. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Карл Т. В. Вейерштрасс. — УМН, 1966, вып. 3, с. 213—224.

148. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983.
149. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1971—1974. Т. 1—3.
150. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
151. *Тимченко И. Ю.* Основания теории аналитических функций. Одесса, 1899. Ч. 1.
152. *Тихомандрицкий М. А.* Обращение гиперэллиптических интегралов. Харьков, 1885.
153. *Тихомандрицкий М. А.* Основания теории абелевых интегралов. Харьков, 1895. 235 с.
154. *Тихомандрицкий М. А.* Карл Вейерштрасс. — Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2, 1899, т. 6, с. 35—56.
155. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947—1951. Т. 1—5.
156. *Чебышев П. Л.* Письмо к С. В. Ковалевской / Публ. П. Я. Кочиной, Р. Л. Кука. — Вопр. истории естествознания и техники, 1983, № 2, с. 162—166.
157. *Шварц Г. А.* Письмо к С. В. Ковалевской / Публ. П. Я. Кочиной. — Вопр. истории естествознания и техники, 1980, № 4, с. 105—111.
158. *Эрмит Ш.* Письма к С. В. Ковалевской / Публ. П. Я. Полубариновой-Кочиной. — Тр. Ин-та ИЕиТ, 1957, т. 19, с. 650—689.
159. *Эрмит Ш.* О Вейерштрассе: Речь 1 марта 1897 г. в заседании Парижской академии наук / Пер. с фр. А. В. Васильева. Казань, 1897.
160. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.: ОНТИ, 1936.
161. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

Даты жизни и деятельности Карла Вейерштрасса*

1815, 31 октября — родился Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс.
1829, весна — поступил в 6-й класс Теодорианской гимназии в Падерборне.
1834 — окончил Теодорианскую гимназию.
1834, осень — поступил в университет в Бонне.
1838, осень — поступил в Академию Мюнстера (матрикулировался).
1839, осень — эксматрикулировался и стал готовиться к государственным экзаменам.
1840, 29 февраля — отправил письмо в испытательную комиссию о допуске к экзаменам.
1840, 2 мая — получил вопросы и темы для проработки.
1841, 23—24 апреля — устные испытания; получил звание facultas docendi (право преподавания).
1841—1842 — пробный год в школе Мюнстера.
1842, 2 ноября — начал работать школьным учителем в Дейч-Кроне.
1844 — обручение.
1844, август—октябрь — занимался в Берлине, чтобы стать учителем гимнастики.
1848, 1 октября — начал работать школьным учителем в Браунсберге (до 13 июня 1856 г.).
1854, 31 марта — получил диплом доктора наук honoris causa.
1854, 30 июня — звание старшего учителя (Oberlehrer).
1855, 1 октября — получил годичный отпуск для научной работы.
1856, 14 июня — утвержден профессором Промышленного института (Gewerbeinstitut).
1856, 22 сентября — на съезде естествоиспытателей и врачей в Вене сделал доклад «К диоптрике».
1856, 11 октября — утвержден экстраординарным профессором Берлинского университета.
1856, 19 ноября — избран ординарным членом Берлинской академии наук.
1857, 9 июля — в день Лейбница произнес вступительную речь в качестве члена Берлинской академии наук.
1860, 6 июня — Куммер и Вейерштрасс ходатайствуют об учреждении математического семинара в Берлинском университете.
1861, 21 сентября — сделал доклад на 36-м Собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Шпейере.
1864, 2 июля — назначен ординарным профессором Берлинского университета.
1864, 4 декабря — избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

---

* Здесь использован материал, любезно предоставленный профессором К.-Р. Бирманом.

1865 — избран иногородним членом Геттингенского математического общества.
1868, 21 декабря — избран членом-корреспондентом Парижской академии наук.
1870, 3 октября — С. В. Ковалевская встретилась с Вейерштрассом.
1870—1871 — назначен деканом философского факультета Берлинского университета.
1873—1874 — был ректором Берлинского университета.
1873, 15 октября — произнес ректорскую речь.
1873, 3 августа — речь по случаю юбилея Берлинского университета.
1875 — удостоен прусского ордена Pour le Mérite.
1875 — избран иностранным членом Венской академии наук.
1881 — избран членом Лондонского королевского общества.
1881, 10 сентября — произнес речь по поводу юбилея Куммера.
1882 — удостоен ордена Почетного Легиона Франции.
1883, 16 декабря — избран иностранным членом Accademia dei Lincei в Риме.
1885, 31 октября — празднование 70-летия Вейерштрасса.
1891, 7 октября — получил «большую золотую медаль» за 50-летие службы.
1892 — получил медаль Гельмгольца Берлинской академии наук.
1895, 25 февраля — избран членом Парижской академии наук.
1895 — получил золотую медаль Коплея Лондонского королевского общества.
1895, 2 декабря — избран иностранным почетным членом Петербургской академии наук.
1897, 10 февраля — Вейерштрасс скончался.

Оглавление

Пелагея Яковлевна Кочина

Карл Вейерштрасс
1815—1897

Утверждено к печати
Редколлегией
научно-биографической серии АН СССР

Редактор В. А. Никифоровский

Редактор издательства Н. И. Лезнова
Художественный редактор Л. В. Кабатова
Технический редактор Т. В. Калинина
Корректоры Н. Г. Васильева, Л. В. Письман

ИБ № 27965
Сдано в набор 18.02.85
Подписано к печати 26.09.85
Т-14938. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$
Бумага книжно-журнальная (импорт.)
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 14,28. Усл. кр. отт. 14,49. Уч.-изд. л. 15,9.
Тираж 6200 экз. Тип. зак. 160
Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

П. Я. Кочина Карл ВЕЙЕРШТРАСС

П. Я. Кочина

Карл ВЕЙЕРШТРАСС

1 р.