Г. Н. ДУБОШИН

ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

ОНТИ НКТП СССР 1938

Г. Н. Дубошин — ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

Г. Н. ДУБОШИН
профессор Московского государственного университета

ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

Т—63—5—2
ТКК № 3

К ЧИТАТЕЛЮ

Издательство просит присылать Ваши замечания и отзывы об этой книге по адресу: Москва, центр, Третьяковский проезд, 1, Редакции технико-теоретической литературы ОНТИ.

АННОТАЦИЯ

Книга предназначена служить учебником небесной механики для специализирующихся по астрономии студентов старших курсов физико-математических и механо-математических факультетов университетов. Цель автора состояла в том, чтобы дать ясное понятие о цели и классических методах небесной механики, не затрагивая при этом так называемых неклассических методов этой науки, которые в вводных курсах небесной механики обычно не рассматриваются.

Редактор *С. А. Шорыгин* Технический редактор *Е. Весник*
Рецензент *проф. С. А. Казаков* Корректор *В. И. Беззубикова*

Сдано в производство 10/XII 1937 г. Подписано к печати 22/IV 1938 г. Формат бум. 62×94 1/16 Колич. печ. листов 16. Учетно-авт. л. 17,5. Тираж 2000. Учетный № 4634. Уполном. Главлита № Б-44703. Технико-теоретическая редакция № 60. Колич. зн. в печ. л. 53856. Зак. № 2899.

Отпечатано на бумаге Окуловской фабрики.

4-я тип. ОНТИ НКТП „Красный Печатник" Ленинград, Международный пр., 75а.

Светлой памяти незабвенного учителя
Сергея Алексеевича Казакова
посвящается эта книга.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание предлагаемого учебника „Введение в небесную механику“ соответствует в существенных чертах программе курса лекций, читавшихся в течение ряда лет в Московском университете покойным профессором С. А. Казаковым.

На протяжении всего курса мы старались дать ясное понятие о цели и классических методах небесной механики, указывая, где это только было возможно и уместно, на недостаточность классических методов и неудовлетворительность рассуждений. Наряду с этим мы неоднократно отмечаем, что для многих целей практического характера, не требующих рассмотрения чрезмерно больших промежутков времени, классические методы все же могут быть использованы и действительно используются, составляя еще и в настоящее время основной теоретический аппарат, знать который необходимо каждому астроному.

Рассматривая только вопросы и методы классической небесной механики, мы совершенно не затронули обширной области вопросов, составляющих содержание современной небесной механики, или, как ее теперь иногда называют, неклассической небесной механики. Мы предполагаем, что эти вопросы составят содержание другой книги, которая намечалась к изданию.

Первые три главы нашего курса посвящены постановке основной задачи небесной механики — выводу диференциальных уравнений этой задачи в абсолютных и относительных координатах и классических интегралов.

Главы четвертая и пятая посвящены невозмущенному движению. В них мы даем вывод общего интеграла этой задачи при помощи интегралов Лапласа, полное исследование движения и совокупность окончательных формул, необходимых для вычисления координат космического тела для любого момента времени.

В главе шестой рассматривается возмущенное движение под действием произвольной возмущающей силы. Основным методом, используемым в этой главе, является метод изменения произвольных постоянных, за каковые принимаются шесть элементов, определяющих невозмущенное движение. Вывод диференциальных уравнений для оскулирующих элементов мы заимствовали из сочинения С. А. Казакова: „Орбита кометы 1904 I“. Мы пользовались также брошюрой С. А. Казакова: „О методе изменения произвольных постоянных“, напечатанной в 1908 г.

Глава седьмая посвящена краткому очерку теории канонических уравнений и является вводной главой к теории возмущений.

Последние три главы содержат основы классической теории возмущений, причем для простоты выкладок мы рассматриваем систему, состоящую только из Солнца и двух планет. В изложении этих глав мы следовали, с незначительными изменениями, известному руководству Шарлье, который превосходно выясняет сущность разбираемых вопросов, не углубляясь далеко в дебри вычислительной техники.

Проф. С. А. Казаков, уже будучи больным, просмотрел всю рукопись этой книги и сделал автору ряд ценных и важных замечаний, которые были приняты с глубокой признательностью и которые в значительной степени уменьшили неизбежные недостатки этой книги. Лишенный возможности выразить проф. С. А. Казакову свою глубокую благодарность, автор счел своим долгом посвятить эту книгу памяти ее первого внимательного читателя и строгого критика.

Кроме уже упомянутых сочинений, мы пользовались при составлении этой книги следующими руководствами:

1) *Dziobek*, Die Mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen, 1888.

2) *Tisserand*, Traité de mécanique céleste, v. I, 1889.

3) *Charlier*, Die Mechanik des Himmels, Bd. I, 1927.

4) *Poincaré*, Leçons de mécanique céleste, v. I, 1905.

Москва, январь — июнь 1936 г.

Г. Дубошин

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава V. **Ряды эллиптического движения**

Глава VI. **Возмущенное движение**

Глава VII. **Канонические уравнения**

Глава VIII. **Канонические уравнения основной задачи небесной механики**

Глава IX. **Общая теория возмущений**

Глава X. **Вековые возмущения**

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Задачи небесной механики и исходные принципы их разрешения. Небесной механикой называется отдел астрономии, в котором изучаются движения и формы небесных тел или, лучше сказать, небесных объектов. Последнее понятие одинаково включает в себя как ничтожнейшие частицы космической пыли, так и крупнейшие звезды, а также целые звездные системы и туманности. Изучить движение какого-либо небесного тела это значит, — с одной стороны, установить общие законы, характеризующие его движение в целом, а с другой стороны, получить возможность определять для всякого момента времени положение и скорость тела, по отношению к другим телам вселенной. Эти две части исследования всякого движения известны под названиями *качественного* и *количественного* анализа движения и не могут быть отделены одна от другой в том случае, если мы ставим своей целью возможно более полное изучение явлений, окружающего нас мира.

Как известно из механики, движение всякого тела разлагается на поступательное движение его центра тяжести, на вращение вокруг центра тяжести и на изменение формы тела. Эти три части движения также, строго говоря, не могут быть отделены одна от другой и должны рассматриваться совместно.

Всякое движение происходит вследствие совместного действия ряда сил. Для того чтобы изучить движение, необходимо точно знать характер каждой силы и законы, определяющие ее изменение. Если то и другое известно, то изучение движения сводится, согласно принципам механики, к решению некоторых диференциальных уравнений и к последующему исследованию этих уравнений и их интегралов.

К сожалению, силы, обусловливающие движения небесных тел, или небесных объектов, чрезвычайно многочисленны и разнообразны по своему характеру и происхождению. Законы, определяющие их изменения, в некоторых случаях известны только приблизительно, а в других случаях и совершенно неизвестны, вследствие чего изучение движений, с абсолютной точностью и во всех подробностях, становится *фактически невозможным.* Поэтому мы оказываемся вынужденными отказаться заранее от такой явно безнадежной задачи и заменить ее другой, более простой задачей — *приближенным исследованием* движений небесных тел. Эта задача приводит нас к хорошо известному и широко применяющемуся почти во всех отраслях знания *методу после-*

довательных приближений, основная идея которого состоит в замене сложной задачи рядом более простых, более доступных задач. Применяя этот метод, мы сначала упрощаем нашу задачу, отбрасывая все усложняющие ее обстоятельства. Эта первоначальная упрощенная задача, конечно, значительно отличается от действительной задачи, но мы и не считаем полученное решение упрощенной задачи действительным, а говорим только, что мы получили *первое приближение к действительности*. Учитывая затем так или иначе некоторые из отброшенных вначале обстоятельств, мы строим другую задачу, решение которой доставляет нам *второе приближение к действительности*. Таким же образом мы поступаем и далее, строя третье и последующие приближения и получая решения, все менее и менее отличающиеся от действительности.

Первым шагом на этом пути последовательных приближений является отбор тех сил, характер изменения которых достаточно хорошо известен или, по крайней мере, может считаться достаточно твердо установленным. Все прочие силы мы *соглашаемся* (по крайней мере временно, в нескольких первых приближениях) не рассматривать и проводим исследования так, как будто бы они совершенно не существовали. Следуя этому принципу, небесная механика сосредоточивает свое внимание прежде всего на силах притяжения, происхождение и природа которых хотя до сих пор и неизвестны, но наличие которых было установлено великим Ньютоном в знаменитом законе всемирного тяготения, который и до сих пор еще почти всегда соглашаются считать основным законом природы.

Другую категорию сил, существование которых не вызывает никаких сомнений, так как их проявления известны нам из повседневного опыта, составляют силы сопротивления среды. Существуют также некоторые другие известные категории сил, действия которых иногда должны приниматься во внимание [1]), но в нашем курсе мы будем рассматривать исключительно силы притяжения, соглашаясь считать, как уже было указано выше, все прочие возможные силы несуществующими.

Таким образом предметом исследований небесной механики является следующая задача:

Изучить движения небесных тел, допуская, что на них действуют только силы взаимных притяжений, определяемые законом всемирного тяготения Ньютона.

Закон всемирного тяготения, являющийся основным фундаментом небесной механики, хорошо известен в настоящее время каждому школьнику. Формулируется этот закон следующим образом:

Всякая материальная частица притягивает каждую другую материальную частицу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих частиц и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния.

Обозначим через m и m' массы двух материальных частиц и через r — их взаимное расстояние. Согласно закону Ньютона каждая из этих

[1]) Таковы сила отталкивания, сила лучевого давления, электромагнитные силы и др.

частиц находится под действием силы, направленной к другой частице и равной по величине

$$f\frac{mm'}{r^2},$$

где f — коэфициент пропорциональности, численное значение которого зависит от выбора единиц расстояния, времени и массы. Этот коэфициент называется *постоянной тяготения*. Заметим, кстати, что, в целях упрощения формул, основные единицы выбираются иногда таким образом, чтобы постоянная тяготения также равнялась единице.

Установив характер действия сил, которые мы соглашаемся рассматривать, мы можем теперь составить диференциальные уравнения движения небесных тел относительно какой-нибудь *подходящим образом выбранной* системы координат и притти таким образом к чисто математической задаче, решение которой и составляет главную цель небесной механики. Однако сформулированная нами задача также не может быть не только разрешена, но даже и поставлена, хотя бы по той простой причине, что большинство небесных тел еще не открыто и с каждым днем открываются новые, до сих пор нам неизвестные небесные тела.

Поэтому мы оказываемся вынужденными рассматривать только известные тела, которые могут наблюдаться с достаточной уверенностью при помощи наших астрономических инструментов. В силу этого сама задача о совместном исследовании движений *всех* тел вселенной, как бы она ни была заманчива, теряет смысл, и мы должны ограничиться рассмотрением только какой-нибудь одной из известных звездных систем. Это ограничение достаточно оправдывается тем соображением, что звездные системы, вообще говоря, находятся на чрезвычайно больших расстояниях одна от другой, вследствие чего силы притяжения, действующие от одной звездной системы на другую, исчезающе малы по сравнению с силами притяжения, господствующими в каждой отдельной системе. Таким образом мы можем, например, рассматривать солнечную систему изолированно от всех прочих звезд, делая при этом фактически допущение, что солнечная система как бы находится *одна* во всей вселенной, что больше ничего во вселенной не существует. Точно так же мы можем рассматривать изолированно систему двойной или кратной звезды, или звездное скопление, или туманность.

Вследствие всего изложенного сформулированная нами ранее задача несколько упрощается и теперь может быть сформулирована следующим образом:

Изучить движения небесных тел, принадлежащих к какой-нибудь одной космической системе, допуская, что кроме этой системы во всей вселенной больше ничего не существует, и полагая, что движения тел в системе определяются законом всемирного тяготения Ньютона.

§ 2. Задача о движении изолированной системы. Как известно из механики, центр тяжести [1]) материальной системы, неподверженной

[1]) Здесь правильнее было бы сказать „центр масс", а не центр тяжести. Мы будем, однако, в последующем изложении всюду употреблять последний термин, условившись раз навсегда подразумевать под центром тяжести механической системы ее центр масс.

действиям внешних сил, движется в абсолютном пространстве *прямолинейно* и *равномерно*. Так как мы согласились изучать любую звездную систему изолированно от всей остальной вселенной, то всякая такая система (например, солнечная система) всегда будет обладать указанным свойством. Это свойство определяет движение рассматриваемой системы в целом и позволяет ограничиться исследованием движений тел системы относительно общего центра тяжести. Действительно, если мы сумеем определить движение любого тела системы, относительно ее центра тяжести, то уже без всяких затруднений сможем определить движение этого тела, относительно абсолютной системы координат, так как движение центра тяжести системы нам известно.

Но и эта задача еще чрезвычайно сложна и мы вынуждены опять вносить в нее некоторые упрощения. Прежде всего мы строго ограничим число тел в системе, выбирая из всех тел системы только наиболее крупные, обладающие наибольшей массой по сравнению с остальными более мелкими, которые мы в первом приближении исключаем из рассмотрения. Такой отбор оправдывается тем, что тела, обладающие очень малыми массами, оказывают крайне слабые влияния на тела с большими массами, и мы можем считать в первом приближении, что эти влияния просто равны нулю. Отметим тут же, что мы не можем считать также равными нулю влияния тел с большими массами на тела с малыми массами. Действительно, ускорение, вызываемое притяжением массы m' массой m, равно $f\frac{m}{r^2}$, откуда следует, что на одинаковом расстоянии ускорение, сообщаемое телу притяжением малой массы m, также мало, но если масса m велика, то это ускорение может быть весьма большим. Поэтому, исследовав отдельно движение больших масс, мы должны затем дополнительно исследовать движения малых масс, под действием сил притяжения больших, двигающихся уже известным образом.

Второе упрощение мы внесем в нашу задачу, соглашаясь рассматривать поступательные движения центров тяжести тел системы отдельно от вращательных движений тел и от изменений их формы. Изучив предварительно движения центров тяжести, мы можем затем исследовать вращения тел и изменения их формы, учитывая уже известные поступательные движения.

Таким образом в первом приближении, по существу, мы делаем допущение, что тела рассматриваемой системы суть тела абсолютно твердые, что, конечно, не вполне соответствует действительности. Точно так же мы допустим, что массы тел системы не изменяются с течением времени, т. е. что они суть величины постоянные. Такое допущение также не соответствует действительности, но может быть принято в качестве первого приближения, ввиду чрезвычайно медленного изменения масс небесных тел. Наконец, мы в первом приближении совершенно пренебрежем эффектом сопротивления среды, так как вещество, находящееся в межзвездном пространстве, несомненно, находится в крайней степени разрежения и не может оказать значительного влияния на движущиеся в нем тела.

Наконец, последнее упрощение, которое мы сделаем в первом приближении, заключается в том, что мы отвлекаемся от линейных размеров тел и уславливаемся все тела системы считать *материальными точками*. Возможность последнего упрощения будет обоснована в следующем параграфе.

В конце концов мы приходим к следующей задаче:

Изучить движение системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, обладающих постоянными массами и движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона.

Сформулированная задача представляет собой, очевидно, некоторую искусственную, математическую *схему*, которая, строго говоря, совершенно не соответствует реальной физической задаче, которую мы заменяем в первом приближении этой схемой. Однако ввиду малости факторов, отброшенных в первом приближении, движения материальных точек в нашей схеме будут мало отличаться от движений реальных небесных тел, по крайней мере в течение некоторого конечного, не очень большого промежутка времени. Это вполне подтверждается наблюдениями, показывающими, что отличия искусственной математической теории от действительности, вообще говоря, очень малы. В редких случаях обнаруживаются сколько-нибудь значительные отклонения, но они все-таки существуют и это показывает, что ограничиться только одним первым приближением нельзя. Это заключение сделается еще более справедливым, если мы захотим распространить нашу приближенную математическую теорию на очень большие промежутки времени, так как в этом случае отклонения теории от действительности могут сделаться настолько большими, что неудовлетворительность первого приближения окажется совершенно очевидной.

Поэтому современная небесная механика не может ограничиться только исследованием движений материальных точек, а обязана рассматривать также и второе и последующие приближения, вводя в основную задачу те или иные из числа факторов, которые были первоначально отброшены. Все эти замечания делаются для того, чтобы у изучающего не создалось ложного впечатления, что небесная механика представляет собой отвлеченную математическую теорию, совершенно не считающуюся с действительностью, тем более, что в нашем вводном курсе мы будем рассматривать исключительно выше сформулированную математическую схему как первое приближение, как первый необходимый шаг на пути изучения науки о движении действительных небесных тел под действием реальных сил природы.

Математическая схема, которую мы кладем в основу нашего курса, несмотря на ее явное несоответствие действительности, является весьма удобным и гибким аппаратом, могущим быть приложенным к приближенному исследованию многочисленных и разнообразных задач астрономии и даже других областей знания. Движения больших планет солнечной системы и движения звезд в звездном скоплении, движения спутников, например Юпитера, и движение малой планеты или кометы, движение мельчайшей частицы космической пыли и движение сгущения в первоначальной туманности — все эти задачи, по крайней мере, на первом этапе своего исследования основываются на схеме движения материальных точек. Даже свободный полет межпланетного реактивного корабля [1]) или движение электронов в атомной системе исследуются прежде всего как движения материальных точек. Ввиду такой исключительно важной роли понятия „материальной точки“ вполне уместно дать здесь ему точное определение. В механике и в физике материальная точка определяется следующим образом:

Материальной точкой называется тело, линейные размеры которого весьма малы по сравнению с расстояниями, могущими играть роль в его движении.

Таким образом, например, Земля в ее движении вокруг Солнца может рассматриваться как материальная точка, но та же Земля не может считаться материальной точкой, если рассматривается ее вращение вокруг оси. В системе двойной звезды с очень большим взаимным расстоянием компоненты могут также рассматриваться как материальные точки. Вообще всякие две частицы вещества, притягивающиеся по закону Ньютона, могут быть рассматриваемы как материальные точки. Заметим, что по существу, отвлекаясь от формы и линейных размеров тел, мы этим самым как бы считаем их точками геометрическими, но обладающими конечными массами и могущими поэтому оказывать друг на друга действия притяжения.

Необходимо твердо помнить, что понятие „материальная точка“ есть понятие относительное, что одно и то же тело в зависимости от условий задачи может или не может быть рассматриваемо как материальная точка.

§ 3. Притяжение двух тел, обладающих сферическим распределением плотностей. В предыдущем параграфе мы условились считать все тела рассматриваемой звездной системы материальными точками. Возможность такого допущения оправдывается, во-первых, тем, что небесные тела имеют приблизительно сферическую форму, а во-вторых, тем, что разделяющие их расстояния весьма велики по сравнению с их линейными размерами.

В настоящем параграфе мы докажем прежде всего следующую теорему:

Тело сферической формы, обладающее сферическим распределением плотностей притягивает находящуюся вне его материальную точку так, как ее притягивала бы другая материальная точка, помещенная в центре тяжести тела и имеющая массу, равную массе тела.

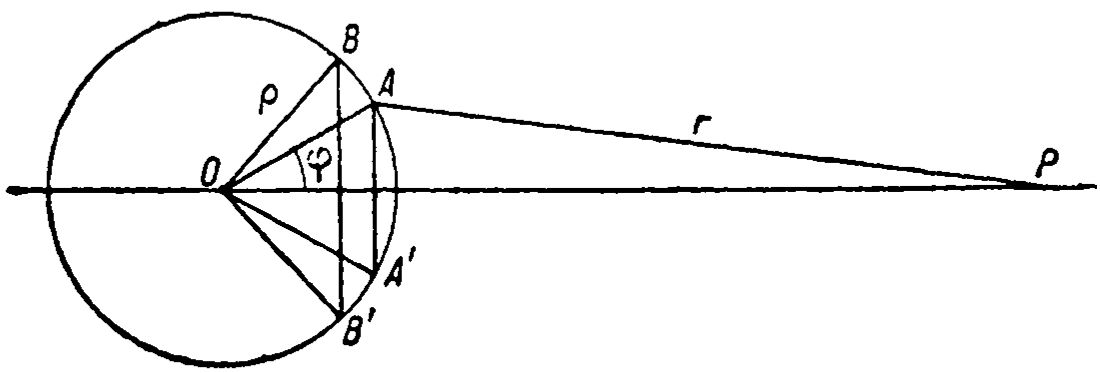
Пусть мы имеем тело, ограниченное сферической поверхностью и имеющее такую структуру, что его плотность зависит только от расстояния до центра тела. Тогда геометрические места точек тела, имеющих одинаковую плотность, будут также сферическими поверхностями, концентрическими с внешней поверхностью тела, и мы будем говорить, что *тело обладает сферическим распределением плотностей.* Обозначим через a радиус внешней поверхности тела, через ϱ — расстояние какой-нибудь точки тела до его центра и через μ — плотность тела.

[1]) Полет межпланетного корабля во время действия его реактивного двигателя, равно как и полет ракеты в земной атмосфере, должен рассматриваться как движение материальной точки убывающей массы. — *Прим. ред.*

Ввиду принятого условия, μ будет функцией только от ϱ, определенной в промежутке изменения ϱ от 0 до a,

$$\mu = \mu(\varrho).$$

Мы допустим, сверх того, что функция $\mu(\varrho)$ интегрируема в промежутке от 0 до a. Для того чтобы вычислить притяжение телом материальной точки, находящейся на расстоянии R $(R \geqslant a)$ от центра тела [1], нам достаточно вычислить потенциал тела на эту точку, так как нам известно из теории потенциала, что составляющая силы притяжения по



Черт. 1.

какому-нибудь направлению пропорциональна производной от потенциала, взятой по этому направлению. Обозначая потенциал тела через U, имеем

$$U = \int \frac{dm}{r},$$

где dm — элемент массы тела, r — расстояние от dm до точки P, и интегрирование распространено на объем шара радиуса a.

Опишем из центра тела шар радиуса ϱ и вообразим две конические поверхности с вершинами в O, с углами раствора 2φ и $2(\varphi + d\varphi)$ и с осью OP (черт. 1). Поверхность сферического пояса $ABB'A'$, вырезаемого этими конусами, будет равна

$$2\pi\varrho^2 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Масса слоя, заключенного между двумя конусами и двумя шарами с радиусами ϱ и $\varrho + d\varrho$, будет, очевидно,

$$dm = 2\pi\varrho^2 \mu(\varrho) \sin\varphi \, d\varphi \, d\varrho.$$

Подставляя это выражение для dm в формулу для U и интегрируя по ϱ в пределах от 0 до a и по φ в пределах от 0 до π, мы получим искомое выражение для потенциала нашего тела на внешнюю точку P:

$$U = 2\pi \int_0^a \varrho^2 \mu(\varrho) \, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{r}.$$

Чтобы вычислить интеграл, введем вместо переменной φ переменную r.

---

[1]) Ввиду сферического распределения плотностей, центр тяжести тела, очевидно, совпадает с его геометрическим центром.

Из треугольника OAP мы имеем

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r\,dr = \varrho R \sin\varphi\, d\varphi.$$

Так как при изменении φ от 0 до π r изменяется от $R - \varrho$ до $R + \varrho$, то мы имеем

$$U = \frac{2\pi}{R} \int\limits_0^a \varrho\mu(\varrho)\, d\varrho \int\limits_{R-\varrho}^{R+\varrho} dr,$$

откуда получаем

$$U = \frac{4\pi}{R} \int\limits_0^a \varrho^2\mu(\varrho)\, d\varrho.$$

Но, обозначая через M полную массу тела, мы, очевидно, будем иметь

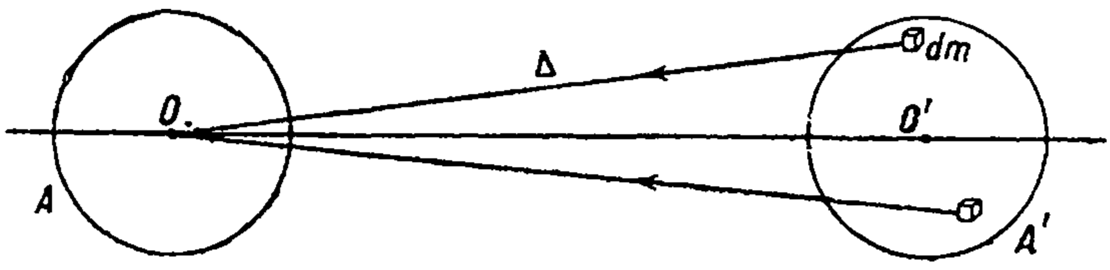
$$M = 4\pi \int\limits_0^a \varrho^2\mu(\varrho)\, d\varrho,$$

в силу чего выражение для потенциала принимает вид

$$U = \frac{M}{R},$$

а это есть потенциал материальной точки, масса которой равна M.

Так как потенциал рассматриваемого нами тела не отличается от потенциала материальной точки, масса которой равна массе тела, то и



Черт. 2.

притяжение тела будет такое же, как и притяжение материальной точки, а следовательно, наша теорема доказана.

Рассмотрим теперь два тела A и A', каждое из которых обладает сферическим распределением плотностей, расстояние между центрами которых опять обозначим через R. Пусть M и M' будут массы этих тел (черт. 2).

Согласно только что доказанной теореме каждый элемент dm тела A' притягивается телом A так, как будто вся масса тела A сосредоточена в его центре O, т. е. с силой, направленной к O и равной по величине

$$f\frac{M\,dm}{\Delta^2}.$$

Для того чтобы вычислить притяжение телом A тела A', нужно, очевидно, найти равнодействующую всех таких сил, приложенных к различным элементам тела A'. Для этого перенесем точки приложения всех этих сил в точку O, через которую проходят все направления этих сил. Равнодействующая всех этих сил будет, очевидно, равна и противоположна равнодействующей всех притяжений, испытываемых материальной точкой с массой M, помещенной в O, со стороны всех элементов тела A. По доказанной теореме эта равнодействующая будет направлена по прямой OO' и ее величина определится формулой

$$f\frac{MM'}{R^2}.$$

Таким образом мы убеждаемся в том, что:

Два тела, обладающие сферическим распределением плотностей, притягивают друг друга так же, как притягивали бы друг друга две материальные точки, помещенные в центрах тяжести этих тел и имеющие массы, равные массам тел.

Если бы небесные тела действительно имели шарообразную форму и обладали сферическим распределением плотностей, то их взаимные притяжения в точности совпадали бы с притяжениями материальных точек, помещенных в соответствующих центрах тяжести тел и имеющих соответственные массы, и сделанное в § 2 допущение нисколько не нарушило бы действительного положения вещей.

В действительности, небесные тела не обладают строго шарообразной формой, а распределение их плотностей в точности неизвестно [1]). Поэтому сделанное допущение действительно является только приближенным, и это приближение, в некоторых случаях, может быть даже очень грубым, если расстояние R между центрами тяжести тел не очень велико. К счастью, однако, расстояния, отделяющие небесные тела, весьма велики по сравнению с их линейными размерами, и это обстоятельство действительно позволяет рассматривать небесные тела как материальные точки, как мы убедимся в этом в следующем параграфе.

§ 4. Притяжение тел, линейные размеры которых весьма малы по сравнению с разделяющим их расстоянием. Рассмотрим сначала притяжение некоторым телом A материальной точки P, расстояние которой до центра тяжести тела A весьма велико по сравнению с линейными размерами тела. Примем за начало координат центр тяжести A и проведем ось Ox через точку P (черт. 3).

Расстояние OP обозначим через R, переменное расстояние от P до элемента dm тела A обозначим через r, расстояние dm до O — через r', координаты элемента dm — через x, y, z. Сила притяжения, действующая на точку P, определяется потенциалом U тела A на точку P:

$$U=\int\frac{dm}{r},$$

где интегрирование распространено на весь объем тела A.

[1]) В действительности, небесные тела, конечно, не обладают сферическим распределением плотностей.

Так как координаты точки P суть $(R, 0, 0)$, то мы имеем

$$r^2 = (R-x)^2 + y^2 + z^2$$

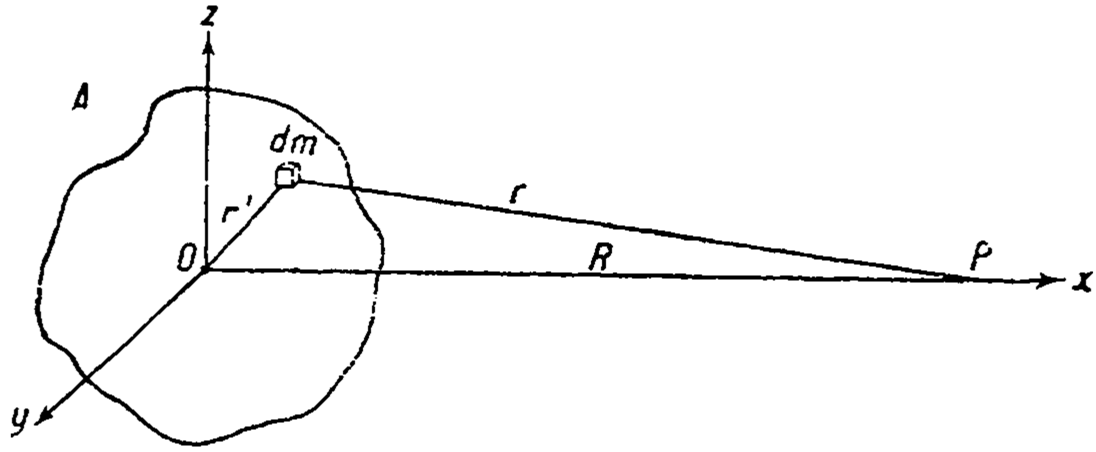
или

$$r^2 = R^2 - 2Rx + r'^2,$$

откуда получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2xR - r'^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как по предположению линейные размеры тела A весьма малы



Черт. 3.

по сравнению с расстоянием R, то отношения $\frac{x}{R}$ и $\frac{r'}{R}$ будут очень малы, и мы сможем разложить выражение

$$\left(1 - \frac{2xR - r'^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

в сходящийся ряд по формуле бинома Ньютона. Считая величины $\frac{x}{R}$ и $\frac{r'}{R}$ малыми первого порядка и ограничиваясь малыми до третьего порядка, мы имеем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{x}{R^2} + \frac{3x^2 - r'^2}{2R^3} + \ldots$$

Умножая обе части этого равенства на dm и интегрируя по всему объему тела A, мы получаем

$$U = \int \frac{dm}{r} = \frac{1}{R}\int dm + \frac{1}{R^2}\int x\,dm + \frac{1}{2R^3}\int (3x^2 - r'^2)\,dm + \ldots$$

Если M обозначает массу тела A, то

$$\int dm = M.$$

Так как, далее, начало координат совпадает с центром тяжести тела A, то

$$\int x\,dm = 0,$$

и мы получаем

$$U=\frac{M}{R}+\frac{1}{2R^3}\int(3x^2-r'^2)\,dm+\ldots$$

Так как r' есть расстояние dm от начала координат, то

$$r'^2=x^2+y^2+z^2,$$

откуда получаем

$$x^2=r'^2-(y^2+z^2),$$

в силу чего выражение для потенциала U примет вид

$$U=\frac{M}{R}+\frac{1}{R^3}\int r'^2\,dm-\frac{3}{2R^3}\int(y^2+z^2)\,dm+\ldots$$

Обозначим теперь через I момент инерции тела A относительно прямой OP и через A, B, C главные моменты инерции этого тела, относительно его центра тяжести.

Как известно из механики,

$$\int r'^2\,dm=\frac{A+B+C}{2} \quad \text{и} \quad \int(y^2+z^2)\,dm=I,$$

в силу чего выражение для потенциала может быть написано следующим образом

$$U=\frac{M}{R}+\frac{A+B+C-3I}{2R^3}+\ldots$$

В полученном выражении первый член есть не что иное, как потенциал материальной точки, находящейся в центре тяжести тела A и имеющей массу M. Второй член представляет собой малую величину третьего порядка и может быть отброшен, так же как и все последующие члены, в том случае, если расстояние R весьма велико.

Заметим еще, что добавочные члены в выражении для потенциала становятся малыми не только потому, что R велико, но еще и потому, что формы небесных тел достаточно близки к шарообразным. Действительно, если бы тело A было шаром, обладающим сферическим распределением плотностей, то мы имели бы

$$A=B=C=I,$$

и тогда, как мы видели в предыдущем параграфе, в выражении для потенциала остался бы только один первый член $\frac{M}{R}$. В действительности, небесные тела не шары, но по форме близки к шарам. Поэтому, хотя A, B и C не равны I, но отличаются от него лишь незначительно, вследствие чего величина $A+B+C-3I$ обыкновенно оказывается малой, и мы можем пренебречь уже вторым членом в выражении для U. Тогда

$$U=\frac{M}{R},$$

а это и есть потенциал материальной точки с массой M. Таким образом, если расстояние R весьма велико по сравнению с линейными размерами тела, которое имеет к тому же приблизительно сферическую форму, то мы можем считать без большой ошибки, что тело притягивает материальную точку так, как будто бы оно само являлось материальной точкой, с массой, равной массе тела.

При помощи соображений, аналогичных тем, которые мы приводили в предыдущем параграфе, мы легко установим, что то же справедливо и для притяжения двух тел, расстояние между центрами тяжести которых весьма велико по сравнению с линейными размерами тел, которые к тому же имеют приблизительно сферическую форму. Окончательно мы приходим к следующему заключению:

Если линейные размеры тел весьма малы по сравнению с разделяющим их расстоянием, то мы можем принять, что эти тела притягивают друг друга так, как будто они являются материальными точками, помещенными в их центрах тяжести и имеющими массы, равными массам этих тел. Это допущение делается еще более справедливым, если тела имеют почти шарообразную форму.

§ 5. Основная задача небесной механики. Рассуждения предыдущих параграфов приложимы (иногда, впрочем, с некоторыми дополнениями) к любой звездной системе, но наиболее интересной и практически важной для нас является, конечно, солнечная система, одним из членов которой является Земля. Поэтому основной задачей небесной механики считается задача о движениях, происходящих в солнечной системе.

Солнечная система состоит из Солнца, больших планет и их спутников, малых планет, комет, метеоров и, наконец, большого количества космической пыли.

Следуя принципам, изложенным в предыдущих параграфах, мы прежде всего упростим задачу до такой степени, в которой оказывается возможным применять методы математического анализа.

Прежде всего мы исключим из рассмотрения влияние на солнечную систему всех других звезд и объектов, предполагая этим по существу, что солнечная система существует одна во всей вселенной.

Затем все тела солнечной системы, включая сюда и Солнце, мы будем рассматривать как материальные точки, что возможно или ввиду больших расстояний между телами, или благодаря их приблизительно шаровой форме, или по обеим причинам вместе. При этом каждую отдельную планетную систему (т. е. планету со спутниками) мы будем рассматривать как *одну* материальную точку, помещающуюся в центре тяжести этой системы и имеющую массу, равную сумме масс планеты и спутников.

Так, например, мы будем считать одной материальной точкой систему Земля—Луна или систему Юпитера с его спутниками, вследствие чего под движением больших планет нужно подразумевать, собственно говоря, движения центров тяжести каждой планетной системы. Наконец, мы совершенно исключим из первоначального рассмотрения малые планеты, кометы, метеоры и космическую пыль. Поэтому основная задача небесной механики может быть сформулирована так:

Изучить движения десяти материальных точек, представляющих Солнце, Меркурия, Венеру, Землю с Луной, Марса со спутниками, Юпитера со спутниками, Сатурна с кольцами

и спутниками, Урана со спутниками, Нептуна со спутником и Плутона, допуская, что указанные материальные точки движутся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения Ньютона.

Исследованию этой основной задачи и будет посвящен наш курс, причем мы очень скоро убедимся в том, что ввиду значительных математических затруднений эта задача не может быть решена в настоящее время с полной строгостью и во всех деталях. Поэтому и здесь мы будем вынуждены встать на путь приближений и нижеследующие главы будут посвящены прежде всего выяснению тех затруднений, которые препятствуют решению задачи, а затем исследованию тех классических методов, которые позволяют решить эту задачу приближенным путем.

§ 6. Другие задачи небесной механики. Перечислим те задачи небесной механики, которые должны быть поставлены после разрешения основной задачи и которых в нашем вводном курсе мы вынуждены совершенно не касаться, из боязни чрезмерно увеличить объем книги:

a) Теория спутников. Допустим, что основная задача так или иначе решена и что, следовательно, движение центра тяжести каждой отдельной планетной системы известно. Тогда нашей задачей явится исследование движений тел этой планетной системы (т. е. планеты и ее спутников) относительно общего центра тяжести. Эта задача, называемая теорией спутников, по существу вполне аналогична основной задаче, так как здесь также исследуются движения материальных точек под действием их взаимных притяжений. Впрочем, иногда в этой задаче появляются значительные осложнения, так как некоторые спутники настолько близки к основной планете, что последнюю уже нельзя считать материальной точкой и в выражении ее потенциала приходится вводить добавочные члены. Особенное место среди теорий спутников занимает теория Луны как ввиду ее исключительной важности для практических приложений, так и благодаря исключительным трудностям, связанным с необходимостью принимать во внимание не только форму Земли, но и изменения этой формы.

b) Теория малых планет и комет. Ввиду исключительной малости масс малых планет и комет, движение каждого из этих тел можно изучать отдельно, принимая во внимание только влияние на него Солнца и больших планет, движение которых опять-таки предполагается известным. В большинстве случаев можно еще более упростить эту задачу, пренебрегая влиянием наименее крупных или наиболее далеких из больших планет. Например, можно получить достаточно хорошее приближение, допуская, что на малую планету или на комету действуют только силы притяжения Солнца и наиболее крупной планеты солнечной системы — Юпитера. Поставленная таким образом задача представляет собой частный случай так называемой задачи о трех телах. Малая планета или комета считаются, конечно, также материальными точками и притом, ввиду малости их масс, не оказывающими никакого влияния на движение Солнца и Юпитера.

c) Теория вращения планет. Задача заключается в изучении вращательного движения планеты вокруг ее центра тяжести, под действием силы притяжения Солнца и иногда близких спутников. Главное значение имеет теория вращения Земли, с которой связаны некоторые основные системы координат, к которым мы относим положения других небесных тел.

d) Теория фигур планет. Задача заключается в определении формы, внутреннего строения и деформаций планет, вызываемых силами притяжения. Эта теория имеет также наибольшее значение для Земли.

e) Теория движения переменных масс. Ввиду того что масса Солнца непрерывно уменьшается вследствие излучения, результаты, полученные из предположения, что все массы небесных тел остаются постоянными, оказываются не вполне соответствующими действительности. Ввиду этого оказывается необходимым исследовать, какой эффект окажет на движение планет непостоянство массы Солнца. Впрочем, это обстоятельство приходится учитывать только в задачах космогонического характера, где приходится рассматривать движения планет в течение чрезвычайно больших промежутков времени. Эта теория имеет также большое значение в задачах, занимающихся изучением движений звездных систем.

f) Теория движения в сопротивляющейся среде. С этой задачей приходится сталкиваться чрезвычайно часто в космогонических задачах. Теория имеет целью изучить эффект сопротивляющегося действия некоторой среды, в которой может двигаться небесное тело, подобно тому, как, например, пуля движется в воздухе.

Заканчивая эту главу, мы хотим еще раз подчеркнуть, что математическая теория движения некоторого количества материальных точек, которую мы будем рассматривать, является только первым приближением задачи о действительном движении планет. Это первое приближение, даже в том случае, если бы оно могло быть проведено с абсолютной математической строгостью, всегда нуждается в исправлениях, которые приходится вносить, чтобы приблизиться к настоящей физической задаче. Характер этих поправок, определяющих второе, третье и последующие приближения, сильно зависит от общего состояния науки в рассматриваемую эпоху и несомненно, что если в настоящее время этих поправок приходится рассматривать не очень много, то с течением времени, в связи с общим развитием науки, число их будет сильно возрастать и может быть недалеко то время, когда классическая небесная механика, являющаяся предметом этой книги, окажется совершенно неудовлетворяющей запросам науки и когда поэтому придется создавать небесную механику заново на основании новых принципов, быть может, совершенно отличных от современных.

Как известно, только что описанные явления нередко происходили в физике, химии, биологии и т. д. Ввиду того что небесная механика существует не изолированно, а входит необходимым звеном в общую цепь наук, изучающих природу, то, собственно говоря, даже нет никаких оснований предполагать, что она останется неприкосновенной и неизменной и не испытает глубокого переворота аналогичного тем, которые происходили в других областях знания.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В АБСОЛЮТНЫХ ОСЯХ

§ 7. Задача о $n+1$ телах. В § 5 мы сформулировали основную задачу небесной механики, которая заключается в определении движения десяти материальных точек, притягивающихся взаимно по закону всемирного тяготения и представляющих Солнце и большие планеты с их спутниками.

Так как для вывода диференциальных уравнений движения и их основных свойств число материальных точек системы не играет существенного значения, то мы поставим задачу несколько шире и будем рассматривать систему, состоящую из любого конечного числа изолированных материальных точек. Обозначая число этих точек через $n+1$, мы придем к задаче, которая обыкновенно называется *задачей о $n+1$ телах*[1]). Обозначим материальные точки системы буквами M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ и соответствующие их массы буквами m_0, m_1, $m_2, \ldots, m_n$. В основной задаче небесной механики M_0 обозначает центр тяжести Солнца, а M_1, M_2, $M_3, \ldots$ центры тяжести больших планет или систем больших планет со спутниками. Так как больших планет известно девять, то в основной задаче $n=9$. Полагая в задаче о $n+1$ телах $n=1, 2, \ldots$, мы будем иметь, соответственно, задачу о двух телах, задачу о трех телах и т. д.

Все эти частные случаи общей задачи имеют в небесной механике важное значение и некоторые из них рассматриваются со всей возможной детальностью.

Возьмем теперь в пространстве абсолютную, неподвижную систему прямоугольных декартовых координат $O\xi\eta\zeta$. Обозначим координаты точки M_0 в этой системе через ξ_0, η_0, ζ_0, а координаты какой-нибудь точки M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) через ξ_i, η_i, ζ_i. Эти координаты будут функциями времени t и наша задача состоит, таким образом, в определении $3(n+1)$ функций от одного независимого переменного.

Составим диференциальные уравнения, которым должны удовлетворять функции ξ_0, η_0, ζ_0 и ξ_i, η_i, ζ_i. Пусть Δ_{ij} обозначает расстояние между точками M_i и M_j нашей системы.

---

[1]) Правильнее было бы сказать: *задачей о $n+1$ материальных точках*, но термин *тело* напоминает нам о том, что мы имеем дело, хотя и с приближенной, но все же физической задачей.

Рассмотрим сначала точку M_0. Эта точка находится под действием n сил, направленных по прямым M_0M_1, $M_0M_2, \ldots, M_0M_n$ и равных по величине соответственно

$$f\frac{m_0m_1}{\Delta_{01}^2},\quad f\frac{m_0m_2}{\Delta_{02}^2},\ldots,\quad f\frac{m_0m_n}{\Delta_{0n}^2}.$$

Проекции этих сил на координатные оси по величине и знаку будут соответственно равны

$$f\frac{m_0m_i}{\Delta_{0i}^2}\frac{\xi_i-\xi_0}{\Delta_{0i}},\quad f\frac{m_0m_i}{\Delta_{0i}^2}\frac{\eta_i-\eta_0}{\Delta_{0i}},\quad f\frac{m_0m_i}{\Delta_{0i}^2}\frac{\zeta_i-\zeta_0}{\Delta_{0i}}\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Поэтому диференциальные уравнения движения точки M_0 будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2}&=fm_0m_1\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\xi_2-\xi_0}{\Delta_{02}^3}+\ldots+fm_0m_n\frac{\xi_n-\xi_0}{\Delta_{0n}^3},\\
m_0\frac{d^2\eta_0}{dt^2}&=fm_0m_1\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\eta_2-\eta_0}{\Delta_{02}^3}+\ldots+fm_0m_n\frac{\eta_n-\eta_0}{\Delta_{0n}^3},\\
m_0\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}&=fm_0m_1\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\zeta_2-\zeta_0}{\Delta_{02}^3}+\ldots+fm_0m_n\frac{\zeta_n-\zeta_0}{\Delta_{0n}^3},
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где, очевидно,

$$\Delta_{0i}^2=(\xi_0-\xi_i)^2+(\eta_0-\eta_i)^2+(\zeta_0-\zeta_i)^2.\qquad(2)$$

Точно так же составляются уравнения для любой из остальных точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$.

На каждую точку M_i действует n сил, направленных по прямым M_iM_0, $M_iM_1, \ldots, M_iM_n$ и равных соответственно по величине

$$f\frac{m_im_0}{\Delta_{i0}^2},\quad f\frac{m_im_1}{\Delta_{i1}^2},\ldots,\quad f\frac{m_im_n}{\Delta_{in}^2}.$$

Проекции этих сил на координатные оси по величине и знаку будут соответственно равны

$$f\frac{m_im_j}{\Delta_{ij}^2}\frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}},\quad f\frac{m_im_j}{\Delta_{ij}^2}\frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}},\quad f\frac{m_im_j}{\Delta_{ij}^2}\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}},$$

где

$$j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n\quad \text{и}\quad j\neq i.$$

Поэтому диференциальные уравнения движения точки M_i будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}&=fm_im_0\frac{\xi_0-\xi_i}{\Delta_{i0}^3}+fm_im_1\frac{\xi_1-\xi_i}{\Delta_{i1}^3}+\ldots+fm_im_n\frac{\xi_n-\xi_i}{\Delta_{in}^3},\\
m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}&=fm_im_0\frac{\eta_0-\eta_i}{\Delta_{i0}^3}+fm_im_1\frac{\eta_1-\eta_i}{\Delta_{i1}^3}+\ldots+fm_im_n\frac{\eta_n-\eta_i}{\Delta_{in}^3},\\
m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}&=fm_im_0\frac{\zeta_0-\zeta_i}{\Delta_{i0}^3}+fm_im_1\frac{\zeta_1-\zeta_i}{\Delta_{i1}^3}+\ldots+fm_im_n\frac{\zeta_n-\zeta_i}{\Delta_{in}^3},
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Расстояние Δ_{ij} определяется очевидной формулой

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2 \quad (j \neq i). \tag{4}$$

Уравнения (1) и (3) представляют систему $3(n+1)$ совместных, диференциальных уравнений второго порядка, определяющих неизвестные функции $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$.

Пусть t_0 есть некоторый определенный момент времени, который мы условимся рассматривать как начальный. Как известно из теории диференциальных уравнений, для полного определения функций, удовлетворяющих уравнениям (1) и (3), необходимо еще иметь начальные условия, т. е. численные значения этих функций и их первых производных в начальный момент t_0. Полагая для сокращения

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \dot{\xi}_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \dot{\eta}_i, \quad \frac{d\zeta_i}{dt} = \dot{\zeta}_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

мы обозначим систему начальных значений следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} \xi_0^{(0)}, \eta_0^{(0)}, \zeta_0^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \zeta_1^{(0)}; \ldots; \xi_n^{(0)}, \eta_n^{(0)}, \zeta_n^{(0)}; \\ \dot{\xi}_0^{(0)}, \dot{\eta}_0^{(0)}, \dot{\zeta}_0^{(0)}; \dot{\xi}_1^{(0)}, \dot{\eta}_1^{(0)}, \dot{\zeta}_1^{(0)}; \ldots; \dot{\xi}_n^{(0)}, \dot{\eta}_n^{(0)}, \dot{\zeta}_n^{(0)}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Задача о движении системы $n+1$ материальных точек приводится тогда к следующей математической задаче:

Определить функции[1] $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, **удовлетворяющие совместно уравнениям (1) и (3) и принимающие при $t = t_0$ заданные наперед значения** $\xi_0^{(0)}, \eta_0^{(0)}, \zeta_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \zeta_1^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}, \eta_n^{(0)}, \zeta_n^{(0)}$, **в то время как их первые производные принимают также заданные наперед значения** $\dot{\xi}_0^{(0)}, \dot{\eta}_0^{(0)}, \dot{\zeta}_0^{(0)}, \dot{\xi}_1^{(0)}, \dot{\eta}_1^{(0)}, \dot{\zeta}_1^{(0)}, \ldots, \dot{\xi}_n^{(0)}, \dot{\eta}_n^{(0)}, \dot{\zeta}_n^{(0)}$. **Функции** $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ **должны быть определены для всех значений времени, начиная от начального момента t_0 и до** ∞ [2]).

Эта задача состоит из двух важных частей: из *количественного* и *качественного* анализа уравнений (1) и (3). Задача количественного анализа заключается в определении численных значений функций $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ и их первых производных для *всякого* момента времени, что определяет *положение* и *скорость* каждой точки системы. Задача качественного анализа заключается в определении

---

[1]) Функция называется определенной в каком-либо промежутке изменения независимой переменной, если известны свойства функции в этом промежутке и дан регулярный процесс, при помощи которого можно вычислить значение функции для любого значения независимой переменной в эти промежутки.

[2]) Определяя движение для всех значений времени от t_0 до ∞, мы узнаем судьбу рассматриваемой материальной системы в будущем. Чтобы узнать также прошедшую судьбу системы, нужно, очевидно, определить движение также для всех значений времени от t_0 до $-\infty$. Полное знание всей судьбы системы нам доставляет определение ее движения для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

свойств и *поведения* неизвестных функций при изменении времени от t_0 до ∞ (или от $-\infty$ до $+\infty$). Решение этой задачи позволяет установить общие свойства движения системы, как, например, форму и расположение траекторий точек системы, геометрические свойства этих траекторий и т. п.

Если эти две задачи решены, например для случая солнечной системы, то этим полностью определяется первое приближение задачи о движении больших планет. Для практических целей это первое приближение большей частью оказывается достаточно удовлетворительным, но при решении космогонических вопросов, а также в случаях, когда требуется большая точность, необходимо принимать во внимание и другие, указанные выше, обстоятельства и рассматривать, таким образом, второе и следующие приближения.

§ 8. Силовая функция. Диференциальные уравнения (1) и (3) можно записать гораздо более просто, если мы обратим внимание на то, что правые части этих уравнений являются частными производными от одной и той же функции переменных ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, $\zeta_1, \ldots$, ξ_n, η_n, ζ_n.

Действительно, положим

$$\left. \begin{aligned} U = f\Big\{ \frac{m_0m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0m_2}{\Delta_{02}} + \ldots + \frac{m_0m_n}{\Delta_{0n}} + \\ + \frac{m_1m_2}{\Delta_{12}} + \ldots + \frac{m_1m_n}{\Delta_{1n}} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \frac{m_{n-1}m_n}{\Delta_{n-1,n}} \Big\}, \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

что в сокращенной форме может быть написано так

$$U = f\sum\sum\frac{m_im_j}{\Delta_{ij}} \qquad (i \neq j).$$

Вычислим частные производные функции U по переменным ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, $\zeta_1, \ldots$, ξ_n, η_n, ζ_n. Мы находим, например,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0} = -\frac{fm_0m_1}{\Delta_{01}^2}\frac{\partial \Delta_{01}}{\partial \xi_0} - \frac{fm_0m_2}{\Delta_{02}^2}\frac{\partial \Delta_{02}}{\partial \xi_0} - \ldots - \frac{fm_0m_n}{\Delta_{0n}^2}\frac{\partial \Delta_{0n}}{\partial \xi_0}\text{[1]}.$$

Но из формулы (2) мы находим

$$\frac{\partial \Delta_{0i}}{\partial \xi_0} = \frac{\xi_0 - \xi_i}{\Delta_{0i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

в силу чего получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0} = fm_0m_1\frac{\xi_1 - \xi_0}{\Delta_{01}^3} + fm_0m_2\frac{\xi_2 - \xi_0}{\Delta_{02}^3} + \ldots + fm_0m_n\frac{\xi_n - \xi_0}{\Delta_{0n}^3}.$$

[1]) Производные от всех остальных членов равны нулю, так как координата ξ_0 входит только в выражения расстояний Δ_{0i}.

Аналогичным образом находим

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_0} = fm_0m_1\frac{\eta_1 - \eta_0}{\Delta_{01}^3} + fm_0m_2\frac{\eta_2 - \eta_0}{\Delta_{02}^3} + \ldots + fm_0m_n\frac{\eta_n - \eta_0}{\Delta_{0n}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_0} = fm_0m_1\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\Delta_{01}^3} + fm_0m_2\frac{\zeta_2 - \zeta_0}{\Delta_{02}^3} + \ldots + fm_0m_n\frac{\zeta_n - \zeta_0}{\Delta_{0n}^3},$$

и точно таким же образом получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = fm_1m_0\frac{\xi_0 - \xi_1}{\Delta_{10}^3} + fm_1m_2\frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta_{12}^3} + \ldots + fm_1m_n\frac{\xi_n - \xi_1}{\Delta_{1n}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_1} = fm_1m_0\frac{\eta_0 - \eta_1}{\Delta_{10}^3} + fm_1m_2\frac{\eta_2 - \eta_1}{\Delta_{12}^3} + \ldots + fm_1m_n\frac{\eta_n - \eta_1}{\Delta_{1n}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_1} = fm_1m_0\frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\Delta_{10}^3} + fm_1m_2\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\Delta_{12}^3} + \ldots + fm_1m_n\frac{\zeta_n - \zeta_1}{\Delta_{1n}^3},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_n} = fm_nm_0\frac{\xi_0 - \xi_n}{\Delta_{n0}^3} + fm_nm_1\frac{\xi_1 - \xi_n}{\Delta_{n1}^3} + \ldots + fm_nm_{n-1}\frac{\xi_{n-1} - \xi_n}{\Delta_{n,\,n-1}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_n} = fm_nm_0\frac{\eta_0 - \eta_n}{\Delta_{n0}^3} + fm_nm_1\frac{\eta_1 - \eta_0}{\Delta_{n1}^3} + \ldots + fm_nm_{n-1}\frac{\eta_{n-1} - \eta_n}{\Delta_{n,\,n-1}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_n} = fm_nm_0\frac{\zeta_0 - \zeta_n}{\Delta_{n0}^3} + fm_nm_1\frac{\zeta_1 - \zeta_n}{\Delta_{n1}^3} + \ldots + fm_nm_{n-1}\frac{\zeta_{n-1} - \zeta_n}{\Delta_{n,\,n-1}^3},$$

причем, очевидно, что

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}.$$

Сравнивая полученные выражения частных производных с правыми частями уравнений (1) и (3), мы видим, что они соответственно одинаковы. Поэтому уравнения (1) и (3) можно написать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{lll}
m_0\dfrac{d^2\xi_0}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_0}, & m_0\dfrac{d^2\eta_0}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_0}, & m_0\dfrac{d^2\zeta_0}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_0}, \\
m_1\dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}, & m_1\dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1}, & m_1\dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
m_n\dfrac{d^2\xi_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_n}, & m_n\dfrac{d^2\eta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_n}, & m_n\dfrac{d^2\zeta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_n}
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

или, более кратко,

$$m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \qquad (8)$$

Функция U обладает, следовательно, таким свойством, что ее частные производные по координатам ξ_i, η_i, ζ_i равны составляющим равнодействующей силы притяжения, действующей на точку M_i по соответствующим координатным осям. Поэтому функция U называется *силовой функцией*. Заметим, что функция U зависит только от взаимных расстояний точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ и, следовательно, не зависит от выбора системы координат [1]). Отсюда вытекают два важные свойства силовой функции, которые мы сейчас выведем.

Так как U не зависит от выбора координат, то U не изменится при параллельном переносе начала координат в любом направлении. Перенесем сначала начало координат в направлении оси ξ на бесконечно малую величину α, вследствие чего все координаты $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ получат приращение α, а координаты $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ не изменятся. Ни одно из расстояний Δ_{ij} не изменится, так как эти расстояния зависят только от разностей координат, а поэтому функция U также не изменится и, следовательно, ее полное приращение будет равно нулю. Но это приращение определяется формулой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi_0} d\xi_0 + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \xi_n} d\xi_n + \frac{\partial U}{\partial \eta_0} d\eta_0 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \zeta_n} d\zeta_n, \qquad (9)$$

и так как в нашем случае

$$d\xi_0 = d\xi_1 = \ldots = d\xi_n = \alpha, \quad d\eta_0 = \ldots = d\zeta_n = 0,$$

то мы получаем, сокращая на α,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \xi_n} = 0.$$

Аналогичные равенства можно получить также, смещая начало координат вдоль оси η и оси ζ. В результате мы получим три соотношения, которые можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = 0. \qquad (10)$$

Соотношения (10) выражают первое из свойств силовой функции, которые мы хотели получить.

Точно так же U не изменяется при произвольном повороте системы координат, так как от этого ни одно из расстояний Δ_{ij} не изменяется.

Повернем сначала систему координат вокруг оси ζ на бесконечно малый угол φ. Координаты ζ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ не изменятся, а координаты ξ_i и η_i получат соответственно приращения [2])

$$-\varphi\eta_i, \quad +\varphi\xi_i.$$

---

[1]) Важно отметить еще, что силовая функция не зависит ни от производных $\dot{\xi}_0, \ldots, \dot{\zeta}_n$, ни от времени (явно).

[2]) Действительно, обозначая новые координаты точки M_i через ξ_i' и η_i' $(\zeta_i' = 0)$, мы будем иметь

$$\xi_i' = \xi_i \cos\varphi - \eta_i \sin\varphi, \quad \eta_i' = \xi_i \sin\varphi + \eta_i \cos\varphi.$$

Ввиду малости угла φ, $\sin\varphi$ можно заменить самим углом, а $\cos\varphi$ — единицей, вследствие чего формулы преобразования примут вид

$$\xi_i' = \xi_i - \varphi\eta_i, \quad \eta_i' = \varphi\xi_i + \eta_i.$$

Так как U не изменяется, то ее полное приращение будет равно нулю, и из формулы (9) мы находим, сокращая на φ,

$$\xi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta_0} - \eta_0 \frac{\partial U}{\partial \xi_0} + \xi_1 \frac{\partial U}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial U}{\partial \eta_n} - \eta_n \frac{\partial U}{\partial \xi_n} = 0.$$

Аналогичные равенства получим, вращая систему координат на бесконечно малый угол φ вокруг оси ξ и вокруг оси η. В результате получатся три соотношения, которые напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right) = 0, \\ &\sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i}\right) = 0, \\ &\sum_{i=0}^{n}\left(\zeta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти соотношения выражают второе свойство силовой функции.

Отметим еще одно свойство силовой функции. Рассматривая выражение (6), мы убеждаемся в том, что U есть однородная функция переменных $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ минус первого измерения. Поэтому, по теореме Эйлера об однородных функциях, имеем

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right) = -U. \tag{12}$$

§ 9. Первые интегралы задачи о $n+1$ телах. Как известно из теории диференциальных уравнений, система $3(n+1)$ диференциальных уравнений (8), определяющих абсолютное движение $n+1$ тел, всегда может быть заменена эквивалентной системой $6(n+1)$ диференциальных уравнений первого порядка. Это приведение может быть произведено различными способами. Например, мы можем рассматривать компоненты скоростей точек M_i, т. е. величины $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0, \ldots, \dot{\zeta}_n$, так же как неизвестные функции времени, и тогда наша задача будет состоять в определении $6(n+1)$ неизвестных функций (координат и компонентов скоростей), удовлетворяющих системе $6(n+1)$ диференциальных уравнений первого порядка, которая может быть написана в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi_i}{dt} = \dot{\xi}_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \dot{\eta}_i, \quad \frac{d\zeta_i}{dt} = \dot{\zeta}_i, \\ &m_i \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d\dot{\eta}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d\dot{\zeta}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

откуда получаем

$$\xi_i' - \xi_i = -\varphi\eta_i, \quad \eta_i' - \eta_i = \varphi\xi_i.$$

Разности $\xi_i' - \xi_i$ и $\eta_i' - \eta_i$ и определяют приращения координат ξ_i и η_i при повороте системы координат вокруг оси ζ на бесконечно малый угол φ.

Для того чтобы определить все неизвестные функции, удовлетворяющие этой системе, нужно найти *общий интеграл* этой системы. Общий интеграл системы диференциальных уравнений первого порядка, как известно, представляется в виде системы независимых *первых интегралов*, число которых равно числу уравнений системы.

Напомним, что́ называется первым интегралом системы обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка:

Первым интегралом системы обыкновенных диференциальных уравнений называется соотношение, связывающее независимую переменную и искомые функции и принимающее постоянное значение, если вместо неизвестных функций подставить любое решение системы.

В силу этого определения всякий первый интеграл системы (13) представится в виде

$$F(t, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0, \ldots, \dot{\xi}_n, \dot{\eta}_n, \dot{\zeta}_n) = \text{const}. \quad (14)$$

Вычисляя полную производную от функции F по t, мы получим

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\frac{d\zeta_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i}\frac{d\dot{\xi}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_i}\frac{d\dot{\eta}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\zeta}_i}\frac{d\dot{\zeta}_i}{dt}\right).$$

Если мы подставим в правую часть этого равенства вместо величин ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ функции, удовлетворяющие системе (13), то согласно уравнению (14) получим нуль. Отсюда следует, что если функция F удовлетворяет условию

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i + \frac{\partial F}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i + \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}\dot{\zeta}_i\right) + \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}_i}\frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\zeta}_i}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right),$$

то, приравняв эту функцию произвольной постоянной, мы получим один из первых интегралов системы (13).

Если мы имеем два первых интеграла системы (13)

$$F = C \quad \text{и} \quad F_1 = C_1,$$

то они называются *независимыми*, если не существует никакого соотношения вида

$$\Phi(F_1, F_2) = 0.$$

В противном случае интегралы называются *зависимыми* и левую часть одного из них можно выразить как функцию левой части другого.

Общий интеграл системы (13), или, что то же, системы (8), изобразится, как уже было указано, системой $6(n+1)$ независимых первых интегралов, т. е. системой уравнений вида

$$F_j(t, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0, \ldots, \dot{\xi}_n, \dot{\eta}_n, \dot{\zeta}_n) = C_j \quad (j = 0, \ldots, 6n+6), \quad (15)$$

где C_j — произвольные постоянные, а F_j — функции указанных переменных, каждая из которых удовлетворяет тождеству (14), и которые должны быть таковы, что никакие k из них не являются зависимыми ($k = 2, 3, \ldots, 6n + 6$). Если общий интеграл найден, то из уравнений (15) можно, по крайней мере принципиально, определить величины ξ_0, η_0, $\zeta_0, \ldots, \xi_n$, η_n, ζ_n и $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\zeta}_0, \ldots, \dot{\xi}_n$, $\dot{\eta}_n$, $\dot{\zeta}_n$, как функции времени t и $6n+6$ произвольных постоянных, разрешая уравнения (15) относительно неизвестных величин, что и составит полное решение нашей проблемы.

Из $6n+6$ первых интегралов системы (8), необходимых для полного разрешения задачи, известно, однако, только десять. Эти десять интегралов, которые мы рассмотрим в следующих параграфах, получаются как простые следствия свойств силовой функции U и имеют простое механическое значение. Таким образом нехватает $6n + 6 - 10 = 6n - 4$ интегралов, и это обстоятельство является первым источником тех затруднений, с которыми мы сталкиваемся при изучении движений небесных тел.

Эти затруднения исчезают только в том частном случае задачи, когда $n = 1$, т. е. когда мы имеем всего два тела, например Солнце и планету. Действительно, в этом случае остается найти еще только два интеграла, и эти недостающие интегралы действительно существуют. Таким образом задача о движении двух тел может быть полностью разрешена. В задаче о трех телах $n = 2$, и следовательно для полного решения этой задачи недостает еще восьми интегралов. В основной задаче небесной механики, в теории больших планет, $n = 9$, и следовательно для полного решения этой задачи недостает 50 первых интегралов. Несмотря на долголетние усилия многих выдающихся математиков, недостающие интегралы так и не были найдены, и поэтому задача об интегрировании уравнений (8) и в настоящее время находится в таком же состоянии, в котором она была во времена Эйлера и Лапласа.

Отметим еще, что по существу для полного разрешения задачи нужно знать еще не $6n - 4$ первых интегралов, а на один меньше, т. е. $6n - 5$. Это следует из того, что правые части уравнений (13) не содержат явно время, а поэтому порядок системы (13) может быть сразу понижен на единицу, принимая за новую независимую переменную вместо времени какую-нибудь из величин ξ_0, η_0, $\zeta_0, \ldots, \xi_n$, η_n, ζ_n, $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\zeta}_0, \ldots, \dot{\xi}_n$, $\dot{\eta}_n$, $\dot{\zeta}_n$. Но это преобразование обычно не доставляет никаких преимуществ.

Обратимся теперь к рассмотрению тех известных десяти интегралов, о которых мы упоминали выше.

§ 10. Интегралы движения центра тяжести. Подставляя в формулы (10) вместо частных производных функции U, равные им значения вторых производных из диференциальных уравнений (8), мы получим следующие равенства, справедливые для всех значений t,

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = 0,$$

интегрируя которые получаем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\xi_i}{dt} = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i}{dt} = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = a_3, \tag{16}$$

где a_1, a_2 и a_3 — произвольные постоянные интеграции. Уравнения (16) удовлетворяются тождественно, в силу уравнений (8), и поэтому являются интегралами системы (8).

Уравнения (16), очевидно, можно также интегрировать. Выполняя это, находим равенства

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i = a_1 t + b_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i = a_2 t + b_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i = a_3 t + b_3, \tag{17}$$

где b_1, b_2 и b_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (17) также удовлетворяются тождественно в силу уравнений (8) и, следовательно, также являются интегралами этих уравнений. Эти интегралы нетрудно представить в виде (15). Для этого разрешим уравнения (17) относительно произвольных постоянных b_1, b_2, b_3 и заменим постоянные a_1, a_2, a_3 их значениями из равенств (16). Мы получим

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i - t\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\xi_i}{dt} &= b_1, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i - t\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i}{dt} &= b_2, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i - t\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i}{dt} &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравнения (16) и (17) называются *интегралами движения центра тяжести*, так как эти уравнения определяют движение центра тяжести системы точек M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_n$.

Действительно, обозначим координаты центра тяжести системы через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$; как известно, эти величины определяются формулами

$$M\bar{\xi} = \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad M\bar{\eta} = \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad M\bar{\zeta} = \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{19}$$

где

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i,$$

т. е. M есть полная масса всей системы. Из уравнений (19) при помощи интегралов (17) мы находим

$$M\bar{\xi} = a_1 t + b_1, \quad M\bar{\eta} = a_2 t + b_2, \quad M\bar{\zeta} = a_3 t + b_3. \tag{20}$$

Эти формулы показывают, что центр тяжести движется по прямой линии, нормальные уравнения которой могут быть написаны в виде

$$\frac{\bar{\xi}-b_1'}{a_1}=\frac{\bar{\eta}-b_2'}{a_2}=\frac{\bar{\zeta}-b_3'}{a_3},$$

где

$$b_i'=\frac{b_i}{M} \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Диференцируя уравнения (20), мы получим

$$M\frac{d\bar{\xi}}{dt}=a_1, \quad M\frac{d\bar{\eta}}{dt}=a_2, \quad M\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=a_3.$$

Это свидетельствует о том, что скорость центра тяжести остается постоянной. Обозначая эту скорость через $\bar{v}$, мы найдем

$$\bar{v}=\frac{1}{M}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Итак:

Центр тяжести системы точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$ движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно.

Произвольные постоянные a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 определяются из начальных условий. Действительно, подставляя в формулы (16) и (18) вместо координат и компонентов скоростей их начальные значения (5) и вместо t начальное его значение t_0, мы получим

$$a_1=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i^{(0)}, \quad a_2=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i^{(0)}, \quad a_3=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i^{(0)},$$

$$b_1=\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i^{(0)}-t_0\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i^{(0)}, \quad b_2=\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i^{(0)}-t_0\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i^{(0)},$$

$$b_3=\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i^{(0)}-t_0\sum_{i=0}^{n} m\dot{\zeta}_i^{(0)}.$$

Согласно интегралам центра тяжести солнечная система в целом движется относительно неподвижных звезд прямолинейно и равномерно. Как известно, это движение направлено приблизительно к созвездию Геркулеса и совершается со скоростью около 20 *км/сек*.

§ 11. Интегралы площадей. Рассмотрим формулы (11). Подставляя в них вместо частных производных от функции U равные им значения вторых производных из уравнений (8), мы получим справедливые для всякого значения t равенства

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}-\eta_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}\right)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}-\zeta_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}\right)=0,$$

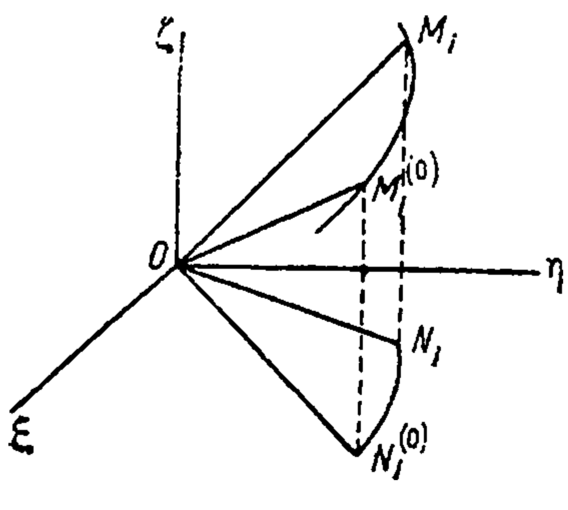
$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}-\xi_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}\right)=0,$$

интегрируя которые получим

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = c_3,\\ \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = c_1,\\ \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}\right) = c_2,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где c_3, c_1 и c_2 суть произвольные постоянные интеграции.

Равенства (21) представляют собой соотношения вида (15), а поэтому являются первыми интегралами системы (8). Эти интегралы называются *интегралами площадей*. Смысл этого названия заключается в следующем: рассмотрим какую-нибудь точку M_i системы; в своем движении относительно абсолютных осей она описывает некоторую пространственную кривую, проекции которой на координатные плоскости суть плоские кривые. Пусть $M_i^{(0)}$ — начальное положение точки и расстояние $OM_i^{(0)}$ — начальный радиус-вектор. Пусть M_i — положение точки в момент t и OM_i — радиус-вектор точки в момент t, $N_i^{(0)}$ и N_i — проекции точек $M_i^{(0)}$ и M_i на плоскость $\xi O\eta$ (черт. 4).



Черт. 4.

Обозначая площадь, описанную проекцией радиуса-вектора за время $t - t_0$ через A_i, мы, как известно, имеем

$$\frac{dA_i}{dt} = \xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}.$$

A_i, очевидно, есть проекция площади части конической поверхности $OM_i^{(0)}M_i$ с вершиной в начале координат и направляющей — дугой траектории точки M_i. Точно так же, обозначая через B_i и C_i проекции этой же площади на плоскости $\eta O\zeta$ и $\zeta O\xi$, мы имеем

$$\frac{dB_i}{dt} = \eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}, \qquad \frac{dC_i}{dt} = \zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}.$$

Величины $\frac{dA_i}{dt}$, $\frac{dB_i}{dt}$ и $\frac{dC_i}{dt}$ суть проекции секториальной скорости точки M_i, и интегралы (21) могут быть написаны в виде

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{dA_i}{dt} = c_3, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{dB_i}{dt} = c_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{dC_i}{dt} = c_2. \tag{22}$$

Таким образом мы убеждаемся в том, что

суммы произведений масс точек системы на проекции секториальных скоростей сохраняют постоянные значения во все время движения.

Интегрируя равенства (22), мы получим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i A_i = c_3 t + c_3', \quad \sum_{i=0}^{n} m_i B_i = c_1 t + c_1', \quad \sum_{i=0}^{n} m_i C_i = c_2 t + c_2'. \tag{23}$$

Эти формулы показывают, что

суммы произведений масс точек системы на проекции площадей, описанных соответствующими радиусами-векторами, изменяются пропорционально времени.

Отметим, что формулы (23) не являются интегралами системы (8), так как величины A_i, B_i и C_i выражаются интегралами от величин, в которые входят координаты и компоненты скоростей, а не через сами координаты и скорости. Рассмотрим, далее, вектор, компоненты которого определяются формулами (21). Этот вектор называется вектором момента количества движения системы, и формулы (21) показывают, что во все время движения этот вектор сохраняет неизменную величину и направление.

Поэтому интегралы (21) называются еще *интегралами моментов*. Вообразим плоскость, проходящую через центр тяжести системы перпендикулярно к направлению вектора момента количества движения. Очевидно, что ориентировка этой плоскости относительно абсолютных осей остается неизменной во все время движения. Эта плоскость имеет важное значение в небесной механике, и мы еще встретимся с нею в следующей главе.

Постоянные c_1, c_2, c_3, которые называются постоянными площадей, можно определить из начальных условий (5). Мы имеем, очевидно:

$$c_3 = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i^{(0)} \cdot \dot{\eta}_i^{(0)} - \eta_i^{(0)} \dot{\xi}_i^{(0)}),$$

$$c_1 = \sum_{i=0}^{n} (\eta_i^{(0)} \cdot \dot{\zeta}_i^{(0)} - \zeta_i^{(0)} \cdot \dot{\eta}_i^{(0)}),$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^{n} (\zeta_i^{(0)} \cdot \dot{\xi}_i^{(0)} - \xi_i^{(0)} \cdot \dot{\zeta}_i^{(0)}).$$

Величина вектора момента количества движения будет тогда равна

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

а его направляющие косинусы будут соответственно равны

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \quad \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}.$$

§ 12. Интеграл живых сил. Мы уже получили девять из десяти известных интегралов системы (8). Остается получить еще один последний интеграл.

Для этого умножим каждое уравнение системы (8) соответственно на $\frac{d\xi_i}{dt}$, $\frac{d\eta_i}{dt}$ и $\frac{d\zeta_i}{dt}$ и сложим все полученные равенства. Мы получим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d^2\xi_i}{dt^2}+\frac{d\eta_i}{dt}\frac{d^2\eta_i}{dt^2}+\frac{d\zeta_i}{dt}\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\frac{d\xi_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial\eta_i}\frac{d\eta_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}\frac{d\zeta_i}{dt}\right),$$

что, очевидно, можно переписать в виде[1])

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right]=\frac{dU}{dt}.$$

Последнее равенство выполняется для всех значений t. Поэтому, интегрируя, получим недостающий первый интеграл системы (8) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right]=U+h, \tag{24}$$

где h — произвольная постоянная интеграции.

Уравнение (24) называется *интегралом живых сил.*

Обозначая скорость точки M_i относительно абсолютных осей через v_i, мы можем написать уравнение (24) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2=U+h. \tag{25}$$

Но $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ есть живая сила точки M_i, поэтому уравнение (25) показывает, что живая сила всей системы в какой-нибудь момент равняется значению силовой функции в этот момент, сложенному с постоянной величиной h, которая называется, обыкновенно, *постоянной живых сил.* Перепишем уравнение (25) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2+(-U)=h.$$

Первый член левой части последнего уравнения равен кинетической энергии системы. Второе слагаемое $-U$ представляет собой потенциальную энергию системы. Поэтому интеграл живых сил указывает еще на то, что

во все время движения полная энергия системы сохраняет постоянное значение.

---

[1]) Действительно, правая часть равенства есть полная производная по t от силовой функции U.

По этой причине уравнение (24) называется еще также *интегралом энергии*, а постоянная h — *постоянной энергии*. Численное значение постоянной h определяется из начальных условий (5), и мы имеем

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \left[(\dot{\xi}_i^{(0)})^2 + (\dot{\eta}_i^{(0)})^2 + (\dot{\zeta}_i^{(0)})^2\right] - U_0,$$

где

$$U_0 = f \sum \sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^{(0)}} \quad (j \neq i)$$

и

$$\Delta_{ij}^{(0)} = \sqrt{(\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)})^2 + (\eta_i^{(0)} - \eta_j^{(0)})^2 + (\zeta_i^{(0)} - \zeta_j^{(0)})^2}\,.$$

Постоянную h можно также определить следующей эквивалентной формулой

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i (v_i^{(0)})^2 - U_0,$$

где

$$v_i^{(0)} = \sqrt{(\dot{\xi}_i^{(0)})^2 + (\dot{\eta}_i^{(0)})^2 + (\dot{\zeta}_i^{(0)})^2}\,.$$

Очевидно, что $v_i^{(0)}$ есть начальная скорость точки M_i.

§ 13. Заключительные замечания о первых интегралах. Выпишем прежде всего найденные нами первые интегралы вместе. Шесть интегралов движения центра тяжести:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = a_1, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i - t \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\xi_i}{dt} = b_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i}{dt} = a_2, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i - t \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i}{dt} = b_2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = a_3, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i - t \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = b_3.$$

Три интеграла площадей:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = c_3, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = c_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}\right) = c_2.$$

Интеграл живых сил:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right] - U = h.$$

Из этих десяти интегралов только три (а именно, вторая группа интегралов центра тяжести) содержат время t явным образом. В остальные семь интегралов время явно не входит.

Весьма существенным является также то обстоятельство, что левые части всех десяти первых интегралов суть простые алгебраические функции от координат и компонентов скоростей. При этом левые части интегралов центра тяжести суть линейные функции от упомянутых переменных, а левые части интегралов площадей суть целые и однородные функции второй степени, и только левая часть интеграла живых сил содержит координаты в знаменателе и под знаком квадратного корня. Этим свойством алгебраичности относительно координат и компонентов скоростей обладают только найденные нами десять интегралов.

Действительно, Брунс в 1887 г. доказал, что уравнения (8) не имеют никаких других интегралов, левые части которых являются алгебраическими функциями от координат и компонентов скоростей. Доказательство этой замечательной теоремы, однако, чрезвычайно длинно и сложно и здесь воспроизведено быть не может[1]). Отметим лишь для точности, что теорема Брунса имеет в виду *новые* интегралы, не являющиеся комбинациями тех десяти основных интегралов, которые мы получили выше. Иначе теорема не имела бы смысла, так как любая функция от левых частей уже известных интегралов, приравненная произвольной постоянной, также является первым интегралом системы. Но выведенные таким образом интегралы для нас никакого интереса не представляют, так как общий интеграл системы (8) должен быть образован *независимой* системой первых интегралов.

Заметим еще, что теорема Брунса вовсе не отрицает возможности существования вообще алгебраических интегралов, отличных от десяти найденных. Так что может быть существуют такие первые интегралы, левые части которых суть алгебраические функции от каких-либо других переменных, отличных от прямоугольных координат и компонентов скоростей. Действительно, из теории диференциальных уравнений известны многие случаи, когда возможно найти интеграл уравнения, или системы уравнений, при помощи предварительного преобразования к новым переменным. Впрочем, для системы (8), как уже было указано, кроме десяти найденных интегралов неизвестно вообще более ни одного интеграла не только алгебраического, но и вообще какого-либо иного вида.

Рассмотрим теперь, какую пользу может нам принести знание десяти известных интегралов.

Как известно из теории диференциальных уравнений, знание каждого первого интеграла системы уравнений позволяет понизить порядок системы на одну единицу. Некоторое количество k независимых между собою первых интегралов позволяет понизить порядок системы на k единиц. Таким образом в нашем случае мы имеем возможность понизить порядок системы (8) на десять единиц. Выполнив это, мы получим систему $6n - 4$ уравнений первого порядка между

[1]) Брунс, собственно говоря, доказал указанную теорему для частного случая задачи, когда $n = 2$, т. е. для задачи о трех телах. На общий случай теорема была распространена Пэнлеве в 1898 г.

$6n-4$ какими-нибудь из $6(n+1)$ неизвестных функций ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$. Это преобразование можно выполнить, либо исключая из уравнений (8) какие-нибудь десять из неизвестных функций, выражая их через остальные $6n-4$ при помощи десяти известных интегралов, либо выражая все $6(n+1)$ неизвестных функций через $6n-4$ новых неизвестных, которые могут быть выбраны совершенно произвольно, при том лишь условии, чтобы десять первых интегралов были тождественно удовлетворены. Получив тем или иным способом из системы (8) систему уравнений порядка $6n-4$, мы можем понизить порядок системы еще на одну единицу, исключая время [1]) и принимая, таким образом, за независимую переменную одну из неизвестных функций. Окончательно мы можем привести систему (8) к эквивалентной ей системе $6n-5$ диференциальных уравнений первого порядка.

Заканчивая эту главу, отметим еще, как выражаются произвольные постоянные интегралов через начальные условия. Из формул, приведенных в § 10, 11 и 12, видно, что постоянные a_1, a_2 и a_3 зависят только от начальных значений компонентов скоростей. Поэтому a_1, a_2 и a_3 определяются направлениями начальных скоростей точек M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_n$. Постоянные b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 зависят от начальных значений и координат, и компонентов скоростей. Поэтому эти постоянные определяются положениями точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ в начальный момент и направлениями их начальных скоростей. Наконец, постоянная h зависит только от начальных значений взаимных расстояний и скоростей. Поэтому эта постоянная определяется начальным расположением точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и величинами их начальных скоростей.

Все эти десять постоянных могли бы быть вычислены в том случае, если бы из наблюдений возможно было определять абсолютные положения и абсолютные скорости небесных тел. В действительности же все положения и скорости небесных тел могут быть определены только относительно каких-нибудь других небесных тел, а потому постоянные a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 и h фактически вычислены быть не могут.

---

[1]) Последнее, впрочем, возможно только в том случае, если сделанное преобразование таково, что новые уравнения, так же как и система (8), не содержат явно времени t. Очевидно, что всегда возможно выбрать преобразование, обладающее указанным свойством.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 14. Движение системы $n+1$ тел относительно ее центра тяжести. В § 10 мы установили, что центр тяжести (центр массы) системы материальных точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$ движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно. Это свойство определяет движение всей системы в целом и позволяет нам ограничиться изучением движений отдельных точек системы относительно ее центра тяжести.

С этой целью преобразуем уравнения[1])

$$m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \tag{1}$$

посредством параллельного переноса начала координат в центр тяжести системы. Пусть G есть этот центр тяжести; его координаты относительно абсолютных осей были нами обозначены через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Обозначим через ξ_i', η_i', ζ_i' координаты точки M_i относительно прямоугольной декартовой системы координат с началом в точке G и с осями, параллельными соответствующим осям первоначальной, абсолютной системы координат. Математически такое преобразование представляет собой не что иное, как замену переменных ξ_i, η_i, ζ_i новыми переменными ξ_i', η_i', ζ_i' при помощи формул

$$\xi_i = \xi_i' + \bar{\xi}, \quad \eta_i = \eta_i' + \bar{\eta}, \quad \zeta_i = \zeta_i' + \bar{\zeta} \quad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Нетрудно составить диференциальные уравнения, определяющие новые переменные. Действительно, диференцируя формулы (2) по t два раза, мы получаем

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{d^2\xi_i'}{dt^2} + \frac{d^2\bar{\xi}}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{d^2\eta_i'}{dt^2} + \frac{d^2\bar{\eta}}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_i'}{dt^2} + \frac{d^2\bar{\zeta}}{dt^2}.$$

Но в § 10 мы видели, что

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{a_1}{M} = \text{const}, \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt} = \frac{a_2}{M} = \text{const}, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{a_3}{M} = \text{const},$$

---

[1]) Здесь переписаны те же уравнения (8), которые мы рассматривали в предыдущей главе.

откуда следует, что

$$\frac{d^2\bar{\xi}}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2\bar{\eta}}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2\bar{\zeta}}{dt^2}=0,$$

и следовательно,

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=\frac{d^2\xi_i'}{dt^2}, \quad \frac{d^2\eta_i}{dt^2}=\frac{d^2\eta_i'}{dt^2}, \quad \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}=\frac{d^2\zeta_i'}{dt^2}.$$

Выразим теперь правые части уравнений (1) в функции новых переменных. Так как силовая функция U зависит только от разностей координат, то она не изменится при преобразовании, определяемом формулами (2), и мы можем опять написать

$$U=f\sum\sum\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

где

$$\Delta_{ij}=\sqrt{(\xi_i'-\xi_j')^2+(\eta_i'-\eta_j')^2+(\zeta_i'-\zeta_j')^2}.$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=\frac{\partial U}{\partial \xi_i'}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i}=\frac{\partial U}{\partial \eta_i'}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i'},$$

вследствие чего диференциальные уравнения движения системы относительно ее центра тяжести напишутся в следующем виде:

$$m_i\frac{d^2\xi_i'}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial \xi_i'}, \quad m_i\frac{d^2\eta_i'}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial \eta_i'}, \quad m_i\frac{d^2\zeta_i'}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i'} \quad (i=0, 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Уравнения (3) имеют в точности такой же вид, как и уравнения абсолютного движения (1). Поэтому задача об их интегрировании встречается с такими же трудностями, как и задача интегрирования уравнений (1). Но если бы сумели каким-нибудь образом проинтегрировать систему (3) и получили бы для координат ξ_i', η_i', ζ_i' явные выражения в виде известных функций времени

$$\xi_i'=f_i(t), \quad \eta_i'=\varphi_i(t), \quad \zeta_i'=\psi_i(t),$$

то координаты ξ_i, η_i, ζ_i относительно абсолютных осей определились бы формулами

$$\xi_i=\frac{a_1}{M}t+\frac{b_1}{M}+f_i(t), \quad \eta_i=\frac{a_2}{M}t+\frac{b_2}{M}+\varphi_i(t),$$

$$\zeta_i=\frac{a_3}{M}t+\frac{b_3}{M}+\psi_i(t).$$

Заметим еще, что $3(n+1)$ переменных ξ_i', η_i', ζ_i' не независимы, но связаны между собой некоторыми соотношениями. Действительно, подставляя в формулы (19) главы второй вместо ξ_i, η_i, ζ_i их выражения из формул (2), мы находим, например,

$$M\bar{\xi}=\sum_{i=0}^{n}m_i(\xi_i'+\bar{\xi})=\sum_{i=0}^{n}m_i\xi_i'+\sum_{i=0}^{n}m_i\bar{\xi}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}m_i\xi_i'+\bar{\xi}\sum_{i=0}^{n}m_i.$$

Но так как $\sum_{i=0}^{n} m_i = M$, мы получаем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i' = 0.$$

Аналогичные соотношения получаем также из двух остальных формул (19).

Таким образом имеем три соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i' = 0, \tag{4}$$

связывающие $3(n+1)$ переменных ξ_i', η_i', ζ_i', откуда следует, что независимыми из них являются только $3n$. Поэтому мы можем выразить какие-нибудь три из переменных ξ_i', η_i', ζ_i', например, ξ_0', η_0', ζ_0' через остальные, что дает формулы

$$\xi_0' = -\sum_{i=1}^{n} m_i \xi_i', \quad \eta_0' = -\sum_{i=1}^{n} m_i \eta_i', \quad \zeta_0' = -\sum_{i=1}^{n} m_i \zeta_i', \tag{5}$$

или, вообще, можем выразить все $3(n+1)$ величин ξ_i', η_i', ζ_i' в функции каких-нибудь $3n$ независимых, произвольно выбираемых параметров. Этим произволом можно иногда воспользоваться для того, чтобы придать диференциальным уравнениям ту или иную желаемую форму. Высказанными соображениями мы воспользуемся несколько ниже.

Соотношения (4) имеют весьма простой геометрический смысл и могут быть написаны непосредственно, так как они выражают только тот факт, что центр тяжести системы совпадает с началом координат. Так как центр тяжести не изменяет своего положения относительно новой системы координат, то мы имеем также соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\xi_i'}{dt} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i'}{dt} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\zeta_i'}{dt} = 0, \tag{6}$$

справедливые для всякого момента времени.

§ 15. Интегралы площадей в относительном движении. Так как система (3) имеет такой же вид, как и система (1), то уравнения (3) также имеют три интеграла площадей, которые могут быть получены совершенно таким же образом, как и в § 11.

Эти интегралы можно также вывести из интегралов площадей абсолютного движения, подставляя в формулы (21) главы второй вместо ξ_i, η_i, ζ_i их значения из формул (2). Мы имеем, например,

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \left[(\xi_i' + \bar{\xi})\left(\frac{d\eta_i'}{dt} + \frac{d\bar{\eta}}{dt}\right) - (\eta_i' + \bar{\eta})\left(\frac{d\xi_i'}{dt} + \frac{d\bar{\xi}}{dt}\right)\right] = c_3.$$

Раскрывая под знаком суммы круглые скобки, мы перепишем последнее уравнение в виде

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i' \frac{d\eta_i'}{dt} - \eta_i' \frac{d\xi_i'}{dt}\right) + \bar{\xi} \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\eta_i'}{dt} - \bar{\eta} \sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d\xi_i'}{dt} +$$
$$+ \frac{d\bar{\eta}}{dt} \sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i' - \frac{d\bar{\xi}}{dt} \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i' + \left(\bar{\xi} \frac{d\bar{\eta}}{dt} - \bar{\eta} \frac{d\bar{\xi}}{dt}\right) \sum_{i=0}^{n} m_i = c_3.$$

Ввиду соотношений (4) и (6), все члены левой части этого равенства, за исключением первого и последнего, равны нулю, и мы находим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i' \frac{d\eta_i'}{dt} - \eta_i' \frac{d\xi_i'}{dt}\right) = c_3 - M\left(\bar{\xi} \frac{d\bar{\eta}}{dt} - \bar{\eta} \frac{d\bar{\xi}}{dt}\right).$$

Второй член правой части последнего равенства нетрудно вычислить. Действительно, при помощи формул (20), выведенных в § 10, мы находим

$$\bar{\xi} \frac{d\bar{\eta}}{dt} - \bar{\eta} \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{a_1 t + b_1}{M} \frac{a_2}{M} - \frac{a_2 t + b_2}{M} \frac{a_1}{M} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{M^2}.$$

Поступая точно таким же образом с двумя остальными уравнениями (21), мы выведем следующие интегралы системы (3)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i' \frac{d\eta_i'}{dt} - \eta_i' \frac{d\xi_i'}{dt}\right) = c_3',\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i' \frac{d\zeta_i'}{dt} - \zeta_i' \frac{d\eta_i'}{dt}\right) = c_1',\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i' \frac{d\xi_i'}{dt} - \xi_i' \frac{d\zeta_i'}{dt}\right) = c_2',
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где c_3', c_1' и c_2' суть произвольные постоянные. Эти величины связаны с прежними произвольными постоянными формулами:

$$c_3' = c_3 + \frac{1}{M}(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$c_1' = c_1 + \frac{1}{M}(a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

$$c_2' = c_2 + \frac{1}{M}(a_3 b_1 - a_1 b_3),$$

где M есть полная масса системы.

Произвольные постоянные c_3', c_1', c_2' можно также определить из начальных условий для уравнений (3). Действительно, обозначая значения координат ξ_i', η_i', ζ_i' и компонентов скоростей $\dot{\xi}_i'$, $\dot{\eta}_i'$, $\dot{\zeta}_i'$[1]) для начального момента $t = t_0$ соответственно через

$$\xi_i'^{(0)}, \quad \eta_i'^{(0)}, \quad \zeta_i'^{(0)}, \quad \dot{\xi}_i'^{(0)}, \quad \dot{\eta}_i'^{(0)}, \quad \dot{\zeta}_i'^{(0)},$$

мы получим из формул (7)

$$\left.\begin{aligned} c_3' &= \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\xi_i'^{(0)} \dot{\eta}_i'^{(0)} - \eta_i'^{(0)} \dot{\xi}_i'^{(0)}\right], \\ c_1' &= \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\eta_i'^{(0)} \dot{\zeta}_i'^{(0)} - \zeta_i'^{(0)} \dot{\eta}_i'^{(0)}\right], \\ c_2' &= \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\zeta_i'^{(0)} \dot{\xi}_i'^{(0)} - \xi_i'^{(0)} \dot{\zeta}_i'^{(0)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Уравнения (7) для относительного движения имеют точно такой же смысл, как и уравнения (20), § 10 для абсолютного движения. А именно, уравнения (7) показывают, что

суммы произведений масс точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$ на проекции их секториальных скоростей сохраняют постоянное значение во все время движения,

равные их начальным значениям, определяемым формулами (8). Рассмотрим вектор, проекции которого по осям ζ', ξ', и η' определяются соответственно формулами (7). Формулы (7) показывают, что этот вектор[2]) сохраняет неизменную величину и неизменное направление относительно осей ξ', η', ζ' во все время движения.

Плоскость, проходящая через центр тяжести системы точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$, перпендикулярно к упомянутому вектору, очевидно, не изменяет также своего положения относительно осей ξ', η', ζ'. Эта плоскость, положение которой определяется только начальными значениями координат и компонентов скоростей и значениями масс точек системы, имеет большое теоретическое и практическое значение и называется *неизменяемой плоскостью Лапласа.*

§ 16. Неизменяемая плоскость Лапласа. Так как постоянные интегралов площадей c_1', c_2', c_3' определяются начальными значениями координат и компонентов скоростей точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$, их числовые значения зависят от выбора направлений координатных осей. Однако выражение

$$c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2,$$

представляющее квадрат длины вектора момента количества движения при любом выборе координатных осей (с началом в центре тяжести

[1]) Где $\dot{\xi}_i' = \dfrac{d\xi_i'}{dt}$, $\dot{\eta}_i' = \dfrac{d\eta_i'}{dt}$, $\dot{\zeta}_i' = \dfrac{d\zeta_i'}{dt}$.

[2]) Этот вектор представляет главный момент количества движения системы относительно ее центра тяжести.

системы) имеет одно и то же числовое значение, или, иными словами, остается инвариантным при любом вращении координатной системы вокруг центра тяжести.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь прямоугольную декартову систему координат ξ'', η'', ζ'' с началом в центре тяжести системы. Положение этой системы координат относительно системы ξ', η', ζ' определяется направляющими косинусами по следующей схеме

	ξ'	η'	ζ'
ξ''	α_1	β_1	γ_1
η''	α_2	β_2	γ_2
ζ''	α_3	β_3	γ_3

где α_1, β_1, γ_1 суть косинусы углов, образуемых положительным направлением оси ξ'' с осями ξ', η', ζ', α_2, β_2, γ_2 — направляющие косинусы оси η'' и α_3, β_3, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ''.

Между этими девятью направляющими косинусами существуют известные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, &\quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, &\quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1, &\quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Связь между старыми и новыми координатами точек M_0, $M_1, \ldots$, M_n определится тогда формулами

$$\begin{aligned} \xi_i'' &= \alpha_1\xi_i'+\beta_1\eta_i'+\gamma_1\zeta_i',\\ \eta_i'' &= \alpha_2\xi_i'+\beta_2\eta_i'+\gamma_2\zeta_i',\\ \zeta_i'' &= \alpha_3\xi_i'+\beta_3\eta_i'+\gamma_3\zeta_i' \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

В силу этих соотношений мы получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \xi_i''\frac{d\eta_i''}{dt}-\eta_i''\frac{d\xi_i''}{dt} &= (\alpha_1\xi_i'+\beta_1\eta_i'+\gamma_1\zeta_i')\left(\alpha_2\frac{d\xi_i'}{dt}+\beta_2\frac{d\eta_i'}{dt}+\gamma_2\frac{d\zeta_i'}{dt}\right)-\\ &-(\alpha_2\xi_i'+\beta_2\eta_i'+\gamma_2\zeta_i')\left(\alpha_1\frac{d\xi_i'}{dt}+\beta_1\frac{d\eta_i'}{dt}+\gamma_1\frac{d\zeta_i'}{dt}\right), \end{aligned}$$

которое можно также, очевидно, написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_i''\frac{d\eta_i''}{dt}-\eta_i''\frac{d\xi_i''}{dt} &= (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\left(\xi_i'\frac{d\eta_i'}{dt}-\eta_i'\frac{d\xi_i'}{dt}\right)+\\ &+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\left(\eta_i'\frac{d\zeta_i'}{dt}-\zeta_i'\frac{d\eta_i'}{dt}\right)+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)\left(\zeta_i'\frac{d\xi_i'}{dt}-\xi_i'\frac{d\zeta_i'}{dt}\right). \end{aligned}$$

Умножая обе части этого равенства на m_i и суммируя по i от $i=0$ до $i=n$, мы получим составляющую вектора момента количества движения системы по оси ζ_i''

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i'' \frac{d\eta_i''}{dt} - \eta_i'' \frac{d\xi_i''}{dt}\right) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i' \frac{d\eta_i'}{dt} - \eta_i' \frac{d\xi_i'}{dt}\right) +$$

$$+ (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i' \frac{d\zeta_i'}{dt} - \zeta_i' \frac{d\eta_i'}{dt}\right) +$$

$$+ (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i' \frac{d\xi_i'}{dt} - \xi_i' \frac{d\zeta_i'}{dt}\right).$$

Аналогичные выражения получаем также для составляющих вектора момента количества движения системы по осям ξ'' и η''. В силу формул (7) левые части этих равенств суть величины постоянные. Обозначая их через c_3'', c_1'' и c_2'', мы получаем интегралы площадей в новой системе координат

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i'' \frac{d\eta_i''}{dt} - \eta_i'' \frac{d\xi_i''}{dt}\right) = c_3'',$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i'' \frac{d\zeta_i''}{dt} - \zeta_i'' \frac{d\eta_i''}{dt}\right) = c_1'',$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i'' \frac{d\xi_i''}{dt} - \xi_i'' \frac{d\zeta_i''}{dt}\right) = c_2''.$$

Новые произвольные постоянные c_1'', c_2'', c_3'' связаны со старыми постоянными c_1', c_2', c_3' следующими формулами:

$$c_3'' = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)c_3' + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)c_1' + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)c_2',$$
$$c_1'' = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)c_3' + (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)c_1' + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)c_2',$$
$$c_2'' = (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)c_3' + (\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)c_1' + (\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)c_2'.$$

Но, как известно из аналитической геометрии, имеют место следующие равенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3, & \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3, \\ \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \alpha_3\gamma_1, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1, \\ \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ввиду чего предыдущие формулы напишутся в следующей форме

$$\left.\begin{aligned} c_1'' &= \alpha_1 c_1' + \beta_1 c_2' + \gamma_1 c_3', \\ c_2'' &= \alpha_2 c_1' + \beta_2 c_2' + \gamma_2 c_3', \\ c_3'' &= \alpha_3 c_1' + \beta_3 c_2' + \gamma_3 c_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Возводя каждое из этих трех равенств в квадрат и складывая вновь полученные равенства, мы найдем, в силу соотношений (9),

$$c_1''^2 + c_2''^2 + c_3''^2 = c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2,$$

что и требовалось доказать.

Сравнивая соотношения (11) с формулами преобразования координат, мы замечаем еще, что постоянные площадей при вращении координатной системы преобразуются так же, как и координаты. В частности новую систему координат можно выбрать таким образом, чтобы одна из координатных плоскостей, например плоскость $\xi''\eta''$ совпадала с неизменяемой плоскостью, определенной в предыдущем параграфе.

Действительно, в новой системе координат направляющие косинусы вектора момента количества движения будут равны величинам

$$\frac{c_1''}{\sqrt{c_1''^2+c_2''^2+c_3''^2}}, \quad \frac{c_2''}{\sqrt{c_1''^2+c_2''^2+c_3''^2}}, \quad \frac{c_3''}{\sqrt{c_1''^2+c_2''^2+c_3''^2}}.$$

Для того чтобы плоскость $\xi''\eta''$ совпадала с неизменяемой плоскостью (которая перпендикулярна вектору момента количества движения), необходимо, чтобы направление этого вектора совпадало с направлением оси ζ'', т. е. чтобы

$$c_1''=0, \quad c_2''=0.$$

Последние условия определяют направление вектора момента количества движения относительно старой системы координат, а следовательно, определяют также в той же системе координат положение неизменяемой плоскости.

Действительно, разрешая уравнения (11) относительно c_1', c_2', c_3', мы получаем [1])

$$\begin{aligned} c_1' &= \alpha_1 c_1'' + \alpha_2 c_2'' + \alpha_3 c_3'', \\ c_2' &= \beta_1 c_1'' + \beta_2 c_2'' + \beta_3 c_3'', \\ c_3' &= \gamma_1 c_1'' + \gamma_2 c_2'' + \gamma_3 c_3''. \end{aligned}$$

Выбирая неизменяемую плоскость за плоскость $\xi''\eta''$, мы делаем c_1'' и c_2'' равными нулю, вследствие чего

$$c_3'' = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2} = c,$$

а из предыдущих уравнений мы находим

$$\alpha_3 = \frac{c_1'}{c}, \quad \beta_3 = \frac{c_2'}{c}, \quad \gamma_3 = \frac{c_3'}{c},$$

что определяет положение новой оси ζ'' в системе координат ξ', η', ζ'.

В системе координат, в которой плоскостью $\xi''\eta''$ является неизменяемая плоскость, интегралы площадей напишутся в виде

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i'' \frac{d\eta_i''}{dt} - \eta_i'' \frac{d\xi_i''}{dt}\right) = c,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i'' \frac{d\zeta_i''}{dt} - \zeta_i'' \frac{d\eta_i''}{dt}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i'' \frac{d\xi_i''}{dt} - \xi_i'' \frac{d\zeta_i''}{dt}\right) = 0.$$

---

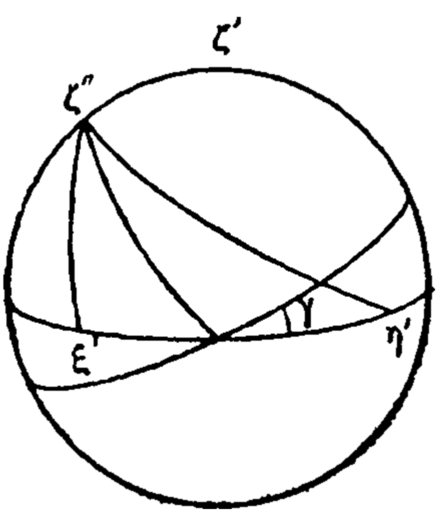
[1]) Для этого достаточно помножить уравнения (11) на α_1, α_2, α_3 и сложить, потом на β_1, β_2, β_3 и сложить и, наконец, на γ_1, γ_2, γ_3 и сложить. При этом надо иметь в виду соотношения (9).

Так как постоянная c, вообще говоря, отлична от нуля, то сумма произведений масс на проекции секториальных скоростей имеет наибольшее значение для плоскости $\xi''\eta''$, т. е. для неизменяемой плоскости.

Поэтому неизменяемая плоскость обладает еще тем свойством, что **сумма произведений масс на проекции на эту плоскость секториальных скоростей точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ имеет наибольшее значение по сравнению с значением той же величины относительно какой-либо другой плоскости, проходящей через центр тяжести системы.**

По этой причине неизменяемая плоскость называется также *плоскостью максимума площадей.*

В исследовании движений планет солнечной системы неизменяемая плоскость имеет весьма большое значение, так как те пространственные кривые, по которым движутся большие планеты, весьма близки к неизменяемой плоскости, вследствие чего координаты ζ_i'' будут для больших планет весьма малы. В теории возмущений нам придется неоднократно пользоваться этой неизменяемой плоскостью. Поэтому покажем как определяется ее положение.



Черт. 5.

Обозначим через γ угол наклона неизменяемой плоскости к плоскости $\xi'\eta'$ и через Π угол линии пересечения неизменяемой плоскости с плоскостью $\xi'\eta'$ (линии узлов) с положительным направлением оси ξ'. Из черт. 5 находим

$$\alpha_3 = \sin\gamma \sin\Pi, \quad \beta_3 = -\sin\gamma\cos\Pi,$$
$$\gamma_3 = \cos\gamma,$$

откуда выводим для определения γ и Π уравнения

$$\operatorname{tg}\Pi = -\frac{c_1'}{c_2'},$$
$$\operatorname{tg}\gamma\sin\Pi = \frac{c_1'}{c_3'},$$
$$\operatorname{tg}\gamma\cos\Pi = -\frac{c_2'}{c_3'}.$$

Так как c_1', c_2', c_3' определены из начальных условий, то отсюда получаем и γ, и Π.

§ 17. Интеграл живых сил в относительном движении. Интеграл живых сил получается для уравнений (3) точно так же, как и для уравнений (1). Помножим уравнения (3) соответственно на $\frac{d\xi_i'}{dt}, \frac{d\eta'}{dt}$ и $\frac{d\zeta'}{dt}$ и сложим все уравнения. Мы получим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{d\xi_i'}{dt}\frac{d^2\xi_i'}{dt^2} + \frac{d\eta_i'}{dt}\frac{d^2\eta_i'}{dt^2} + \frac{d\zeta_i'}{dt}\frac{d^2\zeta_i'}{dt^2}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi_i'}\frac{d\xi_i'}{dt} + \frac{\partial U}{\partial\eta_i'}\frac{d\eta_i'}{dt} + \frac{\partial U}{\partial\zeta_i'}\frac{d\zeta_i'}{dt}\right),$$

откуда интегрированием находим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\left(\frac{d\xi_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_i'}{dt}\right)^2\right]=U+h'. \tag{12}$$

Произвольная постоянная h' интеграла (12) определяется по начальным условиям формулой

$$h'=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[(\dot{\xi}_i'^{(0)})^2+(\dot{\eta}_i'^{(0)})^2+(\dot{\zeta}_i'^{(0)})^2\right]-U_0, \tag{13}$$

где

$$U_0=f\sum\sum\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^{(0)}} \qquad (i\neq j),$$

и начальные взаимные расстояния $\Delta_{ij}^{(0)}$ даются формулой

$$\Delta_{ij}^{(0)}=\sqrt{(\xi_i'^{(0)}-\xi_j'^{(0)})^2+(\eta_i'^{(0)}-\eta_j'^{(0)})^2+(\zeta_i'^{(0)}-\zeta_j'^{(0)})^2}.$$

Постоянную h' можно также выразить через произвольные постоянные абсолютного движения. Действительно, имея в виду формулы (1) и выражения для $\dot{\bar{\xi}}$, $\dot{\bar{\eta}}$, $\dot{\bar{\zeta}}$ (см. § 10), мы находим

$$\dot{\xi}_i'^{(0)}=\dot{\xi}_i^{(0)}-\frac{a_1}{M}, \quad \dot{\eta}_i'^{(0)}=\dot{\eta}_i^{(0)}-\frac{a_2}{M}, \quad \dot{\zeta}_i'^{(0)}=\dot{\zeta}_i^{(0)}-\frac{a_3}{M}.$$

Подставляя эти значения в формулу (13), мы получаем

$$h'=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[(\dot{\xi}_i^{(0)})^2+(\dot{\eta}_i^{(0)})^2+(\dot{\zeta}_i^{(0)})^2\right]-\frac{a_1}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i^{(0)}-$$

$$-\frac{a_2}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i^{(0)}-\frac{a_3}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i^{(0)}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{M^2}-U_0,$$

что, в силу формул, выведенных в § 10 и 12, может быть написано в следующей простой форме:

$$h'=h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{M}.$$

§ 18. Движение системы относительно одной из ее точек. В конце § 14 мы установили, что координаты ξ_i', η_i', ζ_i' ($i=0, 1, \ldots, n$) точек системы M_0, $M_1, \ldots, M_n$ относительно ее центра тяжести не независимы, но, наоборот, связаны тремя соотношениями

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i'=0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i'=0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i'=0, \tag{14}$$

позволяющими определить координаты какой-нибудь одной из точек системы, если известны координаты всех остальных точек.

Действительно, допустим на мгновенье, что движения точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ определены, т. е. что координаты их суть известные функции времени. Тогда, из уравнений (14), мы находим координаты точки M_0

$$\xi_0' = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i \xi_i', \quad \eta_0 = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i \eta_i, \quad \zeta_0' = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i \zeta_i. \tag{15}$$

Покажем теперь, что движение точки M_0 будет также вполне определено, если известны движения остальных точек системы не относительно центра тяжести, как это требуется формулами (15), а относительно самой точки M_0. Для этого напишем уравнения (14) в форме

$$-m_0\xi_0' = \sum_{i=1}^{n} m_i \xi_i', \quad -m_0\eta_0' = \sum_{i=1}^{n} m_i \eta_i', \quad -m_0\zeta_0' = \sum_{i=1}^{n} m_i \zeta_i',$$

после чего преобразуем их, вычитая из обеих частей каждого из трех написанных равенств соответственно выражения

$$\xi_0' \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \eta_0' \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \zeta_0' \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Нетрудно убедиться в том, что мы получим для определения ξ_0', η_0', ζ_0' следующие формулы

$$\left.\begin{aligned} \xi_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i' - \xi_0'), \quad \eta_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i(\eta_i' - \eta_0'), \\ \zeta_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{u} m_i(\zeta_i' - \zeta_0'), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

которые показывают, что величины ξ_0', η_0', ζ_0' будут определены, если известны разности

$$\xi_i' - \xi_0', \quad \eta_i' - \eta_0', \quad \zeta_i' - \zeta_0'$$

между координатами точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и координатами точки M_0 относительно центра тяжести всей системы.

Но предыдущие разности представляют собой не что иное, как координаты точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ в системе координат, оси которой соответственно параллельны прежним осям, а начало находится в точке M_0. Высказанные соображения позволяют нам еще немного упростить задачу о движении системы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$, приведя эту задачу к задаче о движении точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно точки M_0 [1]).

Выведем теперь диференциальные уравнения этой задачи. Обозначая координаты точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно системы прямоуголь-

[1]) Разумеется, что совершенно также можно было бы рассматривать движение системы и относительно какой-либо другой ее точки. Заметим еще, что в основной задаче небесной механики, т. е. в теории больших планет, за точку M_0 обыкновенно принимается центр тяжести Солнца и таким образом исследуются движения планет относительно Солнца.

ных декартовых осей координат с началом в точке M_0 через x_i, y_i, z_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, мы имеем следующие соотношения между старыми и новыми координатами точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$

$$\xi_i' = x_i + \xi_0', \quad \eta_i' = y_i + \eta_0', \quad \zeta_i' = z_i + \zeta_0' \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

или

$$x_i = \xi_i' - \xi_0', \quad y_i = \eta_i' - \eta_0', \quad z_i = \zeta_i' - \zeta_0'. \tag{17}$$

В силу этих соотношений формулы (16) напишутся в следующей форме:

$$\xi_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad \eta_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad \zeta_0' = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

и наша задача заключается теперь в определении функций x_i, y_i, z_i. Если последние будут определены, то из последних формул мы получаем ξ_0', η_0', ζ_0', а затем по формулам (17) ξ_i', η_i', ζ_i' $(i=1, 2, \ldots, n)$. Чтобы составить уравнения, связывающие функции x_i, y_i, z_i, продиференцируем дважды по t формулы (17). Мы получим

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2\xi_i'}{dt^2} - \frac{d^2\xi_0'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2\eta_i'}{dt^2} - \frac{d^2\eta_0'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_i'}{dt^2} - \frac{d^2\zeta_0'}{dt^2}.$$

В эти равенства подставим теперь вместо вторых производных координат ξ_i', η_i', ζ_i', ξ_0', η_0', ζ_0' их выражения из диференциальных уравнений (3), что дает следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i'} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \xi_0'}, \\ \frac{d^2y_i}{dt} &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \eta_i'} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \eta_0'}, \\ \frac{d^2z_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i'} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \zeta_0'} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Так как силовая функция U и ее частные производные по координатам ξ_i', η_i', ζ_i', ξ_0' η_0', ζ_0' зависят только от разностей этих координат, то правые части уравнений (18) будут функциями только величин x_i, y_i, z_i, а поэтому уравнения (18) и являются искомыми уравнениями, служащими для определения величин x_i, y_i, z_i.

Действительно, на основании соотношений (17), мы имеем

$$\xi_i' - \xi_j' = x_i - x_j, \quad \eta_i' - \eta_j' = y_i - y_j, \quad \zeta_i' - \zeta_j' = z_i - z_j \quad (i \neq j),$$

в силу чего взаимные расстояния между точками M_0, $M_1, \ldots, M_n$ определятся формулами

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \qquad (i \neq j)$$

Выделим из этих расстояний, расстояния точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$, от начала координат, т. е. от точки M_0. Эти расстояния мы назовем радиусами-векторами точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ и обозначим их через r_1, $r_2, \ldots, r_n$, так что

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} = \Delta_{i0} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Ввиду того, что правые части уравнений (18) формально зависят от величин ξ', η', ζ', мы их немного преобразуем, так чтобы не оставалось никаких сомнений в том, что эти правые части фактически зависят от x_i, y_i, z_i.

§ 19. Диференциальные уравнения относительного движения. Рассмотрим выражение (6) для функции U (см. § 8) и выделим в нем члены, содержащие множителем m_0. Мы можем написать

$$U = fm_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} + f \sum \sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{19}$$

причем во второй сумме ни один из индексов i и j не принимает значения нуль.

Так как

$$\Delta_{0i} = \sqrt{(\xi_0' - \xi_i')^2 + (\eta_0' - \eta_i')^2 + (\zeta_0' - \zeta_i')^2} = r_i,$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0'} = -fm_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\xi_0' - \xi_i')}{\Delta_{0i}^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_0'} = -fm_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\eta_0' - \eta_i')}{\Delta_{0i}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_0'} = -fm_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\zeta_0' - \zeta_i')}{\Delta_{0i}^3},$$

что можно иначе написать в форме

$$\frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \xi_0'} = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i x_i}{r_i^3}, \quad \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \eta_0'} = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i y_i}{r_i^3},$$

$$\frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \zeta_0'} = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i z_i}{r_i^3}.$$

Рассмотрим теперь частные производные от функции U по координатам ξ_i', η_i', ζ_i', $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В силу соотношений (17), мы, очевидно, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i'} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i'} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta_i'} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Положив

$$U' = f \sum \sum \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),$$

мы можем написать

$$U = fm_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} + U',$$

откуда находим

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = fm_0 m_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) + \frac{\partial U'}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = fm_0 m_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) + \frac{\partial U'}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = fm_0 m_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) + \frac{\partial U'}{\partial z_i}.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) = -\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r_i^3},$$

и точно так же

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) = -\frac{y_i}{r_i^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1}{r_i}\right) = -\frac{z_i}{r_i^3}.$$

В силу этого получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -fm_0 m_i \frac{x_i}{r_i^3} + \frac{\partial U'}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = -fm_0 m_i \frac{y_i}{r_i^3} + \frac{\partial U'}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = -fm_0 m_i \frac{z_i}{r_i^3} + \frac{\partial U'}{\partial z_i}.$$

С помощью полученных выражений для частных производных, мы можем написать уравнения (19) в следующей форме

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_i}{dt^2} &= -fm_0\frac{x_i}{r_3} + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial x_i} - f\sum_{1=k}^{n}\frac{m_k x_k}{r_3^k},\\
\frac{d^2y_i}{dt^2} &= -fm_0\frac{y_i}{r_i^3} + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial y_i} - f\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k y_k}{r_k^3},\\
\frac{d^2z_i}{dt_2} &= -fm_0\frac{z_i}{r_i^3} + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial z_i} - f\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k z_k}{r_k^3} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \quad (20$$

где правые части выражены явным образом через величины x_i, y_i, z_i. Уравнения (20) представляют систему $3n$ диференциальных уравнений второго порядка, вследствие чего система (20) есть система порядка $6n$. Первоначальная система уравнений абсолютного движения была порядка $6n + 6$. Таким образом порядок задачи мы снизили на 6 единиц. Для этого снижения мы использовали 6 первых интегралов, а именно, интегралы движения центра тяжести. Так как в рассматриваемой нами задаче известно всего десять первых интегралов, то, очевидно, что система (20) имеет только четыре первых интеграла. Эти интегралы мы рассмотрим в следующем параграфе, а теперь подвергнем систему (20) некоторому дальнейшему преобразованию, с целью привести ее к такому виду, в котором она рассматривается обыкновенно в небесной механике.

Для этого выделим из сумм, стоящих в правых частях этих уравнений, члены, имеющие множителем массу m_i и напишем систему (20) в следующем виде:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} = \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial x_i} - f\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{m_k x_k}{r_k^3},\\
&\frac{d^2y_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} = \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial y_i} - f\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{m_k y_k}{r_k^3},\\
&\frac{d^2z_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} = \frac{1}{m_i}\frac{\partial U'}{\partial z_i} - f\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{m_k z_k}{r_k^3},
\end{aligned}\right\} \qquad (21)
$$

где знак $\sum'$ указывает на то, что из суммы выброшен член, для которого $k = i$. Представим теперь правые части этих уравнений в виде частных производных некоторых функций.

Действительно, имея в виду, что $k \neq i$, мы можем написать

$$
\begin{aligned}
\frac{x_k}{r_k^3} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3}\right),\\
\frac{y_k}{r_k^3} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3}\right),\\
\frac{z_k}{r_k^3} &= \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3}\right).
\end{aligned}
$$

Вводя теперь функции R_i формулами

$$
R_i = \frac{1}{m_i} U_i' - f\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{m_k (x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k)}{r_k^3}, \qquad (22)
$$

где U_i' обозначает совокупность тех членов в выражении для U', которые содержат переменные x_i, y_i, z_i [1]), мы напишем уравнения (21) в следующем окончательном виде:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\
&\frac{d^2y_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial y_i},\\
&\frac{d^2z_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}\right\} \qquad (23)
$$

По причине, которая будет выяснена ниже, функции R_i называются *пертурбационными* или *возмущающими функциями*. Все эти функции различны, так что каждой точке M_i системы соответствует своя собственная пертурбационная функция. Заметим, что каждая из функций R_i

---

[1]) Остальные члены в выражении для U', т. е. члены, не зависящие от переменных x_i, y_i, z_i, пропадают при диференцировании функции U' по этим переменным.

не зависит от массы соответствующей ей точки M_i и от массы точки M_0, но каждый член в выражении R_i содержит множителем одну из масс всех остальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. В раскрытом виде выражения для функций R_i напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= fm_2\left(\frac{1}{\Delta_{12}} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3}\right) + fm_3\left(\frac{1}{\Delta_{13}} - \frac{x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3}{r_3^3}\right) + \\ &\qquad + \ldots + fm_n\left(\frac{1}{\Delta_{1n}} - \frac{x_1x_n + y_1y_n + z_1z_n}{r_n^3}\right), \\ R_2 &= fm_1\left(\frac{1}{\Delta_{21}} - \frac{x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1}{r_1^3}\right) + fm_3\left(\frac{1}{\Delta_{23}} - \frac{x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3}{r_3^3}\right) + \\ &\qquad + \ldots + fm_n\left(\frac{1}{\Delta_{2n}} - \frac{x_2x_n + y_2y_n + z_2z_n}{r_n^3}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n &= fm_1\left(\frac{1}{\Delta_{n1}} - \frac{x_nx_1 + y_ny_1 + z_nz_1}{r_1^3}\right) + fm_2\left(\frac{1}{\Delta_{n2}} - \frac{x_nx_2 + y_ny_2 + z_nz_2}{r_2^3}\right) + \\ &\qquad + \ldots + fm_{n-1}\left(\frac{1}{\Delta_{n,\,n-1}} - \frac{x_nx_{n-1} + y_ny_{n-1} + z_nz_{n-1}}{r_{n-1}^3}\right), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

где

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

и

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Каждый член в уравнениях (23) имеет простое механическое значение. Рассмотрим, например, первое уравнение системы (23) для $i = 1$. Оно может быть написано следующим образом

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -fm_0\frac{x_1}{r_1^3} - fm_1\frac{x_1}{r_1^3} - fm_2\frac{x_1 - x_2}{\Delta_{12}^3} - fm_3\frac{x_1 - x_3}{\Delta_{13}^3} - \ldots -$$

$$- fm_n\frac{x_1 - x_n}{\Delta_{1n}^3} - fm_2\frac{x_2}{r_2^3} - fm_3\frac{x_3}{r_3^3} - \ldots - fm_n\frac{x_n}{r_n^3}.$$

Величина $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ есть проекция полного ускорения точки M_1 на ось абсцисс.

Члены

$$-fm_2\frac{x_1 - x_2}{\Delta_{12}^3}, \quad -fm_3\frac{x_1 - x_3}{\Delta_{13}^3}, \ldots, \ -fm_n\frac{x_1 - x_n}{\Delta_{1n}^3}$$

суть соответственно проекции ускорений, сообщаемых движению точки M_1, действием притяжений точек $M_2, M_3, \ldots, M_n$.

Член

$$-fm_0\frac{x_1}{r_1^3}$$

есть проекция ускорения, сообщенного движению точки M_1, действием притяжения точки M_0.

Наконец, члены

$$-fm_1\frac{x_1}{r_1^3},\qquad -fm_2\frac{x_2}{r_2^3},\ \ldots,\qquad -fm_n\frac{x_n}{r_n^3}$$

представляют собой величины, обратные по знаку проекциям ускорений, сообщаемых действиями притяжений точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ движению точки M_0.

Эти ускорения появляются в выражении полного ускорения $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ точки M_1 по той причине, что движение этой точки рассматривается относительно точки M_0, которая сама движется под действием притяжений точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$.

Помещая начало системы координат, относительно которой рассматриваются движения точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$, в точке M_0, мы этим самым как бы уславливаемся считать точку M_0 *неподвижной*. Чтобы это было возможно, мы должны сообщить точке M_0 ускорения, равные по величине и противоположные по знаку тем, которые ей сообщают притяжения точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$. Но тогда мы должны и каждой из точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ сообщить те же ускорения, что и дает нам возможность рассматривать точку M_0, как неподвижную, а точки M_1, $M_2, \ldots, M_n$ движущимися относительно этой точки M_0. Описанную операцию называют иногда, не вполне удачно, *останавливанием* точки M_0.

§ 20. Первые интегралы уравнений относительного движения. Как уже было указано, система (23) имеет только четыре первых интеграла, а именно три интеграла площадей и интеграл живых сил. Эти интегралы проще всего получить из уравнений (7) и (12) для интегралов площадей и живых сил в движении системы относительно ее центра тяжести, подставляя в эти уравнения вместо величин ξ_i', η_i', ζ_i' их выражения в функции переменных x_i, y_i, z_i.

Напишем для этого уравнения (7) и (12) в форме

$$\left.\begin{aligned}
m_0\left(\eta_0'\frac{d\zeta_0'}{dt}-\zeta_0'\frac{d\eta_0'}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\eta_i'\frac{d\zeta_i'}{dt}-\zeta_i'\frac{d\eta_i'}{dt}\right)&=c_1',\\
m_0\left(\zeta_0'\frac{d\xi_0'}{dt}-\xi_0'\frac{d\zeta_0'}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\zeta_i'\frac{d\xi_i'}{dt}-\xi_i'\frac{d\zeta_i'}{dt}\right)&=c_2',\\
m_0\left(\xi_0'\frac{d\eta_0'}{dt}-\eta_0'\frac{d\xi_0'}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\xi_i'\frac{d\eta_i'}{dt}-\eta_i'\frac{d\xi_i'}{dt}\right)&=c_3',
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_0\left[\left(\frac{d\xi_0'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_0'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_0'}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{d\xi_i'}{dt}\right)^2+\right.\\
\left.+\left(\frac{d\eta_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_i'}{dt}\right)^2\right]=U+h'.
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Выражения для переменных $\xi'_0,\ \eta'_0,\ \zeta'_0,\ \xi'_1, \eta'_1,\ \zeta'_1, \ldots,\ \xi'_n,\ \eta'_n,\ \zeta'_n$ в функции переменных $x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2, y_2,\ z_2, \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n,$ мы получаем из формул § 18 в следующей форме:

$$\xi'_0 = -\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad \eta'_0 = -\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \quad \zeta'_0 = -\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k \tag{27}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \xi'_i = x_i - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad \eta'_i = y_i - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \\ \zeta'_i = z_i - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Из формул (27) и (28) находим

$$m_0\left(\eta'_0\,\frac{d\zeta'_0}{dt} - \zeta'_0\,\frac{d\eta'_0}{dt}\right) = \frac{m_0}{M^2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{dz_k}{dt}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{dy_k}{dt}\right)\right],$$

$$m_i\left(\eta'_i\,\frac{d\zeta'_i}{dt} - \zeta'_i\,\frac{d\eta'_i}{dt}\right) = m_i\left[\left(y_i - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right)\left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{dz_k}{dt}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(z_i - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right)\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{dy_k}{dt}\right)\right].$$

Аналогичным образом преобразуются два остальные уравнения (25). Мы их выписывать не будем, ограничиваясь для краткости проведением подробных выкладок только для первого уравнения. Производя в окончательном выражении этого интеграла круговую перестановку букв x, y, z, мы получим без труда и два остальные интеграла площадей.

С помощью последних выражений первый из интегралов площадей напишем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i\,\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) + \frac{1}{M}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{zd_k}{dt}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{dy_k}{dt}\right)\right] - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[y_i\sum_{k=1}^{n} m_k\,\frac{dz_k}{dt} - z^i\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{dy_k}{dt}\right] -$$

$$- \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\frac{dz_i}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k - \frac{dy_i}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right] = c'_1.$$

Но второй и третий члены в левой части последнего уравнения взаимно уничтожаются, так как, например,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dz_k}{dt}\right) = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n)\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dz_k}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dz_k}{dt},$$

а поэтому интегралы площадей могут быть написаны в форме [1])

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) - \frac{1}{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt}\right)\right] = c_1',\\
&\sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \frac{1}{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt}\right) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt}\right)\right] = c_2',\\
&\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) - \frac{1}{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt}\right) - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt}\right)\right] = c_3'.
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Таковы интегралы площадей для задачи о движении системы, относительно одной из ее точек (в данном случае, относительно точки M_0). Мы видим, что левые части этих интегралов имеют значительно более сложный вид, чем соответствующие выражения для абсолютного движения или движения относительно центра тяжести, и не имеют простого механического или геометрического значения.

[1]) Непосредственно получается первый интеграл площадей. Два остальные получены из него, как уже было указано, круговой перестановкой букв x, y, z. Кроме того, в последних суммах текущий индекс k заменен на i.

Выведем теперь последний интеграл системы (23). Подставляя выражения (27) и (28) в уравнение (26), мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{m_0}{M^2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dx_k}{dt}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dy_k}{dt}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dz_k}{dt}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}-\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dx_k}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}-\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dy_k}{dt}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dz_i}{dt}-\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{dz_k}{dt}\right)^2\right]=U+h',$$

где

$$U=fm_0\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+U'.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, мы без труда получим следующее уравнение

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]-\frac{1}{2M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt}\right)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt}\right)^2\right]=fm_0\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+\\
&\qquad+f\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}+h' \qquad (i\neq j).
\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

Это уравнение также имеет более сложный вид, чем соответствующие уравнения для абсолютного движения и движения относительно центра тяжести.

Отметим, как характерное свойство, что в уравнения (23) и (12) входят только *квадраты* компонентов скоростей точек системы, а в уравнение (30) входят также *произведения* компонентов скоростей.

Произвольные постоянные c_1', c_2', c_3' и h' можно также выразить через начальные значения координат x_i, y_i, z_i и их производных по времени $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$.

Обозначаем значения этих величин для $t=t_0$ через

$$x_1^{(0)},\quad y_1^{(0)},\quad z_1^{(0)};\quad x_2^{(0)},\quad y_2^{(0)},\quad z_2^{(0)};\ \ldots;\quad x_n^{(0)},\quad y_n^{(0)},\quad z_n^{(0)};$$

$$\dot{x}_1^{(0)},\quad \dot{y}_1^{(0)},\quad \dot{z}_1^{(0)};\quad \dot{x}_2^{(0)},\quad \dot{y}_2^{(0)},\quad \dot{z}_2^{(0)};\ \ldots;\quad \dot{x}_n^{(0)},\quad \dot{y}_n^{(0)},\quad \dot{z}_n^{(0)};$$

из формул (29) и (30) мы находим

$$c_1' = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^{(0)} \dot{z}_i^{(0)} - z_i^{(0)} \dot{y}_i^{(0)}) -$$

$$- \frac{1}{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i^{(0)} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^{(0)} \right) \right],$$

$$c_2' = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^{(0)} \dot{x}_i^{(0)} - x_i^{(0)} \dot{z}_i^{(0)}) -$$

$$- \frac{1}{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^{(0)} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i^{(0)} \right) \right],$$

$$c_3' = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^{(0)} \dot{y}_i^{(0)} - y_i^{(0)} \dot{x}_i^{(0)}) -$$

$$- \frac{1}{M} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^{(0)} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^{(0)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^{(0)} \right) \right],$$

$$h' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[(\dot{x}_i^{(0)})^2 + (\dot{y}_i^{(0)})^2 + (\dot{z}_i^{(0)})^2 \right] - \frac{1}{2M} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^{(0)} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^{(0)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i^{(0)} \right)^2 \right] - f m_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^{(0)}} - f \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^{(0)}},$$

где

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

$$r_i^{(0)} = \sqrt{(x_i^{(0)})^2 + (y_i^{(0)})^2 + (z_i^{(0)})^2},$$

$$\Delta_{ij}^{(0)} = \sqrt{(x_i^{(0)} - x_j^{(0)})^2 + (y_i^{(0)} - y_j^{(0)})^2 + (z_i^{(0)} - z_j^{(0)})^2}.$$

§ 21. Симметричные уравнения движения. Уравнения (23), определяющие движение точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно точки M_0, обладают тем существенным недостатком, что их правые части являются частными производными от *различных* функций. По этой причине и первые интегралы этой системы имеют довольно сложную, несимметричную форму. Однако этот недостаток, весьма существенный для теоретических изысканий, можно устранить при помощи введения некоторой новой системы зависимых переменных. Это преобразование было впервые выполнено Якоби и поэтому переменные, которые осуществляют указанное преобразование, часто называются *координатами Якоби*.

Рассмотрим это преобразование в общем виде. Будем исходить из тех же уравнений (3), определяющих движение системы относительно ее центра тяжести, из которых мы вывели и уравнения (23). Эти исходные уравнения мы писали в следующем виде:

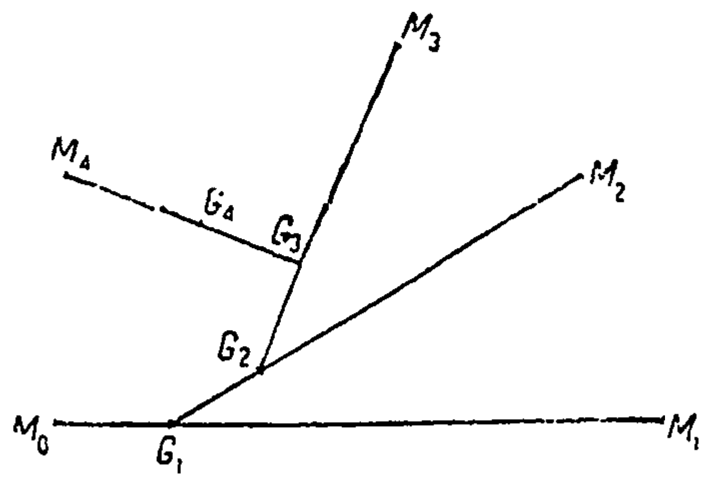
$$m_i \frac{d^2\xi_i'}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i'}, \quad m_i \frac{d^2\eta_i'}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i'}, \quad m_i \frac{d^2\zeta_i'}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i'} \tag{31}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Функции ξ_i', η_i', ζ_i', определяемые этими уравнениями, связаны тремя соотношениями

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i' = 0, \tag{32}$$

которые позволяют выразить все эти переменные, как функции каких-нибудь $3n$ произвольных параметров. Эти параметры, которые и играют роль новых переменных, можно выбирать, конечно, совершенно произвольно, при условии только, чтобы выполнялись уравнения (32). Следуя Якоби, выберем эти новые переменные следующим образом: пусть (черт. 6)



Черт. 6.

G_1 — центр тяжести масс M_0 и M_1,
G_2 — „ „ „ M_0, M_1 и M_2,
G_3 — „ „ „ M_0, M_1, M_2 и M_3
. . . .
G_{n-1} — „ „ „ M_0, $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Обозначим через:

x_1', y_1', z_1' — координаты точки M_1 в системе координат с началом в точке M_0,
x_2', y_2', z_2' — координаты точки M_2 в системе координат с началом в точке G_1,
x_3', y_3', z_3' — координаты точки M_3 в системе координат с началом в точке G_2,
. . . .
x_n', y_n', z_n' — координаты точки M_n в системе координат с началом в точке G_{n-1}.

Соответствующие оси всех этих систем координат возьмем параллельными друг другу и параллельными соответствующим осям старой системы координат с началом в центре тяжести всей системы. Нетрудно получить соотношения между старыми и новыми координатами.

Действительно, обозначая через $\overline{\xi_i'}$, $\overline{\eta_i'}$, $\overline{\zeta_i'}$ координаты точек G_1, $G_2, \ldots, G_{n-1}$ относительно старой системы координат, мы имеем

$$\xi_1' = x_1' + \overline{\xi_0'}, \quad \xi_2' = x_2' + \overline{\xi_2'}, \quad \xi_3' = x_3' + \overline{\xi_2'}, \ldots, \quad \xi_n' = x_n' + \overline{\xi}_{n-1},$$

и соответствующие формулы для координат η_i' и ζ_i', которые мы для сокращения выписывать не будем.

Но, из свойств центра тяжести, мы находим

$$\bar{\xi}_1' = \frac{1}{\sigma_1}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1'),$$

$$\bar{\xi}_2' = \frac{1}{\sigma_2}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1' + m_2\xi_2'),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{\xi}_{n-1}' = \frac{1}{\sigma_{n-1}}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1' + \dots + m_{n-1}\xi_{n-1}'),$$

где

$$\sigma_1 = m_0 + m_1, \quad \sigma_2 = m_0 + m_1 + m_2, \dots,$$
$$\sigma_{n-1} = m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1}.$$

В силу этих формул мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= \xi_1' - \xi_0',\\
x_2' &= \xi_2' - \frac{1}{\sigma_1}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1'),\\
x_3' &= \xi_3' - \frac{1}{\sigma_2}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1' + m_2\xi_2'),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n' &= \xi_n' - \frac{1}{\sigma_{n-1}}(m_0\xi_0' + m_1\xi_1' + \dots + m_{n-1}\xi_{n-1}')
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

и соответствующие формулы для координат y_i' и z_i'. Формулы (33) выражают новые координаты через старые. Чтобы получить выражения для старых координат в функции новых нужно присоединить к уравнениям (33) уравнение $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i\xi_i' = 0$ и разрешить полученную таким образом систему относительно величин ξ_i'. Проще всего это сделать следующим образом. Из уравнения $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i\xi_i' = 0$ имеем $m_n\xi_n' = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\xi_i'$, вследствие чего последнее уравнение (33) примет вид

$$x_n' = \xi_n' + \frac{m_n}{\sigma_{n-1}}\xi_n' = \frac{M}{\sigma_{n-1}}\xi_n',$$

откуда получаем

$$\xi_n' = \frac{\sigma_{n-1}}{M}x_n'.$$

Аналогично, находим

$$m_n\xi_n' + m_{n-1}\xi_{n-1}' = -\sum_{i=0}^{n-2} m_i\xi_i' = \frac{m_n\sigma_{n-1}}{M}x_n' + m_{n-1}\xi_{n-1}',$$

вследствие чего предпоследнее уравнение системы (33) примет вид

$$x'_{n-1} = \xi'_{n-1} + \frac{m_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\xi'_{n-1} + \frac{m_n}{M}\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}x'_n =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\xi'_{n-1} + \frac{m_n}{M}\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}x'_n,$$

откуда следует соотношение

$$\xi'_{n-1} = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}x'_{n-1} - \frac{m_n}{M}x'_n.$$

Поступая таким же образом далее, мы получим последовательно все величины ξ'_i и искомые соотношения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi'_0 &= -\frac{m_1}{\sigma_1}x'_1 - \frac{m_2}{\sigma_2}x'_2 - \ldots - \frac{m_n}{M}x'_n,\\
\xi'_1 &= \frac{m_0}{\sigma_1}x'_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}x'_2 - \ldots - \frac{m_n}{M}x'_n,\\
\xi'_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1}x'_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}x'_3 - \ldots - \frac{m_n}{M}x'_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi'_{n-1} &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}x'_{n-1} - \frac{m_n}{M}x'_n,\\
\xi'_n &= \frac{\sigma_{n-1}}{M}x'_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Аналогичные соотношения находим также для координат η'_i и ζ'_i.

Теперь остается вывести диференциальные уравнения, определяющие новые переменные $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Это можно, конечно, сделать непосредственно, диференцируя дважды соотношения (33) и подставляя вместо вторых производных от ξ'_i их выражения из уравнений (31) и вместо самих величин ξ'_i их выражения (34). Однако этот путь требует длительных преобразований и утомительных выкладок и проще получить указанные уравнения при помощи уравнений Лагранжа, которые в общем виде пишутся следующим образом: [1])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \qquad (35)$$

где T — живая сила системы, U — силовая функция и q_k — параметры, определяющие положение системы. В нашем случае роль этих параметров играют координаты

$$x'_1,\ y'_1,\ z'_1;\ x'_2,\ y'_2,\ z'_2;\ldots;\ x'_n,\ y'_n,\ z'_n$$

и чтобы написать уравнения, определяющие эти переменные нам остается только выразить T и U в функции величин x'_i, y'_i, z'_i и $\dot x'_i$, $\dot y'_i$, $\dot z'_i$.

[1]) Об уравнениях Лагранжа см. в главе седьмой.

В старых координатах мы имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\left(\frac{d\xi_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_i'}{dt}\right)^2\right] \tag{36}$$

и для получения выражения для T в функции новых переменных нам остается только подставить в формулу (36) вместо производных от ξ_i', η_i', и ζ_i' их выражения, получаемые диференцированием формул (34). Очевидно, что T будет зависеть только от производных величин x_i', y_i', z_i' и не будет содержать в своем выражении ни времени t, ни самих координат x_i', y_i', z_i'. Произведя вычисления, мы без труда убедимся также в том, что T будет содержать только квадраты производных от x_i', y_i', z_i', так как все произведения производных сокращаются. Окончательное выражение для T напишется в виде [1])

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}m_i\left[\left(\frac{dx_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i'}{dt}\right)^2\right].$$

Полагая, наконец, для сокращения

$$\mu_i=\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}m_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы напишем выражение для живой силы в следующем виде:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[\left(\frac{dx_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i'}{dt}\right)^2\right]. \tag{37}$$

Последнее выражение можно рассматривать, как живую силу системы n фиктивных материальных точек, положения которых относительно некоторой системы координат [2]) определяются соответственно величинами x_i', y_i', z_i' и которые обладают, соответственно, массами

$$\mu_1=\frac{m_0m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu_2=\frac{(m_0+m_1)m_2}{m_0+m_1+m_2}, \quad \mu_3=\frac{(m_0+m_1+m_2)m_3}{m_0+m_1+m_2+m_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_n=\frac{(m_0+m_1+\ldots+m_{n-1})m_n}{m_0+m_1+\ldots+m_{n-1}+m_n}.$$

Выражая силовую функцию U через новые переменные, мы видим, что U будет зависеть только от координат x_i', y_i', z_i' и, следовательно, не будет содержать в своем выражении ни времени t, ни производных $\dot{x}_i'$, $\dot{y}_i'$, $\dot{z}_i'$.

---

[1]) Для симметрии здесь положено $M=\sigma_n$ и $m_0=\sigma_0$.

[2]) Одной и той же для всех этих фиктивных точек.

Полагая теперь последовательно в уравнении (35) $q_i = x'_i,\ y'_i,\ z'_i$, мы получим уравнения, определяющие переменные $x'_i,\ y'_i,\ z'_i$, в следующем виде

$$\left.\begin{aligned}\mu_i \frac{d^2x'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \quad \mu_i \frac{d^2y'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \quad \mu_i \frac{d^2z'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z'_i}\\ (i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Напишем еще явное выражение для силовой функции U

$$\left.\begin{aligned}U = fm_0\left(\frac{m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_3}{\Delta_{03}} + \ldots + \frac{m_n}{\Delta_{0n}}\right) + fm_1\left(\frac{m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_3}{\Delta_{13}} + \ldots +\right.\\ \left. + \frac{m_n}{\Delta_{1n}}\right) + fm_2\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_4}{\Delta_{24}} + \ldots + \frac{m_n}{\Delta_{2n}}\right) + \ldots + fm_{n-1}\frac{m_n}{\Delta_{n-1,n}}.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} найдутся из формул § 14 при помощи соотношений (34) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Delta_{01}^2 &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2,\\
\Delta_{02}^2 &= \left(x'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}x'_1\right)^2 + \left(y'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}y'_1\right)^2 + \left(z'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}z'_1\right)^2,\\
\Delta_{03}^2 &= \left(x'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}x'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}x'_1\right)^2 +\\
&\quad + \left(y'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}y'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}y'_1\right)^2 + \left(z'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}z'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1}z'_1\right)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{12}^2 &= \left(x'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}z'_1\right)^2,\\
\Delta_{13}^2 &= \left(x'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}x'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}x'_1\right)^2 +\\
&\quad + \left(y'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}y'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}y'_1\right)^2 + \left(z'_3 + \frac{m_2}{\sigma_2}z'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1}z'_1\right)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{23}^2 &= \left(x'_3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}x'_2\right)^2 + \left(y'_3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}y'_2\right)^2 + \left(z_3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}z'_2\right)^2.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

§ 22. Первые интегралы симметричных уравнений движения. Покажем теперь, что первые интегралы уравнений (38) имеют такой же вид, как и в движении относительно центра тяжести или в движении относительно абсолютных осей. Эти интегралы можно получить непосредственным преобразованием к переменным $x'_i,\ y'_i,\ z'_i$ уравнений (7), выведенных в § 15 и уравнения (13), выведенного в § 17. Последнее уравнение, представляющее интеграл живых сил, в силу выражения (37) для живой силы T, напишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[\left(\frac{dx'_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'_i}{dt}\right)^2\right] = U + h'. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь интегралы площадей. Подставляя в уравнения (7) вместо ξ_i', η_i', ζ_i' их выражения (34)[1]) и производя некоторые упрощения, можно убедиться в том, что интегралы площадей в новых переменных будут иметь совершенно такой же вид, как и в старых переменных. Впрочем для получения интегралов площадей в новых переменных нет даже надобности производить все эти выкладки и преобразования.

Действительно, уравнения (38) мы можем рассматривать, как диференциальные уравнения движения системы n фиктивных материальных точек, имеющих соответственно массы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Но уравнения (38) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения (31), а поэтому интегралы площадей для системы (38) можно просто вывести из уравнений (7), заменяя величины ξ_i', η_i', ζ_i' на величины x_i', y_i', z_i', массы m_i на фиктивные массы μ_i и беря суммы не от $i=0$ до $i=n$, а от $i=1$ до $i=n$. Таким образом интегралы площадей для уравнений (38) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(y_i'\frac{dz_i'}{dt}-z_i'\frac{dy_i'}{dt}\right)=c_1',\\
&\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(z_i'\frac{dx_i'}{dt}-x_i'\frac{dz_i'}{dt}\right)=c_2',\\
&\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(x_i'\frac{dy_i'}{dt}-y_i'\frac{dx_i'}{dt}\right)=c_3',
\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

Произвольные постоянные h', c_1', c_2', c_3' можно выразить через начальные значения $x_i'^{(0)}$, $y_i'^{(0)}$, $z_i'^{(0)}$ переменных x_i', y_i', z_i' и через начальные значения $\dot{x}_i'^{(0)}$, $\dot{y}_i'^{(0)}$, $\dot{z}_i'^{(0)}$ производных $\dot{x}_i'$, $\dot{y}_i'$, $\dot{z}_i'$ для $t=t_0$. Выполнив это, мы получим

$$h'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[(\dot{x}_i'^{(0)})^2+(\dot{y}_i'^{(0)})^2+(\dot{z}_i'^{(0)})^2\right]-U_0,$$

$$c_1'=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(y_i'^{(0)}\dot{z}_i'^{(0)}-z_i'^{(0)}\dot{y}_i'^{(0)}\right),$$

$$c_2'=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(z_i'^{(0)}\dot{x}_i'^{(0)}-x_i'^{(0)}\dot{z}_i'^{(0)}\right),$$

$$c_3'=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(x_i'^{(0)}\dot{y}_i'^{(0)}-y_i'^{(0)}\dot{x}_i'^{(0)}\right),$$

---

[1]) Соотношения между η_i' и y_i', а также между ζ_i' и z_i' имеют такой же вид, как и соотношения (34).

где U_0 обозначает результат подстановки в функцию U вместо величин x_i', y_i', z_i' их начальных значений $x_i'^{(0)}$, $y_i'^{(0)}$, $z_i'^{(0)}$. Формулы (40) и (41) показывают, что

в координатах Якоби интеграл живых сил и интегралы площадей имеют такую же форму, как и в системе координат, начало которой находится в центре тяжести системы.

Это обстоятельство делает уравнения (38) более удобными для исследования, чем уравнения относительного движения (31). Переход от одной системы координат к другой совершается по формулам (33) и (34) и им аналогичным для координат y_i' и z_i'.

§ 23. Теория больших планет. Диференциальные уравнения, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах, определяют движение любой системы конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся одна к другой по закону Ньютона. Мы знаем только четыре первые интеграла этих уравнений и, следовательно, не можем полностью их интегрировать [1]), так как недостающие $6n - 4$ первых интегралов до сих пор неизвестны.

Поэтому в приложениях нашей математической теории к той или иной актуальной динамической задаче мы вынуждены воспользоваться каким-либо методом, дающим приближенное решение соответствующих диференциальных уравнений, чем мы, конечно, еще более отдаляем нашу математическую схему от действительности. Впрочем некоторые обстоятельства, характерные для некоторых астрономических задач, позволяют надеяться на то, что полученное приближенное решение достаточно мало отличается от точного решения и, таким образом, действительно может определять движение по крайней мере для некоторого, не очень большого, промежутка времени.

Рассмотрим прежде всего основную задачу небесной механики, а именно теорию больших планет солнечной системы. В этом случае $n = 9$ и построение указанной теории зависит прежде всего от решения задачи о движении системы десяти материальных точек. Условимся раз навсегда, что точка M_0 изображает Солнце, M_1 — Меркурий, M_2 — Венеру и т. д. и, наконец, M_9 — Плутона. Основные единицы, как это обыкновенно принято в астрономии [2]), выберем следующим образом:

За единицу длины примем среднее расстояние Земли от Солнца.

За единицу массы примем массу Солнца.

За единицу времени примем средние солнечные сутки.

Полагая тогда

$$f = k^2,$$

мы получим

$$k = 0{,}01720209895.$$

Эта величина называется *гауссовой постоянной.*

---

[1]) Исключением является случай, о котором мы уже упоминали, когда $n=1$, т. е. случай задачи о двух телах.

[2]) Главным образом, конечно, при рассмотрении явлений, происходящих в солнечной системе.

Затем, в принятой системе единиц, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&m_0=1, \quad m_1=\frac{1}{8\,000\,000}, \quad m_2=\frac{1}{410\,000},\\
&m_3=\frac{1}{331\,950}, \quad m_4=\frac{1}{3\,085\,000},\\
&m_5=\frac{1}{1047{,}40}, \quad m_6=\frac{1}{3499},\\
&m_7=\frac{1}{22\,650}, \qquad m_8=\frac{1}{19\,350}\ ^{1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Приведенные числа показывают, что массы больших планет вообще очень малы по сравнению с массой Солнца и это обстоятельство является важнейшим из тех, которые позволяют построить теорию движения этих тел с достаточной (по крайней мере с точки зрения практики) точностью.

Напишем уравнения движения в форме (23), т. е. будем рассматривать движения больших планет относительно системы координат, начало которой совпадает с центром тяжести Солнца [2]). Мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=\frac{\partial R_1}{\partial x_1}, &&\frac{d^2z_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{z_2}{r_2^3}=\frac{\partial R_2}{\partial z_2},\\
&\frac{d^2y_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r_1^3}=\frac{\partial R_1}{\partial y_1}, &&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d^2z_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{z_1}{r_1^3}=\frac{\partial R_1}{\partial z_1}, &&\frac{d^2x_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{x_9}{r_9^3}=\frac{\partial R_9}{\partial x_9},\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{x_2}{r_2^3}=\frac{\partial R_2}{\partial x_2}, &&\frac{d^2y_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{y_9}{r_9^3}=\frac{\partial R_9}{\partial y_9},\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{y_2}{r_2^3}=\frac{\partial R_2}{\partial y_2}, &&\frac{d^2z_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{z_9}{r_9^3}=\frac{\partial R_9}{\partial z_9},
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где функции $R_1, R_2, \dots, R_9$ определяются формулами (24), выведенными в § 19. Рассматривая эти выражения, мы убеждаемся в том, что ввиду малости масс, правые части уравнений (43) будут численно также весьма малы [3]), по крайней мере в течение промежутка времени, для которого радиусы-векторы $r_1, r_2, \dots, r_9$ и взаимные расстояния $\Delta_{12}, \dots, \Delta_{89}$ остаются бо́льшими некоторого неизменного, отличного от нуля предела.

Поэтому, в первом приближении на пути интегрирования уравнений (43), мы можем отбросить малые члены $\frac{\partial R_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial R_9}{\partial z_9}$, в этих

---

[1]) Эти числа взяты из первого тома книги Рессела, Дэгана и Стюарта „Астрономия" (ОНТИ, 1935). Масса Плутона, т. е. величина m_9 точно неизвестна. Предполагается, что она составляет около 0,9 массы Земли.

[2]) Такая система координат называется гелиоцентрической.

[3]) По сравнению со вторыми членами левых частей уравнений (43).

уравнениях, вследствие чего уравнения чрезвычайно упростятся, приняв следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{x_1}{r_1^3}=0, && \frac{d^2z_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{z_2}{r_2^3}=0,\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r_1^3}=0, && \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^2z_1}{dt^2}+k^2(1+m_1)\frac{z_1}{r_1^3}=0, && \frac{d^2x_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{x_9}{r_9^3}=0,\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{x_2}{r_2^3}=0, && \frac{d^2y_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{y_9}{r_9^3}=0,\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+k^2(1+m_2)\frac{y_2}{r_2^3}=0, && \frac{d^2z_9}{dt^2}+k^2(1+m_9)\frac{z_9}{r_9^3}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

Весьма важное свойство системы уравнений заключается в том, что первые три уравнения не зависят от всех остальных в силу того, что они содержат только координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1; точно так же вторые три уравнения не зависят от всех остальных, так как содержат только координаты x_2, y_2, z_2 и так далее. Таким образом в первом приближении система совместных уравнений (43) разбивается на девять групп систем уравнений, независящих одна от другой и поэтому каждая из этих групп *может быть интегрируема отдельно*. Эту задачу мы подробно рассмотрим в следующей главе.

Отметим важное динамическое значение уравнений (47). Рассмотрим, например, первую группу этих уравнений, определяющих функции x_1, y_1, z_1. Эти уравнения мы получили бы, если бы наша система состояла только из двух точек M_0 и M_1, и они определяли бы тогда относительное движение точки M_1 около M_0. Те же самые соображения справедливы для каждой из групп уравнений (44) и поэтому мы приходим к заключению:

Первое приближение определяет движение каждой планеты относительно Солнца так, как будто бы все остальные планеты не существовали.

Иными словами в первом приближении мы принимаем в расчет только действия притяжения Солнца на каждую из планет, а действиями притяжений всех остальных планет на ту, движение которой рассматривается, мы пренебрегаем.

Фиктивное движение каждой из планет, определяемое первым приближением, называется *невозмущенным движением*, а истинное движение каждой из планет называется возмущенным [1]).

Интегрируя уравнения (44), мы получим формулы вида

$$\left.\begin{aligned}
&x_i=f_i(t,\ c_1^{(i)},\ c_2^{(i)},\ c_3^{(i)},\ c_4^{(i)},\ c_5^{(i)},\ c_6^{(i)}),\\
&y_i=\varphi_i(t,\ c_1^{(i)},\ c_2^{(i)},\ c_3^{(i)},\ c_4^{(i)},\ c_5^{(i)},\ c_6^{(i)}),\\
&z_i=\psi_i(t,\ c_1^{(i)},\ c_2^{(i)},\ c_3^{(i)},\ c_4^{(i)},\ c_5^{(i)},\ c_6^{(i)}) \qquad (i=1,2,\ldots,9),
\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

[1]) Употребляя термин „истинное“ движение, мы подразумеваем здесь движение, определяемое точными уравнениями (43). Такое „истинное“ движение по причинам, изложенным в главе первой, далеко еще не является настоящим действительным движением планет.

где $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$, $c_3^{(i)}$, $c_4^{(i)}$, $c_5^{(i)}$ и $c_6^{(i)}$ суть произвольные постоянные интеграции. Эти формулы определяют невозмущенное движение каждой планеты. Но функции f_i, φ_i и ψ_i, удовлетворяя уравнениям (44), конечно, не удовлетворяют точным уравнениям (43). Однако в силу малости масс $m_1, m_2, \ldots, m_9$, результаты подстановки в уравнения (43) вместо x_i, y_i, z_i выражений (45) из невозмущенных движений представятся равенствами вида

$$0 = \text{малая величина}$$

и естественно предположить, что, придавая величинам (45) *некоторые малые поправки*, мы сможем сделать малую величину, в вышенаписанном равенстве, в точности равною нулю. Если такие поправки Δx_i, Δy_i, Δz_i определены так, что величины x_i, y_i, z_i, определяемые формулами

$$x_i = f_i + \Delta x_i, \quad y_i = \varphi_i + \Delta y_i, \quad z_i = \psi_i + \Delta z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9), \tag{46}$$

в точности удовлетворяют уравнениям (43), то формулы (45) представят точное решение этих уравнений и определят истинное (в указанном выше смысле слова) движение больших планет. Величины Δx_i, Δy_i, Δz_i называются *возмущениями* невозмущенного движения планеты M_i относительно Солнца и та часть небесной механики, которая занимается определением этих величин, называется *теорией возмущений*.

Отметим тут же, что при современном состоянии математического анализа, величины Δx_i, Δy_i, Δz_i невозможно определить с абсолютной точностью, ибо тогда оказалось бы, что мы сумели проинтегрировать до конца систему (43), каковое интегрирование, по крайней мере в настоящее время, не может быть выполнено ввиду отсутствия $6n - 4 = 6 \cdot 9 - 4 = 50$ первых интегралов системы (43).

Поэтому мы и не будем ставить своей задачей точное определение возмущений Δx_i, Δy_i, Δz_i, а будем стараться построить методы, позволяющие определять эти величины приближенно, но *с любой степенью точности*.

В задаче об определении движений больших планет солнечной системы конечно могут быть приняты за основу не только уравнения (23), определяющие движения планет относительно Солнца, но и уравнения (31), определяющие движения планет и Солнца относительно общего центра тяжести всей солнечной системы, и уравнения (38), определяющие движения планет в координатах Якоби. Однако, на практике оказывается более удобным пользоваться именно уравнениями (43), так как наблюдения доставляют координаты планет относительно Солнца, а наблюдениями мы вынуждены пользоваться для определения численных значений произвольных постоянных, которые выражаются через значения координат и компонентов скоростей [1]).

Так как начальные значения координат и скоростей определяются из наблюдений и массы планет также определяются на основании наблюдательного материала, то возмущения Δx_i, Δy_i, Δz_i должны быть определены с такой точностью, чтобы координаты, вычисленные

[1]) То-есть через значения этих величин для некоторого произвольно выбираемого момента времени t_0.

по формулам (45), были достаточно близки к значениям этих же величин, полученным из наблюдений, т. е.

точность теоретическая или точность вычислений должна быть не ниже точности наблюдений.

Вообще теоретическая точность всегда должна превышать точность наблюдений, так как выводимые в небесной механике формулы предполагаются пригодными фактически на достаточно большой промежуток времени, в течение которого точность наблюдений может постоянно увеличиваться, вследствие усовершенствования астрономических инструментов и методов наблюдений. Эти условия достаточно определяют ту степень точности, с которой должен работать теоретик, и указывают ему (по крайней мере приближенно) то количество шагов, которые он должен сделать на пути последовательных приближений, применяя тот или иной метод приближенного интегрирования диференциальных уравнений, определяющих интересующие нас движения небесных тел.

§ 24. Некоторые другие задачи небесной механики. Диференциальные уравнения, полученные нами для определения движения системы конечного числа материальных точек позволяют также исследовать и другие астрономические задачи, которые мы сейчас вкратце рассмотрим.

а) Теория малых планет и комет. Хотя массы малых планет, а тем более комет, не могут быть определены более или менее уверенно, тем не менее несомненно, что они весьма малы, а потому мы можем считать, что эти тела не оказывают совершенно никакого гравитационного действия ни друг на друга, ни на большие планеты и тем более на Солнце. Благодаря этому каждую малую планету или комету мы можем считать материальной точкой, как говорят, с „нулевой“ массой, подразумевая под этим, что на эту материальную точку действуют силы притяжения Солнца и больших планет, но что она сама не оказывает никакого влияния на движения этих тел.

Предположим, что движения больших планет известны, т. е. что их координаты суть известные функции времени, определенные с той или иной степенью точности. Тогда для определения гелиоцентрического движения малой планеты или кометы мы можем воспользоваться уравнениями (23). Обозначая координаты рассматриваемого тела просто через x, y, z, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2\frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где функция R определяется формулой

$$R = k^2 \sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3}\right),$$

в которой Δ_i обозначает расстояние тела до одной из больших планет, а r_i — радиус-вектор соответствующей большой планеты. Мы можем написать

$$\Delta_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2},$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

Так как x_i, y_i, z_i, а следовательно, и r_i являются, по предположению известными функциями времени, то функция R_i, а следовательно, правые части уравнений (47) содержат также время явным образом. Это обстоятельство, вообще говоря, усложняет исследование движения, но если к системе (47) мы применим те приближенные методы, о которых говорилось в предыдущем параграфе, то теоретические затруднения значительно уменьшатся. Во многих случаях систему (47) можно значительно упростить, отбрасывая в выражении функции R члены, содержащие множителем наименьшие из малых масс.

Для многих малых планет и комет в выражении функции R можно оставить только один член, соответствующий Юпитеру, и тогда уравнения движения могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} &= m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} &= m\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} + k^2\frac{z}{r^3} &= m\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

В этих уравнениях m обозначает массу Юпитера, а x_1, y_1, z_1 его координаты. При этом, мы можем еще более упростить задачу (и этим сделать ее теоретически еще более доступной), беря за x_1, y_1, z_1 функции, удовлетворяющие уравнениям невозмущенного движения Юпитера. Поставленная таким образом задача носит название *ограниченной задачи о трех телах.*

b) Теория спутников. Каждая система какой-нибудь большой планеты с ее спутниками может быть вполне уподоблена солнечной системе. Поэтому для исследования движений спутников можно воспользоваться теми же уравнениями (23), как и в предыдущем случае. Рассмотрим для определенности систему Юпитера с его девятью спутниками. Пусть M_0 обозначает Юпитера, $M_1, \ldots, M_9$ — спутники Юпитера, M_{10} — Солнце, M_{11}, $M_{12}, \ldots, M_{18}$ — большие планеты.

Движение самого Юпитера и остальных больших планет относительно Солнца мы предполагаем известным, определенным, например, так, как это описано в предыдущем параграфе. Но тогда, очевидно, будет известно и движение всех больших планет и Солнца относительно Юпитера.

Действительно, координаты Юпитера (при обозначениях использованных в § 23) относительно Солнца будут x_5, y_5, z_5; координаты какой-нибудь другой планеты относительно Солнца будут x_i, y_i, z_i, $(i \neq 5)$ и, наконец, координаты самого Солнца будут 0, 0, 0. Отнеся движение всех планет и Солнца к прямоугольной системе координат с началом в центре тяжести Юпитера и с осями, параллельными старым осям, мы видим, что координаты любой планеты относительно Юпитера будут

$$x_i - x_5, \quad y_i - y_5, \quad z_i - z_5 \qquad (i \neq 5),$$

и координаты Солнца относительно Юпитера будут

$$-x_5, \quad -y_5, \quad -z_5.$$

Поэтому, в силу сделанных выше предположений, все эти величины будут известными функциями времени.

Напишем теперь диференциальные уравнения движения спутников относительно Юпитера. В силу формул (23) мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2y_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \frac{d^2z_i}{dt^2} + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 9), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где m_0 — масса Юпитера, m_i — масса каждого из спутников, r_i — расстояние спутника от Юпитера [1]) и

$$R_1 = fm_2\left(\frac{1}{\Delta_{12}} - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3}\right) + \ldots + fm_{10}\left(\frac{1}{\Delta_{1,10}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x_1x_{10} + y_1y_{10} + z_1z_{10}}{r_{10}^3}\right) + fm_{11}\left(\frac{1}{\Delta_{1,11}} - \frac{x_1x_{11} + y_1y_{11} + z_1z_{11}}{r_{11}^3}\right) + \ldots$$

аналогичные выражения имеем для остальных функций R_i.

В последнем выражении для R_1 первые восемь членов имеют такую же структуру, как и все члены в формулах (27), так как зависят только от неизвестных функций x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$). Но остальные члены имеют другую структуру, так как в них входят величины x_{10}, y_{10}, z_{10}, x_{11}, y_{11}, z_{11}, ..., r_{10}, r_{11}, ..., т. е. координаты Солнца и больших планет относительно Юпитера. Мы видели, что эти величины могут считаться известными функциями времени, а поэтому функции R_i зависят также явно и от времени.

Уравнения (49) можно значительно упростить, так как члены, зависящие от масс других больших планет весьма малы и ими можно полностью пренебречь. Тогда в функции R_i время будет входить явным образом только через посредство координат Солнца. Кроме того, мы

[1]) Основные единицы здесь удобнее выбирать несколько иначе, чем для случая солнечной системы.

можем пренебречь (по крайней мере в первом приближении) взаимными действиями спутников друг на друга и тогда система (49) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_i}{dt^2}+f(m_0+m_i)\frac{x_i}{r_i^3}=fm_{10}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}-\frac{x_ix_{10}+y_iy_{10}+z_iz_{10}}{r_{10}^3}\right),\\
&\frac{d^2y_i}{dt^2}+f(m_0+m_i)\frac{y_i}{r_i^3}=fm_{10}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}-\frac{x_ix_{10}+y_iy_{10}+z_iz_{10}}{r_{10}^3}\right),\\
&\frac{d^2z_i}{dt^2}+f(m_0+m_i)\frac{z_i}{r_i^3}=fm_{10}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}-\frac{x_ix_{10}+y_iy_{10}+z_iz_{10}}{r_{10}^3}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(50)$$

где

$$\Delta_i=\sqrt{(x_i-x_{10})^2+(y_i-y_{10})^2+(z_i-z_{10})^2},$$

$$r_i=\sqrt{x_{10}^2+y_{10}^2+z_{10}^2}.$$

Эти уравнения такого же типа, как и уравнения (48), определяющие движение малой планеты или кометы.

Уравнения (49), разумеется, пригодны для любой системы спутников. Ими можно пользоваться также и в теории Луны.

Заметим еще, что обыкновенно написанные уравнения подвергаются различным дальнейшим преобразованиям, в зависимости от преследуемых исследованием целей и применяемых методов. Но в нашем курсе мы имеем ввиду дать только общее понятие об основных методах небесной механики, а поэтому различных других методов рассматривать совершенно не будем.

§ 25. Общие замечания об уравнениях, определяющих движения небесных тел. Диференциальные уравнения, которые мы получили для исследования движений различных небесных тел, имеют совершенно одинаковый вид, а поэтому для их решения могут быть применены одинаковые методы.

Рассмотрим структуру этих уравнений с математической точки зрения. Все эти уравнения могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_i}{dt^2}+\varkappa\frac{x_i}{r_i^3}=\frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\
&\frac{d^2y_i}{dt^2}+\varkappa\frac{y_i}{r_i^3}=\frac{\partial R_i}{\partial y_i},\\
&\frac{d^2z_i}{dt^2}+\varkappa\frac{z_i}{r_i^3}=\frac{\partial R_i}{\partial z_i}\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}\right\}\qquad(51)$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная, зависящая от массы точки M_i, а R_i функции вида

$$R_i=R_i(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ \ldots;\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ t;\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n).$$

Прежде всего отметим, что уравнения (51) легко разрешимы относительно вторых производных от координат и поэтому могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_i}{dt^2} &= X_i,\\ \frac{d^2y_i}{dt^2} &= Y_i,\\ \frac{d^2z_i}{dt^2} &= Z_i,\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где X_i, Y_i, Z_i функции, имеющие такую же аналитическую структуру, как и функции R_i.

Эти функции *не зависят* от первых производных величин x_i, y_i, z_i, но могут содержать время явным образом, как это имеет место, например, для спутников больших планет. Другой характерной особенностью этих функций является то, что X_i, Y_i, Z_i суть всегда *алгебраические* функции от неизвестных величин x_i, y_i, z_i. Действительно эти величины в X_i, Y_i, Z_i нигде не входят под знаком трансцендентных функций. Наоборот время t (если оно действительно входит явным образом в функции X_i, Y_i, Z_i) входит всегда в функции X_i, Y_i, Z_i трансцендентным образом.

Чтобы установить типы алгебраических функций, входящих в правые части уравнений (52), достаточно рассмотреть данные ранее выражения для функций R_i. Сделав это, мы увидим, что X_i, Y_i, Z_i суть дробные иррациональные функции величин x_i, y_i, z_i, так как эти величины входят в функции под знаком квадратных корней и в знаменателях. Эти иррациональности появляются вследствие присутствия расстояний r и Δ, входящих через силовую функцию U, и имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}}.$$

По этой причине функции X_i, Y_i, Z_i обращаются в бесконечность, когда, по крайней мере, одно из расстояний r или Δ обращается в нуль, т. е. когда какие-нибудь два из тел системы сталкиваются между собой.

Эти обстоятельства крайне усложняют исследование уравнений (52) и поэтому должны быть подробно изучены. Фактически действительные столкновения между телами солнечной системы весьма мало вероятны и наблюдатели еще ни разу такого факта не отмечали. Но могут быть случаи (которые действительно встречаются), когда какие-нибудь два небесные тела, не сталкиваясь друг с другом физически, проходят весьма близко одно от другого, так что соответствующие расстояния делаются весьма малыми, а поэтому в выражениях функций X_i, Y_i, Z_i появляются члены весьма большие по числовой их величине. Такого рода *полустолкновения* также весьма усложняют исследование движений, ибо обычные методы приближений в этих случаях делаются непригодными.

Если же расстояния не слишком малы, то функции X_i, Y_i, Z_i не представляют более никаких особенностей и являются, как говорят математики, правильными функциями величин x_i, y_i, z_i.

Отметим, наконец, еще одно весьма существенное свойство функций X_i, Y_i, Z_i. А именно эти величины зависят еще от масс m_1, m_2, ..., m_n, которые являются малыми величинами, и могут иметь различные значения в зависимости от условий задачи. Иными словами X_i, Y_i, Z_i зависят еще от некоторых параметров, которые обыкновенно имеют весьма малые численные значения. Это обстоятельство имеет весьма важное значение для построения приближенных теорий, так как позволяет искать функции x_i, y_i, z_i, удовлетворяющие уравнениям (75), в виде бесконечных рядов, расположенных по возрастающим степеням малых параметров m_1, m_2, ..., m_n.

Такие ряды, формально удовлетворяющие уравнениям (75), всегда могут быть получены при помощи достаточно простых операций, но они будут представлять решение системы (75) *только для тех значений* времени, для которых они оказываются *сходящимися*. Если последнее установлено, то беря в полученных рядах некоторое *конечное* число первых членов, мы получим приближенные выражения для функций x_i, y_i, z_i, действительно представляющие эти функции с желаемой степенью точности, но, конечно, только для таких значений времени, для которых указанные выше ряды сходятся.

Этими общими замечаниями мы закончим главы, посвященные выводу и установлению вида диференциальных уравнений, определяющих движения небесных тел и перейдем теперь к рассмотрению методов, позволяющих получить решения этих уравнений. В первую очередь мы рассмотрим самое первое приближение, а именно теорию невозмущенного движения.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 26. Интегрирование уравнений невозмущенного движения

Как мы видели в предыдущей главе, диференциальные уравнения невозмущенного движения какой-нибудь большой или малой планеты или кометы относительно Солнца, или спутника относительно планеты, могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}=0,\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{r^3}=0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где x, y, z суть координаты планеты в системе прямоугольных декартовых координат с неизменными направлениями осей и с началом в центре тяжести Солнца и r — радиус-вектор планеты, определяемый формулой

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

а μ есть некоторая постоянная, зависящая от массы планеты. Эта постоянная дается формулой

$$\mu=k^2(1+m),\tag{2}$$

где m — масса планеты, выраженная в долях массы Солнца, и k — гауссова постоянная [1]).

Система (1) может быть рассматриваема так же, как частный случай системы (23) главы четвертой, определяющей движение n материальных точек относительно $n+1$-ой. Этот частный случай полу-

---

[1]) Для определенности мы будем рассматривать во всем последующем изложении движение планеты относительно Солнца. Но те же уравнения (1) могут быть применены и для изучения движений спутников, относительно планеты и для изучения движения одного из компонентов двойной звезды, относительно другого и т. д. Эти различные задачи отличаются одна от другой только значением коэфициента μ. В последующем изложении для сокращения словесных формулировок тело, движение которого изучается, мы будем во всех случаях называть планетой.

чается при $n=1$, т. е. тогда, когда система состоит только из двух материальных точек. Поэтому все выводы, полученные нами для общего случая, справедливы также и для системы (1). В частности система (1) имеет четыре алгебраических интеграла, не содержащих явно времени. Так как система (1) есть система шестого порядка, то для ее полного интегрирования необходимо иметь систему шести первых независимых между собой интегралов. Мы уже имели случай отметить выше, что при $n=1$, недостающие два интеграла могут быть получены, а поэтому система (1) может быть полностью интегрирована.

Выведем теперь все первые интегралы системы (1). Хотя интеграл живых сил и интегралы площадей могут быть получены из уравнений (29) и (30) главы третьей, как частные случаи, мы все же выведем эти интегралы непосредственно из системы (1).

Помножим сначала уравнения (1) соответственно на $2\frac{dx}{dt}$, на $2\frac{dy}{dt}$ и на $2\frac{dz}{dt}$ и сложим все три уравнения. Мы получим

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{2\mu}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right).$$

Но так как $r^2=x^2+y^2+z^2$, то

$$r\frac{dr}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}, \tag{3}$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=-\frac{2\mu}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

откуда интегрированием получаем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+h,$$

где h — произвольная постоянная.

Обозначим через V скорость планеты. Тогда

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \tag{4}$$

и предыдущее уравнение напишется в виде

$$V^2=\frac{2\mu}{r}+h. \tag{5}$$

Это обычная форма интеграла живых сил невозмущенного движения. Численное значение постоянной h определяется начальным значением радиуса-вектора r и скорости V, т. е. значениями этих величин в начальный момент t_0. Обозначая начальные значения r и V через r_0 и V_0, мы получим из уравнения (5)

$$h=V_0^2-\frac{2\mu}{r_0}. \tag{6}$$

Выведем теперь интегралы площадей. Умножим второе из уравнений (1) на $-z$, третье на $+y$ и сложим оба уравнения. Мы получим

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Аналогично выведем уравнения

$$z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$
$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Интегрируя эти три уравнения, мы найдем

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}&=c_1,\\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}&=c_2,\\ x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}&=c_3.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Уравнения (7) представляют *интегралы площадей.* c_1, c_2, c_3 суть три произвольные постоянные, численные значения которых определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} c_1&=y_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0-z_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0,\\ c_2&=z_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0-x_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0,\\ c_3&=x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0-y_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Интегралы (5) и (7) известны нам еще из общей теории. Выведем теперь три новых интеграла уравнений (1), которые существуют только в невозмущенном движении. Эти интегралы были впервые получены Лапласом.

Предварительно получим некоторое соотношение, связывающее только радиус-вектор r и время t. Обозначим величину $r\frac{dr}{dt}$ через r'. Диференцируя после этого формулу (3), мы получим

$$\frac{dr'}{dt}=x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Подставляя в это соотношение вместо вторых производных их значения из уравнений (1) и вместо квадрата скорости — его выражение из интеграла живых сил, мы найдем

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{\mu}{r}+h.\tag{9}$$

Диференцируя уравнение (9), мы получим

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

или

$$\frac{d^2r'}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}r'=0.\tag{10}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и каждое из уравнений (1). Поэтому, комбинируя это уравнение с каждым из уравнений (1), мы получим соотношения вполне аналогичные по форме интегралам площадей.

Действительно, умножая первое из уравнений (1) на $-r'$, уравнение (10) на $+x$ и складывая, мы получим

$$x\frac{d^2r'}{dt^2} - r'\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и аналогично

$$y\frac{d^2r'}{dt^2} - r'\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2r'}{dt^2} - r'\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Интегрируя последние три уравнения, находим соотношения

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dx}{dt} &= f_1, \\ y\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dy}{dt} &= f_2, \\ z\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dz}{dt} &= f_3, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где f_1, f_2 и f_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (11) представляют три новые первые интеграла системы (1), так как левые части этих уравнений суть функции координат x, y, z и компонентов скорости $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, приводящиеся к постоянным в силу уравнений (1). Чтобы убедиться, что левые части уравнений (11) содержат только координаты и первые производные, подвергнем их некоторому преобразованию. Для этого исключим h из уравнения (9) и из интеграла живых сил и напишем результат исключения в виде

$$\frac{dr'}{dt} = -\frac{\mu}{r} + V^2. \tag{12}$$

Подставляя теперь в уравнения (11) вместо $\frac{dr'}{dt}$ его значение из соотношения (12), мы представим уравнения (11) в виде

$$\left.\begin{aligned} xV^2 - \frac{\mu x}{r} - r\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt} &= f_1, \\ yV^2 - \frac{\mu y}{r} - r\frac{dr}{dt}\frac{dy}{dt} &= f_2, \\ zV^2 - \frac{\mu z}{r} - r\frac{dr}{dt}\frac{dz}{dt} &= f_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Наконец, заменяя V^2 и $r\frac{dr}{dt}$ их выражениями из формул (3) и (4), мы можем написать найденные интегралы еще в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mu x}{r}+\frac{dy}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)-\frac{dz}{dt}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=f_1,\\
&-\frac{\mu y}{r}+\frac{dz}{dt}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dx}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=f_2,\\
&-\frac{\mu z}{r}+\frac{dx}{dt}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=f_3.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Уравнения (11) [а также уравнения (13) и уравнения (14)] называются *интегралами Лапласа*. Они позволяют вместе с интегралом живых сил и интегралами площадей довести до конца интеграцию уравнений (1). Численные значения постоянных f_1, f_2 и f_3 получаются в зависимости от начальных условий, например, из следующих формул:

$$\left.\begin{aligned}
f_1&=x_0V_0^2-\frac{\mu x_0}{r_0}-\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0,\\
f_2&=y_0V_0^2-\frac{\mu y_0}{r_0}-\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0,\\
f_3&=z_0V_0^2-\frac{\mu z_0}{r_0}-\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0=x_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0+y_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0+z_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0.$$

Вместе с интегралами Лапласа мы имеем теперь *семь* первых интегралов системы (1), а именно — интеграл живых сил, три интеграла площадей и три интеграла Лапласа, т. е. как будто даже больше чем нужно, так как уравнения (1) образуют систему шестого порядка.

Однако, эти семь первых интегралов не могут составить общего интеграла системы (1), во-первых, по той причине, что ни один из этих интегралов не содержит *явно времени*, а во-вторых, потому, что эти семь интегралов не являются независимыми.

Действительно мы сейчас покажем, что между найденными семью интегралами существуют два тождественных соотношения. Помножим левые части интегралов площадей соответственно на левые части интегралов Лапласа и результаты сложим. В силу уравнений (7) и (11) мы найдем

$$\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\left(x\frac{dr'}{dt}-r'\frac{dx}{dt}\right)+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\left(y\frac{dr'}{dt}-r'\frac{dy}{dt}\right)+$$

$$+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\left(z\frac{dr'}{dt}-r'\frac{dz}{dt}\right)=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3,$$

что можно написать также в следующем виде:

$$\frac{dr'}{dt}\left[x\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right]-$$
$$-r'\left[\frac{dx}{dt}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\frac{dz}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right]=$$
$$=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3.$$

Нетрудно убедиться в том, что каждая из квадратных скобок в левой части последнего равенства тождественно равна нулю, а поэтому мы получаем следующее соотношение:

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0. \tag{16}$$

Так как c_1, c_2, c_3 представляют собой левые части интегралов площадей, а f_1, f_2, f_3 — левые части интегралов Лапласа, то уравнение (16) представляет собой соотношение между этими шестью интегралами. Это первое соотношение между первыми интегралами системы (1). Чтобы получить второе соотношение, возведем уравнения (7) в квадраты и сложим. Мы находим

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=$$
$$=\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

что с помощью известного тождества Лагранжа может быть написано в виде [1])

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

откуда с помощью формул (3) и (5) получаем

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=r^2\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)-r'^2. \tag{17}$$

Далее из уравнений (11) находим

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2-2r'^2\frac{dr'}{dt}+r'^2V^2,$$

откуда с помощью формул (5) и (9) выводим

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)^2-hr'^2. \tag{18}$$

---

[1]) Тождество Лагранжа выводится в теории детерминантов и пишется так:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2.$$

Нетрудно проверить справедливость этого равенства непосредственно.

Исключим теперь r'^2 из уравнений (17) и (18). Мы получим

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)^2-hr^2\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)+h(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$$

или, после упрощений,

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=\mu^2+h(c_1^2+c_2^2+c_3^2). \tag{19}$$

Это уравнение представляет второе соотношение между первыми интегралами системы (1).

Из двух найденных соотношений мы можем выразить какие-нибудь две из семи постоянных h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3 в функции пяти остальных, что показывает, что из семи найденных нами первых интегралов только пять являются независимыми, а поэтому эти семь интегралов не образуют общего интеграла системы (1).

Но последний недостающий интеграл может быть найден весьма легко. Действительно, из уравнений (5), (7) и (14) мы можем определить какие-нибудь пять из величин x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в функции шестой [1]), например x. Выполняя это, мы получим соотношения вида

$$\left.\begin{aligned}
y&=\varphi_1(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3),\\
z&=\varphi_2(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3),\\
\dot{x}&=\varphi_3(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3),\\
\dot{y}&=\varphi_4(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3),\\
\dot{z}&=\varphi_5(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3).
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Возьмем теперь какое-нибудь из уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x},\quad \frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad \frac{dz}{dt}=\dot{z},$$

например, первое и напишем его в виде

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_3(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3).$$

Это соотношение представляет диференциальное уравнение с переменными x и t, которое интегрируется разделением переменных. Выполняя интегрирование, мы получим уравнение

$$\int\frac{dx}{\varphi_3(x;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3)}=t+g,$$

где g — произвольная постоянная.

Определяя из последнего уравнения x, как функцию t, мы можем написать

$$x=\psi_1(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g),$$

[1]) Это возможно, так как уравнения (5), (7) и (14) эквивалентны системе пяти независимых уравнений между шестью переменными x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Последние три величины обозначают производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

после чего из уравнений (20) определяем y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ так же в функции t и произвольных постоянных. Система полученных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \psi_1(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \\ y &= \psi_2(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \\ z &= \psi_3(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \psi_4(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \\ \dot{y} &= \psi_5(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \\ \dot{z} &= \psi_6(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g), \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

представит общий интеграл системы (1), так как x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ выражены в функции времени и *шести* произвольных постоянных [1]). Уравнения (21) представляют параметрические уравнения траектории планеты в ее относительном движении вокруг Солнца, так как дают возможность определить координаты планеты для каждого момента времени. Уравнения (22) определяют компоненты скорости, а следовательно, величину и направление скорости. Действительно, величина скорости определится формулой

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

а направление скорости определится ее направляющими косинусами, которые соответственно равны

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Заметим еще, что величину скорости удобнее определять из интеграла живых сил, так как после определения координат x, y, z радиус-вектор r делается также известной функцией времени.

§ 27. Общие свойства невозмущенного движения. Качественный анализ. Первые интегралы системы (1), полученные нами в предыдущем параграфе, позволяют установить некоторые общие свойства невозмущенного движения, не выводя даже окончательных формул, определяющих координаты и компоненты скорости в функции времени.

Рассмотрим сначала интеграл живых сил (5). Постоянная h, входящая в это уравнение, определяется только значениями начального радиуса-вектора планеты и ее начальной скорости. При этом

$$\begin{array}{llll} \text{если} & V_0^2 < \dfrac{2\mu}{r_0} & \text{то постоянная} & h < 0, \\ \text{»} & V_0^2 = \dfrac{2\mu}{r_0} & \text{»} \quad \text{»} & h = 0, \\ \text{»} & V_0^2 > \dfrac{2\mu}{r_0} & \text{»} \quad \text{»} & h > 0. \end{array}$$

[1]) Вспомним, что из семи постоянных h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3 только пять являются независимыми, а шестая постоянная есть g.

Так как скорость движения планеты всегда действительна, то величина V^2 ни для какого момента времени не может принимать отрицательных значений. Поэтому, из интеграла живых сил

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h$$

выводим неравенство

$$\frac{2\mu}{r} + h \geqslant 0, \tag{23}$$

которое должно выполняться для всех значений t.

Если $h \geqslant 0$, то неравенство (23) выполняется при любых (положительных) значениях радиуса-вектора r. Поэтому, при $h \geqslant 0$, r может принимать *любое значение* от 0 до ∞.

Наоборот, если $h < 0$, то неравенство (23) будет выполняться не для всех значений r, а только для таких его значений, которые удовлетворяют неравенству

$$r \leqslant -\frac{2\mu}{h}.$$

Обозначим правую часть неравенства через $\bar{r}$. Это вполне определенная положительная величина, зависящая только от массы планеты и начальных значений ее радиуса-вектора и скорости. Неравенство

$$r \leqslant \bar{r}$$

показывает, что при $h < 0$ движущаяся планета всегда остается внутри шара с центром в Солнце и с радиусом $\bar{r}$, т. е. что движение происходит *в конечной области пространства.*

Рассмотрим теперь интегралы площадей (7). Умножая эти уравнения соответственно на x, y, z и складывая, мы получим следующее уравнение:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) показывает, что движение планеты происходит в неизменной плоскости, проходящей через центр Солнца. Иными словами, траектория (или орбита) планеты есть *плоская кривая.*

Положение плоскости, определяемой уравнением (24), вполне определяется численными значениями постоянных c_1, c_2, c_3. Действительно, обозначая углы, которые образует перпендикуляр к этой плоскости с положительными направлениями осей координат, через α, β и γ и полагая $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, мы имеем

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{c}, \quad \cos\beta = \frac{c_2}{c}, \quad \cos\gamma = \frac{c_3}{c}. \tag{25}$$

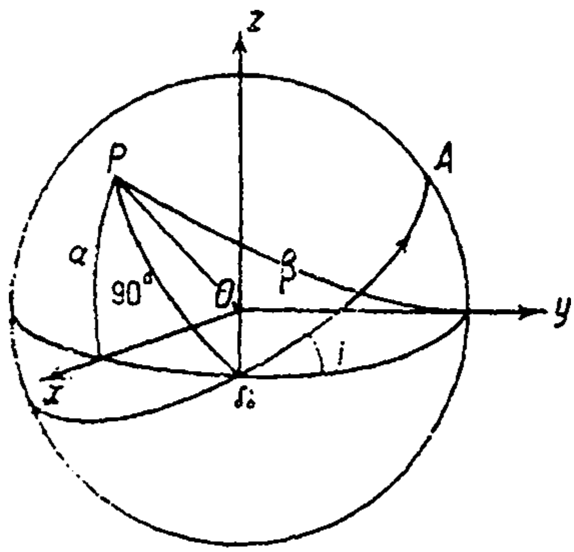
Если мы условимся приписывать величине c определенный знак, то формулы (25) однозначно определят положение плоскости орбиты относительно осей xyz.

Между углами α, β, γ существует известное соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

показывающее, что только два из этих углов являются независимыми. Третий угол определяется из этого соотношения, когда два другие известны. Удобнее выразить все три угла через два независимых, которые имели бы к тому же простое геометрическое значение.

Это можно сделать следующим образом. Плоскость орбиты пересекает плоскость xOy по прямой линии, называемой *линией узлов.* Мы вполне определим положение плоскости орбиты, если будем знать угол, образуемый линией узлов с положительным направлением оси Ox, и угол, образуемый плоскостью орбиты с плоскостью xOy. Последний угол равен углу между перпендикуляром к плоскости орбиты и осью Oz, т. е. углу γ, который вполне определен, если установлен знак постоянной c. Этот угол называется *наклонением орбиты* и обозначается обыкновенно буквой i. Первый угол еще не вполне определен, так как еще не установлено положительное направление линии узлов.



Черт. 7.

Условимся считать положительным то направление линии узлов, которое пересекает планета, переходя из области отрицательных значений координаты z в область положительных ее значений.

Положительное направление линии узлов, т. е. полупрямую, исходящую из начала координат в положительном направлении, мы назовем *линией восходящего узла.* Другую полупрямую, которую планета пересекает, переходя из области положительных значений z в область отрицательных ее значений, назовем *линией нисходящего узла.* Тогда положение плоскости орбиты по отношению к осям xyz однозначно определится наклонностью i и долготой восходящего узла ☊, где ☊ — угол, образуемый линией восходящего узла с положительным направлением оси Ox (черт. 7). Наклонность i измеряется от 0° до 180° (или от —90° до +90°), долгота восходящего узла измеряется от 0° до 360°. Выразим теперь углы α, β и γ через i и ☊. Для этого опишем из начала координат, как из центра, сферу радиусом, равным единице. Плоскость xOy пересечет эту сферу по большому кругу xy. Плоскость орбиты пересечет сферу по большому кругу ☊A. OP есть перпендикуляр к плоскости орбиты и точка P — точка пересечения этого перпендикуляра со сферой. Стрелкой показано направление движения планеты. Тогда дуга большого круга Px равна углу α, дуга большого круга Py равна углу β. Дуга x☊ есть угол ☊ и сферический угол A☊y равен i. Из сферических треугольников Px☊ и Py☊ без труда находим

$$\cos\alpha = \sin i \sin \Omega,$$
$$\cos\beta = -\sin i \cos \Omega.$$

Кроме того нам известно, что

$$\cos\gamma = \cos i,$$

и из формул (25) мы находим

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \quad c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= \quad c \cos i. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Так как c_1, c_2 c_3 и c определяются из начальных условий, то углы i и Ω можно считать известными, если начальные условия заданы. Плоскость орбиты становится неопределенной только в том случае, когда все три постоянные площадей одновременно равны нулю. Но тогда движение происходит по прямой линии, проходящей через начало координат (через Солнце) в определенном направлении. Действительно, при

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

интегралы площадей могут быть написаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{y}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем

$$\frac{z}{y} = \frac{z_0}{y_0}, \quad \frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

откуда, в свою очередь, получаем уравнения

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

А это есть уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку (x_0, y_0, z_0), т. е. начальное положение планеты.

Нетрудно установить, какие начальные условия приводят к прямолинейному движению. Полагая в формулах (8) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, мы выводим из них следующие равенства:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0}{x_0} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0}{y_0} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0}{z_0}.$$

Последние условия выполняются или в случае, когда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0,$$

или в случае, когда начальные значения производных пропорциональны начальным значениям координат.

В первом случае начальная скорость V_0 также, очевидно, равна нулю, а во втором случае направление начальной скорости совпадает с направлением прямой, проходящей через начало координат и точку (x_0, y_0, z_0). Если c_1, c_2 и c_3 не равны одновременно нулю, то движение не может быть прямолинейным. Действительно, вычислим кривизну орбиты, т. е. кривизну пространственной кривой, определяемой уравнениями (1). Обозначая кривизну буквой K, имеем из диференциальной геометрии

$$K^2 = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^3}.$$

Но из уравнений (1) мы находим

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\mu}{r^3}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),$$

откуда в силу уравнений (7) получаем

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\mu c_1}{r^3},$$

и аналогично

$$\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\mu c_2}{r^3},$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\mu c_3}{r^3},$$

вследствие чего выражение для кривизны примет вид

$$K^2=\frac{\mu^2c^2}{r^6V^6}, \tag{27}$$

откуда следует, что K тождественно равно нулю только в случае, когда $c=0$, т. е., когда $c_1=c_2=c_3=0$. Обозначим теперь через S площадь, описываемую радиусом-вектором планеты за время t, и проекции этой площади на плоскости yOz, zOx и xOy соответственно через A, B, C. Тогда

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2+\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\left(\frac{dC}{dt}\right)^2}$$

и, в силу уравнений (7),

$$\frac{dA}{dt}=\frac{c_1}{2},\quad \frac{dB}{dt}=\frac{c_2}{2},\quad \frac{dC}{dt}=\frac{c_3}{2},$$

откуда получаем

$$\frac{dS}{dt}=\frac{c}{2}$$

и

$$S=\frac{c}{2}t+c'. \tag{28}$$

Уравнение (28) показывает, что

> **площадь, описываемая радиусом-вектором планеты, пропорциональна времени, в течение которого она описана.**

Мы узнаем в этом свойстве движения хорошо знакомый второй закон Кеплера.

Пользуясь интегралами площадей, мы установили, что орбита планеты есть плоская кривая, лежащая в плоскости, проходящей через центр Солнца. Установим теперь вид этой кривой, для чего рассмотрим, неиспользованные еще нами, интегралы Лапласа. Помножив уравнения (11) соответственно на x, y и z и сложив полученные три уравнения, мы получаем

$$(x^2+y^2+z^2)\frac{dr'}{dt}-r'^2=xf_1+yf_2+zf_3,$$

откуда, с помощью формул (9) и (17) найдем следующее уравнение:

$$\mu r=c^2-xf_1-yf_2-zf_3. \tag{29}$$

Это уравнение второй степени между переменными x, y, z и поэтому оно изображает поверхность второго порядка. Так как радиус-вектор r выражается из уравнения (29) *рациональным образом* через координаты x, y, z, то один из фокусов этой поверхности совпадает с началом координат [1]). Нетрудно показать также, что поверхность, определяемая уравнением (29), есть поверхность вращения вокруг оси, проходящей через начало координат. Действительно, рассмотрим плоскости, определяемые уравнением

$$xf_1 + yf_2 + zf_3 = d, \tag{30}$$

где d — любая постоянная. Из уравнений (29) и (30) находим

$$\mu r = c^2 - d = \text{const},$$

что показывает, что сечение поверхности (29) любой плоскостью из семейства параллельных плоскостей (30) есть окружность. Следовательно, поверхность (29) есть поверхность вращения вокруг прямой, проходящей через начало координат, перпендикулярно к плоскостям (30). Эта прямая есть ось поверхности и ее уравнения имеют вид

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}. \tag{31}$$

Так как

$$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0,$$

то прямая (31) лежит в плоскости, определяемой уравнением (24), т. е. ось поверхности (29) лежит в плоскости движения планеты. Пересечение плоскости (24) с поверхностью (29) определяет кривую, по которой происходит движение планеты, т. е. орбиту планеты.

Так как сечение поверхности второго порядка любой плоскостью есть кривая второго порядка, то орбита планеты есть плоская кривая второго порядка. Так как плоскость орбиты проходит через ось вращения поверхности (29), то орбита имеет те же фокусы и те же вершины, что и поверхность (29). Поэтому мы заключаем, что

невозмущенная орбита планеты есть плоская кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в центре Солнца и ось которой определяется постоянными интегралов Лапласа f_1, f_2, f_3.

Орбита планеты есть, следовательно, эллипс, парабола или гипербола. Из соображений, развитых в начале параграфа, следует, что орбита будет эллипсом, если $h < 0$, так как при этом условии траектория движения должна вся лежать в конечной части пространства и из кривых второго порядка только эллипс обладает этим свойством. Несколько ниже мы увидим, что при $h = 0$ орбита есть парабола и при $h > 0$ — гипербола.

Ближайшая к Солнцу точка орбиты, т. е. ближайшая вершина кривой называется *перигелием орбиты*. Другая вершина, если орбита есть

---

[1]) Фокусом поверхности называется такая точка пространства, расстояние которой до любой точки поверхности выражается рациональным образом через координаты этой точки.

эллипс, называется *афелием орбиты* [1]). Если орбита есть парабола, то вторая вершина лежит в бесконечности, а поэтому у параболической орбиты афелий не рассматривается. Если орбита есть гипербола, то вторая вершина лежит на другой ветви этой гиперболы, по которой движение происходить не может, так как сила, управляющая движением планеты, есть сила притяжения, всегда направленная к Солнцу, вследствие чего вогнутость орбиты всегда направлена к Солнцу. Поэтому для гиперболы афелий также не рассматривается.

Теперь нам осталось только определить размеры орбиты и установить закон движения по ней. Это мы сделаем в следующем параграфе.

§ 28. Формулы невозмущенного движения. Количественный анализ. В § 26 мы получили полную систему первых интегралов для уравнений невозмущенного движения (1) и проинтегрировали таким образом эти уравнения полностью. Рассматривая полученные интегралы, мы вывели в предыдущем параграфе общие свойства невозмущенного движения, т. е. выполнили *качественный анализ* этого движения. Настоящий параграф мы посвятим *количественному анализу* движения, т. е. выводу формул, при помощи которых можно фактически определить положение планеты и ее скорость для любого момента времени.

Уравнения невозмущенной орбиты, т. е. линии, по которой движется планета под действием притяжения одного только Солнца, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} c_1x + c_2y + c_3z &= 0, \\ \mu r &= c^2 - f_1x - f_2y - f_3z. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Как уже было показано, уравнения (32) определяют плоскую кривую второго порядка, один из фокусов которой лежит в центре Солнца.

Чтобы привести уравнения (32) к более простому виду, мы введем новую систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в центре Солнца. За плоскость $O\xi\eta$ мы примем плоскость орбиты, т. е. плоскость, определяемую первым уравнением (32). Положительную ось ξ мы направим по оси орбиты в сторону ближайшей к началу координат вершины, т. е. к перигелию орбиты. Положительную ось ζ направим по перпендикуляру к плоскости орбиты, т. е. по прямой, определяемой уравнениями

$$\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} = \frac{z}{c_3}.$$

Ось η выберем в плоскости орбиты таким образом, чтобы систему координат $\xi\eta\zeta$ можно было совместить со старой системой координат xyz

[1]) Если рассматривается не движение планеты относительно Солнца, а движение какого-либо другого небесного тела, то употребляются аналогичные названия. Так, для движения Луны вокруг Земли вершины орбиты называются *перигей* и *апогей*, для движения, например, спутника вокруг Юпитера—*периовий* и *апоиовий*, для движения одной звезды вокруг другой — *периастр* и *апоастр* и т. д.

при помощи надлежащего вращения. Тогда направляющие косинусы новых осей координат будут соответственно равны

$$\frac{f_1}{f},\quad \frac{f_2}{f},\quad \frac{f_3}{f}\ \text{для оси } \xi;$$

$$\frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf},\quad \frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf},\quad \frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}\ \text{для оси } \eta\ [1]),$$

$$\frac{c_1}{c},\quad \frac{c_2}{c},\quad \frac{c_3}{c}\ \text{для оси } \zeta.$$

Поэтому формулы преобразования, связывающие новые координаты со старыми будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{f_1}{f}x+\frac{f_2}{f}y+\frac{f_3}{f}z,\\ \eta &= \frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf}x+\frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf}y+\frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}z,\\ \zeta &= \frac{c_1}{c}x+\frac{c_2}{c}y+\frac{c_3}{c}z. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

В силу этих формул уравнения орбиты планеты напишутся, как это легко видеть, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0,\\ \mu r &= c^2-f\xi, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

так как расстояние точки до начала координат имеет в новых координатах такой же вид, как и в старых, а $\zeta=0$ для всякой точки орбиты.

Очевидно, что плоскость движения, т. е. плоскость $\xi\eta$ является *неизменяемой плоскостью* для невозмущенного движения, так как эта плоскость перпендикулярна прямой, определяющей направление главного вектора момента количества движения. Поэтому интегралы площадей в новых координатах будут иметь вид

$$\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}=0,$$

$$\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}=0,$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=c.$$

Но в этой системе координат $\zeta=0$ во все время движения и два первые из написанных уравнений удовлетворяются тождественно. Поэтому из трех интегралов площадей остается только один последний

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=c. \tag{35}$$

---

[1]) Направляющие косинусы для оси η получены из формул, вполне аналогичных формулам (10), выведенным в § 16.

Введем теперь полярные координаты r и v формулами

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v, \tag{36}$$

где v — угол, образуемый радиусом-вектором планеты с положительным направлением оси ξ, т. е. с направлением на перигелий. Или, что то же, v есть угол, образуемый радиусом-вектором с линией апсид орбиты. Этот угол называется *истинной аномалией* планеты и отсчитывается от перигелия против часовой стрелки от 0 до ∞. В силу формул (36) уравнение орбиты в плоскости движения напишется следующим образом:

$$\mu r = c^2 - fr\cos v,$$

или

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu}\cos v}. \tag{37}$$

Это есть полярное уравнение кривой второго порядка, причем полюс лежит в фокусе кривой и полярная ось направлена по оси кривой. Обозначая через p параметр этой кривой и через e — ее эксцентриситет, т. е. полагая

$$\frac{c^2}{\mu} = p, \quad \frac{f}{\mu} = e, \tag{38}$$

мы напишем уравнение орбиты в обычном виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}. \tag{39}$$

Это уравнение определяет радиус-вектор планеты, как функцию истинной аномалии v. Выведем теперь соотношение, связывающее истинную аномалию с временем. Для этого преобразуем интеграл площадей (35) к полярным координатам. Из формул (36) мы имеем

$$\operatorname{tg} v = \frac{\eta}{\xi},$$

откуда получаем

$$v = \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}. \tag{40}$$

Диференцируя последнее соотношение по t, мы находим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}}{\xi^2 + \eta^2},$$

откуда в силу уравнения (35) получаем следующее уравнение:

$$r^2\frac{dv}{dt} = c. \tag{41}$$

Отсюда видно, что при $c > 0$, $\frac{dv}{dt} > 0$ и угол v возрастает вместе с временем. Такое движение называется *прямым*. Если $c < 0$, то и $\frac{dv}{dt} < 0$, т. е. угол убывает при возрастании времени. Такое движение называется *обратным*. Наконец, если $c = 0$, то $\frac{dv}{dt} = 0$, откуда $v = \text{const}$, и мы имеем прямолинейное движение.

Уравнение (41) определяет связь между v и t. Действительно, подставляя вместо r в уравнение (41) его выражение из уравнения орбиты (39) и вместо c его значение из формулы (38), мы получим

$$\frac{p^2 dv}{(1+e\cos v)^2} = \pm\sqrt{\mu p}\, dt,$$

причем знак плюс должен быть взят для прямого движения, а знак минус для обратного.

Мы будем рассматривать исключительно прямое движение планет, так как почти все движения в солнечной системе, за немногими исключениями, являются прямыми. Впрочем, как видно из последнего уравнения, обратное движение всегда может быть преобразовано в прямое простым изменением знака у t. Обозначим через τ момент, когда планета находится в перигелии. Тогда $v=0$ и, интегрируя последнее уравнение, мы получаем

$$t-\tau = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}. \tag{42}$$

Это уравнение определяет время t, как функцию истинной аномалии v. Разрешая уравнение (42) относительно v, мы получим формулу вида

$$v = \psi(t-\tau), \tag{43}$$

откуда можно вычислить v для каждого значения t. Определив v, мы найдем r из формулы (39) и таким образом определим положения планеты в плоскости движения. Зная r и v, мы определим координаты ξ и η в плоскости движения по формулам (36), после чего можем найти координаты x, y, z по формулам (33). Действительно, разрешая уравнения (33) относительно x, y, z и имея в виду, что $\zeta=0$ во все время движения, мы получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\frac{f_1}{f} + \eta\frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf},\\ y &= \xi\frac{f_2}{f} + \eta\frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf},\\ z &= \xi\frac{f_3}{f} + \eta\frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

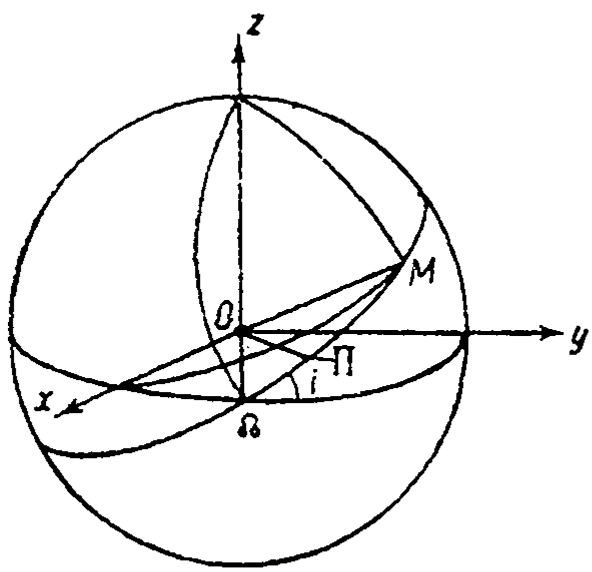
Координаты x, y, z можно также выразить другими, более удобными формулами, вводя вместо постоянных c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3 постоянные, определяющие положение плоскости орбиты в системе координат xyz и положение орбиты в этой плоскости. Положение плоскости орбиты вполне определяется наклонением i и долготой восходящего узла ☊. Положение орбиты в этой плоскости может быть вполне определено углом, который образует направление на перигелий с направлением на восходящий узел. Этот угол обозначается буквой ω и называется *угловым расстоянием перигелия от узла.* Положение линии апсид может быть также определено *долготой перигелия* $\bar{\omega}$, т. е. угловым расстоянием перигелия от оси Ox. Этот угол измеряется в двух различных плоскостях. От оси Ox до линии узлов в плоскости xOy и от линии узлов до перигелия — в плоскости орбиты. Очевидно, что

$$\overline{\omega} = \Omega + \omega. \tag{45}$$

Положение планеты на орбите определяется истинной аномалией v. Но положение планеты можно также определить углом, который образует радиус-вектор r с линией узлов. Этот угол обозначается буквой u и называется *аргументом широты* планеты. Очевидно, что

$$u = \omega + v. \tag{46}$$

Коэфициенты при ξ и η в формулах (44) нетрудно выразить через углы i, Ω и ω или через углы i, Ω и $\overline{\omega}$. Проще всего это сделать следующим образом. Пусть точка M изображает пересечение радиуса-вектора планеты со сферой радиуса единицы, проведенной из Солнца, как из центра, и точка Π—перигелий (черт. 8). Тогда



Черт. 8.

$$\smile \Omega\Pi = \omega, \quad \smile \Omega M = u$$

и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(Mx), \\ y &= r\cos(My), \\ z &= r\cos(Mz). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Из сферического треугольника $x\Omega M$ мы находим

$$\cos(Mx) = \cos(x\Omega)\cos(\Omega M) + \sin(x\Omega)\sin(\Omega M)\cos(\angle x\Omega M),$$

но $\angle x\Omega M = 180° - i$ и поэтому

$$\cos(Mx) = \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\cos i.$$

Точно так же из сферических треугольников $y\Omega M$ и $z\Omega M$ мы находим

$$\cos(My) = \cos u \sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i,$$
$$\cos(Mz) = \sin u \sin i,$$

и формулы (47) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= r[\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i], \\ y &= r[\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i], \\ z &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Чтобы закончить полное определение движения, остается вычислить скорость планеты в момент t и определить направление этой скорости. Величина скорости без труда определяется из интеграла живых сил по формуле

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

а направление скорости удобнее всего определить ее проекциями V и V_n на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости орбиты. Очевидно, что

$$V_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{и} \quad V_n = r\frac{dv}{dt}.$$

Отсюда мы выводим следующие соотношения:

$$V_r = \frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{dv} \quad \text{и} \quad V_n = \frac{c}{r}.$$

Но, диференцируя уравнение орбиты, мы получаем

$$\frac{dr}{dv} = \frac{e \sin v p}{(1 + e\cos v)^2} = \frac{r^2 e \sin v}{p}$$

и поэтому можем написать

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{ce \sin v}{p} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin v, \\ V_n &= \frac{c}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,(1 + e\cos v). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Так как

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = V_r^2 + V_n^2,$$

то с помощью последних формул мы можем также получить другое выражение для скорости V в виде

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, \sqrt{1 + e^2 + 2e\cos v}. \tag{50}$$

Если v известно, то u и r также определяются, и формулы (48) позволяют вычислить координаты планеты x, y, z для всякого момента времени. Затем интеграл живых сил, или формула (50), дает скорость, а формулы (49) определяют ее направление. Таким образом нам остается решить последнюю задачу в теории невозмущенного движения, а именно — выразить истинную аномалию v, как явную функцию времени. Для этого необходимо прежде всего вычислить интеграл в формуле (42). Но этот интеграл выражается различным образом через v, в зависимости от того — больше, меньше или равна единице постоянная e, входящая в этот интеграл в качестве параметра.

Численное значение этого параметра зависит от начальной скорости и начального положения планеты, а также и от направления начальной скорости. Действительно, рассмотрим соотношение (19) между постоянными c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3 и h. Написав это соотношение в виде

$$f^2 - hc^2 = \mu^2,$$

мы выводим

$$\frac{f^2}{\mu^2} - 1 = \frac{hc^2}{\mu^2},$$

откуда в силу соотношений (38) находим

$$e^2 - 1 = \frac{hc^2}{\mu^2}. \tag{51}$$

Соотношение (51) показывает, что при $h<0$, $e^2-1<0$ или $e<1$; при $h=0$, $e^2-1=0$ или $e=1$; при $h>0$, $e^2-1>0$ или $e>1$. Таким образом знак постоянной интеграла живых сил h определяет тип той кривой второго порядка, которая является орбитой планеты. Припоминая выражение для h, мы приходим к следующему важному результату:

Если $V_0^2<\frac{2\mu}{r_0}$, то $e<1$ — орбита планеты есть эллипс.

„ $V_0^2=\frac{2\mu}{r_0}$, „ $e=1$ — „ „ „ парабола.

„ $V_0^2>\frac{2\mu}{r_0}$, „ $e>1$ — „ „ „ гипербола.

Соответственно типу орбиты невозмущенное движение называется *эллиптическим* ($h<0$ и $e<1$), *параболическим* ($h=0$, $e=1$) и *гиперболическим* ($h>0$ и $e>1$). Точно так же говорят, что начальная скорость V_0 — эллиптическая, если $V_0^2<\frac{2\mu}{r_0}$, параболическая, если $V_0^2=\frac{2\mu}{r_0}$, или гиперболическая, если $V_0^2>\frac{2\mu}{r_0}$.

Частным и простейшим случаем эллиптического движения является движение круговое, когда орбита планеты есть окружность с центром в Солнце. Тогда $e=0$, и формула (51) дает

$$h=-\frac{\mu^2}{c^2},$$

но при $e=0$ f также равно нулю. Поэтому из уравнения (34) мы находим

$$r=\frac{c^2}{\mu}=r_0,$$

так как в круговом движении радиус-вектор сохраняет то же значение, которое он имел в начальный момент. Отсюда следует, что

$$h=-\frac{\mu}{r_0},$$

и соответствующая круговому движению начальная скорость определяется формулой

$$V_0^2=\frac{\mu}{r_0}. \tag{52}$$

Перейдем теперь к последовательному рассмотрению трех типов невозмущенного движения.

§ 29. Эллиптическое движение. Если начальные условия таковы, что

$$V_0^2<\frac{2\mu}{r_0},$$

то $h<0$, $e<1$, и орбита планеты есть эллипс. Чтобы вычислить интеграл в формуле (42), введем вместо v новую переменную E, посредством подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{53}$$

Диференцируя формулу (53), получаем

$$\frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}\right) dE, \tag{54}$$

но

$$\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}}. \tag{54'}$$

С помощью последней формулы находим dv из уравнения (54)

$$dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}\right) dE}{1 + \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E} dE.$$

Нам остается выразить еще $1 + e\cos v$ через новую переменную E. Заменяя $\cos v$ его выражением из формулы половинного угла и, воспользовавшись затем формулой (54′), получаем

$$1 + e\cos v = \frac{1-e^2}{1 - e\cos E}. \tag{55}$$

Полагая, кроме того, $E = 0$ при $v = 0$, мы напишем уравнение (42) в следующем виде:

$$t - \tau = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^E (1 - e\cos E)\, dE.$$

Принимая во внимание, что для эллипса параметр p определяется формулой

$$p = a(1 - e^2),$$

где a — большая полуось эллипса орбиты, и вычисляя предыдущий интеграл, мы получим соотношение

$$t - \tau = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} (E - e\sin E).$$

Положим еще

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = n \tag{56}$$

и

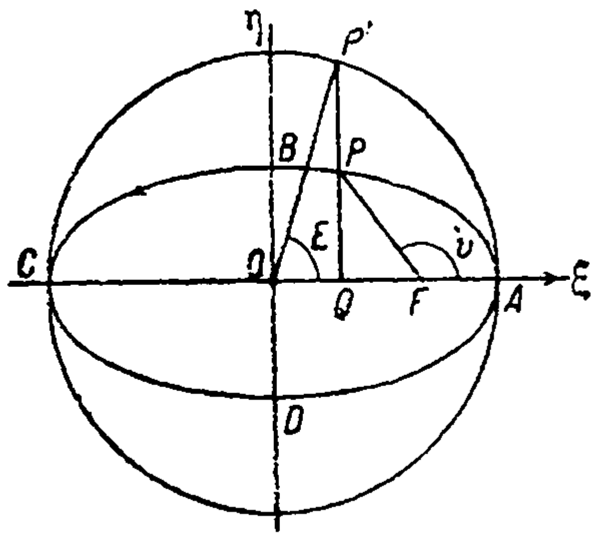
$$n(t - \tau) = M. \tag{57}$$

Тогда предыдущее уравнение напишется в следующем виде:

$$E - e\sin E = M. \tag{58}$$

Это трансцендентное уравнение определяет величину E, когда дано e и M, и называется *уравнением Кеплера*. Решение этого уравнения мы рассмотрим в следующем параграфе. Если E найдено, то формула (53) определит, v и наша задача может считаться решенной.

Остается выяснить смысл введенных величин n, M и E. Пусть $ABCD$ есть эллипс, представляющий орбиту планеты (черт. 9). Направление движения указано стрелкой. F есть тот фокус орбиты, который совпадает с центром Солнца. A есть перигелий и C — афелий орбиты. AC — линия апсид. Тогда угол AFP есть истинная аномалия v. Проведем из начала координат, как из центра, окружность радиусом, равным большой полуоси a эллипса орбиты. Пусть будет далее PQ перпендикуляр к линии апсид, проходящий через точку P, и P' — пересечение этого перпендикуляра с окружностью. Соединим точку P' с точкой O — общим центром эллипса и окружности. Тогда угол AOP' и есть E. Действительно,



Черт. 9.

из чертежа мы видим, что

$$OQ + QF = ae,$$

но

$$OQ = a\cos E, \quad OF = r\cos(180^\circ - v) = -r\cos v.$$

Поэтому

$$ae = a\cos E - r\cos v. \tag{59}$$

Покажем, что это уравнение тождественно с уравнением (55), откуда и будет следовать, что угол AOP' действительно равен E. Из уравнения (59) находим

$$\frac{p\cos v}{1 + e\cos v} = a(\cos E - e),$$

откуда следует, что

$$\frac{e\cos v}{1 + e\cos v} = \frac{e(\cos E - e)}{1 - e^2}$$

или

$$1 - \frac{1}{1 + e\cos v} = \frac{e(\cos E - e)}{1 - e^2}.$$

Определяя $1 + e\cos v$, найдем

$$1 + e\cos v = \frac{1 - e^2}{1 - e\cos E},$$

что совпадает с уравнением (55).

Угол E называется *эксцентрической аномалией* планеты. Формула

$$dv = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos E}\, dE$$

показывает, что знаки dv и dE всегда одинаковы. Поэтому E изменяется в том же направлении, как и v, т. е. возрастает одновременно с v. Далее из формулы (53) следует, что при $v=0$, $E=0$, при $v=180°$, $E=180°$ при $v=360°$, $E=360°$. Когда планета делает полный оборот вокруг Солнца, то E изменяется от 0° до 360°. Обозначим через T время полного оборота планеты вокруг Солнца. За этот промежуток времени угол E изменится на 360°. Полагая в формуле (58) $t=\tau+T$, мы находим

$$360° = nT,$$

откуда получаем

$$n = \frac{360°}{T}. \tag{60}$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость планеты и поэтому называется *средним движением*. Рассмотрим угол M, определяемый формулой (58). Так как

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE,$$

то M возрастает одновременно с E, и если мы вообразим фиктивную планету, движущуюся по кругу радиуса a с постоянной угловой скоростью, то M будет равно углу, образуемому радиусом-вектором этой фиктивной планеты с направлением на перигелий. Так как при $E=0$, $M=0$, при $E=180°$, $M=180°$ и вообще при $E=k\pi$, $M=k\pi$, то фиктивная планета проходит через перигелий и афелий одновременно с действительной планетой и делает по кругу полный оборот за время T.

Угол M называется *средней аномалией* планеты.

Определение эллиптического движения зависит от шести постоянных Ω, i, a, e, ω, τ, которые называются *элементами* эллиптической орбиты. Если эти элементы известны, то определение положения планеты в любой момент времени t производится следующим образом:

Вычисляем сначала n и p из соотношений

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad p = a(1-e^2).$$

Далее определяем среднюю аномалию M для момента t

$$M = n(t-\tau),$$

после чего находим эксцентрическую аномалию E из уравнения Кеплера

$$E - e\sin E = M.$$

Определив E, находим истинную аномалию v по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Зная v, определяем радиус-вектор r и аргумент широты u

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}, \quad u = v + \omega.$$

Наконец, зная r и u, находим координаты x, y, z по формулам

$$x = r[\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i],$$
$$y = r[\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i],$$
$$z = r \sin u \sin i.$$

Время полного обращения T определится по формуле

$$T = \frac{360^\circ}{n},$$

и скорость V планеты в момент t определится из интеграла живых сил

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Постоянная h может быть выражена через большую полуось a. Действительно, из формул (49) и (38) мы имеем

$$h = -\frac{(1-e^2)\mu^2}{c^2} = -\frac{(1-e^2)\mu}{p} = -\frac{\mu}{a}.$$

Поэтому интеграл живых сил для эллиптического движения может быть написан в виде

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{61}$$

Элементы эллиптической орбиты естественно разделяются на три группы следующим образом:

Первая группа — элементы Ω и i, определяющие положение плоскости орбиты в системе координат xyz.

Вторая группа — элементы ω, a и e, определяющие положение орбиты в ее плоскости, ее размеры и форму.

Третья группа — элемент τ, определяющий время прохождения планеты через перигелий.

Две первые группы содержат чисто геометрические элементы и только последний элемент τ определяет динамическую сторону движения.

Вместо τ часто пользуются другим элементом, более удобным, так как его легче определять. Это средняя аномалия M_0 в начальный момент t_0. Очевидно

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \tag{62}$$

что дает соотношение между M_0 и τ. Средняя аномалия M в момент t может быть тогда выражена формулой

$$M = n(t - t_0) + M_0. \tag{63}$$

Наконец, можно еще употреблять вместо τ или M_0 другой элемент, называемый *средней долготой в эпоху* [1]). Для этого рассмотрим долготу фиктивной планеты, движущейся по кругу с постоянной угловой скоростью. Обозначая эту долготу через l, получаем

$$l = \bar{\omega} + M = \bar{\omega} + n(t - \tau).$$

[1]) Под „эпохой" подразумевается начальный момент t_0.

Обозначим значение l в начальный момент $t = t_0$ через ε. Мы найдем

$$\varepsilon = \overline{\omega} + n(t_0 - \tau) = \overline{\omega} + M_0. \tag{64}$$

Это и есть средняя долгота планеты в начальный момент t_0, или средняя долгота в эпоху. Зная ε, мы получим среднюю аномалию M для момента t по формуле

$$M = n(t - t_0) + \varepsilon - \overline{\omega}. \tag{65}$$

Каким бы способом ни была определена средняя аномалия M, дальнейшее определение положения планеты зависит от решения уравнения Кеплера.

Выведем еще некоторые формулы, часто употребляющиеся на практике. С помощью формулы (55) мы находим

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} = a(1 - e\cos E), \tag{66}$$

что позволяет определить радиус-вектор, зная только E и минуя промежуточное определение истинной аномалии v. Координаты ξ и η планеты в плоскости орбиты также можно выразить через эксцентрическую аномалию непосредственно. Из формулы (59) мы получаем

$$\xi = r\cos v = a(\cos E - e).$$

Затем, зная, что

$$\sin v = \frac{2\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}},$$

с помощью формулы (53) выводим

$$\eta = r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E.$$

Поэтому координаты ξ и η определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим некоторые свойства эллиптического движения. Из уравнения орбиты мы видим, что радиус-вектор r планеты есть периодическая функция истинной аномалии v с периодом 2π. Изменению v на 2π или $360°$ соответствует полный оборот планеты вокруг Солнца. Далее, радиус-вектор имеет минимумы при $v = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ и максимумы при $v = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \ldots$ Обозначая минимальное и максимальное значения радиуса-вектора через r_1 и r_2, мы находим

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e).$$

Так как радиус-вектор имеет минимум, когда планета находится в перигелии, то r_1 называется также *перигелийным расстоянием*, а r_2, соответственно, называется *афелийным расстоянием*. Время одного полного обращения есть T.

Применим формулу (28) для моментов t_0 и t_0+T. Мы находим

$$S_0=\frac{c}{2}t_0+c', \quad S_1=\frac{c}{2}(t_0+T)+c',$$

откуда выводим

$$S_1-S_0=\frac{c}{2}T.$$

Но за время полного оборота радиус-вектор описывает всю площадь эллипса. Поэтому

$$S_1-S_0=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-e^2},$$

и мы получаем соотношение

$$\frac{c}{2}T=\pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Но $c=\sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$, поэтому

$$\sqrt{\mu}\sqrt{a}\,T=2\pi a^2,$$

или

$$\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}},$$

или

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}=\frac{4\pi^2}{k^2(1+m)}.$$

С помощью последних формул можно выразить постоянную площадей c через элементы орбиты. Действительно, мы имеем

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

откуда следует, что $\mu=n^2a^3$. Но $c^2=\mu p$, поэтому, исключая μ, находим

$$c^2=n^2a^4(1-e^2)$$

и

$$c=na^2\sqrt{1-e^2}. \tag{68}$$

Рассмотрим теперь две планеты и допустим, что каждая из них движется вокруг Солнца по невозмущенной эллиптической орбите. Пусть масса, большая полуось и время обращения для второй планеты будут соответственно m_1, a_1 и T_1. Тогда мы можем написать

$$\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{4\pi^2}{k^2(1+m_1)}.$$

Так как постоянная тяготения k^2 имеет одно и то же значение для всей солнечной системы, то мы находим соотношение

$$\frac{T^2(1+m)}{a^3}=\frac{T_1(1+m_1)}{a_1^3},$$

справедливое для любых двух планет. Это соотношение позволяет вычислить одну из величин m, a, T, m_1, a_1, T_1, если известны пять остальных.

Если массы m и m_1 настолько малы, что ими можно пренебречь, то мы имеем просто

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_1^2}{a_1^3}$$

или

$$\frac{T^2}{T_1^2}=\frac{a^3}{a_1^3},$$

что приводит нас к третьему закону Кеплера.

Таким образом мы вывели все три закона Кеплера, полученные им в результате обработки наблюдений. Хотя эти законы должны быть хорошо известны из курса общей астрономии, тем не менее мы сформулируем их сейчас полностью.

Первый закон Кеплера. **Орбита планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.**

Второй закон Кеплера. **Площадь, описываемая радиусом-вектором планеты, пропорциональна времени, в течение которого она описана.**

Третий закон Кеплера. **Квадраты времен обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний** [1]).

§ 30. Определение элементов эллиптического движения. Посмотрим теперь, как определить элементы эллиптического движения планеты, зная начальные значения x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ координат и компонентов скорости в момент t_0.

Прежде всего вычисляем постоянные h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3 по формулам:

$$h=V_0^2-\frac{2\mu}{r_0}; \quad c_1=y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0; \quad f_1=-\frac{\mu x_0}{r_0}+c_3\dot{y}_0-c_2\dot{z}_0;$$

$$c_2=z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0; \quad f_2=-\frac{\mu y_0}{r_0}+c_1\dot{z}_0-c_3\dot{x}_0;$$

$$c_3=x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0; \quad f_3=-\frac{\mu z_0}{r_0}+c_2\dot{x}_0-c_1\dot{y}_0.$$

После этого находим

$$c^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2 \quad \text{и} \quad f^2=f_1^2+f_2^2+f_3^2.$$

Контролем вычислений могут служить формулы

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0,$$

$$f^2=\mu^2+hc^2.$$

[1]) Средним расстоянием иногда называется большая полуось эллиптической орбиты планеты.

После того, как вычислены все эти постоянные, элементы орбиты определяются следующим образом. Из формул

$$c_1 = c \sin i \sin \Omega, \quad c_2 = -c \sin i \cos \Omega, \quad c_3 = c \cos i$$

находим Ω и i по формулам

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{c_1}{c_2}; \quad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_3}.$$

Затем определяем p и e

$$p = \frac{c^2}{\mu}; \quad e = \frac{f}{\mu},$$

а после этого большую полуось a

$$a = -\frac{\mu}{h}.$$

Мы определили четыре элемента эллиптической орбиты Ω, i, a и e. Величина p не является независимым элементом, так как параметр эллипса связан с большой полуосью и эксцентриситетом формулой

$$p = a(1 - e^2).$$

Остается определить еще два элемента: долготу перигелия $\bar{\omega}$ (или угловое расстояние перигелия от узла ω) и время прохождения через перигелий τ (или среднюю аномалию M_0 в эпоху, или среднюю долготу ε в эпоху).

Для определения долготы перигелия поступим следующим образом. Обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты планеты, когда она находится в перигелии, т. е. в момент $t = \tau$. Радиус-вектор планеты в момент τ обозначим через $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Так как в перигелии $v = 0$, то из уравнения орбиты получаем $r_1 = a(1 - e)$. Кроме того, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=\tau} = 0$, так как в перигелии радиус-вектор имеет минимум. Так как a и e уже известны, то r_1 может быть вычислено. Точно так же находим скорость V_1 в момент τ из интеграла живых сил

$$V_1^2 = \mu\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right).$$

Применим теперь интегралы Лапласа (13) для момента τ. Мы находим

$$x_1\left(V_1^2 - \frac{\mu}{r_1}\right) = f_1, \quad y_1\left(V_1^2 - \frac{\mu}{r_1}\right) = f_2, \quad z_1\left(V_1^2 - \frac{\mu}{r_1}\right) = f_3,$$

но

$$V_1^2 - \frac{\mu}{r_1} = \mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu e}{r_1}.$$

Поэтому предыдущие формулы дадут

$$e\frac{x_1}{r_1} = \frac{f_1}{\mu}, \quad e\frac{y_1}{r_1} = \frac{f_2}{\mu}, \quad e\frac{z_1}{r_1} = \frac{f_3}{\mu}.$$

Применяя теперь формулы (48) для момента τ и имея в виду, что

$$u_1 = \omega = \bar{\omega} - \Omega,$$

мы находим

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,$$
$$\frac{y_1}{r_1} = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i.$$

С помощью этих выражений получаем уравнения

$$e\cos\omega\,\cos\Omega - e\sin\omega\,\sin\Omega\cos i = \frac{f_1}{\mu},$$
$$e\cos\omega\,\sin\Omega + e\sin\omega\,\cos\Omega\cos i = \frac{f_2}{\mu},$$

разрешая которые относительно $e\cos\omega$ и $e\sin\omega$, мы находим

$$e\cos\omega = \frac{1}{\mu}(f_1\cos\Omega - f_2\sin\Omega) = \alpha,$$
$$e\sin\omega = \frac{1}{\mu\cos i}(-f_1\sin\Omega + f_2\cos\Omega) = \beta,$$

где α и β обозначают для сокращения правые части последних выражений. Так как α и β известны, то мы получаем

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\beta}{\alpha}, \quad e = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

что дает ω и e. Полученное значение e должно, конечно, совпадать со значением, вычисленным ранее. Заметим еще, что предыдущее справедливо только в том случае, если $\cos i \neq 0$, т. е. если $i \neq 90°$. Если $i = 90°$, то можно воспользоваться, например, первым и третьим уравнениями (48), которые дают (при $i = 90°$)

$$e\cos\omega\,\cos\Omega = \frac{f_1}{\mu},$$
$$e\sin\omega = \frac{f_3}{\mu},$$

откуда опять получаем e и ω.

Остается получить τ (или M_0, или ε). Обозначим через v_0 истинную аномалию планеты в начальный момент t_0. Если $\cos i \neq 0$, то два первые уравнения (48) дают для момента t_0:

$$r_0\cos u_0\,\cos\Omega - r_0\sin u_0\,\sin\Omega\cos i = x_0,$$
$$r_0\cos u_0\,\sin\Omega + r_0\sin u_0\,\cos\Omega\cos i = y_0,$$

где

$$u_0 = \omega + v_0.$$

Разрешая последние уравнения относительно $r_0\cos u_0$ и $r_0\sin u_0$, мы получаем

$$r_0\cos u_0 = x_0\cos\Omega + y_0\sin\Omega,$$
$$r_0\sin u_0 = \frac{-x_0\sin\Omega + y_0\cos\Omega}{\cos i},$$

откуда находим u_0 и r_0, которое уже известно.

Зная u_0, находим

$$v_0 = u_0 - \omega,$$

после чего определяем E_0, т. е. значение эксцентрической аномалии E в начальный момент t_0, из формулы

$$\operatorname{tg}\frac{E_0}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}.$$

Найдя E_0, определяем M_0 из уравнения Кеплера

$$M_0=E_0-e\sin E_0,$$

после чего без труда определяем τ по формуле

$$\tau=t_0-\frac{M_0}{n},$$

что и завершает полное определение эллиптических элементов Ω, i, a, e, ω и τ, если известно начальное положение планеты и ее начальная скорость по величине и направлению. Все полученные нами формулы *совершенно точны*. Однако полезно отметить, что описанный метод вычисления эллиптических элементов на практике не может быть применен, так как наблюдения дают нам только направление на планету, т. е. отношения $\frac{x_0}{r_0}$, $\frac{y_0}{r_0}$, $\frac{z_0}{r_0}$, а не сами координаты x_0, y_0, z_0. То, что из наблюдений нет возможности определить начальное расстояние r_0, и является главным источником затруднений, возникающих при вычислении элементов орбиты планеты. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности, так как практическая сторона задачи подробно излагается в курсах по определению орбит.

§ 31. Параболическое движение. Если начальные условия таковы, что

$$V_0^2=\frac{2\mu}{r_0}$$

то $h=0$, $e=1$ и орбита светила есть парабола [1]). Уравнение орбиты напишется тогда в виде

$$r=\frac{p}{1+\cos v}, \tag{69}$$

и p есть параметр параболы.

Чтобы выразить истинную аномалию v в функции времени t, рассмотрим формулу (42), которая в нашем случае дает

$$\frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}(t-\tau)=\int\limits_0^v\frac{dv}{(1+\cos v)^2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^v\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}\right)d\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

откуда, выполняя интегрирование, получаем соотношение

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}=\frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}(t-\tau). \tag{70}$$

[1]) Этот случай иногда встречается в теории движения комет.

Определяя из этого уравнения истинную аномалию v для данного значения t, мы получим затем r из формулы (69), а затем x, y, z из формул (48). Элементами параболической орбиты, подлежащими определению, являются величины Ω, i, ω, p и τ. Этих элементов только пять, так как шестой элемент — эксцентриситет — для параболы всегда равен единице. Вместо параметра p, для параболических орбит более удобно рассматривать другой элемент, а именно расстояние от фокуса до вершины параболы, или перигелийное расстояние q. Так как q есть значение r при $v=0$, то из уравнения орбиты мы находим

$$q=\frac{p}{2}. \tag{71}$$

Уравнение орбиты можно тогда написать в виде

$$r=\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}=q\sec^2\frac{v}{2}. \tag{72}$$

Элементы орбиты определяются из начальных условий совершенно так же, как и в случае эллиптической орбиты. Действительно, пусть значения координат и компонентов скорости для момента t_0 будут

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0,\quad \dot{x}_0,\quad \dot{y}_0,\quad \dot{z}_0.$$

Чтобы орбита была параболической необходимо и достаточно, чтобы h было равно нулю, т. е. чтобы между шестью начальными значениями существовало соотношение

$$\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2=\frac{2\mu}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}. \tag{73}$$

Так же, как и в предыдущем случае, вычисляем постоянные c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3, после чего находим параметр p, или сразу перигелийное расстояние q по формуле

$$q=\frac{c^2}{2\mu}.$$

Долгота узла Ω и наклонение i определяются теми же формулами, как и для эллиптической орбиты.

Чтобы определить ω (или $\bar{\omega}$), обозначим так же, как и ранее, через x_1, y_1, z_1 координаты планеты в момент $t=\tau$, т. е. когда планета находится в перигелии. Применяя тогда формулы (13) для момента $t=\tau$ и имея в виду соотношение (73), мы получим

$$f_1=\frac{\mu x_1}{r_1},\quad f_2=\frac{\mu y_1}{r_1},\quad f_3=\frac{\mu z_1}{r_1}.$$

Члены с производными исчезли, так как в перигелии r имеет минимум и, следовательно, $\frac{dr}{dt}$ для момента $t=\tau$ равно нулю. Если $\cos i\neq 0$, то из двух первых уравнений (48) выводим

$$\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i=\frac{f_1}{\mu},$$

$$\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i=\frac{f_2}{\mu},$$

откуда получаем $\cos\omega$ и $\sin\omega$, вследствие чего однозначно определяется ω.

Применяя затем уравнения (48) для момента $t = t_0$, получаем (если $\cos i \neq 0$)

$$r_0 \cos u_0 \cos \Omega - r_0 \sin u_0 \sin \Omega \cos i = x_0,$$

$$r_0 \cos u_0 \sin \Omega + r_0 \sin u_0 \cos \Omega \cos i = y_0,$$

откуда определяем

$$r_0 \cos u_0 \quad \text{и} \quad r_0 \sin u_0,$$

что дает r_0 и u_0.

Зная u_0, получаем v_0 из формулы

$$u_0 = v_0 + \omega,$$

после чего определяем τ из уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{v_0}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v_0}{2} = \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}(t_0 - \tau),$$

чем и завершается полное определение элементов из начальных условий.

Нетрудно установить общий характер параболического движения. Из уравнения (70) видим, что так как функция $\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}$ постоянно возрастает вместе с v, обращаясь в нуль при $v = 0$ и в бесконечность при $v = \pi$, то это уравнение для каждого значения t имеет единственное решение, заключающееся в промежутке между 0 и π. Если $t_0 < \tau$, то светило движется к перигелию с возрастающей скоростью [1]), так как в параболическом движении

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

В перигелии r имеет наименьшее значение, а скорость V — наибольшее. Далее светило удаляется с постоянно убывающей скоростью и уходит в бесконечность при $t \to \infty$ и $v \to \pi$.

Таким образом в параболическом движении светило может пройти через перигелий только один раз, после чего удаляется в бесконечность. Если же $t_0 > \tau$, то комета неограниченно удаляется от Солнца и в перигелий никогда попасть не может.

§ 32. Гиперболическое движение. Если начальные условия таковы, что

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0},$$

то $h > 0$, $e > 1$, и орбита светила есть гипербола. Уравнение орбиты будет иметь такой же вид, как и в случае эллиптического движения,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{74}$$

---

[1]) Мы предполагаем $c > 0$, т. е. рассматриваем прямое движение. Для $c < 0$ картина будет обратная.

только параметр p определится формулой

$$p = a(e^2 - 1), \tag{75}$$

где a — действительная полуось гиперболы и e — ее эксцентриситет. Вместо действительной полуоси можно также ввести расстояние фокуса до вершины, т. е. перигелийное расстояние q:

$$q = a(e - 1).$$

Тогда будем иметь

$$p = q(1 + e).$$

Выразим a через постоянную интеграла живых сил h. Из формул (51) и (38) мы получаем

$$a = \frac{\mu}{h}.$$

Интеграл живых сил напишется в виде

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right),$$

что отличается от интеграла живых сил в эллиптическом движении только знаком в скобках, перед $\frac{1}{a}$.

Чтобы вывести соотношение между t и v, рассмотрим уравнение (42) и введем для вычисления интеграла новую переменную F формулой

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\frac{F}{2}. \tag{76}$$

В дальнейшем поступаем так же, как и в § 29. Находим

$$\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\frac{dF}{\cos^2\frac{F}{2}}; \quad \cos^2\frac{v}{2} = \frac{1}{1 + \frac{e+1}{e-1}\operatorname{tg}^2\frac{F}{2}}.$$

Далее получаем

$$1 + e\cos v = 1 - e + 2e\cos^2\frac{v}{2} = (e^2 - 1)\frac{\cos F}{e - \cos F}. \tag{77}$$

Делая подстановку, находим, принимая $F = 0$ при $v = 0$,

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = (e^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}\int_0^F \frac{(e - \cos F)\,dF}{\cos^2 F} =$$

$$= (e^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}\left[e\operatorname{tg}F - \ln\operatorname{tg}(F + 45^\circ)\right].$$

Поэтому уравнение (42) принимает вид

$$e\operatorname{tg}F - \ln\operatorname{tg}(F + 45^\circ) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}(t - \tau),$$

или, полагая

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

получаем

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg}(F + 45^\circ) = n(t - \tau). \tag{78}$$

Определив при данном t из уравнения (78) величину F, мы найдем затем истинную аномалию v из уравнения (76), а затем радиус-вектор r по формуле (74). Радиус-вектор можно также выразить непосредственно в функции величины F. Действительно, с помощью формулы (77) мы без труда находим

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right). \tag{79}$$

Выразим теперь координаты планеты ξ и η в плоскости орбиты в функции F. Мы находим без труда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\left(e - \frac{1}{\cos F}\right), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Постоянные гиперболического движения, или гиперболические элементы Ω, i, ω, a (или q) e и τ могут быть определены из начальных значений так же, как и в предыдущих случаях. Для сокращения мы этих формул приводить не будем.

Из уравнения (74) видно, что радиус-вектор r возрастает вместе с v, когда v возрастает от 0°. Когда v получает значение, удовлетворяющее уравнению $1 + e\cos v = 0$, то r обращается в бесконечность. Из интеграла живых сил видно, что скорость V при $r \to \infty$ стремится к постоянному значению h.

ГЛАВА ПЯТАЯ

РЯДЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 33. Решение уравнения Кеплера. В предыдущей главе мы дали общее решение задачи о невозмущенном движении планеты, полностью проинтегрировав диференциальные уравнения этого движения и показав, как может быть вычислено положение планеты для любого момента времени. Это вычисление производится без всякого труда, если для желаемого момента получено соответствующее значение истинной аномалии планеты v, так как и радиус-вектор r и координаты x, y, z являются весьма простыми функциями от этой аномалии. Но определение v зависит от разрешения некоторого трансцендентного уравнения, связывающего v, или некоторый вспомогательный угол, с временем t. Таким образом координаты планеты не выражаются непосредственно, как функции t, что в теоретических исследованиях часто оказывается неудобным.

Поэтому мы поставим себе задачей в этой главе выразить координаты непосредственно в функции времени. Это возможно сделать только при помощи бесконечных рядов, так как уравнение, связывающее v с t, трансцендентно и поэтому v не может быть выражено через t конечным образом. Указанную задачу мы будем рассматривать исключительно для случая эллиптического движения, как наиболее часто встречающегося в астрономической практике. Однако не представляет также большого труда получить соответствующие формулы для параболического и гиперболического движения. Эти формулы можно найти в специальных руководствах.

Так как и радиус-вектор и координаты могут быть выражены как функции от эксцентрической аномалии E, то прежде всего мы постараемся представить эту величину как явную функцию времени.

Эксцентрическая аномалия связана с временем уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = M, \tag{1}$$

где

$$M = n(t - \tau),$$

а e — эксцентриситет эллиптической орбиты, т. е. величина, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant e < 1.$$

Для каждого значения M, а следовательно и t, уравнение (1) имеет единственное действительное решение. Действительно, диференцируя уравнение (1) по M, предполагая E функцией от M, мы получим

$$(1-e\cos E)\frac{dE}{dM}=1,$$

откуда найдем

$$\frac{dE}{dM}=\frac{1}{1-e\cos E}.$$

Так как $e<1$, то $\frac{dE}{dM}$ всегда положительно и, следовательно, E есть монотонно возрастающая функция от M. Поэтому каждому значению M соответствует одно единственное действительное значение E.

Если M заключено в промежутке между $n\pi$ и $(n+1)\pi$, где n — любое целое число, то значение E, удовлетворяющее уравнению (1), также заключено в промежутке между $n\pi$ и $(n+1)\pi$. Чтобы показать это, напишем уравнение (1) в виде

$$\Phi(E)=E-e\sin E-M=0.$$

Пусть

$$n\pi<M<(n+1)\pi.$$

Мы имеем тогда

$$\Phi(n\pi)=n\pi-M<0.$$

$$\Phi[(n+1)\pi]=(n+1)\pi-M>0.$$

Так как функция $\Phi(E)$ непрерывна и имеет значения противоположных знаков на концах промежутка $[n\pi,(n+1)\pi]$, то она необходимо обращается в нуль, по крайней мере для одного значения E, содержащегося в этом промежутке. Но мы уже видели, что каждому значению M соответствует единственное значение E. Поэтому, уравнение $\Phi(E)=0$ имеет только один действительный корень, заключающийся в промежутке между $n\pi$ и $(n+1)\pi$. Если же $M=n\pi$, где n любое целое число, то единственное решение уравнения (1) будет $E=n\pi$.

Поставим теперь себе задачей представление величины E, удовлетворяющей уравнению (1) в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням эксцентриситета e, который играет роль параметра в этом уравнении. Для этого заметим прежде всего, что при $e=0$, мы имеем очевидное решение [1])

$$E=M. \tag{2}$$

Предполагая теперь $e\neq 0$, будем искать решение уравнения (1) в виде некоторой функции от e, обращающейся в M при $e=0$. Это решение можно получить при помощи известной из анализа формулы Лагранжа, определяющей решение уравнения

$$z-a-\alpha f(z)=0, \tag{3}$$

[1]) Это значит, что в круговой орбите эксцентрическая и средняя аномалии совпадают.

где a, α и z могут иметь любые комплексные значения в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням параметра α [1])

$$z = a + \alpha f(a) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f^2(a)] + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f^n(a)] + \ldots \qquad (4)$$

Пусть S некоторый замкнутый контур, внутри которого функция $f(z)$ — голоморфна, т. е. разложима в окрестности любой точки z_0, лежащей внутри этого контура, в целый ряд, расположенный по возрастающим степеням $z - z_0$. Если в каждой точке контура

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1, \qquad (5)$$

то ряд (4) сходится для каждого значения a в области, ограниченной контуром S и представляет корень уравнения (3), обращающийся в a при $\alpha = 0$.

При тех же условиях можно получить более общую формулу. Пусть $\varphi(z)$ будет функция корня уравнения (3), голоморфная в области, ограниченной контуром S. Тогда ряд

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^n}{da^n}[\varphi'(a) f^{n+1}(a)] \qquad (6)$$

сходится для каждого значения a в области, ограниченной контуром S, и представляет в этой области голоморфную функцию от корня z уравнения (3).

Заметим, что условие (5) определяет верхний предел тех значений α, для которых ряды (4) и (6) наверное остаются сходящимися. Действительно, из неравенства (5) следует, что мы должны иметь неравенство

$$|\alpha| < \left|\frac{z-a}{f(z)}\right|, \qquad (7)$$

справедливое в каждой точке контура S.

Рассмотрим частный случай уравнения (3), для которого $f(z) = \sin z$ и α есть действительное число, заключающееся между 0 и 1. Так как $\sin z$ есть голоморфная функция от z в любой конечной области плоскости z, то остается найти такой контур, в каждой точке которой выполняется условие

$$\left|\frac{\alpha \sin z}{z-a}\right| < 1$$

или, так как в нашем случае α действительно и положительно,

$$\alpha\left|\frac{\sin z}{z-a}\right| < 1. \qquad (8)$$

[1]) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, § 186, т. II, § 302, а также Ш. Эрмит, Курс анализа, Лекция 19.

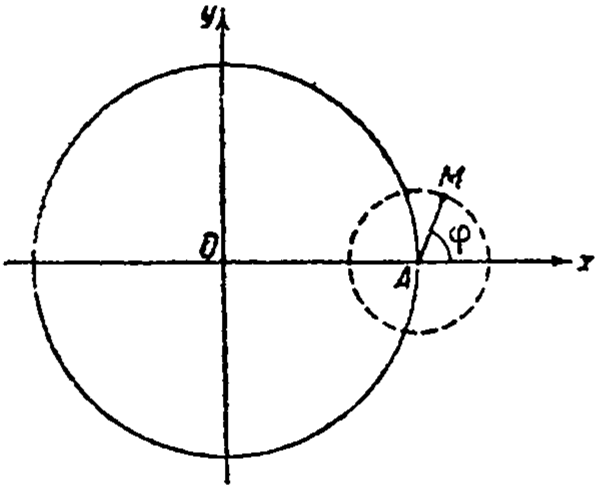
Если это неравенство выполнено, то уравнение

$$z - a - \alpha \sin z = 0$$

имеет единственный корень внутри контура, обращающийся в a при $\alpha = 0$ и имеет место разложение:

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{da^n} \left[\varphi'(a) \sin^{n+1} a \right]. \tag{9}$$

Найдем теперь верхний предел значений α, для которых ряд (9) остается сходящимся, каково бы ни было действительное значение a (черт. 10). Пусть A — точка действительной оси, абсцисса которой есть a, а M — точка, изображающая комплексное число z [1]). Возьмем за контур S окружность радиуса ϱ, описанную из точки A, как из центра. Заставим точку M двигаться по этой окружности и обозначим через φ угол, образуемый радиусом AM с положительным направлением оси Ox. Если x и y прямоугольные координаты точки M, то мы будем иметь



Черт. 10.

$$x - a = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi,$$

откуда получим соотношение

$$z = x + iy = a + \varrho\cos\varphi + i\varrho\sin\varphi = a + \varrho e^{i\varphi},$$

где e — основание натуральных логарифмов. Условие (8) примет вид

$$\alpha \left| \frac{\sin(a + \varrho e^{i\varphi})}{\varrho e^{i\varphi}} \right| < 1.$$

Так как $|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, то это условие напишется в виде

$$\frac{\alpha}{\varrho} \left| \sin(a + \varrho e^{i\varphi}) \right| < 1.$$

Обозначим через $F(\varrho)$ максимум модуля $\sin(a + \varrho e^{i\varphi})$, когда φ изменяется от 0 до 2π, а a принимает все возможные действительные значения. Если мы дадим тогда параметру α значение, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha < \frac{\varrho}{F(\varrho)},$$

то условие (3) будет выполнено, и ряд (9) будет сходиться для всех действительных значений a.

---

[1]) Напомним, что $z = x + iy$, $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ и $i = \sqrt{-1}$.

Радиус ϱ до сих пор оставался у нас произвольным. Выберем его так, чтобы выражение $\frac{\varrho}{F(\varrho)}$ имело наибольшее из своих возможных значений. Пусть это значение ϱ будет ϱ_1. Положим

$$\alpha_1 = \frac{\varrho_1}{F(\varrho_1)}.$$

Тогда ряд (9) будет сходиться для всех значений α, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha < \alpha_1.$$

Остается найти α_1, т. е. максимум функции $\frac{\varrho}{F(\varrho)}$. Следовательно, нужно определить сначала $F(\varrho)$, т. е. максимум модуля $\sin(a + \varrho e^{i\varphi})$, когда φ изменяется от 0 до 2π и a принимает все возможные действительные значения. Но мы имеем [1])

$$\begin{gathered} |\sin(a + \varrho e^{i\varphi})|^2 = \sin(a + \varrho e^{i\varphi}) \sin(a + \varrho e^{-i\varphi}) = \\ = \sin(a + \varrho\cos\varphi + i\varrho\sin\varphi)\sin(a + \varrho\cos\varphi - i\varrho\sin\varphi) = \\ = \cos^2(i\varrho\sin\varphi) - \cos^2(a + \varrho\cos\varphi), \end{gathered}$$

откуда следует, что

$$|\sin(a + \varrho e^{i\varphi})| = \sqrt{\left(\frac{e^{\varrho\sin\varphi} + e^{-\varrho\sin\varphi}}{2}\right)^2 - \cos^2(a + \varrho\cos\varphi)}.$$

Это выражение будет иметь наибольшее возможное значение для данного ϱ, если $\frac{e^{\varrho\sin\varphi} + e^{-\varrho\sin\varphi}}{2}$ имеет наибольшее значение, а $\cos^2(a + \varrho\cos\varphi)$ имеет наименьшее значение. Но первая величина имеет наибольшее значение при $\sin\varphi = 1$, а наименьшее значение квадрата косинуса есть нуль. Поэтому

$$F(\varrho) = \frac{e^{\varrho} + e^{-\varrho}}{2}$$

и нам теперь остается только найти максимум функции

$$\Phi(\varrho) = \frac{2\varrho}{e^{\varrho} + e^{-\varrho}},$$

т. е. решить весьма простую задачу из диференциального исчисления. Имеем

$$\Phi'(\varrho) = \frac{2(e^{\varrho} + e^{-\varrho}) - 2\varrho(e^{\varrho} - e^{-\varrho})}{(e^{\varrho} + e^{-\varrho})^2} = \frac{2}{(e^{\varrho} + e^{-\varrho})^2}[e^{\varrho}(1 - \varrho) + e^{-\varrho}(1 + \varrho)].$$

Приравнивая производную нулю, получаем уравнение для определения того значения ϱ, при котором $\Phi(\varrho)$ имеет экстремальное значение

$$R(\varrho) = e^{\varrho}(\varrho - 1) - e^{-\varrho}(\varrho + 1) = 0. \tag{10}$$

[1]) Квадрат модуля комплексного числа равен произведению этого числа на число ему сопряженное, т. е., если $c = a + bi$, то $|c|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$.

Это уравнение имеет единственный корень, заключающийся в промежутке между 1 и 2. Действительно,

$$R'(\varrho) = \varrho\,(e^{\varrho} + e^{-\varrho}), \tag{11}$$

т. е. всегда положительно. Поэтому $R(\varrho)$ есть монотонно возрастающая функция ϱ. Но

$$R(1) = -2e^{-1} < 0,$$

$$R(2) = e^2 - 3e^{-2} = \frac{e^4 - 3}{e^2} > 0.$$

Поэтому $R(\varrho)$ обращается в нуль при значении ϱ, содержащемся между 1 и 2. Приближенное решение уравнения (10) дает его корень ϱ_1, который равен

$$\varrho_1 = 1{,}9967\ldots$$

Это значение ϱ дает максимум для функции $\Phi(\varrho)$. Действительно, вычисляя вторую производную $\Phi''(\varrho)$, находим

$$\Phi''(\varrho) = -\frac{2R'(\varrho)}{(e^{\varrho} + e^{-\varrho})^2} - 2R(\varrho)\,\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{(e^{\varrho} + e^{-\varrho})^2}\right],$$

откуда, в силу соотношений (10) и (11) получаем

$$\Phi''(\varrho_1) < 0.$$

Обозначая, как было уже условлено выше, максимум функции $\Phi(\varrho)$ через a_1, мы находим

$$a_1 = \Phi(\varrho_1) = \frac{2\varrho_1}{e^{\varrho_1} + e^{-\varrho_1}} = 0{,}6627\ldots$$

Итак, ряд сходится при всех действительных значениях a, если α удовлетворяет неравенству

$$\alpha < 0{,}6627\ldots$$

Возвращаясь к обычным обозначениям, мы приходим к следующему важному результату: Всякая голоморфная функция $\varphi(E)$ от решения уравнения Кеплера $E - e\sin E = M$, обращающегося в M при $e = 0$, разложима в бесконечный ряд, расположенный по возрастающим степеням эксцентриситета e. Этот ряд имеет вид

$$\varphi(E) = \varphi(M) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{d^n}{dM^n}\left[\varphi'(M)\sin^{n+1} M\right] \tag{12}$$

и сходится при всех действительных значениях M, если

$$e < 0{,}6627\ldots \tag{13}$$

В большинстве случаев эксцентриситеты планет и комет никогда не превышают предела (13). Вообще даже эксцентриситеты обычно весьма малы, так что ряды типа (12) сходятся достаточно быстро и обыкновенно бывает достаточно взять несколько первых членов этих рядов, чтобы получить их суммы с достаточной точностью.

Если $0{,}6627\ldots \leqslant e < 1$, то ряды (12) могут оказаться расходящимися для некоторых значений M и тогда они, конечно, неприменимы для определения функции $\varphi(E)$. Такие случаи встречаются действительно у малых планет и комет. Если $e > 1$, то ряды типа (12) безусловно расходятся.

Применяя формулу (12) к частному случаю, когда $\varphi(E) = E$, мы получим разложение самого корня уравнения Кеплера, обращающегося в M при $e = 0$. В этом случае $\varphi(M) = M$, $\varphi'(M) = 1$ и мы находим

$$E = M + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dM^n} [\sin^{n+1} M] = M + \frac{e}{1} \sin M + + \frac{e^2}{2!} \frac{d \sin^2 M}{dM} + \ldots \tag{14}$$

или

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \ldots$$

Более подробные формулы будут получены в следующем параграфе.

§ 34. Разложения координат по возрастающим степеням эксцентриситета. Из формул предыдущей главы мы имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E,$$

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e,$$

$$\frac{\eta}{a\sqrt{1-e^2}} = \sin E.$$

Две последние формулы можно также переписать в виде

$$\xi = \frac{a(1-e^2) - r}{e}, \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\, \frac{E-M}{e}. \tag{15}$$

Поэтому достаточно разложить в ряды E и r. Но разложение E дается формулой (14), полученной в конце предыдущего параграфа, а разложение r зависит от разложения $\cos E$ и остается найти последнее. Так как $\cos E$ есть голоморфная функция от E, то можно применить формулу (12), полагая $\varphi(E) = \cos E$. Тогда $\varphi(M) = \cos M$, $\varphi'(M) = = -\sin M$ и формула (12) дает

$$\cos E = \cos M - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dM^n} [\sin^{n+2} M].$$

С помощью этой формулы и формулы (14) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos M + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dM^n} [\sin^{n+2} M], \\ \frac{\xi}{a} &= \cos M - e - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dM^n} [\sin^{n+2} M], \\ \frac{\eta}{a} &= \sqrt{1-e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!} \frac{d^n}{dM^n} [\sin^{n+1} M]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Чтобы представить эти формулы в раскрытом виде, нужно вычислить производные от различных степеней $\sin M$. Это не представляет затруднений, так как эти производные выражаются простыми формулами через степени $\sin M$ и $\cos M$. Однако удобнее выразить эти производные через синусы и косинусы кратных углов. Это можно сделать следующим образом. Из элементарной тригонометрии имеем известные формулы:

Для четного m

$$\left.\begin{aligned}\sin^m M = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}&\Bigg[\cos mM - \frac{m}{1}\cos(m-2)M + \\ &+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)M - \ldots\ldots \pm \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1\cdot 2\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos 2M \mp \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot 2\ldots\frac{m}{2}}\frac{1}{2}\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для нечетного m

$$\left.\begin{aligned}\sin^m M = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}}&\Bigg[\sin mM - \frac{m}{1}\sin(m-2)M + \\ &+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)M - \ldots\ldots\ldots \pm \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\cdot 2\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin M\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

С помощью этих формул мы выводим без труда

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dM^n}[\sin^{n+1} M] = \frac{1}{2^n}\Bigg[&(n+1)^n\sin(n+1)M - \\ &-\frac{n+1}{1}(n-1)^n\sin(n-1)M + \\ &+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}(n-3)^n\sin(n-3)M - \ldots\Bigg],\end{aligned}$$

причем эта формула справедлива одинаково и для четного n и для нечетного n. Только в первом случае она оканчивается членом с $\sin M$ и во втором случае членом с $\sin 2M$.

Точно так же находим

$$\frac{d^n}{dM^n}[\sin^{n+2}M] = -\frac{1}{2^{n+1}}\Big[(n+2)^n\cos(n+2)M - \frac{(n+2)}{1}n^n\cos nM + \\ + \frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2}(n-2)^n\cos(n-2)M - \ldots\Big].$$

Эта формула заканчивается членом $\cos 2M$, если n четное, и членом $\cos M$, если n нечетное.

С помощью полученных формул находим следующие развернутые выражения для E и r:

$$\left.\begin{aligned} E = M &+ e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{e^3}{3!2^2}(3^2\sin 3M - 3\sin M) + \\ &+ \frac{e^4}{4!2^3}(4^3\sin 4M - 4\cdot 2^3\sin 2M) + \\ &+ \frac{e^5}{5!2^4}(5^4\sin 5M - 5\cdot 3^4\sin 3M + 10\sin M) + \\ &+ \frac{e^6}{6!2^5}(6^5\sin 6M - 6\cdot 4^5\sin 4M + 15\cdot 2^5\sin 2M) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{e^n}{n!2^{n-1}}\Big[n^{n-1}\sin nM - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1}\sin(n-2)M + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1}\sin(n-4)M - \ldots\Big] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 &- e\cos M - \frac{e^2}{2}(\cos 2M - 1) - \frac{e^3}{2!2^2}(3\cos 3M - 3\cos M) - \\ &- \frac{e^4}{3!2^3}(4^2\cos 4M - 4\cdot 2^2\cos 2M) - \\ &- \frac{e^5}{4!2^4}(5^3\cos 5M - 5\cdot 3^3\cos 3M + 10\cos M) - \\ &- \frac{e^6}{5!2^5}(6^4\cos 6M - 6\cdot 4^4\cos 4M + 15\cdot 2^4\cos 2M) - \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \\ &- \frac{e^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}\Big[n^{n-2}\cos nM - \frac{n}{1}(n-2)^{n-2}\cos(n-2)M + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-2}\cos(n-4)M - \ldots\Big] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Точно так же находим разложения для координат планеты ξ и η в орбите:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\xi}{a} &= \cos M - \frac{e}{2}(3-\cos 2M) + \frac{e^2}{2!2^2}(3\cos 3M - 3\cos M) + \\
&+ \frac{e^3}{3!2^3}(4^2\cos 4M - 4\cdot 2^2\cos 2M) + \\
&+ \frac{e^4}{4!2^4}(5^3\cos 5M - 5\cdot 3^3\cos 3M + 10\cos M) + \\
&+ \frac{e^5}{5!2^5}(6^4\cos 6M - 6\cdot 4^4\cos 4M + 15\cdot 2^4\cos 2M) + \\
&+ \frac{e^6}{6!2^6}(7^5\cos 7M - 7\cdot 5^5\cos 5M + 21\cdot 3^5\cos 3M - 35\cos M) + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ \frac{e^n}{n!2^n}\Big[(n+1)^{n-1}\cos(n+1)M - \\
&\qquad - \frac{n+1}{1}(n-1)^{n-1}\cos(n-1)M + \dots\Big] + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\eta}{a} &= \sqrt{1-e^2}\Big\{\sin M + \frac{e}{2!}\sin 2M + \frac{e^2}{3!2^2}(3^2\sin 3M - 3\sin M) + \\
&+ \frac{e^3}{4!2^3}(4^3\sin 4M - 4\cdot 2^3\sin 2M) + \\
&+ \frac{e^4}{5!2^4}(5^4\sin 5M - 5\cdot 3^4\sin 3M + 10\sin M) + \\
&+ \frac{e^5}{6!2^5}(6^5\sin 6M - 6\cdot 4^5\sin 4M + 15\cdot 2^5\sin 2M) + \\
&+ \frac{e^6}{7!2^6}(7^6\sin 7M - 7\cdot 5^6\sin 5M + 21\cdot 3^6\sin 3M - 35\sin M) + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ \frac{e^n}{(n+1)!2^n}\Big[(n+1)^n\sin(n+1)M - \\
&\qquad - \frac{n+1}{1}(n-1)^n\sin(n-1)M + \dots\Big] + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Последнее из этих разложений, т. е. формула (22), содержит еще множителем $\sqrt{1-e^2}$. Поэтому, если мы хотим представить координату η в виде ряда, расположенного по степеням e, то мы должны разложить $\sqrt{1-e^2}$ в ряд по степеням e и помножить полученный ряд на ряд, стоящий в фигурных скобках. Это перемножение возможно, и полученный ряд будет сходиться при значениях $e < 0{,}6627\ldots$ Так как

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots,$$

то окончательное выражение для η напишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\eta}{a} = {} & \sin M - \frac{e}{2}\sin 2M + \frac{e^2}{3!2^3}(3^2\sin 3M - 15\sin M) + \\
& + \frac{e^3}{4!2^3}[4^3\sin 4M - (4\cdot 2^3 + 3\cdot 4\cdot 2^2)\sin 2M] + \\
& + \frac{e^4}{5!2^4}[5^4\sin 5M - (5\cdot 3^4 + 4\cdot 5\cdot 2\cdot 3^2)\sin 3M + \\
& + (10 + 4\cdot 5\cdot 2\cdot 3 - 5!2)\sin M] + \\
& + \frac{e^5}{6!2^5}[6^5\sin 6M - (6\cdot 4^5 + 5\cdot 6\cdot 2\cdot 4^3)\sin 4M + \\
& + (15\cdot 2^5 + 5\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 2^3 - 6!2)\sin 2M] + \\
& + \frac{e^6}{7!2^6}[7^5\sin 7M - (7\cdot 5^6 + 6\cdot 7\cdot 2\cdot 5^4)\sin 5M + \\
& + (21\cdot 3^6 + 6\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 3^4 - 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 2\cdot 3^2)\sin 3M - \\
& - (35 + 6\cdot 7\cdot 2\cdot 10 - 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 2\cdot 3 + 7!\,2^2)\sin M] + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Остается еще разложить в ряд по степеням эксцентриситета e истинную аномалию v. Это можно сделать следующим образом. Из интеграла площадей

$$r^2\frac{dv}{dt} = c,$$

где $c = na^2\sqrt{1-e^2}$, мы находим

$$\frac{1}{n}\,\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}.$$

Но

$$M = n(t-\tau), \quad dM = n\,dt;$$

поэтому можно написать

$$\frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}.$$

Но мы видели, что

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{(1-e\cos E)},$$

а следовательно,

$$\frac{dv}{dM} = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2,$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{1-e^2}\int\limits_0^M \left(\frac{dE}{dM}\right)^2 dM. \qquad (24)$$

Производную $\frac{dE}{dM}$ найдем, диференцируя почленно ряд (19). Возводя затем полученное разложение в квадрат, интегрируя и помножая результат на разложение $\sqrt{1-e^2}$, мы получим окончательно следующее разложение для истинной аномалии

$$\left.\begin{aligned} v = M &+ 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \frac{e^3}{12}(13\sin 3M - 3\sin M) + \\ &+ \frac{e^4}{96}(103\sin 4M - 44\sin 2M) + \\ &+ \frac{e^5}{960}(1097\sin 5M - 645\sin 3M + 50\sin M) + \\ &+ \frac{e^6}{960}(1223\sin 6M - 902\sin 4M + 85\sin 2M) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Ряд (25) сходится, конечно, при тех же условиях, как и все предыдущие ряды, т. е. для всех действительных значений M и для значений эксцентриситета, удовлетворяющих неравенству

$$e < 0{,}6627\ldots$$

Таким образом координаты планеты в орбите выражены нами явно в функции времени t, т. е. поставленная нами задача выполнена.

§ 35. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье. Разложения координат эллиптического движения по возрастающим степеням эксцентриситета, полученные нами в предыдущем параграфе, сходятся для всех действительных значений времени, если $e < 0{,}6627\ldots$

Мы уже указывали, что если эксцентриситет превышает это предельное значение, то ряды не будут сходящимися вдоль всей орбиты, а если $e > 1$, то ряды вообще расходятся. Таким образом мы видим, что эти ряды не могут представлять движение планеты для всех значений эксцентриситета, заключенных между 0 и 1.

Однако и для допустимых значений e эти ряды далеко не всегда оказываются пригодными для числовых вычислений. Действительно, ряд *пригоден* для практических приложений только в том случае, если он *сходится быстро*, т. е. если для получения суммы этого ряда с желаемой степенью точности *достаточно* взять *не очень большое* число первых его членов. Наоборот, если для вычисления суммы какого-нибудь сходящегося ряда с желаемой степенью точности *необходимо* взять большое число первых его членов, то мы говорим, что ряд *сходится медленно*, и для практических приложений такие ряды неудобны, так как требуют громоздкой и бесполезной большой вычислительной работы.

Полученные в предыдущем параграфе ряды *сходятся очень быстро*, если e очень мало, т. е. если эллиптическая орбита очень мало отличается от окружности. В этих случаях достаточно взять в этих рядах только три или четыре первых члена, чтобы получить для любого значения t координаты планеты с весьма высокой степенью точности.

Если эксцентриситет e возрастает, то сходимость указанных рядов делается все более и более медленной и для достижения той же самой точности мы принуждены брать в этих рядах все большее и большее количество членов. Сходимость рядов делается очень медленной, если значение эксцентриситета близко к своему предельному значению 0,6627..., каковые случаи имеют место для некоторых малых планет и комет.

Имея еще в виду, что при $0{,}6627\ldots < e < 1$ сходимость рядов вообще делается сомнительной, мы приходим к необходимости получения для координат планеты каких-то других рядов, которые были бы сходящимися для всех действительных значений t и для всякого e, заключенного в промежутке между 0 и 1.

Такого рода разложения могут быть получены при помощи известной теоремы Фурье, дающей разложение *периодической* функции в сходящийся тригонометрический ряд, расположенный по синусам и косинусам кратных величин аргумента.

Пусть $f(z)$ есть периодическая функция переменного z, с периодом 2π, и ограниченная для всех значений z от $-\infty$ до $+\infty$[1]). Тогда, для всех действительных значений z, эта функция разложима в сходящийся ряд вида

$$\left.\begin{aligned} f(z) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos z + a_2\cos 2z + \ldots + a_n\cos nz + \ldots \\ + b_1\sin z + b_2\sin 2z + \ldots + b_n\sin nz + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где коэфициенты a_n и b_n определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos nz\,dz, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin nz\,dz \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

В силу теоремы Дирихле разложение (26) единственно. Если функция $f(z)$ *четная*, т. е. если для всякого значения z мы имеем

$$f(-z) = f(z),$$

то формула (26) несколько упрощается, так как все коэфициенты b_n в этом случае равны нулю. Таким образом для четной функции мы имеем следующее разложение

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos z + a_2\cos 2z + \ldots + a_n\cos nz + \ldots, \tag{28}$$

---

[1]) Мы предполагаем известной из анализа теорему Дирихле, устанавливающую необходимые и достаточные условия разложения функции $f(z)$ в ряд Фурье.

где коэфициенты a_n определяются формулами

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \cos nz \, dz \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots). \tag{29}$$

В этом случае говорят, что функция $f(z)$ *разлагается в ряд Фурье по косинусам кратных аргумента.*

Если функция $f(z)$ *нечетная*, т. е. если для всякого значения z мы имеем

$$f(-z) = -f(z),$$

то равны нулю все коэфициенты a_n и разложение принимает вид

$$f(z) = b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \ldots + b_n \sin nz + \ldots \tag{30}$$

где коэфициенты b_n определяются формулами

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \sin nz \, dz \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

В этом случае говорят, что функция $f(z)$ *разлагается в ряд Фурье по синусам кратных аргумента* [1]).

Эти общие формулы мы применим теперь для разложения координат планеты в ряды, сходящиеся при *всех* значениях эксцентриситета, заключенных в промежутке между 0 и 1.

§ 36. Разложение эксцентрической аномалии. Эксцентрическая аномалия E и средняя аномалия M связаны, как мы видели выше, уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M, \tag{32}$$

где e — эксцентриситет эллиптической орбиты планеты.

Формула (19) показывает, что разность $E - M$ есть периодическая функция M с периодом 2π. Кроме того очевидно, что эта разность есть нечетная функция от M. Переписав уравнение (32) в виде

$$E - M = e \sin E,$$

мы убеждаемся в том, что функция $E - M$ удовлетворяет условиям Дирихле, а потому эта величина может быть разложена в ряд Фурье по синусам величин, кратных M, и мы можем написать

$$E - M = b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \ldots + b_n \sin nM + \ldots \tag{33}$$

Ряд (33) будет сходиться для всех действительных значений M и для всех значений эксцентриситета, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant e < 1.$$

[1]) Все перечисленные свойства рядов Фурье должны быть хорошо известны из анализа. Поэтому мы ограничиваемся только кратким их перечислением, не воспроизводя никаких доказательств.

Остается определить коэфициенты b_n ряда (33). В силу формулы (31) мы имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (E - M) \sin nM \, dM. \tag{34}$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, мы получим

$$\frac{n\pi}{2} b_n = -\Big/_0^\pi (E - M) \cos nM + \int_0^\pi (dE - dM) \cos nM.$$

Так как $E - M$ равно нулю при $M = 0$ и $M = \pi$, то мы будем иметь

$$\frac{n\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \cos nM \, dE - \int_0^\pi \cos nM \, dM = \int_0^\pi \cos nM \, dE$$

или

$$\frac{n\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \cos n(E - e \sin E) \, dE.$$

Полагая для сокращения $ne = x$, имеем

$$\frac{n\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \cos (nE - x \sin E) \, dE$$

или

$$\frac{n\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \cos nE \cos (x \sin E) \, dE + \int_0^\pi \sin nE \sin (x \sin E) \, dE.$$

Положим теперь

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos nE \cos (x \sin E) \, dE,$$

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nE \sin (x \sin E) \, dE,$$

тогда получим

$$b_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}. \tag{35}$$

Но, очевидно, что α_n есть коэфициент при $\cos(nE)$ в разложении периодической четной функции $\cos(x \sin E)$ в ряд Фурье вида (28), а β_n есть коэфициент при $\sin(nE)$ в разложении периодической нечетной функции $\sin(x \sin E)$ в ряд Фурье вида (30).

Чтобы получить выражения для коэфициентов α_n и β_n, мы сейчас произведем разложения функций $\cos(x \sin E)$ и $\sin(x \cos E)$ способом, отличным от способа Фурье, при помощи которого выражения для α_n

и β_n получатся в виде сходящихся степенных рядов, расположенных по возрастающим степеням величины x. Положим для этого

$$e^{iE} = z,$$

где e — обозначает основание натуральных логарифмов и $i = \sqrt{-1}$. Тогда

$$\sin E = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin E) &= \cos\left[\frac{x\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} + e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2}, \\ \sin(x\sin E) &= \sin\left[\frac{x\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} - e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Функции

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \quad \text{и} \quad e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

могут быть разложены в ряды, сходящиеся абсолютно для *всех значений* x и z. Действительно, мы имеем

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{xz}{2}} e^{-\frac{x}{2z}} =$$

$$= \left[1 + \frac{xz}{2} + \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^3}{3!} + \ldots\right]\left[1 - \frac{x}{2z} + \frac{\left(\frac{x}{2z}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x}{2z}\right)^3}{3!} + \ldots\right].$$

Так как каждый из рядов, стоящих в скобках, сходится абсолютно, то, перемножая их, мы опять получим сходящийся ряд. Располагая результаты перемножения по степеням z, мы получим ряд вида

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = I_0(x) + zI_1(x) + z^2 I_2(x) + \ldots + z^n I_n(x) + \ldots$$
$$- \frac{I_1(x)}{z} + \frac{I_2(x)}{z^2} - \frac{I_3(x)}{z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{I_n(x)}{z^n} + \ldots,$$

где коэфициенты $I_n(x)$ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} I_n(x) = \frac{x^n}{2^n\, n!}\Bigg[1 &- \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2n+2)(2n+4)} - \\ &- \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Функции $I_n(x)$ называются *функциями Бесселя*. Они обладают многими замечательными свойствами, важнейшим из которых является то, что $I_n(x)$ конечно для всякого значения x и не превосходит по абсолютной величине единицы. Последнее следует из интегральной формулы для

$I_n(x)$, которую мы получим в конце параграфа. Эта формула имеет вид

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nE - x\sin E)\,dE,$$

откуда следует

$$|I_n(x)| < \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dE = 1.$$

Теперь нетрудно определить α_n и β_n. Из формул (36) мы имеем

$$\cos(x\sin E) + i\sin(x\sin E) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n I_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n(x)}{z^n},$$

но

$$z^n = e^{niE} = \cos nE + i\sin nE,$$
$$z^{-n} = e^{-niE} = \cos nE - i\sin nE.$$

Вставляя в предыдущую формулу вместо z^n и z^{-n} эти их выражения и приравнивая действительные и мнимые части, мы находим

$$\cos(x\sin E) = 2\,[I_0(x) + I_2(x)\cos 2E + I_4(x)\cos 4E + I_6(x)\cos 6E + \ldots],$$
$$\sin(x\sin E) = 2\,[I_1(x)\sin E + I_3(x)\sin 3E + I_5(x)\sin 5E + \ldots],$$

откуда получаем

$$\alpha_0 = 2I_0(x),\quad \alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 2I_2(x),\quad \alpha_3 = 0,\quad \alpha_4 = 2I_4(x), \ldots$$
$$\beta_1 = 2I_1(x),\quad \beta_2 = 0,\quad \beta_3 = 2I_3(x),\quad \beta_4 = 0, \ldots$$

Отсюда следует, что

$$b_n = \frac{2}{n} I_n(x) = \frac{2}{n} I_n(ne),$$

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nE - x\sin E)\,dE.$$

Искомое разложение $E - M$ в ряд Фурье напишется теперь в виде

$$\left.\begin{aligned} E - M = 2\Big[I_1(e)\sin M + \frac{1}{2} I_2(2e)\sin 2M + \frac{1}{3} I_3(3e)\sin 3M + \\ + \frac{1}{4} I_4(4e)\sin 4M + \ldots\Big] = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(ne)}{n}\sin nM. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Этот ряд сходится при всех действительных значениях M и для всякого значения e, меньшего единицы.

§ 37. Разложение радиуса-вектора и прямоугольных координат в плоскости орбиты. Из уравнения

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{39}$$

следует, что r есть четная периодическая функция M, а поэтому мы можем написать

$$r = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \ldots + a_n \cos nM + \ldots, \tag{40}$$

где [см. формулу (29)]

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(a - ae\cos E)\,dM = 2a - \frac{2ae}{\pi}\int_0^{\pi}\cos E\,dM =$$

$$= 2a - \frac{2ae}{\pi}\int_0^{\pi}\cos E(1 - e\cos E)\,dE = 2\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a(1 - e\cos E)\cos nM\,dM = \frac{2}{\pi}\left[a(1 - e\cos E)\frac{\sin nM}{n}\right]_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2ae}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nM\sin E\,dE = -\frac{2ae}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin n(E - e\sin E)\sin E\,dE =$$

$$= -\frac{ae}{n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[(n-1)E - ne\sin E]\,dE - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[(n+1)E - ne\sin E]\,dE\right\},$$

откуда, в силу обозначений, принятых в предыдущем параграфе, получим

$$a_n = \frac{ae}{n}\,[I_{n+1}(ne) - I_{n-1}(ne)],$$

и ряд (40) напишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e\Big\{&[I_2(e) - I_0(e)]\cos M + \\
&+ \frac{1}{2}[I_3(2e) - I_1(2e)]\cos 2M + \frac{1}{3}[I_4(3e) - \\
- I_2(3e)]\cos 3M + \frac{1}{4}&[I_5(4e) - I_3(4e)]\cos 4M + \ldots\Big\} = 1 + \frac{e^2}{2} + \\
&+ e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{n+1}(ne) - I_{n-1}(ae)}{n}\cos nM.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Без всякого труда так же получаются разложения для прямоугольных координат в орбите ξ и η. Действительно, мы имеем

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}(E-M),$$

$$\xi = \frac{a(1-e^2)}{e} - \frac{r}{e}\,{}^{1)},$$

откуда, с помощью формул (41) и (38) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2}e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{n+1}(ne) - I_{n-1}(ne)}{n}\cos nM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_{n=1}^{n} \frac{I_n(ne)}{n}\sin nM. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Легко также получить разложение для обратной величины радиуса-вектора. Действительно, мы имеем

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1-e\cos E} = \frac{dE}{dM},$$

откуда, в силу разложения (38), находим

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n-1}^{\infty} I_n(ne)\cos nM. \tag{43}$$

Несколько труднее получить разложение для истинной аномалии v. На выводе этой формулы мы останавливаться не будем и только укажем вкратце, как ее можно получить. Интеграл площадей

$$r^2\frac{dv}{dt} = c$$

может быть написан в виде

$$r^2\frac{dv}{dM}\frac{dM}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2},$$

откуда следует

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}.$$

Правая часть последнего равенства есть четная периодическая функция E, а следовательно, является также четной периодической функцией M. Поэтому, применяя теорему Фурье, мы можем написать

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a_0}{2} + a_1\cos M + a_2\cos 2M + \ldots + a_n\cos nM + \ldots, \tag{44}$$

где коэфициенты a_n определяются формулами

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\cos nM\,dM}{(1-e\cos E)^2}$$

---

[1]) Последняя формула получается из уравнения $\xi = \frac{c^2}{f} - \frac{\mu r}{f}$ заменой c^2 и f их значениями.

или

$$a_n = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\cos n\,(E - e\sin E)\,dE}{1 - e\cos E}.$$

Эти величины могут быть разложены в ряды по степеням e, сходящиеся для всех значений e, заключающихся между 0 и 1, а поэтому могут считаться известными.

Чтобы получить теперь разложение для v, достаточно проинтегрировать почленно формулу (197) и мы получим

$$v = c + \frac{a_0}{2} M + a_1 \sin M + \frac{a_2}{2} \sin 2M + \ldots + \frac{a_n}{n} \sin nM + \ldots \qquad (45)$$

Вычислим только коэфициент $\frac{a_0}{2}$. Мы имеем

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{dE}{1 - e\cos E} = \frac{2}{\pi} \Big/_{\!0}^{\!\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}\right) = 1.$$

Принимая еще во внимание, что при $M = 0$, v также равно нулю, мы видим, что постоянная $c = 0$, и формула (45) может быть написана в виде

$$v = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nM. \qquad (46)$$

Точно так же можно разложить в ряды Фурье и проекции скорости на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору. Эти разложения могут быть получены из ранее выведенных формул

$$V_r = \frac{nae\sin E}{1 - e\cos E} \quad \text{и} \quad V_p = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E},$$

правые части которых являются периодическими функциями от E, а следовательно, и от M. Следовательно, к этим функциям применима теорема Фурье, которая и позволяет получить желаемые разложения.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 38. Метод изменения произвольных постоянных. Пусть x, y, z обозначают координаты какой-либо планеты или кометы в системе прямоугольных декартовых координат с *неизменными направлениями осей* и с началом в центре тяжести Солнца. Тогда, как мы это видели в конце главы третьей, диференциальные уравнения относительного движения планеты могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть радиус-вектор планеты, а R есть возмущающая функция.

К виду (1) приводятся уравнения движения *каждой* планеты, и возмущающие функции для этих планет зависят только от координат всех планет, входящих в рассматриваемую систему. Как мы видели, к такому же виду, приводятся диференциальные уравнения спутников планет, но в последнем случае возмущающая функция будет также содержать явно время t. Мы будем рассматривать еще более общий случай возмущенного движения, в котором диференциальные уравнения могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3} + X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3} + Y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3} + Z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где X, Y, Z суть какие угодно функции величин x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и времени t. Мы будем предполагать только, что функции X, Y, Z непрерывны и диференцируемы. К виду (2) могут быть приведены диференциальные уравнения большинства задач, имеющих значение для небесной механики. Как частный случай из уравнений (2) получаются также и уравнения возмущенного движения планеты (1).

В уравнениях (2) вторые производные $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ суть проекции полного ускорения планеты[1]) на оси x, y, z. Величины $-\frac{\mu x}{r^3}$, $-\frac{\mu y}{r^3}$, $-\frac{\mu z}{r^3}$ суть проекции ускорения планеты, вызываемого притягивающим действием Солнца. Наконец, X, Y, Z суть проекции результирующего ускорения планеты, вызванного действием всех прочих сил в рассматриваемой задаче. Поэтому мы будем называть величины X, Y, Z проекциями *возмущающего ускорения*.

Наша задача заключается в интегрировании уравнений (2), т. е. или в определении координат x, y, z как функций времени и произвольных постоянных, или в нахождении необходимого количества независимых первых интегралов системы (2). Однако точное интегрирование системы (2) в громадном большинстве случаев оказывается невозможным, и мы вынуждены прибегать к тому или иному методу последовательных приближений. Эти методы в применении к основной задаче небесной механики мы рассмотрим ниже, а эту главу посвятим рассмотрению некоторых преобразований системы (2), преобразований, которые в последующем образуют фундамент для упомянутых методов последовательных приближений.

Основная идея преобразований, о которых идет речь, хорошо известна из курса диференциальных уравнений; это — идея метода изменения произвольных постоянных интеграции.

Отбросим в правых частях уравнений (2) возмущающие ускорения X, Y, Z. Тогда мы получим *новую* систему диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

отличную от системы (2), но которая зато может быть интегрирована. Это интегрирование было нами выполнено в главе четвертой, где мы показали, что координаты x, y, z планеты, определяемые уравнениями (3), даются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= r[\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i], \\ y &= r[\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i], \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) Для определенности мы будем продолжать называть движущуюся точку планетой и притягивающую массу в начале координат — Солнцем.

где

$$\left.\begin{aligned} u &= v + \omega, \\ r &= \frac{p}{1 + e\cos v}, \\ t - \tau &= \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При этом

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad e, \quad p \quad \text{и} \quad \tau$$

суть *постоянные величины*, имеющие простое геометрическое или механическое значение.

Эти шесть величин с математической точки зрения представляют собой не что иное, как *произвольные постоянные интеграции* для системы (3), а формулы (4) представляют не что иное, как *общее* решение системы (3). Следовательно, функции x, y, z, определяемые формулами (4), *удовлетворяют* системе (3), каковы бы ни были численные значения постоянных Ω, i, ω, e, p и τ. Но очевидно, что функции x, y, z *не удовлетворяют* первоначальной системе (2), каковы бы ни были функции X, Y, Z, определяющие возмущающее ускорение планеты. Однако уравнения (4) и (5) чрезвычайно просты и позволяют вычислять координаты x, y, z для *любого* момента времени при помощи достаточно простых математических операций. Поэтому возникает мысль о том, нельзя ли сохранить формулы (3) так же и для первоначальной системы (2) или, иными словами, нельзя ли определить координаты планеты в возмущенном движении *теми же формулами*, которыми эти величины определяются в движении невозмущенном.

Совершенно ясно, что пока мы будем считать величины

$$\Omega, \quad i, \; \omega, \quad p, \quad e \quad \text{и} \quad \tau$$

постоянными, высказанное нами желание неосуществимо, так как *при любых постоянных значениях* Ω, i, ω, p, e и τ, функции x, y, z, определяемые формулами (4), не удовлетворяют системе (2). Но наше желание может быть вполне осуществлено, если мы условимся рассматривать Ω, i, ω, p, e и τ *как величины переменные*, как некоторые неопределенные функции от времени.

Действительно, формулы (4) мы можем рассматривать просто как формулы преобразования переменных x, y, z *в новые зависимые переменные* Ω, i, ω, p, e и τ. Если мы сумеем определить последние величины как явные функции времени и необходимого количества произвольных постоянных интеграции, то формулы (4) и (5) представят общее решение системы (2) и задача наша будет разрешена. Это определение возможно, так как уравнения (2) образуют систему шестого

9*

порядка, которая эквивалентна системе шести уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=\dot{x}, && \frac{dy}{dt}=\dot{y}, && \frac{dz}{dt}=\dot{z},\\ &\frac{d\dot{x}}{dt}=-\frac{\mu x}{r^3}+X(t,\ x,\ y,\ z,\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), && \frac{d\dot{y}}{dt}=-\frac{\mu y}{r^3}+Y, && \frac{d\dot{z}}{dt}=-\frac{\mu z}{r^3}+Z, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

в которой неизвестными функциями являются шесть величин

$$x,\quad y,\quad z,\quad \dot{x},\quad \dot{y},\quad \dot{z}. \qquad (7)$$

Осуществляя преобразование системы (6) при помощи формул (4) и (5), мы вводим вместо шести неизвестных функций (7), шесть новых неизвестных функций

$$\Omega,\quad i,\quad \omega,\quad e,\quad p,\quad \tau, \qquad (8)$$

для которых, в результате преобразования, получатся уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt}&=\chi_1(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau),\\ \frac{di}{dt}&=\chi_2(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau),\\ \frac{d\omega}{dt}&=\chi_3(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau),\\ \frac{de}{dt}&=\chi_4(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau),\\ \frac{dp}{dt}&=\chi_5(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau),\\ \frac{d\tau}{dt}&=\chi_6(t,\ \Omega,\ i,\ \omega,\ e,\ p,\ \tau), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

где правые части, т. е. функции χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5, и χ_6 будут *известными функциями* от указанных аргументов.

Заметим тут же, что задача о *точном* интегрировании системы (9) *ничуть не проще* задачи о точном интегрировании системы (2), и если система (9) не может быть полностью проинтегрирована, то система (2) также не может быть полностью интегрирована и обратно.

Если же мы поставим своей целью приближенное решение задачи, то мы с одинаковым успехом можем исходить как из системы (2), так и из эквивалентной ей системы (9) и с этой точки зрения, введение переменных (8) просто является *одним из многочисленных методов приближенного определения возмущенного движения планеты.*

Во многих случаях астрономической практики этот метод является предпочтительным, так как величины (8), вообще говоря, более привычны и удобны для астрономов, чем прямоугольные координаты и компоненты скорости. Поэтому мы рассмотрим этот метод во всех деталях.

§ 39. Эллиптические оскулирующие элементы. В главе четвертой мы показали, что тип невозмущенного движения однозначно определяется знаком величины

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}.$$

Если начальные данные таковы, что $h < 0$, то планета обладает эллиптическим движением; при $h = 0$, мы имеем параболическое, и при $h > 0$ — гиперболическое движение.

Аналогичную терминологию можно установить и для движения возмущенного, в котором только величина h уже не будет сохранять постоянного значения во все время движения. Мы будем говорить, что

планета[1]), движение которой определяется уравнениями (2), обладает движением эллиптического типа в промежутке, $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, если для всех значений t, содержащихся в этом промежутке, выполняется условие

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0. \tag{10}$$

Наоборот, мы будем говорить, что

планета[1]) обладает в промежутке $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ движением гиперболического типа, если в этом промежутке выполняется условие[2])

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} > 0.$$

Рассмотрим сначала движение эллиптического типа. Пусть t_0—какой-нибудь момент, содержащийся в промежутке $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$. Обозначим координаты и компоненты скорости планеты в этот момент через

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad \dot{x}_0, \quad \dot{y}_0, \quad \dot{z}_0.$$

Исходя из этих величин, мы можем вычислить эллиптические элементы

$$\Omega_0, \quad i_0, \quad a_0, \quad e_0, \quad \omega_0, \quad \tau_0. \tag{11}$$

Эти величины определяют некоторое эллиптическое движение, которое было бы истинным движением планеты по крайней мере в течение некоторого промежутка времени (t_0, t_1)[3]), если бы в этом промежутке возмущающая сила не действовала, т. е. если бы для всех значений t, удовлетворяющих условию $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, мы имели

$$X \equiv Y \equiv Z \equiv 0.$$

Допустим, что последние условия не выполняются, как бы ни была мала величина $t_1 - t_0$. Тогда истинное движение планеты для всякого

---

[1]) Относительно термина „планета" см. примечание на стр. 130.

[2]) Заметим, что промежуток $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ может быть в частности и бесконечности. Так, если условие $V^2 - \dfrac{2\mu}{r} < 0$ выполняется для всех значений t от $t = t_0$ до $t = +\infty$, то эллиптический тип движения сохраняется во все время движения.

[3]) Причем $t_0 < t_1 < \bar{t}_2$.

$t > t_0$ будет отличаться от эллиптического движения, и координаты планеты, вычисленные по формулам эллиптического движения с элементами (11) не будут совпадать со значениями функций, определенных из уравнений (2). Однако в момент t_0 координаты и компоненты скорости, вычисленные по формулам эллиптического движения с элементами (11), очевидно, *должны совпадать* с значениями этих же величин, полученными из интегралов уравнений (2). Иными словами, если мы вообразим *фиктивную*, воображаемую, планету, обладающую эллиптическим движением с элементами (11), то в начальный момент t_0 фиктивная и истинная планеты будут иметь одни и те же координаты и компоненты скорости. Следовательно,

траектория движения фиктивной планеты касается траектории движения истинной планеты.

Последнее следует из того, что касательная к траектории в любой момент времени совпадает с направлением скорости в этот момент, а значит, определяется числовыми значениями компонентов скорости. Кроме того, обе траектории, фиктивная и истинная, имеют общую точку (x_0, y_0, z_0).

Рассмотрим какой-нибудь другой момент времени $t_1 > t_0$ в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$. Пусть координаты и компоненты скорости действительной планеты в этот момент будут

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad \dot{x}_1, \quad \dot{y}_1, \quad \dot{z}_1.$$

Так как в момент t_1 условие (10) выполняется, то мы можем вычислить эллиптические элементы по тем же формулам, как и ранее, но исходя из других начальных данных. Пусть эти элементы будут

$$\Omega_1, \quad i_1, \quad \omega_1, \quad a_1, \quad e_1 \quad \text{и} \quad \tau_1. \tag{12}$$

Величины (12) опять определяют некоторое эллиптическое движение, которое было бы истинным движением планеты, если бы, начиная с момента t_1, возмущающая сила не действовала по крайней мере в течение некоторого промежутка времени. Рассматривая опять фиктивную планету, обладающую эллиптическим движением с элементами (12), мы установим так же, как и выше, что координаты и компоненты скорости истинной планеты и фиктивной, *совпадая для момента* $t = t_1$, отличаются одни от других во всякий другой момент времени. Фиктивная эллиптическая орбита *касается* в момент t_1 истинной орбиты.

Рассмотрим вообще конечный ряд последовательных моментов времени

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3, \; \ldots, \; t_k,$$

причем

$$\overline{t}_1 < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k < \overline{t}_2.$$

Так как условие (10) выполняется для каждого из этих моментов t_k, то для каждого момента t_k мы можем вычислить эллиптические элементы

$$\Omega_k, \quad i_k, \quad \omega_k, \quad a_k, \quad e_k, \quad \tau_k, \tag{12'}$$

исходя из значений координат и компонентов скорости

$$x_k, \quad y_k, \quad z_k, \quad \dot{x}_k, \quad \dot{y}_k, \quad \dot{z}_k$$

истинной планеты в момент $t = t_k$.

Каждая группа элементов (12′) определяет эллиптическое движение фиктивной планеты, которое было бы истинным, если бы, начиная с момента t_k, возмущающая сила не действовала по крайней мере в течение некоторого промежутка времени.

Действительная планета имеет те же координаты и компоненты скорости, как и фиктивная, соответствующая моменту t_k, и действительная орбита касается в момент t_k соответствующей фиктивной эллиптической орбиты. Эллиптические элементы

$$\Omega_k, \quad i_k, \quad \omega_k, \quad a_k, \quad e_k, \quad \tau_k,$$

$$\Omega_{k+1}, \quad i_{k+1}, \quad \omega_{k+1}, \quad a_{k+1}, \quad e_{k+1}, \quad \tau_{k+1}$$

двух фиктивных движений, соответствующих двум моментам времени t_k и t_{k+1}, конечно, отличаются друг от друга, но так как функции X, Y, Z по предположению непрерывны, то разности

$$\Omega_{k+1} - \Omega_k, \quad i_{k+1} - i_k, \quad \omega_{k+1} - \omega_k, \quad a_{k+1} - a_k, \quad e_{k+1} - e_k,$$

$$\tau_{k+1} - \tau_k$$

будут весьма малы, если разность $t_{k+1} - t_k$ также очень мала. Поэтому, увеличивая неограниченно число моментов t_k, так что разность между каждыми двумя соседними моментами стремится к нулю, мы придем в результате к шести функциям

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad a, \quad e, \quad \tau, \tag{13}$$

определенным в промежутке $(t_0, \overline{t}_2)$ и непрерывно изменяющимся в этом промежутке [1].

Эти соображения дают нам возможность рассматривать истинное движение планеты в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ как эллиптическое движение с непрерывно изменяющимися элементами и истинную орбиту планеты как огибающую семейства эллиптических орбит, элементы которых суть определенные функции времени и которые имеют общий фокус в Солнце.

Допустим, что величины (13), действительно, определены в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ и являются в этом промежутке *известными* функциями времени. Тогда положение планеты в любой момент времени t, заключающийся в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$, может быть определено по формулам эллиптического движения следующим образом.

[1] Точно такие же рассуждения можно провести и для промежутка $(\overline{t}_1, t_0)$, так что функции (14) можно считать определенными во всем промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$, в котором выполняется условие $V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0$.

Прежде всего вычисляем числовые значения величин (13) для момента t. Обозначим эти числовые значения соответственно через

$$\Omega(t),\quad i(t),\quad \omega(t),\quad a(t),\quad e(t),\quad \tau(t). \tag{13'}$$

С этими значениями вычислим среднее движение n и параметр p для этого же момента по формулам

$$n(t)=\frac{\sqrt{\mu}}{[a(t)]^{\frac{3}{2}}},\quad p(t)=a(t)\left[1-e^2(t)\right].$$

Затем определяем значение средней аномалии M в эллиптической орбите с элементами (13′) по формуле

$$M(t)=n(t)\left[t-\tau(t)\right],$$

после чего находим соответствующее значение эксцентрической аномалии $E(t)$ из уравнения

$$E(t)-e(t)\sin E(t)=M(t)$$

и истинную аномалию $v(t)$ по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{v(t)}{2}=\sqrt{\frac{1+e(t)}{1-e(t)}}\operatorname{tg}\frac{E(t)}{2}.$$

Зная $v(t)$, определяем радиус-вектор планеты $r(t)$ и аргумент широты $u(t)$

$$r(t)=\frac{p(t)}{1+e(t)\cos v(t)},$$

$$u(t)=v(t)+\omega(t),$$

после чего находим координаты x, y, z по формулам

$$x(t)=r(t)\left\{\cos u(t)\cos\Omega(t)-\sin u(t)\sin\Omega(t)\cos i(t)\right\},$$

$$y(t)=r(t)\left\{\cos u(t)\sin\Omega(t)+\sin u(t)\cos\Omega(t)\cos i(t)\right\},$$

$$z(t)=r(t)\sin u(t)\sin i(t).$$

Наконец, скорость $V(t)$ и ее проекции $V_2(t)$ и $V_p(t)$ на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости эллиптической орбиты с элементами (15) определятся по формулам

$$V^2(t)=\mu\left[\frac{2}{r(t)}-\frac{1}{a(t)}\right]$$

и

$$V_r(t)=\sqrt{\frac{\mu}{p(t)}}\,e(t)\sin v(t),\quad V_p(t)=\sqrt{\frac{\mu}{p(t)}}\left[1+e(t)\cos v(t)\right].$$

Напомним еще раз, что все эти формулы справедливы только для промежутка $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, т. е. для промежутка, в котором выполняется условие

$$V^2-\frac{2\mu}{r}<0.$$

Функции (13′) называются *оскулирующими элементами* истинного движения планеты, а непрерывно изменяющий свое положение и форму эллипс называется *оскулирующим эллипсом* истинной орбиты. Последнее название этот эллипс получил потому, что истинная орбита в каждый момент времени *касается* эллипса, соответствующего этому моменту [1]).

Для полного определения истинного движения планеты нам остается определить функции (13′). Эти функции определяются системой совместных уравнений (9), которые и должны быть прежде всего получены.

С принципиальной точки зрения уравнения (9) могут быть выведены из уравнений (2) или (6), но при произвольной возмущающей силе такой непосредственный вывод оказывается затруднительным, и мы получим искомые уравнения несколько иным, более удобным и скорым способом. Это будет сделано в следующем параграфе.

Теперь же заметим в заключение, что те же соображения, которые мы развили в настоящем параграфе для движения эллиптического типа, справедливы и для движения гиперболического типа с той только разницей, что в последнем случае истинная орбита будет огибающей семейства оскулирующих гипербол и положение планеты будет определяться по формулам гиперболического движения.

Наконец, все вышесказанное можно распространить и на движение параболического типа, под которым мы подразумеваем движение, для которого выполняется условие

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = 0$$

для всех значений t в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$.

Таким образом мы можем сказать вообще, что

всякое возмущенное движение можно рассматривать как движение невозмущенное, все элементы которого суть непрерывные функции времени. Истинная орбита планеты есть пространственная кривая, огибающая семейство кривых второго порядка, имеющих общий фокус в Солнце. Оскулирующая орбита есть эллипс, гипербола или парабола в зависимости от того, принадлежит ли возмущенное движение в промежутке времени $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу.

§ 40. Вывод диференциальных уравнений оскулирующих элементов. В предыдущем параграфе мы показали, что возмущенное движение планеты мы можем рассматривать как движение невозмущенное, элементы которого суть некоторые непрерывные функции времени. Наша задача заключается теперь в выводе диференциальных уравнений, которым должны удовлетворять эти неизвестные функции. Основанием для вывода указанных уравнений являются следующие общие соображения. Пусть

$$F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = c \tag{14}$$

[1]) Этот момент называется *моментом или эпохой оскуляции*.

есть какой-нибудь из первых интегралов невозмущенного движения. Тогда мы имеем тождество

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}X_0+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}Y_0+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}Z_0=0, \qquad (15)$$

где для сокращения положено

$$X_0=-\frac{\mu x}{r^3},\quad Y_0=-\frac{\mu y}{r^3},\quad Z_0=-\frac{\mu z}{r^3}.$$

Если же мы будем рассматривать в соотношении (14) x, y, z как функции, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения, то функция F уже не будет сохранять постоянного значения, и, вычисляя полную производную от обеих частей уравнения (14) по времени, мы найдем

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\\+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(X_0+X)+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(Y_0+Y)+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}(Z_0+Z).\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Но в момент t невозмущенное и возмущенное движения имеют одинаковые значения координат и компонентов скоростей. Поэтому в момент t величины $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}$ X_0, Y_0, Z_0, в формулах (15) и (16) имеют одинаковые числовые значения, вследствие чего мы получаем

$$\frac{dc}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}X+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}Y+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}Z. \qquad (16')$$

Эта формула дает правило, которое может быть сформулировано следующим образом:

Чтобы получить изменения оскулирующих элементов, нужно диференцировать по времени первые интегралы невозмущенного движения. В этом диференцировании время t и координаты x, y, z рассматриваются как постоянные, а производные от компонентов скорости заменяются компонентами возмущающего ускорения.

Применим полученное правило прежде всего к интегралам площадей, которые напишутся следующим образом:

$$c_1=y\dot{z}-z\dot{y},$$

$$c_2=z\dot{x}-x\dot{z},$$

$$c_3=x\dot{y}-y\dot{x}.$$

Диференцируя эти равенства по указанному правилу, мы получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt}&=yZ-zY,\\ \frac{dc_2}{dt}&=zX-xZ,\\ \frac{dc_3}{dt}&=xY-yX.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Правые части этих уравнений суть проекции на оси x, y и z момента возмущающего ускорения относительно Солнца; величины dc_1, dc_2, dc_3 суть диференциальные изменения по тем же осям момента скорости планеты относительно Солнца, а потому

диференциальное изменение момента скорости при переходе от одной оскуляции к оскуляции бесконечно близкой равно моменту возмущающего ускорения, умноженному на элемент времени dt.

Но величина момента скорости есть $c=\sqrt{\mu}\sqrt{p}$, и его направление определяется положением плоскости оскулирующей орбиты, т. е. углами i и Ω [1]). Поэтому, диференциальные изменения момента скорости обусловлены изменением его величины на $\sqrt{\mu}\;\;d\sqrt{p}$ и поворотами плоскости оскулирующей орбиты: на угол di около линии узлов и на угол $d\Omega$ около оси z. Вообразим систему прямоугольных осей координат, имеющих начало в центре тяжести Солнца; направим ось $O\xi$ этой системы к восходящему узлу оскулирующей орбиты на плоскости Oxy, ось $O\eta$ — в точку орбиты с аргументом широты $+90°$ и ось $O\zeta$ — по положительной нормали к плоскости оскулирующей орбиты. Тогда проекции вращений di и $d\Omega$ на эти оси будут соответственно равны

$$\begin{array}{ccc} di, & 0, & 0,\\ \sin i\,d\Omega, & \cos i\,d\Omega, & 0,\end{array}$$

и проекции на те же оси диференциального изменения момента скорости будут соответственно

$$\left.\begin{aligned}&+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\,d\Omega,\\ &-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\;di,\\ &+\sqrt{\mu}\;\;d\sqrt{p}\,.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Остается найти проекции на оси ξ, η, ζ момента возмущающего ускорения. Разложим для этого возмущающее ускорение на три слагающие S, T, W, где S есть проекция возмущающего ускорения на радиус-вектор планеты, T — на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты и W — на перпендикуляр к плоскости орбиты.

[1]) Вспомним, что момент скорости есть вектор, имеющий величину c и перпендикулярный к плоскости орбиты.

Тогда проекции возмущающего ускорения на оси ξ, η, ζ будут соответственно равны

$$r \sin u\, W, \qquad - r \cos u\, W, \qquad r T, \tag{19}$$

где u означает аргумент широты планеты в момент t. Приравнивая соответственно выражения (18) и (19), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}\,\sqrt{p}\, \sin i\, d\Omega &= r \sin u\, W\, dt, \\ -\sqrt{\mu}\,\sqrt{p}\, di &= -r \cos u\, W\, dt, \\ \sqrt{\mu}\, d\sqrt{p} &= r T\, dt, \end{aligned}$$

откуда без труда находим

$$\left.\begin{aligned} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} W_1 \sin u, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} W_1 \cos u, \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} &= 2 \frac{r}{p} T_1, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

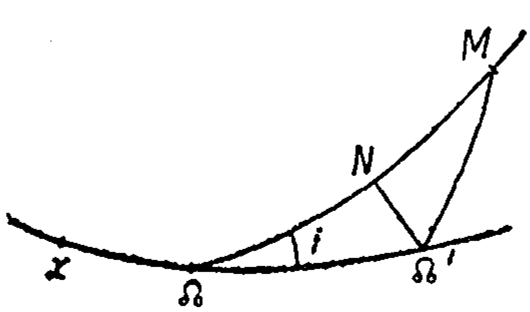
где положено

$$S_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, S, \quad T_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, T, \quad W_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, W. \tag{21}$$

Уравнения (20) определяют изменения наклонения, долготы восходящего узла и параметра орбиты.

Выведем теперь уравнения, определяющие эксцентриситет e и угловое расстояние перигелия от узла ω. Изменение углового расстояния перигелия от узла обусловлено, во-первых, поворотом линии апсид в плоскости орбиты и, во-вторых, поворотом самой плоскости. Так как при выводе производных от оскулирующих элементов мы не меняем координат планеты, то плоскость оскулирующего эллипса вращается около радиуса-вектора.

При заданном положении радиуса-вектора положение линии апсид в плоскости орбиты определяется углом между радиусом-вектором и направлением на перигелий орбиты, т. е. истинной аномалией планеты. По основному правилу мы не меняем координат эпохи, а потому бесконечно малое смещение линии апсид равно по величине и противоположно по знаку изменению истинной аномалии v. Иными словами, скорость вращения линии апсид в плоскости орбиты равна $-\frac{dv}{dt}$.



Черт. 11.

Чтобы определить изменение ω, вызванное поворотом плоскости орбиты около радиуса-вектора, представим сечения сферы произвольного радиуса, описанной из Солнца, плоскостью xy и плоскостью оскулирующей орбиты. На черт. 11 $x\Omega$ есть сечение сферы плоскостью xy,

ΩM — плоскостью орбиты в момент t, $\Omega' M$ — плоскостью орбиты в бесконечно близкий момент. Откладывая дугу $MN = M\Omega'$, получаем прямоугольный сферический треугольник $\Omega N \Omega'$, в котором $\Omega\Omega' = d\Omega$, $\Omega N = -d\omega$, а следовательно,

$$d\omega = -\cos i \, d\Omega,$$

и полная скорость изменения ω определится формулой

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dv}{dt} - \cos i \, \frac{d\Omega}{dt}. \tag{22}$$

Так как выражение для $\frac{d\Omega}{dt}$ нами уже получено, то займемся теперь совместным определением $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$. Из формул § 29 мы имеем уравнения

$$e \sin v = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, V_r, \qquad e \cos v = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, V_p - 1,$$

которые, являясь соотношениями между переменными величинами и произвольными постоянными, также представляют собой интегралы невозмущенного движения.

Диференцируя эти интегралы по t, мы находим

$$\left.\begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + \cos v\, e \frac{dv}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{dV_r}{dt} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, V_r \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}, \\ \cos v \frac{de}{dt} - \sin v\, e \frac{dv}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{dV_p}{dt} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, V_p \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Чтобы определить $\frac{dV_r}{dt}$ и $\frac{dV_p}{dt}$, обозначим через V_l проекцию скорости на некоторую ось Ol, проходящую через Солнце. Обозначая через α, β, γ направляющие косинусы прямой Ol, мы имеем

$$V_l = \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z},$$

откуда получаем

$$\frac{dV_l}{dt} = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + \left(\dot{x}\frac{d\alpha}{dt} + \dot{y}\frac{d\beta}{dt} + \dot{z}\frac{d\gamma}{dt}\right),$$

где выражение $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$, очевидно, представляет проекцию возмущающего ускорения на ось Ol. Направим сначала ось Ol по радиусу-вектору планеты. По основному правилу направление радиуса-вектора при диференцировании элементов не меняется, а потому $d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$, и мы имеем

$$\frac{dV_r}{dt} = S.$$

Направим теперь ось Ol по прямой, перпендикулярной к радиусу-вектору в плоскости орбиты. Величины $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ в этом случае мы можем рассматривать как проекции на оси x, y, z некоторого вектора $d\sigma$, который представляет смещение конца другого вектора, равного единице и отложенного от центра Солнца по прямой Ol; так как перемещение оси Ol обусловлено поворотом плоскости оскулирующей орбиты около радиуса-вектора, то вектор $d\sigma$ перпендикулярен к этой плоскости, а поэтому

$$\dot{x}\,d\alpha + \dot{y}\,d\beta + \dot{z}\,d\gamma = 0$$

и

$$\frac{dV_p}{dt} = T.$$

Имея в виду выражения для V_r, V_p и их производных, мы напишем уравнения (22) в следующем виде:

$$\sin v\frac{de}{dt} + \cos v\, e\,\frac{dv}{dt} = S_1 + \sin v\, e\,\frac{r}{p}\,T_1,$$

$$\cos v\frac{de}{dt} - \sin v\, e\,\frac{dv}{dt} = T_1\left(1 + \frac{r}{p}\right) + \cos v\, e\,\frac{r}{p}\,T_1.$$

Остается разрешить эти уравнения относительно $\frac{de}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$. Помножая первое уравнение на $-\cos v$, второе на $+\sin v$ и складывая, находим

$$-e\,\frac{dv}{dt} = -S_1\cos v + \left(1 + \frac{r}{p}\right)T_1\sin v.$$

Помножая первое уравнение на $\sin v$, второе на $\cos v$ и складывая, получим

$$\frac{de}{dt} = S_1\sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right)T_1\cos v + e\frac{r}{p}\,T_1. \qquad (24)$$

Уравнение (24) представляет изменение эксцентриситета, а первое уравнение с помощью формул (22) и (20) дает уравнение

$$e\,\frac{d\omega}{dt} = -S_1\cos v + \left(1 + \frac{r}{p}\right)T_1\sin v - \frac{r}{p}\,e\operatorname{ctg} i\, W_1\sin u, \qquad (25)$$

которое определяет изменение углового расстояния перигелия от узла.

Таким образом нами получены уже почти все нужные нам уравнения. Остается еще найти уравнение, определяющее последний из эллиптических элементов, а именно время прохождения через перигелий τ или среднюю аномалию в эпоху M_0, или среднюю долготу в эпоху ε. Так как от каждой из этих величин можно легко перейти к любой другой, то мы займемся выводом производной только для момента прохождения через перигелий. Это уравнение мы получим сначала в общем виде, который будет иметь место для любого типа движения. Для этого рассмотрим последний интеграл невозмущенного движения, устанавливающий связь между истинной аномалией планеты и временем. Этот интеграл (см. главу четвертую) может быть написан в виде

$$\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{3}{2}}(t-\tau) = \int\limits_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = I. \qquad (26)$$

Диференцируя уравнение (27), следуя основному правилу, изложенному в начале параграфа, мы получаем

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{5}{2}}(t-\tau)\frac{dp}{dt}-\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=\frac{dI}{dt},$$

откуда выводим

$$\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{5}{2}}(t-\tau)\frac{dp}{dt}-\frac{dI}{dt}. \qquad (27)$$

Теперь нужно найти производную от интеграла I. Но I зависит от времени двояким образом: во-первых, через посредство v, а во-вторых, через эксцентриситет e. Поэтому

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial e}\;\frac{de}{dt}+\frac{\partial I}{\partial v}\;\frac{dv}{dt}. \qquad (28)$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial I}{\partial e}$ и $\frac{\partial I}{\partial v}$, мы находим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial e}=-2\int\limits_0^v\frac{\cos v\,dv}{(1+e\cos v)^3}=-2\int\limits_0^v\frac{r^3}{p^3}\cos v\,dv=-I_1,\\
&\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{1}{(1+e\cos v)^2}=\frac{r^2}{p^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Имея в виду эти выражения, мы напишем уравнение (27) в форме

$$\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{5}{2}}(t-\tau)\frac{dp}{dt}+I_1\frac{de}{dt}-\frac{r^2}{p^2}\,\frac{dv}{dt}.$$

Подставляя в левую часть полученного уравнения вместо производных $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$ их выражения, мы найдем

$$\sqrt{\mu}\,e\,p^{-\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=-3\sqrt{\mu}\,p^{-\frac{3}{2}}(t-\tau)\,e\,\frac{r}{p}T_1+eI_1\left[S_1\sin v+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\cos v+e\,\frac{r}{p}\,T_1\right]+\frac{r^2}{p^2}\left[-S_1\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\sin v\right],$$

откуда, полагая

$$N=\frac{p^2}{r^2}\,I_1, \qquad (30)$$

и упрощая, получим

$$\sqrt{\mu}\,e\,p^{-\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=-(\cos v-e\sin v\,N)\frac{r^2}{p^2}S_1+$$
$$+\left\{-3\sqrt{\mu}\,e\,p^{-\frac{3}{2}}(t-\tau)\,\frac{p}{r}+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)e\cos v+\right.\right.$$
$$\left.\left.+e^2\,\frac{r}{p}\right]N+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}\frac{r^2}{p^2}\,T_1. \qquad (31)$$

Правую часть последнего уравнения можно значительно упростить. Для этого рассмотрим производную по v от выражения $\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v$. Мы имеем

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}=\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\sin^2 v\,\frac{r^2}{p^2}\left(1+2\,\frac{r}{p}\right).$$

Подставив в правую часть последнего равенства $1-\cos^2 v$ вместо $\sin^2 v$ и имея в виду тождество

$$e\cos v\,\frac{r^2}{p^2}\left(1+2\,\frac{r}{p}\right)\equiv\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)-2\frac{r^3}{p^3},$$

мы получим

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}=e\frac{r^2}{p^2}\left(1+2\,\frac{r}{p}\right)+2\frac{r^3}{p^3}\cos v.$$

Но

$$1+2\frac{r}{p}=3-2\,\frac{r}{p}\,e\cos v,$$

вследствие чего имеем

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}=3e\frac{r^2}{p^2}+2(1-e^2)\,\frac{r^3}{p^3}\cos v,$$

откуда, интегрируя в пределах от 0 до v, находим

$$\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v=3e\int\limits_0^v\frac{r^2}{p^2}\,dv+2(1-e^2)\int\limits_0^v\frac{r^3}{p^3}\cos v\,dv,$$

что с помощью формул (27), (29) и (30) напишется в виде

$$\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v=3\sqrt{\mu}\;e\,p^{-\frac{3}{2}}(t-\tau)+(1-e^2)\,\frac{r^2}{p^2}\,N,$$

в силу чего коэфициент при $\frac{r^2}{p^2}\,T_1$ в уравнении (31) оказывается равным

$$-\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v+(1-e^2)\,\frac{r}{p}\,N+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v+$$
$$+\left(1+\frac{r}{p}\right)e\cos v N+e^2\,\frac{r}{p}\,N$$

или

$$N\left[\frac{r}{p}+\left(1+\frac{r}{p}\right)e\cos v\right]=\frac{p}{r}N.$$

Таким образом уравнение (31) принимает вид

$$\sqrt{\mu}\,e\,p^{\frac{3}{2}}\frac{d\tau}{dt}=\frac{r^2}{p^2}\left\{-(\cos v-e\sin v\,N)\,S_1+\frac{p}{r}\,N\,T_1\right\}. \qquad (32)$$

Это и есть последнее уравнение из системы уравнений, определяющих изменения оскулирующих элементов возмущенного движения. Заметим, что все полученные нами уравнения одинаковы для движения любого типа.

§ 41. Постановка задачи об определении оскулирующих элементов. Теперь мы можем полностью выписать систему диференциальных уравнений оскулирующих элементов, которую мы вывели в § 38 в общем виде. Указанная система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i} W_1, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} W_1 \cos u, \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{e} S_1 \cos v + \frac{1}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right) T_1 \sin v - \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i\, W_1 \sin u, \\
\frac{de}{dt} &= S_1 \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T_1 \cos v + e\frac{r}{p} T_1, \\
\frac{dp}{dt} &= 2rT_1, \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{p^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{\mu}}\left[-(\cos v - e \sin v\, N) S_1 + \frac{p}{r} N T_1\right]\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

где

$$S_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, S, \quad T_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, T, \quad W_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, W,$$

$$u = \omega + v, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

$$N = 2\frac{p^2}{r^2}\int_0^v \frac{r^3}{p^3}\cos v\, dv$$

и v связано с t уравнением

$$t - \tau = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}.$$

Компоненты возмущающего ускорения S, T и W являются вообще функциями от t, x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и поэтому должны быть выражены по формулам невозмущенного движения через оскулирующие элементы Ω, i, ω, e, p и τ. Тогда правые части уравнений (33) будут *известными* функциями от времени и искомых функций Ω, i, ω, e, p и τ, и наша задача будет заключаться в интегрировании системы шести совместных уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями.

Допустим, что нам удалось проинтегрировать эти уравнения. Тогда мы получим оскулирующие элементы как функции времени и шести произвольных постоянных, за которые можно принять значения оскулирующих элементов в начальный момент времени $t = t_0$. Обозначая эти величины через

$$\Omega_0, \quad i_0, \quad \omega_0, \quad e_0, \quad p_0 \text{ и } \tau_0,$$

мы представим общее решение системы (33) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \varphi_1(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0), \\ i &= \varphi_2(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0), \\ \omega &= \varphi_3(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0), \\ e &= \varphi_4(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0), \\ p &= \varphi_5(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0), \\ \tau &= \varphi_6(t,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ e_0,\ p_0,\ \tau_0). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Зная функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 и φ_6, мы можем установить и общие законы возмущенного движения и вычислить положение планеты и ее скорость для любого момента времени. Последнее производится следующим образом. Пусть нам нужно определить положение планеты для момента $t = t_1$. Полагая в формулах (34) $t = t_1$, мы получим численные значения оскулирующих элементов для этого момента, после чего положение и скорость определяются по формулам эллиптического движения, если соответствующее моменту t_1 значение эксцентриситета e оказывается меньше единицы, — по формулам параболического движения, если $e = 1$, и — по формулам гиперболического движения, если $e > 1$.

Уравнения (33) также определяют возмущенное движение, как и уравнение (2), и имеют силу для любого типа движения. Однако, если известно, что в некотором промежутке времени $(\overline{t_1},\ \overline{t_2})$ возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу, то уравнение (33) удобнее несколько преобразовать, вводя вместо параметра p большую полуось эллиптической орбиты a, а вместо величины τ — среднюю долготу в эпоху ε. Выполнение этих преобразований не представляет никакого затруднения. Действительно, мы имеем для эллиптического движения

$$p = a(1 - e^2),$$

откуда диференцированием находим

$$\frac{dp}{dt} = (1 - e^2)\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}.$$

Определяя отсюда $\frac{da}{dt}$, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{p}\frac{dp}{dt} + \frac{2a^2e}{p}\frac{de}{dt}.$$

Это соотношение в силу уравнений (33) приводится к виду

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2e\sin v}{p}S_1 + \frac{2a^2}{r}T_1. \quad (35)$$

Вместо a можно ввести также в качестве неизвестной функции среднее движение n по формуле

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

откуда диференцированием находим уравнение для n

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3\sqrt{\mu}\,e\sin v}{p\sqrt{a}}S_1 - \frac{3\sqrt{\mu}}{2\sqrt{a}}T_1. \quad (36)$$

Найдем еще уравнение, определяющее долготу перигелия $\bar{\omega}$, которой можно заменить величину ω. Мы имеем

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt},$$

вследствие чего с помощью уравнений (33) находим

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = -\frac{1}{e} S_1 \cos v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T_1 \sin v + e \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{r}{p} W_1 \sin u. \tag{37}$$

Теперь, диференцируя формулу

$$\varepsilon = \bar{\omega} + M_0 = \bar{\omega} + n(t_0 - \tau),$$

мы получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} + (t_0 - \tau)\frac{dn}{dt} - n\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{\varepsilon - \bar{\omega}}{n}\frac{dn}{dt} - n\frac{d\tau}{dt}.$$

Подставляя сюда вместо производных $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$ и $\frac{d\tau}{dt}$ их выражения, мы получим уравнение для определения величины ε. Таким образом движение эллиптического типа может быть определено в промежутке $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i} W_1, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} W_1 \cos u, \\
\frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -\frac{1}{e} S_1 \cos v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T_1 \sin v + e \operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{r}{p} W_1 \sin u, \\
\frac{de}{dt} &= S_1 \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T_1 \cos v + e\frac{r}{p} T_1, \\
\frac{da}{dt} &= \frac{2a^2 e \sin v}{p} S_1 + \frac{2a^2}{r} T_1, \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{\varepsilon - \bar{\omega}}{n}\frac{dn}{dt} - n\frac{d\tau}{dt},
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $\frac{dn}{dt}$ и $\frac{d\tau}{dt}$ определяются вышеприведенными формулами. Если возмущающее ускорение, а следовательно, и величины S_1, T_1, W_1 не зависят явно от времени, то удобнее преобразовать уравнения (38), вводя вместо независимой переменной t новую независимую переменную v с помощью формулы

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c = \sqrt{\mu p}.$$

Обозначая какой-либо из элементов буквой A, мы получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\frac{dA}{dv}.$$

С помощью последней формулы преобразованные уравнения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dv} &= \frac{r^3}{p\sqrt{\mu p}}\frac{\sin u}{\sin i} W_1,\\
\frac{di}{dv} &= \frac{r^3}{p\sqrt{\mu p}}\cos u\, W_1,\\
\frac{d\overline{\omega}}{dv} &= \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\Big[-\frac{1}{e}S_1\cos v + \left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\sin v +\\
&\qquad + e\operatorname{tg}\frac{i}{2}\,\frac{r}{p}\,W_1\sin u\Big],\\
\frac{de}{dv} &= \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\left[S_1\sin v + \left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\cos v + e\,\frac{r}{p}\,T_1\right],\\
\frac{da}{dv} &= \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}\left[\frac{2a^2 e\sin v}{p}S_1 + \frac{2a^2}{r}T_1\right],\\
\frac{d\varepsilon}{dv} &= \frac{d\overline{\omega}}{dv} + \frac{\varepsilon-\overline{\omega}}{n}\frac{dn}{dv} - n\frac{d\tau}{dv}.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Интегрируя эту систему, мы получим эллиптические оскулирующие элементы Ω, i, $\overline{\omega}$, e, a и ε как функции переменной v и начальных значений Ω_0, i_0, $\overline{\omega}$, e_0, a_0 и ε_0. Чтобы перейти к t, остается только определить v из уравнения

$$t-\tau = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}.$$

§ 42. Некоторые примеры возмущенного движения. Уравнения, определяющие изменения оскулирующих элементов, полученные нами в предыдущих параграфах, имеют силу при любом характере возмущающей силы. Поэтому прежде чем применять эти уравнения к основной задаче небесной механики, являющейся главным содержанием нашей книги, мы рассмотрим некоторые примеры более общего характера.

а) Случай наличия центральной возмущающей силы. Допустим, что возмущающая сила всегда направлена по радиусу-вектору планеты. Тогда, очевидно,

$$T = W = 0,$$

а S есть некоторая известная функция от t, r и $\frac{dr}{dt}$. Уравнения (33) в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt} = 0, && \frac{de}{dt} = S_1\sin v,\\
&\frac{di}{dt} = 0, && \frac{dp}{dt} = 0,\\
&\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{e}S_1\cos v, && \frac{d\tau}{dt} = -\frac{p^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{\mu}}(\cos v - e\sin v\, N)\, S_1\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

откуда немедленно находим

$$\Omega = \Omega_0 = \text{const}, \quad i = i_0 = \text{const}, \quad p = p_0 = \text{const}. \tag{41}$$

Первые два из этих равенств показывают, что положение плоскости оскулирующей орбиты не изменяется с течением времени, или, иными словами, что возмущенное движение планеты происходит в неизменной плоскости. Последнее из равенств показывает, что параметр оскулирующей орбиты также не изменяется с течением времени. С математической точки зрения равенства (41) представляют три первые интеграла возмущенного движения. Нетрудно сообразить, что эти интегралы суть такие же интегралы площадей, как и в случае невозмущенного движения.

Система (40) приводится, очевидно, к значительно более простой системе третьего порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{e} S_1 \cos v, \\ \frac{de}{dt} &= S_1 \sin v, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{r^2}{e\sqrt{p_0\mu}} (\cos v - e \sin v\, N) S_1, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

вследствие чего исследование возмущенного движения несколько упрощается.

Случай наличия центральной возмущающей силы может встретиться в различных астрономических задачах. Пусть, например, исследуется задача о движении материальной точки в экваториальной плоскости эллипсоида вращения малого сжатия. Если M — масса эллипсоида, b — его полярная полуось и ε — эксцентриситет меридионального сечения, то с точностью до малых второго порядка потенциал эллипсоида представится формулой

$$U = \frac{M}{r} + \frac{Mb^2\varepsilon^2}{10} \frac{1}{r^3}.$$

Действующая сила будет

$$F = \frac{dU}{dr} = -\frac{M}{r^2} - \frac{3Mb^2\varepsilon^2}{10} \frac{1}{r^4}.$$

Поэтому, возмущающее ускорение всегда направлено по радиусу-вектору к центру эллипсоида и

$$S = -\frac{\alpha}{r^4},$$

где α — постоянная.

Другой интересный случай центральной возмущающей силы представляет задача о движении планеты в предположении, что масса Солнца [1]) изменяется с течением времени. Обозначая массу Солнца через $M(t)$, мы можем написать ускорение планеты в виде

$$-\frac{M(t)}{r^2},$$

[1]) Напоминаем читателю, что термин „Солнце" мы употребляем только для определенности и что наше „Солнце" может представлять собой любое притягивающее тело.

или, обозначая через M_0 некоторую постоянную, в виде

$$-\frac{M_0}{r^2}+\frac{M_0-M(t)}{r^2}.$$

Тогда очевидно, что

$$S=\frac{M_0-M(t)}{r^2},$$

и для анализа движения мы можем воспользоваться уравнениями (42).

Третий пример центральной возмущающей силы мы получим, представляя, что Солнце окружено атмосферой, обладающей сферическим распределением плотностей, и что эта атмосфера оказывает притягивательное действие на движущуюся в ней материальную точку. Если $M(r)$ есть масса атмосферы, заключенная в шаре радиуса r, то возмущающее ускорение определится формулой

$$S=-\frac{M(r)}{r^2}.$$

Если $\varrho(r)$ есть плотность атмосферы, то

$$M(r)=4\pi\int\limits_0^r r^2\varrho(r)\,dr,$$

и S есть известная функция от r.

b) Случай наличия возмущающей силы сопротивления. Допустим, что Солнце окружено атмосферой, плотность которой ϱ в каждой точке пространства (или по крайней мере некоторой области пространства) есть определенная функция этой точки. Пренебрегая для простоты действием притяжения атмосферы, рассмотрим только эффект сопротивления, которое она оказывает на движущуюся внутри нее материальную точку. Из механики известно, что сила сопротивления среды направлена всегда по касательной к траектории движущейся точки в сторону, противоположную движению. Следовательно, составляющая возмущающей силы по перпендикуляру к плоскости орбиты равна нулю, а поэтому так же, как и в случае центральной возмущающей силы, мы имеем

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const},$$

что показывает, что возмущенное движение совершается в неизменной плоскости. Система (33) приведется поэтому к системе четвертого порядка и напишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt}&=-\frac{1}{e}S_1\cos v+\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\sin v,\\
\frac{de}{dt}&=S_1\sin v+\left(1+\frac{r}{p}\right)T_1\cos v+e\,\frac{r}{p}T_1,\\
\frac{dp}{dt}&=2rT_1,\\
\frac{d\tau}{dt}&=\frac{p^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{\mu}}\left[-(\cos v-e\sin v\,N)S_1+\frac{p}{r}N\,T_1\right]\frac{r^2}{p^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

Остается определить S_1 и T_1 или S и T. Пусть R — величина силы сопротивления. R зависит каким-то образом от плотности ϱ среды и скорости V движущейся точки и является существенно положительной функцией этих величин. Обозначим через α угол, образуемый касательной с радиусом-вектором. Тогда будем иметь

$$S = -R\cos\alpha, \qquad T = -R\sin\alpha$$

или

$$S = -R\frac{e\sin v}{V}, \quad T = -R\frac{1+e\cos v}{V} = -\frac{R}{V}\frac{p}{r}.$$

Мы видим, что $T<0$; а это значит, что и $T_1<0$. Уравнение $\frac{dp}{dt} = 2rT_1$ показывает, что параметр оскулирующей орбиты есть всегда монотонно убывающая функция времени.

с) Случай наличия консервативной возмущающей силы. Допустим, что возмущающая сила зависит только от положения планеты, т. е. только от ее координат x, y, z. Кроме того, предположим, что компоненты X, Y, Z возмущающего ускорения по осям x, y, z суть частные производные от одной и той же функции $R(x, y, z)$, т. е. что

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Так как в возмущенном движении x, y, z суть функции элементов оскулирующей орбиты, то R можно рассматривать так же как функцию этих величин, и компоненты возмущающего ускорения S, T и W можно выразить через частные производные от функции R по этим элементам. Предположим, что возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу и определим его эллиптическими оскулирующими элементами

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \bar\omega, \quad \varepsilon,$$

которые в возмущенном движении будут некоторыми функциями времени.

Для рассматриваемого нами случая консервативной возмущающей силы эти элементы определятся следующей системой диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \bar\omega},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{1-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \bar\omega} -\\
&\quad - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\bar\omega}{dt} &= \frac{1-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Мы не останавливаемся на выводе этих уравнений, так как случай консервативной возмущающей силы будет рассмотрен нами подробно в главе о канонических уравнениях, где и будут выведены уравнения, аналогичные уравнениям (44).

§ 43. Один общий прием интегрирования диференциальных уравнений возмущенного движения. Рассмотрим теперь один достаточно общий и достаточно часто применяющийся прием интегрирования уравнений возмущенного движения при помощи бесконечных рядов. Говоря об уравнениях возмущенного движения, можно подразумевать либо уравнения (2), определяющие прямоугольные координаты планеты, либо равносильные им уравнения (33), определяющие оскулирующие элементы как функции времени. С принципиальной точки зрения нет никаких оснований предпочитать одну систему другой, однако для приложений оказывается более выгодным и удобным определять возмущенное движение именно уравнениями (33), а поэтому мы их только и рассмотрим.

Как уже было указано ранее, правые части уравнений (33) суть вполне определенные функции времени и величин Ω, i, ω, e, p и τ. Мы допустим, сверх того, что эти функции зависят еще от некоторого малого параметра μ и обращаются в нуль при $\mu=0$. С физической точки зрения сделанное допущение равносильно предположению, что возмущающая сила вообще весьма мала по сравнению с основной силой притяжения планеты Солнцем. Введенный нами параметр μ определяет порядок возмущающей силы и может иметь различное физическое значение в зависимости от условий задачи.

Напишем уравнения возмущенного движения в виде (9) с указанием явной зависимости функций $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_6$ от параметра μ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \chi_1(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu),\\
\frac{di}{dt} &= \chi_2(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu),\\
\frac{d\omega}{dt} &= \chi_3(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu),\\
\frac{de}{dt} &= \chi_4(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu),\\
\frac{dp}{dt} &= \chi_5(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu),\\
\frac{d\tau}{dt} &= \chi_6(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu).
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Мы будем предполагать характер возмущающей силы таким, чтобы функции χ_i $(i=1, 2, \ldots 6)$ удовлетворяли следующим условиям:

1) $\chi_i(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; 0)$ должно быть тождественно равно нулю.

2) Функции χ_i должны быть непрерывными функциями от t в некотором промежутке $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$, включающем в себя начальный момент t_0.

3) Функции χ_i должны быть аналитическими функциями переменных μ, Ω, i, ω, e, p и τ для всех значений этих величин, близких к системе значений

$$0, \quad \Omega_0, \quad i_0, \quad \omega_0, \quad e_0, \quad p_0, \quad \tau_0$$

и для всех значений времени, заключающихся в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$. Величины Ω_0, $i_0, \ldots$ суть начальные значения элементов Ω, $i, \ldots$

При выполнении указанных условий решение системы (45) может быть определено рядами вида

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \ldots + \mu^n\Omega_n + \ldots \\ i &= i_0 + \mu i_1 + \mu^2 i_2 + \ldots + \mu^n i_n + \ldots \\ \omega &= \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \ldots + \mu^n\omega_n + \ldots \\ e &= e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2 + \ldots + \mu^n e_n + \ldots \\ p &= p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \ldots + \mu^n p_n + \ldots \\ \tau &= \tau_0 + \mu\tau_1 + \mu^2\tau_2 + \ldots + \mu^n\tau_n + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

сходящимися абсолютно и равномерно для всех значений времени в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$ и для всех достаточно малых значений $|\mu|$. Коэфициенты рядов (46), т. е. величины Ω_1, i_1, ω_1, e_1, p_1, τ_1, Ω_2, $i_2, \ldots$ суть непрерывные функции времени в промежутке $(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$, обращающиеся в нуль при $t = t_0$. Не останавливаясь на доказательстве сходимости рядов (46), укажем только, как могут быть определены их коэфициенты.

Из выражений (45) мы видим, что

$$\Omega_1 = \left(\frac{d\Omega}{d\mu}\right)_{\mu=0}, \quad i_1 = \left(\frac{di}{d\mu}\right)_{\mu=0}, \ldots, \quad \tau_1 = \left(\frac{d\tau}{d\mu}\right)_{\mu=0},$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Omega}{d\mu^2}\right)_{\mu=0}, \quad i_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 i}{d\mu^2}\right)_{\mu=0}, \ldots, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\tau}{d\mu^2}\right)_{\mu=0},$$

. . . .

. . . .

$$\Omega_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\Omega}{d\mu^n}\right)_{\mu=0}, \quad i_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n i}{d\mu^n}\right)_{\mu=0}, \ldots, \quad \tau_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\tau}{d\mu^n}\right)_{\mu=0},$$

. . . .

Но диференцируя уравнения (45) по μ в предположении, что элементы определяются рядами (46), мы находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}\left[\frac{d\Omega}{dt}\right] &= \frac{\partial\chi_1}{\partial\mu} + \frac{\partial\chi_1}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu} + \ldots + \frac{\partial\chi_1}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}, \\ \frac{d}{d\mu}\left[\frac{di}{dt}\right] &= \frac{\partial\chi_2}{\partial\mu} + \frac{\partial\chi_2}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu} + \ldots + \frac{\partial\chi_2}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d}{d\mu}\left[\frac{d\tau}{dt}\right] &= \frac{\partial\chi_6}{\partial\mu} + \frac{\partial\chi_6}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu} + \ldots + \frac{\partial\chi_6}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Полагая в этих равенствах $\mu=0$ и имея в виду выражения (46), мы находим без труда следующие уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dt} &= \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial\Omega}\right)_0 \Omega_1 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial i}\right)_0 i_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial\tau}\right)_0 \tau_1,\\
\frac{di_1}{dt} &= \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\Omega}\right)_0 \Omega_1 + \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial i}\right)_0 i_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\tau}\right)_0 \tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\tau_1}{dt} &= \left(\frac{\partial\chi_6}{\partial\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial\chi_6}{\partial\Omega}\right)_0 \Omega_1 + \left(\frac{\partial\chi_6}{\partial i}\right)_0 i_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\chi_6}{\partial\tau}\right)_0 \tau_1,
\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

где нулевые значки указывают на то, что после диференцирований нужно положить

$$\mu=0,\quad \Omega=\Omega_0,\quad i=i_0,\quad \omega=\omega_0,\quad e=e_0,\quad p=p_0,\quad \tau=\tau_0.$$

Система (48) представляет собой систему шести линейных неоднородных уравнений с неизвестными функциями Ω_1, i_1, ω_1, e_1, p_1 и τ_1, интегрируя которую мы получаем коэфициенты при первой степени μ в рядах (46).

Заметим, что уравнения (48) значительно упрощаются, если функции $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_6$ содержат параметр μ множителем. Действительно, пусть

$$\chi_i(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu) = \mu\bar{\chi}_i(t, \Omega, i, \omega, e, p, \tau; \mu) \quad (i=1, 2, \ldots, 6). \quad (49)$$

Тогда

$$\frac{\partial\chi_i}{\partial\mu} = \bar{\chi}_i + \mu\frac{\partial\bar{\chi}_i}{\partial\mu},\quad \frac{\partial\chi_i}{\partial\Omega} = \mu\frac{\partial\bar{\chi}_i}{\partial\Omega},\ \ldots,\ \frac{\partial\chi_i}{\partial\tau} = \mu\frac{\partial\bar{\chi}_i}{\partial\tau},$$

и полагая в этих равенствах $\mu=0$, мы найдем

$$\left(\frac{\partial\chi_i}{\partial\mu}\right)_0 = \bar{\chi}_i(t, \Omega_0, i_0, \omega_0, e_0, p_0, \tau_0; 0);\quad \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial\Omega}\right)_0 = \ldots = \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial\tau}\right)_0 = 0.$$

Поэтому правые части уравнений (48) совершенно не будут содержать неизвестных функций, а величины $\Omega_1, i_1, \ldots, \tau_1$ найдутся простыми квадратурами и определятся следующими формулами:

$$\Omega_1 = \int_{t_0}^{t} \bar{\chi}_1(t, \Omega_0, i_0, \omega_0, e_0, p_0, \tau_0; 0)\,dt,$$

$$i_1 = \int_{t_0}^{t} \bar{\chi}_2(t, \Omega_0, i_0, \omega_0, e_0, p_0, \tau_0; 0)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tau_1 = \int_{t_0}^{t} \bar{\chi}_6(t, \Omega_0, i_0, \omega_0, e_0, p_0, \tau_0; 0)\,dt.$$

Таким образом коэфициенты при первой степени μ в рядах (46) можно считать известными функциями времени. Если параметр μ очень мал по абсолютной величине, то часто в рядах (46) можно бывает отбросить все члены, начиная с третьих, и получить таким образом первое приближение для функций Ω, i, ω, e, p, τ в виде выражений

$$\Omega=\Omega_0+\mu\Omega_1,\quad i=i_0+\mu i_1,\quad \omega=\omega_0+\mu\omega_1,$$
$$e=e_0+\mu e_1,\quad p=p_0+\mu p_1,\quad \tau=\tau_0+\mu\tau_1,$$

которые представят элементы оскулирующей орбиты с достаточной точностью по крайней мере для значений t, достаточно близких к начальному моменту t_0.

Чтобы получить второе, более точное приближение, нужно определить коэфициенты Ω_2, i_2, ω_2, e_2, p_2, τ_2 при второй степени μ в рядах (46). Для этого диференцируем уравнения (47) по μ, причем для простоты предположим, что функции χ_i имеют вид, определяемый формулами (49). Мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\mu^2}\left[\frac{d\Omega}{dt}\right] &= 2\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial^2\bar\chi_1}{\partial\mu^2}+\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu}+\ldots+\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}+\\
&+\mu\frac{\partial^2\bar\chi_1}{\partial\mu\,\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu}+\ldots+\mu\frac{\partial^2\bar\chi_1}{\partial\mu\,\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}+\mu\frac{d\bar\chi_1}{d\Omega}\frac{d^2\Omega}{d\mu^2}+\ldots+\\
&+\mu\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\tau}\frac{d^2\tau}{d\mu^2}+\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{d\mu}+\ldots+\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\mu}+\\
&+\mu\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\Omega}\right]\frac{\partial\Omega}{d\mu}+\ldots+\mu\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\tau}\right]\frac{d\tau}{d\mu},\\
\frac{d^2}{d\mu^2}\left[\frac{di}{dt}\right] &= 2\frac{\partial\bar\chi_2}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial^2\bar\chi_2}{\partial\mu^2}+\ldots+\mu\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\partial\bar\chi_2}{\partial\tau}\right]\frac{d\tau}{d\mu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d^2}{d\mu^2}\left[\frac{d\tau}{dt}\right] &= 2\frac{\partial\bar\chi_6}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial^2\bar\chi_6}{\partial\mu^2}+\ldots+\mu\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\partial\bar\chi_6}{\partial\tau}\right]\frac{d\tau}{d\mu}.
\end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах $\mu=0$, мы в силу выражений (46) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_2}{dt} &= \left(\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\mu}\right)_0+\left(\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\Omega}\right)_0\Omega_1+\ldots+\left(\frac{\partial\bar\chi_1}{\partial\tau}\right)_0\tau_1,\\
\frac{di_2}{dt} &= \left(\frac{\partial\bar\chi_2}{\partial\mu}\right)_0+\left(\frac{\partial\bar\chi_2}{\partial\Omega}\right)_0\Omega_1+\ldots+\left(\frac{\partial\bar\chi_2}{\partial\tau}\right)_0\tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\tau_2}{dt} &= \left(\frac{\partial\bar\chi_6}{\partial\mu_0}\right)_0+\left(\frac{\partial\bar\chi_6}{\partial\Omega}\right)_0\Omega_1+\ldots+\left(\frac{\partial\bar\chi_6}{\partial\tau}\right)_0\tau_1,
\end{aligned}$$

где нулевые значки указывают на то, что после диференцирований нужно положить

$$\mu=0,\quad \Omega=\Omega_0,\quad i=i_0,\quad \omega=\omega_0,\quad e=e_0,$$
$$p=p_0,\quad \tau=\tau_0.$$

Так как функции Ω_1, i_1, ω_1, e_1, p_1 и τ_1 уже найдены, то правые части последних уравнений суть известные функции времени, а следовательно, функции $\Omega_2, i_2, \ldots, \tau_2$ определятся квадратурами при помощи формул

$$\Omega_2 = \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial \mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial \Omega}\right)_0 \Omega_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial \tau}\right)_0 \tau_1\right] dt,$$

$$i_2 = \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{\partial \bar{\chi}_2}{\partial \mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_2}{\partial \Omega}\right)_0 \Omega_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_2}{\partial \tau}\right)_0 \tau_1\right] dt,$$

. . . .

. . . .

$$\tau_2 = \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{\partial \bar{\chi}_6}{\partial \mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_6}{\partial \Omega}\right)_0 \Omega_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{\chi}_6}{\partial \tau}\right)_0 \tau_1\right] dt.$$

Зная эти величины, мы можем получить второе приближение для элементов оскулирующей орбиты в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2, \quad i = i_0 + \mu i_1 + \mu^2 i_2, \quad \omega = \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2,$$
$$e = e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2, \quad p = p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2, \quad \tau = \tau_0 + \mu\tau_1 + \mu^2\tau_2.$$

Точно таким же образом можно поступать и далее, определяя третье, четвертое и последующие приближения. Со стороны принципиальной нет никаких затруднений в нахождении любого приближения, так как все сводится к интегрированию систем линейных уравнений или даже просто к квадратурам. Однако трудности фактического нахождения приближений возрастают с увеличением их порядка, так как выкладки чрезвычайно усложняются. Поэтому на практике редко идут далее второго приближения, но, разумеется, при этом должно быть установлено, для какого промежутка времени это приближение определяет элементы с заранее назначенной степенью точности.

§ 44. Диференциальные уравнения возмущенного движения системы любого числа материальных точек. Выводы, полученные нами в предыдущих параграфах, относительно возмущенного движения одной материальной точки (или одной планеты), немедленно и без всяких затруднений могут быть распространены на систему, состоящую из любого числа материальных точек.

Рассмотрим систему k материальных точек, движущихся под действием притяжения Солнца (или вообще главного притягивающего центра) и различных других сил, как, например, сил их взаимных притяжений, сопротивлений среды и т. д. Допустим, что диференциальные уравнения движения системы могут быть приведены к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_j}{dt^2} + \frac{\mu_j}{r_j^3} x_j = X_j, \\ &\frac{d^2y_j}{dt^2} + \frac{\mu_j}{r_j^3} y_j = Y_j, \\ &\frac{d^2z_j}{dt^2} + \frac{\mu_j}{r_j^3} z_j = Z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

где x_j, y_j, z_j суть прямоугольные координаты точки M_j относительно декартовой системы координат с началом в центре Солнца и с неизменными направлениями осей, $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2+z_j^2}$, μ_j — постоянные коэфициенты, зависящие от масс, и X_j, Y_j, Z_j — компоненты возмущающей силы, действующей на точку M_j. Величины X_j, Y_j, Z_j суть некоторые заданные функции времени, координат и компонентов скоростей всех вообще точек системы. Таким образом система (50) представляет систему $3k$ совместных диференциальных уравнений между $3k$ неизвестными функциями

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad x_2, \quad y_2, \quad z_2, \ldots, \quad x_k, \quad y_k, \quad z_k.$$

Точно так же, как мы это делали для одной материальной точки, заменим систему (50), определяющую прямоугольные координаты планет, равносильной ей системой, определяющей элементы оскулирующих орбит.

Отбросим в правых частях уравнений (50) величины X_j, Y_j, Z_j, определяющие возмущающие силы. Тогда система (50) распадется на k отдельных систем, каждая из которых будет содержать координаты только какой-нибудь одной планеты, а поэтому каждую из этих систем можно интегрировать отдельно так, как это было выполнено в главе четвертой. Интегралы каждой отдельной системы представляются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_j &= r_j\left[\cos u_j \cos \Omega_j - \sin u_j \sin \Omega_j \cos i_j\right], \\ y_j &= r_j\left[\cos u_j \sin \Omega_j + \sin u_j \cos \Omega_j \cos i_j\right], \\ z_j &= r_j \sin u_j \sin i_j, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_j &= v_j + \omega_j, \\ r_j &= \frac{p_j}{1+e_j\cos v_j}, \\ t-\tau_j &= \frac{p_j^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu_j}}\int\limits_0^{v_j}\frac{dv_j}{(1+e_j\cos v_j)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

и величины

$$\Omega_j, \quad i_j, \quad \omega_j, \quad e_j, \quad p_j, \quad \tau_j \quad (j=1,\ 2,\ldots,k) \tag{53}$$

суть элементы невозмущенного движения планеты M_j.

Переходя теперь к возмущенному движению, мы введем в качестве новых зависимых переменных $6k$ величин (53), которые связаны со старыми переменными формулами (51) и (52). Этим самым мы рассматриваем возмущенное движение каждой планеты M_j как невозмущенное, но элементы которого изменяются с течением времени. Траектория каждой планеты M_j есть, вообще говоря, сложная пространственная кривая, являющаяся огибающей соответствующего семейства кривых второго порядка, зависящего от одного параметра—времени—через посредство величин Ω_j, i_j, ω_j, e_j и p_j.

Диференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы каждой планеты M_j, напишутся совершенно так же, как и уравнения (33), так как последние были выведены для любого характера возмущающей силы. Поэтому система уравнений возмущенного движения нашей системы k материальных точек напишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega_j}{dt} &= \frac{r_j}{p_j}\,\frac{\sin u_j}{\sin i_j} W_{1j},\\
\frac{di_j}{dt} &= \frac{r_j}{p_j}\cos u_j W_{1j},\\
\frac{d\omega_j}{dt} &= \frac{1}{e_j} S_{1j}\cos v_j + \frac{1}{e_j}\left(1+\frac{r_j}{p_j}\right) T_{1j}\sin v_j - \frac{r_j}{p_j}\operatorname{ctg} i_j \sin u_j W_{1j},\\
\frac{de_j}{dt} &= S_{1j}\sin v_j + \left(1+\frac{r_j}{p_j}\right) T_{1j}\cos v_j + e_j\frac{r_j}{p_j} T_{1j},\\
\frac{dp_j}{dt} &= 2r_j T_{1j},\\
\frac{d\tau_j}{dt} &= \frac{p_j^{\frac{3}{2}}}{e_j\sqrt{\mu_j}}\left[-(\cos v_j - e_j\sin v_j N_j) S_{1j} + \frac{p_j}{r_j} N_j T_{1j}\right]\frac{r_j^2}{p_j^2},
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

где

$$S_{1j} = \sqrt{\frac{p_j}{\mu_j}}\, S_j, \quad T_{1j} = \sqrt{\frac{p_j}{\mu_j}}\, T_j, \quad W_{1j} = \sqrt{\frac{p_j}{\mu_j}}\, W_j$$

и

$$N_j = 2\,\frac{p_j^2}{r_j^2}\int_0^{v_j}\frac{r_j^3}{p_j^3}\cos v_j\,dv_j.$$

Величины S_j, T_j, W_j суть компоненты возмущающей силы, действующей на планету M_j, причем S_j есть проекция возмущающей силы на радиус-вектор точки M_j, T_j — на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости движения и W_j — на перпендикуляр к плоскости движения M_j.

Так как, вообще говоря, возмущающая сила каждой планеты зависит от времени, координат и компонентов скоростей всех планет системы, то величины S_j, T_j и W_j, а следовательно, и правые части уравнений (54) будут функциями $6k+1$ переменных: времени и $6k$ оскулирующих элементов

$$\Omega_j, \quad i_j, \quad \omega_j, \quad e_j, \quad p_j, \quad \tau_j.$$

Таким образом система (54) представляет собой систему $6k$ совместных диференциальных уравнений с $6k$ неизвестными функциями.

Допустим, что нам удалось каким бы то ни было способом полностью проинтегрировать эту систему. Тогда величины Ω_j, i_j, ω_j, e_j, p_j и τ_j определятся как функции времени t и $6k$ произвольных постоянных, за которые можно принять значения оскулирующих элементов в начальный момент t_0. Обозначая начальные значения оскулирующих элементов планеты через

$$\Omega_j^{(0)}, \quad i_j^{(0)}, \quad \omega_j^{(0)}, \quad e_j^{(0)}, \quad p_j^{(0)} \quad \text{и} \quad \tau_j^{(0)},$$

мы представим общее решение системы (54) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= f_1(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
i_1 &= f_2(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_1 &= f_6(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
\Omega_2 &= \varphi_1(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
i_2 &= \varphi_2(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_2 &= \varphi_6(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Omega_k &= \psi_1(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
i_k &= \psi_2(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_k &= \psi_6(t, \Omega_1^{(0)}, i_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, e_1^{(0)}, p_1^{(0)}, \tau_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, \Omega_k^{(0)}, i_k^{(0)}, \omega_k^{(0)}, e_k^{(0)}, p_k^{(0)}, \tau_k^{(0)}).
\end{aligned}$$

При этом очевидно, что

$$f_1(t_0,\ \Omega_1^{(0)},\ i_1^{(0)},\ldots,\tau_1^{(0)},\ \Omega_2^{(0)},\ i_2^{(0)},\ldots,\tau_2^{(0)},\ldots,\Omega_k^{(0)},\ i_k^{(0)},\ldots,\tau_k^{(0)})=\Omega_1^{(0)},$$

$$f_2(t_0,\ \Omega_1^{(0)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \tau_k^{(0)})=i_1^{(0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1(t_0,\ \Omega_1^{(0)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \tau_k^{(0)})=\Omega_2^{(0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_0(t_0,\ \Omega_1^{(0)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \tau_k^{(0)})=\tau_k^{(0)}.$$

Зная общее решение системы (54), мы можем определить положение и скорость каждой планеты M_j для любого момента времени. Это производится следующим образом: прежде всего вычисляем для данного момента эксцентриситет e_j планеты M_j. Это определяет тип движения M_j в момент времени t. Вычислив затем значения всех остальных элементов M_j для данного момента, мы определяем положение и скорость планеты M_j по формулам эллиптического движения, если $e_j < 1$, — по формулам параболического движения если $e_j = 1$ или — по формулам гиперболического движения, если $e_j > 1$.

Все эти вычисления не представляют никаких затруднений. Единственная и основная трудность задачи заключается в интегрировании системы (54). Почти никогда не удается проинтегрировать эту систему полностью, вследствие чего обычно приходится прибегать к каким-либо приближенным методам, например, к методу интегрирования рядами, который мы рассматривали в предыдущем параграфе и который без особых затруднений может быть обобщен на систему любого порядка, содержащую любое число малых параметров, по степеням которых ведутся разложения.

В основной задаче небесной механики, где возмущающие силы зависят только от положений планет M_j, иногда удобнее пользоваться уравнениями типа (44): В этом случае система (50) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_j}{dt^2}+\frac{\mu_j}{r_j^3}x_j=\frac{\partial R_j}{\partial x_j},\\
&\frac{d^2y_j}{dt^2}+\frac{\mu_j}{r_j^3}y_j=\frac{\partial R_j}{\partial y_j},\\
&\frac{d^2z_j}{dt^2}+\frac{\mu_j}{r_j^3}z_j=\frac{\partial R_j}{dz_j}\qquad (j=1,\ 2,\ldots,k),
\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

где R_j есть пертурбационная функция для планеты M_j. Переходя к оскулирующим элементам, мы можем заменить систему (55) следующей равносильной ей системой:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_j}{dt} &= \frac{2}{n_j a_j}\frac{\partial R_j}{\partial \varepsilon_j},\\
\frac{de_j}{dt} &= -\sqrt{1-e_j^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial R_j}{\partial \varepsilon_j}-\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial R_j}{\partial \bar{\omega}_j},\\
\frac{di_j}{dt} &= -\frac{1-\cos i_j}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial \varepsilon_j}-\frac{1-\cos i_j}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial \bar{\omega}_j}-\\
&\qquad -\frac{1}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial \Omega_j},\\
\frac{d\Omega_j}{dt} &= \frac{1}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial i_j},\\
\frac{d\bar{\omega}_j}{dt} &= \frac{1-\cos i_j}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial i_j}+\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial R_j}{d e_j},\\
\frac{d\varepsilon_j}{dt} &= \frac{1-\cos i_j}{n_j a_j^2\sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial R_j}{\partial i_j}+\sqrt{1-e_j^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial R_j}{\partial e_j}-\\
&\qquad -\frac{2}{n_j a_j}\frac{\partial R_j}{\partial a_j}.
\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

В этих уравнениях функции R_j суть функции времени и оскулирующих элементов всех планет системы.

Мы здесь опять не рассматриваем основной задачи небесной механики подробно, так как это будет сделано в следующих главах нашего курса.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 45. Вводные замечания. Диференциальные уравнения возмущенного движения одной планеты (или системы планет) могут быть написаны, как мы это показали в предшествующей главе, различным образом в зависимости от того, принимаем ли мы за неизвестные функции прямоугольные координаты или оскулирующие элементы. Совершенно очевидно, что диференциальные уравнения одного и того же движения можно написать бесчисленным множеством способов, так как выбор величин, определяющих положение планеты (или системы планет) по существу совершенно произволен и может мотивироваться только целями большей простоты, удобства, легкости вычислений и подобными им практическими соображениями. Ввиду этого одной из задач небесной механики является наиболее рациональный для рассматриваемых целей выбор переменных, определяющих положения планет и долженствующих быть определенными в функции времени.

Прямоугольные координаты большей частью оказываются неудобными и для теоретических целей — для качественного анализа движения — и для практических целей, т. е. для фактических вычислений. Оскулирующие элементы применяются главным образом для целей последнего характера, но для теоретических исследований они также оказываются не совсем удобными, ввиду чрезвычайной сложности правых частей уравнений, их определяющих. А потому в этой главе мы займемся изысканием переменных, столь же удобных практически, как и оскулирующие элементы, и диференциальные уравнения для которых имеют простой, симметричный вид, облегчающий исследование общих свойств движения.

Чтобы достигнуть намеченной цели, мы рассмотрим сначала некоторые общие преобразования тех основных диференциальных уравнений, которые мы вывели в самом начале курса. Мы рассмотрим также общие свойства этих преобразований, установим законы перехода от одних переменных к другим, и таким образом подготовим математический аппарат, которым будем пользоваться во всей остальной части нашего курса. В целях достижения наибольшей общности наших выводов, мы будем рассматривать не основную задачу небесной механики, а вообще задачу о движении системы материальных точек, находящихся под действием заданных сил, возможно более общего характера. Основная задача небесной механики и ее диференциальные уравнения получатся тогда как частный случай этой общей задачи.

§ 46. Уравнения Лагранжа. Рассмотрим задачу о движении системы $n+1$ материальных точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, относительно некоторой абсолютной системы прямоугольных декартовых координат. Пусть $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ будут массы этих материальных точек, x_i, y_i, z_i — координаты точки M_i и X_i, Y_i, Z_i, — компоненты силы, действующей на эту точку. Величины X_i, Y_i, Z_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ мы предполагаем заданными функциями времени, координат $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ и компонентов скоростей $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$. Диференциальные уравнения, определяющие движение системы точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, напишутся в следующем виде:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Если, в частности, действующие силы обладают силовой функцией, т. е. если функции X_i, Y_i, Z_i таковы, что мы имеем

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где U есть заданная функция *только от координат* $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, то соответствующее этому случаю движение называется *консервативным*, так как в этом случае уравнения (1), принимающие вид

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \tag{3}$$
$$(i=0, 1, 2, \ldots, n),$$

имеют интеграл живых сил, выражающий сохранение полной энергии системы во все время ее движения.

Далее, если, в частности, функция U определяется формулой (6) главы второй, то уравнения (3) определяют движение системы материальных точек, взаимно притягивающих друг друга по закону всемирного тяготения Ньютона. Тогда, уравнения (3) представляют уравнения основной задачи небесной механики в абсолютных осях.

Введем теперь вместо переменных x_i, y_i, z_i некоторые другие переменные $q_1, q_2, \ldots, q_{3n+3}$, связанные с абсолютными координатами определенными соотношениями, которые могут также содержать время t. Пусть формулы преобразования имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n+3}; t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n+3}; t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n+3}; t) \quad (i=0, 1, 2, \ldots n), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и допустим, что правые части этих равенств суть известные непрерывные и однозначные функции указанных переменных. Тогда при заданном значении момента времени t всякой системе значений величин q_1, $q_2, \ldots, q_{3n+3}$ соответствует единственная система значений координат x_i, y_i, z_i, т. е. определенное положение системы. Таким образом положение системы точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ однозначно определяется зна-

11*

чениями величин q_1 $q_2, \ldots, q_{3n+3}$, которые по этой причине играют такую же роль, как и прямоугольные координаты.

Эти величины q_1, $q_2, \ldots, q_{3n+3}$ мы будем называть *обобщенными координатами системы*, или также *переменными Лагранжа*. Нашей задачей является теперь получить диференциальные уравнения, определяющие переменные q_1, $q_2, \ldots q_{3n+3}$. Для этого помножим уравнения (1) соответственно на $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$ и сложим все уравнения. Так как индекс j может пробегать все целые значения от 1 до $3n+3$, то мы получим $3n+3$ уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\\ &\qquad=\sum_{i=0}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\\ &\qquad\qquad (j=1,\ 2,\ldots,3n+3).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Преобразуем левые части полученных уравнений, написав выражения, стоящие в скобках под знаком суммы, в следующем виде:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right]-$$

$$-\left[\frac{dx_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dy_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right]\quad (j=1,\ 2,\ldots,3n+3),$$

каковые равенства, как нетрудно проверить, являются тождествами. С помощью этих тождеств уравнения (5) примут следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)-\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{dy_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right]=\sum_{i=0}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right).$$

$$(j=1,\ 2,\ldots,3n+3)$$

Введем для сокращения следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} P_j&=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),\\ Q_j&=\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dy_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right],\\ R_j&=\sum_{i=0}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\quad (j=1,\ 2,\ldots,3n+3).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда уравнения (5) напишутся в следующем простом виде:

$$\frac{dP_j}{dt} - Q_j = R_j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots 3n+3).$$

Чтобы получить уравнения движения в переменных Лагранжа в окончательном виде нужно выразить величины P_j, Q_j и R_j в функции времени, величин q_j и их производных. Согласно сделанным предположениям функции X_i, Y_i, Z_i суть известные функции от t, x_i, y_i, z_i, $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$. Величины x_i, y_i, z_i выражаются через величины q_j заданными формулами преобразования (4). Величины $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ получаются непосредственным диференцированием формул (4) по t полным образом, что дает выражения

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n+3}}\dot{q}_{3n+3} + \\
&\quad + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3n+3}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \\
\dot{y}_i &= \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_{3n+3}}\dot{q}_{3n+3} + \\
&\quad + \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3n+3}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \\
\dot{z}_i &= \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_{3n+3}}\dot{q}_{3n+3} + \\
&\quad + \frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3n+3}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \\
&\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n+3)$$

определяет скорость изменения обобщенной координаты q_j. Поэтому, величины $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{3n+3}$ называются *обобщенными скоростями* системы точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$.

Подставляя теперь в выражения функций X_i, Y_i, Z_i вместо прямоугольных координат их выражения (4) и вместо компонентов абсолютных скоростей их выражения (7), мы выразим эти величины, а следовательно, и величины R_j в функции времени, обобщенных координат q_j и обобщенных скоростей $\dot{q}_j$.

Чтобы получить соответствующие выражения для величин P_j и Q_j, рассмотрим живую силу T системы точек M_0, $M_1, \ldots, M_n$, которая в абсолютных координатах имеет следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \qquad (8)$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ их выражения (7), мы получим без труда для живой силы T выражение в функции времени, обобщенных координат q_j и обобщенных скоростей $\dot{q}_j$. Ввиду того, что $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, определяемые формулами (7), суть *линейные функции* от обобщенных скоростей, а T есть однородный многочлен второй степени относительно абсолютных скоростей, то относительно величин $\dot{q}_j$ живая сила T также будет многочленом второй степени, но уже вообще не однородным и не с постоянными коэфициентами, а с коэфициентами, зависящими от времени и обобщенных координат q_j.

Предполагая, что T выражено в функции новых переменных, покажем теперь, что

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n+3).$$

Действительно, диференцируя T частным образом по $\dot{q}_j$, мы получаем в силу формулы (8)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\right).$$

С другой стороны, диференцируя соотношения (7) по $\dot{q}_j$, мы, очевидно, получаем

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial y_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial z_i}{\partial q_j},$$

ввиду чего последнее выражение для $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = P_j,$$

в силу первой из формул (6).

Чтобы получить выражение для Q_j, продиференцируем T частным образом по q_j. Мы получаем

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right).$$

Чтобы найти выражения частных производных от $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ по q_j, диференцируем формулы (7), что дает выражения вида

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_{3n+3} \partial q_j}\dot{q}_{3n+3} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots n) \quad (j = 1, 2, \ldots, 3n+3).$$

С другой стороны, диференцируя по q_j соотношения (4) и беря от полученных выражений полные производные по t, мы получаем выражения вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_{3n+3}}\dot{q}_{3n+3} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Так как, по предположению, правые части формул преобразования (4) суть непрерывные функции своих переменных, то

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \quad (k=1, 2, \ldots, 3n+3, \ j=1, 2, \ldots, 3n+3),$$

вследствие чего

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right), \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right), \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),$$

и выражение для $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\dot{y}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\dot{z}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right]=Q_j$$

в силу второй из формул (6).

Так как живая сила T может быть выражена, как мы это указали выше, как функция t, q_j и $\dot{q}_j$, то величины P_j и Q_j можно считать известными функциями времени и новых переменных, а уравнения (7), определяющие эти переменные, как функции времени могут быть написаны в следующей удобной форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=R_j \quad (j=1, 2, \ldots, 3n+3), \tag{9}$$

Уравнения (9) называются *диференциальными уравнениями движения в форме Лагранжа*, или, более просто, *уравнениями Лагранжа*. Удобство этих уравнений заключается в чрезвычайной простоте перехода от абсолютных прямоугольных координат к каким угодно другим переменным. Действительно, чтобы написать уравнения Лагранжа нужно только выразить через новые переменные живую силу системы T и получить выражения для функций R_j. Для случая, когда силы, действующие на точки системы, обладают силовой функцией, уравнения Лагранжа еще более упрощаются. Действительно, ввиду условий (2) величины R_j в этом случае принимают вид

$$R_j=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),$$

и так как U зависит только от координат x_i, y_i, z_i, то

$$R_j=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, 3n+3)$$

и уравнения Лагранжа в этом случае примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{\partial (T+U)}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \ldots, 3n+3). \tag{10}$$

Таким образом, чтобы осуществить преобразование к новым переменным уравнений консервативного движения, нужно выразить через эти новые переменные только две величины — живую силу системы T и силовую функцию U.

§ 47. Канонические уравнения движения. Уравнения Лагранжа представляют систему $3n+3$ совместных диференциальных уравнений второго порядка, определяющих $3n+3$ неизвестных функций q_1, $q_2, \ldots, q_{3n+3}$. Как известно, увеличивая соответствующим образом число неизвестных функций, мы всегда можем заменить эту систему равносильной ей системой диференциальных уравнений первого порядка. Эту замену можно произвести различными способами, и мы рассмотрим теперь один специальный случай такого преобразования, который приведет нас к особенно удобной и симметричной форме диференциальных уравнений, называемой *канонической*.

Положим для сокращения письма $3n+3=k$ и введем в уравнения Лагранжа вместо $\dot{q}_j$ новые переменные p_j посредством соотношений

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{11}$$

Таким образом, вместо k переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k$ мы вводим теперь $2k$ переменных

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, \ldots, & q_k, \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_k, \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

которые будем называть *каноническими переменными* или *каноническими координатами*. Если значения этих величин известны для всякого момента времени, то движение системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ полностью определено, так как q_j определяют *положения* точек системы, а p_j — их *скорости*. Нетрудно убедиться в том, что p_j суть линейные функции от $\dot{q}_j$ с коэфициентами, зависящими от t и величин q_j. Действительно, мы указывали, что живая сила T есть многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_j$. Этот многочлен мы можем представить в виде

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{13}$$

где T_2 означает совокупность членов второй степени относительно $\dot{q}_j$, T_1 — совокупность членов первой степени и T_0 — совокупность членов, от $\dot{q}_j$ не зависящих. Мы можем поэтому написать

$$T_2=\sum_{ij=1}^{k}\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad T_1=\sum_{j=1}^{k}\beta_j\dot{q}_j, \tag{14}$$

где величины α_{ij} и β_j зависят только от t и от $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Вычисляя величины p_j, мы находим

$$p_j=\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}=2\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}\dot{q}_i+\beta_j. \tag{15}$$

Поэтому, зная p_j и q_j, мы получим обобщенные скорости $\dot{q}_j$ путем решения алгебраической системы линейных уравнений.

Выведем теперь диференциальные уравнения, определяющие канонические переменные q_j и p_j. Из уравнений (9) мы получаем прежде всего следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \dot{q}_j, \\ \frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial q_j} + R_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Остается выразить правые части этих уравнений через новые переменные q_j и p_j. Для этого нужно определить $\dot{q}_j$ из уравнений (15), считая в них p_j величинами известными, и подставить найденные выражения $\dot{q}_j$ в правые части уравнений (16). Эти выкладки, довольно тягостные при большом числе переменных, можно значительно упростить введением некоторой вспомогательной функции K при помощи формулы

$$K = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots + p_k\dot{q}_k - T. \tag{17}$$

Считая $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ функциями t и канонических переменных, определяемыми уравнениями (15), мы видим, что K также можно рассматривать как функцию канонических переменных, вследствие чего мы можем диференцировать эту функцию и по p_j, и по q_j. Выполняя эти диференцирования, мы находим

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_1\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_j} + p_2\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_j} + \ldots + p_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - $$
$$ - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_j} - \ldots - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = p_1\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_j} + p_2\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_j} + \ldots + p_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - $$
$$ - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_j} - \ldots - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Нетрудно убедиться в том, что в силу формул (11) в выражении для $\frac{\partial K}{\partial p_j}$ сокращаются все члены, кроме первого, а в выражении для $\frac{\partial K}{\partial q_j}$ все члены, кроме последнего, вследствие чего мы получаем

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial T}{\partial q_j},$$

в силу чего уравнения (16) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial q_j} + R_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Для функции K можно найти очень простое выражение. Действительно, вставляя в формулу

$$K=\sum_{j=1}^{k} p_j\dot{q}_j - T = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T,$$

вместо живой силы T ее выражение (13), мы получим

$$K=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - T_2 - T_1 - T_0.$$

Но мы видели, что T_2 и T_1 суть однородные функции от $\dot{q}_j$ соответственно второй и первой степени. Применяя к этим функциям известную из анализа теорему Эйлера об однородных функциях, мы можем написать

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T_2,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = T_1,$$

вследствие чего выражение для K примет вид

$$K = T_2 - T_0. \tag{19}$$

Для нас особенно важен случай, когда действующие силы имеют силовую функцию, т. е. когда движение консервативно. Тогда $R_j=\frac{\partial U}{\partial q_j}$, и уравнения (18) примут более простой вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt}&=\frac{\partial K}{\partial p_j},\\ \frac{dp_j}{dt}&=-\frac{\partial K}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Так как силовая функция, по предположению, зависит только от абсолютных координат, то в канонических переменных U будет функцией только от $q_1, q_2, \ldots, q_k$ и, вообще говоря, времени t. Поэтому $\frac{\partial U}{\partial p_j}\equiv 0$, и мы ничего не изменим в предыдущих уравнениях, написав их в виде

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial K}{\partial p_j}-\frac{\partial U}{\partial p_j},$$

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Наконец, полагая

$$H = K - U = T_2 - T_0 - U, \tag{21}$$

мы дадим предыдущим уравнениям следующую окончательную форму:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Уравнения (22) называются *диференциальными уравнениями движения в канонической форме*, или, просто, *каноническими уравнениями*, а функция H, определяющая аналитическую структуру правых частей этих уравнений, называется *характеристической функцией* канонической системы уравнений. Очевидно, что функция H, вообще говоря, зависит от t и от всех канонических переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k$. При этом отметим, что относительно величин p_j H есть целая алгебраическая функция второй степени. Это следует из того, что T_2 есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей, которые выражаются линейным образом через величины p_j.

Отметим еще, что диференциальные уравнения консервативного движения системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ могут быть приведены к каноническому виду бесчисленным множеством способов, так как выбор обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ по существу совершенно произволен. Таким образом мы всегда можем выбрать новые переменные $q_1, q_2, \ldots, q_k$, например, так, чтобы соотношения (4) не содержали явно времени. Тогда, очевидно, ни T ни U также не будут содержать времени явно, а следовательно, характеристическая функция H будет зависеть только от зависимых переменных q_j и p_j. В этом случае система (22) всегда имеет интеграл вида

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_k, \quad p_1, p_2, \ldots, p_k) = \text{const}. \tag{23}$$

Действительно, помножим уравнения (22) соответственно на $\frac{dp_j}{dt}$ и на $-\frac{dq_j}{dt}$ и затем сложим все уравнения. Мы получим

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}.$$

Но H есть функция только от p_j и q_j. Поэтому правая часть последнего равенства представляет полную производную от функции H по t и мы можем написать

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

откуда

$$H = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Полученный нами интеграл не всегда совпадает с интегралом живых сил, который всегда имеют уравнения консервативного движения и который имеет вид

$$T = U + h$$

или

$$T_2 + T_1 + T_0 = U + h.$$

Действительно, интеграл (23) может быть написан в виде

$$T_2 - T_0 = U + \text{const}$$

и эти два интеграла совпадают только в случае, когда

$$T_1 = T_0 = 0,$$

т. е. когда сделанное преобразование таково, что живая сила является однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей.

§ 48. Преобразования канонических уравнений. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных. Это свойство было открыто Якоби и формулируется в виде теоремы, называемой *теоремой Якоби.* Мы докажем сначала более общую теорему, принадлежащую Шарлье и из которой теорема Якоби получается как частный случай.

Пусть мы имеем некоторую каноническую систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (j = 1, 2, \dots k), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где характеристическая функция H есть произвольная функция (непрерывная и диференцируемая) от $t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$.

Пусть, далее,

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_k; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k; t)$$

будет произвольная (непрерывная и диференцируемая) функция от k старых переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$, k новых переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и времени t.

Введем вместо переменных

$$\begin{aligned} &q_1, q_2, \dots, q_k, \\ &p_1, p_2, \dots, p_k, \end{aligned}$$

новые зависимые переменные

$$\begin{aligned} &\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \\ &\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \end{aligned}$$

при помощи уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} &= p_j, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} &= -\eta_j \quad (j = 1,2, \dots, k). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Из этих уравнений мы можем определить, например, старые переменные в функции новых и времени

$$\left.\begin{aligned} q_j &= q_j(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \\ p_j &= p_j(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Если вместо $2k$ переменных q_j, p_j вводятся $2k$ новых переменных ξ_j, η_j при помощи формул преобразования (25), то диференциальные уравнения, определяющие новые переменные, также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{27}$$

где новая характеристическая функция определяется формулой $R = H + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, в которой H и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ должны быть выражены в функции ξ_j, η_j при помощи формул (26).

Предполагая, что в функцию H вместо q_j, p_j подставлены их выражения (26), вычислим частную производную $\frac{\partial H}{\partial \eta_j}$. Мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \eta_j},$$

что, в силу уравнений (24), приводится к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial p_i}{\partial \eta_j}.$$

Далее, из уравнений (25) находим

$$\frac{\partial p_i}{\partial \eta_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j},$$

в силу чего последнее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}.$$

Заменяя в первой сумме индекс i на s и изменяя порядок суммирования во второй сумме, мы напишем предыдущее равенство в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} \left[-\frac{dp_s}{dt} + \sum_{i=1}^{k} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_i} \right].$$

Продиференцируем теперь соотношение

$$p_s = \frac{\partial \psi}{\partial q_s}$$

полным образом по t. Мы получим соотношение

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t},$$

с помощью которого выражение для $\frac{\partial H}{\partial \eta_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t}.$$

Коэфициент при $\frac{d\xi_i}{dt}$ в этом выражении равен величине

$$-\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i}.$$

Но если мы будем диференцировать соотношение

$$-\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$$

частным образом по $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, то получаем

для $j \neq i$

$$-\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta_j} = 0 = \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j},$$

для $j = i$

$$-\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta_j} = -1 = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}.$$

Таким образом в выражении для $\frac{\partial H}{\partial \eta_j}$ из двойной суммы остается только один член и мы получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}.$$

Полагая теперь

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

откуда следует, что половина теоремы доказана.

Аналогично докажем и вторую часть теоремы. Прежде всего имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j}.$$

Затем, диференцируя уравнение

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

мы получаем соотношения

$$\frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_j},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t},$$

с помощью которых выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_j}.$$

Чтобы упростить правую часть последнего уравнения, продиференцируем по ξ_j соотношение

$$-\eta_s = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_s}.$$

Получим равенство

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial \xi_j},$$

с помощью которого выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial \xi_j} \frac{d\xi_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j} \frac{dq_s}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j}.$$

С другой стороны, диференцируя полным образом по t соотношение

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j},$$

мы получим

$$-\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, находим

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = -\frac{d\eta_j}{dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j},$$

то окончательно мы можем написать

$$\frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial\left(H + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)}{\partial \xi_j} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и теорема, следовательно, доказана в полном объеме.

Если теперь функция преобразования ψ не зависит от t, то $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ и характеристическая функция преобразованной системы воспадает с характеристической функцией первоначальной системы (24). Преобразованная система напишется в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{28}$$

т. е. преобразованная система имеет в точности такой же вид, как и первоначальная система (24), с той же самой характеристической функцией, которая только должна быть выражена в функции новых переменных при помощи формул преобразования. Это и составляет содержание теоремы Якоби.

Более точно теорему Якоби можно сформулировать следующим образом:

Каноническая система

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

преобразуется в каноническую систему такого же вида

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

если новые переменные ξ_j, η_j определяются одним из четырех нижеследующих способов:

1) $$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = -\eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_k; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$$

2) $$\frac{\partial \psi}{\partial p_j} = q_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} = -\xi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\psi = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_k; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$$

3) $$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} = \xi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_k; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$$

4) $$\frac{\partial \psi}{\partial p_j} = q_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = \eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\psi = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_k; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$$

причем функция преобразования ψ во всех четырех случаях есть любая непрерывная и диференцируемая функция указанных аргументов.

Мы дали доказательство теоремы только для случая, когда новые переменные определяются первым из указанных способов. Но совершенно так же доказывается теорема и во всех остальных случаях и нет нужды повторять еще раз те же самые выкладки и рассуждения. Теорема Якоби может быть сформулирована еще другим, весьма изящным образом. Действительно, рассмотрим функцию ψ, соответствующую, например, случаю 1), и образуем ее полный диференциал $d\psi$. Мы получаем

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\,dq_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\,dq_k + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\,d\xi_k.$$

С помощью уравнений, связывающих старые и новые переменные, мы можем представить $d\psi$ в следующем виде:

$$d\psi = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_k\,dq_k - \eta_1\,d\xi_1 - \eta_2\,d\xi_2 - \ldots - \eta_k\,d\xi_k,$$

а это показывает, что выражение

$$\sum_{j=1}^{k} p_j\,dq_j - \sum_{j=1}^{k} \eta_j\,d\xi_j \tag{29}$$

есть полный диференциал от некоторой функции $2k$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$.

Аналогичный результат получается также при рассмотрении остальных трех случаев преобразования, вследствие чего теорема Якоби может быть сформулирована следующим общим образом:

Канонические уравнения не изменяют своего вида при всех преобразованиях зависимых переменных, при которых одно из четырех написанных ниже выражений есть полный диференциал:

$$\sum_{j=1}^{k} p_j\,dq_j - \sum_{j=1}^{k} \eta_j\,d\xi_j, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j\,dq_j + \sum_{j=1}^{k} \xi_j\,d\eta_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k} q_j\,dp_j - \sum_{j=1}^{k} \xi_j\,d\eta_j, \quad \sum_{j=1}^{k} q_j\,dp_j + \sum_{j=1}^{k} \eta_j\,d\xi_j.$$

Последняя формулировка теоремы Якоби принадлежит Пуанкаре и позволяет без всякого труда устанавливать, являются ли новые переменные, вводимые каким бы то ни было образом, также каноническими переменными.

§ 49. Уравнение Гамильтона-Якоби. Задача об интегрировании канонической системы диференциальных уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{30}$$

(где H есть некоторая заданная функция от t, q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k) находится в замечательной связи с интегрированием одного диференциального уравнения с частными производными первого порядка.

Действительно, составим следующее уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k;\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\, \frac{\partial V}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right)=0, \tag{31}$$

которое определяет неизвестную функцию V как функцию $k+1$ переменных t, q_1, q_2, ..., q_k и является нелинейным диференциальным уравнением с частными производными первого порядка.

Допустим, что мы нашли некоторую функцию V

$$V=V(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k;\ \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_k), \tag{32}$$

содержащую, кроме независимых переменных t и q_j, еще k произвольных постоянных α_1, α_2, ..., α_k, и удовлетворяющую уравнению (31) при любых значениях этих постоянных. Всякую функцию V такого рода мы будем называть *полным интегралом* уравнения (31) [1]. Найдя какой-либо из полных интегралов уравнения (31), мы получим общее решение канонической системы уже без всяких интегрирований при помощи следующей теоремы, носящей название *теоремы Гамильтона-Якоби*:

Если $V(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k;\ \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_k)$ есть какой-нибудь полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k;\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\, \frac{\partial V}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right)=0,$$

то общее решение канонической системы

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

определяется следующими уравнениями:

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1, & \dfrac{\partial V}{\partial q_1}=p_1, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2, & \dfrac{\partial V}{\partial q_2}=p_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_k}=\beta_k, & \dfrac{\partial V}{\partial q_k}=p_k, \end{array}\right\}\quad (34)$$

где β_1, β_2, ..., β_k суть k новых произвольных постоянных.

[1]) Строго говоря, функция V, определенная указанным образом, не является в точности полным интегралом уравнения (31), так как полный интеграл уравнения с частными производными первого порядка должен содержать столько же произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных, т. е. $k+1$. Но так как сама функция V в уравнение (31) не входит, то функция (32) отличается от полного интеграла только на аддитивную постоянную, которая не играет роли в рассматриваемом вопросе.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что величины q_j, p_j, определяемые как функции времени и $2k$ произвольных постоянных из уравнений (33) и (34) в виде

$$\left.\begin{aligned} q_j &= q_j(t\,;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\,;\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k), \\ p_j &= p_j(t\,;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\,;\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

действительно, удовлетворяют уравнениям (30), каковы бы ни были численные значения постоянных α_j и β_j.

То же самое можно установить и другим способом, не требующим разрешения уравнений (33) и (34) относительно величин q_j, p_j. Действительно, если мы продиференцируем уравнения (33) и (34) полным образом по t, предполагая, что q_j, p_j, входящие в эти уравнения, суть функции времени, удовлетворяющие уравнениям (30), и получим в результате этих диференцирований тождества, то это будет значить, что уравнения (33) и (34) суть интегралы системы (30), а поэтому определенные из уравнений (33) и (34) функции (35) заведомо будут удовлетворять системе (30).

Диференцируя теперь уравнения (33) и (34) по t полным образом, считая q_j и p_j функциями от t, мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = 0, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_k\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_k\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_k\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_k\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = \frac{dp_1}{dt}, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = \frac{dp_2}{dt}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = \frac{dp_k}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Соотношения (36) и (37) остаются справедливыми, *каковы бы ни были* функции q_j и p_j, входящие в уравнения (34) и (35). Если мы предположим теперь, что q_j и p_j суть именно те функции, которые удовлетворяют уравнениям (30), то в уравнения (36) и (37) мы можем подставить вместо $\frac{dq_j}{dt}$ и $\frac{dp_j}{dt}$ их выражения из уравнений (30). Произведя эту подстановку, мы немедленно убедимся, что уравнения (36) и (37) превращаются в тождества; это и показывает, что уравнения (33) и (34), действительно, являются интегралами системы (30). В самом деле, подставив сначала в соотношения (36) вместо $\frac{dq_j}{dt}$ их выражения $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ из уравнений (30), мы получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0,\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Легко убедиться в том, что равенства (38) суть тождества. Действительно, подставляя функцию $V(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k)$ в уравнение (31), мы получим, очевидно, тождество, так как V есть интеграл этого уравнения.

Диференцируя полученное тождество по любой из входящих в него величин, мы опять, конечно, получаем тождество. Но диференцируя (31) по α_j ($j=1,\ 2,\ \ldots\ k$), мы получаем следующие тождества:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial \alpha_j}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_j}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial \alpha_j}+\ldots+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_j}\equiv 0,$$

которые в силу уравнений (34) полностью совпадают с равенствами (38), также, следовательно, являющимися тождествами, что и нужно было показать.

Подставив теперь значения $\frac{dq_j}{dt}$ и $\frac{dp_j}{dt}$ из уравнений (30) в равенства (37), мы можем написать эти равенства в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial H}{\partial q_1}=0,\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial H}{\partial q_2}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\frac{\partial H}{\partial q_k}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Точно так же как и выше, мы убедимся в том, что эти равенства суть тождества. Действительно, диференцируя уравнение (31) по q_j ($j=1, 2, \ldots, k$), мы получим следующие тождества:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_j}+\ldots+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_j}\equiv 0,$$

которые в силу уравнений (34) полностью совпадают с равенствами (39). Поэтому равенства (39) также суть тождества и теорема доказана в полном объеме.

В силу доказанной нами теоремы нахождение общего решения системы канонических уравнений сводится к разысканию *какого-нибудь* полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби. Не следует думать, однако, что последняя задача проще первой. Обе задачи обладают одинаковой степенью трудности и поэтому теорема Гамильтона-Якоби оказывается ценной главным образом в теоретических изысканиях при исследованиях свойств интегралов канонической системы.

Если характеристическая функция H системы (30) не зависит явно от времени, то уравнение Гамильтона-Якоби несколько упрощается. Действительно, предполагая, что указанный случай имеет место, напишем уравнение Гамильтона-Якоби в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(q_1, q_2, \ldots, q_k; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right)=0 \qquad (40)$$

и введем вместо V новую неизвестную функцию W, полагая

$$V=-ht+W, \qquad (41)$$

где h — произвольная постоянная и W зависит только от $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Очевидно, мы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-h, \quad \frac{\partial V}{\partial q_j}=\frac{\partial W}{\partial q_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, k),$$

и уравнение (40) принимает вид

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_k; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right)=h. \qquad (42)$$

Это уравнение проще уравнения (40), так как в него не входит t, и, следовательно, независимых переменных на одно меньше. Найдя какой-нибудь интеграл этого уравнения, зависящий от $k-1$ произвольных постоянных, мы получим по формуле (42) полный интеграл уравнения (40), так как последней недостающей постоянной будет h.

Интеграл уравнения (42) напишется в виде

$$W=W(q_1, q_2, \ldots, q_k; h, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k).$$

Следовательно, полный интеграл уравнения (40) представится в виде

$$V=-ht+W(q_1, q_2, \ldots, q_k; h, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k).$$

Применяя теперь теорему Гамильтона-Якоби, мы получим общий интеграл канонической системы для случая, когда H не зависит от времени, в следующем виде:

$$
(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, && \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, && \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, && \frac{\partial W}{\partial q_3} = p_3, \\
&\ldots\ldots && \ldots\ldots \\
&\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, && \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k,
\end{aligned}\right\} \quad (44)
$$

где β, β_2, β_3, ..., β_k суть k новых произвольных постоянных.

§ 50. Случаи интегрируемости уравнения Гамильтона-Якоби. Уравнение Гамильтона-Якоби представляет собой нелинейное диференциальное уравнение с частными производными первого порядка и поэтому нахождение его полного интеграла, вообще говоря, сопряжено с большими затруднениями. Существуют, однако, некоторые случаи, в которых интегрирование может быть доведено до конца с помощью квадратур. Мы рассмотрим здесь два, наиболее важных для нас случая, а именно случай интегрируемости Лиувилля и случай интегрируемости Штеккеля.

а) Случай интегрируемости Лиувилля. Пусть живая сила T есть однородная функция второй степени относительно обобщенных скоростей следующего вида:

$$
T = \frac{1}{2} b \left[A_1(q_1)\dot{q}_1^2 + A_2(q_2)\dot{q}_2^2 + \ldots + A_k(q_k)\dot{q}_k^2\right], \tag{45}
$$

где

$$
b = \sum_{j=1}^{k} B_j(q_j), \tag{46}
$$

и пусть силовая функция U зависит только от обобщенных координат и определяется формулой

$$
U = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k} U_j(q_j). \tag{47}
$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах. Для доказательства этой теоремы составим прежде всего выражение для характеристической функции H. Так как живая сила T содержит только члены с квадратами величин $\dot{q}_j$, то $T_2 = T$ и мы имеем

$$
H = T - U = \frac{1}{2} b \sum_{j=1}^{k} A_j(q_j)\dot{q}_j^2 - \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{k} U_j(q_j).
$$

Теперь выразим T и U в функции канонических переменных. Мы получаем

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = bA_j(q_j)\dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ввиду чего находим

$$T = \frac{1}{2b}\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j^2}{A_j(q_j)}$$

и

$$H = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{p_j^2}{2A_j(q_j)} - U_j(q_j)\right]. \tag{48}$$

Так как характеристическая функция не содержит явно t, то уравнение Гамильтона-Якоби может быть написано в виде

$$\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j)\right] = h,$$

или в силу выражения для b следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j)\right] = h\sum_{j=1}^{k}B_j(q_j). \tag{49}$$

Остается найти интеграл этого уравнения, зависящий, не считая h, еще от $k-1$ произвольных постоянных. Перенося в уравнении (49) член $h\sum_{j=1}^{k}B_j(q_j)$ в левую часть и написав уравнение в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j)\right] = 0,$$

мы замечаем, что левая его часть является суммой k слагаемых, каждое из которых зависит только от одной переменной q_j. Очевидно, что мы удовлетворим этому уравнению, приравнивая каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной, т. е. полагая

$$\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j) = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{50}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 0.$$

Уравнения (50) представляют собой k независимых обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка, интегрирующихся в квадратурах. Действительно, разрешая эти уравнения относительно производных, мы получаем

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = \sqrt{2A_j(q_j)\left[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j\right]} \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

откуда находим

$$W = \int \sqrt{2A_j(q_j)\left[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j\right]}\, dq_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{51}$$

Произвольных постоянных к интегралам прибавлять нет необходимости, так как мы уже ввели достаточное количество постоянных. Искомый интеграл уравнения (49) мы получим теперь, суммируя выражения (51) для всех значений j от 1 до k. Поэтому указанный интеграл напишется в следующем виде:

$$W = \sum_{j=1}^{k} \int \sqrt{2A_j(q_j)\left[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j\right]}\, dq_j. \tag{52}$$

Нетрудно проверить путем подстановки, что функция W, определяемая формулой (52), действительно, удовлетворяет уравнению (49), каковы бы ни были численные значения постоянных h и α_j, при условии, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0$. Таким образом W содержит k независимых произвольных постоянных и поэтому является полным интегралом уравнения (49). Получив W, мы найдем общий интеграл соответствующей канонической системы по формулам (43) и (44) предыдущего параграфа.

b) Случай интегрируемости Штекселя. Пусть даны $k(k+1)$ функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, а именно:

$$k^2 \text{ функций } \varphi_{ji}(q_j) \qquad (j, i = 1, 2, \ldots, k)$$

и

$$k \text{ функций } U_j(q_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Функции U_j могут быть заданы совершенно произвольно. Функции φ_{ji} мы подчиним единственному условию, а именно потребуем, чтобы детерминант k-го порядка, составленный из этих функций,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1), & \varphi_{21}(q_2), & \ldots, & \varphi_{k1}(q_k) \\ \varphi_{12}(q_1), & \varphi_{22}(q_2), & \ldots, & \varphi_{k2}(q_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1k}(q_1), & \varphi_{2k}(q_2), & \ldots, & \varphi_{kk}(q_k) \end{vmatrix} \tag{53}$$

не равнялся тождественно нулю. Во всем остальном функции φ_{ji} также совершенно произвольны.

Положим

$$A_j = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{54}$$

Очевидно, при заданных функциях φ_{ji} величины A_j также будут известными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Тогда, если живая сила T и силовая функция U могут быть представлены в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j p_j^2, \tag{55}$$

$$U = \sum_{j=1}^{k} A_j U_j, \tag{56}$$

уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах, каковы бы ни были функции U_j и φ_{ji}. Действительно, уравнение Гамильтона-Якоби напишется в данном случае следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - 2 \sum_{j=1}^{k} A_j U_j = 2h. \tag{57}$$

Чтобы привести это уравнение к квадратурам, выведем сначала одно вспомогательное, впрочем, очень простое соотношение. Для этого разложим детерминант Δ по элементам первой строки. Применяя известную теорему из теории детерминантов, мы можем написать

$$\Delta = \varphi_{11}(q_1) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} + \varphi_{21}(q_2) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} + \ldots + \varphi_{k1}(q_k) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{k1}}.$$

Деля обе части этого равенства на Δ и имея в виду формулы (54), мы получим следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_{j1}(q_j) A_j = 1. \tag{58}$$

Рассматривая теперь правую часть уравнения (57) как $2h \cdot 1$ и заменяя единицу по формуле (58), мы напишем уравнение (57) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - 2U_j - 2h\varphi_{j1}\right] = 0. \tag{59}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 = 2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \varphi_{ji} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{60}$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ суть произвольные постоянные. Действительно, подставляя в уравнение (59) вместо $\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2$ их выражения (60), мы получим

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - 2U_j - 2h\varphi_{j1}\right] = \sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \varphi_{ji} =$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{k} A_j \varphi_{ji} = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i D_i,$$

где положено

$$D_i = \sum_{j=1}^{k} A_j \varphi_{ji}. \qquad (i = 2,\ 3, \ldots, k)$$

Покажем теперь, что все D_i тождественно равны нулю. Подставляя в выражение для D_i вместо величин A_j их выражения (54), мы находим

$$D_i = \frac{1}{\varDelta} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji} \frac{\partial \varDelta}{\partial \varphi_{j1}}. \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Но сумма $\sum\limits_{j=1}^{k} \varphi_{ji} \frac{\partial \varDelta}{\partial \varphi_{j1}}$ представляет сумму произведений элементов *i-й строки* детерминанта $\varDelta$ на миноры *первой строки* этого же детерминанта. Так как $i = 2, 3, \ldots, k$, то по известному свойству заключаем, что каждая такая сумма, а следовательно, и D_i тождественно равны нулю, а это и показывает, что $\frac{\partial W}{\partial q_j}$, определенные равенствами (60), действительно, удовлетворяют уравнению (59). Но каждое из уравнений (60) содержит только одну переменную. Поэтому, так же как и в случае Лиувилля, заключаем, что полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби определится формулой

$$W = \sum_{j=1}^{k} \int \sqrt{2U_j(q_j) + 2h\, \varphi_{j1}(q_j) + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \varphi_{ji}(q_j)}\, dq_j. \qquad (61)$$

Легко проверить в самом деле, что функция W, определяемая формулой (61), удовлетворяет уравнению (57), каковы бы ни были численные значения k произвольных постоянных h, α_2, α_3, $\ldots$, α_k, а поэтому является полным интегралом этого уравнения.

§ 51. Метод вариации произвольных постоянных. В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели уравнение Гамильтона-Якоби и показали, как находится общий интеграл канонической системы, если известен полный интеграл этого уравнения. Однако в большинстве случаев этот метод оказывается неприменимым ввиду того, что в динамических задачах и, в частности, в задачах небесной механики, уравнение Гамильтона-Якоби большей частью не принадлежит к интегрируемому типу. Но теория уравнения Гамильтона-Якоби имеет большое теоретическое значение, так как на ней основывается один из важнейших методов небесной механики, являющийся фундаментом для всех практических приложений, а именно метод вариации произвольных постоянных.

Мы уже рассматривали этот метод в главе о возмущенном движении, где мы вывели диференциальные уравнения для оскулирующих элементов. Здесь мы получим аналогичные уравнения, но для более узкого класса движений — для движений, которые могут быть определены системой канонических уравнений.

Итак, пусть изучаемое нами движение таково, что его диференциальные уравнения могут быть приведены к каноническому виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где характеристическая функция H зависит некоторым известным образом от времени и $2k$ переменных q_j, p_j.

Разложим H произвольным образом на две части, полагая

$$H = H_0 + H_1, \tag{63}$$

и рассмотрим каноническую систему, аналогичную системе (62), но с характеристической функций H_0:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Функцию H_0 всегда можно выбрать таким образом, чтобы соответствующее системе (64) уравнение Гимильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0\left(t,\ q_1,\ q_2, \ldots,\ q_k;\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{65}$$

можно было проинтегрировать. Найдя полный интеграл V уравнения (65), мы можем написать общий интеграл системы (64) в виде $2k$ уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = -\beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{66}$$

решая которые относительно q_j и p_j, мы получим функции, *удовлетворяющие уравнениям* (64) при всех значениях постоянных α_j и β_j. Но эти функции, очевидно, не будут удовлетворять первоначальной системе (62). Пусть решение системы (64) представится в виде

$$\left.\begin{aligned} q_j &= q_j(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_k), \\ p_j &= p_j(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_k). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Следуя методу вариации произвольных постоянных, мы будем представлять этими же формулами и решение системы (62), но величины α_j и β_j будут тогда уже не постоянными числами, а некоторыми неизвестными функциями от t, которые нужно определить.

Диференциальные уравнения для этих новых неизвестных получаются весьма просто. Действительно, так как функция V, удовлетворяющая уравнению (65), известна, то мы можем принять ее за функцию преобразования и ввести вместо переменных q_j, p_j в уравнения (62) *новые переменные* α_j, β_j при помощи формул преобразования (66). Но уравнения (66) имеют такой же вид, как и формулы преобразования (25), выведенные в § 48. Поэтому уравнения, определяющие α_j, β_j, могут быть написаны на основании теоремы Шарлье в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_j}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_j}, \\ \frac{d\beta_j}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

где новая характеристическая функция определяется формулой

$$R = H + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{69}$$

Но V есть интеграл уравнения (65). Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -H_0,$$

и мы получаем

$$R = H - H_0 = H_0 + H_1 - H_0 = H_1.$$

В силу этого система (68) может быть написана в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_j}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \\ \frac{d\beta_j}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

где H_1 должно быть, конечно, выражено в функции новых переменных при помощи формул (67).

Допустим, что система (70) может быть проинтегрирована. Тогда мы получим для α_j и β_j выражения вида

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_j(t, \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_k', \beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_k') \\ \beta_j &= \beta_j(t, \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_k', \beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_k') \ (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

где $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_k', \beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_k'$ суть *произвольные постоянные*. Зная α_j и β_j мы найдем функции q_j, p_j по формулам (67) и интегрирование системы (62) будет закончено.

Мы указали, что функцию H_0 всегда можно выбрать так, чтобы уравнение (65) могло быть проинтегрировано. Однако уравнения (70) вообще не могуть быть проинтегрированы со всей строгостью, и мы обыкновенно бываем вынуждены применять тот или иной из приближенных методов.

Может возникнуть вопрос, — для чего тогда производить указанное преобразование и не проще ли интегрировать приближенно первоначальную систему (62)? Это, конечно, зависит от характера исследуемой проблемы. В задачах небесной механики часто бывает возможно разложить характеристическую функцию H таким образом, чтобы во-первых, уравнение (65) без труда интегрировалось в квадратурах, а во-вторых, чтобы добавочная функция H_1 *была весьма мала* по сравнению с основной частью H_0. Тогда величины $\frac{d\alpha_j}{dt}$ и $\frac{d\beta_j}{dt}$ будут также малыми величинами и, следовательно, α_j и β_j *будут изменяться чрезвы-*

чайно медленно. Уравнения (67) определят тогда первое приближение нашей задачи, которое будет тем более близким к действительности, чем медленнее изменяются α_j и β_j. Чтобы получить более точное решение, пригодное для практических целей, часто бывает достаточно найти малые поправки к величинам α_j и β_j, что и может быть сделано приближенным интегрированием уравнений (70), например, тем общим методом, который был рассмотрен в § 43. В следующих главах мы будем широко пользоваться этим методом, который, можно сказать, составляет основание всей классической небесной механики.

Заметим еще, что постоянные α_j и β_j, входящие в первое приближение, называются обыкновенно *каноническими постоянными*, а движение, определяемое формулами первого приближения, называется часто *промежуточным движением*. Смысл этого названия настолько очевиден, что никаких дальнейших пояснений он не требует.

Так как промежуточное движение полностью определяется функцией H_0, которая, как было указано, может быть выбрана совершенно произвольно, то промежуточное движение также может быть выбрано совершенно произвольно. Важнейшей задачей небесной механики является поэтому наиболее целесообразный выбор первого приближения в том смысле, чтобы промежуточное движение *мало отличалось* от движения действительного, по крайней мере, в течение некоторого определенного промежутка времени. С другой стороны, промежуточное движение должно быть легко определимо, т. е. координаты и компоненты скорости в промежуточном движении должны вычисляться без особых затруднений и при помощи достаточно простых формул. Одним из наиболее часто применяющихся видов промежуточного движения является невозмущенное кеплеровское движение.

Однако во многих астрономических задачах невозмущенное движение оказывается недостаточным приближением, и астрономы и математики потратили много труда на изыскание других, более удовлетворительных приближений. В нашем курсе мы не можем останавливаться на этих работах и будем рассматривать только один основной тип промежуточного движения, т. е. движение невозмущенное.

Наша задача будет заключаться поэтому в определении параметров, характеризующих невозмущенное движение. По существу мы будем рассматривать ту же задачу, которой занимались и в главе седьмой. Различие будет заключаться только в выборе параметров. В главе седьмой мы пользовались оскулирующими элементами, имеющими простой геометрический смысл. Здесь мы будем стараться выбирать параметры таким образом, чтобы диференциальные уравнения всегда сохраняли каноническую форму, т. е. будем пользоваться исключительно каноническими постоянными.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

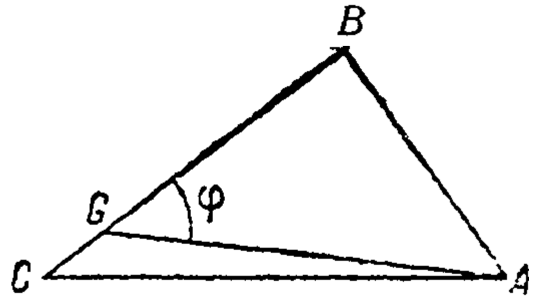
КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 52. Диференциальные уравнения основной задачи небесной механики. В этой и последующей главе мы будем рассматривать основные классические методы исследования основной задачи небесной механики, т. е. задачи о движении некоторого числа материальных точек, взаимно притягивающихся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона и представляющих Солнце и большие планеты солнечной системы (или системы больших планет с их спутниками). В первых главах нашего курса мы рассматривали диференциальные уравнения этой задачи в различных переменных, не делая при этом никаких предположений о числе планет. Фактически мы должны принять число точек системы равным десяти, рассматривая систему, состоящую из Солнца и девяти больших планет. Однако с принципиальной стороны совершенно безразлично, сколько входит планет в интересующую нас систему, и методы, которые мы будем рассматривать, одинаково приложимы и к системе с тремя планетами и к системе с любым числом планет.

Имея желание сократить и по возможности упростить выкладки, неизбежно связанные с классическими методами небесной механики, мы будем рассматривать во всем последующем изложении систему, состоящую только из трех материальных точек, под одной из которых мы будем подразумевать Солнце, а под другими—две какие-нибудь планеты солнечной системы.

Подчеркнем еще раз, что, ограничивая число планет двумя, мы нисколько не уменьшаем принципиальных затруднений в решении задачи. Упрощаются только некоторые выкладки, что и позволяет более ясно представить себе весь основной механизм классической методики и облегчает понимание сущности дела.

Итак, рассмотрим три тела, точнее говоря, — три материальные точки A, B, C, массы которых будем обозначать соответственно через m_a, m_b, m_c. Мы всегда будем считать, что масса m_c весьма велика по сравнению с массами m_a и m_b, т. е. что точка C изображает Солнце. A и B суть какие-нибудь две планеты солнечной системы (например, Юпитер и Сатурн). Пусть G — центр тяжести тел C и B (черт. 12). Вообразим две прямоугольные системы декартовых координат с неизменными направлениями осей и с началом в точках C и G. При этом соответствующие оси двух систем будем считать параллельными и одинаково направленными. Обозначим через q_1, q_2, q_3 координаты тела B относительно системы координат с началом в точке C и через $q_4, q_5\ q_6$ — координаты тела A относительно системы координат с началом в точке G. Тогда диференциальные уравнения относительного движения тел B и A напишутся в следующем виде (см. § 21):



Черт. 12.

$$\left.\begin{aligned} \mu_b \frac{d^2q_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad \mu_b \frac{d^2q_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \mu_b \frac{d^2q_3}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_3}, \\ \mu_a \frac{d^2q_4}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_4}, \quad \mu_a \frac{d^2q_5}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_5}, \quad \mu_a \frac{d^2q_6}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q_6}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\mu_b = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \quad \mu_a = \frac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \tag{2}$$

и

$$U = \frac{fm_b m_c}{r_{bc}} + \frac{fm_c m_a}{r_{ca}} + \frac{fm_a m_b}{r_{ab}}. \tag{3}$$

Выразим прежде всего расстояния r_{bc}, r_{ca} и r_{ab} в функции координат $q_1, q_2\ q_3, q_4, q_5, q_6$. Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} r_{bc}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r_{ga}^2 = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Далее из треугольника ABC находим

$$\left.\begin{aligned} r_{ca}^2 = r_{ga}^2 + r_{gc}^2 + 2r_{ga} r_{gc} \cos\varphi, \\ r_{ab}^2 = r_{ga}^2 + r_{gb}^2 - 2r_{ga} r_{gb} \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где через φ обозначен угол AGB. Так как φ есть угол между прямыми AG и BG и так как оси системы с началом в C соответственно параллельны осям системы с началом в G, то мы можем написать

$$\cos\varphi = \frac{q_1}{r_{bc}} \frac{q_4}{r_{ga}} + \frac{q_2}{r_{bc}} \frac{q_5}{r_{ga}} + \frac{q_3}{r_{bc}} \frac{q_6}{r_{ga}}. \tag{6}$$

Затем свойство центра тяжести дает нам пропорцию

$$\frac{r_{gb}}{r_{gc}} = \frac{m_c}{m_b},$$

из которой мы выводим следующие два соотношения:

$$\left.\begin{aligned} r_{gb} = \frac{m_c}{m_c + m_b} r_{bc}, \\ r_{gc} = \frac{m_b}{m_c + m_b} r_{bc}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

С помощью формул (4), (6) и (7) мы получим из уравнений (5) r_{ca} и r_{ab}, и выражения для всех трех взаимных расстояний напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} r_{bc}^2 &= q_1^2+q_2^2+q_3^2,\\ r_{ca}^2 &= \left(\frac{m_b}{m_c+m_b}\right)^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2)+q_4^2+q_5^2+q_6^2+\\ &\qquad +\frac{2m_b}{m_c+m_b}(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6)\\ r_{ab}^2 &= \left(\frac{m_c}{m_c+m_b}\right)^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2)+q_4^2+q_5^2+q_6^2-\\ &\qquad -\frac{2m_c}{m_c+m_b}(q_1q_4+q_2q_5+q_3q_6). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Мы выбрали для определения положений тел A и B координаты Якоби вследствие того, что уравнения (1), их определяющие, легко приводятся к каноническому виду. Действительно, живая сила системы T в координатах Якоби определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\left[\mu_b(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2)+\mu_a(\dot q_4^2+\dot q_5^2+\dot q_6^2)\right]. \tag{9}$$

Полагая

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6),$$

мы получим систему канонических переменных:

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, & q_3, & q_4, & q_5, & q_6,\\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4, & p_5, & p_6, \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

причем, очевидно,

$$p_1=\mu_b\dot q_1,\quad p_2=\mu_b\dot q_2,\quad p_3=\mu_b\dot q_3;\quad p_4=\mu_a\dot q_4,$$
$$p_5=\mu_a\dot q_5,\quad p_6=\mu_a\dot q_6.$$

Так как живая сила T содержит только квадраты величин $\dot q_i$, то, полагая

$$H=T-U,$$

мы можем написать уравнения (1) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,6). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Система (11) представляет каноническую систему диференциальных уравнений задачи о трех телах. Характеристическая функция H системы (11) определится формулой

$$\left.\begin{aligned} H=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_b}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_a}(p_4^2+p_5^2+p_6^2)-\\ -\frac{fm_bm_c}{r_{bc}}-\frac{fm_cm_a}{r_{ca}}-\frac{fm_am_b}{r_{ab}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Определив величины q_i и p_i как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (11), мы этим самым определим положения тел B и A относительно соответственно точек C и G и скорости этих тел. После этого уже нетрудно будет определить положения всех трех тел в системе координат, начало которой помещается в общем центре тяжести масс m_a, m_b, m_c, и оси которых соответственно параллельны осям координат, рассматриваемых в настоящем параграфе. Обозначая координаты точек A, B, C в указанной системе координат через x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c, мы получим для этих величин с помощью формул (34), выведенных в § 21, следующие выражения —

для координат Солнца:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= -\frac{m_b}{m_c+m_b}q_1-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_4,\\ y_c &= -\frac{m_b}{m_c+m_b}q_2-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_5,\\ z_c &= -\frac{m_b}{m_c+m_b}q_3-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_6, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

для координат планет:

$$\left.\begin{aligned} x_b &= \frac{m_c}{m_c+m_b}q_1-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_4,\\ y_b &= \frac{m_c}{m_c+m_b}q_2-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_5,\\ z_b &= \frac{m_c}{m_c+m_b}q_3-\frac{m_a}{m_c+m_b+m_a}q_6,\\ x_a &= \frac{m_c+m_b}{m_c+m_b+m_a}q_4,\\ y_a &= \frac{m_c+m_b}{m_c+m_b+m_a}q_5,\\ z_a &= \frac{m_c+m_b}{m_c+m_b+m_a}q_6. \end{aligned}\right\} \qquad (14($$

Точно так же нетрудно определить положения тел A и B относительно тела C. Действительно, обозначая координаты A и B в системе координат с началом в точке C и с осями, параллельными осям только что рассмотренной системы, соответственно через $\overline{x}_a$, $\overline{y}_a$, $\overline{z}_a$ и $\overline{x}_b$, $\overline{y}_b$, $\overline{z}_b$, мы имеем

$$\overline{x}_b = x_b - x_c, \quad \overline{y}_b = y_b - y_c, \quad \overline{z}_b = z_b - z_c,$$

$$\overline{x}_a = x_a - x_c, \quad \overline{y}_a = y_a - y_c, \quad \overline{z}_a = z_a - z_c.$$

Подставляя сюда вместо x_a, x_b, $x_c, \ldots$ их выражения из формул (13) и (14), мы получим без труда

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}_b = q_1, \quad \bar{y}_b = q_2, \quad \bar{z}_b = q_3,\\ &\bar{x}_a = \frac{m_b}{m_c + m_b} q_1 + q_4, \quad \bar{y}_a = \frac{m_b}{m_c + m_b} q_2 + q_5,\\ &\bar{z}_a = \frac{m_b}{m_c + m_b} q_3 + q_6. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Таким образом нашей основной задачей является определение величин q_i и p_i из канонической системы уравнений (11). Мы уже неоднократно указывали на то, что уравнения, определяющие движение системы, состоящей более, чем из двух точек, не могут быть проинтегрированы при современном состоянии анализа. Поэтому мы вынуждены стать на путь последовательных приближений, общая схема которого будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 53. Общий план интегрирования диференциальных уравнений основной задачи. Для интегрирования системы (11) представим характеристическую функцию H в виде

$$H = H_0 + H_1, \tag{16}$$

полагая

$$H_0 = \frac{1}{2\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu_a}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{fm_b m_c}{r_{bc}} - \frac{fm_a m_c}{r_{ga}} \tag{17}$$

и

$$H_1 = \frac{fm_a m_c}{r_{ga}} - \frac{fm_a m_c}{r_{ca}} - \frac{fm_a m_b}{r_{ab}}, \tag{18}$$

и рассмотрим промежуточное движение, определяемое характеристической функцией H_0. Это движение определится уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

которые могут быть полностью проинтегрированы.

Действительно, функция H_0 может быть представлена в виде суммы двух слагаемых H_b и H_a, из которых первое зависит только от координат тела B и второе—только от координат тела A, а поэтому система (19) распадается на две отдельные системы, которые интегрируются независимо одна от другой. Положим в самом деле

$$H_0 = H_b + H_a, \tag{20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_b &= \frac{1}{2\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{fm_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}},\\ H_a &= \frac{1}{2\mu_a}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{fm_a m_c}{\sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Тогда система (19) представится в виде двух отдельных систем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_2}, & \frac{dq_3}{dt} &= \frac{\partial H_b}{\partial p_3}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_2}, & \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial H_b}{\partial q_3}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_4}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_4}, & \frac{dq_5}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_5}, & \frac{dq_6}{dt} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_6}, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_4}, & \frac{dp_5}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_5}, & \frac{dp_6}{dt} &= -\frac{\partial H_a}{\partial q_6}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Система (22) определяет промежуточное движение тела B, а система (23) — промежуточное движение тела A. Нетрудно установить механическое значение этих уравнений. Рассмотрим сначала систему (22). Так как

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1}{\mu_b} p_1, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{1}{\mu_b} p_2, \quad \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{1}{\mu_b} p_3,$$

то система (22) может быть написана в виде

$$\mu_b \frac{d^2q_1}{dt^2} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_1}, \quad \mu_b \frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_2}, \quad \mu_b \frac{d^2q_3}{dt^2} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_3}$$

или

$$\mu_b \frac{d^2q_1}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_1, \quad \mu_b \frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_2, \quad \mu_b \frac{d^2q_3}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_3.$$

Имея в виду выражение (2) для μ_b, мы можем написать эти уравнения еще в таком виде:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = -\frac{f(m_b + m_c)}{r_{bc}^3} q_1, \quad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{f(m_b + m_c)}{r_{bc}^3} q_2,$$

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} = -\frac{f(m_b + m_c)}{r_{bc}^3} q_3,$$

откуда видно, что эти уравнения определяют относительное движение тела B под действием притяжения одного только тела C. Следовательно, система (22) определяет невозмущенное движение планеты B вокруг Солнца и это движение может быть полностью определено, как мы это показали в главе четвертой. Точно так же уравнения (23) могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2 q_4}{dt^2} = -\frac{fm_c(m_a + m_b + m_c)}{m_b + m_c} \frac{q_4}{r_{ga}^3},$$

$$\frac{d^2 q_5}{dt^2} = -\frac{fm_c(m_a + m_b + m_c)}{m_b + m_c} \frac{q_5}{r_{ga}^3},$$

$$\frac{d^2 q_6}{dt^2} = -\frac{fm_c(m_a + m_b + m_c)}{m_b + m_c} \frac{q_6}{r_{ga}^3},$$

и эти уравнения можно рассматривать как уравнения невозмущенного движения тела A, под действием притяжения фиктивной массы, равной по величине $\frac{m_c(m_a+m_b+m_c)}{m_b+m_c}$, помещенной в точке G. Эти уравнения также легко могут быть проинтегрированы так, как это было показано в главе четвертой.

Резюмируя, мы можем сказать, что промежуточное движение, определяемое характеристической функцией H_0, состоит из кеплеровского движения точки B вокруг точки C и кеплеровского движения точки A вокруг точки G.

Интегрирование уравнений (22) и (23) может быть произведено при помощи теоремы Гамильтона-Якоби, что мы проделаем в следующем параграфе. Так как функции H_b и H_a не зависят явно от времени, то уравнения Гамильтона-Якоби напишутся для систем (22) и (23) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\mu_b}\left[\left(\frac{\partial W_b}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W_b}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial W_b}{\partial q_3}\right)^2\right]&=\frac{fm_b m_c}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}+h_1,\\ \frac{1}{2\mu_a}\left[\left(\frac{\partial W_a}{\partial q_4}\right)^2+\left(\frac{\partial W_a}{\partial q_5}\right)^2+\left(\frac{\partial W_a}{\partial q_6}\right)^2\right]&=\frac{fm_a m_c}{\sqrt{q_4^2+q_5^2+q_6^2}}+h_4.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Интегрируя эти уравнения, мы получим их полные интегралы W_b и W_a в виде

$$\begin{aligned}W_b&=W_b(q_1,\ q_2,\ q_3,\ h_1,\ h_2,\ h_3),\\ W\ &=W_a(q_4,\ q_5,\ q_6,\ h_4,\ h_5,\ h_6),\end{aligned}$$

после чего промежуточное движение определится уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W_b}{\partial h_1}&=t+\gamma_1, & \frac{\partial W_b}{\partial q_1}&=p_1,\\ \frac{\partial W_b}{\partial h_2}&=\gamma_2, & \frac{\partial W_b}{\partial q_2}&=p_2,\\ \frac{\partial W_b}{\partial h_3}&=\gamma_3, & \frac{\partial W_b}{\partial q_3}&=p_3,\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W_a}{\partial h_4}&=t+\gamma_4, & \frac{\partial W_a}{\partial q_4}&=p_4,\\ \frac{\partial W_a}{\partial h_5}&=\gamma_5, & \frac{\partial W_a}{\partial q_5}&=p_5,\\ \frac{\partial W_a}{\partial h_6}&=\gamma_6, & \frac{\partial W_a}{\partial q_6}&=p_6.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Величины h_1, h_2, h_3, γ_1, γ_2, γ_3 суть канонические постоянные, определяющие промежуточное движение тела B, и h_4, h_5, h_6, γ_4, γ_5, γ_6 — канонические постоянные, определяющие промежуточное движение тела A.

Зная W_a и W_b нетрудно найти полный интеграл V уравнения Гамильтона-Якоби, соответствующего системе (19). Это уравнение напишется в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0 \tag{27}$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_a + H_b = 0.$$

Полагая

$$V = -ht + W,$$

мы приведем предыдущее уравнение к виду

$$H_a + H_b = h$$

и удовлетворим ему функцией

$$W = W_a + W_b,$$

полагая

$$h = h_1 + h_4.$$

Тогда полный интеграл уравнения (27) напишется в виде

$$V = -(h_1 + h_4)\,t + W_a + W_b. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь истинное движение, определяемое уравнениями (11), выведенными в § 52. Следуя методу произвольных постоянных, рассмотренному нами в § 51, мы можем определять истинное движение тел B и A теми же формулами (25) и (26), как и в промежуточном движении. Только величины h_i и γ_i не будут уже постоянными, какими они были в промежуточном движении, а будут функциями времени, определяемыми системой канонических уравнений с характеристической функцией H_1. Эти уравнения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial h_i}, \\ \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где H_1 определяется формулой (18). Разумеется, H_1 должна быть выражена в функции величин γ_i и h_i при помощи формул промежуточного движения (25) и (26).

Таким образом интегрирование диференциальных уравнений основной задачи небесной механики (для системы трех тел), т. е. уравнений (11), мы привели к равносильной задаче, а именно к интегрированию уравнений (29), определяющих параметры промежуточного движения.

Если было бы возможно полностью проинтегрировать эти уравнения, то наша задача была бы решена, так как, зная величины h_i, γ_i как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (29), мы получили бы величины q_i, p_i, определяющие истинное движение, из формул промежуточного движения (25) и (26). Но уравнения (29), к сожалению, не могут быть полностью проинтегрированы и поэтому, вообще говоря, переходя от уравнений (11) к уравнениям (29), мы перешли от одной, весьма трудной задачи к другой, столь же трудной, как и первая. Однако если задача, нами рассматриваемая, заключается в определении движений каких-нибудь двух планет солнечной системы, то здесь нас выручает то обстоятельство, что массы вообще всех планет чрезвычайно малы по сравнению с массой Солнца.

Рассмотрим подробнее, в чем заключается для нас выгода этого обстоятельства. Для этого рассмотрим характеристическую функцию H_1 системы (29) и покажем, что она есть малая величина второго порядка, если каждую из планетных масс m_a и m_b считать малой величиной первого порядка. Действительно, мы имеем

$$H_1 = \frac{fm_a m_c}{r_{ga}} - \frac{fm_a m_c}{r_{ca}} - \frac{fm_a m_b}{r_{ab}}. \tag{30}$$

Последний член этого выражения содержит множителем величину $m_a m_b$, т. е. по условию *есть малая величина второго порядка* относительно масс. Совокупность двух первых членов может быть написана в виде

$$fm_a m_c \left(\frac{1}{r_{ga}} - \frac{1}{r_{ca}} \right)$$

или

$$fm_a m_c \frac{r_{ca} - r_{ga}}{r_{ga}\, r_{ca}}.$$

Помножая числитель и знаменатель последнего выражения на сумму $r_{ca} + r_{ga}$, мы представим его в виде

$$fm_a m_c \frac{r_{ca}^2 - r_{ga}^2}{r_{ga}\, r_{ca} (r_{ca} + r_{ga})}.$$

Но из формул (8) мы получаем

$$r_{ca}^2 - r_{ga}^2 = \frac{m_b^2}{(m_c + m_b)^2} r_{bc}^2 + \frac{2m_b}{m_c + m_b} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6),$$

вследствие чего выражение для H_1 может быть написано в виде

$$H_1 = fm_a m_b \left[\frac{2m_c}{m_c + m_b} \frac{q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6}{r_{ga}\, r_{ca} (r_{ga} + r_{ca})} - \frac{1}{r_{ab}} \right] +$$
$$+ fm_a m_b^2 \frac{m_c}{(m_c + m_b)^2} \frac{r_{bc}^2}{r_{ga}\, r_{ca} (r_{ga} + r_{ca})},$$

откуда видно, что H_1 есть действительно малая величина второго порядка относительно масс m_a и m_b.

Но если это так, то очевидно, что частные производные $\frac{\partial H_1}{\partial h_i}$ и $\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_i}$ также будут величинами второго порядка относительно масс, вследствие чего величины $\frac{dh_i}{dt}$ и $\frac{d\gamma_i}{dt}$ также будут малы по крайней мере в течение некоторого промежутка времени, откуда следует, что параметры промежуточного движения изменяются чрезвычайно медленно.

Поэтому если мы найдем *приближенные выражения* для величин γ_i и h_i, то получим возможность определить *другое* промежуточное движение, более близкое к истинному, чем промежуточное движение, определенное формулами (25) и (26). Это второе промежуточное движение будет тем ближе к истинному движению, чем с большей точностью определены γ_i и h_i. Заметим тут же, что вообще невозможно получить промежуточное движение, достаточно близкое к истинному *для всех значений времени*. Указанная близость будет существовать вообще только для значений времени, заключающихся в некотором ограниченном промежутке, после чего начнутся уже значительные расхождения. Впрочем, для практических приложений это оказывается большей частью вполне достаточным, но делать какие-нибудь заключения о свойствах движения из такой приближенной теории, разумеется, невозможно. Для этого необходимо применение более точных методов.

§ 54. Интегрирование уравнений промежуточного движения. Следуя плану, установленному в предыдущем параграфе, мы должны прежде всего проинтегрировать уравнения промежуточного движения (22) и (23). Обе эти системы имеют совершенно одинаковый вид, так что достаточно найти общий интеграл какой-нибудь одной из них. Общий интеграл другой напишется по аналогии. Рассмотрим хотя бы систему (22). Для ее интегрирования удобнее ввести вместо переменных p_i и q_i новые переменные, переходя от прямоугольных координат к координатам полярным. Положим

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= r\cos\varphi\cos\theta, \\ q_2 &= r\cos\varphi\sin\theta, \\ q_3 &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где r есть радиус-вектор точки B, т. е. та же самая величина, которую мы обозначали до сих пор через r_{bc}. Живая сила точки B выражается формулой

$$T_b = \frac{1}{2}\,\mu_b(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2). \tag{32}$$

После перехода к полярным координатам она примет вид

$$T_b = \frac{1}{2}\,\mu_b\,[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\,\cos^2\varphi\,\dot{\theta}^2]. \tag{33}$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\partial T_b}{\partial\dot{r}} = \mu_b\dot{r} = \mu_b\frac{dr}{dt}, \\ \Phi &= \frac{\partial T_b}{\partial\dot{\varphi}} = \mu_b r^2\dot{\varphi} = \mu_b r^2\frac{d\varphi}{dt}, \\ \theta &= \frac{\partial T_b}{\partial\dot{\theta}} = \mu_b r^2\cos^2\varphi\,\dot{\theta} = \mu_b r^2\cos^2\varphi\,\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Тогда величины

$$\left.\begin{matrix} r, & \varphi, & \theta, \\ R, & \Phi, & \Theta \end{matrix}\right\} \tag{35}$$

также образуют систему канонических переменных и уравнения, их определяющие, напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Phi}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Theta}, \\ \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, & \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где характеристическая функция H получится из функции H_b преобразованием к новым переменным в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_b}\left[R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Theta^2}{r^2 \cos^2 \varphi}\right] - \frac{fm_b m_c}{r}. \tag{37}$$

Для интегрирования системы (36) составим соответствующее ей уравнение Гамильтона-Якоби. Мы получим

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{fm_b m_c \mu_b}{r} = h_1 \mu_b.$$

Полагая для сокращения

$$\beta_b^2 = fm_b m_c \mu_b = \frac{fm_b^2 m_c^2}{m_b + m_c}, \tag{38}$$

напишем предыдущее уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{2\beta_b^2}{r} + 2h_1 \mu_b. \tag{39}$$

Для нахождения общего интеграла системы (36) остается найти полный интеграл уравнения (39). Это уравнение может быть интегрировано без труда при помощи теоремы Штеккеля, но для упрощения выкладок мы применим более простой метод интегрирования.

Напишем уравнение (39) в виде

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = r^2\left[-\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1\right]$$

и будем искать его решение в виде

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\theta). \tag{40}$$

Мы имеем

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dW_1}{dr}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{dW_2}{d\varphi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{dW_3}{d\theta},$$

вследствие чего предыдущее уравнение примет вид

$$\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(\frac{dW_3}{d\theta}\right)^2 = r^2\left[-\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^3 + \frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1\right]. \tag{41}$$

Правая часть последнего уравнения содержит только переменную r, а левая часть — только переменные φ и θ. Поэтому если уравнение имеет решение указанного вида, то после подстановки левая часть не будет зависеть от r, а правая, наоборот, будет зависеть только от r. Это указывает на то, что результат подстановки должен быть величиной постоянной. Так как нас интересует действительное решение, то эта постоянная должна быть положительной, ибо при действительных функциях W_2 и W_3 левая часть уравнения (41) существенно положительна. Вследствие этого мы можем положить

$$r^2\left[-\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2+\frac{2\beta_b^2}{r}+2\mu_b h_1\right]=h_2^2, \tag{42}$$

$$\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{dW_3}{d\theta}\right)^2=h_2^2, \tag{43}$$

где h_2 — произвольная постоянная. Уравнение (42) содержит только одну независимую переменную r и представляет обыкновенное диференциальное уравнение с неизвестной функцией W_1. Уравнение (43) можно написать в виде

$$\left(\frac{dW_3}{d\theta}\right)^2=\cos^2\varphi\left[-\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2+h_2^2\right],$$

из которого мы заключаем, так же как и выше, что каждая его часть должна быть равна одной и той же положительной постоянной. Обозначая эту постоянную через h_3^2, мы получим два обыкновенных уравнения

$$\cos^2\varphi\left[-\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2+h_2^2\right]=h_3^2, \tag{44}$$

$$\left(\frac{dW_3}{d\theta}\right)^2=h_3^2. \tag{45}$$

Каждое из уравнений (42), (44) и (45) легко интегрируется, и мы получим

$$\left.\begin{aligned}
W_1&=\int\limits_{r_1}^{r}\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r}+2\mu_b h_1-\frac{h_2^2}{r^2}}\,dr,\\
W_2&=\int\limits_{0}^{\varphi}\sqrt{h_2^2-\frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi,\\
W_3&=h_3\theta,
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где r_1 — пока еще неопределенная постоянная. Функция W определится формулой

$$W=\int\limits_{r_1}^{r}\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r}+2\mu_b h_1-\frac{h_2^2}{r^2}}\,dr+\int\limits_{0}^{\varphi}\sqrt{h_2^2-\frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi+h_3\theta \tag{47}$$

и, очевидно, удовлетворяет уравнению (39), каковы бы ни были значения постоянных h_1, h_2, h_3 [1]), а поэтому представляет искомый полный интеграл этого уравнения.

[1]) В этом можно убедиться также непосредственной подстановкой.

По теореме Гамильтона-Якоби общий интеграл системы (36) определится теперь уравнениями

$$
\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial W}{\partial h_1} = t + \gamma_1, & \dfrac{\partial W}{\partial r} = R, \\
\dfrac{\partial W}{\partial h_2} = \gamma_2, & \dfrac{\partial W}{\partial \varphi} = \Phi, \\
\dfrac{\partial W}{\partial h_3} = \gamma_3, & \dfrac{\partial W}{\partial \theta} = \Theta,
\end{array}\right\} \quad (48)\ \ (49)
$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — три новые произвольные постоянные.

Выполняя диференцирования, мы получим следующие уравнения:

$$
\left.\begin{aligned}
t + \gamma_1 &= \mu_b \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\
\gamma_2 &= -h_2 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} + h_2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}, \\
\gamma_3 &= -h_3 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} + \theta
\end{aligned}\right| \quad (50)
$$

и

$$
\left.\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}} &= R = \mu_b \frac{dr}{dt}, \\
\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}} &= \Phi = \mu_b r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \\
h_3 = \Theta &= \mu_b r^2 \cos^2\varphi \frac{d\theta}{dt}.
\end{aligned}\right| \quad (51)
$$

Определение движения теперь может быть произведено следующим образом: из уравнений (50) мы определим последовательно r, φ и θ как функции времени и шести произвольных постоянных h_1, h_2, h_3, γ_1, γ_2, γ_3, а затем из уравнений (51) определим $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ в функции тех же величин.

Рассмотрим первое из уравнений (51), которое можно написать в виде

$$
\mu_b^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}
$$

или в виде

$$r^2\mu_b^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\mu_b h_1 r^2 + 2\beta_b^2 r - h_2^2.$$

Последнее уравнение показывает, что радиус-вектор r может принимать только такие значения, при которых трехчлен

$$2\mu_b h_1 r^2 + 2\beta_b^2 r - h_2^2 \tag{52}$$

принимает только положительные или нулевые значения[1]).

Так как коэфициенты β_b^2 и h_2^2 трехчлена существенно положительны, то множество значений r, при которых трехчлен принимает не отрицательные значения, зависит от знака постоянной h_1. Мы допустим, что h_1 отрицательна и это предположение сохраним во всей остальной части курса. То же допущение мы сделаем и относительно постоянной h_4. Так как h_1 и h_4 суть постоянные интегралов живых сил промежуточного движения тела B и соответственно A, то сделанное нами допущение равносильно предположению, что невозмущенные орбиты тел B и A суть эллипсы. Иными словами, считая постоянные h_1 и h_4 отрицательными, мы предполагаем, что истинные движения тел B и A принадлежат к эллиптическому типу.

Если $h_1 < 0$, то трехчлен (52) имеет две перемены знаков, а поэтому, по теореме Декарта, уравнение

$$2\mu_b h_1 r^2 + 2\beta_b^2 r - h_2^2 = 0 \tag{53}$$

имеет либо два действительных положительных корня, либо ни одного. Но отрицательных корней предыдущее уравнение заведомо не имеет. С другой стороны, обозначая через r_0 и $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ начальные значения r и $\frac{dr}{dt}$, мы имеем

$$2\mu_b h_1 r_0^2 + 2\beta_b^2 r_0 - h_2^2 = r_0^2\mu_b^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 > 0.$$

Так как, вдобавок, при $r = 0$ и $r = \infty$ трехчлен (52) делается отрицательным, то оба корня уравнения (53) действительны и положительны. Пусть эти корни будут r_1 и $r_2 > r_1$. Тогда, очевидно,

$$r_1 < r_0 < r_2,$$

и во все время движения (промежуточного) радиус-вектор r не может принимать значений, не содержащихся в промежутке (r_1, r_2). Так как точка B движется, по условию, по эллипсу с фокусом в C, то r_1 есть перигелийное расстояние и r_2 — афелийное расстояние. Обозначая через a и e большую полуось и эксцентриситет, мы имеем

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e).$$

---

[1]) Это следует из того, что в действительном движении величина $r^2\mu_b^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ не может принимать отрицательных значений.

Так как изменению радиуса-вектора от r_1 до r_2 соответствует перемещение точки B от перигелия до афелия, то, обозначая через $2T$ полный период обращения, мы из первого уравнения (50) находим

$$\tau + \gamma_1 = 0, \tag{54}$$

$$\tau + T + \gamma_1 = \mu_b \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}},$$

где τ — момент прохождения через перигелий. Из двух последних уравнений мы находим период $2T$:

$$2T = 2\mu_b \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\beta_b^2}{r} + 2\mu_b h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}. \tag{55}$$

Так как движение точки B происходит по эллипсу, фокус которого помещается в Солнце (в точке C), то это движение может быть определено формулами, совершенно аналогичными тем, которые мы выводили в главе четвертой. Поэтому нам нет нужды снова выводить эти формулы, но необходимо установить связь между каноническими постоянными γ_i, h_i и обычными эллиптическими элементами Ω, i, ω, a, e и τ. Это сделать нетрудно. Так как r_1 и r_2 суть корни уравнения (53), то

$$r_1 + r_2 = -\frac{\beta_b^2}{\mu_b h_1}, \quad r_1 r_2 = -\frac{h_2^2}{2\mu_b h_1}.$$

Отсюда, в силу выражений r_1 и r_2 через a и e, находим без труда

$$h_1 = -\frac{\beta_b^2}{2\mu_b a},$$

$$h_2 = \beta_b \sqrt{a(1-e^2)} = \beta_b \sqrt{p}.$$

Чтобы получить выражение для h_3, рассмотрим второе из уравнений (51)

$$\mu_b r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}.$$

В действительном движении подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений. Поэтому изменение угла φ должно быть стеснено неравенством

$$\cos^2\varphi \geqslant \frac{h_3^2}{h_2^2}.$$

Но движение точки B происходит в плоскости, проходящей через начало координат и образующей угол i с плоскостью q_1q_2. Поэтому наименьшее значение $\cos^2\varphi$ равно $\cos^2 i$, и мы имеем

$$\cos^2 i = \frac{h_3^2}{h_2^2},$$

откуда получаем

$$h_3 = h_2 \cos i = \beta_b \sqrt{a(1-e^2)} \cos i.$$

Остается выразить через эллиптические элементы постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Прежде всего формула (54) дает

$$\gamma_1 = -\tau.$$

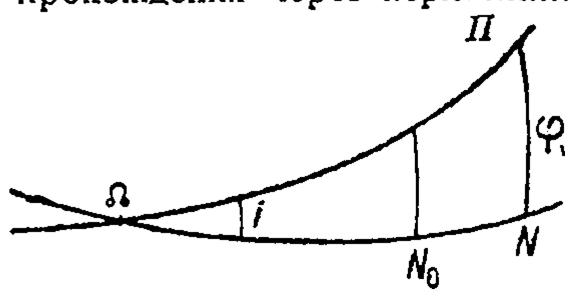
Чтобы определить γ_2, положим во втором из уравнений (50) $r = r_1$. Тогда первый интеграл исчезает, и мы получаем

$$\gamma_2 = h_2 \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}, \tag{56}$$

где φ_1 — значение угла φ для $r = r_1$, т. е. для $t = \tau$. Иными словами, φ_1 есть широта точки B в момент ее прохождения через перигелий.

Пусть на черт. 13 точка Π есть перигелий орбиты точки B. Тогда $☊\Pi = \omega$ — угловому расстоянию перигелия от узла, дуга ΠN есть широта в перигелии φ_1, и мы имеем из треугольника $N☊\Pi$

$$\sin\varphi_1 = \sin i \sin\omega.$$



Черт. 13.

Если B — любое положение точки, то $☊B = u$ — аргументу широты, и дуга $BN = \varphi$ — широте. Поэтому

$$\sin\varphi = \sin i \sin u. \tag{57}$$

Напишем формулу (56) в виде

$$\gamma_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}}$$

и введем вместо переменной φ новую переменную u формулой (57). Мы найдем

$$\gamma_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = \int_0^{\omega} \frac{\sin i \cos u\, du}{\sqrt{\sin^2 i \cos^2 u}} = \omega$$

или, обозначая через $\bar{\omega}$ долготу перигелия, имеем

$$\gamma_2 = \bar{\omega} - ☊.$$

Наконец, полагая в третьем из уравнений (50) $\varphi = 0$, мы находим

$$\gamma_3 = ☊,$$

так как долгота точки B равна долготе восходящего узла, когда точка пересекает плоскость $q_1 q_3$.

Таким образом мы выразили все канонические постоянные через привычные эллиптические элементы. Собирая вместе все полученные формулы, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &h_1 = -\frac{\beta_b^2}{2\mu_b a}, \quad h_2 = \beta_b \sqrt{a(1-e^2)}, \quad h_3 = \beta_b \sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \\ &\gamma_1 = -\tau, \qquad \gamma_2 = \omega, \qquad \gamma_3 = \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Промежуточное движение точки B теперь полностью определено.

Но совершенно также мы можем определить и промежуточное движение точки A. Вся разница будет заключаться только в том, что вместо постоянных μ_b и β_b войдут постоянные μ_a и β_a, причем последняя определится формулой

$$\beta_a^2 = \frac{f m_a^2 m_c (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}.$$

Обозначим эллиптические элементы промежуточного движения тела A буквами Ω', i', ω', a', e' и τ' и положим для симметрии $\beta_b = \beta$, $\beta_a = \beta'$, $\mu_b = \mu$, $\mu_a = \mu'$. Тогда связь между эллиптическими элементами и каноническими постоянными h_i, γ_i ($i = 1, 2, \dots 6$) определится формулами

$$\left.\begin{aligned} &h_1 = -\frac{\beta^2}{2\mu a}, \quad h_2 = \beta \sqrt{a(1-e^2)}, \quad h_3 = \beta \sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \\ &\gamma_1 = -\tau, \qquad \gamma_2 = \omega, \qquad \gamma_3 = \Omega \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &h_4 = -\frac{\beta'^2}{2\mu' a'}, \quad h_5 = \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}, \quad h_6 = \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i', \\ &\gamma_4 = -\tau', \qquad \gamma_5 = \omega', \qquad \gamma_6 = \Omega', \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\mu = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \qquad \beta^2 = f m_b m_c \mu, \\ &\mu' = \frac{m_a (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}, \qquad \beta'^2 = f m_a m_c \mu'. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Определим еще средние движения n и n' промежуточных движений точек B и A. Вычисляя интеграл в формуле (55), мы находим

$$T = \frac{\mu a}{\sqrt{-2\mu h_1}} = \frac{\mu a^{\frac{3}{2}}}{\beta}\pi,$$

откуда получаем

$$n = \frac{\pi}{T} = \frac{\beta}{\mu a^{\frac{3}{2}}}$$

и аналогично

$$n' = \frac{\beta'}{\mu' a'^{3/2}}.$$

Этим мы закончим исследование промежуточного движения. Выводить формулы, определяющие q_i в функции времени и канонических постоянных γ_i, h_i, нет надобности, так как при фактическом определении положений планет B и A гораздо удобнее пользоваться теми формулами, которые мы получили в главе четвертой и которые выражают координаты в функции времени и эллиптических элементов.

§ 55. Уравнения возмущенного движения. Следуя методу вариации произвольных постоянных, мы можем определять истинное движение тел B и A теми же формулами, как и их промежуточные движения. Только величины h_i, γ_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) будут в истинном движении не постоянными числами, но некоторыми функциями времени, определяемыми канонической системой диференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial h_i}, \\ \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6) \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

с характеристической функцией

$$H_1 = \frac{fm_a m_c}{r_{ga}} - \frac{fm_a m_c}{r_{ca}} - \frac{fm_a m_b}{r_{ab}}. \tag{63}$$

Так как r_{ga}, r_{ca} и r_{ab} выражаются через координаты q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, а эти последние в промежуточном движении суть известные функции времени и величин h_i, γ_i, то мы можем считать H_1 также *известной* функцией от времени и величин h_i, γ_i.

Как было установлено в общем плане интегрирования уравнений основной задачи, наша задача приводится теперь к приближенному определению функций γ_i и h_i из системы (62), в предположении, что истинное движение тела B и тела A, по крайней мере в течение известного промежутка времени, принадлежит к эллиптическому типу. С помощью соотношений (59) и (60), связывающих канонические и эллиптические элементы, мы можем без труда преобразовать систему (62) в другую, определяющую изменения обычных эллиптических элементов. Это преобразование приведет нас к уравнениям вида (44), выведенным в § 42, которые обычно употребляются при фактических вычислениях возмущений.

Но так как нашей целью являются не практические методы вычислений, а разъяснение принципиальной стороны классических методов, то во всем последующем изложении мы будем пользоваться исключительно каноническими уравнениями как более удобными при рассмотрении вопросов теоретического характера. Однако мы не будем пользоваться теми каноническими элементами h_i, γ_i, которые появились естественным образом при интегрировании уравнений промежуточного движения, а будем их заменять некоторыми другими, также каноническими, элементами но по различным соображениям более удобными, чем прежние.

Прежде всего мы введем новые переменные вместо двух пар переменных (h_1, γ_1) и (h_4, γ_4). Неудобство элементов $h_1, \gamma_1, h_4, \gamma_4$ проистекает вследствие следующей причины. Для того чтобы было возможно интегрировать уравнения (62), нужно, очевидно, получить для правых частей этих уравнений явные выражения в функции времени и зависимых переменных. Для этого нужно сначала выразить функцию H_1 в функции t, h_i, γ_i, а затем вычислить частные производные $\frac{\partial H_1}{\partial h_i}$ и $\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_i}$.

Функция H_1 зависит только от расстояний r_{ga}, r_{ca} и r_{ab}, т. е. только от координат q_1, q_2, q_3 и q_4, q_5, q_6. Чтобы получить H_1 как функцию t, h_i, γ_i, мы должны подставить в ее выражение вместо координат q_i их выражения из промежуточного движения, т. е. вместо q_1, q_2, q_3 должны подставить их выражения из невозмущенного эллиптического движения тела B и вместо q_4, q_5, q_6 — аналогичные величины для тела A.

Но в главе пятой мы показали, что координаты невозмущенного движения суть периодические функции от средней аномалии $M = n(t - \tau)$ и представляются тригонометрическими рядами, расположенными по синусам и косинусам кратных M. Поэтому q_1, q_2, q_3 будут периодическими функциями от величины $n(t + \gamma_1)$ и q_4, q_5, q_6 будут периодическими функциями от $n'(t + \gamma_4)$. Следовательно, и H_1 будет периодической функцией как от $n(t + \gamma_1)$, так и от $n'(t + \gamma_4)$.

Разлагая H_1 в двойной ряд Фурье по кратным дугам этих аргументов [1]), мы представим H_1 как сумму членов следующего вида:

$$A \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left\{ (jn + j'n')\,t + B \right\}, \tag{64}$$

где коэфициенты A зависят только от h_i, а величины B — только от γ_i, а j и j' суть целые числа.

Таким образом величины γ_i и h_i входят в функцию H_1 различным образом. Величины γ_i входят только под знаки тригонометрических функций и результаты диференцирования H_1 по величинам γ_i также будут содержать члены только вида (64). Величины h_2, h_3, h_5, h_6 входят только в коэфициенты A, и результаты диференцирования функции H_1 по этим переменным также будут содержать только члены вида (64). Но иначе обстоит дело с переменными h_1 и h_4. Эти величины входят также в коэфициенты A, но, кроме того, они входят еще под знаки sin и cos, так как n и n' зависят от h_1 и h_4. Действительно, мы можем написать

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\beta^2}(-2h_1)^{\frac{3}{2}}, \quad n' = \frac{\sqrt{\mu'}}{\beta'^2}(-2h_4)^{\frac{3}{2}}. \tag{65}$$

---

[1]) Принципы разложения функции H_1 и форма этого разложения будут нами рассмотрены ниже, в специальном параграфе.

Вследствие этого производные $\frac{\partial H_1}{\partial h_1}$ и $\frac{\partial H_1}{\partial h_4}$ будут необходимо содержать члены вида

$$t\bar{A}\frac{\sin}{\cos}\left\{(jn+j'n')t+B\right\},$$

т. е. члены, содержащие время t множителем.

Наличие таких членов крайне затрудняет интегрирование уравнений, вследствие чего стараются обычно так преобразовать эти уравнения, чтобы в их правые части не входили члены указанного вида.

Таким образом целью первого преобразования уравнений (62) является приведение их к такому виду, в котором правые части уравнений будут содержать время только под знаками тригонометрических функций.

Чтобы выполнить указанное преобразование, введем вместо переменных γ_1 и γ_4 новые переменные l и l' формулами

$$l=n(t+\gamma_1),\quad l'=n'(t+\gamma_4). \tag{66}$$

Величины l и l' суть не что иное, как средние аномалии тел B и A в промежуточном движении.

Преобразуем пару уравнений

$$\frac{dh_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_1},\quad \frac{d\gamma_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial h_1}, \tag{67}$$

вводя вместо γ_1 переменную l. Мы имеем, очевидно,

$$\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_1}=\frac{\partial H_1}{\partial l}\,\frac{\partial l}{\partial \gamma_1}=n\,\frac{\partial H_1}{\partial l}$$

и таким образом первое из уравнений (67) напишется в виде

$$\frac{dh_1}{dt}=-n\,\frac{\partial H_1}{\partial l}. \tag{68}$$

Далее мы имеем

$$\frac{dl}{dt}=n\left(1+\frac{d\gamma_1}{dt}\right)+(t+\gamma_1)\,\frac{\partial n}{\partial h_1}\,\frac{dh_1}{dt}. \tag{69}$$

Обозначим теперь через $\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)$ частную производную от H_1 по h_1, *входящему явно*, т. е. рассматривая n как бы независящим от h_1. Мы получим тогда

$$\frac{\partial H_1}{\partial h_1}=\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial n}\,\frac{\partial n}{\partial h_1}=\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial l}(t+\gamma_1)\,\frac{\partial n}{\partial h_1}.$$

Вставляя теперь в формулу (69) вместо $\frac{d\gamma_1}{dt}$ его значение $\frac{\partial H_1}{\partial h_1}$, а затем вместо $\frac{\partial H_1}{\partial h_1}$ его только что полученное выражение, мы находим

$$\frac{dl}{dt}=n+n\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)+n\,\frac{\partial H_1}{\partial l}(t+\gamma_1)\,\frac{\partial n}{\partial h_1}+(t+\gamma_1)\,\frac{\partial n}{\partial h_1}\,\frac{dh_1}{dt}$$

или, в силу (68),

$$\frac{dl}{dt}=n+n\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right).$$

Итак, сделанное преобразование заменяет пару уравнений (67) следующей парой уравнений:

$$\frac{dh_1}{dt} = -n\,\frac{\partial H_1}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = n + n\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right). \tag{70}$$

Совершенно аналогично пара уравнений

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \gamma_4}, \quad \frac{d\gamma_4}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h_4}$$

заменится следующими уравнениями:

$$\frac{dh_4}{dt} = -n'\,\frac{\partial H_1}{\partial l'}, \quad \frac{dl'}{dt} = n' + n'\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_4}\right). \tag{71}$$

Уравнения (70) и (71) решают поставленную задачу, так как их правые части не содержат t вне знаков тригонометрических функций. Но уравнения (70) и (71) не имеют канонической формы как уравнения для остальных переменных $h_2, h_3, \gamma_2, \gamma_3, h_5, h_6, \gamma_5, \gamma_6$. Чтобы привести опять всю систему к каноническому виду, введем прежде всего вместо h_1 и h_4 новые зависимые переменные L и L', полагая

$$L = \beta\sqrt{a}, \quad L' = \beta'\sqrt{a'}. \tag{72}$$

В силу соотношений (59) и (60) мы имеем

$$L = \frac{\beta^2}{\sqrt{-2\mu h_1}}, \quad L' = \frac{\beta'^2}{\sqrt{-2\mu' h_4}},$$

так что

$$h_1 = -\frac{\beta^4}{2\mu L^2}, \quad h_4 = -\frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} \tag{73}$$

и

$$n = \frac{\beta^4}{\mu L^3}, \qquad n' = \frac{\beta'^4}{\mu' L'^3}. \tag{74}$$

Преобразуем уравнения (70), вводя вместо h_1 переменную L. Мы находим

$$-n\,\frac{\partial H_1}{\partial l} = \frac{dh_1}{dt} = \frac{\beta^4}{\mu L^3}\,\frac{dL}{dt} = n\,\frac{dL}{dt},$$

откуда получаем

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial l}.$$

Далее имеем

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial L}\right) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right)\frac{\partial h_1}{\partial L} = n\left(\frac{\partial H_1}{\partial h_1}\right),$$

в силу чего пара уравнений (70) заменится следующими уравнениями:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial l}; \quad \frac{dl}{dt} = n + \left(\frac{\partial H_1}{\partial L}\right). \tag{75}$$

Точно так же пара уравнений (71) заменится уравнениями

$$\frac{dL'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{dl'}, \quad \frac{dl'}{dt} = n' + \left(\frac{\partial H_1}{\partial L'}\right). \tag{76}$$

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду, введем вместо H_1 новую характеристическую функцию F формулой

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} - H_1 \tag{77}$$

и обозначим, для симметрии, элементы движения тела B буквами L, G, H, l, g, h, а соответствующие элементы тела A — буквами L', G', H', l', g', h', причем эти элементы связаны с обычными эллиптическими следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} L &= \beta\sqrt{a}, & l &= n(t-\tau),\\ G &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \omega,\\ H &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned} L' &= \beta'\sqrt{a'}, & l' &= n'(t-\tau'),\\ G' &= \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}, & g' &= \omega',\\ H' &= \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)\cos i'}, & h' &= \Omega'. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Тогда диференциальные уравнения возмущенного движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h},\\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h'},\\ \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

где

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \frac{fm_am_b}{r_{ab}} + \frac{fm_am_c}{r_{ca}} - \frac{fm_am_c}{r_{ga}}, \tag{82}$$

и частные производные $\frac{\partial F}{\partial L}$ и $\frac{\partial F}{\partial L'}$ берутся по L и L', только входящим явно.

Функция F называется обычно *возмущающей* или *пертурбационной* функцией. Три последние ее члена, как мы видели выше, суть второго порядка относительно масс m_a и m_b. Два первые члена будут первого порядка относительно масс m_a и m_b. В самом деле, мы имеем

$$\frac{\beta^4}{2\mu L^2} = \frac{\beta^4}{2\mu\beta^2 a} = \frac{fm_bm_c}{2a}, \quad \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} = \frac{fm_am_c}{2a'},$$

и эти величины, действительно, содержат множителями только одну из малых масс.

Если мы определим каким-нибудь способом неизвестные функции, удовлетворяющие системе уравнений (80) и (81), то эллиптические элементы тел B и A получатся из следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned}
&a=\frac{L^2}{\beta^2}, \quad e=\frac{\sqrt{L^2-G^2}}{L}, \quad \cos i=\frac{H}{G}, \quad n=\frac{\beta^4}{\mu L^3},\\
&\omega=g, \quad \Omega=h, \quad \tau=t-\frac{l}{n}, \quad T=\frac{\pi}{n},\\
&a'=\frac{L'^2}{\beta'^2}, \quad e'=\frac{\sqrt{L'^2-G'^2}}{L'}, \quad \cos i'=\frac{H'}{G'}, \quad n'=\frac{\beta'^4}{\mu' L'^3},\\
&\omega'=g', \quad \Omega'=h', \quad \tau'=t-\frac{l'}{n'}, \quad T'=\frac{\pi}{n'}.
\end{aligned} \tag{83}$$

Определив значения этих величин для какого-нибудь значения времени, мы найдем затем положения и скорости тел B и A по обычным формулам эллиптического движения, данным в главе четвертой или пятой.

Заметим еще, что элементы L, G, H, l, g, h, определяемые формулами (78), называются *элементами Делонэ*, по имени ученого, введшего их впервые.

§ 56. Интегралы уравнений возмущенного движения. Как мы видели в § 22, симметричные уравнения относительного движения системы материальных точек (или уравнения в координатах Якоби), независимо от числа точек, имеют всегда четыре первых интеграла — интеграл живых сил и три интеграла площадей [1]).

Следовательно, уравнения (1) или (11), определяющие движение системы, состоящей из Солнца и двух планет, также имеют эти четыре интеграла. Эти интегралы могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{1}{\mu}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{\mu'}(p_4^2+p_5^2+p_6^2)=2(U+C) \tag{84}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\left(q_2\frac{dq_3}{dt}-q_3\frac{dq_2}{dt}\right)+\mu'\left(q_5\frac{dq_6}{dt}-q_6\frac{dq_5}{dt}\right)=c_1'',\\
&\mu\left(q_3\frac{dq_1}{dt}-q_1\frac{dq_3}{dt}\right)+\mu'\left(q_6\frac{dq_4}{dt}-q_4\frac{dq_6}{dt}\right)=c_2'',\\
&\mu\left(q_1\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dq_1}{dt}\right)+\mu'\left(q_4\frac{dq_5}{dt}-q_5\frac{dq_4}{dt}\right)=c_3''.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Уравнения (80) и (81) вполне равносильны уравнениям (1), так как также определяют относительное движение тел B и A, только в других переменных. Поэтому эти уравнения также должны иметь четыре интеграла и эти интегралы можно получить из уравнений (84) и (85) простой заменой величин p_i и q_i их выражениями в функции новых переменных (элементов Делонэ) из формул промежуточного движения.

---

[1]) См. уравнения (40) и (41) главы третьей.

Рассмотрим сначала уравнения (85) — интегралы площадей нашей задачи. Уравнения промежуточного движения тела B, как мы видели в § 53, могут быть написаны в виде

$$\mu \frac{d^2q_1}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_1, \quad \mu \frac{d^2q_2}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_2, \quad \mu \frac{d^2q_3}{dt^2} = -\frac{fm_b m_c}{r_{bc}^3} q_3.$$

Из этих уравнений, совершенно так же, как это было сделано в § 26, мы выводим интегралы площадей промежуточного движения тела B. Эти интегралы напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt}\right) = c_1, \quad \mu\left(q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt}\right) = c_2, \\ \mu\left(q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt}\right) = c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Аналогичным образом мы получим интегралы площадей промежуточного движения тела A в виде

$$\left.\begin{aligned} \mu'\left(q_5 \frac{dq_6}{dt} - q_6 \frac{dq_5}{dt}\right) = c_1', \quad \mu'\left(q_6 \frac{dq_4}{dt} - q_4 \frac{dq_6}{dt}\right) = c_2', \\ \mu'\left(q_4 \frac{dq_5}{dt} - q_5 \frac{dq_4}{dt}\right) = c_3', \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

где c_1, c_2, c_3 и c_1', c_2', c_3' суть величины, сохраняющие *в промежуточном движении* постоянные значения. Но в истинном движении эти величины будут функциями времени. Если i и Ω есть наклонение и долгота выходящего узла движения тела B, то мы имеем (см. § 27)

$$c_1 = c \sin i \sin \Omega, \quad c_2 = -c \sin i \cos \Omega, \quad c_3 = c \cos i, \qquad (88)$$

где

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Точно так же, обозначая через i' и Ω' наклонение и долготу узла движения тела A, мы имеем

$$c_1' = c' \sin i' \sin \Omega', \quad c_2' = -c' \sin i' \cos \Omega', \quad c_3' = c' \cos i', \qquad (89)$$

где

$$c' = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2}.$$

Определим теперь значения постоянных c и c'. Если мы примем за плоскость q_1q_2 плоскость движения тела B, то имеем (см. § 28)

$$\mu\left(q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt}\right) = c,$$

или в полярных координатах

$$\mu r^2 \frac{dv}{dt} = c, \qquad (90)$$

где v обозначает долготу в орбите тела B.

Но из формул (51) мы имеем

$$\mu r^2 \cos^2\varphi \frac{d\theta}{dt} = h_3 = h_2 \cos i.$$

Если плоскость q_1q_2 совпадает с плоскостью движения тела B, то $\varphi = i = 0$, $\theta = v$, и мы можем написать

$$\mu r^2 \frac{dv}{dt} = h_2. \tag{91}$$

Сравнивая теперь выражения (90) и (91), мы видим, что

$$c = h_2 = \beta \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Точно так же находим

$$c' = \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\ .$$

Интегралы площадей в промежуточном движении теперь могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(q_2 \frac{dq_3}{dt} - q_3 \frac{dq_2}{dt}\right) &= \quad \beta \sqrt{a(1-e^2)}\,\sin i \sin \Omega,\\
\mu\left(q_3 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_3}{dt}\right) &= -\beta \sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos \Omega,\\
\mu\left(q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt}\right) &= \quad \beta \sqrt{a(1-e^2)}\cos i,
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\mu'\left(q_5 \frac{dq_6}{dt} - q_6 \frac{dq_5}{dt}\right) &= \quad \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \sin \Omega',\\
\mu'\left(q_6 \frac{dq_4}{dt} - q_4 \frac{dq_6}{dt}\right) &= -\beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \cos \Omega',\\
\mu'\left(q_4 \frac{dq_5}{dt} - q_5 \frac{dq_4}{dt}\right) &= \quad \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i'.
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

В промежуточном движении величины a, e, i, Ω, a', e', i', Ω' сохраняют постоянные значения во все время движения. Но в истинном движении эти величины суть функции t, связанные с величинами, определяемыми уравнениями (80) и (81), формулами (83).

Таким образом формулы (92) и (93) просто дают преобразование выражений, стоящих в их левых частях, к новым переменным, и мы можем подставить эти выражения в интегралы площадей истинного движения, т. е. в формулы (85). Произведя это, мы напишем интегралы площадей истинного, т. е. возмущенного, движения в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\beta \sqrt{a(1-e^2)}\sin i \sin \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \sin \Omega' = c_1'',\\
&\beta \sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos \Omega + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \cos \Omega' = -c_2'',\\
&\beta \sqrt{a(1-e^2)}\cos i \qquad\quad + \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i' \qquad\quad = c_3'',
\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

где c_1'', c_2'' и c_3'' суть *величины постоянные*, могущие быть определенными из начальных условий.

Чтобы получить теперь интегралы площадей уравнений (80) и (81), достаточно в формулах (94) выразить эллиптические элементы через канонические при помощи формул (83). Произведя это, мы получим следующие интегралы:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{G^2-H^2}\sin h+\sqrt{G'^2-H'^2}\sin h' &= c_1'',\\ \sqrt{G^2-H^2}\cos h+\sqrt{G'^2-H'^2}\cos h' &= -c_2'',\\ H\quad+\quad H' &= c_3''.\end{aligned}\right\}\tag{95}$$

Эти уравнения позволяют определить какие-нибудь три из величин G, H, h, G', H', h', зная три остальные как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (80) и (81).

Уравнения (95) можно значительно упростить, если за основную координатную плоскость принять неизменяемую плоскость Лапласа (см. главу третью). Тогда $c_1''=c_2''=0$, и, обозначая третью постоянную через c, мы напишем интегралы площадей в виде

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{G^2-H^2}\sin h+\sqrt{G'^2-H'^2}\sin h' &= 0,\\ \sqrt{G^2-H^2}\cos h+\sqrt{G'^2-H'^2}\cos h' &= 0,\\ H\quad+\quad H' &= c.\end{aligned}\right\}\tag{96}$$

Из двух первых уравнений (96) мы находим

$$\operatorname{tg} h=\operatorname{tg} h',\tag{97}$$

откуда заключаем, что мы должны иметь или $h=h'$ или $h=h'+180°$. Но в первом случае ($h=h'$) оба члена в двух первых уравнениях будут иметь одинаковые знаки и их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$h=h'+180°,\tag{98}$$

в силу чего уравнения (96) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}h&=h'+180°,\\ G^2-H^2&=G'^2-H'^2,\\ H+H'&=c.\end{aligned}\right\}\tag{99}$$

Так как $h=\Omega$ и $h'=\Omega'$, то уравнение (98) можно иначе написать следующим образом:

$$\Omega=\Omega'+180°.\tag{100}$$

Этот интересный результат был впервые получен Якоби. Он может быть сформулирован следующим образом:

Линия восходящего узла орбиты одной планеты всегда совпадает с линией нисходящего узла орбиты другой планеты.

Рассмотрим теперь третье из уравнений (99). Выражая H и H' через эллиптические элементы, мы напишем это уравнение в виде

$$\beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i+\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i'=c.\tag{101}$$

Это уравнение позволяет доказать знаменитую *теорему Лапласа* об устойчивости солнечной системы. Эту теорему мы сформулируем следующим образом:

Пусть a_0 и a_0' суть значения больших полуосей в некоторый момент времени t_0, e_0, e_0' и i_0, i_0' — соответствующие значения эксцентриситетов и наклонений. Тогда, если

1) величины e_0, e_0', i_0, i_0' весьма малы,

2) величины a и a' в течение некоторого промежутка времени $T-t_0$ весьма мало отличаются от своих начальных значений a_0 и a_0',

3) величины $\beta\sqrt{a_0}$ и $\beta'\sqrt{a_0'}$ суть величины одного и того же порядка,

то, в промежутке (t_0, T) величины e, e', i и i' будут также иметь весьма малые значения.

Доказательство может быть проведено следующим образом. Согласно условиям теоремы, мы можем положить $a=a_0+\varepsilon$ и $a'=a_0'+\varepsilon'$, где a_0 и a_0' — постоянные, а ε и ε' — функции времени, имеющие для всех значений t в промежутке (t_0, T) весьма малые числовые значения.

Пользуясь теоремой Тэйлора, мы можем написать

$$\sqrt{a}=\sqrt{a_0}\left(1+\frac{\varepsilon}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a_0}\left(1+\frac{\varepsilon}{2a_0}-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon^2}{a_0^2}+\ldots\right),$$

$$\sqrt{a'}=\sqrt{a_0'}\left(1+\frac{\varepsilon'}{a_0'}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a_0'}\left(1+\frac{\varepsilon'}{2a_0'}-\frac{1}{8}\frac{\varepsilon'^2}{a_0'^2}+\ldots\right).$$

С помощью этих формул уравнение (101) напишется следующим образом:

$$\beta\sqrt{a_0}\sqrt{1-e^2}\,\cos i+\beta'\sqrt{a_0'}\sqrt{1-e'^2}\cos i'+\bar{\varepsilon}=c, \tag{102}$$

где $\bar{\varepsilon}$ — функция времени, принимающая в промежутке (t_0, T) весьма малые значения и обращающаяся в нуль при $t=t_0$.

Так как

$$\beta\sqrt{a_0}+\beta'\sqrt{a_0'}=\text{const},$$

то, вычитая из этого равенства уравнение (102), мы получим следующее уравнение:

$$\beta\sqrt{a_0}\,(1-\sqrt{1-e^2}\,\cos i)+\beta'\sqrt{a_0'}\,(1-\sqrt{1-e'^2}\cos i')=c'+\bar{\varepsilon},$$

где c' — новая постоянная.

Последнее уравнение может быть также написано в виде

$$\beta\sqrt{a_0}\,\frac{e^2\cos^2 i+\sin^2 i}{1+\sqrt{1-e^2}\cos i}+\beta'\sqrt{a_0'}\,\frac{e'^2\cos^2 i'+\sin^2 i'}{1+\sqrt{1-e^2}\cos i'}=c'+\bar{\varepsilon}, \tag{103}$$

и последнее уравнение имеет место для всех значений t в промежутке (t_0, T). Полагая в уравнении (103) $t=t_0$, мы получаем

$$c'=\beta\sqrt{a_0}\,\frac{e_0^2\cos^2 i_0+\sin^2 i_0}{1+\sqrt{1-e_0^2}\cos i_0}+\beta'\sqrt{a_0'}\,\frac{e_0'^2\cos^2 i_0'+\sin^2 i_0'}{1+\sqrt{1-e_0'^2}\cos i_0'}.$$

Так как по условию e_0, e_0', i_0, i_0' весьма малы и $\beta\sqrt{a_0}$, $\beta'\sqrt{a_0'}$ — величины одинакового порядка, то вычисленное значение постоянной c' также будет весьма мало. Отсюда следует, что правая часть уравнения (103) будет также весьма мала в промежутке (t_0, T). Но $\beta\sqrt{a_0}$, $\beta'\sqrt{a_0'}$ — конечные величины одинакового порядка. Поэтому, чтобы равенство (103) не нарушилось в промежутке (t_0, T), величины

$$e\cos i, \quad \sin i, \quad e'\cos i', \quad \sin i'$$

должны сохранять весьма малые значения, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема имеет весьма большое значение для небесной механики. Действительно, в настоящее время эксцентриситеты и наклонения всех больших планет весьма малы, а величины $\beta\sqrt{a_0}$ для всех планет приблизительно одинакового порядка. Если бы удалось доказать, что полуоси все время остаются близкими к их средним значениям, то из теоремы Лапласа следовала бы также малость эксцентриситетов и наклонностей.

Иначе говоря, в настоящее время орбиты больших планет суть почти круги и лежат почти в одной плоскости. По теореме Лапласа следует, что такое состояние движения будет продолжаться сколь угодно долго, если радиусы этих кругов не будут значительно отклоняться от своих средних значений. В следующей главе мы покажем, что с известной степенью приближения неизменяемость больших полуосей действительно может быть установлена. Однако строгого доказательства небесная механика до сих пор не имеет[1]).

Заметим еще, что если бы даже неизменяемость больших полуосей была строго доказана, то из этого еще отнюдь не следует, что солнечная система действительно устойчива. Это ясно из того, что во всех наших рассуждениях мы принимаем во внимание *только силы взаимных притяжений планет*, а все прочие силы остаются совершенно неучтенными, вследствие чего и их действие остается неизвестным.

В заключение скажем несколько слов об интеграле живых сил, который дается уравнением (84). Вполне возможно выразить также и этот интеграл через канонические элементы, для чего нужно только заменить величины p_i и q_i их выражениями из промежуточного движения. Но в результате такого преобразования уравнение (84) потеряет свой простой вид, да кроме того, в него необходимо войдет еще время t. Поэтому такого преобразования мы совершенно не будем проделывать.

[1]) Мы доказали теорему Лапласа для системы, состоящей из Солнца и только двух планет. Но такое же доказательство может быть проведено и для любого числа планет, так как мы основывали его только на интегралах площадей. Если мы имеем систему из n планет, то уравнение (103) заменится следующим:

$$\sum_{k=1}^{u} \beta_k \sqrt{a_k^{(0)}}\, \frac{e_k^2\cos^2 i_k + \sin^2 i_k}{1+\sqrt{1-e_k^2}\cos i_k} = c' + \bar{\varepsilon},$$

откуда и получаются те же выводы, что и раньше.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 57. Введение новых канонических элементов. В предыдущей главе мы получили диференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l}, && \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g}, && \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h},\\
&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}, && \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}, && \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H},\\
&\frac{dL'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l'}, && \frac{dG'}{dt}=\frac{dF}{dg'}, && \frac{dH'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h'},\\
&\frac{dl'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L'}, && \frac{dg'}{dt}=-\frac{dF}{dG'}, && \frac{dh'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}{}^{1)},
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$F=\frac{\beta^4}{2\mu L^2}+\frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2}+\frac{fm_am_b}{r_{ab}}+\frac{fm_am_c}{r_{ca}}-\frac{fm_am_c}{r_{ga}} \qquad (2)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&L=\beta\sqrt{a}, && l=n(t-\tau),\\
&G=\beta\sqrt{a(1-e^2)}, && g=\omega,\\
&H=\beta\sqrt{a(1-c^2)}\cos i, && h=\Omega,\\
&L'=\beta'\sqrt{a'}, && l'=n'(t-\tau'),\\
&G'=\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}, && g'=\omega',\\
&H'=\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i', && h'=\Omega'.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

---

[1]) Напомним, что производные $\frac{\partial F}{\partial L}$, $\frac{\partial F}{\partial L'}$ берутся по L и L', входящим в функцию F только явным образом.

Система канонических элементов (3) была введена нами для того, чтобы в правых частях диференциальных уравнений движения избежать членов, содержащих время множителем. Но эта система элементов еще не является окончательной в теории больших планет.

Причиной этому обстоятельству является то, что для приближенного интегрирования уравнений (1) мы должны прежде всего выразить характеристическую функцию F через величины (3). Это может быть достигнуто только путем разложения функции F в бесконечный ряд, степенной по отношению к величинам L, G, H, L', G', H' и тригонометрический по отношению к остальным элементам. Но эксцентриситеты и наклонности больших планет весьма малы, вследствие чего величины L, G, H, L', G', H' имеют *конечные значения*, а поэтому разложение F по степеням этих величин будет, во всяком случае, весьма медленно сходящимся, что потребует рассмотрения весьма большого числа членов.

Поэтому нашей ближайшей целью будет введение таких новых элементов, которые имели бы малые значения при малых эксцентриситетах и наклонениях так, чтобы функцию F можно было разлагать в ряд по степеням *малых величин*. С этой целью введем сначала вместо элементов L, G, H, l, g, h, L', G', H', l', g', h' новые элементы Λ, Γ, Z, λ, γ, z, Λ', Γ', Z', λ', γ', z' формулами

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= L, & \Gamma &= L - G, & Z &= G - H,\\
\lambda &= l + g + h, & \gamma &= -g - h, & z &= -h,\\
\Lambda' &= L', & \Gamma' &= L' - G', & Z' &= G' - H',\\
\lambda' &= l' + g' + h', & \gamma' &= -g' - h', & z' &= -h'.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что новые элементы также образуют каноническую систему. Для этого образуем выражение

$$\begin{gathered}
l\,dL + g\,dG + h\,dH - \lambda\,d\Lambda - \gamma\,d\Gamma - z\,dZ + \\
+ l'dL' + g'dG' + h'dH' - \lambda'd\Lambda' - \gamma'd\Gamma' - z'dZ'.
\end{gathered} \tag{5}$$

В силу формул (4) мы имеем

$$\begin{gathered}
l\,dL + g\,dG + h\,dH - \lambda\,d\Lambda - \gamma\,d\Gamma - z\,dZ = l\,dL + g\,dG + h\,dH - \\
- (l + g + h)\,dL + (g + h)\,(dL - dG) + h\,(dG - dH) \equiv 0.
\end{gathered}$$

Аналогичное тождество получим и для выражения, содержащего вторую группу элементов, вследствие чего выражение (5) оказывается тождественным нулю, откуда, по теореме Пуанкаре, мы заключаем, что величины (4) определяются также канонической системой уравнений с той же самой характеристической функцией F.

Преобразованные уравнения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma}, & \frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial z},\\
\frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, & \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial Z},\\
\frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{d\Gamma'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma'}, & \frac{dZ'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial z'},\\
\frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'}, & \frac{d\gamma'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma'}, & \frac{dz'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial Z'}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Выражая новые канонические элементы через обычные эллиптические мы получим формулы

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= \beta\sqrt{a}, & \lambda &= n(t-\tau)+\omega+\Omega,\\
\Gamma &= \beta\sqrt{a}\,(1-\sqrt{1-e^2}), & \gamma &= -\omega-\Omega,\\
Z &= \beta\sqrt{a\,(1-e^2)}\,(1-\cos i), & z &= -\Omega,\\
\Lambda' &= \beta'\sqrt{a'}, & \lambda' &= n'(t-\tau')+\omega'+\Omega',\\
\Gamma' &= \beta'\sqrt{a'}\,(1-\sqrt{1-e'^2}), & \gamma' &= -\omega'-\Omega',\\
Z' &= \beta'\sqrt{a'\,(1-e'^2)}\,(1-\cos i'), & z' &= -\Omega'.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда видно, что $-z$ есть долгота восходящего узла, $-\gamma=\omega+\Omega=\bar{\omega}$ есть долгота перигелия, $\lambda=n(t-\tau)+\bar{\omega}$ есть средняя долгота. Далее мы имеем

$$\frac{\Gamma}{\Lambda}=1-\sqrt{1-e^2}=1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^2+\ldots,$$

откуда следует, что Γ есть величина порядка квадрата эксцентриситета и, следовательно, весьма мала, если e мало. Наконец,

$$\frac{Z}{\Lambda\sqrt{1-e^2}}=1-\cos i=2\sin^2\frac{i}{2}\approx i^2,$$

откуда следует, что Z есть величина порядка квадрата наклонности и также весьма мала при малом i. Те же заключения справедливы относительно Γ' и Z'.

Сделанным преобразованием мы достигаем указанной выше цели. Однако мы рассмотрим еще одну новую систему элементов, вводя вместо величин Γ, γ, Z, z, Γ', ..., z' новые переменные ξ, η, p, q, ξ', η', p', q' формулами

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, & \eta &= \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma,\\
p &= \sqrt{2Z}\cos z, & q &= \sqrt{2Z}\sin z.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Что касается элементов Λ, λ, Λ', λ', то мы их оставим без изменения. Новые элементы также образуют каноническую систему. Чтобы убедиться в этом, составим выражение

$$\Gamma\,d\gamma+Z\,dz-\xi\,d\eta-p\,dq+\Gamma'd\gamma'+Z'dz'-\xi'd\eta'-p'dq'. \tag{8'}$$

Из формул (8) находим

$$\xi\,d\eta=\sin\gamma\cos\gamma\,d\Gamma+2\Gamma\cos^2\gamma\,d\gamma,$$

откуда получаем

$$\Gamma d\gamma-\xi\,d\eta=\Gamma(1-2\cos^2\gamma)\,d\gamma-\sin\gamma\cos\gamma\,d\Gamma=d\left(-\frac{\Gamma}{2}\sin^2\gamma\right),$$

и аналогично

$$Z\,dz - p\,dq = d\left(-\frac{Z}{2}\sin 2z\right).$$

Следовательно, выражение

$$\Gamma\,d\gamma + Z\,dz - \xi\,d\eta - p\,dq = d\left(-\frac{\Gamma}{2}\sin 2\gamma - \frac{Z}{2}\sin 2z\right)$$

есть полный диференциал. Аналогичный вывод получаем и для второй группы переменных, вследствие чего выражение (8′) оказывается полным диференциалом, что и доказывает, что новые переменные также образуют каноническую систему с той же самой характеристической функцией.

Новые диференциальные уравнения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q},\\
\frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p},\\
\frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{d\xi'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta'}, & \frac{dp'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q'},\\
\frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi'}, & \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p'}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Через эллиптические элементы новые элементы выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= \beta\sqrt{a},\\
\lambda &= n(t-\tau) + \bar{\omega},\\
\xi &= \sqrt{2\Lambda(1-\sqrt{1-e^2})}\cos\bar{\omega},\\
\eta &= -\sqrt{2\Lambda(1-\sqrt{1-e^2})}\sin\bar{\omega},\\
p &= \sqrt{2\Lambda\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\cos\Omega,\\
q &= -\sqrt{2\Lambda\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\sin\Omega,\\
\Lambda' &= \beta'\sqrt{a'},\\
\lambda' &= n'(t-\tau') + \bar{\omega},\\
\xi' &= \sqrt{2\Lambda'(1-\sqrt{1-e^2})}\cos\bar{\omega}',\\
\eta' &= -\sqrt{2\Lambda'(1-\sqrt{1-e'^2})}\sin\bar{\omega}',\\
p' &= \sqrt{2\Lambda'\sqrt{1-e'^2}(1-\cos i')}\cos\Omega',\\
q' &= -\sqrt{2\Lambda'\sqrt{1-e'^2}(1-\cos i')}\sin\Omega'.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из этих формул следует, что величины

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}$$

суть малые величины порядка эксцентриситетов, а величины

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}$$

суть малые величины порядка наклонностей.

§ 58. Разложение пертурбационной функции. Нашей ближайшей задачей является теперь выразить функцию F, определяемую формулой (2) или формулой

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2} + \frac{fm_a m_b}{r_{ab}} + \frac{fm_a m_c}{r_{ca}} - \frac{fm_a m_c}{r_{ga}}, \tag{11}$$

в функции канонических элементов Λ, λ, ξ, η, p, q, Λ', λ', ξ', η', p', q'.

Ранее уже было указано, что так как координаты планеты в промежуточном движении не могут быть выражены в функции времени конечным образом, то и характеристическая функция не может быть представлена конечным образом в функции элементов.

Поэтому нам приходится пользоваться разложением функции F в ряд. Этот ряд будет иметь смешанный характер. Действительно, так как в промежуточном движении координаты планет суть периодические функции времени, то функция F будет также периодической относительно переменных λ и λ' и рассматриваемая как функция этих переменных может быть разложена в двойной ряд Фурье по синусам и косинусам кратных λ и λ'. Коэфициенты этого двойного ряда Фурье будут функциями всех остальных переменных и могут быть разложены в степенные ряды, расположенные по возрастающим степеням малых величин

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}.$$

Оперируя указанным образом, мы получим для F разложение вида

$$F = \sum_{j,\,j'} A_{j,\,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda') + \sum_{j,\,j'} B_{j,\,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda'),$$

где j и j' суть целые числа.

Не вдаваясь в детали операций, связанных с получением указанного разложения, мы наметим только ход этих операций. В выражение характеристической функции F входят обратные величины расстояний r_{ca}, r_{ga} и r_{ab}, где r_{ga} есть радиус-вектор тела A, r_{ca} — расстояние тела A до Солнца C и r_{ab} — взаимное расстояние между телами A и B. Координаты тела B относительно C как начала суть q_1, q_2, q_3 и элементы оскулирующего эллипса орбиты тела B суть Λ, λ, ξ, η, p, q. Элементы оскулирующего эллипса орбиты тела A мы обозначаем через Λ', λ', ξ', η', p', q'. Обозначим для симметрии координаты тела A относительно G как начала через q'_1, q'_2, q'_3, (вместо ранее употреблявшихся q_4, q_5, q_6). Тогда расстояния r_{ga}, r_{ca} и r_{ab} определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} r_{ga}^2 &= q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2, \\ r_{ca}^2 &= \left(\frac{m_b}{m_c+m_b}\right)^2 (q_1^2+q_2^2+q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \\ &\quad + \frac{2m_b}{m_c+m_b}(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'), \\ r_{ab}^2 &= \left(\frac{m_c}{m_c+m_b}\right)^2 (q_1^2+q_2^2+q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - \\ &\quad - \frac{2m_c}{m_c+m_b}(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Используя формулы эллиптического движения для тел A и B, мы можем разложить координаты q_1, q_2, q_3 и q'_1, q'_2, q'_3 по степеням величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}$, т. е. по степеням малых величин порядка эксцентриситетов и наклонений оскулирующих орбит. Коэфициенты в этих разложениях будут периодическими функциями средних аномалий или средних долгот λ и λ', которые могут быть разложены в ряды Фурье по кратным дугам λ и λ'. Отсюда и получается для F разложение вида (12).

Если в выражении пертурбационной функции F мы сохраним только члены первого и второго порядков относительно малых масс m_a и m_b и пренебрежем всеми остальными членами, то мы может положить

$$r_{ab}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - 2(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'),$$

$$r_{ca}^2 = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \frac{2m_b}{m_c}(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3'),$$

откуда, с той же степенью приближения, находим

$$\frac{1}{r_{ca}} = \frac{1}{r_{ga}}\left[1 + \frac{2m_b}{r_{ga}^2 m_c}(q_1q_2' + q_2q_2' + q_3q_3')\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{r_{ga}} - \frac{m_b}{m_c}\,\frac{1}{r_{ga}^2}(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3').$$

Таким образом выражение для F с точностью до членов второго порядка включительно, относительно масс, может быть написано в виде

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2} - \frac{fm_am_b}{r_{ga}^3}(q_1q_1' + q_2q_2' + q_3q_3') + \frac{fm_am_b}{r_{ab}}. \tag{13}$$

Координаты q_i и q'_i могут быть разложены в ряды, как указано выше. Разложение для $\frac{1}{r_{ga}}$, а следовательно, и для $\frac{1}{r_{ga}^3}$ непосредственно берется из рядов эллиптического движения. Наибольшую трудность, впрочем чисто технического характера, представляет разложение обратного взаимного расстояния, т. е. величины $\frac{1}{r_{ab}}$.

Поэтому в выражении (13) для F различают две части: *основную часть* F_1

$$F_1 = \frac{fm_a m_b}{r_{ab}} \tag{14}$$

и *дополнительную часть* F_2

$$F_2 = \frac{\beta^4}{2\mu \Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' \Lambda'^2} - \frac{fm_a m_b}{r_{ga}^3}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'). \tag{15}$$

Разложим квадрат взаимного расстояния r_{ab}^2 на две части, полагая

$$r_{ab}^2 = \Delta_0^2 + f,$$

где Δ_0^2 содержит только члены, не зависящие от ξ, η и т. д., т. е. не зависящие от эксцентриситетов и наклонений, а f содержит все остальные члены. Очевидно, что

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\lambda - \lambda'). \tag{16}$$

Разлагая $\frac{1}{r_{ab}}$ по степеням f, мы получим

$$\frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{\Delta_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f}{\Delta_0^2} + \frac{3}{8}\frac{f^2}{\Delta_0^4} - \ldots\right),$$

где f — первого порядка относительно эксцентриситетов и наклонений, f^2 — второго порядка относительно тех же величин и т. д.

Выпишем теперь окончательные выражения для F_1 и F_2, ограничиваясь членами нулевого, первого и второго порядков относительно величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}$, т. е. относительно эксцентриситетов и наклонностей оскулирующих орбит тел B и A.

Для величины F_1 мы получим следующее выражение (17):

$$\begin{aligned}
F_1 = fm_a m_b \Bigg\{ &\frac{1}{\Delta_0} + \\
&+ \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\,\frac{1}{\Delta_0^3}\left[a^2\cos\lambda - \frac{3}{2}\,aa'\cos\lambda' + \frac{1}{2}\,aa'\cos(2\lambda - \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\,\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-a^2\sin\lambda + \frac{3}{2}\,aa'\sin\lambda' - \frac{1}{2}\,aa'\sin(2\lambda - \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\,\frac{1}{\Delta_0^3}\left[a'^2\cos\lambda' - \frac{3}{2}\,aa'\cos\lambda + \frac{1}{2}\,aa'\cos(2\lambda' - \lambda)\right] + \\
&+ \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\,\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-a'^2\sin\lambda' + \frac{3}{2}\,aa'\sin\lambda - \frac{1}{2}\,aa'\sin(2\lambda' - \lambda)\right]\Bigg\} + \\
&+ \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\Bigg\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-\frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{8}\,aa'\cos(\lambda + \lambda') - \frac{1}{2}\,aa'\cos(\lambda - \lambda') + \right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}a^2\cos 2\lambda+\frac{3}{8}aa'\cos(3\lambda-\lambda')]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0^5}\left[\frac{3}{4}a^4+\frac{15}{8}a^2a'^2-\frac{9}{4}a^3a'\cos(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}a^3a'\cos(\lambda-\lambda')+\right.$$

$$+\frac{3}{4}a^4\cos 2\lambda-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda+\frac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda'-$$

$$-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda-2\lambda')+\frac{3}{4}a^3a'\cos(3\lambda-\lambda')+$$

$$\left.+\frac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda-2\lambda')\right]\Bigg\}+$$

$$+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{8}aa'\cos(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}a^2\cos 2\lambda-\frac{3}{8}aa'\cos(3\lambda-\lambda')\right]+\frac{1}{\Delta_0^5}\left[\frac{3}{4}a^4+\frac{15}{8}a^2a'^2+\right.$$

$$+\frac{9}{4}a^3a'\cos(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}a^3a'\cos(\lambda-\lambda')+\frac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda-$$

$$-\frac{3}{4}a^4\cos 2\lambda-\frac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda'-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda-2\lambda')-$$

$$\left.\left.-\frac{3}{4}a^3a'\cos(3\lambda-\lambda')-\frac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda-2\lambda')\right]\right\}+$$

$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-\frac{1}{4}aa'\sin(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}a^2\sin 2\lambda-\frac{3}{4}aa'\sin(3\lambda-\lambda')\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{\Delta_0^5}\left[\frac{9}{2}a^3a'\sin(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}a^4\sin 2\lambda+\frac{9}{4}a^2a'^2\sin 2\lambda-\right.$$

$$-\frac{27}{8}a^2a'^2\sin 2\lambda'-\frac{3}{2}a^3a'\sin(3\lambda-\lambda')-$$

$$\left.\left.-\frac{3}{8}a^2a'^2\sin(4\lambda-2\lambda')\right]\right\}+$$

$$+\left(\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-\frac{3}{4}a'^2+\frac{1}{8}aa'\cos(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}a'^2\cos 2\lambda'+\frac{3}{8}aa'\cos(3\lambda'-\lambda)\right]+\frac{1}{\Delta_0^5}\left[\frac{3}{4}a'^4\,\frac{15}{8}a^2a'^2-\right.$$

$$-\frac{9}{4}aa'^3\cos(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}aa'^3\cos(\lambda-\lambda')+\frac{3}{4}a'^4\cos 2\lambda'-$$

$$-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda'+\frac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda'-2\lambda)+$$

$$\left.\left.+\frac{3}{4}aa'^3\cos(3\lambda'-\lambda)+\frac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda'-2\lambda)\right]\right\}+$$

$$+\left(\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[-\frac{3}{4}a'^2-\frac{1}{8}aa'\cos(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}a'^2\cos 2\lambda'-\frac{3}{8}aa'\cos(3\lambda'-\lambda)\right]+\frac{1}{\Delta_0^5}\left[\frac{3}{4}a'^4+\right.$$

$$+\frac{15}{8}a^2a'^2+\frac{9}{4}aa'^3\cos(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}aa'^3\cos(\lambda-\lambda')-$$

$$-\frac{3}{4}a'^4\cos 2\lambda'+\frac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda'-\frac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda-$$

$$-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda'-2\lambda)-\frac{3}{4}aa'^3\cos(3\lambda'-\lambda)-$$

$$-\frac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda'-2\lambda)\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{4}aa'\sin(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}a'^2\sin 2\lambda'-\frac{3}{4}aa'\sin(3\lambda'-\lambda)\Big]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[\frac{9}{2}aa'^3\sin(\lambda+\lambda')-\frac{3}{2}a'^4\sin 2\lambda'+\frac{9}{4}a^2a'^2\sin 2\lambda'-$$

$$-\frac{27}{8}a^2a'^2\sin 2\lambda-\frac{3}{2}aa'^3\sin(3\lambda'-\lambda)-$$

$$-\frac{3}{8}a^2a'^2\sin(4\lambda'-2\lambda)\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{9}{4}aa'-\frac{3}{4}aa'\cos 2\lambda-\frac{3}{4}aa'\cos 2\lambda'+$$

$$+\frac{1}{4}aa'\cos(2\lambda-2\lambda')\Big]+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\frac{9}{4}aa'^3-\frac{9}{4}a^3a'+$$

$$+\frac{21}{4}a^2a'^2\cos(\lambda+\lambda')+\frac{21}{8}a^2a'^2\cos(\lambda-\lambda')-$$

$$-\frac{9}{4}a^3a'\cos 2\lambda+\frac{3}{4}aa'^3\cos 2\lambda-\frac{9}{4}aa'^3\cos 2\lambda'+$$

$$+\frac{3}{4}a^3a'\cos 2\lambda'+\frac{3}{4}aa'^3\cos(2\lambda-2\lambda')+$$

$$+\frac{3}{4}a^3a'\cos(2\lambda-2\lambda')-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda-\lambda')-$$

$$-\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda'-\lambda)+\frac{3}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{9}{4}aa'+\frac{3}{4}aa'\cos 2\lambda+\frac{3}{4}aa'\cos 2\lambda'+$$

$$+\frac{1}{4}aa'\cos(2\lambda-2\lambda')\Big]+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\frac{9}{4}a^3a'-\frac{9}{4}aa'^3-$$

$$-\frac{21}{4}a^2a'^2\cos(\lambda+\lambda')+\frac{21}{8}a^2a'^2\cos(\lambda-\lambda')+$$

$$+\frac{9}{4}a^3a'\cos 2\lambda-\frac{3}{4}aa'^3\cos 2\lambda+\frac{9}{4}aa'^3\cos 2\lambda'-$$

$$-\frac{3}{4}a^3a'\cos 2\lambda'+\frac{3}{4}a^3a'\cos(2\lambda-2\lambda')+$$

$$+\frac{3}{4}aa'^3\cos(2\lambda-2\lambda')+\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda-\lambda')+$$

$$+\frac{9}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda'-\lambda)+\frac{3}{8}a^2a'^2\cos(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{3}{4}aa'\sin 2\lambda+\frac{3}{4}aa'\sin 2\lambda'+\frac{1}{4}aa'\sin(2\lambda-2\lambda')\Big]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\frac{21}{4}a^2a'^2\sin(\lambda+\lambda')-\frac{33}{8}a^2a'^2\sin(\lambda-\lambda')+$$

$$+\frac{9}{4}a^3a'\sin 2\lambda-\frac{3}{4}aa'^3\sin 2\lambda+\frac{9}{4}aa'^3\sin 2\lambda'-$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3}{4}a^3a'\sin 2\lambda' + \frac{3}{4}a^3a'\sin(2\lambda-2\lambda') + \\
&+\frac{3}{4}aa'^3\sin(2\lambda-2\lambda') + \frac{9}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda-\lambda') + \\
&+\frac{9}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda'-\lambda) + \frac{3}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\} + \\
+\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\Big\{&\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{3}{4}aa'\sin 2\lambda + \frac{3}{4}aa'\sin 2\lambda' + \frac{1}{4}aa'\sin(2\lambda'-2\lambda)\Big] + \\
&+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\frac{21}{4}a^2a'^2\sin(\lambda+\lambda') - \frac{38}{8}a^2a'^2\sin(\lambda'-\lambda) + \\
&+\frac{9}{4}aa'^3\sin 2\lambda' - \frac{3}{4}a^3a'\sin 2\lambda' + \frac{9}{4}a^3a'\sin 2\lambda - \\
&-\frac{3}{4}aa'^3\sin 2\lambda + \frac{3}{4}aa'^3\sin(2\lambda'-2\lambda) + \\
&+\frac{3}{4}a^3a'\sin(2\lambda'-2\lambda) + \frac{9}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda'-\lambda) + \\
&+\frac{9}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda-\lambda') + \frac{3}{8}a^2a'^2\sin(3\lambda'-3\lambda)\Big]\Big\} + \\
&+\left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{1}{4}aa'\cos(\lambda+\lambda') - \frac{1}{4}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{4}aa'\cos(\lambda+\lambda') - \frac{1}{4}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{2}aa'\sin(\lambda+\lambda')\Big] + \\
&+\left(\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{1}{4}aa'\cos(\lambda+\lambda') - \frac{1}{4}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\left(\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{4}aa'\cos(\lambda+\lambda') - \frac{1}{4}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{2}aa'\sin(\lambda+\lambda')\Big] + \\
&+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[-\frac{1}{2}aa'\cos(\lambda+\lambda') + \frac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{1}{2}aa'\cos(\lambda+\lambda') + \frac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{1}{2}aa'\sin(\lambda+\lambda') + \frac{1}{2}aa'\sin(\lambda-\lambda')\Big] + \\
&+\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\frac{1}{2}aa'\sin(\lambda+\lambda') - \frac{1}{2}aa'\sin(\lambda-\lambda')\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом напишем выражение (18) для величины F_2

$$
\begin{aligned}
F_2 = \frac{fm_bm_c}{2a} + \frac{fm_am_c}{2a'} + fm_am_b\frac{aa'}{a^3}\Big\{&-\cos(\lambda-\lambda') + \\
&+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\Big[-2\cos(2\lambda-\lambda')\Big] +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left[2\sin(2\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[\frac{3}{2}\cos\lambda-\frac{1}{2}\cos(2\lambda'-\lambda)\right]+$$
$$+\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[-\frac{3}{2}\sin\lambda+\frac{1}{2}\sin(2\lambda'-\lambda)\right]+$$
$$+\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\left[-\frac{1}{8}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')-\frac{27}{8}\cos(3\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\left[\frac{1}{8}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')+\frac{27}{8}\cos(3\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left[\frac{1}{4}\sin(\lambda+\lambda')+\frac{27}{4}\sin(3\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\left(\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left[-\frac{1}{8}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')-\frac{3}{8}\cos(3\lambda'-\lambda)\right]+$$
$$+\left(\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left[\frac{1}{8}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')+\frac{3}{8}\cos(3\lambda'-\lambda)\right]+$$
$$+\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[\frac{1}{4}\sin(\lambda+\lambda')+\frac{3}{4}\sin(3\lambda'-\lambda)\right]+$$
$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[3\cos 2\lambda-\cos(2\lambda-2\lambda')\right]+$$
$$+\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[-3\cos 2\lambda-\cos(2\lambda-2\lambda')\right]+$$
$$+\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[-3\sin 2\lambda-\sin(2\lambda-2\lambda')\right]+$$
$$+\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left[-3\sin 2\lambda-\sin(2\lambda'-2\lambda)\right]+$$
$$+\left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\left[-\frac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\left[\frac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')\right]+\frac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\Big]+$$
$$+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\left[\frac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda')\right]+$$
$$+\left(\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left[-\frac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\left(\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^2\left[\frac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')+\frac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[\frac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda')\right]+$$
$$+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[\frac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right]+$$
$$+\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[-\frac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right]+$$

$$+\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\left[-\frac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda')-\frac{1}{2}\sin(\lambda-\lambda')\right]+$$
$$\left.+\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\left[-\frac{1}{2}\sin(\lambda'+\lambda)-\frac{1}{2}\sin(\lambda'-\lambda)\right]\right\}.$$

Входящие в эти разложения большие полуоси a и a' оскулирующих эллипсов связаны с элементами Λ и Λ' формулами

$$a=\frac{\Lambda^2}{\beta^2},\quad a'=\frac{\Lambda'^2}{\beta'^2}.$$

§ 59. Основные принципы теории возмущений. Рассмотрим форму (13) функции F, которая может быть написана следующим образом

$$F=\frac{fm_bm_c}{2a}+\frac{fm_am_c}{2a'}+\frac{fm_am_b}{r_{ab}}-\frac{fm_am_b}{r_{ga}^3}(q_1q_1'+q_2q_2'+q_3q_3'). \tag{19}$$

Так как, по предположению, массы m_a и m_b весьма малы по сравнению с массой m_c, то два последние члена в выражении для F суть второго порядка относительно малых масс. Каждый из двух первых членов выражения (19) содержит множителем только одну из малых масс. Поэтому совокупность этих членов, которую мы обозначим через

$$F_0=\frac{fm_bm_c}{2a}+\frac{fm_am_c}{2a'}, \tag{20}$$

есть малая величина *первого порядка* относительно масс. Образуя правые части уравнений (10), определяющих изменения оскулирующих элементов, мы видим, что частные производные от F_0 войдут только в уравнения

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda},\quad \frac{d\lambda'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda'}.$$

В остальные уравнения производные от F_0 не войдут, а поэтому производные от λ и λ' будут величинами первого порядка относительно масс, а все остальные производные будут содержать в своих выражениях множителем величину m_am_b и поэтому будут величинами второго порядка относительно масс.

Положим

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\sqrt{\beta}(\xi),\quad \eta=\sqrt{\beta}(\eta),\quad p=\sqrt{\beta}(p),\quad q=\sqrt{\beta}(q),\quad \Lambda=\beta(\Lambda),\\&\xi'=\sqrt{\beta'}(\xi'),\ \eta'=\sqrt{\beta'}(\eta'),\ p'=\sqrt{\beta'}(p'),\ q'=\sqrt{\beta'}(q'),\Lambda'=\beta'(\Lambda').\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Тогда, вместо системы (10), мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\beta\frac{d(\xi)}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial(\eta)},\qquad &\beta\frac{d(\eta)}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial(\xi)},\\\beta\frac{d(p)}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial(q)},\qquad &\beta\frac{d(q)}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial(p)},\\\beta'\frac{d(\xi')}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial(\eta')},\qquad &\beta'\frac{d(\eta')}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial(\xi')},\\\beta'\frac{d(p')}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial(q)},\qquad &\beta'\frac{d(q')}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial(p')}.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \beta \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial(\Lambda)}, & \beta' \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial(\Lambda')}, \\ \beta \frac{d(\Lambda)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \beta' \frac{d(\Lambda')}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отсюда следует, что все правые части уравнений (22) содержат множителем величину $m_a m_b$. Так как мы имеем приближенно

$$\beta = f m_b \sqrt{m_c}, \quad \beta' = f m_a \sqrt{m_c}, \tag{24}$$

то выражения для производных от (ξ), (η), (p) и (q) содержат множителем массу m_a, а выражения для производных от (ξ'), (η'), (p') и (q') содержат множителем массу m_b.

На этом свойстве уравнений возмущенного движения основана классическая теория возмущений, которая, с математической точки зрения, является не чем иным, как методом приближенного интегрирования уравнений движения путем последовательных приближений.

Метод последовательных приближений вытекает из следующих соображений. Положим сначала массы m_a и m_b равными нулю. Тогда правые части уравнений (22) также делаются равными нулю, откуда следует, что величины (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q'), удовлетворяющие этим уравнениям, имеют постоянные значения *для всех значений времени*. Если массы m_a и m_b не равны нулю, но весьма малы по сравнению с массой m_c, как мы это и предполагаем, то правые части уравнений (22), имеющие множителями одну из этих масс, будут весьма малы. Отсюда следует, что величины (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q') изменяются чрезвычайно медленно, а поэтому, по крайней мере в течение некоторого промежутка времени, сохраняют значения, близкие к своим начальным (постоянным значениям).

Поэтому *в первом приближении* мы можем заменить все величины (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p') и (q') в правых частях уравнений (22) и (23) их постоянными начальными значениями. Те же соображения справедливы и для уравнений, определяющих величины (Λ) и (Λ'), т. е. большие полуоси оскулирующих орбит. В первом приближении мы можем заменить в правых частях уравнений (22) и (23) (Λ) и (Λ') их постоянными начальными значениями.

Рассмотрим теперь уравнения, определяющие средние долготы λ и λ'

$$\beta \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(\Lambda)}, \quad \beta' \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(\Lambda')}. \tag{25}$$

Полагая в правой части первого из уравнений (25) $m_a = 0$, а в правой части второго $m_b = 0$, мы получим, в силу выражения (19) для F, следующие уравнения:

$$\beta \frac{d\lambda}{dt} = \frac{f m_b m_c}{(\Lambda)^3}, \quad \beta' \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{f m_a m_c}{(\Lambda')^3}, \tag{26}$$

которые соответствуют невозмущенному движению планет.

В силу формул (24) мы можем также написать

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\sqrt{f m_c}}{(\Lambda)^3}, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{\sqrt{f m_c}}{(\Lambda')^3}. \tag{27}$$

В невозмущенном движении (Λ) и (Λ') постоянны. Обозначая эти постоянные значения через (Λ_0) и (Λ_0') и полагая

$$n_0 = \frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0)^3}, \quad n_0' = \frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0')^3}, \tag{28}$$

мы имеем

$$\frac{d\lambda}{dt} = n_0, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = n_0',$$

откуда получаем

$$\lambda = n_0(t + \gamma_0), \quad \lambda' = n_0'(t + \gamma_0'), \tag{29}$$

где γ_0 и γ_0' — постоянные интеграции.

Таким образом первое приближение получается окончательно следующим образом: в правых частях уравнений (22) и (23) заменяем величины (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q'), (Λ) и (Λ') их постоянными начальными значениями (ξ_0), (η_0), (p_0), (q_0), (ξ_0'), (η_0'), (p_0'), (q_0'), (Λ_0) и (Λ_0'), а величины λ и λ' выражениями $n(t+\gamma_0)$, $n'(t+\gamma_0')$. Тогда правые части этих уравнений сделаются *известными функциями времени*, и уравнения решаются посредством простых квадратур. Полученные в результате интегрирования функции и составят первое приближение нашей задачи.

Чтобы получить второе приближение, мы опять обратимся к уравнениям (22) и (23) и подставим в их правые части вместо величин (ξ), (η), (p), (q), (ξ') (η'), (p'), (q'), (Λ), (Λ'), λ, λ' их выражения, полученные в первом приближении. Правые части уравнений опять сделаются известными функциями времени и их интегрирование опять совершается посредством квадратур. Это интегрирование доставит второе приближение задачи.

Таким же образом можно получить третье, четвертое и последующие приближения. Вообще мы получим какое-нибудь приближение номера k, если подставим в правые части уравнений (22) и (23) вместо величин (ξ), (η), (p), (q), (Λ), λ, (ξ'), (η'), (p'), (q'), (Λ'), λ' их выражения из приближения номера $k-1$.

Задача была бы полностью разрешена, если бы удалось, во-первых, *доказать сходимость* указанного процесса получения приближений и, во-вторых, если бы удалось получить оценку погрешности, которую мы делаем, принимая за истинные значения искомых функций их выражения, доставляемые каким-нибудь приближением. Однако ни та, ни другая задача не разрешены еще и в настоящее время. Таким образом, с математической точки зрения, задача остается совершенно не разрешенной.

Однако на практике описанный метод, или ему аналогичные, постоянно применяется, причем астрономы в большинстве случаев довольствуются только одним первым приближением, так как получаемые таким образом результаты обычно достаточно хорошо согласуются с наблюдениями.

§ 60. Первое приближение. Возмущения первого порядка. Мы видели, что пертурбационная функция F может быть разложена в степенной ряд, по степеням малых величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}$,

$\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}, \frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}, \frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}$, причем коэфициенты этого ряда суть периодические функции от средних долгот λ и λ'. Это разложение мы можем еще представить в следующем общем виде:

$$\left.\begin{aligned} F = \sum A_{i,j,k,l}^{i',j',k',l'} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^i \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^j \left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^k \left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^l \times \\ \times \left(\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{i'} \left(\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{j'} \left(\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{k'} \left(\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{l'}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где целые числа $i, j, k, l, i', j', k', l'$ принимают значения 0, 1, 2, ..., ∞, а коэфициенты A зависят только от Λ, λ, Λ', λ'. Вводя вместо неизвестных функций величины, определяемые формулами (21), мы представим F в виде

$$F = \sum A \left(\frac{(\xi)}{\sqrt{(\Lambda)}}\right)^i \left(\frac{(\eta)}{\sqrt{(\Lambda)}}\right)^j \ldots, \tag{31}$$

где в выражения коэфициентов A всюду должны быть подставлены (Λ), (ξ), (η), ..., вместо Λ, ξ, η, ...

Обозначая тогда какую-нибудь из величин (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q') буквой E, мы получим уравнения вида

$$\beta \frac{dE}{dt} = f,$$

где f есть частная производная от F по какому-нибудь из элементов (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q').

Так как члены первого порядка относительно масс в F зависят только от Λ и Λ', то f необходимо содержит множителем произведение масс $m_a m_b$. Но β (или β') также содержит множителем одну из масс. Поэтому после сокращения мы будем иметь уравнение вида

$$\frac{dE}{dt} = \bar{f}, \tag{32}$$

где $\bar{f}$ содержит множителем только одну из малых масс. Подставляя в $\bar{f}$ вместо элементов (ξ), (η), (p), (q), (Λ), (ξ') ... их начальные постоянные значения, а вместо долгот λ и λ' выражения $n_0(t+\gamma_0)$, $n_0'(t+\gamma_0')$ и интегрируя уравнения вида (32), мы получим первое приближение элемента по формуле

$$E = E_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{f}\, dt, \tag{33}$$

где E_0 — начальное значение E (при $t = t_0$). Обозначая разность $E - E_0 = \delta E$, мы получаем

$$\delta E = \int_{t_0}^{t} \bar{f}\, dt. \tag{34}$$

Величина $E_0+\delta E$ называется *первым приближением* функции E, а величина δE, представляющая разность между первым приближением E и ее начальным значением, называется *первым возмущением* элемента E. Так как $\bar{f}$ содержит множителем одну из малых масс m_a и m_b, то величина δE есть малая величина порядка возмущающей массы [1]), а поэтому обыкновенно называется *возмущением первого порядка* элемента E.

Если мы найдем второе приближение, то получим формулу вида

$$E=E_0+\delta E+\delta^{(2)}E,$$

где величина $\delta^{(2)}E$ будет уже второго порядка относительно малых масс m_a и m_b, а поэтому и называется *возмущением второго порядка* и так далее.

Остановим наше внимание на возмущениях исключительно первого порядка. Как уже было указано, мы получим возмущения первого порядка элементов (ξ), (η), (p), (q), (ξ'), (η'), (p'), (q'), если подставим в правые части уравнений (22) вместо элементов их постоянные начальные значения, а вместо средних долгот λ и λ' выражения $n_0(t+\gamma_0)$ и $n_0'(t+\gamma_0')$. Точно таким же образом получаются возмущения первого порядка величин (Λ) и (Λ'), так как в правые части этих уравнений входят производные от λ и λ'.

Но несколько иначе обстоит дело с возмущениями первого порядка средних долгот. Действительно, чтобы получить возмущения первого порядка величин λ и λ', нет необходимости принимать во внимание всех членов разложения функции F и достаточно ограничиться в этом разложении только членами первого порядка относительно масс. Иными словами, для получения возмущений первого порядка величин λ и λ' мы можем заменить в уравнениях, определяющих эти величины, функцию F величиной F_0. Тогда для определения λ и λ' получатся уравнения (27), в которых только (Λ) и (Λ') будут уже не постоянными величинами, а функциями времени, получаемыми из первого приближения.

Обозначим возмущения первого порядка величин (Λ) и (Λ') через $\delta\Lambda$ и $\delta\Lambda'$. Тогда в первом приближении мы будем иметь

$$(\Lambda)=(\Lambda_0)+\delta\Lambda,\quad (\Lambda')=(\Lambda_0')+\delta\Lambda'. \tag{35}$$

Подставляя выражения (35) в уравнения (27) и разлагая правые части в ряды по степеням малых величин $\delta\Lambda$ и $\delta\Lambda'$, мы получим, пренебрегая членами выше первого порядка, следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt}&=\frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0)^3}-3\frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0)^3}\,\frac{\delta\Lambda}{(\Lambda_0)},\\ \frac{d\lambda'}{dt}&=\frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0')^3}-3\frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0')^3}\,\frac{\delta\Lambda'}{(\Lambda_0')},\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

---

[1]) По крайней мере в течение некоторого промежутка времени.

откуда, имея в виду обозначения (28), находим

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= n_0(t+\gamma_0) - 3n_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\Lambda}{(\Lambda_0)}, \\ \lambda' &= n_0'(t+\gamma_0') - 3n_0' \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\Lambda'}{(\Lambda_0')}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Так как $\delta\Lambda$ и $\delta\Lambda'$ суть малые величины первого порядка относительно масс, то величины

$$\left.\begin{aligned} \delta\lambda &= \lambda - n_0(t+\gamma_0) = -3n_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\Lambda}{(\Lambda_0)}, \\ \delta\lambda' &= \lambda' - n_0'(t+\gamma_0') = -3n_0' \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\Lambda'}{(\Lambda_0')} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

также будут малыми величинами первого порядка относительно масс и поэтому доставят искомые возмущения первого порядка средних долгот.

Найдя возмущение первого порядка всех элементов, мы представим эти величины, как явные функции времени, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} (\Lambda) &= (\Lambda_0') + \delta\Lambda, & (\Lambda') &= (\Lambda_0') + \delta\Lambda', \\ (\xi) &= (\xi_0) + \delta\xi, & (\xi') &= (\xi_0') + \delta\xi', \\ (\eta) &= (\eta_0) + \delta\eta, & (\eta') &= (\eta_0') + \delta\eta', \\ (p) &= (p_0) + \delta p, & (p') &= (p_0') + \delta p', \\ (q) &= (q_0) + \delta q, & (q') &= (q_0') + \delta q', \\ \lambda &= n_0(t+\gamma_0) + \delta\lambda, & \lambda' &= n_0'(t_0+\gamma_0') + \delta\lambda', \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где

$$n_0 = \frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0)^3}, \quad n_0' = \frac{\sqrt{fm_c}}{(\Lambda_0')^3}.$$

По этим формулам мы можем вычислить приближенные значения элементов для моментов времени, не слишком удаленных от начального момента t_0 [1]).

После этого без труда определяются эллиптические элементы оскулирующих орбит тел B и A, а затем, по формулам эллиптического движения, определяются положения этих тел и их скорости.

Пусть E обозначает какую-нибудь из величин

$$\Lambda,\ \delta\lambda,\ \xi,\ \eta,\ p,\ q,\ \Lambda',\ \delta\lambda',\ \xi',\ \eta',\ p',\ q'.$$

---

[1]) На практике оказывается, что формулы (39) годятся в течение, по меньшей мере, нескольких сотен лет.

Тогда диференциальное уравнение, определяющее E, будет иметь вид

$$\frac{dE}{dt}=\varphi(\Lambda,\ \lambda,\ \xi,\ \eta,\ p,\ q,\ \Lambda',\ \lambda',\ \xi',\ \eta',\ p',\ q'),$$

где φ есть периодическая функция относительно λ и λ', а поэтому мы можем написать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{dE}{dt}=\sum B^{(i,\,i')}\cos\left[i\lambda+i'\lambda'+D^{(i,\,i')}\right]. \tag{40}$$

Для каждого элемента получается уравнение такого вида, и правые части всех таких уравнений содержат множителем одну из малых масс m_a и m_b. Поэтому, чтобы получить возмущения первого порядка для элемента E, мы должны заменить в правых частях уравнений вида (40) λ и λ' выражениями $n_0(t+\gamma_0)$, $n_0'(t+\gamma_0')$, а все остальные элементы их постоянными начальными значениями.

Уравнение (40) примет вид

$$\frac{dE}{dt}=\sum B_0^{(i,\,i')}\cos\left[(in_0+i'n_0')\,t+in_0\gamma_0+i'n_0'\gamma_0'+D_0^{(i,\,i')}\right], \tag{41}$$

где

$$B_0^{(i,\,i')},\ D_0^{(i,\,i')},\ n_0,\ n_0',\ \gamma_0,\ \gamma_0'$$

суть постоянные величины, а i и i' суть целые числа, принимающие значения $\pm 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty$.

Интегрируя уравнения вида (41), мы получим для элементов выражения следующего вида:

$$E=\sum\frac{B^{(i,\,i')}}{in_0+i'n_0'}\sin\left[in_0+i'n_0')\,t+in_0\gamma_0+i'n_0'\gamma_0'+D_0^{(i,\,i')}\right]+Ct+E_0, \tag{42}$$

где C обозначает тот единственный член в правой части уравнения (41), для которого $i=i'=0$, и E_0 есть постоянная интеграции, которая должна быть определена таким образом, чтобы при $t=t_0$ элемент E принимал свое начальное значение.

Выражение (42) для элемента состоит из двух качественно различных частей:

1) из члена Ct (C — постоянная), который неограниченно возрастает вместе со временем и поэтому называется *вековым возмущением* элемента;

2) из члена вида

$$\sum\frac{B_0^{(i,\,i')}}{in_0+i'n_0'}\sin\left[(in_0+in_0')\,t+in_0\gamma_0+i'n_0'\gamma_0'+D_0^{(i,\,i')}\right],$$

который представляет собой периодическую функцию и поэтому называется *периодическим возмущением элемента.*

Вековое возмущение элемента неограниченно возрастает вместе со временем. Однако C содержит множителем малую массу и поэтому есть весьма малая величина. Таким образом вековое изменение элемента происходит чрезвычайно медленно, и так как формулы вида (42) непригодны вообще для всех значений времени, то в первом приближении вековые возмущения не могут, в течение конечного небольшого промежутка времени, значительно изменить начальное значение элемента.

Отметим еще раз, что выражения вида (42) получены нами только в первом приближении и что действительный вид функции, характеризующей изменение элемента, нам не известен.

Рассмотрим теперь периодическое возмущение. Это возмущение состоит из суммы (теоретически бесконечной) членов вида

$$\frac{B_0^{(i,i')}}{in_0+i'n_0'}\sin\left[(in_0+i'n_0')\,t+\ldots\right], \tag{43}$$

каждый из которых называется *периодическим неравенством* элемента или просто *неравенством*.

Итак:

Возмущение первого порядка какого-либо элемента разлагается на вековое возмущение и сумму неравенств, которая дает периодическое возмущение.

Всякое неравенство имеет амплитуду, равную

$$\left|\frac{B_0^{(i,i')}}{in_0+i'n_0'}\right|,$$

и период, равный

$$\frac{2\pi}{in_0+i'n_0'}.$$

Величины $B_0^{(i,i')}$ содержат множителем малую массу, а следовательно суть величины весьма малые.

Поэтому, вообще говоря, амплитуды периодических неравенств весьма малы, и периоды их не велики. Однако может случиться, что средние движения планет n_0 и n_0' имеют такие значения, что найдутся два такие целые числа i и i', что мы будем иметь

$$in_0+i'n_0'=\varepsilon,$$

где ε — очень малая величина.

Тогда соответствующая этому неравенству амплитуда может иметь заметное значение, а период будет весьма велик. Такого типа неравенства называются *периодическими неравенствами долгого периода*, или *долгопериодическими неравенствами*.

Неравенства первого типа, т. е. неравенства с малыми амплитудами и небольшими периодами, называются *неравенствами короткого периода*, или *короткопериодическими неравенствами*.

Наконец, могут иногда встретиться случаи, когда можно найти такие два целые числа i и i', что мы будем иметь соотношение

$$in_0+i'n'=0.$$

В этом случае, в правой части уравнения (41), появляется еще один член, не зависящий от времени, который может быть присоединен к члену, для которого $i=0$, $i'=0$, и который приводит к вековому возмущению. Окончательно мы можем установить следующее:

Возмущение первого порядка каждого элемента слагается, вообще говоря, из векового неравенства (векового возмущения) суммы короткопериодических неравенств с малыми амплитудами и из долгопериодических неравенств, которые могут получать большие (по сравнению с массами m_a и m_b) числовые значения.

Случаи, когда $in_0+i'n_0'=0$ при $i\neq 0$ и $i'\neq 0$, могут встретиться только при строгой соизмеримости средних движений двух планет. В солнечной системе известен только один случай подобного рода, а именно в системе спутников Юпитера. Случаи, когда $in_0+i'n_0'$ есть малая величина, встречаются гораздо чаще. В качестве примера приведем случай Юпитера и Сатурна. Мы имеем для Юпитера $n_0=299'',1$ и для Сатурна $n_0'=120'',5$. Отсюда находим

$$2n_0-5n_0'=-4'',3,$$

что представляет величину, в 70 раз меньшую, чем n_0, и в 28 раз меньшую, чем n_0'. В возмущениях первого порядка элементов этих планет появляется поэтому долгопериодическое неравенство, с периодом $\frac{360°}{4'',3}=860$ лет.

§ 61. Отсутствие вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей. Рассмотрим, в частности, возмущения первого порядка больших полуосей, т. е. величин Λ и Λ'. Диференциальные уравнения, определяющие эти величины, имеют вид

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda}, \quad \frac{d\Lambda'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda'}. \tag{44}$$

Функция F, как уже указывалось выше, может быть представлена в виде ряда

$$F=\sum A\cos(i\lambda+i'\lambda'+D), \tag{45}$$

где A и D не зависят от λ и λ'.

Члены разложения ряда (45) могут быть разделены на следующие группы:

1) Один член, для которого $i=i'=0$. Этот член не зависит от λ и λ'.

2) Группа членов, для которых $i=0$, но $i'\neq 0$. Эти члены не зависят от λ и имеют вид $A\cos(i'\lambda'+D)$.

3) Группа членов, для которых $i\neq 0$, но $i'=0$. Эти члены не зависят от λ' и имеют вид $A\cos(i\lambda+D)$.

4) Группа членов, для которых $i\neq 0$ и $i'\neq 0$.

Вычисляя частные производные от F по λ и λ', мы видим, что производные членов первой группы равны нулю для обоих уравнений. Производные членов второй группы равны нулю для уравнения $\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda}$, и производные членов третьей группы равны нулю для уравнения $\frac{dA'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda'}$. Допуская, что средние движения n_0 и n_0' несоизмеримы, т. е. что ни для какой пары целых чисел i и i' не имеет места равенство $in_0+i'n_0'=0$, мы видим, что производные членов четвертой группы не равны нулю для обоих уравнений.

Таким образом уравнения (44) примут вид

$$\frac{dA}{dt}=\sum \bar{A}\sin(i\lambda+i'\lambda'+D),\quad \frac{dA'}{dt}=\sum \bar{A}'\sin(i\lambda+i'\lambda'+D'), \tag{46}$$

где в правых частях заведомо отсутствуют члены, для которых $i=i'=0$, т. е. члены, не зависящие от λ и λ' одновременно.

Чтобы получить возмущения первого порядка величин A и A', мы должны заменить в уравнениях (46) λ и λ' выражениями $n_0(t+\gamma_0)$, $n_0'(t+\gamma_0')$, а все остальные элементы их постоянными начальными значениями. Тогда уравнения (46) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt}&=\sum \bar{A}_0\sin\left[(in_0+i'n_0')\,t+\bar{D}_0\right],\\ \frac{dA'}{dt}&=\sum \bar{A}_0'\sin\left[(in_0+i'n_0')\,t+\bar{D}_0'\right],\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где $\bar{A}_0$, $\bar{A}_0'$, $\bar{D}_0$ и $\bar{D}_0'$ суть постоянные числа.

Интегрируя уравнения (47), получаем

$$\left.\begin{aligned}A&=\sum\frac{\bar{A}_0}{in_0+i'n_0'}\cos\left[(in_0+i'n_0')\,t+\bar{D}_0\right]+\mathrm{const},\\ A'&=\sum\frac{\bar{A}_0'}{in_0+i'n_0'}\cos\left[(in_0+i'n_0')\,t+\bar{D}_0'\right]+\mathrm{const}.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Эти выражения не содержат членов, помноженных на время, так как в уравнениях (47) комбинация $in_0+i'n_0'=0$ исключается, что приводит нас к следующему важному выводу:

В первом приближении большие полуоси оскулирующих орбит планет не имеют вековых возмущений.

Таким образом большие полуоси (в первом приближении) совершают только периодические колебания около своих средних значений, и амплитуды этих колебаний вообще невелики, особенно если не имеет места случай, когда $in_0+i'n_0'$ есть малая величина.

Вспоминая формулировку теоремы Лапласа, приведенную в главе восьмой, мы можем теперь сказать, что в первом приближении, т. е. рассматривая только возмущения первого порядка, мы доказали устойчивость солнечной системы или, по крайней мере, системы планет.

Естественно возникает вопрос о том, как обстоит дело с вековыми возмущениями полуосей в последующих приближениях, и другой вопрос, еще более существенный, о том, можно ли утверждать, что в действительности большие полуоси совершают только малые колебания около их средних значений. По этому поводу можно сказать следующее: можно установить, что во втором приближении большие полуоси также не имеют вековых возмущений, однако такие возмущения были найдены в третьем приближении.

Но все эти результаты не могут дать никакого ответа на последний вопрос, так как тесно связанные с ним вопросы о сходимости рядов, определяющих истинные значения элементов, до сих пор остаются неразрешенными.

Можно заметить, что применяемые нами методы вообще не способны разрешить эту задачу. Эти методы — методы последовательных приближений, без исследования сходимости рядов, годятся только для практических вычислений положений планет, да и то в течение весьма небольшого промежутка времени. Вопрос об устойчивости солнечной системы, вопрос, весьма важный для космогонии, может быть разрешен только методами качественного анализа, и никакие вычисления, сколь бы они ни были обширны, сколько бы они не охватывали членов в разложениях, играющих роль в этом вопросе, решить проблему об устойчивости солнечной системы принципиально не могут.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ВЕКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

§ 62. Другая постановка задачи о вековых возмущениях элементов. Как мы видели в предыдущей главе, в первом приближении для элементов оскулирующих орбит планет получаются выражения в виде суммы ряда периодических членов и члена, содержащего множителем время. Члены последнего типа, названные нами *вековыми возмущениями*, или *вековыми неравенствами*, входят в возмущения первого порядка всех элементов, за исключением больших полуосей. Эти члены появляются в силу того, что в разложении пертурбационной функции (характеристической функции F) имеются члены, не зависящие от средних долгот, т. е. не содержащие явно времени.

Поэтому, если мы пожелаем сосредоточить наше внимание только на вековых возмущениях элементов, то мы можем отбросить в разложении функции F все члены, содержащие явно время. Пользуясь затем методом последовательных приближений и ограничиваясь только первым приближением, мы получим, разумеется, для вековых возмущений элементов те же самые выражения, содержащие множителем t, как и раньше.

Но задачу об определении вековых возмущений можно также поставить несколько иначе, а именно следующим образом: выделим в разложении пертурбационной функции F все члены, приводящие в первом приближении к вековым возмущениям, т. е. все члены, не зависящие от средних долгот λ и λ', и обозначим совокупность этих членов символом $[F]$. Очевидно, что $[F]$ будет функцией от всех элементов, кроме λ и λ', и представит собой ряд, расположенный по возрастающим степеням величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \ldots, \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}, \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}, \ldots$ Заменим в уравнениях (10) предыдущей главы функцию F функцией $[F]$. Тогда эти уравнения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Lambda}{dt}=0, && \frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial [F]}{\partial \eta}, && \frac{dp}{dt}=\frac{\partial [F]}{\partial q},\\
&\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda}, && \frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial \xi}, && \frac{dq}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial p},\\
&\frac{d\Lambda'}{dt}=0, && \frac{d\xi'}{dt}=\frac{\partial [F]}{\partial \eta'}, && \frac{dp'}{dt}=\frac{\partial [F]}{\partial q'},\\
&\frac{d\lambda'}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda'}, && \frac{d\eta'}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial \xi'}, && \frac{dq'}{dt}=-\frac{\partial [F]}{\partial p'},
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и прежде всего мы из них найдем

$$\Lambda = \Lambda_0 = \text{const}, \quad \Lambda' = \Lambda'_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Так как функция $[F]$ не зависит от λ и λ', то подставляя в ее выражение вместо Λ и Λ' их значения (2), мы сделаем эту функцию зависящей только от переменных ξ, η, p, q, ξ', η', p', q', вследствие чего из системы (1) выделится вполне независимая система следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \xi}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial p},\\ &\frac{d\xi'}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial \eta'}, \quad \frac{d\eta'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \xi'}, \quad \frac{dp'}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial q'}, \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial p'}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

интегрируя которую по основному методу последовательных приближений, описанному в главе девятой, мы и получим выражения для вековых возмущений элементов ξ, η, p, q, ξ', η', p' и q'. Эти выражения можно написать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \delta_c \xi &= \left\{\frac{\partial [F]}{\partial \eta}\right\}_0 t, & \delta_c p &= \left\{\frac{\partial [F]}{\partial q}\right\} t,\\ \delta_c \xi' &= \left\{\frac{\partial [F]}{\partial \eta'}\right\}_0 t, & \delta_c p' &= \left\{\frac{\partial [F]}{\partial q'}\right\} t,\\ \delta_c \eta &= -\left\{\frac{\partial [F]}{\partial \xi}\right\}_0 t, & \delta_c q &= -\left\{\frac{\partial [F]}{\partial p}\right\} t,\\ \delta_c \eta' &= -\left\{\frac{\partial [F]}{\partial \xi'}\right\}_0 t, & \delta_c q' &= -\left\{\frac{\partial [F]}{\partial p'}\right\} t, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где символ δ_c обозначает вековое возмущение элемента, а символ $\left\{\frac{\partial [F]}{\partial \eta}\right\}_0$, и ему аналогичные, обозначает результат подстановки в выражение частной производной вместо величин ξ, η, ... их начальных значений ξ_0, η_0, ...

Уравнения (3), определяющие только вековые возмущения элементов, мы можем назвать *уравнениями вековых возмущений*, а функция $[F]$, являющаяся характеристической функцией этих уравнений, может быть названа *вековой частью пертурбационной функции*. Так как уравнения (3) значительно проще полной первоначальной системы, то невольно возникает мысль, — нельзя ли получить из этой системы более точные выражения для неизвестных функций, чем те выражения (4), которые получаются в первом приближении по методу последовательных приближений.

В развитии этой мысли и заключается та другая постановка задачи о вековых возмущениях, о которых мы говорили выше.

Рассмотрим несколько подробнее строение функции F, первые члены разложения которой выписаны в предыдущей главе. Эта функция представляет собой ряд, расположенный по возрастающим степеням величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, ..., $\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}$, $\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}$, ... и, фактически, бесконечный. В этом ряде имеются члены, не зависящие от величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, ...,

$\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}, \ldots$, затем идет совокупность членов первой степени относительно этих величин и, наконец, совокупность членов второй степени. На этом выписанное нами разложение заканчивается. Если бы разложение было продолжено далее, что представляет чисто техническую задачу, то мы получили бы совокупность членов третьей степени, затем совокупность членов четвертой степени и т. д. до бесконечности.

Образуя правые части уравнений, мы должны вычислить частные производные от функции F, представленной в виде ряда. В результате диференцирования, очевидно, получатся ряды такой же структуры, как мы только что описали. Функция $[F]$ представляет собой только часть функции F, а поэтому ее разложение и разложения ее производных будут иметь совершенно такой же характер. Нетрудно только убедиться, что функция $[F]$ не будет содержать членов нулевой и первой степеней относительно величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \ldots, \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}, \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}, \ldots$

Иными словами, разложение функции $[F]$ будет начинаться только членами второй степени, а поэтому правые части уравнений (3) будут представлять собой ряды, расположенные по возрастающим степеням величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \ldots, \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}, \frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}, \ldots$ и начинающиеся с членов первой степени, относительно этих величин.

Точная интеграция уравнений (3), конечно, невозможна, и мы опять вынуждены прибегнуть к методу последовательных приближений.

Метод, до сих пор нами применявшийся, состоял в том, что сначала мы совершенно отбрасывали правые части уравнений (3) и получали интегрированием постоянные значения для неизвестных функций. Эту систему постоянных, которую можно назвать нулевым приближением, мы подставляем в правые части уравнений и вторичным интегрированием получаем первое приближение, выражающееся формулами (4).

Но мы можем также поступать следующим образом: отбросим сначала в правых частях уравнений (3) *все члены выше первой степени*. Тогда для определения первого приближения мы получим систему линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами, которая может быть без труда интегрирована.

Найденные таким образом из первого приближения величины ξ, η, p, q, ξ', η', p', q' мы можем затем подставить опять в правые части уравнений (3) и интегрированием определить второе приближение и т. д. Мы ограничимся здесь рассмотрением одного только первого приближения, которое и доставит нам иные выражения для вековых возмущений элементов. Это исследование будет состоять из трех последовательных шагов, а именно, во-первых, мы должны выделить из функции F ее вековую часть $[F]$, во-вторых, мы должны составить уравнения, определяющие первое приближение, и наконец, в-третьих, мы должны проинтегрировать получившиеся таким образом уравнения.

§ 63. Вековая часть пертурбационной функции. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням величин $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \ldots$

дается формулами (17) и (18) предыдущей главы, в которых выписаны все члены разложения до второго порядка включительно.

Чтобы получить первое приближение для вековых возмущений элементов, мы должны прежде всего составить выражение для вековой части $[F]$, ограничиваясь также только членами второго порядка. Для этого мы должны отобрать в формулах (17) и (18) все члены, не зависящие от λ и λ', совокупность которых и представит приближенное выражение для $[F]$. Рассмотрим сначала формулу (18), дающую выражение для дополнительной части F_2 пертурбационной функции F. Мы видим, что все члены выражения для F_2, кроме двух первых, содержат множителем либо синус, либо косинус от линейной комбинации средних долгот. Поэтому, чтобы получить вековую часть для F, мы просто должны выбросить из формулы (18) все члены, кроме двух первых, и вековая часть функции F_2 определится формулой

$$[F_2] = \frac{fm_b m_c}{2a} + \frac{fm_a \overline{m}_c}{2a'}.$$

Вследствие этого мы имеем

$$[F] = [F_1] + [F_2] = \frac{fm_b m_c}{2a} + \frac{fm_a m_c}{2a'} + [F_1],$$

и нам остается теперь отобрать в формуле (17) все члены, не зависящие от λ и λ'.

Чтобы это сделать, обратим внимание на то, что в каждый член формулы (17) входит множителем некоторая степень величины

$$\Delta_0^{-1} = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\lambda - \lambda')]^{-1},$$

которая также является периодической функцией и может быть разложена в ряд Фурье по косинусам величин кратных $\lambda - \lambda'$. Мы можем положить поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0} &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{aa'}{\Delta_0^3} &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\ \frac{a^2a'^2}{\Delta_0^5} &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} C_i \cos i(\lambda - \lambda'), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где A_i, B_i и C_i зависят только от a и a', и поэтому в рассматриваемой нами задаче суть величины постоянные, определяемые известными формулами для коэфициентов ряда Фурье.

Построение функции $[F_1]$ производится теперь следующим образом. Прежде всего мы выделяем постоянный член $m_a m_b \frac{1}{2} A_0$. Затем уничтожаем все члены, содержащие множителем синус или косинус от величины $i\lambda - i'\lambda'$, где $i \neq j$. После этого остаются члены, имеющие множителем синус или косинус от величины $i(\lambda - \lambda')$. Помножая эти члены на разложения (5), мы получим члены, содержащие множителем или $\cos^2 i(\lambda-\lambda')$, или $\sin i(\lambda-\lambda')\cos i(\lambda-\lambda')$. Последние отбрасываем, так же как и члены, содержащие множителем $\sin i(\lambda-\lambda')\cos j(\lambda-\lambda')$. Затем, используя формулу $\cos^2 i(\lambda-\lambda')=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2i(\lambda-\lambda')$, мы разложим каждый член, содержащий множителем $\cos^2 i(\lambda-\lambda')$, на два и, отбрасывая вторые слагаемые с $\cos 2i(\lambda-\lambda')$, получим, наконец, совокупность всех членов, не зависящих от λ и λ', т. е. искомую вековую часть $[F]$.

Это выражение для $[F]$ имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
[F]=fm_a m_b\Big\{&\frac{1}{8}B_1\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{\Lambda}+\frac{\xi'^2+\eta'^2}{\Lambda'}\right)-\\
&-\frac{1}{4}B_2\left(\frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}+\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\right)-\frac{1}{8}B_1\left(\frac{p^2+q^2}{\Lambda}+\right.\\
&\left.+\frac{p'^2+q'^2}{\Lambda'}-\frac{2(pp'+qq')}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\right)\Big\}+\\
&+\frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2}+\frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2}+\frac{1}{2}fm_a m_b A_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Последние члены, не зависящие от ξ, η, p, q, ξ', η', p', q', пропадают при диференцировании функции $[F]$ по этим величинам и поэтому в уравнения (3) не входят. Но они должны быть включены в $[F]$, так как вековые возмущения средних долгот определяются уравнениями

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial[F]}{\partial\Lambda},\qquad \frac{d\lambda'}{dt}=-\frac{\partial[F]}{\partial\Lambda'},$$

правые части которых представляют производные от $[F]$ по Λ и Λ'.

Теперь нам остается только вычислить коэфициенты A_0, B_1 и B_2, зависящие от больших полуосей a и a'. Допустим, что B—ближайшая к Солнцу планета, а A—более удаленная. Тогда

$$a<a' \quad\text{и}\quad \alpha=\frac{a}{a'}<1,$$

и мы можем написать

$$\left.\begin{aligned}
a'A_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{d(\lambda-\lambda')}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')}},\\
a'B_1&=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos(\lambda-\lambda')\,d(\lambda-\lambda')}{[1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')]^{3/2}},\\
a'B_2&=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos 2(\lambda-\lambda')\,d(\lambda-\lambda')}{[1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')]^{3/2}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Так как $\alpha<1$, то интегралы, входящие в последние формулы, могут быть разложены в сходящиеся ряды, расположенные по возрастающим степеням α. Нетрудно также выразить эти интегралы через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Полагая для этого

$$\lambda - \lambda' = \theta,$$

мы получим для коэфициентов A_0, B_1 и B_2 следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{4}{\pi a'} F, \\ B_1 &= \frac{4}{\pi a'}\left[-\frac{1}{1-\alpha^2} F + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E\right], \\ B_2 &= \frac{4}{\pi a}\left[-\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2} F + \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E\right], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

в которых

$$\left.\begin{aligned} F &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}, \\ E &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При заданном значении α, численные значения F и E могут быть найдены из специальных таблиц, после чего формулы (8) дают численные значения коэфициентов A_0, B_1 и B_2. На выводе всех последних формул мы, для сокращения изложения, останавливаться не будем.

Получив вековую часть пертурбационной функции с точностью до членов второго порядка включительно, мы можем теперь перейти к исследованию первого приближения вековых возмущений элементов, которые определяются уравнениями (3). Для большего удобства интегрирования уравнений (3) положим еще

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \sqrt{\Lambda}\, r, \quad \eta = -\sqrt{\Lambda}\, s, \quad p = \sqrt{\Lambda}\, u, \quad q = -\sqrt{\Lambda}\, v, \\ &\xi' = \sqrt{\Lambda'}\, r', \quad \eta' = -\sqrt{\Lambda'}\, s', \quad p' = \sqrt{\Lambda'}\, u', \quad q' = -\sqrt{\Lambda'}\, v'. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда уравнения (3) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial [F]}{\partial s}, & \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial [F]}{\partial r}, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial [F]}{\partial v}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial [F]}{\partial u}, \\ \frac{dr'}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda'}\frac{\partial [F]}{\partial s'}, & \frac{ds'}{dt} &= \frac{1}{\Lambda'}\frac{\partial [F]}{\partial r'}, \\ \frac{du'}{dt} &= -\frac{1}{\Lambda'}\frac{\partial [F]}{\partial v'}, & \frac{dv'}{dt} &= \frac{1}{\Lambda'}\frac{\partial [F]}{\partial u'}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и функция $[F]$ определится, как функция новых переменных, следующей формулой:

$$\left.\begin{aligned} [F] &= \frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2} + \frac{1}{2} f m_a m_b A_0 + \\ &+ f m_a m_b \left\{ \frac{1}{8} B_1 (r^2 + s^2 + r'^2 + s'^2) - \frac{1}{4} B_2 (rr' + ss') - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8} B_1 (u^2 + v^2 + u'^2 + v'^2) + \frac{1}{4} B_1 (uu' + vv') \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Величины r, s, u, v выражаются через эллиптические элементы следующими приближенными формулами

$$\left.\begin{aligned} r &= e\cos\overline{\omega}, & r' &= e'\cos\overline{\omega}', \\ u &= \sin i \cos \Omega, & u' &= \sin i' \cos \Omega', \\ s &= e\sin\overline{\omega}, & s' &= e'\sin\overline{\omega}', \\ v &= \sin i \sin \Omega, & v' &= \sin i' \sin \Omega'. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Таким образом величины r и s определяют вековые возмущения эксцентриситета и долготы перигелия, а величины u и v—вековые возмущения наклонения и долготы узла. Действительно, из формул (13) мы находим

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= r^2 + s^2, & e'^2 &= r'^2 + s'^2, \\ \sin^2 i &= u^2 + v^2, & \sin^2 i' &= u'^2 + v'^2 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\overline{\omega} &= \frac{s}{r}, & \operatorname{tg}\overline{\omega}' &= \frac{s'}{r'}, \\ \operatorname{tg}\Omega &= \frac{v}{u}, & \operatorname{tg}\Omega' &= \frac{v'}{u'}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Так как выражение (12) для функции $[F]$ не содержит членов вида ru, rv, su, sv и т. д., то система (11) распадается на две независимые системы, одна из которых будет содержать только переменные r, s, r' и s', и определять таким образом вековые возмущения эксцентриситетов и долгот перигелиев, а вторая будет содержать только переменные u, v, u' и v' и определять вековые возмущения наклонений и долгот узлов.

Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{f m_a m_b}{4\Lambda} B_1, & \varkappa_2 &= \frac{f m_a m_b}{4\Lambda} B_2, \\ \varkappa'_1 &= \frac{f m_a m_b}{4\Lambda'} B_1, & \varkappa'_2 &= \frac{f m_a m_b}{4\Lambda'} B_2, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

мы напишем эти уравнения в следующем виде:

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\varkappa_1 s + \varkappa_2 s', & \frac{du}{dt} &= \varkappa_1 (v - v'),\\
\frac{ds}{dt} &= \varkappa_1 r - \varkappa_2 r', & \frac{dv}{dt} &= \varkappa_1 (-u + u'),\\
\frac{dr'}{dt} &= -\varkappa_1' s' + \varkappa_2' s, & \frac{du'}{dt} &= \varkappa_1' (v' - v),\\
\frac{ds'}{dt} &= \varkappa_1' r' - \varkappa_2' r & \frac{dv'}{dt} &= \varkappa_1' (-u' + u).
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

Последняя наша задача заключается в интегрировании уравнений (17) и (18) и в исследовании полученных интегралов этих уравнений.

§ 64. Вековые возмущения эксцентриситетов и долгот перигелиев. Согласно результатам предыдущего параграфа вековые возмущения эксцентриситетов и долгот перигелиев определяются в первом приближении следующей системой линейных уравнений с постоянными коэфициентами

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\varkappa_1 s + \varkappa_2 s',\\
\frac{ds}{dt} &= \varkappa_1 r - \varkappa_2 r',\\
\frac{dr'}{dt} &= -\varkappa_1' s' + \varkappa_2' s,\\
\frac{ds'}{dt} &= \varkappa_1' r' - \varkappa_2' r.
\end{aligned}
\right\} \quad (19)
$$

Из системы (19) мы выводим прежде всего следующее соотношение:

$$\varkappa_2'\left(r\frac{dr}{dt} + s\frac{ds}{dt}\right) + \varkappa_2\left(r'\frac{dr'}{dt} + s'\frac{ds'}{dt}\right) = 0, \quad (20)$$

откуда, интегрированием мы получаем первый интеграл системы (19) в виде

$$\varkappa_2'(r^2 + s^2) + \varkappa_2(r'^2 + s'^2) = C, \quad (21)$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя в уравнение (21) вместо r, s, r' и s' их приближенные выражения через обычные эллиптические элементы, мы получим уравнение вида

$$\varkappa_2' e^2 + \varkappa_2 e'^2 = C. \quad (22)$$

Это уравнение показывает, что если $\varkappa_2'$ и $\varkappa_2$ суть числа одинакового знака, то эксцентриситеты не могут принимать произвольно больших значений.

Допустим, что это действительно имеет место, и допустим, сверх того, что в начальный момент эксцентриситеты e и e' имеют весьма малые числовые значения e_0 и e_0'. Тогда численное значение постоянной C, определяемое формулой

$$C = \varkappa_2' e_0^2 + \varkappa_2 e_0'^2, \quad (23)$$

также будет весьма мало, откуда следует, что численные значения эксцентриситетов всегда останутся малыми.

Таким образом, новая постановка задачи о вековых возмущениях приводит к заключению, что эксцентриситеты не могут неограниченно возрастать, как это следовало из результатов, полученных первым методом [1]).

Чтобы найти общее решение системы (19), положим, на основании общей теории линейных уравнений,

$$\left.\begin{aligned} r &= N\cos(gt+\varphi), & r' &= N'\cos(gt+\varphi'), \\ s &= N\sin(gt+\varphi), & s' &= N'\sin(gt+\varphi'), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где g, N, N', φ, φ' — неопределенные пока постоянные. Подставляя выражения (24) в уравнения (19), мы найдем, что последние будут удовлетворены при соблюдении условий

$$\left.\begin{aligned} (g-\varkappa_1)N + \qquad \varkappa_2 N' &= 0, \\ \varkappa_2' N + (g-\varkappa_1')N' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Для того чтобы система (25) имела не нулевые решения относительно N и N', необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{vmatrix} g-\varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \varkappa_2' & g-\varkappa_1' \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Последнее уравнение определяет неопределенную до сих пор постоянную g. В раскрытом виде это уравнение напишется следующим образом:

$$g^2 - g(\varkappa_1+\varkappa_1') + \varkappa_1\varkappa_1' - \varkappa_2\varkappa_2' = 0. \tag{27}$$

Дискриминант уравнения (27) определится формулой

$$\Delta = (\varkappa_1+\varkappa_1')^2 - 4(\varkappa_1\varkappa_1' - \varkappa_2\varkappa_2')$$

или

$$\Delta = (\varkappa_1-\varkappa_1')^2 + 4\varkappa_2\varkappa_2'. \tag{28}$$

Если $\varkappa_2$ и $\varkappa_2'$ имеют одинаковые знаки, то $\Delta > 0$ и оба корня уравнения (27) различны и действительны. Эти корни будут вдобавок оба положительны, если

$$\varkappa_1\varkappa_1' - \varkappa_2\varkappa_2' > 0. \tag{29}$$

Обозначим корни уравнения (27) через g_1 и g_2. Каждому корню соответствует из системы (25) определенное значение отношения $\frac{N}{N'}$. Обозначим значение этого отношения для корня g_1 через $\frac{N_1}{N_1'}$ и для корня g_2 через $\frac{N_2}{N_2'}$. Так как g_1 и g_2 зависят только от коэфициентов

[1]) Впрочем, нужно отметить, что все эти результаты имеют только предварительное значение, так как в том и в другом методе получаются из рассмотрения только одного первого приближения. Сохраняются ли эти результаты также и во всех следующих приближениях? Этого, конечно, утверждать нельзя.

уравнения (27), то для данной системы они суть вполне определенные числа. Поэтому мы можем выбрать произвольно, например, N_1 и N_2, которые будут играть роль произвольных постоянных, а N_1' и N_2' выразятся через N_1, N_2, g_1 и g_2. Обозначая две другие необходимые произвольные постоянные через φ_1 и φ_2, мы можем написать общий интеграл системы (19) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} r &= N_1\cos(g_1t+\varphi_1)+N_2\cos(g_2t+\varphi_2),\\ s &= N_1\sin(g_1t+\varphi_1)+N_2\sin(g_2t+\varphi_2),\\ r' &= N_1'\cos(g_1t+\varphi_1)+N_2'\cos(g_2t+\varphi_2),\\ s' &= N_1'\sin(g_1t+\varphi_1)+N_2'\sin(g_2t+\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Теперь остается только выяснить, в каких случаях соблюдаются условия $\Delta>0$ и $\varkappa_1\varkappa_1'-\varkappa_2\varkappa_2'>0$. Рассмотрим для этого выражения (16) для коэфициентов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$. С помощью формул (28) предыдущей главы мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= n_0\frac{m_a}{4m_c}aB_1, & \varkappa_2 &= n_0\frac{m_a}{4m_c}aB_2,\\ \varkappa_1' &= n_0'\frac{m_b}{4m_c}a'B_1, & \varkappa_2' &= n_0'\frac{m_b}{4m_c}a'B_2. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Отсюда следует, что $\varkappa_2$ и $\varkappa_2'$ имеют одинаковые знаки, если n_0 и n_0' также имеют одинаковые знаки, т. е. если обе планеты обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении. Так как все большие планеты солнечной системы действительно обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении, то условие $\Delta>0$ в солнечной системе всегда соблюдено. Условие (29), ввиду выражений для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, может быть написано в виде

$$n_0n_0'aa'\frac{m_am_b}{16m_c^2}(B_1^2-B_2^2)>0$$

или, более просто,

$$B_1^2-B_2^2>0.$$

Можно проверить, что последнее условие, действительно, всегда выполняется.

Произвольные постоянные N_1, N_2, φ_1 и φ_2 определяются из начальных условий.

Пусть r_0, s_0, r_0', s_0' обозначают значения величин r, s, r' и s' для момента $t=0$. Тогда для определения произвольных постоянных мы получаем из формул (30) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= N_1\cos\varphi_1+N_2\cos\varphi_2,\\ s_0 &= N_1\sin\varphi_1+N_2\sin\varphi_2,\\ r_0' &= N_1'\cos\varphi_1+N_2'\cos\varphi_2,\\ s_0' &= N_1'\sin\varphi_1+N_2'\sin\varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= N_1\cos\varphi_1, & x_2 &= N_2\cos\varphi_2,\\ y_1 &= N_1\sin\varphi_1, & y_2 &= N_2\sin\varphi_2,\\ k_1 &= -\frac{1}{\varkappa_2}(g_1-\varkappa_1), & k_2 &= -\frac{1}{\varkappa_2}(g_2-\varkappa_1), \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

мы приведем уравнения (32) к виду

$$x_1+x_2 = r_0, \qquad y_1+y_2 = s_0,$$

$$k_1x_1+k_2x_2 = r_0', \qquad k_1y_1+k_2y_2 = s_0',$$

откуда найдем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_2r_0-r_0'}{k_2-k_1}, & x_2 &= \frac{r_0'-k_1r_0}{k_2-k_1},\\ y_1 &= \frac{k_2s_0-s_0'}{k_2-k_1}, & y_2 &= \frac{s_0'-k_1s_0}{k_2-k_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

После этого из уравнений (33) определяем постоянные N_1, N_2, φ_1 и φ_2.

Рассмотрим в заключение свойства вековых возмущений долгот перигелиев и эксцентриситетов. Мы уже видели в начале этого параграфа, что эксцентриситеты не могут возрастать неограниченно вместе со временем и, следовательно, имеют конечные верхние границы.

Теперь мы можем определить эти границы в функции начальных условий задачи. Действительно, формулы (30) мы можем написать в виде

$$\left.\begin{aligned} e\cos\bar\omega &= N_1\cos(g_1t+\varphi_1)+N_2\cos(g_2t+\varphi_2),\\ e\sin\bar\omega &= N_1\sin(g_1t+\varphi_1)+N_2\sin(g_2t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

и

$$\left.\begin{aligned} e'\cos\bar\omega' &= N_1'\cos(g_1t+\varphi_1)+N_2'\cos(g_2t+\varphi_2),\\ e'\sin\bar\omega' &= N_1'\sin(g_1t+\varphi_1)+N_2'\sin(g_2t+\varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Из этих формул мы находим

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= N_1^2+N_2^2+2N_1N_2\cos[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2],\\ e'^2 &= N_1'^2+N_2'^2+2N_1'N_2'\cos[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2], \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

откуда следует, что эксцентриситеты e и e' удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |N_1-N_2| &\leqslant e \leqslant N_1+N_2,\\ |N_1'-N_2'| &\leqslant e' \leqslant N_1'+N_2', \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

правые части которых и представляют искомые верхние границы величин e и e'.

Переходя к вековым возмущениям долгот перигелиев, покажем, что *для каждой планеты величина $\bar\omega - bt$ для всех значений t имеет конечную верхнюю границу*. Величина b равна или g_1, или g_2, или, в исключительном случае, их среднему арифметическому $\frac{1}{2}(g_1+g_2)$. Это свойство также выводится без труда из формул (35) и (36).

Рассмотрим уравнения (35) и допустим сначала, что $N_1 < N_2$. Помножая тогда уравнения (35) соответственно на $\sin(g_2t+\varphi_2)$, на $-\cos(g_2t+\varphi_2)$ и складывая, а затем на $\cos(g_2t+\varphi_2)$ и $\sin(g_2t+\varphi_2)$ и складывая, мы получим вместо (35) следующие уравнения:

$$e\sin(\bar\omega-g_2t-\varphi_2)=N_1\sin[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2],$$
$$e\cos(\bar\omega-g_2t-\varphi_2)=N_1\cos[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2]+N_2,$$

откуда находим

$$\operatorname{tg}(\bar\omega-g_2t-\varphi_2)=\frac{N_1\sin[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2]}{N_1\cos[(g_1-g_2)t+\varphi_1-\varphi_2]+N_2}. \tag{39}$$

Так как, по предположению, $N_1 < N_2$, знаменатель правой части формулы (39) не может никогда обратиться в нуль. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}(\bar\omega-g_2t-\varphi_2)$ не может обратиться в бесконечность, вследствие чего угол $\bar\omega-g_2t-\varphi_2$ всегда имеет числовое значение, меньшее чем 90°, или всегда остается заключенным между 90° и 270°. В силу этого величина $\bar\omega-g_2t$ для всех значений t остается меньше некоторого конечного числа, вполне определяемого начальными условиями задачи.

Если $N_1 > N_2$, то аналогичным образом докажем, что величина $\bar\omega-g_1t$ имеет конечную верхнюю границу.

Если, наконец, $N_1=N_2$, то рассматриваемое свойство докажется следующим образом. Из уравнений (35) мы можем вывести (для произвольных значений N_1 и N_2) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&e\sin\left(\bar\omega-\frac{g_1+g_2}{2}t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)=\\
&\qquad=(N_1-N_2)\sin\left(\frac{g_1-g_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right),\\
&e\cos\left(\bar\omega-\frac{g_1+g_2}{2}t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)=\\
&\qquad=(N_1+N_2)\cos\left(\frac{g_1-g_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Если, как предположено, $N_1=N_2$, то мы находим

$$\bar\omega-\frac{g_1+g_2}{2}t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=i\times 180^\circ,$$

где i — целое число. Отсюда следует, что величина

$$\bar\omega-\frac{g_1+g_2}{2}t$$

остается ограниченной для всех значений времени, что и требовалось доказать.

Для другой планеты из уравнений (36) точно таким же образом выводим, что

при $N'_1 < N'_2$ имеет верхний предел величина $\overline{\omega}' - g_2 t$,
при $N'_1 > N'_2$ » » » » $\overline{\omega}' - g_1 t$,
при $N_1 = N_2$ » » » » $\overline{\omega}' - \frac{g_1 + g_2}{2} t$.

Итак, долготы перигелиев могут быть определены формулами

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega} &= bt + \Omega,\\ \overline{\omega}' &= b't + \Omega',\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где Ω и Ω' суть ограниченные сверху функции времени, а b и b' — постоянные. При этом

$$\begin{aligned} &b_1 = g_1, && \text{если } N_1 > N_2; && b' = g_1, && \text{если } N'_1 > N'_2,\\ &b = g_2, && \text{»}\ \ N_1 < N_2; && b' = g_2, && \text{»}\ \ N'_1 < N'_2,\\ &b = \frac{g_1 + g_2}{2}, && \text{»}\ \ N_1 = N_2; && b' = \frac{g_1 + g_2}{2} && \text{»}\ \ N'_1 = N'_2. \end{aligned}$$

Так как величины $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa'_1$, $\varkappa'_2$ имеют множителями малые массы, то они сами суть величины малые. Поэтому и коэфициенты уравнения (27) будут малыми величинами, а следовательно, и его корни g_1 и g_2 будут малыми величинами порядка масс m_a и m_b.

Отсюда следует, что коэфициенты b и b' в формулах (41) также весьма малы и долготы перигелиев $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ весьма медленно увеличиваются с течением времени. Величины b и b' характеризуют средние скорости вековых движений перигелиев. Мы видим, что эти средние скорости зависят только от масс и больших полуосей оскулирующих орбит и совершенно не зависят от начальных условий задачи.

Таковы результаты исследования вековых возмущений эксцентриситетов и перигелиев. Не нужно забывать, что эти результаты можно считать только предварительными, так как они получены из рассмотрения только одного первого приближения уравнений для вековых возмущений.

§ 65. Вековые возмущения наклонений и долгот узлов. Дифференциальные уравнения, определяющие вековые возмущения (в первом приближении) наклонностей и долгот узлов, т. е. определяющие вековые движения плоскостей орбит, пишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varkappa_1 (v - v'), & \frac{du'}{dt} &= -\varkappa'_1 (v - v'),\\ \frac{dv}{dt} &= -\varkappa_1 (u - u'), & \frac{dv'}{dt} &= \varkappa'_1 (u - u'). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Не представляет никакого труда проинтегрировать эту систему линейных уравнений с постоянными коэфициентами и получить таким образом явные выражения для величин u, v, u' и v', как функций времени. Мы не будем проводить этого интегрирования полностью и ограничимся только выводом некоторых важнейших свойств вековых движений плоскостей оскулирующих орбит. Для этого получим сначала три интеграла системы (42), не зависящих от времени.

Из уравнений (42) мы выводим

$$\left.\begin{aligned} u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt} &= \varkappa_1(vu'-uv'),\\ u'\frac{du'}{dt}+v'\frac{dv'}{dt} &= -\varkappa_1'(vu'-uv'),\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

откуда получаем

$$\varkappa_1'\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}\right)+\varkappa_1\left(u'\frac{du'}{dt}+v'\frac{dv'}{dt}\right)=0. \tag{44}$$

Далее, из уравнений (42) имеем непосредственно

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1'\frac{du}{dt}+\varkappa_1\frac{du'}{dt}&=0,\\ \varkappa_1'\frac{dv}{dt}+\varkappa_1\frac{dv'}{dt}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Уравнения (44) и (45) могут быть немедленно проинтегрированы. Выполняя это интегрирование и обозначая через c_1, c_2, c_3 три произвольные постоянные, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1'u+\varkappa_1u'&=c_1,\\ \varkappa_1'v+\varkappa_1v'&=c_2,\\ \varkappa_1'(u^2+v^2)+\varkappa_1(u'^2+v'^2)&=c_3.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Соотношения (46) представляют искомые, не зависящие от времени, интегралы системы (42). Эти интегралы, как это легко доказать, соответствуют интегралам площадей (94) главы восьмой. Действительно, указанные интегралы пишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i\sin\Omega+\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\sin\Omega'=c_1'',\\ &\beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i\cos\Omega+\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\sin\Omega'=-c_2'',\\ &\beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i+\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i'=c_3''.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если мы вспомним, что

$$u=\sin i\cos\Omega,\qquad v=\sin i\sin\Omega,$$
$$u'=\sin i'\cos\Omega',\quad v'=\sin i'\sin\Omega'$$

и разложим левые части (17) по степеням e^2 и e'^2, то пренебрегая членами третьего и высшего порядков, получим из двух первых уравнений (47)

$$\left.\begin{aligned} \beta\sqrt{a}\,v+\beta'\sqrt{a'}\,v'&=c_1'',\\ \beta\sqrt{a}\,u+\beta'\sqrt{a'}\,u'&=-c_2''.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Но мы можем написать

$$\beta\sqrt{a}=fm_am_b\frac{m_c}{nam_a},$$

откуда, имея в виду выражения (31) для $\varkappa_1$ и $\varkappa_1'$, мы находим, что уравнения (48) действительно совпадают с двумя первыми уравнениями (46). Последнее уравнение (46) также, очевидно, получается из третьего уравнения (47).

Выберем теперь за основную координатную плоскость неизменяемую плоскость. Тогда $c_1'' = c_2'' = 0$ и также $c_1 = c_2 = 0$, и из двух первых уравнений (46) мы получаем

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1'}, \tag{49}$$

откуда находим

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \tag{50}$$

или

$$\operatorname{tg} \Omega = \operatorname{tg} \Omega'.$$

Таким образом мы убеждаемся в том, что

линии узлов обеих планетных орбит на неизменяемой плоскости совпадают.

Это свойство было уже нами доказано ранее со всей строгостью.

Выведем теперь одно новое важное свойство вековых движений плоскостей оскулирующих орбит, состоящее в том, что

наклонения обеих орбит к неизменяемой плоскости остаются постоянными во все время движения.

Действительно, из уравнения (49) находим

$$vu' - uv' = 0,$$

вследствие чего из уравнений (43) получаем

$$u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} = 0,$$

$$u'\frac{du'}{dt} + v'\frac{dv'}{dt} = 0,$$

откуда выводим

$$u^2 + v^2 = \text{const},$$

$$u'^2 + v'^2 = \text{const},$$

или, что то же,

$$\sin^2 i = \text{const}, \quad \sin^2 i' = \text{const}.$$

Наконец, можно еще определить движение общей линии узлов на неизменяемой плоскости. Действительно, мы имеем

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{v}{u},$$

откуда находим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{u\dfrac{dv}{dt} - v\dfrac{du}{dt}}{u^2 + v^2}.$$

Подставляя сюда выражения $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ из уравнений (42), мы получаем

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{-\varkappa_1(u^2+v^2)+\varkappa_1(uu'+vv')}{u^2+v^2},$$

откуда с помощью пропорции (49) находим окончательно

$$\frac{d\Omega}{dt}=-(\varkappa_1+\varkappa_1'). \tag{51}$$

Таким образом мы убеждаемся в том, что

общая линия узлов движется по неизменяемой плоскости в сторону, обратную движению планет, и притом с постоянной скоростью, равной численно величине $\varkappa_1+\varkappa_1'$.

Полученные важные свойства вековых движений плоскостей орбит указывают на громадное значение неизменяемой плоскости в исследованиях теоретического характера. Действительно, выбирая за основную плоскость какую угодно другую плоскость, кроме неизменяемой, мы не получили бы всех тех простых свойств, которые выведены в настоящем параграфе. Однако не нужно забывать, что все эти свойства (кроме соотношения $\operatorname{tg}\Omega=\operatorname{tg}\Omega'$) получены из рассмотрения приближенных уравнений, а потому указанные нами результаты имеют только предварительный характер.

§ 66. Некоторые заключительные замечания. Чтобы у изучающего небесную механику по настоящему руководству не осталось ложного впечатления о двух последних главах, мы считаем необходимым сделать в заключение некоторые замечания.

Последнее абсолютно точное[1]), что мы вывели в настоящей книге, — это система уравнений возмущенного движения (10) главы девятой, определяющая канонические элементы Λ, λ, ξ, η, p, q, и Λ', λ', ξ', η', p', q' в функции времени.

Если бы эту систему можно было проинтегрировать со всей математической строгостью и полнотой, то мы получили бы возможность определить относительное движение *трех материальных точек* для *всех значений времени* и с количественной, и с качественной точек зрения. Иными словами, мы смогли бы определить положения и скорости всех трех тел для любого значения времени и с любой степенью точности. Кроме того, мы смогли бы установить общие законы движения нашей системы материальных точек, характеризующие *все свойства движения*, а не только *некоторые*. Однако точная интеграция указанных уравнений возмущенного движения, по крайней мере в настоящее время, невозможна, вследствие чего мы и оказываемся вынужденными прибегать к приближенному интегрированию.

Эта задача достаточно разрешала бы вопрос, по крайней мере, с точки зрения практики, если бы было возможно, во-первых, *доказать сходимость применяемого процесса последовательных приближений*, а во-вторых, *определять погрешность, нами делаемую, когда мы останавливаемся на том или ином приближении.*

---

[1]) „Точное“ с математической точки зрения.

К сожалению, ни то, ни другое до сих пор не выполнено, вследствие чего описанные нами методы последовательных приближений остаются необоснованными и представляют собой только последовательность формальных операций.

При этом мы рассмотрели только простейшие из этих операций, а именно — только первое приближение. Астрономы почти всегда довольствуются одним лишь первым приближением. В редких случаях рассматривается частично и второе приближение и еще более редко затрагиваются последующие приближения.

Если мы при этом вспомним, что небесные тела в действительности не являются материальными точками и что силы между ними действующие не суть исключительно силы взаимных притяжений, действующие по закону Ньютона, то невольно возникает вопрос о том, окажутся ли все выведенные нами приближенные формулы способными хоть в какой-нибудь степени отразить действительные движения действительных физических тел. Не окажется ли весь долголетний колоссальный труд теоретиков бесполезной тратой времени вследствие того, что, собственно говоря, мы сами не знаем, *что мы изучаем при помощи наших приближенных формул.*

Ответ на эти вопросы дает *повседневная астрономическая практика*, которая обнаруживает, в громадном большинстве случаев, изумительное совпадение между теорией и наблюдениями, и это совпадение убеждает нас, что, несмотря на все математическое несовершенство и необоснованность применяемых нами методов, мы действительно изучаем фактические движения настоящих небесных тел и что наша работа не бесполезна, а имеет громадное практическое значение.

Тем не менее, астрономы не могут примириться с тем, что им приходится работать неточными, кустарными, неизвестно чтó дающими методами. Поэтому с давних пор усилия ученых направлены, главным образом, на эту сторону вопроса. Астрономы и, отчасти, математики стараются создать точные методы для исследования движений небесных тел, которые позволили бы разрешить задачу, поставленную еще в первой главе и о которой мы напомнили в начале этого заключительного параграфа.

В заключение напомним, что все свойства возмущенного движения, выведенные нами, в предположении, что система состоит из Солнца и двух планет, без труда могут быть распространены на систему любого числа планет. Принципиальных затруднений это распространение не представляет. Только выкладки становятся более сложными и более тягостными, увеличиваясь по мере увеличения числа планет.