П. ПИЦЕТТИ
Профессор Пизанского университета

ОСНОВЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ПЛАНЕТ

ПЕРЕВОД С ИТАЛЬЯНСКОГО
А. А. МИХАЙЛОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

PAOLO PIZZETTI

PRINCIPII
DELLA TEORIA MECCANICA
DELLA
FIGURA DEI PIANETI

PISA 1913

Редакционную работу по этой книге провел А. К. Беляев. Издание оформил З. А. Лившиц. Корректуру держал С. Ф. Морошкин. Наблюдал за выпуском Е. М. Богданов. Рукопись сдана в призводство 25/V 1932 г. листы подписаны к печати 13/XII 1932 г., книга вышла в свет в марте 1933 г. в количестве 3 000 экз., на бумаге формата $62 \times 94^{1}/_{16}$. печатных знаков в листе 60384, листов в книге $10^{3}/_{4}$. Заказ. № 1859. ГТТИ 452. Уполномоченный Главлита Б-39599.

1-я Образцовая типография Огиза, РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследования, которые составляют предмет настоящей книги, тесно связаны с великими именами Гюйгенса (1642—1695), Ньютона (1642—1726), Маклорена (1698—1746), Эйлера (1707—1783), Клеро (1713—1765), Даламбера (1717—1783), Лагранжа (1736—1813), Лапласа (1749—1827), Лежандра (1752—1833), Айвори (1765—1842), Гаусса (1777—1855), Пуассона (1781—1840), Плана (1781—1864), Шаля (1793—1880), Эри (1801—1892), Якоби (1804—1851), Дирихле (1805—1859), Стокса (1819—1903), Кельвина (1824—1907), Пуанкаре (1854—1912)... От этих исследований берут непосредственное начало замечательные теоретические открытия математики и механики, значение которых в последующем их развитии вышло далеко за пределы тех проблем, которые дали повод для их возникновения.

Исследования, касающиеся физико-математической теории фигуры планет, даже отвлекаясь от их значения для астрономических и геодезических проблем, в силу исторических причин, привлекали внимание математиков. И представляемый этими исследованиями интерес возрастает при мысли, что следует ожидать крупных усовершенствований и большого прогресса в отношении решения трудных вопросов, связанных с фигурой и строением Земли и планет вообще.

Я полагал не бесполезным в качестве подготовки к дальнейшему изучению составить этот скромный курс, в котором были бы с достаточной ясностью и известной строгостью изложены основы обычной механической теории фигуры планет. Как указывает заглавие книги, я ограничился изложением основных частей этой теории, не вдаваясь в дальнейшие исследования, конечно, полные интереса, но которые еще не выявили ту степень ясности и убедительности, которая необходима для того, чтобы дать им место в книге учебного характера.

Меня побудила к изданию этой книги мысль, что к немногочисленным изложениям этого предмета я мог прибавить заметные улучшения как в смысле упрощения некоторых выводов, так и в отношении придания большей строгости другим. Своим исследованиям, отчасти уже опубликованным, я придал новую и, как мне представляется, более обоснованную форму, исходя из теории Стокса, дающей зависимость между силой тяжести и формой внешней поверхности равновесия как для случая эллипсоида, так и для случая произвольной поверхности, мало отлачающейся от сферы. Мне удалось значительно упростить теорию Клеро, относящуюся к жидким планетам, состоящим из эллипсоидных слоев.

Мне представлялось особенно интересным отделить те результаты, которые не зависят от специальных гипотез относительно способа распределения массы внутри планеты, от тех выводов, которые основываются на предположенных аналитических выражениях для внутренней плотности. С этой точки зрения мне кажется, что до сих пор большинство изложений представляло некоторое смешение, и что часто многие недостаточно отдавали себе отчет в тех громадных успехах, которые сделали труды Стокса (1849) в теории фигуры Земли.

Намерение разделить эти два рода исследований и логическая последовательность привели меня к порядку изложения, который является по необходимости обратным порядку исторического развития. Я надеюсь, что не будет сочтено за недостаток мое заявление о том, что я не имел намерения придать настоящему изложению исторического или библиографического характера.

Прибавлю, что будучи геодезистом, я придал в моей книге наибольшее значение первому из указанных двух видов исследования, обратив особое внимание на исследования силы тяжести и уровенной поверхности Земли.

Для тех читателей, которые недостаточно знакомы с высшей математикой, я изложил необходимые сведения о формуле Грина и теории потенциала в более простой и краткой форме в Приложении.

Те, кто желал бы изучить наш предмет с исторической и библиографической стороны, имеет в своем распоряжении известную книгу Тодгентера (Todhunter: A history of the mathematical theories of Attractions and of the Figure of the Earth, London 1873), которая доведена до середины XIX столетия, а для последующей эпохи найдут многочисленные данные в различных главах шестого тома Энциклопедии математических наук (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. VI, Leipzig). Следует отметить еще интересные исторические монографии профессора Цаиотти-Бьянко (O. Zanotti-Bianco), неутомимого исследователя и популяризатора нашего предмета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава десятая

ОДНОРОДНАЯ ЖИДКАЯ ПЛАНЕТА ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ. ЭЛЛИПСОИДЫ МАК-ЛОРЕНА И ЯКОБИ. СЛУЧАЙ ФИГУРЫ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ОТ СФЕРЫ

Глава одиннадцатая

ГОМОГРАФИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛАНЕТЫ. СЛУЧАЙ ДИРИХЛЕ И РИМАНА

Глава двенадцатая

ЖИДКИЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛАНЕТЫ

Глава тринадцатая

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЖИДКИХ ПЛАНЕТ К СЛУЧАЮ ЗЕМЛИ

Приложения *Стр*

I. ФОРМУЛЫ ГАУССА И ГРИНА

II. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ТЕЛА

Глава первая

УРОВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Два главных вида исследования. Исследования, относящиеся к механической теории фигуры планет, могут быть разделены на две главных категории: 1) исследование так называемой поверхности равновесия и зависимости ее формы от притяжения, которое планета производит во внешнем пространстве, 2) исследование фигуры равновесия согласно гипотезе полного или частичного жидкого состояния планеты и данных гипотез относительно внутреннего распределения плотностей.

Исследования первого вида относятся, главным образом, к геодезии, поскольку они занимаются изучением земной тяжести, и к астрономии, поскольку они дают точные выражения для притяжения, которое Земля оказывает на другие тела солнечной системы.

Исследования второго вида имеют прямое отношение к математической физике и представляют особый интерес для изучения космогонических гипотез, звездной эволюции, а также формы и внутреннего строения планет согласно гипотезе их первоначального жидкого состояния.

2. Компоненты силы тяжести. Допустим на некоторое время, что планета состоит из твердой недеформируемой массы, имеющей поступательное движение, одинаковое с центром массы, и равномерное вращение вокруг оси, проходящей через упомянутый центр. Будем называть относительным движением тела такое движение, которое отнесено к осям (x, y, z), неизменно связанным с планетой.

Возьмем бесконечно малую массу (материальную точку), предоставленную без начальной относительной скорости действию планеты в точке P, назовем направлением ***вертикали в P начальное направление относительного движения упомянутой материальной точки***, т. е. направление касательной в точке P (конечно, в сторону движения) к траектории нашей материальной точки, и назовем ***тяжестью в P ускорение в относительном движении в начальный момент этого движения.*** Поскольку начальная скорость, согласно условию, равна нулю в этот начальный момент, направление вектора тяжести совпадает с вертикалью, и этот вектор может быть получен как геометрическая сумма абсолютного ускорения A_a упомянутой материальной точки и вектора, равного, но противоположного ускорению увлечения A_s в P; последнее есть не что иное, как центробежное ускорение, так как относительная скорость в начальный момент равна нулю.

Поэтому имеем (геометрическое соотношение):

$$g = A_a - A_s.$$

Что касается A_s, то оно составляется из ускорения a^0 центра массы, происходящего под влиянием действия других небесных тел, и из ускорения вращательного движения. Компоненты этого последнего суть $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$, 0, если обозначим через ω угловую скорость и примем ось вращения за ось z. Таким образом, обозначая через α_x^0, α_y^0, α_z^0 компоненты α^0, для составляющих A_s будем иметь:

$$\alpha_x^0 - \omega^2 x, \quad \alpha_y^0 - \omega^2 y, \quad \alpha_z^0.$$

Что касается A_a, то оно составляется из ускорения с компонентами A_x, A_y, A_z, сообщаемого ньютонианским тяготением массы планеты точке P, и из ускорения с компонентами α_x, α_y, α_z, вызываемого притяжением той же точки P другими небесными телами. Отсюда компоненты силы тяжести выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= A_x + \omega^2 x + \alpha_x - \alpha_x^0, \\ g_y &= A_y + \omega^2 y + \alpha_y - \alpha_y^0, \\ g_z &= A_z \qquad\quad + \alpha_z - \alpha_z^0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

3. Верхние пределы для вторых и третьих производных потенциальной функции. Разности $\alpha_x - \alpha_x^0$ и аналогичные по другим координатам представляют особое значение для исследования *приливов* и *периодических колебаний вертикальной линии*. В первом общем исследовании фигуры планет ими можно пренебречь. Найдем верхний предел значений, которые могут принимать эти разности для тел нашей солнечной системы.

Выведем формулу, дающую *верхний предел для производных от потенциальной функции тела на внешнюю точку.*

Обозначим через x, y, z координаты притягиваемой точки и через a, b, c — координаты элемента массы $k\,d\tau$ притягивающего тела и положим:

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2;$$

будем иметь:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3}; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(a-x)^2}{r^5}.$$

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы прямой, проходящей через точки (a, b, c) и (x, y, z), тогда

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3}(1 - 3\cos^2\alpha); \quad \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3} = -9\frac{a-x}{r^5} + 15\frac{(a-x)^3}{r^7} = \frac{1}{r^4}(15\cos^3\alpha - 9\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} = 3\frac{(a-x)(b-y)}{r^5} = \frac{3\cos\alpha\cos\beta}{r^3};$$

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y^2} = -3\frac{a-x}{r^5} + 15\frac{(a-x)(b-y)^2}{r^7} = -3\frac{\cos\alpha}{r^4}(1 - 5\cos^2\beta);$$

$$\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 15\frac{(a-x)(b-y)(c-z)}{r^7} = 15\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{r^4}.$$

Наибольшее числовое значение $15\cos^3\alpha - 9\cos\alpha$ имеет при $\alpha = 0$, равное 6. Максимум произведения $\cos\alpha\cos\beta$ при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ есть $\frac{1}{2}$. Для получения максимума выражения $3\cos\alpha\,(1 - 5\cos^2\beta) = T$ положим

$\cos\alpha = \sin\beta\cos\omega$, где ω заключается между 0 и π. Для любого значения β максимуму T соответствует $\omega = 0$. Таким образом максимум T совпадает с максимумом

$$T' = 3\sin\beta\,(1 - 5\cos^2\beta).$$

Это выражение имеет максимум при $\beta = 31°5'$, равный 4,13. Наконец, максимум $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ наступает при $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и равен $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Предшествующие формулы позволяют найти верхние пределы числового значения частных производных потенциальной функции V тела с массой M на внешнюю точку, если обозначим через r_m наименьшее расстояние притягиваемой точки от тела.

Для вторых и третьих производных получим:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| = \left|\int_\tau k\frac{\partial^2 \frac{1}{2}}{\partial x^2}\,d\tau\right| < \frac{2M}{r_m^3};$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right| < \frac{3M}{2r_m^3}; \qquad \left|\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right| < \frac{6M}{r_m^4};$$

$$\left|\frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial y^2}\right| < \frac{4{,}13}{r_m^4}M; \qquad \left|\frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right| < \frac{5M}{\sqrt{3}r_m^4}.$$

Таким образом можно во всех случаях принять $\frac{2M}{r_m^3}$ за верхний предел числового значения вторых производных, и $\frac{6M}{r_m^4}$ за верхний предел производных третьего порядка.

4. Влияние небесных тел на компоненты силы тяжести. На основании сказанного мы можем найти верхний предел числового значения разности $a_x - a_x^0$ и аналогичных выражений в формуле (1).

Для этой цели рассмотрим, кроме данной планеты, одно из небесных тел C_s и обозначим массу последнего через M_s и потенциальную функцию на точку планеты через V_s. Обозначая через f постоянную ньютонианского тяготения, будем иметь:

$$a_x = f\sum_s \frac{\partial V_s}{\partial x}, \tag{2}$$

и на основании теоремы ускорения центра массы:

$$Ma_x^0 = f\int_\tau k\sum_s \frac{\partial V_s}{\partial x}\,d\tau, \tag{3}$$

где M есть полная масса планеты, а интегрирование распространяется на весь объем, занятый данной планетой.

С другой стороны, обозначая через a, b, c координаты элемента массы планеты и разлагая по ряду Тейлора, получим:

$$\frac{\partial V_s}{\partial x}=\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_0+a\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)_0+b\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial y}\right)_0+c\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)_0+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x^3}\right)_m+\frac{b^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x\,\partial y^2}\right)_m+$$
$$+\frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x\,\partial z^2}\right)_m+ab\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x^2\,\partial y}\right)_m+bc\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right)_m+ca\left(\frac{\partial^3 V_s}{\partial x^2\,\partial z}\right)_m, \qquad (4)$$

где индексы ($_0$) относятся к началу координат, а индексы ($_m$) — к точке M, отличной от начала, имеющей координаты θa, $\theta' b$, $\theta'' c$ (θ, θ', θ'' заключаются между нулем и единицей).

Начало координат принято в центре массы планеты. В таком случае точка M находится внутри планеты. Умножая последнее соотношение на $k\,d\tau$ и интегрируя по объему τ, будем иметь:

$$\int_\tau k\frac{\partial V_s}{\partial x}\,d\tau=M\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_0+\int_\tau Rk\,d\tau, \qquad (5)$$

где

$$|R|<\frac{9}{2}D^2\frac{6M_s}{r_m^4}=27\frac{D^2M_s}{r_m^4}. \qquad (6)$$

Здесь r_m есть наименьшее расстояние точки планеты до точки небесного тела C_s, и D — максимальное расстояние точки планеты от центра массы последней. Формулы (5) и (6) легко проверить, если принять во внимание, что при интегрировании (4) члены первого порядка относительно a, b, c исчезают, так как начало координат принято в центре массы, и если в членах второго порядка a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca заменить через D^2 — наибольшую величину, которую они могут принимать, и, наконец, если вместо каждой производной третьего порядка вставить ее максимальное значение, найденное в предшествующем параграфе.

Подставим (5) в (3), опуская для сокращения письма знак суммы, т. е. ограничивая вычисление той частью разности $\alpha-\alpha_x^0$, которая приходится на долю небесного тела C_s. Будем иметь:

$$\alpha_x^0=f\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_0+\varepsilon, \qquad (7)$$

где

$$|\varepsilon|<27f\frac{D^2M_s}{r_m^4}. \qquad (8)$$

При помощи разложения, аналогичного (4) получим:

$$\alpha_x=f\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)_0+xf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)_0+yf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial y}\right)_0+zf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial z}\right)_0+\varepsilon',$$

где ε' удовлетворяет тому же неравенству (8).

Таким образом

$$\alpha_x-\alpha_x^0=xf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)_0+yf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial y}\right)_0+zf\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial z}\right)_0+\varepsilon-\varepsilon'. \qquad (9)$$

Для получения верхнего предела трехчлена:

$$t = x\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)_0 + y\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x\,\partial z}\right)_0,$$

дадим x, y, z положительные значения, а вторым производным — их наибольшую величину, найденную в предыдущем параграфе. Если α, β, γ — направляющие косинусы радиуса-вектора D, идущего из начала координат в точку (x, y, z), будем иметь:

$$|t| \leqslant \frac{M_s D}{2r_m^3}\left\{4|\alpha| + 3|\beta| + 3|\gamma|\right\}.$$

Так как $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то наибольшее значение выражения в скобках будет при $\alpha = \frac{4}{\sqrt{34}}$, $\beta = \gamma = \frac{3}{\sqrt{34}}$, когда упомянутое выражение принимает величину $\sqrt{34}$. Отсюда

$$|t| < \frac{3M_s D}{r_m^3}.$$

Таким образом будем, наконец, иметь:

$$|\alpha_x - \alpha_x^0| < f\frac{3M_s D}{r_m^3} + 54f\frac{M_s D^2}{r_m^4}. \tag{10}$$

Здесь мы ограничились в выражении $\alpha_x - \alpha_x^0$ учетом притяжения лишь одного небесного тела C_s.

Оценим в грубом приближении численное значение, которое имеет правая часть формулы (10) в случае, когда рассматриваемая планета есть Земля, а тело C_s — одно из прочих тел солнечной системы. Мы скоро увидим, что приближенное значение силы тяжести на земной поверхности можно выразить формулой:

$$G = f\frac{M}{D^2}.$$

Определим отсюда f и вставим в выражение (10), тогда для первого, главного члена правой части получим:

$$3\frac{M_s}{M}\frac{D^3}{r_m^3}G = \eta,$$

где D есть радиус земного экватора.

Если тело C_s — Солнце, то

$$\frac{M_s}{M} = 323\,000; \quad \frac{D}{r_m} < \frac{1}{23\,000}; \quad \eta < \frac{G}{15\,000\,000}.$$

Если C_s — Луна, то

$$\frac{M_s}{M} = 0{,}0126; \quad \frac{D}{r_m} < \frac{1}{56{,}9}; \quad \eta < \frac{G}{4\,880\,000}.$$

Если C_s — Венера, то

$$\frac{M_s}{M}=0{,}787;\quad \frac{D}{r_m}=\frac{1}{6425};\quad \eta<\frac{G}{168\,500\,000\,000}.$$

Второй член правой части (10) имеет величину достаточно малую по сравнению с η.

В общем изучении распределения силы тяжести на поверхности Земли, если принять во внимание ту точность, с которою в настоящее время производятся измерения ее величины, мы можем пренебречь столь малыми величинами, как полученные значения η, а вместе с тем считать исчезающе-малыми и разности $\alpha_x-\alpha_x^0$ при рассмотрении *напряжения* силы тяжести.

5. Влияние небесных тел на направление вертикали. Однако разности $\alpha_x-\alpha_x^0$ имеют также влияние на *направление* вертикальной линии. Последняя образует с осью x угол, определяемый из

$$\cos\lambda=\frac{g_x}{g}=\frac{g_x}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}.$$

Если g_x получает приращение δ, то соответствующее изменение $\cos\lambda$ дается соотношением:

$$\Delta\cos\lambda=\left(\frac{1}{g}-\frac{g_x^2}{g^3}\right)\delta=\frac{g_y^2+g_z^2}{g^3}\,\delta=\sin^2\lambda\cdot\frac{\delta}{g}.$$

Пусть η, ζ — соответствующие приращения g_y, g_x, тогда отклонение вертикальной линии может быть вычислено по формуле:

$$\gamma=\sqrt{(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2}=\frac{1}{g}\sqrt{\delta^2\sin^4\lambda+\eta^2\sin^4\mu+\zeta^2\sin^4\nu}.$$

Пусть δ, η, ζ имеют верхний предел l и, заметим, что наибольшее значение суммы:

$$\sin^4\lambda+\sin^4\mu+\sin^4\nu,$$

получается при $\lambda=\mu=\nu=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, равное $\frac{4}{3}$. Будем иметь для верхнего предела γ в секундах дуги:

$$\frac{l}{g\,\mathrm{arc}\,1''}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Для случая Земли предположим, что *рассматриваемая точка находится вблизи ее поверхности*, и возьмем для верхнего предела l одно из найденных в конце предыдущего параграфа значений. Найдем, что отклонение отвеса под влиянием притяжения Луны не превосходит $0'',06$.

Влияние на земную вертикаль со стороны других тел солнечной системы еще того меньше.

6. Поверхность уровня. Отбросим в (1) члены $\alpha_x-\alpha_x^0$, представляющие влияние небесных тел, и обозначим через V потенциальную функцию ньютонианского тяготения рассматриваемой планеты. Тогда будем иметь:

$$g_x=f\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2x;\quad g_y=f\frac{\partial V}{\partial y}+\omega^2y;\quad g_z=f\frac{\partial V}{\partial z}$$

или же, положив
$$W = fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \tag{11}$$
найдем
$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{12}$$
откуда
$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2}.$$

Рассмотрим поверхность
$$W = \text{const}.$$

Она обладает тем свойством, что в каждой ее точке нормаль, направленная в ту сторону пространства, в которую возрастает W, дает на основании (12) направление вертикали.

Назовем такую поверхность *поверхностью уровня.* Согласно уравнению (12), W имеет единственное значение для всех точек пространства и вне планеты является непрерывной функцией, так же как и все ее производные любого порядка. Внутри планеты эта функция и ее производные первого порядка продолжают оставаться конечными и непрерывными, а производные второго порядка, оставаясь вообще конечными, претерпевают разрыв непрерывности в тех точках, где меняется скачком плотность.

Отсюда следует, что через каждую точку пространства проходит одна и только одна поверхность уровня, что такая поверхность имеет всюду единственную и вполне определенную касательную плоскость, положение которой меняется непрерывно от одной точки к другой. Внутри планеты, а также при вхождении снаружи внутрь нарушается непрерывность кривизны линий, проведенных на уровенной поверхности, а равным образом и положения главных сечений поверхности уровня.

Из упомянутого свойства W следует, что направление вертикали и напряжение силы тяжести меняются непрерывно от одной точки к другой как вне, так и внутри планеты.

Далее, очевидно, что составляющая силы тяжести в некоторой точке в направлении r выражается частной производной $\frac{\partial W}{\partial r}$, где под ∂r подразумевается элемент расстояния по направлению r. Действительно, мы имеем:
$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = g_x \cos(rx) + g_y \cos(ry) + g_z \cos(rz).$$

В частности, можно написать:
$$g = \frac{\partial W}{\partial n}, \tag{13}$$

где ∂n есть элемент нормали к уровенной поверхности, проходящей через данную точку и направленной в сторону возрастания W.

Рассмотрим две бесконечно близких уровенных поверхности, уравнения которых таковы:
$$W = c; \quad W = c + \delta c,$$

где c и δc постоянны, и проведем в точке A, лежащей на первой из них, нормаль до встречи в B со второй поверхностью; тогда можем написать (13) в форме:

$$g = \frac{\delta c}{(AB)}, \tag{13'}$$

где g — ускорение силы тяжести в точке A. Отсюда заключаем, что *на уровенной поверхности сила тяжести меняется обратно пропорционально расстоянию этой уровенной поверхности от соседней бесконечно близкой*. Это свойство имеет важное приложение в геодезии к геометрическому нивеллированию.

Заметим, наконец, что согласно (11) мы для уравнения Пуассона получаем:

$$\Delta_2 W = -4\pi fk + 2\omega^2, \tag{14}$$

где k — плотность вещества в рассматриваемой точке.

7. Обобщенная теорема Пуанкаре. На основании элементарных соображений гидростатики, если представить себе планету, состоящую из идеальной жидкости, находящейся в пустоте, ограничивающая ее поверхность должна быть поверхностью уровня, и, кроме того, сила тяжести должна быть направлена внутрь массы. Предполагая планету жидкой и постоянной плотности k, Пуанкаре доказал, что должно удовлетворяться неравенство:

$$\omega^2 < 2\pi fk.$$

В более общем случае рассмотрим планету переменной плотности и найдем необходимое условие для того, чтобы во всех точках поверхности S планеты (которую мы не предполагаем непременно совпадающей с поверхностью уровня, как это было в случае жидкой планеты) сила тяжести была направлена внутрь, что, очевидно, необходимо, так как иначе отдельные массы, находящиеся на поверхности планеты, должны будут оторваться.

Если n внутренняя нормаль к поверхности S планеты, в каждой точке S должно существовать неравенство

$$\frac{\partial W}{\partial n} > 0,$$

откуда

$$\int \frac{\partial W}{\partial n} dS > 0,$$

где интеграл взят по всей поверхности.

С другой стороны, имеем по известной формуле Грина [1]:

$$\int \frac{\partial W}{\partial n} dS = -\int \Delta_2 W \, d\tau,$$

где второй интеграл распространяется на весь объем, занятый планетой.

Отсюда, принимая во внимание (14), находим:

$$\int \frac{\partial W}{\partial n} dS = 4\pi f \int k \, d\tau - 2\omega^2 \int d\tau = \tau (4\pi f k_m - 2\omega^2), \tag{15}$$

[1] См приложения, § 3, формулу (6).

где τ обозначает полный объем, а k_m — среднюю плотность планеты. Поэтому должно быть:

$$\omega^2 < 2\pi f k_m. \tag{15'}$$

Мы в дальнейшем увидим, что среднюю силу тяжести на земной поверхности можно приближенно представить как

$$G = \frac{4}{3} \cdot \pi f k_0 R_m,$$

где k_0 — средняя плотность и R_m — средний радиус Земли. Исключив f при помощи этого выражения из (15), найдем:

$$\omega^2 < \frac{3}{2} \frac{G}{R_m} \frac{k_m}{k_0}.$$

Примем за единицу времени *секунду среднего времени*, тогда

$$\omega < 0{,}00152 \sqrt{\frac{k_m}{k_0}}.$$

Если при измерении угловой скорости мы примем за единицу *секунду дуги*, то второй член нужно разделить на arc 1″, после чего получим:

$$\omega < 313'' \sqrt{\frac{k_m}{k_0}}.$$

В случае Земли ($k_m = k_0$) отсюда видим, что угловая скорость может увеличиться до 313″ в секунду времени (продолжительность оборота около $1^h 9^m$), причем поверхностная тяжесть не перестанет быть направленной вниз. Для случая Юпитера ($k_m : k_0 = 0{,}242$) следует $\omega < 2' 34''$ (наименьшая продолжительность оборота $2^h 20^m$).

Дальше мы найдем более узкие пределы для угловой скорости, исходя из других, более специальных гипотез.

Глава вторая

УРОВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОЙ ТЯЖЕСТИ

8. Существование замкнутых поверхностей уровня вблизи Земли. В настоящей главе займемся некоторыми проблемами, имеющими особый интерес для нашей Земли ввиду того, что в них замешаны элементы, поддающиеся измерению, а также потому, что те формулы, которые здесь будут выведены, имеют важное значение в исследованиях фигуры геоида и земной тяжести.

Начнем с доказательства того, что, по крайней мере до определенного расстояния от физической поверхности Земли, уровенные поверхности замкнуты и имеют каждая единственную общую точку с радиусом, проведенным из центра массы. Допустим следующие два положения, являющиеся данными наблюдения:

1. Физическая поверхность Земли мало отличается от сферы. Точнее, мы можем взять на оси вращения такую точку G, наибольшее и наименьшее расстояние которой от поверхности Земли отличается от среднего расстояния R_m меньше чем на $\frac{1}{100R_m}$. (Под R_m мы будем подразумевать радиус сферы, имеющей объем, равный объему Земли.)

2. Если R_1 — наибольшее расстояние точки земной поверхности от точки G, M — масса Земли, f — постоянная притяжения, ω — угловая скорость, то

$$\frac{\omega^2 R_1^3}{fM} < \frac{1}{280}. \tag{1}$$

Первое из этих положений утверждается простыми астрономическими наблюдениями, в особенности, измерением лунного параллакса. Что касается второго, то величина отношения $\frac{\omega^2 R_m^3}{fM}$ выводится из элементов движения Луны вокруг Земли и получается почти равной $\frac{1}{289}$. Приняв во внимание, что $R_1 - R_m < \frac{R_m}{100}$, получим неравенство (1).

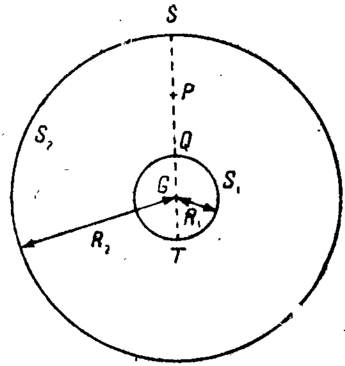
Рассмотрим радиус-вектор GP и найдем, до какого расстояния от точки G функция W будет во всяком случае убывающей при возрастании расстояния $GP = a$. Заметим, что производная $\frac{\partial W}{\partial a}$ есть не что иное, как составляющая X силы тяжести по направлению PG. Но X во всяком случае больше того значения, которое оно имело бы, если бы вся масса Земли была сосредоточена в T — точке, где продолженная прямая PG встречает сферу S_1, описанную радиусом R_1 из центра G, и если бы центробежная сила в точке P была направлена по прямой GP. Поэтому имеем:

$$X > \frac{fM}{(a+R_1)^2} - \omega^2 a.$$

Помножив на $\frac{R_1^2}{fM}$, положнв $\frac{a}{R_1}=x$ и припомнив (1), получим:

$$\frac{R_1^2}{fM}X > \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{280}.$$

Второй член положителен для x, заключенного между 0 н 5,89...; поэтому X положительно для значений a, заключающихся между R_1 и $5{,}89\,R_1$. Остается доказать, что вдоль любого радиуса-вектора W убывает, начиная от сферы S_1 радиуса R_1 до расстояния, равного в круглых числах шести земным радиусам.



Черт. 1.

Для этой цели вообразим себе сферу S_2 с центром G и радиусом $R_2=5R_1$. Пусть Q и S — точки, в которых некоторый радиус, проведенный из точки G, встречает сферы S_1 и S_2. В Q будет:

$$W_Q > \frac{fM}{2R_1},$$

и в S:

$$W_s < \frac{fM}{R_2-R_1} + \frac{\omega^2 R_2^2}{2} = \frac{fM}{4R_1} + \frac{25}{2}\,\omega^2 R_1^2 = \frac{fM}{2R_1}\left(\frac{1}{2} + 25\,\frac{\omega^2 R_1^3}{fM}\right).$$

Последнее выраженне в скобках меньше единнцы на основании неравенства (1). Отсюда:

$$W_s < \frac{fM}{2R_1} < W_Q.$$

Так как W непрерывно убывает от Q до S, мы будем иметь одну и только одну точку между Q и S, для которой $W=\frac{fM}{2R_1}$. Это рассуждение можно повторить для любого радиуса-вектора. Таким образом имеем поверхность уровня Σ $\left(\text{поверхность } W=\frac{fM}{2R_1}\right)$, которая замкнута и встречает радиус, выходящий из точки G, один и только один раз. Исходя из найдеиной таким образом Σ и идя внутрь или наружу, докажем существование бесконечного числа других замкнутых поверхностей уровня аналогичных Σ, так как в пространстве, заключенном между S_1 и S_2, производная $\frac{\partial W}{\partial a}$ конечна, отлична от нуля и постоянного знака.

Приведенные рассуждения недостаточны для того, чтобы доказать существование замкнутых поверхностей уровня внутри планеты. Однако аналогичными рассуждениями можно доказать существование таких поверхностей до глубины в 600 *км* от поверхности Земли в предположении, что до такой глубины плотность земных слоев не превосходит шестикратной плотности воды.

9. Форма уровенных поверхностей на больших расстояниях от Земли. Пусть R_1 есть радиус сферы с центром тяжести G и заключающей

в себе всю массу Земли. Потенциальная функция V убывает вдоль каждого радиуса при удалении от поверхности самой сферы во внешнее пространство. Отсюда следует, что, если ось z есть ось вращения, t — одна из осей, проходящих через G и перпендикулярных к z, то значение функции W в точке на оси z непрерывно убывает прн удалении от G, начиная от сферы R. Напротнв, вдоль осн t W убывает вплоть до некоторой точки, после чего оно вновь возрастает до бесконечностн. Отсюда для значений c, меньших некоторого положительного конечного числа, поверхность $W=c$ не может иметь общих точек с плоскостью, проведенной через G нормально к оси вращения. Другими словами: *на известном расстоянии от Земли уровенные поверхности становятся незамкнутыми.*

На больших расстояниях от Земли потенциальная функция V может быть приближенно выражена через $M:\rho$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ есть расстояние точки от центра тяжести G. Отсюда уравнение уровенной поверхности может быть приближенио написано так:

$$\frac{fM}{\rho}+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=c. \tag{2}$$

Это есть поверхность вращения, у которой уравнение меридиана, если через t обозначить расстоянне точки от осн z, таково:

$$\frac{fM}{\sqrt{t^2+z^2}}+\frac{\omega^2 t^2}{2}=c,$$

откуда, положив

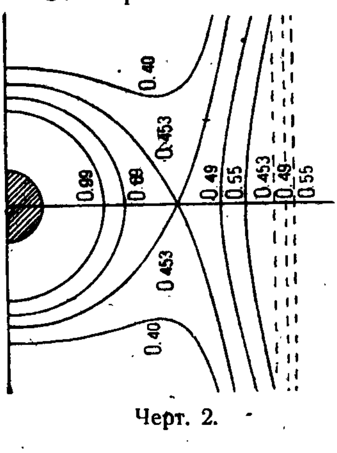
$$\frac{\omega^2 R_m^3}{fM}=\lambda, \quad \frac{c}{fM}=\frac{h}{2R_m},$$

получим:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+z^2}}+\frac{\lambda t^2}{2R_m^3}=\frac{h}{2R_m}. \tag{3}$$

Эта кривая имеет асимптотой прямую, параллельную оси z н отстоящую от последней на расстоянии

$$t=R_m\sqrt{\frac{h}{\lambda}}.$$



Черт. 2.

Кривые пересекают ось z на расстояниbudg

$$z_0=\pm\frac{2}{h}R_m$$

от G. Пересечения с осью t находятся на расстоянии τ от G, определяемом уравнением

$$\lambda\frac{\tau^3}{R_m^3}-h\frac{\tau}{R_m}+2=0. \tag{4}$$

Для достаточно больших значений h оно имеет два положительных корня: кривая имеет в этом случае две ветви, из которых каждая встречает ось t (см. черт. 2). Для малых значений h нет действительных пересечений кривой с осью t, и кривая состоит из двух ветвей снмметричных относительно этой оси. Значение h_0, которое разделяет эти два случая, определяет двойной корень уравнения (4), для которого кривая имеет двойную точку на оси t. Без труда находим $h_0 = 3\sqrt[3]{\lambda}$ и соответствующее значение τ:

$$\tau_0 = R_m \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}.$$

Для $\lambda = \frac{1}{288,5}$: $\qquad h_0 = 0,4527, \quad \tau_0 = 6,611 R_m.$

Отсюда можно найти путем разложения в ряд, что в двойной точке при $h = h_0$ обе ветви кривой пересекают ось t под углами 60 и 120°.

10. Средняя кривизна уровенной поверхности. Линия сил. Назовем *силовой линией* ортогональную траекторию к уровенной поверхности, или такую линию, для которой касательная в любой точке совпадает с вертикалью в этой точке. Первая кривизна силовой линии, а равно и главная кривизна уровенной поверхности S в данной точке выразятся через вторые производные функции W.

Косинусы направления нормали к S равны $\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial x}$ и т. д. Таким образом, называя через R радиус первой кривизны нормального сечения S в точке M, найдем:

$$1 = \frac{R}{g}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{d^2z}{ds^2}\right) = \frac{R}{g}\,T, \tag{5}$$

где условимся считать R положительным, если нормальное сечение обращено вогнутостью в ту сторону, куда возрастает W (также в ту сторону, куда направлена сила тяжести, короче говоря — в н и з). С другой стороны, диференцируя два раза

$$W(x, y, z) = c$$

по отношению дуги s нормального сечения и предполагая, что за ось z взята вертикаль в M, направленная вниз, будем иметь для точки M:

$$\frac{dz}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = g, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + T = 0. \tag{7}$$

Назовем через α угол, который образует нормальное сечение в M с осью x; получим:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,$$

откуда при помощи (5) и (7):

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right).$$

Пусть R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в M. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}&=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),\\ \frac{1}{R_1 R_2}&=\frac{1}{g^2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для нахождения первой кривизны силовой линии в M заметим, что, обозначая через dn элемент силовой линии по направлению вверх, направляющие косинусы будут:

$$\frac{dx}{dn}=-\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial x}$$

и т. д., откуда

$$\frac{d^2x}{dn^2}=\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dn}\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{1}{g}\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

и т. д. Благодаря нашему расположению осей $dn=-dz$. Следовательно:

$$\frac{d^2x}{dn^2}=\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z},\qquad \frac{d^2y}{dn^2}=\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z},\qquad \frac{d^2z}{dn^2}=-\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}.$$

С другой стороны, имеем:

$$g^2=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2,$$

откуда, беря производные и принимая во внимание (6), получим для точки M:

$$g\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z},\quad\text{или}\quad \frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z},$$

и подобным образом:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z},\qquad \frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial^2 W}{\partial z^2},$$

откуда

$$\frac{d^2x}{dn^2}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x},\qquad \frac{d^2y}{dn^2}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y},\qquad \frac{d^2z}{dn^2}=0. \tag{9}$$

Первая кривизна силовой линии будет:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{g}\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}.$$

Из первой формулы (8), принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\Delta_2 W-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=2\omega^2-4\pi fk-\frac{\partial g}{\partial z},$$

найдем:

$$g\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\frac{\partial g}{\partial z}=4\pi fk-2\omega^2, \tag{10}$$

Это есть формула Брунса, которая связывает скорость убывания силы тяжести с высотой, среднюю кривизну уровенной поверхности и плотность k (которая должна быть, конечно, положена равной нулю для внешних точек Земли).

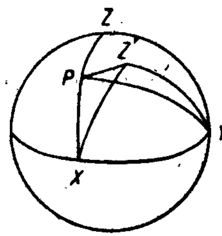
11. Приведение астрономической широты и долготы к уровню моря. Предположим, что измерена астрономическая широта φ и долгота λ точки N, находящейся на высоте h над уровнем моря. Линия сил, проходящая через N, встречает геоид в точке M, в которой направление вертикали немного отличается от вертикали в N. Назовем через $\varphi+\delta\varphi$, $\lambda+\delta\lambda$ астрономическую широту и долготу в точке M: это есть также широта и долгота в N, приведенная к уровню моря.

Формула (9) дает приближенную величину поправочных членов $\delta\varphi$, $\delta\lambda$. На самом деле, примем начало координат в M, возьмем вертикаль в этой точке за ось z, плоскость астрономического меридиана за плоскость zx. Два первых направляющих косинуса вертикали в M будут нулями, а вертикали в N получим из ряда Тейлора, принимая во внимание (9):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dn} &= \delta n\left(\frac{d^2x}{dn^2}\right)_0 + \ldots = \frac{\delta n}{g_0}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 + \ldots, \\ \frac{dy}{dn} &= \frac{\delta n}{g_0}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где индекс 0 относится к точке M.

С другой стороны, если на сфере радиуса 1 представим точками X, Y, Z направления координатных осей (точки X и Y изображают точки севера и востока), Z' — направление вертикали в N, P — северный полюс мира (см. черт. 3), будем иметь:



Черт. 3.

$$\begin{aligned} &\text{дуга } (PZ) = 90^\circ - \varphi - \delta\varphi, \\ &\text{дуга } (PZ') = 90^\circ - \varphi, \\ &\text{угол } (ZPZ') = \delta\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда из сферических треугольников PXZ' и PYZ' получим:

$$\cos(Z', X) = \frac{dx}{dn} = \sin\varphi\cos(\varphi+\delta\varphi) - \cos\varphi\sin(\varphi+\delta\varphi)\cos\delta\lambda,$$

$$\cos(Z', Y) = \frac{dy}{dn} = \cos\varphi\sin\delta\lambda.$$

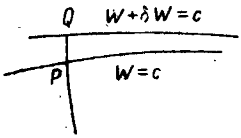
Пренебрегая малыми величинами порядка выше первого и принимая во внимание (11), найдем:

$$\delta\varphi = -\frac{\delta n}{g_0}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0, \quad \cos\varphi\,\delta\lambda = \frac{\delta n}{g_0}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0.$$

Эти формулы позволяют вычислить поправочные члены для приведения широты и долготы к уровню моря в случае, если известны градиенты $\frac{\partial g}{\partial x}$ и $\frac{\partial g}{\partial y}$ силы тяжести на геоиде в направлении севера и востока.

12. **Изменения уровенной поверхности под влиянием небольших вертикальных перемещений поверхностной массы.** Начнем с исследования вертикального смещения уровенной поверхности в точке P в случае, когда вблизи этой точки функция W получает небольшое изменение δW. Проведем через P внешнюю нормаль PQ, и пусть W_P, W_Q — значения W в точках P и Q, которые мы принимаем очень близкими между собою. Получим, так как $PQ = \delta n$:

$$W_Q = W_P + \frac{\partial W}{\partial n}\delta n + \ldots = W_P - g\delta n + \ldots,$$



Черт. 4.

где мы отбросили малые второго порядка. Отсюда следует, что, если W вблизи P получает приращение $\delta W = g\delta n$, поверхность $W = c$, первоначально проходившая через P, будет теперь проходить через Q. Отсюда смещение уровенной поверхности, соответствующее изменению δW функции W, приближенно равно:

$$\delta n = \frac{\delta W}{g}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь земной слой постоянной толщины, состоящий из однородного вещества, имеющий круговое основание и большое протяжение по сравнению с толщиной, нижняя поверхность которого совпадает с уровенной поверхностью S. Предположим, что вещество такого слоя уплотняется и полностью конденсируется на поверхности S.

Найдем, какое изменение вызывается этим в функции W для точки P, находящейся в центре основания слоя. Вычисление можно произвести, пренебрегая кривизной слоя, т. е. отождествляя его с однородным круглым цилиндром. Если дана высота z, радиус основания R, плотность k, то потенциальную функцию цилиндра на точку P нетрудно получить в следующем виде:

$$V = 2\pi k\int_0^z (\sqrt{R^2 + z^2} - z)\,dz.$$

После конденсации цилиндра в плоскости его основания потенциальная функция принимает вид:

$$V' = 2\pi kRz = 2\pi k\int_0^z R\,dz.$$

Возьмем разность, предположив, что R очень велико по сравнению с z:

$$V' - V = 2\pi k\int_0^z (R + z - \sqrt{R^2 + z^2})\,dz = 2\pi k\int_0^z \left(z - \frac{z^2}{2R} + \ldots\right)dz =$$
$$\pi k\left(z^2 - \frac{z^3}{3R} + \ldots\right),$$

и отбрасывая члены с z^3:

$$V' - V = \pi k z^2. \tag{13}$$

С этим приближением результат не зависит от радиуса слоя, поскольку, понятно, этот последний велик по сравнению с толщиной. Оно и понятно: части слоя, удаленные от центра P, производят почти одинаковое действие до и после конденсации, потому что их расстояние от P подвергается очень малому относительному изменению. Отсюда следует, что формула (13) верна также, с той же степенью приближения, и для слоев с основанием, отличным от круга, если только расстояние точки P от края слоя очень велико по всем горизонтальным направлениям по сравнению с толщиной слоя.

При упомянутой конденсации W изменится, таким образом, почти на $f\pi kz^2$, и вертикальное смещение уровенной поверхности будет на основании (12):

$$\delta n = \frac{f\pi}{g} kz^2.$$

Заменяя g приближенным выражением:

$$\frac{4}{3} f\pi k_0 R_m,$$

где k_0 и R_m — средняя плотность и средний радиус Земли, получим:

$$\delta n = \frac{3}{4} \frac{k}{k_0} \frac{z^2}{R_m}. \tag{14}$$

Рассмотрим для примера плоскогорье Памира в Азии, имеющее среднюю высоту около 4000 *м*, и предположим, что вещество его было первоначально сконденсировано на уровне моря. (Эта гипотеза с физической стороны абсурдна и имеет целью дать лишь представление о величине значений δn, соответствующих большим катаклизмам, подобным тем, которые вызвали поднятие Памира.) Перемещение, которое претерпела поверхность геоида благодаря поднятию плоскогорья, дается (14) с обратным знаком. Полагая

$$\frac{k}{k_0} = \frac{2}{5}, \quad z = 4000 \text{ м},$$

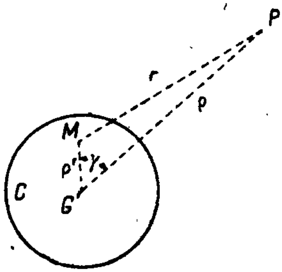
получим это перемещение равным — 0,80 *м*.

По сравнению с грандиозностью геологического явления, которое мы рассмотрели, и по сравнению с теми неправильностями геоида, которыми обычно пренебрегают в геодезических исследованиях, подобное перемещение можно считать действительно ничтожным.

13 Влияние небесных тел на земную тяжесть. В § 4 мы нашли *строгим методом* верхний предел того влияния, которое имеет притяжение другого небесного тела на компоненты тяжести данной планеты. Теперь мы *приближенным вычислением* оценим величину такого воздействия. Рассмотрим притяжение Земли небесным телом C (Солнцем, Луной и т. п.) и найдем потенциальную функцию U тела C. Приняв за начало координат центр массы G' тела C, назовем через x_0, y_0, z_0 координаты центра массы G Земли; $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, $z = z_0 + \gamma$ пусть будут координатами другой точки P Земли, находящейся близ поверхности последней.

Из вычислений § 4 следует, что влияние Δg_x тела C на составляющую земной тяжести в P можно выразить через

$$\Delta g_x = f\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + f\beta\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 + f\gamma\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_0, \tag{15}$$



Черт. 5.

где индекс 0 относится к точке G, центру массы Земли.

Сюда входит выражение потенциальной функции U; приближенное значение ее получим при помощи разложения в ряд, принимая размеры тела C очень малыми по сравнению с расстоянием GG'.

Обозначим через $k\,d\tau'$ элемент M массы тела C, ρ' — его расстояние от центра G', x', y', z' — его координаты, r — его расстояние от точки P; положим $G'P=\rho$, угол $(\rho,\rho')=\gamma$ (черт. 5). Получим:

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma;$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} - 2\frac{\rho'}{\rho}\cos\gamma\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho^2}\cos\gamma - \frac{\rho'^2}{2\rho^3}(1-3\cos^2\gamma) + \ldots,$$

откуда

$$U = \int\frac{k'\,d\tau'}{r} = \frac{M'}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\int\rho'\cos\gamma k'\,d\tau' - \frac{1}{2\rho^3}\int\rho'^2(1-3\cos^2\gamma)\,k'\,d\tau' + \ldots, \tag{16}$$

где M' — масса тела C.

Так как

$$\rho'\cos\gamma = \frac{1}{\rho}(xx' + yy' + zz'),$$

то первый интеграл последней части (16) превращается в нуль, так как начало координат взято в центре тяжести C. Допустив, что оси координат совпадают с главными осями инерции тела C, получим:

$$\int\rho'^2 k'\,d\tau' = \int(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,k'\,d\tau' = \frac{1}{2}(P+Q+R),$$

$$\int\rho'^2\cos^2\gamma\,k'\,d\tau' = \frac{1}{2\rho^2}\int(xx' + yy' + zz')^2 k'\,d\tau' =$$

$$= \frac{1}{2\rho^2}\left[x^2(Q+R-P) + y^2(R+P-Q) + z^2(P+Q-R)\right],$$

где P, Q, R — главные моменты инерции тела C.

Подставляя в (16):

$$U = \frac{M'}{\rho} + \frac{1}{2\rho^5}\left[x^2(Q+R-2P) + y^2(R+P-2Q) + z^2(P+Q-2R)\right] + \ldots,$$

и называя через λ, μ, ν направляющие косинусы прямой $G'P$, получим:

$$U = \frac{M'}{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\lambda^2\frac{Q+R-2P}{M'\rho^2} + \mu^2\frac{R+P-2Q}{M'\rho^2} + \nu^2\frac{P+Q-2R}{M'\rho^2}\right)\right].$$

Моменты инерции меньше $M'D'^2$, где D' — максимальный радиус-вектор поверхности тела C. Поэтому с точностью до малых второго порядка отношение $D':\rho$ можем положить равным:

$$U = \frac{M'}{\rho} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{M'}{\rho^3} + \frac{3M'x^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{3M'xy}{\rho^5}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} = \frac{3M'xz}{\rho^5}. \tag{17}$$

Значения этих производных для точки x_0, y_0, z_0 (центра массы Земли) мы должны вставить в формулу (15).

Если взять ось z параллельно вертикали в P, направленной вниз, оси x и y — параллельно направлению к точкам юга и востока, обозначить через Δ расстояние $G'G$ от центра массы тела C до центра массы Земли, через ζ и A — зенитное расстояние и азимут C по отношению к P, то получим:

$$x_0 = \Delta \sin\zeta \cos A, \quad y_0 = -\Delta \sin\zeta \cos A, \quad z_0 = -\Delta \cos\zeta.$$

Что касается α, β, γ (проекции радиуса на оси координат), то мы можем с достаточным приближением принять Землю за сферу радиуса R_m, и тогда:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = R_m.$$

Отсюда согласно (15) и (17) (где положим Δ вместо ρ):

$$\Delta g_x = -3 \sin\zeta \cos\zeta \cos A \frac{R_m}{\Delta^4} M'.$$

Подобным же образом найдем:

$$\Delta g_y = 3 \sin\zeta \cos\zeta \sin A \frac{R_m}{\Delta^3} M',$$

$$\Delta g_z = (-1 + 3\cos^2\zeta) \frac{R_m}{\Delta^3} M'.$$

Какие же отклонения вертикальной линии соответствуют таким приращениям компонентов силы тяжести? Примем, как и раньше, за ось z невозмущенную вертикаль, а за оси x и y — направления к югу и востоку, тогда два первых косинуса направления отклоненной вертикали будут, пренебрегая малыми второго порядка:

$$\cos\lambda = \frac{\Delta g_x}{g}, \quad \cos\gamma = \frac{\Delta g_y}{g}.$$

С другой стороны, обозначая через γ полное отклонение и α азимут плоскости, в которой оно происходит, получим:

$$\cos\lambda = -\sin\gamma \cos\alpha, \quad \cos\mu = \sin\gamma \sin\alpha,$$

откуда до малых второго порядка:

$$\gamma \cos\alpha = 3 \sin\zeta \cos\zeta \cos A \frac{M' R_m}{\Delta^3 g},$$

$$\gamma \sin\alpha = 3 \sin\zeta \cos\zeta \sin A \frac{M' R_m}{\Delta^3 g},$$

и, заменяя g приближенным выражением $\frac{fM}{R_m^3}$:

$$\gamma \cos\alpha = 3\sin\zeta\cos\zeta\cos A \frac{M'}{M}\frac{R_m^3}{\Delta^3},$$

$$\gamma \sin\alpha = 3\sin\zeta\cos\zeta\sin A \frac{M'}{M}\frac{R_m^3}{\Delta^3}.$$

Что касается величины силы тяжести, то благодаря взятым направлениям осей ее изменение равно с точностью до малых второго порядка Δg_z, т. е.

$$\Delta g = g(-1 + 3\cos^2\zeta)\frac{M'}{M}\frac{R_m^3}{\Delta^3}.$$

13a. Потенциальная функция прилива. Сохраняя обозначения прошлого параграфа и полагая

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = A_{11}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = A_{12}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 = A_{33} \quad \text{и т. д.},$$

влияние, которое оказывает небесное тело C на компоненты тяжести в точке Земли P (x, y, z), можно написать в форме:

$$\Delta g_x = f\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Delta g_y = f\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Delta g_z = f\frac{\partial v}{\partial z},$$

где функция v (потенциальная функция прилива, образованного телом C) определяется равенством:

$$2v = (x-x_0)^2 A_{11} + (y-y_0)^2 A_{22} + (z-z_0)^2 A_{33} + 2(x-x_0)(y-y_0)A_{12} + \\ + 2(y-y_0)(z-z_0)A_{23} + 2(z-z_0)(x-x_0)A_{31}.$$

Возмущающее действие тела C на направление вертикали и на земную тяжесть может быть, таким образом, аналитически представлено прибавлением члена fv к функции W (§ 6), производные которой дают компоненты силы тяжести. Согласно сказанному в § 12 соответствующее вертикальное смещение уровенной поверхности земной тяжести в рассматриваемой точке определяется с достаточным приближением из

$$h = \frac{fv}{g}.$$

Приняв за ось z прямую, соединяющую центр массы Земли G с точкой P, и полагая $GP = R$, найдем:

$$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = R,$$

откуда

$$v = \frac{1}{2}A_{33}R^2, \quad h = \frac{1}{2g}fA_{33}R^2.$$

Вычислением, аналогичным тому, которое было применено в предшествующем параграфе, найдем, что

$$A_{33} = -\frac{M'}{\Delta^3}(1 - 3\cos^2\zeta'),$$

где ζ' — угол, который образует прямая GG', соединяющая центр массы Земли и центр тела C с радиусом-вектором GP. Пренебрегая сжатием Земли, можно ζ' заменить через ζ — геоцентрическим зенитным расстоянием тела C для точки P. Отсюда имеем:

$$h = \frac{1}{2g} fM'R^2 (1 - 3\cos^2\zeta).$$

Это — основная формула для вычисления высоты прилива в так называемой статической теории приливов.

Глава третья

ТЕОРЕМА СТОКСА. О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

14. Теорема Стокса. *Если дана внешняя замкнутая уровенная поверхность и известна масса и угловая скорость вращения планеты, то величина и направление силы тяжести определяются однозначно для каждой точки данной поверхности и во всем внешнем пространстве.*

Заметим, что, если V_i есть потенциальная функция (неизвестная) планеты в точке внутри поверхности S, то согласно формуле Грина[1] будет:

$$\int\limits_S \frac{\partial V_i}{\partial n} dS = -\int\limits_\tau \Delta_2 V_i \, d\tau = 4\pi M,$$

где dn — элемент внутренней нормали к S и M — полная масса планеты; первый интеграл распространяется на всю поверхность S, а второй — на весь заключенный в ней объем.

Пусть V есть потенциальная функция планеты на внешнюю точку, тогда будет (на основании непрерывности первой производной от потенциальной функции) в любой точке S:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n},$$

и отсюда:

$$\int\limits_S \frac{\partial V}{\partial n} d = 4\pi M.$$

Если допустить, что потенциальная функция во внешнем пространстве может иметь два различные значения V и V', то должно быть:

$$\int\limits_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int\limits_S \frac{\partial V'}{\partial n} dS,$$

и положив

$$V - V' = U, \tag{1}$$

будем иметь:

$$\int\limits_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0. \tag{2}$$

С другой стороны, U, определяемое (1), есть, очевидно, гармоническая функция для всего внешнего пространства, а на самой поверхности S есть постоянная, так как две функции V и V' должны удовлетворять на поверхности S условиям:

$$fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const},$$

$$fV' + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

---

[1] См. приложение, § 3, формулу (6).

Применим теперь ко всему пространству, внешнему по отношению к S, формулу Грина[1]:

$$\int\limits_{\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=-\int\limits_{S}U\frac{\partial U}{\partial n}dS-\int\limits_{\tau}U\Delta_2 U\,d\tau.$$

Первый интеграл правой части есть нуль на основании (2), принимая во внимание, что U постоянно; второй интеграл также равен нулю, потому что $\Delta_2 U=0$ для внешней точки. Следовательно, и левая часть должна равняться нулю, что возможно лишь при

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

в каждой внешней точке по отношению к S. Поэтому во внешнем пространстве должно быть $U=\text{const}$. Но, так как U обращается в нуль на бесконечно большом расстоянии, то $U=0$ во всем внешнем пространстве. Отсюда $V=V'$.

Внешняя потенциальная функция, таким образом, определена однозначно, так же как и функция

$$W=fV+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

а следовательно, и величина и направление силы тяжести.

Замечание. Если S есть поверхность вращения, например вокруг оси z, то функция V должна оставаться неизменной при всех изменениях координат, выражающих вращение около оси z. Поэтому V должно зависеть только от x^2+y^2 и от z; также должна существовать и внутренняя симметрия относительно оси вращения поверхности S.

15. Дополнения к теореме Стокса. ***Если дана масса и внешняя уровенная поверхность S, то этим определяется положение центра массы планеты и направление главных моментов инерции.***

Действительно, рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{\tau}ak\,d\tau,\quad\int\limits_{\tau}bk\,d\tau,\quad\int\limits_{\tau}ck\,d\tau,\tag{3}$$

распространенные на весь объем внутри поверхности S, где a, b, c обозначают координаты элемента массы $k\,d\tau$.

Первый из этих интегралов может быть написан так:

$$I=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau}a\Delta_2 V_i\,d\tau,\tag{4}$$

где V_i — потенциальная функция планеты для внутренней точки. Применим лемму Грина[2]:

$$\int\limits_{\tau}(U\Delta_2 V-V\Delta_2 U)\,d\tau=-\int\limits_{S}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS,\tag{5}$$

---

[1] См. приложение, § 3, формулу (7).

[2] См. приложение, § 2.

и заметим, что $\Delta_2 a = 0$; получим:

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(a \frac{\partial V_i}{\partial n} - V_i \frac{\partial a}{\partial n} \right) dS. \tag{6}$$

На том основании, что потенциальная функция и ее первые производные меняются непрерывно, на поверхности S будет:

$$V_i = V, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Интеграл (6) поэтому вполне определен, если даны масса и поверхность S, так как по теореме Стокса эти данные определяют V вне поверхности S и на этой последней.

Таким образом значение первого интеграла (3) определено, если даны масса и поверхность S. То же самое будет и с двумя другими интегралами (3). Подобным образом можно доказать, что при тех же данных будут определены значения интегралов:

$$\int_\tau kab\,d\tau, \quad \int_\tau kbc\,d\tau, \quad \int_\tau kca\,d\tau, \quad \int_\tau (a^2 - b^2)\,k\,d\tau, \quad \int_\tau (a^2 - c^2)\,k\,d\tau. \tag{3'}$$

Так как масса известна, то определение интегралов (3) равносильно определению координат центра массы.

Что касается интегралов (3'), то нахождение их величины равносильно определению направлений главных осей инерции и разностей главных моментов инерции.

Действительно, положим

$$A = \int_\tau (b^2 + c^2)\,k\,d\tau, \quad B = \int_\tau (c^2 + a^2)\,k\,d\tau, \quad C = \int_\tau (a^2 + b^2)\,k\,d\tau, \quad D = \int_\tau bck\,d\tau,$$

$$E = \int_\tau cak\,d\tau, \quad F = \int_\tau abk\,d\tau.$$

Как известно из теории моментов инерции, для определения главных осей и главных моментов инерции достаточно найти ортогональную подстановку для x, y, z, которая превращает квадратичную форму

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy$$

в каноническую форму:

$$f = PX^2 + QY^2 + RZ^2.$$

Коэфициенты подстановки будут тогда направляющими косинусами главных осей, между тем как P, Q, R выразят главные моменты инерции. Мы можем положить

$$f = f_1 + f_2$$

где

$$f_1 = A(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$f_2 = (B - A)\,y^2 + (C - A)\,z^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy.$$

Коэфициенты в последнем выражении известны, если даны значения интегралов (3'). Остается лишь получить коэфициенты ортогональной подстановки:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned}\right\}$$

обращающей f_2 в каноническую форму:

$$f_2 = P_1X^2 + Q_1Y^2 + R_1Z^2,$$

что даст и коэфициенты P_1 Q_1 R_1 этой формы.

После этого форма f будет обращена в каноническую форму:

$$f = (A + P_1)X^2 + (A + Q_1)Y^2 + (A + R_1)Z^2,$$

и мы получим:

$$P = A + P_1, \quad Q = A + Q_1, \quad R = A + R_1,$$

где A совершенно не известно. Остается, как сказано, определить направления $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ главных осей и разности $P_1 - Q_1$, $P_1 - R_1$ между главными моментами инерции.

Относительно этой последней разности заметим, что

$$P - Q = \int_\tau k(b^2 - a^2)\,d\tau,$$

$$4\pi(P - Q) = -\int_S (b^2 - a^2)\frac{\partial V}{\partial n}dS + 2\int_S \left(b\frac{\partial b}{\partial n} - a\frac{\partial a}{\partial n}\right)V\,dS. \tag{3''}$$

Предположим, в частности, что поверхность S есть поверхность вращения вокруг оси z. V будет тогда симметрично относительно оси z. Для нахождения интегралов во второй части (3″) достаточно произвести интегрирование для произвольной параллели поверхности. V и $\frac{\partial V}{\partial n}$ должны оставаться постоянными, откуда легко убедиться, что интегралы должны обратиться в нуль для каждой параллели. Поэтому и разность $P - Q$ в сделанном предположении равна нулю.

Профессор Лауричелла сделал более общее замечание, что если дана потенциальная функция вне тела, то этим определяется величина интеграла

$$\int_\tau Uk\,d\tau,$$

распространенного на весь объем тела, или в более общем смысле — на объем, заключенный в некоторой поверхности, целиком заключающей в себе данное тело, где U есть некоторая *гармоническая функция*[1] внутри этого же объема. Доказательство этого положения производится без труда на основании формулы (5) Грина.

16. Задача Стокса. Назовем *задачей, или проблемой Стокса* определение внешней потенциальной функции V планеты, если дана внешняя уровенная поверхность S, масса M и угловая скорость ω.

Теоретически V определяется этими условиями, как мы это видели в § 14. V должно удовлетворять условиям:

1. Быть *гармонической функцией*, или также иметь свойство потенциальных функций для пустоты, т. е. удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta_2 V = 0$$

и, кроме того, известным условиям непрерывности.

[1] Определение гармонической функции см. приложение, § 6.

2. Принимать вид:

$$\text{const} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

на поверхности S.

3. Обозначая через ρ расстояние притягиваемой точки от некоторой постоянной точки планеты, должно быть[1]:

$$\lim_{\rho=\infty} \rho V = M. \tag{7}$$

17. Случай, когда одна из уровенных поверхностей есть сфера с центром на оси вращения. Если a — радиус сферы и V_s' значение потенциальной функции планеты для некоторой точки сферы, то должно быть

$$fV_s + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const},$$

откуда, так как $x^2 + y^2 = a^2 - z^2$,

$$V_s' = A + \frac{\omega^2}{2f} z^2 \quad (A = \text{const}). \tag{8}$$

Попытаемся представить внешнюю потенциальную функцию V при помощи формулы:

$$V = \varphi(\rho) + z^2 \psi(\rho),$$

где ρ — радиус-вектор из центра сферы, т. е.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Получим:

$$\Delta_2 V = \frac{2\varphi'}{\rho} + \varphi'' + 2\psi + z^2\left(\frac{6\psi'}{\rho} + \psi''\right),$$

и так как это выражение должно обращаться в нуль при всех значениях ρ и z, то должно быть:

$$\frac{\psi''}{\psi'} = -\frac{6}{\rho}, \tag{9}$$

$$\frac{2\varphi'}{\rho} + \varphi'' = -2\psi. \tag{10}$$

Обозначая через k и h постоянные, выражение (4) дает:

$$\psi' = \frac{k}{\rho^6},$$

откуда

$$\psi = \frac{h}{\rho^5}$$

без добавочной постоянной, так как ψ должно обращаться в нуль при $\rho = \infty$.

Употребляя только что найденное выражение для ψ, можно написать (10) в таком виде:

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\varphi') = -\frac{2h}{\rho^3},$$

[1] См. приложение, § 7.

откуда

$$\varphi' = \frac{h}{\rho^4} + \frac{h'}{\rho^2}, \quad \varphi = -\frac{h}{3\rho^3} - \frac{h'}{\rho}.$$

Наконец,

$$V = -\frac{h}{3\rho^3} - \frac{h'}{\rho} + \frac{hz^2}{\rho^5}.$$

Постоянная определяется при помощи выражения (7), которое дает $h' = -M$, а из выражения (8), полагая $\rho = a$, имеем:

$$h = \frac{\omega^2 a^5}{2f}.$$

Итак, окончательно

$$V = \frac{\omega^2 a^5}{2f}\left(\frac{z^2}{\rho^5} - \frac{1}{3\rho^3}\right) + \frac{M}{\rho},$$

$$W = \frac{\omega^2 a^5}{f}\left(\frac{z^2}{\rho^5} - \frac{1}{3\rho^3}\right) + f\frac{M}{\rho} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) =$$

$$= f\frac{M}{\rho} + \frac{\omega^2 z^2}{2}\left(\frac{a^5}{\rho^5} - 1\right) + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} - \frac{\omega^2 a^5}{6\rho^3}.$$

Для нахождения силы тяжести g_s на поверхности достаточно принять во внимание, что в нашем случае

$$g_s = -\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\rho = a}.$$

При диференцировании по ρ примем:

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{z}{\rho}.$$

Согласно сказанному получим без затруднения:

$$g_s = f\frac{M}{a^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\omega^2 a^3}{fM}\right) + \frac{5}{2}\frac{\omega^2 z^2}{a} = f\frac{M}{a^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\omega^2 a^3}{fM}\right) + \frac{5}{2}\omega^2 a \cos^2\vartheta,$$

где ϑ обозначает дополнение широты (полярное расстояние). Итак, в случае, когда одна из внешних поверхностей уровня есть сфера, сила тяжести не постоянна на этой поверхности. Согласно замечанию, сделанному в § 7 [формула (13)], *система уровенных поверхностей ни в коем случае не может представлять системы концентрических сфер.*

18. Исследование некоторых функций, относящихся к эллипсоиду. Для решения задачи Стокса в случае, если одна из уровенных поверхностей является эллипсоидом, нам нужно познакомиться с некоторыми важными функциями.

Пусть a, b, c — полуоси данного эллипсоида, совпадающие с прямоугольными осями координат, и обозначим через λ больший корень уравнения[1]:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1. \qquad (11)$$

[1] Это выражение нетрудно привести к рациональному уравнению третьей степени относительно λ и доказать, что оно имеет три действительных корня, заключенных соответственно в трех интервалах (предполагая $a > b > c$):

$$(-a^2, -b^2), \quad (-b^2, -c^2), \quad (-c^2, +\infty).$$

Рассматривая λ как функцию x, y, z, положим

$$P=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}, \tag{12}$$

откуда для частных производных по x от (11) получим:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a^2+\lambda)P}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{P(a^2+\lambda)}-\frac{2x}{P(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{2x}{(a^2+\lambda)P^2}\frac{\partial P}{\partial x}.$$

При помощи простых преобразований найдем:

$$\Delta_1\lambda=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{P}, \tag{13}$$

$$\Delta_2\lambda=\frac{2}{P}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right). \tag{14}$$

Положим, далее:

$$R_s=(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)$$

и рассмотрим функции

$$K=\int_\lambda^\infty\frac{ds}{\sqrt{R_s}}, \qquad A=\int_\lambda^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}},$$

$$B=\int_\lambda^\infty\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R_s}}, \qquad C=\int_\lambda^\infty\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

Получим:

$$\frac{\partial K}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{R_\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-\frac{2x}{(a^2+\lambda)P\sqrt{R_\lambda}},$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}=\frac{1}{2R_\lambda^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{R_\lambda}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2},$$

откуда

$$\Delta_2 K=\frac{1}{2\sqrt{R_\lambda}}\frac{\partial\log R_\lambda}{\partial\lambda}\Delta_1\lambda-\frac{1}{\sqrt{R_\lambda}}\Delta_2\lambda. \tag{15}$$

Принимая во внимание (14), можем еще написать:

$$\Delta_2\lambda=\frac{2}{P}\frac{\partial}{\partial\lambda}\log R_\lambda.$$

Подставляя в (15) это выражение для $\Delta_2\lambda$ и внося из выражения (13) $\Delta_1\lambda$, найдем, что

$$\Delta_2 K=0. \tag{16}$$

В дальнейшем λ обозначает больший, т. е. третий из этих корней. Для случая, когда точка x, y, z находится вне эллипсоида, этот корень положителен, и величины

$$\sqrt{a^2+\lambda}, \quad \sqrt{b^2+\lambda}, \quad \sqrt{c^2+\lambda}$$

равны полуосям эллипсоида, проходящего через точку (x, y, z) и софокусного данному эллипсоиду.

Заметим еще, что в предположении $a > b > c$ значение функции K в любой точке заключается между

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)^{\frac{3}{2}}} \text{ и } \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)^{\frac{3}{2}}}$$

или между

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+\lambda}} \text{ и } \frac{2}{\sqrt{c^2+\lambda}}.$$

С другой стороны, формула (11), определяющая λ, показывает, что

$$\lim_{\rho=\infty} \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} = 1,$$

откуда следует:

$$\lim_{\rho=\infty} \rho\sqrt{K} = 2. \tag{17}$$

Обратимся к рассмотренню функций A, B, C. Их значения заключаются между

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)^{\frac{5}{2}}} \text{ и } \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)^{\frac{5}{2}}}$$

или также между

$$\frac{2}{3(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} \text{ и } \frac{2}{3(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда следует, что для $\rho = \infty$

$$\lim \rho^3 A = \lim \rho^3 B = \lim \rho^3 C = \frac{2}{3}. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$U = K - Ax^2 - By^2 - Cz^2 = \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{R_s}}.$$

Возьмем производные по x, заметив, что подынтегральная функция обращается на основании (11) в нуль при $s = \lambda$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2x \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} = -2Ax,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} + \frac{2x}{(a^2+\lambda)\sqrt{R_\lambda}}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -2\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} + \frac{4x^2}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{R_\lambda}}.$$

Прибавляя две другие вторые производные и припоминая выражение для P, получим:

$$\Delta_2 U = -2\int_\lambda^\infty \left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{R_s}} + \frac{4}{\sqrt{R_\lambda}}. \tag{19}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s} = \frac{1}{R_s}\frac{dR_s}{ds}.$$

Подставляя в (19) и выполняя интегрирование, найдем:

$$\Delta_2 U = 0.$$

Для $\rho = \infty$ будем иметь:

$$\lim \rho U = 2 - \frac{x^2}{\rho^2}\lim \rho^3 A - \frac{y^2}{\rho^2}\lim \rho^3 B - \frac{z^2}{\rho^2}\lim \rho^3 C,$$

или, согласно (18):

$$\lim_{\rho=\infty} \rho U = \frac{4}{3}. \tag{20}$$

Итак, K и U являются гармоническими потенциальными функциями в пространстве вне эллипсоида. Первая из них становится постоянной на самой поверхности эллипсоида. Вторая переходит на поверхности в выражение

$$K_0 - A_0 x^2 - B_0 y^2 - C_0 z^2, \tag{21}$$

где

$$A_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}},$$

$$K_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{R_s}}$$

и аналогично для B_0 и C_0, причем параметр λ принимает на поверхности эллипсоида значение, равное нулю.

19 Случай сжатого эллипсоида вращения. Обозначая через a, a, b полуоси эллипсоида, получим:

$$K = \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{b^2+s}},$$

$$C = \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(b^2+s)^{\frac{3}{2}}},$$

$$A = B = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s^2)\sqrt{b^2 + s}}.$$

Интегрирование можно легко выполнить, если принять за переменную вместо s величину η, определяемую равенством

$$\eta = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + s}},$$

откуда

$$ds = -2(a^2 - b^2)\frac{d\eta}{\eta^3}, \quad b + s = \frac{a^2 - b^2}{\eta^2}, \quad a + s = \frac{(a^2 - b^2)(1 + \eta^2)}{\eta^2}.$$

Положим:

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}. \tag{22}$$

Получим после указанной замены переменной:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int\limits_0^E \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{2 \operatorname{arc\,tg} E}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \\ A = B &= \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^E \frac{\eta^2 d\eta}{(1 + \eta^2)^2} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\operatorname{arc\,tg} E - \frac{E}{1 + E^2}\right), \\ C &= \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^E \frac{\eta^2 d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} (E - \operatorname{arc\,tg} E). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Переменная E связана с координатами x, y, z уравнениями:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda} = 1,$$

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}.$$

На поверхности эллипсоида имеем $\lambda = 0$, откуда E принимает здесь значение:

$$i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

которое связано с обычным эксцентриситетом e формулами:

$$i = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad e = \frac{i}{\sqrt{1 + i^2}}.$$

Гармонические потенциальные функции K и U во внешнем пространстве обращаются на поверхности эллипсоида первая — в постоянную, вторая в

$$U_s = K_0 - A_0(x^2 + y^2) - C_0 z^2,$$

где A_0 и C_0 получаются из (23) по замене E через i.

Принимая во внимание уравнение эллипсоида:

$$z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 + y^2),$$

можно написать U_0 еще в таком виде:

$$U_0 = \text{const} - \left(A_0 - \frac{b^2}{a^2} C_0\right)(x^2 + y^2).$$

Глава четвертая

ПРОБЛЕМА СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ДАННАЯ УРОВЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЕСТЬ СЖАТЫЙ ЭЛЛИПСОИД ВРАЩЕНИЯ

20. **Выражение потенциальной функции.** Вспомним, что внешняя потенциальная функция V планеты при данной внешней поверхности равновесия S, полной массе M и угловой скорости ω должна удовлетворять условию (§ 16):

$$\lim_{\rho=\infty} \rho V = M,$$

причем на самой поверхности S она принимает вид:

$$\text{const} - \frac{\omega^2}{2f}(x^2+y^2).$$

Функции U и K, рассмотренные в прошлых параграфах, дают без затруднения выражение для V в случае, когда поверхность равновесия является сжатым эллипсоидом вращения, в котором меньшая ось b совпадает с осью вращения планеты.

Действительно, положим

$$V = NK + QU, \tag{1}$$

где N и Q — постоянные; V является гармонической функцией во внешнем пространстве, на поверхности же S оно обращается в

$$\text{const} - Q\left(A_0 - \frac{b^2}{a^2}C_0\right)(x^2+y^2),$$

как мы это видели в конце предыдущей главы.

На бесконечном расстоянии согласно формулам (17) и (20) § 18 будет

$$\lim \rho V = 2N + \frac{4}{3}Q.$$

Таким образом V удовлетворяет всем условиям проблемы, если выбрать N и Q так, чтобы

$$Q\left(A_0 - \frac{b^2}{a^2}C_0\right) = \frac{\omega^2}{2f}, \tag{2}$$

$$2N + \frac{4}{3}Q = M. \tag{3}$$

Положив

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = i,$$

будем иметь согласно формуле (23) предыдущего параграфа:

$$A_0 = \frac{1}{b^3 i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} i - \frac{i}{1+i^2}\right),$$

$$C_0 = \frac{2}{b^3 i^3}(i - \operatorname{arc\,tg} i).$$

Поэтому (2) обращается в

$$\frac{Q}{a^2bi^3}\left[(3+i^2)\operatorname{arc\,tg} i - 3i\right]=\frac{\omega^2}{2f}. \tag{4}$$

Этим выражением определяется Q, после чего из (3) получается N. Таким образом V полностью определено и находится из

$$V=\left(M+\frac{2Q}{3}\right)\frac{\operatorname{arc\,tg} E}{\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{Q}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{arc\,tg} E-\frac{E}{1+E^2}\right)(x^2+y^2)-$$

$$-\frac{2Q}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}(E-\operatorname{arc\,tg} E)\,z^2. \tag{4'}$$

Составляющие силы тяжести будут:

$$g_x=fN\frac{\partial K}{\partial x}+fQ\frac{\partial U}{\partial x}+\omega^2x,$$

$$g_y=fN\frac{\partial K}{\partial y}+fQ\frac{\partial U}{\partial y}+\omega^2y,$$

$$g_z=fN\frac{\partial K}{\partial z}+fQ\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Производные от K уже найдены в § 18 для случая трехосного эллипсоида. В настоящем случае

$$\sqrt{R_\lambda}=(a^2+\lambda)\sqrt{b^2+\lambda} \qquad A=B,$$

откуда

$$g_x=\frac{-2fNx}{(a^2+\lambda)^2P\sqrt{b^2+\lambda}}-2fQxA+\omega^2x,$$

$$g_y=\frac{-2fNy}{(a^2+\lambda)^2P\sqrt{b^2+\lambda}}-2fQyA+\omega^2y,$$

$$g_z=\frac{-2fNz}{(a^2+\lambda)P(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}-2fQzC.$$

Для точек на поверхности эллипсоида имеем:

$$A=A_0,\quad B=B_0,\quad \lambda=0,\quad P=\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{b^4}=P_0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} g_x^0&=\frac{-2fNx}{a^4bP_0}-\frac{2fQx}{b\,i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} i-\frac{i}{1+i^2}\right)+\omega^2x,\\ g_z^0&=\frac{-2fNz}{a^2b^3P_0}-\frac{4fQz}{b^3i^3}(i-\operatorname{arc\,tg} i). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выражение для g_y^0 получится из g_x^0 заменой x на y.

21. Теорема Клеро. Из первой формулы (5) получим экваториальную силу тяжести g_e, полагая $x=a$, $y=0$, $z=0$, откуда $P=1:a^2$, и меняя знак.

Подобным образом получим и тяжесть на полюсе g_p, меняя знак в правой части второй формулы (5) и полагая $x=y=0$, $z=b$, $P=1:b^2$. Таким образом

$$g_e=\frac{2fN}{ab}+\frac{2fQa}{b^3i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} i-\frac{i}{1+i^2}\right)-\omega^2 a,$$

$$g_p=\frac{2fN}{a^2}+\frac{4fQ}{b^2i^3}(i-\operatorname{arc\,tg} i),$$

откуда

$$g_p\frac{a}{b}-g_e=\frac{2fQa}{b^3i^3}\left(2i+\frac{i}{1+i^2}-3\operatorname{arc\,tg} i\right)+\omega^2 a.$$

Припоминая формулу (4), дающую Q, легко приведем это уравнение к виду:

$$g_p\frac{a}{b}-g_e=\omega^2 a\left(\frac{3}{2}B+1\right), \tag{6}$$

где для сокращения положено

$$B=\frac{2i+\frac{4}{3}i^3-2\operatorname{arc\,tg} i\,(1+i^2)}{(3+i^2)\operatorname{arc\,tg} i-3i} \tag{7}$$

Для случая, когда сжатие эллипсоида мало, величина B очень мало отличается от единицы. Действительно, разложение в ряд дает:

$$B=1+\frac{3}{7}i^2-\frac{16}{147}i^4+\ldots$$

Положим:

$$b=a(1-s),$$

откуда

$$\frac{a}{b}=1+\frac{s}{1-s}.$$

Деля (6) на g_p, получаем:

$$\frac{g_p-g_e}{g_p}+\frac{s}{1-s}=\frac{\omega^2 a}{g_p}\left(\frac{3}{2}B+1\right). \tag{8}$$

В случае, когда можно пренебречь квадратом сжатия s, произведением $\omega^2 s$ и членами высших порядков, последняя формула перепишется так:

$$\frac{g_p-g_e}{g_p}+s=\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_p}$$

или с той же степенью приближения:

$$\frac{g_p-g_e}{g_e}+s=\frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e}. \tag{8'}$$

Эта формула выражает знаменитую теорему Клеро: *относительный избыток силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором плюс сжатие равно пяти вторым отношения центробежной силы к силе тяжести на экваторе.*

Эта теорема была доказана Клеро в предположении, что планета состоит из однородных слоев, ограниченных поверхностями сжатых эллипсоидов вращения, имеющих совпадающие направления малых осей, допуская известный закон изменения эксцентриситета от одного эллипсоида к другому. Теория Стокса освобождает эту важнейшую теорему от каких-либо гипотез о внутреннем строении планеты и этим в значительной степени увеличивает ее ценность в отношении применения для изучения формы Земли.

22. Точное и приближенное выражение поверхностной силы тяжести. Допустим, что земной геоид с достаточным приближением представляется сжатым эллипсоидом вращения, малая ось которого совпадает с осью суточного вращения, и что можно пренебречь тем влиянием, которое имеют на форму геоида и на напряжение силы тяжести внешние по отношению к этому геоиду земные массы[1]. Тогда предшествующие формулы применимы для изучения земной тяжести.

Напряжение силы тяжести g в точке (x, y, z) на поверхности эллипсоида получится из g_z, даваемого формулой (5), по разделении на косинус угла, который образует внутренняя нормаль к эллипсоиду с осью z.

Этот косинус равен:

$$-z : b^2\sqrt{P_0},$$

откуда

$$g = -\frac{b^2\sqrt{P_0}g_z}{z} = \frac{2fN}{a^2b\sqrt{P_0}} + \frac{4fQ\sqrt{P_0}}{bi^3}(i - \operatorname{arc\,tg} i).$$

Обозначим через φ широту точки (x, y, z), равную дополнению угла, который внешняя нормаль образует с положительным направлением оси z. Тогда

$$\frac{z}{b^2\sqrt{P_0}} = \sin\varphi,$$

и отсюда

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a^2\sqrt{P_0}} = \cos\varphi. \tag{9}$$

Определив отсюда z и $\sqrt{x^2+y^2}$, и вставив в уравнение эллипсоида, получим:

$$1 = (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)P_0 = b^2(1 + i^2\cos^2\varphi)P_0.$$

Исключим при помощи этого уравнения P_0 из (9):

$$g = \frac{2fN}{a^2}\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi} + \frac{4fQ}{b^2\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}}\,\frac{i - \operatorname{arc\,tg} i}{i^3}.$$

Помножим на $\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}$ и вставим вместо $2N$ равное ему $M - \frac{4}{3}Q$:

$$g\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi} = \frac{f}{a^2}\left(M - \frac{4}{3}Q\right)(1 + i^2\cos^2\varphi) + \frac{4fQ}{a^2}\,\frac{(1+i^2)(1 - \operatorname{arc\,tg} i)}{i^3}. \tag{10}$$

Предполагая i достаточно малым, разложим в ряд:

$$\frac{(1+i^2)(1 - \operatorname{arc\,tg} i)}{i^3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}i^2 - \frac{2}{35}i^2 + .$$

Припоминая выражение (4), определяющее Q, получим также при помощи разложения в ряд:

$$\frac{2fQi^2}{a^2} = \frac{\omega^2 bi^3}{(3+i^2)\operatorname{arc\,tg} i - 3i} = \frac{15}{4}\omega^2 b\left(1 + \frac{6}{7}i^2 + \ldots\right).$$

---

[1] К этому вопросу мы вернемся немного дальше.

Подставляя в (10) найдем

$$g\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}=\frac{fM}{a^2}(1+i^2\cos^2\varphi)-\frac{4}{3}\frac{fQi^2}{a^2}\cos^2\varphi+\frac{8}{15}\frac{fQi^2}{a^2}\left(1-\frac{3}{7}i^2+\ldots\right)=$$

$$=\frac{fM}{a^2}(1+i^2\cos^2\varphi)-\frac{5}{2}\omega^2b^2\left(1+\frac{6}{7}i^2+\ldots\right)\cos^2\varphi+\omega^2b\left(1+\frac{3}{7}i^2+\ldots\right). \quad (11)$$

В этом выражении отброшены члены с $\omega^2 i^4$ и i^6 или члены третьего порядка, считая за первый порядок малости i^2 и ω^2. Если еще пренебречь членами второго порядка, т. е. содержащими i^4 и $\omega^2 i^2$, то

$$g=\frac{fM}{a^2}\left(1+\frac{i^2}{2}\cos^2\varphi\right)-\frac{5}{2}\omega^2b\cos^2\varphi+\omega^2b. \quad (11')$$

Обозначив через g_e тяжесть на экваторе ($\varphi=0$), получим, что

$$g_e=\frac{fM}{a^2}\left(1+\frac{i^2}{2}\right)-\frac{3}{2}\omega^2b, \quad (12)$$

и вычитая

$$g-g_e=-\frac{fM}{a^2}\frac{i^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{5}{2}b\omega^2\sin^2\varphi,$$

или с тем же приближением:

$$g-g_e=-g_e\frac{i^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{5}{2}cg_e\sin^2\varphi,$$

где положено

$$c=\frac{a\omega^2}{g_e}=\frac{1}{288,5},$$

и, наконец, с членами первого порядка:

$$g=g_e\left[1+\left(\frac{5}{2}c-\frac{i^2}{2}\right)\sin^2\varphi\right], \quad (13)$$

где с тем же приближением $\frac{i^2}{2}$ равно сжатию s меридианного эллипса. Формула (13) выражает вместе с (8) с указанным приближением теорему Клеро, причем самим Клеро это выражение было получено посредством довольно узких гипотез, указанных в конце предыдущего параграфа.

Для учета членов второго порядка возьмем формулу (11), которую разделим на $\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}$ и вычтем соответствующее выражение для g_e. Тогда получим, пренебрегая членами третьего порядка,

$$g-g_e=\frac{fM}{a^2}\left[-\frac{i^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{i^4}{8}(1-\cos^4\varphi)\right]+\frac{5}{2}\omega^2a\sin^2\varphi+$$

$$+\frac{5}{2}\omega^2a\left[\frac{2}{35}i^2-\frac{39}{70}i^2\cos^2\varphi+\frac{i^2}{2}\cos^4\varphi\right]. \quad (14)$$

С другой стороны, из (12) имеем с точностью до первого порядка:

$$\frac{fM}{a^2}=g_e\left(1-\frac{i^2}{2}+\frac{3}{2}c\right), \quad c=\frac{\omega^2a}{g_e}.$$

Вставляем в правую часть (14):

$$\frac{g}{g_e}=1+\sin^2\varphi\left[\frac{5}{2}c-\frac{1}{2}i^2+\frac{3}{8}i^4-\frac{17}{28}ci^2\right]+\frac{\sin^2 2\varphi}{16}\left(\frac{1}{2}i^4-5ci^2\right)$$

или также

$$\frac{g}{g_e}=1+\sin^2\varphi\left[\frac{5}{2}c-\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i^4-\frac{13}{7}ci^2\right]-\frac{\sin^4\varphi}{4}\left(\frac{1}{2}i^4-5ci^2\right). \qquad (15)$$

23. Сравнение найденного выражения с формулой Гельмерта. Гельмерт, исходя из разложения потенциальной функции по отрицательным степеням радиуса-вектора, вывел некоторые замечательные соотношения между радиусом-вектором уровенной поверхности (предполагая ее поверхностью вращения, мало отличающеюся от сферы), выражением потенциальной функции и силой тяжести.

Если выражение для силы тяжести имеет вид:

$$g=g_e(1+\beta_2\sin^2\varphi+\beta_4\sin^4\varphi), \qquad (16)$$

где φ — астрономическая широта, то кривая меридиана имеет уравнение:

$$\frac{r}{a}=1+[\alpha(1+\beta-\alpha)+\delta]\sin^2\varphi'+[\alpha(\beta-\alpha)+\delta]\sin^4\varphi', \qquad (17)$$

где φ' — геоцентрическая широта

$$\beta=\beta_2+\beta_4,$$

$$\alpha=\frac{5}{2}c-\beta-\alpha^2-\frac{1}{2}c\alpha+\frac{2}{7}\delta,$$

$$\delta=\frac{1}{3}(7\alpha^2-4\alpha\beta+\beta_4).$$

В случае, если кривая меридиана есть эллипс с большой полуосью a, сжатием α, то δ связано с этими постоянными при помощи выражения:

$$\delta=\frac{5}{2}\alpha^2-\alpha\beta.$$

Из этих формул выводим без затруднения, исключая δ и определяя величины β_2 и β_4:

$$\beta_2=\frac{5}{2}c-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{26}{7}\alpha c,$$

$$\beta_4=-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{5}{2}\alpha c.$$

Таким образом для эллипсоида формула (16) Гельмерта дает:

$$\frac{g}{g_e}=1+\sin^2\varphi\left(\frac{5}{2}c-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{26}{7}\alpha c\right)-\frac{\sin^4\varphi}{2}(\alpha^2-5\alpha c).$$

Для сравнения с нашей формулой (15) достаточно заметить, что с точностью до второго порядка относительно α включительно сжатие α связано с i соотношением:

$$\frac{i^2}{2}=\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2+\ldots$$

24. Разложение в ряд потенциальной функции, определенной в § 20. Потенциальная функция V, данная формулой (4) и соответствующая предположению, что поверхность равновесия есть сжатый эллипсоид вращения, может быть удобно разложена в ряд в случае, когда сжатие мало.

Вспомиим, что в формуле (4)

$$E=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}},$$

где λ есть больший корень уравнеиия

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{b^2+\lambda}=1. \tag{18}$$

Положим, как и ранее

$$i=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Тогда

$$E=\frac{bi}{\sqrt{b^2+\lambda}} \tag{19}$$

— формула, показывающая, что вие даиного эллипсоида $E<i$. Определяя λ из (19), вставляя в (18) и полагая

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\vartheta,$$
$$z=\rho\cos\vartheta,$$

получим:

$$\rho^2E^2=b^2i^2(1+E^2)-\rho^2\cos^2\vartheta E^4,$$

откуда, опуская члены с i^7:

$$E=\frac{bi}{\rho}\left[1+\frac{b^2i^2}{2\rho^2}\sin^2\vartheta+\frac{b^4i^4}{8\rho^4}\sin^2\vartheta(7\sin^2\vartheta-4)+\dots\right].$$

Далее, иаходим:

$$\operatorname{arc\,tg}E-\frac{E}{1+E^2}=\frac{2}{3}E^3-\frac{4}{5}E^5+\dots=\frac{2}{3}\frac{b^3i^3}{\rho^3}+\frac{b^5i^5}{\rho^5}\left(\sin^2\vartheta-\frac{4}{5}\right)+\dots$$

$$E-\operatorname{arc\,tg}E=\frac{E^3}{3}-\frac{E^5}{5}+\dots=\frac{b^3i^3}{3\rho^3}+\frac{b^5i^5}{\rho^5}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2}-\frac{1}{5}\right)+\dots$$

$$\operatorname{arc\,tg}E=E-\frac{E^3}{3}+\dots=\frac{bi}{\rho}+\frac{b^3i^3}{\rho^3}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots$$

Внеся это в выражение (17) для V и замечая, что $a^2-b^2=b^2i^2$, получим:

$$V=\frac{M}{\rho}+\frac{Mb^2i^2}{6\rho^3}(3\sin^2\vartheta-2)+\frac{Qb^2i^2}{\rho^3}\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2+y^2}{\rho^2}-\frac{z^2}{\rho^2}\right)+$$
$$+\frac{Qb^2i^2}{\rho^3}\left(-\frac{2}{9}+\frac{4}{5}\frac{x^2+y^2}{\rho^2}+\frac{2}{5}\frac{z^2}{\rho^2}\right),$$

и заменяя $\sin^2\vartheta$ и $\cos^2\vartheta$ через $\frac{x^2+y^2}{\rho^2}$ и $\frac{z^2}{\rho^2}$ найдем:

$$V=\frac{M}{\rho}+\frac{b^2}{\rho^3}\left(\frac{Mi^2}{6}-\frac{4}{45}Qi^2\right)(3\sin^2\vartheta-2)+\dots$$

Поиятно, что ρ и ϑ выражают радиус-вектор и поляриое расстояние притягиваемой точки отиосительио пеитра эллипсоида.

Что касается Q, то согласио § 22 мы имеем такое разложение в ряд:

$$2fQi^2=\frac{15}{4}\omega^2a^2b\left(1+\frac{6}{7}i^2+\dots\right),$$

откуда, опуская малые второго порядка (ω^2 и i^2 считаются за малые первого порядка):

$$\frac{4}{45} Qi^2 = \frac{\omega^2 a^3}{6f},$$

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{b^2}{6\rho^3}\left(Mi^2 - \frac{a^3\omega^2}{f}\right)(1 - 3\cos^2\vartheta) + \ldots \qquad (20)$$

В § 13 мы видели, что виешняя потенциальная функцня тела для достаточно далекой точки может быть выражена рядом:

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{1}{2\rho^3}[\lambda^2(Q + R - 2P) + \mu^2(R + P - 2Q) + \nu^2(P + Q - 2R)], \qquad (21)$$

где λ, μ, ν — направляющие косинусы радиуса, идущего из центра массы к прнтягиваемой точке, а P, Q, R - главные моменты иерцни.

Мы можем положить в (21)

$$\lambda = \sin\vartheta\cos\omega, \quad \mu = \sin\vartheta\sin\omega, \quad \nu = \cos\vartheta.$$

Сравнивая (21) с (20), иеобходимо для тождества двух выражений V, чтобы было:

$$P = Q, \quad R - P = \frac{b^2}{3}\left(Mi^2 - \frac{a^3\omega^2}{f}\right) = \frac{b^2 M}{3}\left(i^2 - \frac{a^3\omega^2}{fM}\right).$$

Для случая Земли

$$i^2 = 0{,}00667, \quad \frac{a^3\omega^2}{fM} = \frac{1}{288{,}5},$$

откуда

$$\frac{R - P}{M} = 0{,}00107 b^2.$$

Разиость главных момеитов инерции Земли может быть определена в предположении, что поверхиость геоида есть сжатый эллнпсоид вращеиия. Возможиость такого определеиия следует из теоремы § 15.

Можно заметнть, что если бы Земля была однородной, то

$$P = Q = M\frac{a^2 + b^2}{5}, \qquad R = M\frac{2a^2}{5},$$

$$\frac{R - P}{M} = \frac{b^2 i^2}{5} = 0{,}00133 b^2.$$

Мы вернемся к этому вопросу в § 44.

25. Изменение силы тяжести с высотой вне Земли. Формула Брунса [§ 10, формула (10)] дает для свободного воздуха, плотность которого есть k_1:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + 2\omega^2 - 4\pi f k. \qquad (22)$$

Для малых высот H над уровнем моря можно принять (считая z возрастающим вниз)

$$g = g_0 - H\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 + \ldots,$$

где g_0 есть сила тяжести в точке, в которой вертикаль рассматриваемой точки встречает геоид.

Употребим выражение (22) для $\frac{\partial g}{\partial z}$, пренебрегая членами с ω^2 и k_1 и подставляя вместо R_1 и R_2 средний радиус Земли, получ м:

$$g = g_0\left(1 - \frac{2H}{R_m}\right). \tag{23}$$

Можно спросить себя, какую ошибку мы сделали, пренебрегая членами с ω^2 и плотностью воздуха. По сравнению с главным членом $\frac{2g}{R_m}$ мы пренебрегли величиной

$$2\omega^2 - 4\pi f k_1 = \frac{2g}{R_m}\left(\frac{\omega^2 R_m}{g} - \frac{2\pi f k_1 R_m}{g}\right)$$

или почти, обозначая через k_m среднюю плотность Земли:

$$\frac{2g}{R_m}\left(\frac{\omega^2 R_m}{g} - \frac{2}{3}\frac{k_1}{k_m}\right).$$

Выражение в скобках приближенно дает относительную ошибку, которую мы делаем при вычислении редукции к уровню моря силы тяжести, если пренебречь двумя последними членами во второй части (22).

Доля зависящая от центробежной силы, равна приблизительно $\frac{1}{2{:}8}$. Другая часть, зависящая от плотности воздуха, еще меньше и составляет $\frac{1}{2800}$ (так как $k_1 = \frac{1}{770}$, $k_m = 5{,}5$). Вблизи земной поверхности вертикальное изменение тяжести равно 0,0031 *м* на 1 *км*. Ошибка, происходящая от опускания центробежной силы в формуле (23), таким образом, меньше сотой доли миллиметра.

Глава пятая

ПРОБЛЕМА СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

26. О некоторых гармонических функциях для эллипсоида. Положим

$$t = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \tag{1}$$

и докажем, что вообще если $f(t)$ есть конечная и непрерывная функция от t, так же как и ее первая и вторая производные, то для всех конечных значений t функция

$$F = \int_{\lambda}^{\infty} f(t) \frac{ds}{\sqrt{R_s}} \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_2 F = 0$. Ограничимся в нашем доказательстве для краткости письма предположением, что $f(0) = 0$, хотя это ограничение не является необходимым. Имея в виду, что для $s = \lambda$ мы имеем $t = 0$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x \int_{\lambda}^{\infty} f'(t) \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2\int_{\lambda}^{\infty} f'(t) \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} + 4x^2 \int_{\lambda}^{\infty} f''(t) \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}} +$$

$$+ \frac{4x^2}{(a^2+\lambda)^2 P\sqrt{R_\lambda}} f'(0). \tag{3}$$

Вычислив таким же образом две другие производные, сложим их, имея в виду, что

$$\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s} = \frac{1}{R_s}\frac{dR_s}{ds},$$

$$\frac{x^2}{(a^2+s)^2} + \frac{y^2}{(b^2+s)^2} + \frac{1}{(c^2+s)^2} = \frac{dt}{ds};$$

тогда получим:

$$\Delta_2 F = -2\int_{\lambda}^{\infty} f'(t) \frac{1}{R_s^{\frac{3}{2}}} \frac{dR_s}{ds} ds + 4\int_{\lambda}^{\infty} f''(t) \frac{dt}{ds} \frac{ds}{\sqrt{R_s}} + \frac{4}{\sqrt{R_\lambda}} f'(0). \tag{4}$$

С другой стороны, интегрирование по частям дает:

$$\int_{\lambda}^{\infty} f''(t) \frac{dt}{ds} \frac{ds}{\sqrt{R_s}} = -\frac{f'(0)}{\sqrt{R_\lambda}} + \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{\infty} f'(t) \frac{1}{R_s^{\frac{3}{2}}} \frac{dR_s}{ds} ds.$$

Подставляя это в (4), мы видим, что

$$\Delta_2 F = 0.$$

Производные какого угодно порядка от F также удовлетворяют уравнению Лапласа; так, например, мы имеем:

$$\Delta_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta_2 F) = 0.$$

Положим в (2) $f(t) = t^2$, тогда

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

и (3) дает

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -4\int_\lambda^\infty \frac{t\,ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} + 8x^2\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}}.$$

Вставим сюда для t его выражение (1):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -4\int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{3x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

В следующих параграфах нам придется сделать употребление функции

$$v_1 = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{3x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} \tag{5}$$

и подобной ей

$$v_2 = \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{3y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R_s}},$$

которые, согласно сказанному, удовлетворяют уравнению Лапласа. Что касается их значений для точек, находящихся на бесконечном расстоянии, то мы имеем, предполагая $a > b > c$:

$$\frac{2}{3(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} < \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} < \frac{2}{3(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{2}{5(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} < \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}} < \frac{2}{5(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда, припоминая, что

$$\lim \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} = 1,$$

получим:

$$\lim \rho \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} = 0,$$

$$\lim \rho x^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}} = \frac{x^2}{\rho^2} \lim \rho^3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}} = 0.$$

Таким образом

$$\lim_{\rho=\infty} (\rho v_1) = \lim_{\rho=\infty} (\rho v_2) = 0. \tag{6}$$

27. Выражение для внешней потенциальной функции. Нетрудно разрешить проблему Стокса для случая, когда внешняя поверхность равновесия есть эллипсоид S с тремя полуосями a, b, c, если привлечь функцию K (определенную в § 18) и v_1, v_2, полученные в предыдущем параграфе. Действительно, эти функции на поверхности эллипсоида принимают форму:

$$\begin{aligned} (v_1)_S &= -3A_1x^2 - C_2y^2 - B_2z^2 + \text{const}, \\ (v_2)_S &= -C_2x^2 - 3B_1y^2 - A_2z^2 + \text{const}, \\ (K)_S &= \text{const}, \end{aligned}$$

где A, B, C — постоянные, определяемые формулами:

$$A_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R_s}}, \quad B_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)^2\sqrt{R_s}},$$

$$A_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)(c^2+s)\sqrt{R_s}}, \quad B_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)(a^2+s)\sqrt{R_s}}, \tag{7}$$

$$C_2 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)(b^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

Рассмотрим еще функцию

$$V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3K \tag{8}$$

(где k_1, k_2, k_3 — постоянные), которая удовлетворяет уравнению Лапласа и на поверхности S обращается в форму:

$$V_S = -(3A_1k_1 + C_2k_2)x^2 - (C_2k_1 + 3B_1k_2)y^2 - (B_2k_1 + A_2k_2)z^2 + \text{const}$$

Имеем также, принимая во внимание уравнение эллипсоида:

$$V_S = -(3A_1k_1 + C_2k_2)x^2 - (C_2k_1 + 3B_1k_2)y^2 - (B_2k_1 + A_2k_2)c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \text{const}.$$

Для того чтобы V, определяемая (8), удовлетворяла условиям проблемы Стокса, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\begin{aligned} &k_1 \lim \rho v_1 + k_2 \lim \rho v_2 + k_3 \lim \rho K = M, \\ &\frac{c^2}{a^2}(B_2k_1 + A_2k_2) - 3A_1k_1 - C_2k_2 = -\frac{\omega^2}{2f}, \\ &\frac{c^2}{b^2}(B_2k_1 + A_2k_2) - C_2k_1 - 3B_1k_2 = -\frac{\omega^2}{2f}. \end{aligned} \tag{9}$$

Первое из них, принимая во внимание (6) и припоминая, что $\lim \rho K = 2$, дает:

$$k_3 = \frac{M}{2},$$

в то время как два других могут быть написаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}(3A_1a^2 - B_2c^2)\,k_1 + (C_2a^2 - A_2c^2)\,k_2 &= \frac{\omega^2a^2}{2f},\\ (C_2b^2 - B_1c^2)\,k_1 + (3B_1b^2 - A_2c^2)\,k_2 &= \frac{\omega^2b^2}{2f}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Мы скоро докажем, что детерминант, составленный из коэфициентов при k_1, k_2, отличен от нуля. Предположив, что k_1, k_2 определены из уравнений (10), потенциальная функция V планеты в сделанных предположениях будет такова:

$$\begin{aligned}V = \frac{M}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{R_s}} + k_1\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(1 - \frac{3x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}} + \\ + k_2\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{3y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R_s}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Относительно детерминанта уравнений (10) заметим, что он вообще отличен от нуля. Действительно, для $a = b = c$ будет $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = C_2$, и самый детерминант обращается в $4A_1^2a^4$, где A_1 обязательно больше нуля. Следовательно, имеется конечное поле значений a, b, c, для которых он больше нуля. Докажем, что детерминант *всегда* больше нуля, если ось c, вокруг которой совершается вращение планеты, есть меньшая из трех осей эллипсоида.

Обозначим через α, β, γ, δ коэфициенты при k_1, k_2 в уравнениях (10). Получим, предполагая, что $a > b > c$:

$$\alpha = \int\limits_0^{\infty}\frac{2a^2c^2 + 3a^2s - c^2s}{(a^2+s)(c^2+s)\sqrt{R_s}} > (a^2 - c^2)\int\limits_0^{\infty}\frac{s\,ds}{(a^2+s)^2(c^2+s)\sqrt{R_s}};$$

$$\delta > (b^2 - c^2)\int\limits_0^{\infty}\frac{s\,ds}{(b^2+s)^2(c^2+s)\sqrt{R_s}};$$

$$\beta = (a^2 - c^2)\int\limits_0^{\infty}\frac{s\,ds}{R_s^{\frac{3}{2}}};\qquad \gamma = (b^2 - c^2)\int\limits_0^{\infty}\frac{s\,ds}{R_s^{\frac{3}{2}}}.$$

Образуем произведение $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ и заменим произведение двух интегралов одним двойным интегралом:

$$\alpha\delta - \beta\gamma > (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{(a^2 - b^2)(s - s')\,ss'ds\cdot ds'}{(a^2+s)(b^2+s')(R_sR'_s)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для доказательства, что интеграл положителен, рассмотрим два значения подинтегральной функции, а именно то, для которого $s=\sigma$, $s'=\tau$, и другое, для которого $s=\tau$, $s'=\sigma$. Сумма двух значений будет

$$\frac{\sigma\tau(a^2-b^2)(\sigma-\tau)}{(R_\tau R_\sigma)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{(a^2+\sigma)(b^2+\tau)}-\frac{1}{(a^2+\tau)(b^2+\sigma)}\right]=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(\sigma-\tau)^2\sigma\tau}{(a^2+\sigma)(a^2+\tau)(b^2+\sigma)(b^2+\tau)(R_\tau R_\sigma)^{\frac{3}{2}}},$$

очевидно, положительной. Подходящая группировка элементов последнего из написанных интегралов показывает, что этот интеграл есть сумма положительных количеств.

28. Компоненты силы тяжести. В выражения компонентов силы тяжести

$$g_x=\frac{\partial W}{\partial x}=f\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x,$$

$$g_y=f\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 y,\quad g_z=f\frac{\partial V}{\partial z}$$

введем выражение (11) для V, припоминая, что (§ 18)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a+\lambda)P},$$

где P есть выражение:

$$P=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Если после образования производных от V положить в них $\lambda=0$, мы получим составляющие силы тяжести для точки на поверхности эллипсоида S. Согласно сказанному находим без затруднения:

$$g_x^0=\frac{4k_1x^3}{a^6q}+\frac{4k_2y^2x}{a^2b^4q}-\frac{fMx}{a^2q}-6k_1xA_1-2k_2xC_2+\omega^2 x,$$

$$g_y^0=\frac{4k_1x^2y}{a^4b^2q}+\frac{4k_2y^3}{b^6q}-\frac{fMy}{b^2q}-2k_1yC_2-6k_2yB_1+\omega^2 y,$$

$$g_z^0=\frac{4k_1x^2z}{a^4c^2q}+\frac{4k_2y^2z}{a^4c^2q}-\frac{fMz}{c^2q}-2k_1zB_2-2k_2zA_2,$$

откуда

$$q=abc\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right).$$

Вычислим, в частности, величину силы тяжести для концов трех главных осей, которую мы обозначим через G_a, G_b, G_c. Получим G_a из выражения g_x^0, полагая $x=a$, $y=0$, $z=0$ и изменяя знак на обратный; подобным образом поступим и для других величин G. Таким образом найдем:

$$\left.\begin{aligned}G_a&=\frac{fM}{bc}-\frac{4k_1}{a^2bc}+6k_1aA_1+2k_2aC_2-\omega^2 a,\\G_b&=\frac{fM}{ac}-\frac{4k_2}{ab^2c}+2k_1bC_2+6k_2bB_1-\omega^2 b,\\G_c&=\frac{fM}{ab}+2k_1cB_2+2k_2cA_2,\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Теперь легко доказать, что интегралы A_1, B_1, A_2, B_2, C_2 удовлетворяют уравнениям:

$$3A_1 + B_2 + C_2 = \frac{2}{a^3bc},$$

$$A_2 + 3B_1 + C_2 = \frac{2}{ab^3c}.$$

Принимая во внимание эти соотношения, получим из (12):

$$\frac{G_a}{a} + \frac{G_b}{b} + \frac{G_c}{c} = \frac{3fM}{abc} - 2\omega^2.$$

Допустим, что масса планеты заполняет весь объем эллипсоида, и обозначим через k_m среднюю плотность. Вторую часть последнего выражения можно тогда написать так:

$$4\pi f k_m - 2\omega^2,$$

но это есть согласно формуле (15) § 7

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_S \frac{\partial W}{\partial n}\, dS = \frac{1}{\tau}\int\limits_S g\, dS = \frac{g_m S}{\tau},$$

где g_m — средняя тяжесть на поверхности, S — полная площадь поверхности и τ — объем эллипсоида. Отсюда получим:

$$\frac{G_a}{a} + \frac{G_b}{b} + \frac{G_c}{c} = g_m \frac{S}{\tau}.$$

29. Случай трехосного эллипсоида, мало отличающегося от сферы. Вместо разложения в ряд выражения (11) в случае, когда a, b, c мало различны между собою, удобно выбрать другой путь, указанный далее.

Для этой цели рассмотрим функцию:

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{1}{\rho^5}(\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma\rho^2), \tag{13}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а α, β, γ — постоянные.

Легко убедиться, что

$$\Delta_2 V = \frac{2}{\rho^5}(\alpha + \beta - 3\gamma).$$

Поэтому, если установить между этими постоянными соотношение:

$$\frac{\alpha+\beta}{3} = \gamma, \tag{14}$$

то будет $\Delta_2 V = 0$, и поэтому

$$\lim_{\rho=\infty} \rho V = M.$$

V, определенное формулой (13), можно принять за потенциальную функцию тела с массою M для внешнего пространства.

Положим:

$$a = c\left(1 + \frac{E}{2}\right); \quad b = c\left(1 + \frac{H}{2}\right)$$

и будем считать E и H настолько малыми, что можно будет пренебречь их квадратами, а также произведением их на ω^2.

Уравнение эллипсоида (a, b, c) можно теперь с указанным приближением написать так:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{Ex^2}{2c^2}-\frac{Hy^2}{2c^2}\right).$$

Положим, что постоянные α, β, γ имеют малые значения того же порядка, что E и H, тогда функция V, определяемая (13), примет на поверхности эллипсоида приближенное выражение:

$$\frac{M}{c}\left(1-\frac{Ex^2}{2c^2}-\frac{Hy^2}{2c^2}\right)+\frac{\alpha x^2+\beta y^2}{c^5}-\frac{\gamma}{c^3}.$$

Эту же функцию мы можем рассматривать как внешнюю потенциальную функцию, если выбрать α и β так, чтобы

$$\frac{fME}{2c^2}-\frac{f\alpha}{c^3}-\frac{\omega^2}{2}=0,$$

$$\frac{fMH}{2c^3}-\frac{f\beta}{c^5}-\frac{\omega^2}{2}=0,$$

откуда

$$\alpha=c^5\left(\frac{EM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right),\quad \beta=c^5\left(\frac{HM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right)$$

и, следовательно, согласно (14)

$$\gamma=\frac{c^5}{3}\left[\frac{M}{2c^3}(E+H)-\frac{\omega^2}{2f}\right].$$

Таким образом окончательно получим:

$$W=\frac{Mf}{\rho}-\frac{fc^5}{3\rho^3}\left[\frac{M}{2c^3}(E+H)-\frac{\omega^2}{2f}\right]+\frac{fc^5}{\rho^5}\left(\frac{EM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right)x^2+$$
$$+\frac{fc^5}{\rho^5}\left(\frac{HM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right)y^2+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \tag{15}$$

Для получения с тем же приближением силы тяжести заметим, что если n есть направление внутренней нормали к эллипсоиду, то с точностью до первого порядка включительно по отношению к E и H

$$\cos(\rho n)=-1.$$

Таким образом получим с указанным приближением g из формулы:

$$g=-\frac{\partial W}{\partial \rho}.$$

Относительно частных производных выражения (15) по ρ заметим, что если положение точки определять в полярных координатах, то

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}=\frac{x}{\rho},\quad \frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{y}{\rho},$$

откуда

$$g=\frac{Mf}{\rho^2}-\frac{fc^5}{\rho^4}\left[\frac{M}{2c^3}(E+H)-\frac{\omega^2}{2f}\right]+\frac{3fc^5}{\rho^6}\left(\frac{EM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right)x^2+$$
$$+\frac{3fc^5}{\rho^6}\left(\frac{HM}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right)y^2+\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{\rho}.$$

Для получения с указанным приближением силы тяжести на самой поверхности эллипсоида можно в первом члене правой части положить

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{Ex^2}{c^2}-\frac{Hy^2}{c^2}\right),$$

а в остальных членах заменить ρ через c.

Тогда получим:

$$g=\frac{Mf}{c^2}-cf\left[(E+H)\frac{M}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right]+\frac{f}{2c^4}\left(EM-\frac{5\omega^2a^3}{f}\right)x^2+\frac{f}{2c^4}\left(HM-\frac{5\omega^2a^3}{f}\right)y^2,$$

или, полагая

$$G_0=\frac{Mf}{c^2}-cf\left[(E+H)\frac{M}{2c^3}-\frac{\omega^2}{2f}\right],\quad \gamma=\frac{\omega^2c^3}{fM},$$

$$g=G_0\left[1+(E-5\gamma)\frac{x^2}{2c^2}+(H-5\gamma)\frac{y^2}{2c^2}\right].$$

30. Некоторые другие гармонические функции для эллипсоида. Мы обязаны Морера идеей вывода из гармонических функций производных выражений типа (2).

Положим вообще

$$\Phi_n=\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)^n\frac{ds}{\sqrt{R_s}}.$$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ производные n-го порядка от Φ_n по x, y, z будут гармоническими функциями во внешнем пространстве и приводятся на поверхности эллипсоида к целым рациональным функциям n-й степени относительно координат. Морера отсюда доказал, что при помощи линейной комбинации таких производных, равно как и производных от аналогичных функций Φ_{n-1}, Φ_{n-2}, ..., можно выразить гармоническую функцию для внешнего пространства, которая на эллипсоиде приводится к целой рациональной функции, произвольно выбранной, n-й степени относительно координат.

Производные функций вида:

$$\Phi_n=\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)^n\frac{ds}{\sqrt{R_s}}$$

решают аналогичную задачу для внутреннего пространства.

Эти же проблемы могут быть также разрешены при помощи функций Ламе, на которые будет указано в главе VII.

Глава шестая

О СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

31. Определение коэфициентов P_n. Приближенное решение задачи Стокса для поверхности, мало отличающейся от сферы, облегчается применением сферических функций, главнейшие свойства которых мы дадим в настоящей главе.

Пусть ρ, ρ' — расстояния двух точек M, M' от точки O, и γ — угол MOM'. Положим:

$$\frac{\rho'}{\rho}=\alpha,$$

и допустим, что $\rho'<\rho$, откуда $\alpha<1$. Попытаемся представить обратную величину расстояния $r=MM'$ между двумя точками при помощи разложения

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}\sum_0^\infty \alpha^n P_n=\sum_0^\infty \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}}P_n, \tag{1}$$

где P_n — функции угла γ, которые нужно определить. Положив

$$A_r=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2r)},$$

получим при помощи обыкновенного разложения по биному:

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty A_r t^r,$$

и отсюда

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\rho}(1-\alpha e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}}(1-\alpha e^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\rho}\sum_0^\infty A_r\alpha^r e^{ir\gamma}\sum_0^\infty A_r\alpha^r e^{-ir\gamma}, \tag{2}$$

где $i=\sqrt{-1}$, а e — основание неперовых логарифмов.

Если выполнить перемножение рядов в последней части (2) и собрать члены, содержащие множитель α^n, то, сравнив с (1), получим без затруднения:

$$P_n=A_0A_n(e^{ni\gamma}+e^{-ni\gamma})+A_1A_{n-1}(e^{(n-2)i\gamma}+e^{-(n-2)i\gamma})+\ldots,$$

откуда

$$\frac{1}{2}P_n=A_0A_n\cos n\gamma+A_1A_{n-1}\cos(n-2)\gamma+A_2A_{n-2}\cos(n-4)\gamma+\ldots, \tag{3}$$

где в правой части число членов равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным, и последний член равен:

$$\frac{1}{2} A^2_{\frac{n}{2}} \quad \text{при } n \text{ четном,}$$

$$A_{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n+1}{2}} \cos\gamma \quad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

На основании известного свойства биномиального ряда и произведения рядов полученное разложение для (1) будет абсолютно сходящимся для всех значений $\alpha < 1$.

Выразим еще $l\, P_n$ через степени $\cos\gamma$. Положив

$$2\alpha\cos\gamma - \alpha^2 = y,$$

получим:

$$\frac{\rho}{r} = (1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} A_s y^s. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$y^s = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r C_s^r (2\alpha\cos\gamma)^{s-r}\alpha^{2r} = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r C_s^r (2\cos\gamma)^{s-r}\alpha^{r+s},$$

где

$$C_s^r = \frac{s(s-1)\ldots(s-r+1)}{r!}.$$

И подставляя в (4):

$$\frac{\rho}{r} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{s} (-1)^r A_s C_s^r (2\cos\gamma)^{s-r}\alpha^{s-r}. \tag{5}$$

Положим $s+r=n$ и вместо двух переменных показателей r и s введем r и n. Так как $s-r$ (равное $n-2r$) не может согласио (5) принимать отрицательных значений, то должно быть $r \leqslant \frac{n}{2}$. Отсюда (5) может быть написано так:

$$\frac{\rho}{r} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n'} (-1)^r A_{n-r} C_{n-r}^r (2\cos\gamma)^{n-2r}\alpha^n,$$

где $n' = \frac{n}{2}$ для n четного и $n' = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно.

Согласно сказанному имеем:

$$P_n = \sum_{r=0}^{n'} (-1)^r A_{n-r} C_{n-r}^r (2\cos\gamma)^{n-2r} = A_n (2\cos\gamma)^n - A_{n-1}(n-1)(2\cos\gamma)^{n-2} + \\ + A_{n-2}\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\gamma)^{n-4} + \ldots \tag{6}$$

В частиости,

$$P_0 = 1,\quad P_1 = \cos\gamma,\quad P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2},\quad P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\gamma - \frac{3}{2}\cos\gamma$$

$$P_4 = \frac{35}{8}\cos^4\gamma - \frac{30}{8}\cos^2\gamma + \frac{3}{8}.$$

Так как все постоянные коэфициенты во второй части (3) положительны, то P_n принимает максимальное возможное значение при $\gamma = 0$. С другой стороны, для $\gamma = 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho - \rho'} = \sum_0^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}},$$

и, следовательно, $P_n = 1$. Для $\gamma = \pi$ и четного n значение P_n еще равно положительной единице. Для $\gamma = \pi$ и нечетном n P_n равно отрицательной единице и принимает свою наименьшую алгебраическую величину. Во всяком случае

$$|P_n| \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что ошибка, которую мы сделаем, оборвав ряд (1) на члене $r+1$, по абсолютной величине меньше ряда

$$\frac{1}{\rho}(\alpha^{r+1} + \alpha^{r+2} + \ldots) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\rho'^{r+1}}{\rho^{r+2}}.$$

32. Коэфициенты Лапласа и полиномы Лежандра. Приняв точку O за начало координат и взяв (x, y, z) и (x', y', z') за координаты точек M, M', будем иметь:

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}.$$

Подставив это выражение в (6), получим, что P_n будет целой рациональной функцией степени n отношений

$$\frac{x}{\rho}, \frac{x'}{\rho'}, \frac{y}{\rho}, \frac{y'}{\rho'}, \frac{z}{\rho}, \frac{z'}{\rho'}.$$

Если ввести полярные координаты и для точки M принять ρ, ϑ, υ, а для точки M' — ρ', ϑ', υ', то будет

$$\begin{aligned}\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\upsilon-\upsilon') = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\cos\upsilon\sin\vartheta'\cos\upsilon' + \\ + \sin\vartheta\sin\upsilon\sin\vartheta'\sin\upsilon',\end{aligned} \tag{7}$$

а подставляя в (6), получим для P_n целую рациональную функцию от величин

$$\begin{matrix} \sin\vartheta\cos\upsilon, & \sin\vartheta\sin\upsilon, & \cos\vartheta, \\ \sin\vartheta'\cos\upsilon' & \sin\vartheta'\sin\upsilon', & \cos\vartheta'. \end{matrix}$$

Вспомним соотношения между целыми степенями или произведениями синусов и косинусов, с одной стороны, и синусами и косинусами кратных дуг — с другой, тогда увидим, что P_n может быть выражено линейной функцией количеств:

$$\begin{matrix} \cos n\upsilon, & \cos(n-2)\upsilon, & \cos(n-4)\upsilon, \ldots \\ \sin n\upsilon, & \sin(n-2)\upsilon, & \sin(n-4)\upsilon, \ldots \end{matrix}$$

Коэфициенты P_n в случае, если они выражены как функции четырех переменных ϑ, ϑ', υ, υ', называются *коэфициентами* Лапласа. Они не изменяются при одновременной замене ϑ на ϑ' и υ на υ'.

Те же самые коэфициенты называются *полиномами* Лежандра, если в выражении (6) $\cos\gamma$ заменен буквой x. В этом случае они обычно обозначаются символом X_n. Мы имеем:

$$X_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\,2^n x^n - \frac{n-1}{1}\,\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2\cdot4\ldots(2n-2)}\,2^{n-2}x^{n-2} + \\ + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot2}\,\frac{1\cdot3\ldots(2n-5)}{2\cdot4\ldots(2n-4)}\,2^{n-4}x^{n-4}\ldots, \tag{8}$$

причем многочлен оканчивается членом с x или членом, независимым от x, смотря по тому, будет ли n нечетным или четным.

33. Диференциальное уравнение для коэфициентов Лапласа. Пусть M, M' — две точки, рассмотренные в начале § 31; примем вторую из них за неподвижную. Тогда величина $\frac{1}{r}$, рассматриваемая как функция координат точки M, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta_2\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Подставляя вместо $\frac{1}{r}$ разложение (1) и замечая, что вследствие произвольности ρ' все члены второй части должны в отдельности удовлетворять уравнению $\Delta_2 = 0$, получим:

$$\Delta_2\,\frac{P_n}{\rho^{n+1}} = 0. \tag{9}$$

В полярных координатах ρ, ϑ, υ выражение второго диференциального параметра функции V дается формулой[1]:

$$\rho^2\Delta_2 V = \rho\,\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho V) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\vartheta\sin^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2}.$$

Замечая, что P_n не зависит от ρ, (9) дает поэтому:

$$n(n+1)\,P_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 P_n}{\partial\upsilon^2} = 0. \tag{10}$$

Это и есть то диференциальное уравнение, которому удовлетворяют коэфициенты Лапласа, рассматриваемые как функции ϑ и υ.

Если положить в (7) $\vartheta' = 0$ и $\cos\vartheta = x$, то получим

$$\cos\gamma = x,$$

и P_n превращается в X_n и становится независимым от υ. Выведем таким путем диференциальное уравнение, которому удовлетворяют X_n, взяв (10), отбросив в нем последний член и положив x вместо $\cos\vartheta$, так что

$$\frac{d}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\,\frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx};$$

тогда получим:

$$n(n+1)\,X_n + \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dX_n}{dx}\right] = 0$$

или также

$$n(n+1)\,X_n - 2x\,\frac{dX_n}{dx} + (1-x^2)\,\frac{d^2X_n}{dx^2} = 0. \tag{11}$$

[1] См. Приложения, § 5.

34. Замечание. Если целая рациональная функция от x $f(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$n(n+1)f-2x\frac{df}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}=0 \tag{12}$$

и обращается в нуль при $x=1$, то его производные любого порядка также обращаются в нуль при $x=1$. Отсюда $f(x)$ тождественно равно нулю. Следовательно, X_n вполне определено условиями, что это целая рациональная функция относительно x, принимающая значение 1 при $x=1$ и удовлетворяющая уравнению (11).

Заметим еще, что если взять последовательно r раз производную от (11), то получим:

$$[n(n+1)-r(r+1)]\frac{d^rX_n}{dx^r}-2(r+1)x\frac{d^{r+1}X_n}{dx^{r+1}}+(1-x^2)\frac{d^{r+2}X_n}{dx^{r+2}}=0. \tag{13}$$

С другой стороны, пусть φ есть целая рациональная функция от x, удовлетворяющая уравнению:

$$[n(n+1)-r(r+1)]\varphi-2(r+1)x\frac{d\varphi}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \tag{13'}$$

и принимающая значение K при $x=1$. Если h значение $\frac{d^rX_n}{dx^r}$ для $x=1$, то разность

$$K\frac{d^rX_n}{dx^r}-h\varphi$$

удовлетворяет (13) и обращается в нуль при $x=1$. Поэтому она равна нулю для всех значений x. Отсюда следует, что, обозначая через C постоянную, будет

$$\varphi=C\frac{d^rX_n}{dx^r}.$$

35. Сферические функции. Сферической функцией (первого рода) порядка n называется целая рациональная функция Y_n относительно выражений

$$\sin\vartheta\cos\omega,\quad \sin\vartheta\sin\omega,\quad \cos\vartheta, \tag{14}$$

которая удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$n(n+1)Y_n+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2Y_n}{\partial\omega^2}=0. \tag{15}$$

Припоминая выражение для Δ_2 в полярных координатах (§ 33), легко проверить, что вследствие (15) функции

$$\rho^nY_n,\quad \frac{Y_n}{\rho^{n+1}}$$

удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta_2=0$ и являются гармоническими функциями, первая — в конечном пространстве[1], а вторая — в неограниченном

---

[1] Если вместо полярных координат вставить их выражения через прямоугольные координаты, то функция ρ^nY_n окажется целой рациональной функцией n-й степени относительно координат x, y, z.

Действительно, $\cos r\omega$ выражается линейно через

$$\cos^r\omega,\quad \cos^{r-2}\omega,\quad \cos^{r-4}\omega\ \ldots$$

$\frac{d^rX_n}{dx^r}$ есть линейная функция от $\cos^{n-r}\vartheta, \cos^{n-r-2}\vartheta, \cos^{n-r-4}\vartheta\ldots$

пространстве, за исключением конечного контура, окружающего начало координат с радиусом ρ.

Найдем более общее выражение для Y_n. Так как это есть целая рациональная функция от выражений (14), то можно положить

$$Y_n = \sum_r (A_r \cos r\upsilon + B_r \sin r\upsilon) \sin^r \vartheta, \tag{16}$$

где и A_r и B_r независимы от υ и являются целыми рациональными функциями от $\cos\vartheta$. Действительно, Y_n содержит в линейной форме произведения

$$\sin^r\vartheta \sin^r\upsilon, \quad \sin^r\vartheta\cos^r\upsilon, \quad \sin^r\vartheta\sin^s\upsilon\cos^t\upsilon \quad (s+t=r), \tag{17}$$

и коэфициенты таких произведений — рациональные целые функции от $\cos\vartheta$. Поэтому по известным формулам тригонометрии выражения (17) могут быть выражены через

$$\begin{array}{lll} \sin^r\vartheta\sin r\upsilon, & \sin^r\vartheta\sin(r-2)\upsilon, & \sin^r\vartheta\sin(r-4)\upsilon \text{ и т. д.} \\ \sin^r\vartheta\cos r\upsilon, & \sin^r\vartheta\cos(r-2)\upsilon, & \sin^r\vartheta\cos(r-4)\upsilon \text{ и т. д.} \end{array}$$

Если собрать члены, содержащие $\sin r\upsilon$ (или $\cos r\upsilon$), мы получим множители:

$$\sin^r\vartheta, \quad \sin^{r+2}\vartheta, \quad \sin^{r+4}\vartheta \ldots,$$

однако

$$\sin^{r+2}\vartheta = \sin^r\vartheta - \sin^r\vartheta\cos^2\vartheta,$$
$$\sin^{r+4}\vartheta = \sin^r\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^2$$

и т. д. Таким образом все члены с $\sin r\upsilon$ будут содержать множитель $\sin^r\vartheta$ и целые рациональные функции от $\cos\vartheta$. Этим доказывается сделанное утверждение. Вводя выражение (16) в уравнение (15) и приравнивая отдельно нулю коэфициенты при $\sin r\upsilon$ и $\cos r\upsilon$, получим уравнение:

$$[n(n+1) - r(r+1)]A_r + (2r+1)\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{dA_r}{d\vartheta} + \frac{d^2A_r}{d\vartheta^2} = 0$$

и такое же уравнение для B_r. Если положим $\cos\vartheta = x$, откуда $\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{1}{\sin\vartheta}$, то будет

$$\frac{dA_r}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{dA_r}{dx}, \qquad \frac{d^2A_r}{d\vartheta^2} = -\cos\vartheta\frac{dA_r}{dx} + \sin^2\vartheta\frac{d^2A_r}{dx^2}.$$

Таким образом предыдущее уравнение становится:

$$[n(n+1) - r(r+1)]A_r - 2(r+1)x\frac{dA_r}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2A_r}{dx^2} = 0.$$

Поэтому и произведение

$$\rho^n \sin^r\vartheta\cos r\upsilon\frac{d^rX_n}{dx^r}$$

содержит лишь члены вида:

$$\rho^n\sin^r\vartheta\cos^{r-2i}\upsilon(\cos\vartheta)^{n-r-2h},$$

где i и h — целые положительные числа и притом такие, что все встречающиеся показатели не меньше нуля. Итак, предыдущее выражение может быть выражено так:

$$(\rho\sin\vartheta\cos\upsilon)^{r-2i}(\rho^2\cos^2\vartheta)^i(\rho\cos\vartheta)^{n-r-2h}\rho^{2h} = x^{r-2i}(x^2+y^2)^i z^{n-r-2h}(x^2+y^2+z^2)^h,$$

что и требовалось доказать.

Согласно сказанному в конце предшествующего параграфа, должно быть, если H и K — произвольные постоянные:

$$A_r = H\frac{d^rX_n}{dX^r}, \qquad B_r = K\frac{d^rX_n}{dX^r}$$

где после образования производных нужно положить $\cos\vartheta$ вместо x.

Получаем, наконец, общую форму для Y_n:

$$Y_n = \sum_{r=0}^{n}(H_r\cos r\upsilon + K_r\sin r\upsilon)\sin^r\vartheta\left(\frac{d^rX_n}{dx^r}\right)_{x=\cos\vartheta}, \tag{18}$$

где H_r и K_r — произвольные постоянные. Суммирование ограничено верхним пределом, при котором n равно r, так как $(n+1)$-я производная от X_n тождественно равна нулю.

Пример. Найдем общее выражение для Y_4. Имеем:

$$8X_4 = 35x^4 - 30x^2 + 3, \quad 4\frac{dX_4}{dx} = 70x^3 - 30x,$$

$$2\frac{d^2X_4}{dx^2} = 105x^2 - 15, \quad \frac{d^3X_4}{dx^3} = 105x, \quad \frac{d^4X_4}{dx^4} = 105.$$

Отсюда, обозначая через a_r, b_r произвольные постоянные, наиболее общее выражение для Y_4 будет:

$$\begin{aligned}Y_4 = a\,(35\cos^4\vartheta - 30\cos^2\vartheta + 3) + (a_1\cos\upsilon + b_1\sin\upsilon)(7\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)\sin\vartheta +\\ + (a_2\cos 2\upsilon + b_2\sin 2\upsilon)(7\cos^2\vartheta - 1)\sin^2\vartheta + (a_3\cos 3\upsilon + b_3\sin 3\upsilon)\,7\cos\vartheta\sin^3\vartheta +\\ + (a_4\cos 4\upsilon + b_4\sin 4\upsilon)\sin^4\vartheta.\end{aligned}$$

36. Выражение для P_n. P_n, рассматриваемое как функция от ϑ, υ, есть частный случай Y_n. P_n поэтому может быть принято в форме (18), где H_r и K_r — функции ϑ', υ'. С другой стороны, P_n симметрично относительно двух пар переменных (ϑ, υ) и (ϑ', υ') Отсюда можно коэфициенты H_r, K_r принять в форме:

$$H_r = a_r\cos r\upsilon'\sin^r\vartheta'\left(\frac{d^rX_n}{dx^r}\right)_{x=\cos\vartheta'}, \quad K_r = b_r\sin r\upsilon'\sin^r\vartheta'\left(\frac{d^rX_n}{dx^r}\right)_{x=\cos\vartheta'}.$$

Если мы вспомним, что P_n зависит лишь от угла γ между двумя направлениями (ϑ', υ') и (ϑ, υ), то станет ясным, что переменные υ, υ' должны входить в P_0 только в виде их разности $\upsilon - \upsilon'$. Это требует, чтобы было $a_r = b_r$, откуда окончательио, обозначая через A_{rn} постоянный коэфициент:

$$P_n = \sum_{r=0}^{n} A_{nr}\sin^r\vartheta\sin^r\vartheta'\cos r(\upsilon - \upsilon')\left(\frac{d^rX_n}{dx^r}\right)_{x=\cos\vartheta}\left(\frac{d^rX_n}{dx^n}\right)_{x=\cos\vartheta'}. \tag{19}$$

В § 38 мы докажем, что все коэфициенты A_{nr} отличаются от нуля.

37. Свойства Y_n. На сфере радиуса единицы, имеющей центр в начале полярных координат ρ, ϑ, υ, всякая пара значений ϑ, υ определяет точку. Все точки сферы охватываются изменением ϑ от нуля до π и υ от нуля до 2π. Обозначим через $d\Omega$ элемент поверхности этой сферы (или, как мы говорили раньше, угловой элемент пространства вокруг начала радиусов-векторов) и докажем, что

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{4\pi} P_m Y_n\, d\Omega &= 0 \quad (\text{для } m \neq n)\\ \int\limits_{4\pi} P_n Y_n\, d\Omega &= \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где Y'_n получается из Y_n заменой ϑ, υ на ϑ', υ' и где интегралы взяты по всей поверхности сферы.

Для доказательства первого выражения (20) помножим (15) на P_m и (10) на Y_n, где n заменим через m, и вычтем. Получим:

$$[m(m+1)-n(n+1)]P_m Y_n = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(P_m\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}-Y_n\frac{\partial P_m}{\partial\vartheta}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(P_m\frac{\partial Y_n}{\partial\upsilon}-Y_n\frac{\partial P_m}{\partial\upsilon}\right).$$

Помножим это на $d\Omega$ и проинтегрируем по всей сфере, замечая, что $d\Omega = \sin\vartheta\cdot d\vartheta\cdot d\upsilon$. Первый член правой части даст:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\upsilon \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(P_n\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}-Y_n\frac{\partial P_m}{\partial\vartheta}\right)\right]d\vartheta,$$

что равно нулю, потому что благодаря множителю $\sin\vartheta$ определенный интеграл относительно ϑ от 0 до π есть нуль. Второй член после интегрирования даст:

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(P_m\frac{\partial Y_n}{\partial\upsilon}-Y_n\frac{\partial P_m}{\partial\upsilon}\right)d\upsilon = \int\limits_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\left[P_m\frac{\partial Y_n}{\partial\upsilon}-Y_n\frac{\partial P_m}{\partial\upsilon}\right]_{\upsilon=0}^{\upsilon=2\pi}.$$

Но согласно определению P_m и Y_n, двучлен в скобках принимает равные значения при $\upsilon = 0$ и при $\upsilon = 2\pi$, откуда определенный интеграл есть нуль. Следовательно, для $m \neq n$

$$\int\limits_{4\pi} P_m Y_n\, d\Omega = 0.$$

Для доказательства второй формулы (20) рассмотрим внутри сферы S радиуса 1 точку P с полярными координатами ρ', ϑ', υ' ($\rho' < 1$). Величину функции $\rho^n Y_n$ в точке P можно вычислить по формуле Грина[1]:

$$4\pi V_1 = \int\limits_S\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS - \int\limits_\tau \frac{1}{r}\Delta_2 V\, d\tau, \tag{21}$$

где V_1 есть значение некоторой функции V в точке P внутри некоторого объема τ; второй интеграл распространяется на весь этот объем, а первый —

[1] См. Приложения, § 4.

на поверхность S, ограничивающую этот самый объем; r выражает расстояние от точки P до соответствующего элемента dS или $d\tau$.

Применяя (21) к функции $\rho^n Y_n$ и замечая, что для этой функции $\Delta_2 = 0$, как это было показано в начале § 35, получим:

$$4\pi\rho' Y_m' = \int\limits_S \left(\rho^n Y_m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \rho^n Y_n}{\partial n} \right) d\Omega. \tag{21'}$$

Здесь ∂n есть элемент нормали, направленной внутрь сферы, равный $-\partial\rho$; вместо $\frac{1}{r}$ можно вставить ряд:

$$\frac{1}{r} = \sum_0^\infty P_s \frac{\rho'^s}{\rho^{s+1}}.$$

Отсюда, так как P_s, Y_n независимы от ρ:

$$\frac{\partial}{\partial n}(\rho^n Y_n) = -n\rho^{n-1} Y_n, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_0^\infty (s+1) P_s \frac{\rho'^s}{\rho^{s+2}}.$$

Подставим это в (21'), замечая, что на сфере $\rho = 1$; получим:

$$4\pi\rho'^n Y_n' = \sum_S (s+1)\rho'^s \int\limits_S P_s Y_n \, d\Omega + \sum_S n\rho'^s \int\limits_S P_s Y_n \, d\Omega.$$

Здесь согласно доказанному все члены во второй части сокращаются за исключением двух, соответствующих $s = n$, так что вторая часть приводится к

$$(2n+1)\rho'^n \int\limits_S P_n Y_n \, d\Omega.$$

Этим доказано второе соотношение (20).

Положим во втором выражении (20) $Y_n = P_n$. Тогда во втором члене нужно заменить Y_n' через то значение, которое принимает P_n, если в нем положить $\vartheta = \vartheta'$, $\nu = \nu'$. Но это равносильно принятию угла γ, образованного направлениями (ϑ, ν) (ϑ', ν') между собою, равным нулю, что обращает P_n в единицу (§ 31). Отсюда

$$\int\limits_{4\pi} P_n^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Если здесь положить $d\Omega = \sin\gamma \, d\gamma \, d\omega$, где γ и ω являются полярным расстоянием и долготой по отношению к направлению (ϑ', υ'), принятому за полярную ось, последняя формула принимает вид:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\omega \int\limits_0^{\pi} P_n^2 \sin\gamma \, d\gamma,$$

где P_n есть функция одного только $\cos\gamma$, и если $\cos\gamma$ заменить через x, то P_n превращается в X_n Лежандра. Согласно сказанному имеем:

$$\int_{-1}^{+1} X^n\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

38. Элементарные сферические функции. Выражение функции от ϑ и υ в виде суммы сферических функций.

$2n+1$ выражений:

$$\cos r\upsilon \sin^r\vartheta\left(\frac{d^rX_n}{dx^2}\right)_{x=\cos\vartheta}, \qquad \sin r\upsilon \sin^r\vartheta\left(\frac{d^rX_n}{dx^2}\right)_{x=\cos\vartheta} \tag{22}$$

которые фигурируют в общем выражении (18) для Y_n, все являются сферическими функциями порядка n; их можно получить из общего выражения приравниванием всех, за исключением одного, произвольных постоянных a_r, b_r нулю. Выражения (22) называются элементарными сферическими функциями порядка n. Известно, что многочлен вида:

$$\alpha_0 + \alpha_1\cos\upsilon + \alpha_2\cos 2\upsilon + \ldots + \beta_1\sin\upsilon + \beta_2\sin 2\upsilon + \ldots,$$

где все α и β независимы от υ, не может быть нулем для всех значений υ, если только не нули все α и β. Отсюда следует, что сферическая функция порядка n не может быть тождественно нулем, если только не нули все коэфициенты $2n+1$ сферических элементарных функций, ее составляющих.

Рассмотрим еще сумму

$$\Sigma = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n + \ldots, \tag{23}$$

где $\sum$ есть известная функция ϑ и υ и число членов конечно или бесконечно; в последнем случае предположим ряд сходящимся. Помножив (23) на $P_n\,d\Omega$ и интегрируя по сфере радиуса 1, получим в силу (20):

$$\int_{4\pi} \Sigma P_n\,d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1}Y_n.$$

Поменяем в нем переменные (ϑ, υ) и (ϑ', υ'), что не изменит P_n, и обозначим результат такой замены через $\sum'$, $d\Omega'$; тогда эта формула примет вид:

$$\int_{4\pi} \Sigma' P_n\,d\Omega' = \frac{4\pi}{2n+1}Y_n$$

или в развернутой форме:

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\upsilon' \int_0^{\pi} \Sigma' P_n \sin\vartheta'\,d\vartheta'. \tag{24}$$

Из этого соотношения следует, что:

1) если сумма сферических функций равна нулю, то должны быть отдельно равными нулю составляющие ее сферические функции различных порядков. И отсюда, согласно сказанному, должны равняться нулю коэфициенты всех элементарных сферических функций, которые встречаются в разложении таковых;

5*

2) если некоторая функция от ϑ и υ выражается, как сумма конечного или бесконечного числа сферических функций, такое разложение единственно; другими словами, однозначно определены отдельные сферические функции, ее составляющие (а следовательно, и постоянные коэфициенты всех элементарных сферических функций, которые могут встречаться в выражении заданной функции).

Как на первое применение (24) можно указать на выражение коэфициентов A_{nr} в формуле (19).

Рассмотрим сферическую функцию порядка n:

$$Y_{ns} = \sin^s\vartheta\, T_{ns} \cos s(\upsilon - \upsilon'),$$

где T_{ns} обозначает s-ю производную от X_n, в которой после диференцирования положим $\cos\vartheta$ вместо x. Помножив (19) на Y_{ns} и интегрируя по всей сфере радиуса s получим:

$$\int\limits_{4\pi} P_n Y_{ns}\, d\Omega = \int\limits_0^{2\pi} d\upsilon \int\limits_0^{\pi} P_n Y_{ns} \sin\vartheta\, d\vartheta = \pi A_{ns} \sin^s\vartheta' T'_{ns} \int\limits_0^{\pi} \sin^{2s}\vartheta\, T^2_{ns} \sin\vartheta\, d\vartheta. \qquad (25)$$

Но мы имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos r(\upsilon - \upsilon') \cos s(\upsilon - \upsilon')\, d\upsilon = 0 \quad (\text{при } r \neq s),$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 r(\upsilon - \upsilon')\, d\upsilon = \pi.$$

С другой стороны, вторая формула (20) дает:

$$\int\limits_{4\pi} P_n Y_{ns}\, d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_{ns} = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^s\vartheta' T'_{ns}.$$

Сравнивая это с (25), получаем:

$$\frac{4}{2n+1} = A_{ns} \int\limits_0^{\pi} \sin^{2s+1}\vartheta\, T^2_{ns}\, d\vartheta = A_{ns} \int\limits_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{2s} \left(\frac{d^s X_n}{dx^s}\right)^2 dx.$$

Эта формула доказывает, что все коэфициенты A_{ns} конечны и отличны от нуля. Определенный интеграл может быть вычислен исходя из диференциальной формулы, определяющей X_n[1]. Согласно сказанному найдем:

$$A_{ns} = \frac{2}{(n-s+1)(n-s+2)\ldots(n+s-1)(n+s)}.$$

[1] См. например, Tisserand, Mécanique céleste, II, p. 166.

39. Разложение в ряды по сферическим функциям. Сказанное в предыдущем параграфе доказывает, что если некоторая функция $f(\vartheta, \upsilon)$ от ϑ и υ разлагается в ряд сферических функций, то это разложение возможно лишь единственным образом, причем член разложения порядка n определяется формулой:

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\upsilon' \int_0^{\pi} f(\vartheta', \upsilon') P_n \sin\vartheta' \, d\vartheta'. \tag{26}$$

Можно доказать, что разложение в ряд по сферическим функциям возможно, если выполнены известные условия большой общности относительно функции $f(\vartheta, \upsilon)$.

Глава седьмая

ПРИМЕНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПО ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СТЕПЕНЯМ РАДИУСА-ВЕКТОРА

40. Задача Дирихле для внешнего пространства сферы. Определим гармоническую функцию V для внешнего пространства относительно сферы радиуса a для случая, когда заданы значения, которые должна принимать эта функция на поверхности самой сферы. Обозначим через ϑ и υ полярные координаты произвольной точки сферы, и пусть $F(\vartheta, \upsilon)$ есть значение, которое V должно принимать в точке ϑ, υ самой сферы. Предположим, что $F(\vartheta, \upsilon)$ может быть разложено в ряд сферических функций:

$$F(\vartheta, \upsilon) = \sum_{0}^{\infty}{}' Y_n, \tag{1}$$

где отдельные функции Y_n определены, как это указано в конце предыдущего параграфа.

Рассмотрим еще ряд

$$U = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n, \tag{2}$$

где ρ есть радиус-вектор некоторой точки вне сферы. Так как $\rho > a$, то ряд (2) сходится, если только сходится разложение (1), поэтому можно брать производные от (2) по ρ.

С другой стороны, (2) удовлетворяет уравнению Лапласа, так как (§ 35)

$$\Delta_2 \frac{Y_n}{\rho^{n+1}} = 0.$$

Кроме того, (2) обращается в нуль на бесконечном расстоянии. Таким образом (2) выражает искомую функцию U. Взяв производную по ρ и затем положив $\rho = a$, получим значение производной по нормали к поверхности в виде:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = -\sum \frac{n+1}{a} Y_n.$$

41. Объем и центр массы однородного тела, ограниченного поверхностью, мало отличающейся от сферы. Обозначим через R, ϑ, υ полярные координаты точки на ограничивающей поверхности, и пусть

$$R = a(1+t) \tag{3}$$

уравнение этой поверхности в полярных координатах, причем t есть некоторая функция от ϑ' и υ'. Мы скажем, что поверхность мало отличается от сферы радиуса a, если можно выбрать начало координат таким образом, чтобы функция была всегда меньше некоторого малого, заранее взятого числа ε.

Обозначая через ρ', ϑ', υ' полярные координаты элемента объема, занимаемого телом, будем иметь:

$$\tau=\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}d\vartheta'\int_0^{R}\rho'^2d\rho'\sin\vartheta'=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}R^3\sin\vartheta'\,d\vartheta'.$$

Вставляя вместо R выражение (3) и пренебрегая степенями, высшими единицы, получим:

$$\tau=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}(1+3t')\sin\vartheta'\,d\vartheta', \tag{4}$$

где t' есть то же, что и t при замене ϑ и υ через ϑ' и υ'.

Вообразим, что t разложено по сферическим функциям:

$$t=\sum_0^{\infty}Y'_n. \tag{5}$$

Заметив, что первая из формул (20) § 37 дает:

$$\int_{4\pi}Y'_n\,d\Omega=0 \qquad (\text{для } m\neq 0),$$

выражение (5), подставленное в (4), даст:

$$\tau=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}(1+3Y_0)\sin\vartheta'\,d\vartheta'=\frac{4\pi a^3}{3}(1+3Y_n).$$

Отсюда следует, что если сфера радиуса a имеет одинаковый объем с данным телом, то должно быть $Y_0=0$, а также в разложении (5) отсутствует сферическая функция нулевого порядка.

Для определения положения центра массы тела, предполагаемого однородным, рассмотрим плоскость II, проходящую через начало координат и нормальную к некоторому избранному направлению ϑ, υ. Пусть δ есть расстояние элемента объема от плоскости II. Расстояние D центра массы от той же плоскости дается выражением:

$$D=\frac{1}{\tau}\int_{\tau}\delta\,d\tau. \tag{6}$$

Если ρ', ϑ', υ' — координаты элемента $d\tau$, то

$$\delta=\rho'\cos\gamma,$$

где γ — угол между направлениями (ϑ, υ) и (ϑ', υ'). Но, как известно (§ 31), $P_1=\cos\gamma$, откуда $\delta=\rho' P_1$.

Подставляя в (6) и заменяя $d\tau$ его выражением:

$$d\tau=\rho'^2\sin\vartheta'\,d\rho'\,d\vartheta'\,d\upsilon',$$

получим:

$$D=\frac{1}{\tau}\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}d\vartheta'\int_0^{R}\rho'^3P_1\sin\vartheta'\,d\rho'=\frac{1}{4\tau}\int_0^{2\pi}d\upsilon'\int_0^{\pi}d\vartheta'\,R^4P_1\sin\vartheta'.$$

Заменим R его выражением (3), принимая с указанным приближением

$$R^4=a^4(1+4t),$$

где t дается разложением (5). На основании формулы (20) § 37 имеем:

$$D=\frac{4}{3}\pi a^4Y_1.$$

Отсюда следует: *достаточное и необходимое условие того, чтобы точка, выбранная за начало координат, была центром массы, заключается в отсутствии в разложении* (5) *сферической функции первого порядка.*

42. Разложение в ряд внешней потенциальной функции для любого тела. Пусть ρ', ϑ', υ' — полярные координаты притягиваемой точки P; ρ, ϑ, υ — координаты элемента массы $k\,d\tau$ данного тела. Допустим, что $\rho'>\rho$, т. е. притягиваемая точка находится от начала координат дальше, чем любая точка данного тела; тогда расстояние r точки P от элемента $k\,d\tau$ дается выражением:

$$\frac{1}{r}=\sum_0^{\infty}\frac{\rho^n}{\rho'^{n+1}}P_n.$$

Потенциальная функция V тела на точку P поэтому будет:

$$V=\sum_0^{\infty}\frac{1}{\rho'^{n+1}}=\int_\tau\rho^nP_nk\,d\tau=\frac{M}{\rho'}+\frac{1}{\rho'^2}\int_\tau\rho\cos\gamma k\,d\tau+\frac{1}{2\rho'^3}\int_\tau\rho^2(3\cos^2\gamma-1)k\,d\tau+\ldots,\quad(7)$$

где M — полная масса тела, а γ — угол между направлениями (ϑ,υ) и (ϑ',υ').

Обозначим через x, y, z декартовы координаты элемента $k\,d\tau$, λ, μ, ν — косинусы направлений радиуса-вектора, проведенного в притягиваемую точку. Будем иметь:

$$\rho\cos\gamma=\lambda x+\mu y+\nu z,$$

$$\rho^2(3\cos\gamma-1)=x^2(3\lambda^2-1)+y^2(3\mu^2-1)+z^2(3\nu^2-1)+6xy\,\lambda\mu+6yz\,\mu\nu+6zx\,\nu\lambda=$$
$$=\lambda^2(2x^2-y^2-z^2)+\mu^2(2y^2-z^2-x^2)+\nu^2(2z^2-x^2-y^2)+6xy\,\lambda\mu+6yz\,\mu\nu+6zx\,\nu\lambda.$$

Подставим эти выражения в (7) и положим:

$$\int_\tau xk\,d\tau=M\bar{x}\quad\text{и т. д.},$$

$$\int_\tau(y^2+z^2)k\,d\tau=A_x\quad\text{и т. д.},$$

$$\int_\tau yz\,k\,d\tau=B_x\quad\text{и т. д.}$$

Получим:

$$V=\frac{M}{\rho'}+\frac{M}{\rho'^2}(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}+\nu\bar{z})+\frac{1}{2\rho'^3}[\lambda^2(A_y+A_z-2A_x)+\mu^2(A_z+A_x-2A_y)+$$
$$+\nu^2(A_x+A_y-2A_z)+6\lambda\mu B_z+6\mu\nu B_x+6\nu\lambda B_y]+\ldots \qquad (8)$$

Если известна внешняя потенциальная функция тела, то известны и значения V для всех систем значений λ, μ, ν, ρ. Поэтому будут определены и

$$\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ A_z-A_y,\ A_x-A_z,\ B_x,\ B_y,\ B_z,$$

т. е. будут известны положение центра массы, направления главных осей инерции и разности главных моментов инерции, как это доказано в § 15. Если начало координат находится в центре тяжести и оси координат совпадают с главными осями инерции, то в (8) исчезают члены с λ, μ, ν, $\lambda\mu$, $\mu\nu$, $\nu\lambda$, и мы вновь имеем формулу § 13.

В более общем случае член разложения (7) общего вида

$$\frac{1}{\rho'^{\,n+1}}\int_\tau \rho^n P_n k\,d\tau,$$

где P_n есть выражение (19) § 36, распадается на $2n+1$ членов одного из двух типов:

$$\begin{aligned}&\frac{A_{nr}}{\rho'^{\,n+1}}\cos r\upsilon'\,T'_{nr}\int_\tau k\cos r\upsilon\,T_{nr}\,d\tau\\&\frac{A_{nr}}{\rho'^{\,n+1}}\sin r\upsilon'\,T'_{nr}\int_\tau k\sin r\upsilon\,T_{nr}\,d\tau\end{aligned}\qquad\left(T_{nr}=\sin^r\vartheta\,\frac{d^rX_n}{dx^r}\right).$$

Если V известно для всех совокупностей значений ρ', τ', ν', то этим определяются и значения $2n+1$ интегралов

$$L=\int_\tau k\cos r\upsilon\,T_{nr}\,d\tau,\qquad M=\int_\tau k\sin r\upsilon\,T_{nr}\,d\tau.$$

Если вместо полярных координат (ρ, ϑ, υ) введем прямоугольные x, y, z, то L и M выразятся через линейные однородные комбинации моментов инерции порядка n данного тела. Знание внешней потенциальной функции поведет поэтому к знанию $2n+1$ независимых линейных соотношений между $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ моментами инерции n-го порядка.

43. Как может меняться распределение массы внутри тела без изменения внешней потенциальной функции. Рассмотрим тело, занимающее ограниченный объем τ, и пусть по обыкновению k есть плотность элемента объема $d\tau$ с координатами x, y, z. Допустим, что эта плотность получает приращение (положительное или отрицательное) h, где h есть некоторая функция от x, y, z. Необходимое и достаточное условие того, чтобы при этом изменении в распределении массы не изменилось притяжение на внешние точки, заключается в том, чтобы интеграл

$$\int_\tau\frac{h\,d\tau}{r}=\int_\tau\frac{h\,d\tau}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$$

был равен нулю для всех точек x, y, z вне объема τ. В силу разложения (7) можно написать:

$$0=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\rho'^{n+1}}\int_{\tau}\rho^n P_n h\,d\tau,$$

и это условие вследствие произвольности ρ' можно заменить другим:

$$\int_{\tau}\rho^n P_n h\,d\tau=0, \tag{9}$$

для всех целых положительных n.

Мы можем сказать, что воображаемое тело, занимающее пространство τ и имеющее плотность h в точке с текущими координатами x, y, z, не должно притягивать внешней точки (быть телом нулевого притяжения). Таким образом исследование изменений плотности внутри объема τ, при которых не меняется внешнее притяжение, равносильно исследованию тела нулевого притяжения, которое можно вообразить себе внутри объема τ. Мы можем немедленно найти бесконечное множество примеров для такого распределения в случае, если пространство τ ограничено сферой радиуса R. Наиболее простой способ заключается в рассмотрении распределения концентрическими сферическими слоями, в случ е которого мы будем иметь:

$$\int_0^R h\rho^2\,dh=0,$$

где h — плотность слоя радиуса ρ.

В более общем случае пусть

$$h\sum_{rs}A_{rs}Y_{rs},$$

— плотность в точке с полярными координатами $\rho, \vartheta, \upsilon$, где A_{rs} — функции ρ, подчиненные единственному условию интегрируемости от 0 до R, и Y_{rs} — элементарная сферическая функция порядка r от переменных ϑ и υ.

Вставляя это в (9), где положим $d\tau=\rho^2\,d\rho\,d\Omega$, получим:

$$\int_0^R\rho^{n+2}\,d\rho\int_{4\pi}P_n\sum A_{rs}Y_{rs}\,d\Omega=0.$$

Выполняя интегрирование по Ω и припоминая (20) § 37, найдем:

$$\frac{4\pi Y_n'}{2n+1}\int_0^R\rho^{n+2}A_{ns}\,d\rho=0,$$

откуда

$$\int_0^R\rho^{n+2}A_{ns}\,d\rho=0. \tag{10}$$

A_{ns} связано этим условием, причем оно, очевидно, остается конечным между 0 и R. В более общем случае оно удовлетворит этим условиям, если положить:

$$A_{ns}=\frac{1}{\rho^{n+2}}\frac{d}{d\rho}[\rho^{n+3}\psi(\rho)],$$

где $\psi(\rho)$ — произвольная конечная функция, имеющая производную по ρ и обращающаяся в нуль при $\rho=R$.

Вообще, если пространство τ ограничено произвольной поверхностью S, мы можем вообразить тело нулевого притяжения, находящееся внутри этого пространства, следующим способом. Пусть $f(x, y, z)$ есть непрерывная конечная функция внутри τ, так же как и ее первая и вторая производные, и притом такая, что как она сама, так и ее производные по нормали $\frac{\partial f}{\partial n}$ обращаются в нуль на поверхности S.

Тело, занимающее объем τ и имеющее в данной точке плотность, определяемую из

$$h=\Delta_2 f, \tag{11}$$

имеет притяжение на внешнюю точку, равное нулю. Действительно, для любой точки внутри τ мы имеем согласно известной формуле Грина [1]

$$4\pi f(x, y, z)=\int\limits_S\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS-\int\limits_\tau\frac{\Delta_2 f}{r}\,d\tau.$$

Согласно упомянутым поверхностным условиям для f и $\frac{\partial f}{\partial n}$ интеграл по поверхности обращается в нуль, так что принимая во внимание (11):

$$4\pi f(x, y, z)=-\int\limits_\tau\frac{h\,d\tau}{r}.$$

Эта формула показывает, что $-4\pi f$ выражает внутреннюю потенциальную функцию нашего распределения с плотностью (переменной) h. Внешняя потенциальная функция на основании известного свойства непрерывности должна иметь с $-4\pi f$ одинаковое значение на поверхности S, т. е. должна быть нулем во всех точках S. Поэтому она будет нулем и во всех точках внешнего пространства.

44. Разности главных моментов инерции для массы Земли. Мы приближенно уже определили эти разности в § 24. Теперь мы можем дать точные выражения в предположении, что одна из внешних уровенных поверхностей Земли есть эллипсоид вращения (a, a, b). Заметим прежде всего, что выражение внешней потенциальной функции V согласно сказанному в § 20 зависит только от x^2+y^2 и от z^2, где x, y, z — координаты притягиваемой точки относительно осей эллипсоида (ось z направлена по оси вращения, начало координат — в центре эллипсоида). Все члены, входящие в V, симметричны относительно плоскости xy и относительно оси z. Отсюда следует, что разложение (8) § 42 для V не должно меняться при следую-

[1] См. Приложения, § 4.

щих изменениях в направляющих косинусах λ, μ, ν радиуса-вектора притягиваемой точки:

1) при изменении знака у одного, двух или всех λ, μ, ν,

2) при таких изменениях λ, μ, ν, при которых $\lambda^2+\mu^2$ и ν^2 остаются постоянными.

Для этого необходимо, чтобы было:

$$\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=B_x=B_y=B_z=0; \qquad A_x=A_y.$$

Эти соотношения показывают, что *центр массы Земли совпадает с центром эллипсоида, ось вращения этой поверхности является главной осью инерции и два главных момента относительно осей x и y равны между собою.*

С другой стороны, обозначая через V_z потенциальную функцию относительно точки, лежащей на оси z на расстоянии $+z$ от начала, получим это V_z из (8), полагая $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=1$, $\rho'=z$; таким образом, принимая во внимание, что $\bar{z}=0$, найдем:

$$V_z=\frac{M}{z}+\frac{1}{2z^3}(A_x+A_y-2A_z)\ldots,$$

откуда

$$\frac{1}{2}(A_x+A_y-2A_z)=\lim_{z=\infty} z^2(zV_z-M).$$

В данном случае, если R — момент инерции относительно оси z, а P — относительно каждой из осей x и y, то предыдущая формула дает:

$$P-R=\lim_{z=\infty} z^2(zV_z-M).$$

Принимая во внимание, что вспомогательная переменная E, которая фигурирует в выражении V, данном в § 20, для случая точки, лежащей на оси z, становится

$$E=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{z},$$

нетрудно получить из уравнения (11):

$$R-P=\frac{Mb^2l^2}{3}\left[1-\frac{4\omega^2l^3a^2b}{15fM\left\{(3+l^2)\operatorname{arc\,tg} l-3l\right\}}\right].$$

Разлагая в ряд по малым значениям l, получаем вновь выражение, найденное в § 24.

Глава восьмая

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ УРОВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ОТ СФЕРЫ. АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

45. Постановка проблемы. Стокс определил при помощи сферических функций зависимость между формой уровенной поверхности S и значением силы тяжести, исходя из общей гипотезы, что эта уровенная поверхность мало отличается от сферы и что можно пренебречь малой величиной второго порядка относительно разности между максимумом и минимумом радиуса-вектора S, а также относительно центробежной силы, выраженной в долях силы тяжести, рассматривая эти две величины как малые первого порядка.

Несколько видоизменяя постановку проблемы и способ решения, мы рассмотрим в настоящей главе следующий вопрос: допустим две разные гипотезы (S) и (S_1) относительно формы и положения внешней уровенной поверхности и предположим, что обе поверхности S и S_1, очень мало отличаются между собою и обе близки к сфере. Найдем, какое существует соотношение между расстоянием вдоль одного и того же радиуса-вектора этих двух поверхностей и разностью силы тяжести в соответствующих точках поверхностей.

46. Предварительные геометрические соотношения. — Пусть S — поверхность равновесия, которую предположим мало отличающейся от сферы, центр которой O лежит на оси вращения планеты, а радиус равен a.

Возьмем сферические координаты с центром в O и полярной осью, совпадающей с осью вращения; обозначим через θ угол между радиусом-вектором и северным направлением полярной оси (т. е. полярное расстояние), w — долгота.

Уравнение поверхности S может быть написано так:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}(1+\alpha t), \qquad (S)$$

где α — очень малая постоянная, t — функция от θ, w, которая должна быть конечной и непрерывной, так же как и ее первая производная, согласно известному свойству уровенных поверхностей. Положив $\log(1+\alpha t)=F$, напишем (S) в виде:

$$\log r=\log a-F. \qquad (1)$$

Пусть ds — некоторый линейный элемент на поверхности S; уравнение (1) дает:

$$\frac{dr}{ds}+r\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{d\theta}{ds}+r\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}=0. \qquad (2)$$

С другой стороны, по отношению к прямоугольным осям координат, образованным в точке $(r,\ \theta,\ w)$ касательными к координатным линиям упомянутой сферической системы координат и радиусом-вектором, направляющие косинусы элемента ds таковы:

$$\frac{dr}{ds}, \quad r\frac{d\theta}{ds}, \quad r\sin\theta\frac{dw}{ds}.$$

Уравнение (2) показывает, что направляющие косинусы λ, μ, ν нормали к поверхности S образуют с только что найденными косинусами отношения:

$$1 : \frac{\partial F}{\partial \theta} : \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial w}.$$

Отсюда, положив

$$P = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2},$$

и принимая положительным направление *внутренней* нормали, образующей с радиусом-вектором тупой угол, получим:

$$\lambda = \cos(rn) = -\frac{1}{P}. \qquad (\ )$$

Рассмотрим теперь поверхность S_1, мало отличающуюся от S, радиус-вектор которой для точки, лежащей в направлении (θ, w), определяется из следующего уравнения:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a}(1 + \alpha t + \beta u), \qquad (S_1)$$

где β — весьма малая постоянная, а u — новая функция от θ, w.

Мы задаемся целью исследовать приближенным способом, какие изменения произойдут во внешней потенциальной функции и в поверхностной силе тяжести, когда мы от гипотезы, выраженной формулой (S), перейдем к (S_1) или другими словами, когда мы вместо поверхности S как уровенной поверхности подставляем поверхность S_1.

При решении этой задачи мы будем пренебрегать членами порядка $\alpha\beta$, β^2, $\beta\omega$ (где ω — угловая скорость суточного вращения) и выше. Чтобы притти к практическому случаю, в котором S представляет обычный земной сфероид эксцентриситета e, мы допустим, что можно пренебрегать как вторыми степенями местных аномалий, так и произведениями этих аномалий на e^2 и на ω^2. Напротив, *мы не будем пренебрегать*, как это обычно делается в теории Клеро и Стокса, *членами, содержащими* e^4, $e^2\omega^2$, ω^4 и т. д. Другими словами, отличие нашего сфероида от сферы не столь мало, чтобы можно было пренебречь вторыми степенями; но аномалии, которые мы хотим изучить (отклонения геоида от сфероида), мы предполагаем столь малыми, что допустимо пренебречь во всех коэфициентах, на которые их придется множить, действием земного сжатия и центробежной силы.

Условившись относительно этого, обозначим через n_1 внутреннюю нормаль поверхности S_1. Получим аналогично (3):

$$\cos(rn_1) = -\frac{1}{P_1},$$

где

$$P_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial F_1}{\partial w}\right)^2}.$$

Теперь мы имеем:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}\left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{(1+\alpha t)^2}\left(1 - \frac{2\beta u}{1+\alpha t} + \ldots\right)\left\{\alpha^2\left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)^2 + 2\alpha\beta\,\frac{\partial t}{\partial \theta}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} + \beta^2\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right\}.$$

С указанной степенью приближения имеем поэтому (конечно, для данных значений θ и w):

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$$

и равным образом

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial w}\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2,$$

и отсюда $P = P_1$. Это значит, что если A и A_1 — две точки, в которых один и тот же радиус-вектор встречает поверхности S и S_1, мы имеем с нашей степенью приближения для точек A и A_1:

$$\cos(rn) = \cos(rn_1). \tag{4}$$

47. Разности между потенциальными функциями для двух гипотез S и S_1. Пусть M полная масса Земли, которую предполагаем известной; обозначим через

$$\frac{M}{r} + \alpha V \tag{5}$$

выражение внешней потенциальной функции земного притяжения в гипотезе (S), и через:

$$\frac{M}{r} + \alpha V'$$

аналогичное выражение в гипотезе (S_1). V и V' — гармонические функции во внешнем пространстве, первая относительно S, вторая — относительно S_1. Употребляя индексы s и s' для обозначения величин на соответствующей поверхности, получим:

на S:

$$f\frac{M}{r} + \alpha f V_s + \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2\theta = c,$$

на S_1: (6)

$$f\frac{M}{r_1} + \alpha f V'_{s'} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2\theta = c',$$

где f — постоянная тяготения, а правые члены постоянны, причем разность их C — малая величина порядка β.

Как уже сказано, пусть A и A_1 — две точки, в которых радиус (θ, w), выходящий из начала координат, встречает поверхности S и S_1. Расстояние AA_1 с нашим приближением выражается так:

$$r_1 - r = -a\beta u.$$

Значение функции V' в точке A может поэтому быть написано так:

$$V'_s = V'_{s'} + (r - r_1)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{s'} + \ldots = V'_{s'} + a\beta u\left(\frac{\partial V'}{\partial r}\right)_{s'} + \ldots.$$

Таким образом пренебрегая, как сказано, членами с $a\beta$, мы можем во второй формуле (6) поставить V'_s вместо $V'_{s'}$; это значит, что мы в формулах (6) можем считать функции V и V' относящимися обе к той же точке A на поверхности S.

Тогда, вычитая одну из другой (6), получим:

$$\frac{M\beta u}{a} + \alpha(V'_s - V_s) = C \tag{7}$$

(так как согласно установленному можем отбросить разность $\omega^2(r_1^2 - r^2)$, имеющую порядок $\omega^2\beta$).

Итак, значения гармонической функции $\alpha(V - V')$ на поверхности S являются малыми порядка β. Такими они остаются во всем пространстве вне S. Положим поэтому

$$\alpha(V' - V) = \beta\upsilon,$$

где υ — гармоническая функция во внешнем пространстве. Уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{M\beta}{a}u + \beta\upsilon_s = C.$$

И все с тем же приближением, обозначая через υ_Σ значение, которое принимает υ в точке, где рассматриваемый радиус-вектор встречает сферу Σ радиуса a, напишем:

$$\frac{M\beta}{a}u + \beta\upsilon_\Sigma = C. \tag{8}$$

48. Аномалии силы тяжести. Составляющую силы тяжести g в направлении радиуса-вектора в гипотезе (S) получим, беря частную производную по r от выражения:

$$f\frac{M}{r} + \alpha f V + \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2\theta.$$

Таким образом имеем для точек на поверхности S:

$$g_s\cos(rn) = -f\frac{M}{r^2} + \alpha f\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_s + \omega^2 r\sin^2\theta. \tag{9}$$

Подобным же образом в гипотезе (S_1) для точек поверхности S:

$$g'_s\cos(r_1 n) = -f\frac{M}{r_1^2} + \alpha f\left(\frac{\partial V'}{\partial r}\right)_{s'} + \omega^2 r_1\sin^2\theta. \tag{10}$$

Вычитая (9) из (10) и замечая, что

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{2\beta u}{a^2}+\ldots;$$

получим, отбрасывая члены с $\beta\omega^2$, β^2, $\beta\alpha$;

$$g'_{s'}\cos(r_1n)-g_s\cos(rn)=-2f\frac{M\beta u}{a^2}+\alpha f\left(\frac{\partial V'}{\partial r}\right)_{s'}-\alpha f\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_s. \tag{11}$$

Левая часть может быть написана так:

$$(g'_{s'}-g_s)\cos(rn)+g'_{s'}\,[\cos(r_1n)-\cos(rn)].$$

Второй член этого выражения может быть отброшен на основании (4). Рассуждая так же как в предшествующем параграфе, можем с нашим приближением положить:

$$\beta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma \quad \text{вместо} \quad \alpha\left(\frac{\partial V'}{\partial r}\right)_{s'}-\alpha\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_s,$$

откуда получим:

$$(g'_{s'}-g_s)\cos(rn)=-2f\frac{M\beta u}{a^2}+\beta f\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma.$$

Это выражение доказывает, что разность силы тяжести на поверхности в наших двух гипотезах (для данных значений θ и w) — величина порядка β, как это можно было ожидать. С другой стороны, $\cos(rn)$ отличается от отрицательной единицы на величину порядка α^2. Поэтому можно написать:

$$\Delta g=2f\frac{M\beta u}{a^2}-\beta f\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma, \tag{12}$$

где Δg (аномалия тяжести) обозначает разность $g'_{s'}-g_s$.

49. Формула Стокса. Разлагая в ряд сферических функций наши функции u и v_Σ, положим:

$$u=\sum_0^\infty U_n,\quad v_\Sigma=\sum_0^\infty Y_n,$$

и в силу сказанного в § 40 получим:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma=-\frac{1}{a}\sum_0^\infty(n+1)Y_n.$$

Прежде чем ввести эти выражения в (8) и (12), заметим, что если потенциальная функция планеты представлена в одной из форм:

$$\frac{M}{r}+\alpha V,\qquad \frac{M}{r}+\alpha V',$$

то должно быть

$$\lim_{r=\infty} rV = 0, \qquad \lim_{r=\infty} rV' = 0,$$

а следовательно, также

$$\lim_{r=\infty} rv = 0. \tag{13}$$

Предположим теперь, что начало координат O находится в центре массы планеты, тогда в разложении потенциала по сферическим функциям (такое разложение всегда законно для точек, достаточно далеких от поверхности), должен отсутствовать, как мы знаем, член с $\frac{1}{r^2}$ (§ 42). Это требует, чтобы

$$\lim_{r=\infty} r^2 V = \lim_{r=\infty} r^2 V' = 0,$$

а отсюда также

$$\lim_{r=\infty} r^2 v = 0. \tag{14}$$

С другой стороны, если примем для функции v_Σ разложение $\sum Y_n$, то выражение для v будет (§ 40):

$$v = \sum \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n.$$

Условия (13) и (14) требуют, однако, чтобы $Y_0 = Y_1 = 0$.

Формула (8) говорит, что в разложении для U должна отсутствовать сферическая функция первого порядка, а сферическая функция нулевого порядка будет:

$$\frac{aC}{M\beta} = U_0. \tag{15}$$

Положим поэтому

$$u = \frac{aC}{M\beta} + \sum_{2}^{\infty} U_n, \qquad v_\Sigma = \sum Y_n,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma = -\frac{1}{a}\sum_{2}^{\infty}(n+1)\,Y_n.$$

Примем еще, разлагая по сферическим функциям:

$$\Delta g = \sum_{0}^{\infty} G_n.$$

Из (12) получим, приравнивая нулю сумму сферических функций одинакового порядка:

$$G_0 = 2f\frac{M\beta}{a^2}U_0; \qquad G_1 = 0; \qquad G_n = \frac{2fM\beta}{a^2}U_n + \beta f\frac{n+1}{a}Y_n.$$

а из (8) для $n > 1$:

$$\frac{MU_n}{a} + Y_n = 0.$$

Исключая Y_n из последних двух соотношений, найдем:

$$G_n = -\frac{f\beta M}{a^2}(n-1)U_n. \tag{16}$$

Выражения (15) и (16) связывают между собою линейные отклонения между поверхностями S и S_1 с разностью Δg между соответствующими значениями поверхностной силы тяжести. Постараемся выразить первые через последние.

Обозначая через $d\Omega'$ элемент поверхности сферы радиуса 1 и принимая, что θ', w' — полярные координаты этого элемента, получим:

$$G_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi}\Delta g'\,d\Omega', \quad G_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int\limits_{4\pi}P_n\Delta g'\,d\Omega',$$

откуда согласно (15) и (16):

$$\beta U_n = -\frac{a^2}{4\pi fM}\,\frac{2n+1}{n-1}\int\limits_{4\pi}P_n\Delta g'\,d\Omega'; \qquad \beta U_0 = \frac{a^2}{8\pi fM}\int\limits_{4\pi}\Delta g'\,d\Omega'.$$

Линейное расстояние $N = r_1 - r$ между обеими поверхностями вдоль радиуса-вектора (θ, w) с нашей степенью приближения равно $-\beta au$. Отсюда:

$$N = a\beta\sum_0^\infty U_n = -\frac{a^3}{8\pi fM}\int\limits_{4\pi}\Delta g'\,d\Omega' + \frac{a^3}{4\pi fM}\int\limits_{4\pi}\Delta g'\sum_2^\infty\frac{2n+1}{n-1}P_n\,d\Omega'. \tag{17}$$

Найдем теперь выражение функции $\sum\limits_2^\infty \frac{2n+1}{n-1}P_n$.

Для этой цели примем на сфере радиуса 1 за полюс сферических координат точку, в которой она встречается с радиусом-вектором (θ, w), соответствующим данному значению N. Пусть γ, ω будут полярным расстоянием и долготой в этой новой системе координат. Тогда P_n становится той функцией от $\cos\gamma$, которая была определена в § 31, и мы получим:

$$d\Omega = \sin\gamma\cdot d\gamma\cdot d\omega, \quad (1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^{-\frac{1}{2}} - 1 - x\cos\gamma = \sum_2^\infty P_n x^n, \tag{18}$$

Разделим на x^2 и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\gamma}} - 1 - x\cos\gamma\right]\frac{dx}{x^2} = \sum_2^\infty\frac{P_n}{n-1}. \tag{19}$$

Интеграл первого члена легко вычисляется интегрированием по частям после замены переменных $x=\frac{1}{y}$. Получим:

$$\int\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\gamma}}-1-x\cos\gamma\right]\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{x}\left[1-\sqrt{1+x^2-2x\cos\gamma}\right]-\cos\gamma\log\left[\sqrt{1+x^2-2x\cos\gamma}+1-x\cos\gamma\right].$$

Для $x=0$ легко найдем:

$$\frac{1}{x}\left(1-\sqrt{1+x^2-2x\cos\gamma}\right)=\cos\gamma.$$

Определенный интеграл первого члена (19), таким образом, равен:

$$1-2\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\gamma-\cos\gamma\log\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

С другой стороны, (18) при $x=1$ дает:

$$-1+\frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}-\cos\gamma=\sum_2^\infty P_n.$$

Складывая это выражение, умноженное на 2, и (19), умноженное на 3, получим:

$$\sum_2^\infty\frac{2n+1}{n-1}P_n=\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}+1-6\sin\frac{\gamma}{2}-5\cos\gamma-3\cos\gamma\log\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Если обозначить второй член через $\Phi(\gamma)$, то выражение (17) принимает вид:

$$N=\frac{a^3}{3\pi fM}\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^{\pi}\Delta g'\left[\Phi(\gamma)-\frac{1}{2}\right]\sin\gamma\cdot d\gamma \qquad (20)$$

Это и есть формула Стокса, которая дает отклонение геоида от сфероида в случае, если для всей поверхности Земли известны аномалии силы тяжести Δg или разности между действительными значениями тяжести на поверхности и вычисленными значениями на основании гипотезы эллипсоидальной поверхности равновесия.

50. Другой способ вывода формулы (20). Результат, выраженный формулой (20), может быть получен без всякого применения сферических функций. Метод, который мы теперь укажем, несколько более сложен, но имеет то преимущество, что не затрагивает вопроса о сходимости рядов, которые неоднократно встречались в изложении предыдущего параграфа.

Исключая $\bar{w}$ из (8) и (12), получим:

$$\Delta g=-2f\beta\frac{v_\Sigma}{a}-\beta f\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma+\frac{2fC}{a}. \qquad (21)$$

Между тем, v определяется как внешняя гармоническая функция, которая удовлетворяет своим поверхностным условиям и имеет производную по нормали, даваемую (21). Проблема определить гармоническую функцию, которая удовлетворяет на сфере условию типа:

$$\alpha v - \beta \frac{\partial v}{\partial r} = \xi,$$

где α и β — постоянные, а ξ — заданная функция для точек сферы, разрешена профессором Дини для объема внутри сферы путем применения разложений по сферическим функциям. Не составляет затрудиения, следуя применеииому им принципу, разрешить эту проблему для внешнего пространства и без примеиеиия рядов. Заметим для нашей цели, что функция

$$U = 2v + r\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) \tag{22}$$

есть гармоническая функция во внешием пространстве, поскольку такова функция v, причем значения v иа поверхности согласно (21) равиы:

$$U_\Sigma = -\frac{a}{f\beta}\left(\Delta g - \frac{2fC}{a}\right).$$

Пусть A — точка на сфере, к которой относится аномалия силы тяжести Δg, P — точка внешиего пространства иа расстоянии r от центра O, γ — угол AOP, ρ — расстояние AP, определяемое равенством

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma.$$

Выражение U для точки P дается известной формулой Пуассона:

$$U = -\frac{r^2 - a^2}{4\pi f\beta}\int\limits_\Sigma \frac{\Delta g_1}{\rho^3}\,d\Sigma,$$

где для сокращения письма положено Δg_1 вместо

$$\Delta g - \frac{2fC}{a}.$$

Отсюда из (22):

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = \frac{a^2 r - r^3}{4\pi f\beta}\int\limits_\Sigma \frac{\Delta g_1}{\rho^3}\,d\Sigma.$$

Интегрируя по r, получаем без затруднений:

$$v = \frac{1}{4\pi f\beta}\int\limits_\Sigma \left[\frac{2}{\rho} - \frac{3\rho}{r^2} - \frac{3a\cos\gamma}{r^2}\log(\rho + r - a\cos\gamma)\right]\Delta g_1\,d\Sigma + \frac{\xi}{r^2}, \tag{23}$$

где ξ — неизвестная функция сферических координат θ, w точки, к которой относится данное значение v.

Так как v — гармоническая функция, то ξ должно быть сферической функцией первого порядка вида:

$$a'\cos\theta + b'\sin\theta\cos w + c'\sin\theta\sin w,$$

где постоянные a', b', c', так же как и постоянная C, которая фигурирует в выражении для Δg_1, определяются на основании условий (13) и (14) § 49 (и это составляет наиболее трудную часть вычисления). Определив постоянные, положим в (23) $r=a$, с целью найти поверхностные значения v, и подставим вместо диференциала $d\Sigma$ равный ему $a^2\,d\Omega$. Полученное выражение для v_Σ, подставленное в формулу (8), вместе с найденной величиной C приводится к формуле (20).

51. Уравнение Лагранжа, относящееся к потенциальной функции поверхностного сферического слоя. Пусть v — потенциальная функция поверхностного распределения на сфере радиуса a; D — плотность в точке A сферы. Требуется доказать, что

$$v_\Sigma + 2a\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma = -4\pi a D, \tag{24}$$

где v_Σ — значение v в A, и $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma$ — предел, к которому стремится производная $\frac{\partial v}{\partial r}$, взятая по радиусу-вектору, когда точка извне бесконечно приближается к A.

Нижеследующее доказательство представляется мне наиболее простым.

Пусть v_i — внутренняя потенциальная функция, а v — внешняя для нашего распределения. Тогда

$$v_i = f(r,\ \theta,\ w), \tag{25}$$

если r, θ, w — полярные координаты притягиваемой точки. Легко проверить, что функция

$$\frac{a}{r} f\left(\frac{a^2}{r},\ \theta,\ w\right)$$

является гармонической функцией во внешнем пространстве, и так как она становится равной v_i на самой сфере, то она выражает внешнюю потенциальную функцию v. Итак,

$$v = \frac{a}{r} f\left(\frac{a^2}{r},\ \theta,\ w\right). \tag{26}$$

Взяв отсюда производную, так же как и от (25), имеем:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)_\Sigma + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma = -\frac{v_\Sigma}{a}.$$

С другой стороны, согласно известному свойству потенциальной функции простого слоя:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)_\Sigma - \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\Sigma = 4\pi D.$$

Из последних формул непосредственно следует (24).

Доказанное имеет место всегда, если существует производная по нормали $\frac{\partial v}{\partial r}$ вблизи рассматриваемой точки A поверхности. Согласно сказанному эта производная существует в случае, если поверхностная плотность D имеет приращение конечной величины во всех направлениях или также, если удовлетворяется неравенство:

$$\left(\frac{D' - D}{l}\right) < h,$$

где D — плотность в точке B сферы на расстоянии l от A, а h — некоторая конечная величина.

52. Формула Гельмерта, которая связывает аномалии силы тяжести, линейное отклонение геоида от сфероида и местные недостатки или избытки массы Земли. Допустим, что фигура эллипсоидального равновесия соответствует правильному распределению массы Земли в виде слоев равной плотности, и что отклонения N геоида (поверхности S_1) от сфероида (поверхности S) вызываются недостаточной или избыточной массой, условно представляемой в виде поверхностного слоя плотности D (положительной или отрицательной), распределенной на сфере радиуса a.

Так как в § 47 и в последующих через βv обозначена та часть потенциальной функции притяжения, от которой зависят отклонения N и аномалии Δg, то мы должны в (24) подставить βv вместо v, после чего получим:

$$\beta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{\Sigma} = -2\pi D - \frac{\beta}{2a} v_{\Sigma}. \tag{27}$$

Допустим еще, что рассматриваемые геоид и эллипсоид соответствуют одному и тому же значению потенциальной функции Земли, т. е. что постоянные c и c' в формуле (6) равны между собою, и что, следовательно, постоянная C есть нуль.

В таком случае (8') и (12') становятся

$$\frac{M\beta\omega}{a} + v_{\Sigma} = 0, \quad \Delta g = 2f\frac{M\beta u}{a^2} - \beta f\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{\Sigma}.$$

Исключая v_{Σ} и $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{\Sigma}$ из этих выражений и (27), получим:

$$\frac{3}{2} fM\beta \frac{u}{a^2} - \Delta g = -2\pi fD.$$

С другой стороны, расстояние по нормали N между двумя поверхностями выражается с нашей степенью приближения через $-a\beta u$. Отсюда последняя формула может быть написана так:

$$\frac{3}{2} fM\frac{N}{a^3} + \Delta g = 2\pi fD. \tag{28}$$

Введем сюда среднюю поверхностную тяжесть посредством приближенной формулы:

$$G = \frac{fM}{a^2} = \frac{4}{3}\pi a f k_m,$$

где k_m — средняя плотность Земли. Получим из (28):

$$\Delta g = \frac{3}{2}\frac{G}{a}\left(\frac{D}{k_m} - N\right).$$

Если, наконец, плотность D идеального возмущающего слоя численно выразить через толщину однородного слоя H принятой плотности k в виде произведения $D=Hk$, то после подстановки получим формулу Гельмерта:

$$\Delta g = \frac{3}{2}\frac{G}{a}\left(\frac{k}{k_m}H - N\right).$$

Из предыдущего следует, что эта формула требует с аналитической точки зрения, чтобы плотность D вокруг рассматриваемой точки не только менялась непрерывно, но допускала и конечное приращение в любом направлении по поверхности. С точки зрения практической это ограничение не имеет значения, так как, если мы в некотором месте Земли хотим сопоставить аномалии (линейные, угловые, гравиметрические) геоида с местными возмущениями массы, мы всегда подразумеваем, что эти неправильности имеют известную протяженность по всем горизонтальным направлениям вокруг рассматриваемой точки. При таком предположении указанное аналитическое требование выполняется само собою.

53. Конденсация на уровне моря выступающих частей земной коры. Закончим рассмотрение применения теории Стокса в этой первой части замечанием, что эта теория предполагает рассматриваемую в ней уровенную поверхность находящейся целиком вне массы планеты. Отвлекаясь с большой степенью приближения от массы атмосферы, изучаемая уровенная поверхность для случая Земли, т. е. средний уровень моря, не проходит полностью вне массы Земли, вследствие чего с теоретической стороны нужно ввести поправочные члены для учета континентальных масс, выдающихся над указанным уровнем.

Подобный учет может быть лучше всего проведен методом конденсации, который для несколько иной цели был применен профессором Гельмертом к физическому изучению поверхности Земли [1]. Он вообразил поверхность, расположенную внутри Земли, параллельную геоиду и отстоящую от последнего на расстоянии sR, где s — сжатие, а R — средний радиус Земли, и на эту поверхность *сконденсировал* путем вертикальных перемещений все земные массы, находящиеся вне этой поверхности. Такой путь делает законным разложение потенциальной функции по отрицательным степеням радиуса-вектора, употребленное Гельмертом для применения теории Стокса к выводу теоремы Клеро и к различным другим исследованиям силы тяжести. В предшествующих главах мы не применяли такого разложения в ряд, за исключением некоторых частных случаев, в которых законность разложения была более чем очевидна; с этой точки зрения метод конденсации для нас не имеет интереса.

Однако остроумная идея Гельмерта чрезвычайно полезна для устранения указанного затруднения, происходящего от малых частей массы Земли, выдающихся над средним уровнем моря. Действительно, мы можем сконденсировать на этой нижней поверхности указанные части земной массы и употребить метод Гельмерта (мы отсылаем читателя к трактату и ряду мемуаров знаменитого геодезиста) для вычисления тех изменений, которые происходят вследствие конденсации *в потенциальной функции и в силе тяжести*. Оказывается, что первым из этих изменений можно пренебречь, а второе вообще очень мало.

---

[1] Helmert, Die mathem und physik. Theorien der höheren Geodäsie, II Bd., Leipzig 1884.

Глава девятая

О РАВНОМЕРНОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВООБЩЕ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ НЕТВЕРДОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

54. Возможность при некоторых условиях равномерного вращательного движения совершенной жидкости. Пусть ξ, η, ζ — координаты для некоторого определенного момента ($t=t_0$) данного элемента массы $k\cdot d\tau$ жидкости; x, y, z — координаты того же элемента для текущего момента t; и те и другие координаты относятся к одной системе осей, либо неподвижной, или имеющей равномерное поступательное движение.

Обозначим, далее, через U силовую функцию, которая является функцией от x, y, z, или же, выражая эти последние через время и начальные координаты, — функцией от ξ, η, ζ, t; пусть еще p — давление в момент t в точке, занятой элементом $k\cdot d\tau$. Гидродинамические уравнения Лагранжа будут следующими:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \xi}&=\frac{\partial U}{\partial \xi}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \xi},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}&=\frac{\partial U}{\partial \eta}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \eta},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \zeta}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \zeta}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta}&=\frac{\partial U}{\partial \zeta}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \zeta}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Допустим, что частичка жидкости подвержена одним лишь силам взаимного тяготения. Тогда, обозначая через f постоянную ньютонианского тяготения и через V потенциальную функцию в момент t, получим $U=fV$. Легко убедиться, что в этом случае, за исключением некоторых условий, возможно равномерное твердое[1] вращательное движение около постоянной оси, например оси z. Действительно, положив:

$$x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t,\quad y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t,\quad z=\zeta\quad(\omega=\text{const})\tag{2}$$

уравнения (1) дают:

$$\begin{aligned}
-\omega^2\xi&=f\frac{\partial V}{\partial \xi}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \xi},\\
-\omega^2\eta&=f\frac{\partial V}{\partial \eta}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \eta},\\
0&=f\frac{\partial V}{\partial \zeta}-\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial \zeta}.
\end{aligned}\tag{3}$$

[1] Под „твердым" движением жидкости здесь подразумевается такое движение, при котором отдельные частицы жидкости не меняют взаимных расстояний, т. е. вся масса жидкости движется, как твердое тело.

Следует отметить, что в этом случае, как и всегда, когда говорится о твердом движении, V остается постоянным, при изменении t, для каждого данного элемента массы, т. е. V, выраженное в функции начальных координат ξ, η, ζ, не зависит от t. Таким образом V должно рассматриваться как заданная функция ξ, η, ζ, когда дана конфигурация жидкости. Возможность указанного движения зависит, однако, от возможности определить функцию p от ξ, η, ζ, t, которая удовлетворяла бы (3), была положительной во всех точках жидкости и, кроме того (в предположении, что жидкость находится в пустоте или подвержена постоянному давлению), была постоянной на свободной поверхности жидкости.

a) *Однородная несжимаемая жидкость.* Предположим k абсолютно постоянным. Уравнения (3) требуют такого необходимого и достаточного условия:

$$p = k\left[fV + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2+\eta^2)\right] + \varphi(t), \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция времени. Отсюда мы прежде всего заключаем, что (так как внешнее давление всюду постоянно и независимо от ξ, η, ζ) бином

$$fV + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2+\eta^2) = \text{const}, \tag{5}$$

для точек свободной поверхности; последняя должна быть также *уровенной поверхностью* в смысле, данном этому выражению в предшествующих главах. Согласно замечанию, сделанному относительно V, первый член правой части (4) независим от t. Следовательно, если внешнее давление равно нулю или не меняется с течением времени, то $\varphi(t)$ должно обратиться в постоянную.

b) *Неоднородная несжимаемая жидкость.* Плотность данного элемента остается постоянной относительно времени, но вообще изменяется от одного элемента к другому, или же k зависит лишь от ξ, η, ζ. Этот случай обнимает также и смесь несжимаемых жидкостей различной природы[1]. Взяв производные от первого выражения (3) по η и от второго по ξ, получим:

$$0 = f\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial k}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi} - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\,\partial\eta},$$

$$0 = f\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\,\partial\xi} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial k}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta} - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial\eta\,\partial\xi},$$

и вычитая:

$$\frac{\partial k}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi} - \frac{\partial k}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta} = 0.$$

---

[1] Вообще говоря, следовало бы рассмотреть также *однородные сжимаемые* жидкости, для которых k зависит не от ξ, η, ζ, но от давления p, а также *неоднородные сжимаемые* жидкости, для которых k зависит как от ξ, η, ζ, так и от p. Однако в настоящем случае твердого движения плотность данного элемента массы не меняется со временем, а посему k либо абсолютно постоянно, либо зависит лишь только от ξ, η, ζ.

Это уравнение вместе с двумя аналогичными, полученными путем круговой подстановки ξ, η, ζ, показывает, что две переменные k и p являются одна функцией другой. Положим тогда:

$$\int \frac{dp}{k} = P.$$

Последние члены в правых частях (3) можно тогда написать в виде:

$$-\frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad -\frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad -\frac{\partial P}{\partial \zeta},$$

и (3) дает:

$$P = fV + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \varphi(t). \tag{4'}$$

Эта формула подтверждает заключение, выраженное формулой (5), относительно внешней поверхности жидкости. Она говорит вдобавок, что если жидкость не постоянной плотности (или вследствие разнородности входящих в нее частей, или вследствие деформации под влиянием давления, или вследствие той и другой причины вместе), поверхности равной плотности должны быть в то же время и *поверхностями равного давления и поверхностями уровня*. В отношении $\varphi(t)$ остается в силе замечание, ранее сделанное.

Это рассуждение предполагает, что плотность меняется непрерывно и допускает получение первой производной по координатам. Предположим, наоборот, что масса состоит из отдельных однородных слоев конечной толщины; и в этом случае *поверхности раздела слоев различной плотности должны быть уровенными поверхностями*. Действительно, пусть A есть точка поверхности Σ, которая разделяет два слоя с плотностями соответственно k_1 и k_2. Давление в точке A в зависимости от того, будем ли мы ее считать принадлежащей к первому или второму из двух слоев, будет иметь в силу (4) одно из двух выражений:

$$k_1\left[fV + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right] + c_1,$$

$$k_2\left[fV + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right] + c_2,$$

где c_1 и c_2 или постоянны, или функции времени. Приравнивая эти два выражения, мы видим, что двучлен в прямых скобках имеет для данного момента одно и то же значение для всей поверхности Σ, что и доказывает наше положение.

55. Возможны ли другие виды твердого движения жидкости? Вообразим систему осей (O, ξ, η, ζ), неизменно связанную с жидкостью, находящейся в твердом движении. Тогда первые члены в уравнениях (1) Лагранжа будут не чем иным, как составляющими A_ξ, A_η, A_ζ абсолютного ускорения частички (ξ, η, ζ) относительно подвижных осей, закрепленных в своем положении в момент t. Таким образом, если обозначим через π, χ, ρ

составляющие угловой скорости относительно подвижных осей в момент t, то согласно известной формуле механики будем иметь [1]:

$$
\begin{aligned}
A_\xi &= -\xi(\rho^2+\chi^2)+\eta\left(\pi\chi-\frac{d\rho}{dt}\right)+\zeta\left(\pi\rho+\frac{d\chi}{dt}\right),\\
A_\eta &= \xi\left(\chi\pi+\frac{d\rho}{dt}\right)-\eta(\pi^2+\rho^2)+\zeta\left(\chi\rho-\frac{d\pi}{dt}\right),\\
A_\zeta &= \xi\left(\pi\rho-\frac{d\chi}{dt}\right)+\eta\left(\chi\rho+\frac{d\pi}{dt}\right)-\zeta(\chi^2+\pi^2).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Приравнивая эти компоненты правым частям (1) и беря производные от первого выражения по η, а от второго по ξ, получим в предположении, что k постоянно:

$$\frac{\partial A_\xi}{\partial\eta}=\frac{\partial A_\eta}{\partial\xi},$$

или же согласно (6) $\frac{d\rho}{dt}=0$. Подобным же образом $\frac{d\pi}{dt}=0$, $\frac{d\chi}{dt}=0$. Три компонента вращения постоянны: следовательно, вращение совершается вокруг неизменной оси и с постоянной скоростью.

Если k не постоянно, то только что указанным путем получим:

$$\frac{\partial A_\xi}{\partial\eta}-\frac{\partial A_\eta}{\partial\xi}=-2\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}-\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}\tag{7}$$

и два других выражения через круговую подстановку букв $\pi\chi\rho$ и $\xi\eta\zeta$.

Количества

$$-2\frac{d\rho}{dt},\quad -2\frac{d\pi}{dt},\quad -2\frac{d\chi}{dt}$$

не зависят от ξ, η, ζ. Обозначив их через P, Q, R, получим из (7):

$$P\frac{\partial p}{\partial\xi}+Q\frac{\partial p}{\partial\eta}+R\frac{\partial p}{\partial\zeta}=0,$$

---

[1] Обозначая через $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ направляющие косинусы осей ξ, η, ζ по отношению к осям x, y, z, имеем для компонентов абсолютного ускорения по отношению к неподвижным осям:

$$A_x=\xi\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+\eta\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\alpha_3}{dt^2}$$

и аналогично для A_y, A_z, откуда

$$A_\xi=\xi\sum\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+\eta\sum\alpha_1\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}+\zeta\sum\alpha_1\frac{d^2\alpha_3}{dt^2},\tag{a}$$

где

$$\sum\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}=\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+\beta_1\frac{d^2\beta_1}{dt^2}+\gamma_1\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}\ \text{и т. д.}$$

Известная формула Пуассона, с другой стороны, дает:

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=\rho\alpha_2-\chi\alpha_3,\qquad \frac{d\alpha_2}{dt}=\pi\alpha_3-\rho\alpha_1,\qquad \frac{d\alpha_3}{dt}=\chi\alpha_1-\pi\alpha_2$$

и аналогично для β и γ. Беря отсюда производные и вставляя в (а), получим первую формулу (6). Аналогично получаются и остальные.

где P, Q, R постоянны относительно ξ, η, ζ. Это уравнение выражает, что если P, Q, R не все три равны нулю, то поверхности равного давления, а следовательно, и свободная поверхность жидкости являются поверхностями цилиндрическими. Отбрасывая эту гипотезу, несовместимую с предположением, что жидкость занимает ограниченное пространство, заключаем, что единственное установившееся движение, возможное для жидкости, подверженной только силе взаимного тяготения и одинаковому давлению на поверхности, есть равномерное вращение.

56. Ось вращения есть главная ось инерции и проходит через центр массы тела. Назовем через p давление (постоянное или нуль для данного момента) на внешней поверхности S жидкости. Составляющая по оси x равнодействующей поверхностного давления будет:

$$p_0 \int\limits_S \cos(nx)\, dS = p_0 \int\limits_S \frac{dx}{dn}\, dS,$$

где через n обозначена внутренняя нормаль поверхности S. По теореме Гаусса последний интеграл равен нулю. Это справедливо и для компонентов по двум другим осям координат.

Рассмотрим еще компонент по оси z момента внешнего давления. Он будет:

$$p_0 \int\limits_S (x \cos ny - y \cos nx)\, dS = p_0 \int\limits_S x \frac{dy}{dn}\, dS - p_0 \int\limits_S y \frac{dx}{dn}\, dS.$$

По теореме Гаусса два последние интеграла соответственно равны

$$\int\limits_\tau x \Delta_2 y\, d\tau \quad \text{и} \quad \int\limits_\tau y \Delta_2 x\, d\tau,$$

т. е. они также нули. Поэтому *равнодействующая, а также момент поверхностного давления равны нулю.*

Поскольку, согласно результату, полученному в предшествующем параграфе, вращение совершается около неизменной оси, причем равнодействующая и момент внешней силы равны нулю, отсюда на основании общих принципов механики следует, что ось вращения проходит через центр массы и совпадает с главной осью инерции. Это заключение нетрудно вывести и непосредственно из уравнений (3).

57. Теорема сохранения живой силы относительного движения тела по отношению к равномерно вращающимся осям координат. Случай устойчивого относительного равновесия. Обозначим через x, y, z неподвижные оси, а через ξ, η, ζ — подвижные. На основании теоремы Кориолиса для ускорения в относительном движении, можно сформулировать теорему сохранения живой силы следующим образом: приращение живой силы T' тела в относительном движении по отношению к осям ξ, η, ζ в данный промежуток времени равно работе действующей силы в относительном движении за тот же промежуток времени, уменьшенной на соответствующую работу силы, вызывающей ускорение увлечения. (Заметим, что работа центробежного ускорения в относительном движении равна нулю.)

В случае, когда движение осей ξ, η, ζ есть равномерное вращение около оси ζ, элементарная работа силы увлечения равна:

$$-\omega^2\int\limits_\tau(\xi\,d\xi+\eta\,d\eta)k\,d\tau=-d\left(\frac{\omega^2}{2}I\right),$$

где I — момент инерции тела относительно оси z.

Допустим, что *существует такая функция* Ω' *одних лишь относительных координат* ξ, η, ζ, приращение которой в некоторый интервал времени выражает работу действующей силы в относительном движении тела по отношению к подвижным осям координат.

Тогда получим:

$$T'-\Omega'-\frac{\omega^2}{2}I=\text{const.} \tag{8}$$

Таким же рассуждением, которое служит для доказательства теоремы Дирихле об устойчивости абсолютного равновесия, выведем из (8), что равновесие тела относительно рассматриваемых подвижных осей будет устойчивым для всех тех перемещений, которые соответствуют максимуму функции

$$\Omega'+\frac{\omega^2}{2}I.$$

Функция Ω' существует в случае, если единственной движущей силой является взаимное притяжение частичек и жидкость рассматривается как несжимаемая, когда плотность частички независима от времени. Действительно, взаимные расстояния, от которых только и зависит притяжение в этом случае, выразятся посредством одних координат (все равно и в подвижных и в неподвижных осях). Обозначим через V потенциальную функцию тела в момент t, выраженную через относительные координаты.

Элементарная работа, выраженная через приращения координат, будет:

$$d\Omega'=f\int\limits_\tau\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial V}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial V}{\partial\zeta}d\zeta\right)k\,d\tau. \tag{9}$$

Функцию Ω' можно тогда выразить как

$$\Omega'=\frac{1}{2}f\int\limits_\tau Vk\,d\tau \tag{10}$$

Действительно, положим

$$r=\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}.$$

Обозначая через ξ', η', ζ' координаты произвольного элемента $k'd\tau'$ массы, можем написать:

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\int\limits_\tau\frac{k'd\tau'}{r}.$$

Вставляя в (10), получим:

$$\Omega' = \frac{1}{2} f \int\limits_\tau \int\limits_\tau \frac{kk'\,d\tau\,d\tau'}{r},$$

откуда

$$d\Omega' = -\frac{1}{2} f \int\limits_\tau \int\limits_\tau \frac{kk'}{r^3} [(\xi - \xi')\,d\xi + (\eta - \eta')\,d\eta + (\zeta - \zeta')\,d\zeta]\,d\tau\,d\tau' +$$

$$+ \frac{1}{2} f \int\limits_\tau \int\limits_\tau \frac{kk'}{r^3} [(\xi - \xi')\,d\xi' + (\eta - \eta')\,d\eta' + (\zeta - \zeta')\,d\zeta']\,d\tau\,d\tau'.$$

В последнем интеграле можно переставить буквы ξ, η, ζ, k, $d\tau$ на соответствующие со значками. Получим на основании этого:

$$d\Omega' = -f \int\limits_\tau \int\limits_\tau \frac{kk'}{r^3} [(\xi - \xi')\,d\xi + (\eta - \eta')\,d\eta + (\zeta - \zeta')\,d\zeta]\,d\tau\,d\tau',$$

где правая часть совпадает, очевидно, с правой частью (9).

Таким образом относительное равновесие будет устойчивым для тех перемещений, которые обращают в максимум функцию

$$f \int V k\,d\tau + \omega^2 I.$$

58. Простейшие случаи нетвердого движения. Допустим, что каждая частичка жидкости обращается вокруг оси z и что угловая скорость ω этого движения вообще меняется от одной частички к другой. Предположим, что ω есть функция начальных координат ξ, η, ζ, но не времени. Также и плотность k пусть будет вообще функцией от ξ, η, ζ и независима от времени. Соотношения между начальными координатами и временем для данного элемента массы даются теми же уравнениями (2) § 54. В данном случае, по отношению к рассматриваемому движению, нужно принять во внимание уравнение для *сохранения массы*, которое будет (так как плотность k независима от времени):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 1 \qquad (11)$$

Взяв производные от (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos\omega t - ty\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, && \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin\omega t + tx\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, && \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\sin\omega t - ty\frac{\partial\omega}{\partial\eta}, && \frac{\partial y}{\partial \eta} = \cos\omega t + tx\frac{\partial\omega}{\partial\eta}, && \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \zeta} = -ty\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}, && \frac{\partial y}{\partial \zeta} = tx\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}, && \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Из (11) заключаем, что

$$\xi\frac{\partial\omega}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = 0. \qquad (13)$$

Обозначим через r расстояние точки ξ, η, ζ от оси z, через w — угол, образуемый плоскостью, проведенной через ось z и данную точку, с плоскостью zx, т. е. положим

$$\xi = r\cos w \qquad \eta = r\sin w,$$

и введем координаты r, w, ζ (цилиндрические координаты) вместо декартовых для определения начального положения некоторой частички. Получим, если φ есть произвольная функция от ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{\xi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} &= -\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \end{aligned} \tag{14}$$

Итак, (13) можно написать в виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial w} = 0, \tag{15}$$

т. е. *угловая скорость должна быть одинаковой для всех частичек, расположенных на окружности, имеющей осью ось z.* Из (2) имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

так что уравнения Лагранжа (§ 54), принимая во внимание (12), принимают вид:

$$\begin{aligned} -\omega^2\xi &= f\frac{\partial V}{\partial\xi} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\xi}, \\ -\omega^2\eta &= f\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\eta}, \\ 0 &= f\frac{\partial V}{\partial\zeta} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

в точности как и для твердого движения. После очевидных действий, принимая во внимание (14), отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 r &= f\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= f\frac{\partial V}{\partial w} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial w}, \\ 0 &= f\frac{\partial V}{\partial\zeta} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Взяв производную от первого уравнения по w [принимая во внимание (15)] и от второго по r и вычитая, затем от второго по ζ и от третьего по w и тоже вычитая, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial k}{\partial w} - \frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial k}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial\zeta}\frac{\partial k}{\partial w} - \frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial k}{\partial\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Это требует, чтобы было

$$\frac{\partial p}{\partial r} : \frac{\partial p}{\partial w} : \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial k}{\partial r} : \frac{\partial k}{\partial w} : \frac{\partial k}{\partial \zeta}, \tag{A}$$

если только не выполняются два соотношения:

$$\frac{\partial p}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial k}{\partial w} = 0. \tag{B}$$

Рассмотрим отдельно эти два случая.

В случае (A) p должно быть функцией от k, и, положив $P = \int \frac{dp}{k}$, из (16) заключим, что разность

$$P - fV$$

является функцией одного лишь r. Такова должна быть и ω^2 на основании первой формулы (16). Отсюда заключаем, что

$$P - fV = \int \omega^2 r \, dr + c,$$

где постоянная интеграции c, вообще, может содержать произвольную функцию времени. Для равновесия, при единственной гипотезе, что планета погружена в атмосферу нулевого или равномерного давления, необходимо, чтобы

$$fV + \int \omega^2 r \, dr$$

было постоянным на поверхности жидкости. Нужно заметить, что в этом случае V, вообще, зависит не только от начальных координат, но и от времени, и поэтому поверхности равного давления и, в частности, внешняя поверхность, вообще, будут деформироваться со временем.

Обратимся к случаю (B). Так как плотность не зависит от w, то распределение массы симметрично вокруг оси z; значит, поверхности равной плотности и внешняя поверхность будут поверхностями вращения около оси z. Следовательно, и потенциальная функция V независима от w (и неизменна со временем).

Второе выражение (16) подтверждается непосредственно. Исключая k из первого и третьего уравнения (16), получим:

$$r \frac{\partial}{\partial \zeta}(k\omega^2) = f\left(\frac{\partial k}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial k}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

а интегрируя по ζ по частям:

$$k\omega^2 = \frac{f}{r}\int\left(\frac{\partial k}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial k}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial r}\right) d\zeta + \Phi(r), \tag{17}$$

где Φ — произвольная функция одного лишь r. Если предположим заданной плотность k, а следовательно, и потенциальную функцию V, в виде функций от r и ζ, то во второй части (17) останется лишь неизвестной функция Φ, которую постараемся определить из условия, что давление остается постоянным на внешней поверхности. Пусть

$$F(r, \zeta) = 0 \tag{18}$$

есть уравнение меридианной кривой этой поверхности. Условие того, чтобы p было постоянно на этой поверхности, выражается уравнением:

$$\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \zeta}-\frac{\partial p}{\partial \zeta}\frac{\partial F}{\partial r}=0,$$

или же на основании первой и третьей формулы (16):

$$\left(f\frac{\partial V}{\partial r}+\omega^2 r\right)\frac{\partial F}{\partial \zeta}-f\frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial F}{\partial r}=0, \tag{19}$$

что должно удовлетворяться теми значениями r и ζ, которые удовлетворяют и (18). Если ввести в (19) выражение (17) для ω^2, мы получим уравнение вида:

$$\Omega[\zeta, r, \Phi(r)]=0,$$

а исключая отсюда и из (18) ζ, получим, вообще, $\Phi(r)$ как функцию от r и, таким образом, определим угловую скорость каждой частицы. Решение не имеет интереса в случае, если потенциальная функция V постоянна на поверхности планеты, так как тогда (19) дает $\omega=0$.

Другие случаи нетвердого движения рассмотрим в главе XI.

Глава десятая

ОДНОРОДНАЯ ЖИДКАЯ ПЛАНЕТА ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ. ЭЛЛИПСОИДЫ МАКЛОРЕНА И ЯКОБИ. СЛУЧАЙ ФИГУРЫ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ОТ СФЕРЫ

59. Эллипсоид вращения. Пусть внешняя поверхность жидкой однородной планеты будет эллипсоидом вращения $(a,\ a,\ b)$. Положив

$$i=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b},$$

$$A=\frac{1}{b^3i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} i-\frac{i}{1+i^2}\right),\qquad B=\frac{2}{b^3i^3}(i-\operatorname{arc\,tg} i),\tag{1}$$

потенциальная функция тела постоянной плотности k на точку $\xi,\ \eta,\ \zeta$ поверхности будет [1]:

$$V_s=\pi a^2bk\left[\frac{2}{bi}\operatorname{arc\,tg} i-A(\xi^2+\eta^2)-B\zeta^2\right].\tag{2}$$

Для относительного равновесия на поверхности должно быть:

$$fV_s+\frac{\omega^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=\text{const}.$$

Принимая во внимание (2) и вспомнная, что на поверхности

$$\zeta^2=b^2\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}\right)$$

указанное условие дает:

$$\pi a^2bk\left(A-\frac{b^2}{a^2}B\right)=\frac{\omega^2}{2f},$$

или также на основании (1) и приннмая во внимание, что $\frac{a^2}{b^2}=1+i^2$, получим:

$$\frac{\pi k}{i^3}[(3+i^2)\operatorname{arc\,tg} i-3i]=\frac{\omega^2}{2f},$$

откуда, наконец,

$$\frac{\omega^2}{2\pi fk}=\frac{3+i^2}{i^3}\operatorname{arc\,tg} i-\frac{3}{i^2}.\tag{3}$$

[Этот результат можно вывести и из формул § 20, замечая, что найденное там выражение для V должно в настоящем случае прнвестись к потенциальной функции однородного эллипсоида вращения, для чего постоянная Q, которая фигурирует в тех формулах, должна быть равной πa^2bk. В последнем случае формул (4) § 20 прнводится к нашей формуле (3).]

Если дана форма эллипсоида, а следовательно, величина i, то (3) определяет отношение квадрата угловой скорости и плотности. Предположим,

---

[1] См. Приложения, § 13.

наоборот, известными ω и k и спросим себя, нельзя ли определить i при условии, чтобы существовало относительное равновесие.

Называя через $\psi(i)$ правую часть (3), получим, беря производную:

$$\psi'(i) = \frac{9+i^2}{i^4}\,\theta(i),$$

где

$$\theta(i) = \frac{9i+7i^3}{(1+i^2)(9+i^2)} - \operatorname{arc\,tg} i;$$

образовав еще производную, найдем:

$$\theta'(i) = \frac{8i^4(3-i^2)}{(1+i^2)^2(9+i^2)^2}.$$

Разложением в ряд получим для малых значений i:

$$\psi(i) = \frac{4}{15}i^2 + \ldots, \qquad \theta(i) = \frac{8}{135}i^5 + \ldots,$$

откуда видно, что $\psi(i)$, $\psi'(i)$, $\theta(i)$, $\theta'(i)$ обращаются в нуль при $i=0$. Выражение для $\theta'(i)$, далее, показывает, что $\theta(i)$ возрастает от $i=0$ до $i=\sqrt{3}$, а затем убывает до $i=\infty$, когда оно становится равным $-\frac{\pi}{2}$. Следовательно, оно обращается один раз в нуль внутри интервала 0, ∞. Значение i, для которого θ равно нулю, есть $i_0 = 2{,}5293$.

Отсюда следует, что и $\psi'(i)$ обращается в нуль, и притом лишь один раз, для того же самого значения i, так что $\psi(i)$ имеет один и только один максимум. Этот максимум равен:

$$\psi(i_0) = 0{,}22467\ldots$$

При $i=\infty$, $\psi(i)=0$. Если ω и k таковы, что

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} > 0{,}22467\ldots;$$

то никакое положительное значение i не удовлетворяет (6). Наоборот, если

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} < 0{,}22467\ldots,$$

то будут два значения i (одно меньше, а другое больше i_0), которые удовлетворяют (3). В первом случае не существует никакой конфигурации в форме эллипсоида вращения, которая бы была совместима с данными значениями ω и k; во втором случае их существует две, из которых одна (соответствующая значению $i > i_0$) чрезвычайно сжата. Предположим, например, что

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} = 0{,}0153;$$

Значения i, которые удовлетворяют (3), будут почти $i=0{,}25$ и $i=100$; первое решение дает отношение между осями, $a:b=1{,}03:1$, второе $a:b=100:1$.

При малых значениях левой части (3) для отыскания меньшего корня этого уравнения полезно правую часть его разложить в ряд. Имеем:

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} = \frac{4}{15}i^2 - \frac{8}{35}i^4 + \frac{4}{21}i^6 + \ldots,$$

и, обращая ряд:

$$i^2=\frac{15}{4}v+\frac{6}{7}\left(\frac{15}{4}v\right)^2+\frac{27}{49}\left(\frac{15}{4}v\right)^3+\ldots, \tag{4}$$

где v обозначает отношение $\frac{\omega^2}{2\pi fk}$.

Если здесь пренебречь четвертыми и более высокими степенями i, то сжатие $s=\frac{a-b}{a}$ равно $\frac{i^2}{2}$, и с этим приближением (4) дает:

$$s=\frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi fk}. \tag{5}$$

Масса планеты M выражается через

$$M=\frac{4}{3}\pi ka^2b=\frac{4}{3}\pi k\frac{a^3}{\sqrt{1+i^2}}.$$

Определяя отсюда πk и подставляя в (5), с тем же приближением найдем:

$$s=\frac{5}{4}\frac{\omega^2a^3}{fM}.$$

Таким образом для случая однородного эллипсоида вращения, мало отличающегося от сферы, сжатие почти равно $\frac{5}{4}$ отношения центробежной силы к экваториальной тяжести. Это соотношение было указано Ньютоном.

60. Эллипсоиды Якоби. Посмотрим, может ли и при каких условиях внешняя поверхность жидкой однородной планеты плотности k быть трехосным эллипсоидом $(a,\ b,\ c)$. Положим как и раньше

$$R_s=(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s).$$

$$K_0=\pi kabc\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{R_s}},\qquad A_0=\pi kabc\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}},$$

$$B_0=\pi kabc\int_0^\infty\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R_s}},\qquad C_0=\pi kabc\int_0^\infty\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

Потенциальная функция однородного эллипсоида плотности k имеет на поверхности и внутри выражение [1]:

$$V_s=K_0-A_0\xi^2-B_0\eta^2-C_0\zeta^2.$$

Должно быть:

$$fV_s+\frac{\omega^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=\text{const},$$

для всех значений ξ, η, ζ, которые удовлетворяют уравнению эллипсоида:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1.$$

Для этого необходимо, чтобы было:

$$a^2\left(fA_0-\frac{\omega^2}{2}\right)=b^2\left(fB_0-\frac{\omega^2}{2}\right)=c^2fC_0. \tag{6}$$

[1] См. Приложения, § 12.

Положив

$$\frac{c^2}{a^2}=u, \qquad \frac{c^2}{b^2}=t, \tag{7}$$

можем написать (6) в виде:

$$A_0-\frac{\omega^2}{2f}=uC_0, \qquad B_0-\frac{\omega^2}{2f}=tC_0,$$

откуда

$$\frac{A_0}{u}-\frac{B_0}{t}=\frac{\omega^2}{2f}\,\frac{t-u}{ut}, \qquad A_0-B_0=(u-t)\,C_0. \tag{8}$$

Полагая в интегралах, выражающих A_0, B_0, C_0, переменную $x=\frac{s}{c^2}$, можем написать их так:

$$A_0=\pi ku\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+ux)\Delta}, \qquad B_0=\pi kt\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+tx)\Delta}, \qquad C_0=\pi k\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+x)\Delta},$$

где

$$\Delta=\sqrt{(1+x)(1+ux)(1+tx)}.$$

Уравнения (8) принимают тогда вид:

$$\left.\begin{aligned}(u-t)\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+ux)(1+tx)\Delta}&=(u-t)\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+x)\Delta},\\ (u-t)\,ut\int\limits_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+ux)(1+tx)\Delta}&=(u-t)\frac{\omega^2}{2\pi fk}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Оба эти уравнения удовлетворяются при $u=t$, в каковом случае мы имеем эллипсоид вращения. Отбрасывая это решение, уже изученное в предыдущем параграфе, мы можем (9) сократить на $u-t$ и написать эти уравнения так:

$$\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{(1+ux)(1+tx)}-\frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{\Delta}=0, \tag{10}$$

$$ut\int\limits_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+ux)(1+tx)\Delta}=\frac{\omega^2}{2\pi fk}. \tag{11}$$

Уравнение (10) устанавливает соотношение между u и t, а следовательно, и между эксцентриситетами главных сечений. Уравнение (11) связывает эти эксцентриситеты с ω и k. Уравнение (10) показывает, что должно быть $u+t>1$, в противном случае мы получили бы для всякого положительного значения x:

$$(1+ux)(1+tx)>1+x,$$

и все элементы интеграла (10) стали бы отрицательными. Поэтому должно быть:

$$u<1, \qquad t<1 \qquad u+t<1, \tag{12}$$

или же c должно быть наименьшей из трех осей. Если положить

$$i_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}, \qquad i_2^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2},$$

то будет:

$$i_1^2 i_2^2 = \left(\frac{1}{u} - 1\right)\left(\frac{1}{t} - 1\right) = 1 + \frac{1 - u - t}{ut}.$$

Таким образом произведение $i_1^2 i_2^2$ должно быть больше единицы, что говорит о том, что по крайней мере одно из двух сечений (ac) и (bc) должно быть сильно сплюснутым. Поэтому все эллипсоиды, эксцентриситет которых удовлетворяет уравнению (10) (эллипсоиды Якоби), сильно отличаются от сферы.

Положим

$$F(u, t) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+ux)(1+tx)} - \frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{\Delta} = \int_0^\infty \frac{x - ux - tx - utx^2}{\Delta^3}\, dx.$$

Беря частную производную по u, найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(1+x)(1+tx)}{\Delta^5}(2 + 3x - ux - tx - utx^2)\, dx. \tag{13}$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2(1+x)}{\Delta^3}\right] = \frac{x(1+x)}{2\Delta^5}(4 + 3x + ux + tx - 2utx^2 - 3utx^3).$$

Интегрируя это от 0 до ∞, получим:

$$\int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^5}(4 + 3x + ux + tx - 2utx^2 - 3utx^3)\, dx = 0. \tag{14}$$

Помножим (13) на -4 и вычтем (14), тогда:

$$-4\frac{\partial F}{\partial u} = \int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}[3 - 3u + t + 2xt(3 - t - u) + utx^2(3 - 2t)]\, dx.$$

Эта формула, принимая во внимание (12), показывает, что $\frac{\partial F}{\partial u} < 0$, подобным же образом $\frac{\partial F}{\partial t} < 0$, другими словами, F уменьшается как при возрастании u, так и при возрастании t.

Уравнение (10) имеет вид $F(u, t) = 0$ и удовлетворяется следующими двумя парами значений u и t:

$$\begin{cases} u = 0, \\ t = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1, \\ t = 0 \end{cases}$$

Дадим t значение t_1, заключенное между нулем и единицей. Тогда для $u = 0$, $t = t_1$ будет $F(u, t) > 0$; для $u = 1$, $t = t_1$ будет $F(u, t) < 0$, и, поскольку F уменьшается при возрастании u, в соответствии со значением t, равным t_1, будет одно единственное значение u, равное u_1 (также заключенное между нулем и единицей), при котором обращается в нуль F. При возрастании t_1 F стремится убывать, поэтому для того, чтобы держать его иа нуле, нужно будет еще уменьшать u_i.

Отсюда заключаем, что существует бесконечное множество значений u и t, находящихся в интервале (0, 1), которые удовлетворяют уравнению (10). В то время как u возрастает от нуля до единицы, соответствующее значение t убывает от единицы до нуля. Существует общее значение τ для u и t, при котором $F(\tau,\tau)=0$.

Это общее значение $\tau=0{,}3396\ldots$[1].

Следовательно, существует *простая бесконечность* трехосных эллипсоидов (и среди них один — вращения), которые могут быть поверхностью жидкой однородной вращающейся планеты.

61. Продолжение: эллипсоиды Якоби. Соотношени: между эксцентриситетом, угловой скоростью и плотностью. Пусть задана определенная величина отношения $\omega^2:2\pi fk$. Уравнение (11) устанавливает зависимость между u и t и этим отиошением. Исследуем, существует ли для данного значения этого отношения эллипсоид Якоби, удовлетворяющий (11). Следующий метод принадлежит Радо (Radau).

Обозначим через F и Φ левые части (10) и (11), и положим

$$u+t=p, \qquad ut=q.$$

Будем иметь:

$$F=\int\limits_0^\infty \frac{x-px-qx^2}{(1+px+qx^2)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,dx,$$

$$\Phi=\int\limits_0^\infty \frac{qx\,dx}{(1+px+dx^2)^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Беря от F производную по p, получим:

$$-4\frac{\partial F}{\partial p}=\int\limits_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^3}(4+6x-2px-2qx^2)\,dx.$$

Вычтем отсюда тождество (14), куда введем p и q:

$$\frac{\partial F}{\partial p}=-\frac{3}{4}\int\limits_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(1-p+qx^2)\,dx.$$

Так как $p<1$, интеграл положителен, и отсюда:

$$\frac{\partial F}{\partial p}<0.$$

---

[1] Отыскание этого численного значения делается так. Для $u=t=\tau$ интеграл, выражающий $F(u,t)$, может быть выражен в конечном виде, а именно:

$$F(\tau,\tau)=-\frac{5}{2(1-\tau)}\quad\frac{3}{4(1-\tau)^2}+\frac{3+8\tau-8\tau^2}{4\sqrt{\tau}(1-\tau)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}.$$

Нетрудно пробами найти значение τ, обращающее это выражение в нуль.

Получим, далее:

$$\frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}(2+3x-px-qx^2)\,dx,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}=-\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{qx^2\,dx}{(1+px+qx^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x}}<0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x+2px^2-qx^3}{(1+px+qx^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x}}\,dx.$$

Умножая числитель и знаменатель на $(1+x)^2$, можем это написать так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^5}(2+2x+2px+2px^2-qx^2-qx^3)\,dx,$$

или, принимая во внимание тождество (14):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q}=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x}{\Delta^5}(1+3p+4px+qx^2)\,dx>0.$$

Наконец, положим:

$$s=q=ut, \qquad r=p^2-4q=(u-t)^2,$$

откуда

$$q=s, \qquad p^2=r+4s,$$

и примем r и s за неизвестные.

Получим:

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{2p}\frac{\partial F}{\partial p}<0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{2}{p}\frac{\partial F}{\partial p}=-\frac{3-p}{2p}\int_0^\infty \frac{x^2}{\Delta^3}\,dx<0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}=\frac{1}{2p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}<0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s}=\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{2}{p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}.$$

Вставляя найденные выражения для

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p},$$

можем последнее выражение написать так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\frac{3}{4}(p^2-4q)\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)^2}{\Delta^5}\,dx+\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^2}{\Delta^3}\,dx.$$

Здесь

$$p^2-4q=(u-t)^2>0,$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} > 0.$$

Наши уравнения (10) и (11) могут быть написаны так:

$$F = 0, \tag{10}$$

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2\pi f k}. \tag{11}$$

Принимая за неизвестные r и s, заметим, что согласно рассуждению, сделанному в прошлом параграфе, (10) удовлетворяется значениями

$$u = 1, \quad t = 0 \quad \text{и} \quad u = \tau, \quad t = \tau,$$

или, что то же самое, значениями

$$r = 1, \quad s = 0 \quad \text{и} \quad r = 0, \quad s = \tau^2.$$

При возрастании r от нуля до единицы F уменьшается; для того чтобы держать F на нуле, необходимо уменьшать s; поэтому будет одно и только одно значение s, заключенное между τ^2 и 0, которое соответствует заданному значению r между нулем и единицей.

Что касается Φ, то оно равно нулю при $s = 0$, $r = 1$[1]. Пусть s возрастает от нуля до τ^2. Для того чтобы удовлетворялось (10), r должно уменьшаться, и тогда, будучи

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} > 0,$$

Φ будет непрерывно возрастать и достигнет максимума при $s = \tau^2$ или при

$$u = t = \tau.$$

Этот максимум таков:

$$\Phi_{\max} = 0{,}18709\ldots$$

Поэтому, если $\omega^2 : 2\pi f k$ заключается между 0 и 0,18709..., будет существовать одна и только одна система значений s и r, удовлетворяющая (10) и (11). Соответствующие значения u и t будут корнями уравнения второй степени:

$$x^2 - x\sqrt{r + 4s} + s = 0.$$

[1] Положить $r = 1$, $s = 0$ равносильно $u = 0$, $t = 1$, когда $\Phi(u, t)$ становится неопределенной. Для раскрытия неопределенности начнем с того, что положим $t = 1$. Получим:

$$\Phi(u, 1) = u \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1 + ux)^{\frac{3}{2}}(1 + x)^2}.$$

Интегрирование легко выполняется при помощи подстановки

$$y = \sqrt{\frac{1 - u}{1 + x}}.$$

Тогда имеем:

$$\Phi(u, 1) = -\frac{3u}{(1 - u)^2} + \frac{2u + u^2}{(1 - u)^{\frac{5}{2}}}\left[\log\left(1 + \sqrt{1 - u}\right) - \frac{1}{2}\log u\right],$$

и это выражение стремится к нулю, обращаясь в нуль вместе с u.

Если

$$\omega^2 : 2\pi fk = 0{,}18709\ldots,$$

то мы будем иметь эллипсоид вращения. Если означенное отношение будет больше 0,18709..., трехосный эллипсоид не может быть фигурой равновесия вращающейся жидкости.

62. Случай, когда вместо угловой скорости дано количество вращения. Твердое вращательное движение жидкой планеты можно с большой долей вероятия рассматривать как переход к постоянному режиму предшествующей стадии нетвердого движения. Если при этом предположении пренебречь эффектом внутреннего трения, то должно оставаться постоянным во всех пройденных фазах количество вращения, или момент вращения, $\mathfrak{M}$. Посмотрим, каковы будут заключения относительно возможной формы эллипсоидальной поверхности равновесия в случае, если заранее задана не угловая скорость, а момент $\mathfrak{M}$.

а) *Случай эллипсоида вращения.* Момент инерции эллипсоида (a, a, b) относительно оси b равен:

$$I = M\,\frac{2a^2}{5} = \frac{2}{5}\,Mb^2(1+i^2),$$

где M — его масса. Имеем для

$$\mathfrak{M} = I\omega, \quad M = \frac{4}{3}\,\pi k b^3\,(1+i^2).$$

Исключая b из выражений для $\mathfrak{M}$, M, определяем ω^2 и, деля его на $2\pi fk$, получим после простых приведений:

$$\frac{\omega^2}{2\pi fk} = \frac{25}{6}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{fM^3}\left(\frac{4\pi k}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}(1+i^2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Сравнивая это с (3), найдем:

$$\frac{25}{6}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{fM^3}\left(\frac{4\pi k}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} = (i+i^2)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{3+i^2}{i^3}\operatorname{arc\,tg} i - \frac{3}{i^2}\right]. \tag{15}$$

Производная по i от правой части может быть написана так:

$$\frac{1}{3}(1+i^2)^{-\frac{1}{3}}\left[\operatorname{arc\,tg} i + 9\,\frac{2i^2+3}{i^4}\left(\frac{i^3+3i}{2i^2+3} - \operatorname{arc\,tg} i\right)\right]. \tag{16}$$

Выражение

$$\frac{i^3+3i}{2i^2+3} - \operatorname{arc\,tg} i$$

обращается в нуль при $i=0$, а его производная

$$\frac{2i^6+i^4}{(2i^2+3)^2(1+i^2)}$$

всегда положительна. Поэтому и указанное выражение положительно. Отсюда и (16) всегда положительно, а правая часть (15), обращающаяся в нуль при $i=0$, беспредельно возрастает при увеличении i. Для бесконечно больших значений i правая часть обращается в бесконечность. Следовательно, каковы бы ни были заданные значения $\mathfrak{M}$, M и k, всегда существует один и только один эллипсоид вращения, который может быть фигурой относительного равновесия жидкости.

b) *Случай трехосного эллипсоида* (a, b, c).

В этом случае

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{5}\,\omega M\,(a^2+b^2)=\frac{1}{5}\,\omega Mc^2\left(\frac{u+t}{ut}\right),\quad M=\frac{4}{3}\,\pi k\,\frac{c^2}{\sqrt{ut}}.$$

Исключая отсюда c и определяя ω^2, получим:

$$\omega^2=\frac{25\mathfrak{M}^2}{M^2}\left(\frac{4\pi k}{3M}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{(ut)^{\frac{4}{3}}}{(u+t)^2}.$$

Разделим это на $2\pi fk$ и положим:

$$H=\frac{50\mathfrak{M}^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi k}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

Уравнение (11) принимает вид:

$$H=\frac{(u+t)^2}{(ut)^{\frac{4}{3}}}\,\Phi=\frac{(u+t)^2}{(ut)^{\frac{1}{3}}}\int\limits_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+ux)(1+tx)\Delta}, \tag{18}$$

в то время как (10) остается без изменения.

Методом, аналогичным примененному в § 61, принимая за неизвестные величины $r=(u-t)^2$, $s=ut$, докажем, что

$$\frac{\partial H}{\partial r}>0,\quad \frac{\partial H}{\partial s}<0,$$

так что H, которое бесконечно велико при $r=1$, $s=0$ (т. е. и при $u=1$, $t=0$), уменьшается при убывании r и возрастании s вплоть до $r=0$, $s=\tau^2$ (или до $u=t=\tau$).

Наименьшее значение H имеем, следовательно, при $r=0$, $s=\tau^2$; оно равно $H_{\min}=0{,}3643\ldots$ Поэтому, если величина, определяемая формулой (18), меньше этого численного значения, никакой трехосный эллипсоид не может быть фигурой относительного равновесия. Наоборот, если $H>0{,}3643$, то существует один и только один эллипсоид Якоби, обладающий этим свойством.

Заключение. Если дана угловая скорость ω, то в случае

$$\frac{\omega^2}{2\pi fk}>0{,}22467\ldots$$

эллипсоид не может быть фигурой равновесия. В случае

$$0{,}22467>\frac{\omega^2}{2\pi fk}>0{,}18709$$

существуют два эллипсоида вращения и ни одного трехосного. В случае

$$\frac{\omega^2}{2\pi fk}<0{,}18709$$

существуют два эллипсоида вращения и один трехосный.

Если дан момент вращения и количество H, определяемое (17), меньше 0,3643..., существует единственный эллипсоид вращения, могущий быть фигурой относительного равновесия. Если $H > 0{,}3643\ldots$, существует один эллипсоид вращения и один трехосный эллипсоид.

63. Вращающаяся однородная жидкость, внешняя поверхность которой мало отличается от сферы, а угловая скорость вращения мала. Лежандр доказал, что при условии, чтобы внешняя поверхность жидкой однородной вращающейся планеты мало отличалась от сферы и угловая скорость вращения была мала, поверхность должна быть сжатым эллипсоидом вращения. Обозначая через

$$R = a(1 + \alpha t), \tag{19}$$

где t — конечная функция углов θ и υ, а α — малая постоянная, уравнение внешней поверхности в полярных координатах (R, θ, υ), указанные условия истолковываем в том смысле, что можно пренебрегать величинами порядка α^2, $\omega^2\alpha$ и более высокими их степенями. Примем, что начало координат находится в центре массы.

Положив

$$\frac{\omega^2}{2fk} = \Omega$$

и обозначив через ρ', θ', υ' координаты некоторого элемента массы, через

$$d\Sigma' = \sin\theta'\, d\theta'\, d\upsilon'$$

— угловой элемент пространства, должно быть для каждой точки поверхности (принимая для простоты плотность равной единице):

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_0^{R'} \frac{\rho'^2}{r}\, d\rho'\, d\Sigma' + \Omega R^2 \sin^2\theta = C \quad (C = \text{const}), \tag{20}$$

где мы принимаем, что ось вращения совпадает с осью полярных координат. Здесь через R' обозначено значение, которое принимает R, если вместо θ и υ положить θ', υ'. Наконец, r есть расстояние точки $P(R, \theta, \upsilon)$ поверхности от текущего элемента массы с координатами ρ', θ', υ'. Пусть γ — угол между направлениями (θ, υ) и (θ', υ'), тогда

$$r = \sqrt{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos\gamma}. \tag{21}$$

Интеграл в (20) может быть написан так:

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_0^{a} \frac{\rho'^2}{r}\, d\rho'\, d\Sigma' + \int\limits_{4\pi}\int\limits_a^{R'} \frac{\rho'^2}{r}\, d\rho'\, d\Sigma' = A + B,$$

где A выражает потенциальную функцию однородного сферического тела плотности s и радиуса a на точку P, находящуюся на расстоянии R от центра. И так как подходящим выбором a мы можем точку P сделать внешней (т. е. принять $R > a$), то будет:

$$A = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{R}.$$

Что касается B, то оно выражает потенциальную функцию на точку P слоя плотности s и переменной толщины $a\alpha t$, заключенного между сферой радиуса a и поверхностью планеты. Положив

$$\rho' = a(1+\alpha\tau), \quad R' = a(1+\alpha t'), \tag{22}$$

получим:

$$\int_a^{R'} \frac{\rho'^2}{r}\,d\rho' = \alpha a^3 \int_0^{t'} (1+\alpha\tau)^2 \frac{d\tau}{r}. \tag{23}$$

Вводя в (20) выражения (19) и (22) для R и ρ', увидим, что

$$r = 2a\sin\frac{\gamma}{2} + \text{члены порядка } \alpha,$$

откуда с нашей степенью приближения

$$B = \alpha a^2 \int_{4\pi} \frac{t'}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\Sigma'.$$

Это равносильно упрощению в вычислении потенциальной функции упомянутого слоя, предполагая весь слой сконденсированным на сфере радиуса a путем радиального перемещения элементов слоя и пренебрегая расстоянием притягивающей точки от этой сферы.

С другой стороны, найденное выражение для A может быть с нашим приближением написано так:

$$A = \frac{4}{3}\pi a^2 (1-\alpha t).$$

Поэтому (20), деленное на a^2, напишем в виде:

$$\frac{4}{3}\pi(1-\alpha t) + \alpha \int_{4\pi} \frac{t'}{2\sin\frac{1}{2}}\,d\Sigma' + \Omega\sin^2\theta = \frac{C'}{a^2}. \tag{24}$$

Положим

$$t = z + h(3\cos^2\theta - 1), \tag{25}$$

где z — новая неизвестная функция от θ, υ. Заметим, что $3\cos^2\theta - 1$ — сферическая функция второго порядка и что (глава VI) мы имеем:

$$\frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \sum_0^{\infty} P_n, \tag{26}$$

$$\int_{4\pi} P_n Y'_n\,d\Sigma' = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n & \text{при } m = n, \\ 0 & \quad\text{"}\quad m \neq n, \end{cases} \tag{27}$$

откуда

$$\int_{4\pi} \frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}} (3\cos^2\theta' - 1)\,d\Sigma = \frac{4}{5}\pi(3\cos^2\theta - 1).$$

Теперь выражение (25), подставленное в (24), дает:

$$\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi a z - \frac{8}{15}\pi a h\,(3\cos^2\theta - 1) + \alpha \int \frac{z'}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\Sigma' + \Omega\sin^2\theta = \frac{C}{a^2}.$$

Выберем h так, чтобы было

$$\Omega + \frac{8}{5}\pi a h = 0.$$

Тогда предыдущее выражение принимает вид:

$$\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi a z + \alpha \int\limits_{4\pi} \frac{z'}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\Sigma' - \frac{16}{15}\pi a h - \frac{C}{a^2} = 0. \tag{28}$$

Эта формула предполагает, что функцию z можно проинтегрировать по поверхности сферы. Поэтому эту функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям. Положим

$$z = \sum_0^\infty Y_n(\theta, \psi), \quad z' = \sum_0^\infty Y_n(\theta', \psi') = \sum_0^\infty Y'_n.$$

Припоминая (26) и (27), найдем:

$$\int\limits_{4\pi} \frac{z'}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\Sigma' = \sum_0^\infty \frac{4\pi}{2n+1} Y_n.$$

Поэтому (18) принимает вид:

$$\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{15}\pi a h - \frac{C}{a^2} - \frac{8}{3}\pi a \sum_0^\infty \frac{n-1}{2n+1} Y_n = 0.$$

Это соотношение требует, чтобы все Y_n были нулями за исключением Y_0 и Y_1, так что выражение для R приводится к

$$R = a(1 + \alpha t) = a\,[1 + \alpha Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha h\,(3\cos^2\theta - 1)].$$

Но, так как начало координат взято в центре тяжести, то должно быть $Y_1 = 0$ (§ 41), откуда, наконец, обозначая через a' постоянную, R приводим к виду:

$$R = a'(1 + 3\alpha h\cos^2\theta).$$

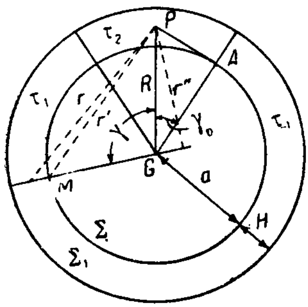
Уравнение в полярных координатах эллипсоида вращения, в котором большая полуось a', а сжатие s, может быть с точностью до s^2 написано так:

$$R = a'(1 - s\cos^2\theta).$$

Следовательно, с нашей степенью приближения поверхность планеты совпадает с эллипсоидом вращения, в котором сжатие равно

$$s = -3\alpha h = \frac{15}{8}\frac{\Omega}{\pi} = \frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi k f}.$$

64 Порядок величины членов, отброшенных в предыдущем вычислении. Представляет интерес исследование верхнего предела тех величин, которыми мы пренебрегли в предыдущем параграфе при вычислении потенциальной функции в то время, когда было сконденсировано на сфере радиуса a вещество, заключенное между этой сферой и внешней поверхностью планеты. Мы это сделаем без труда следующим образом.



Черт. 6.

Предположим функцию t положительной, или поверхность планеты лежащей целиком вне сферы Σ радиуса a. Обозначим через T наибольшую величину t и через $H=\alpha aT$ — наибольшую высоту поверхности над этой сферой. Рассмотрим еще сферу Σ_1 радиуса $a+H$. Сконденсированное вещество находится полностью в сферическом слое, заключенном между обеими сферами Σ и Σ_1. Проведем через притягиваемую точку P (черт. 6) касательную PA к сфере Σ и рассмотрим конус, полученный при вращении GA вокруг GP. Обозначим через τ_2 объем части сферического слоя, заключенной внутри нашего конуса, а через τ_1 — остальную часть объема сферического слоя. Рассмотрим произвольный радиус MG, выходящий из центра G и образующий с GP угол, равный γ; обозначим через r' расстояние P от точки M, в которой указанный радиус встречает сферу Σ. Получим:

$$r'^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\gamma.$$

В частности, для радиуса GA угол γ имеет значение γ_0, определяемое одним из следующих соотношений:

$$\sin\gamma_0 = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}, \quad \operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{a}.$$

Обозначим еще через r'' длину перпендикуляра, опущенного из P на радиус GM, причем $r''=R\sin\gamma$. Если r — расстояние от P текущей точки радиуса GM, то внутри объема τ_1 будет $r'\leqslant r$, и как внутри τ_1, так и внутри τ_2:

$$r''\leqslant r, \quad r''\leqslant r'.$$

Изменение, которое происходит в потенциальной функции планеты на точку P вследствие рассматриваемой конденсации, выражается так:

$$V'-V=\int\limits_{\tau_1} k\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)d\tau+\int\limits_{\tau_2} k\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\tau_1} k\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)d\tau+\int\limits_{\tau_2} k\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}\right)d\tau-\int\limits_{\tau_2} k\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)d\tau,$$

где во всех интегралах все элементы положительны.

Положив поэтому

$$\mathfrak{A}=\int\limits_{\tau_1} k\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)d\tau+\int\limits_{\tau_2} k\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}\right)d\tau, \qquad \mathfrak{B}=\int\limits_{\tau_2} k\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)d\tau.$$

$V' - V$ по абсолютной величине будет не больше, чем бо́льшая из двух величин $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Для нахождения верхнего предела этих величин заметим, что при положительных элементах наших интегралов их величина увеличится, если предположить жидкость заполняющей весь объем слоя между Σ и Σ_1. При таком предположении плотность k (которую приходится считать равной нулю для всех элементов объемов τ_1 и τ_2, не занятых в действительности жидкостью) может считаться постоянной и быть вынесенной за знак интеграла. Благодаря этому вычисление указанных интегралов приводится к простым квадратурам, для которых мы ограничимся приведением результатов. Обозначая через $h = R - a$ высоту притягиваемой точки над сферой Σ и полагая

$$C = \frac{2}{3}\pi k\,[(a+H)^3 - a^3] = 2\pi k H a^2\left(1 + \frac{H}{a} + \frac{H^2}{3a^2}\right),$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a},$$

получим для верхних пределов величин $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$$L_a = 2\pi k H^2\left(1 + \frac{2}{3}\frac{H}{a}\right) + \frac{2\pi k h^2}{3}\left(1 + \frac{2a}{R}\right) - \frac{C}{R}\left(\frac{h}{a} + \Delta\right),$$

$$L_b = \frac{C}{R}\left(\frac{4}{a} - \Delta\right).$$

Приближенные величины этих пределов таковы:

$$L_a = 2\pi k\,(H^2 + h^2 - Hh) - \frac{2}{3}\pi k a H\,(2h)^{\frac{3}{2}},$$

$$L_b = 2\pi k H h - \frac{2}{3}\pi k a H\,(2h)^{\frac{3}{2}}.$$

65. Об исследованиях относительно устойчивости эллипсоидальных фигур. Вопрос об устойчивости твердого вращательного движения жидкости исследовался на основе принципа Дирихле разными авторами с различными результатами. Новейшие исследования Ляпунова привели к следующим главным результатам:

a) Эллипсоиды вращения являются устойчивыми фигурами относительного равновесия, пока их эксцентриситет меньше или равен эксцентриситету (0,8126) эллипсоида вращения Якоби.

b) При начальных условиях, для которых фигура остается телом вращения, эллипсоиды вращения устойчивы, пока их эксцентриситет не превышает величины 0,98122.

c) При начальных условиях, для которых фигура остается эллипсоидальной, все трехосные эллипсоиды Якоби являются устойчивыми фигурами равновесия.

d) Эллипсоиды Якоби, соответствующие угловой скорости, большей предела $\sqrt{2\pi f k}\sqrt{0{,}14}$, устойчивы.

66. О функциях Ламе. Для изучения фигуры относительного равновесия жидкой планеты, мало отличающейся от эллипсоида, полезны функции Ламе, которые, хотя и значительно сложнее, но решают ту же задачу, как и сферические функции при изучении фигур равновесия, мало отличающихся от сферы. Дадим некоторое понятие об этих функциях.

Рассмотрим выражение:

$$\frac{x^2}{1+\rho}+\frac{y^2}{q+\rho}+\frac{z^2}{\rho}=1 \qquad (1 \geqslant q > 0), \tag{29}$$

дающее для всех положительных значений ρ семейство софокусных эллипсоидов. Уравнение (29), рассматриваемое как уравнение относительно ρ, имеет кроме положительного корня, который обозначим через ρ, еще два отрицательных корня, которые обозначим через $-\mu^2$ и $-\nu^2$.

Выразив x, y, z через ρ, μ, ν, получим:

$$x=\frac{\sqrt{\rho+1}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{1-q}}, \quad y=\frac{\sqrt{\rho+q}\sqrt{q-\mu^2}\cdot\sqrt{\nu^2-q}}{\sqrt{q(1-q)}}, \quad z=\frac{\sqrt{\rho}\mu\nu}{\sqrt{q}}. \tag{30}$$

Положим еще

$$x=\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=\sqrt{\rho}\cos\theta.$$

Сравнивая это с (30), найдем:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2}&=\sqrt{1-q}\sin\theta\cos\varphi,\\ \sqrt{q-\mu^2}\sqrt{\nu^2-q}&=\sqrt{q(1-q)}\sin\theta\sin\varphi,\\ \mu\nu&=\sqrt{q}\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Функции Ламе — целые рациональные функции выражений

$$t, \sqrt{t^2-1}, \quad \sqrt{t^2-q},$$

удовлетворяющие диференциальному уравнению:

$$\sqrt{(t^2-1)(t^2-q)}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\frac{du}{dt}\right)+[\beta-n(n+1)t^2]u=0. \tag{32}$$

Для всех целых значений n существуют $2n+1$ значений β, для которых это уравнение допускает указанные целые решения. Обозначая через σ целое число, равное или непосредственно меньшее $\frac{n}{2}$, из этих решений будут

$$\begin{array}{lll} \sigma+1 & \text{типа} & a_0t^n+a_1t^{n-2}+\ldots, \\ n-\sigma & \text{„} & \sqrt{t^2-1}(a_0t^{n-1}+a_1t^{n-3}+\ldots), \\ n-\sigma & \text{„} & \sqrt{t^2-q}(a_0t^{n-1}+a_1t^{n-3}+\ldots), \\ \sigma & \text{„} & \sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-q}(a_0t^{n-2}+a_1t^{n-4}+\ldots). \end{array}$$

Пусть

$$\beta_{n0}, \beta_{n1}, \ldots, \beta_{n2n}$$

— упомянутые выше значения β, тогда

$$E_{n0}(t), \quad E_{n1}(t), \ldots, E_{n2n}(t)$$

— соответствующие решения (32).

Эти функции имеют свойство, что интеграл

$$\int\limits_{4\pi} E_{ns}(\mu)E_{ns}(\nu)E_{nr}(\mu)E_{nr}(\nu)\,d\Sigma=0 \tag{α}$$

(где μ и ν выражены посредством углов θ и υ с помощью (31),

$$d\Sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\upsilon,$$

и интегрирование производится в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ и от $\upsilon = 0$ до $\upsilon = 2\pi$) каждый раз, когда $s \neq r$. Также равен нулю интеграл

$$\int\limits_{4\pi} E_{ms}(\mu) E_{ms}(\nu) E_{nr}(\mu) E_{nr}(\nu) d\Sigma = 0 \qquad (\beta)$$

всегда, если $m \neq n$, каковы бы ни были s и r.

Произведения

$$E_{ns}(\sqrt{-\rho}) E_{ns}(\mu) E_{ns}(\nu) = E$$

являются гармоническими функциями во всем выбранном конечном пространстве.

Если еще положим

$$F_{ns}(t) = (2n+1) E_{ns}(t) \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dt}{[E_{ns}(t)^2] \sqrt{(t^2-1)(t^2-q)}},$$

то произведения

$$F_{ns}(\sqrt{-\rho}) E_{ns}(\mu) E_{ns}(\nu) = F$$

также будут гармоническими функциями для всех точек пространства, за исключением тех, для которых $\rho = 0$ (т. е. для фокального эллипса), и притом такими, что

$$\lim_{\rho=\infty} (\rho^{n+1} F)$$

есть величина конечная и не равная нулю.

E и F — функции Ламе первого и второго рода. Они обладают свойством приводиться к целым рациональным функциям от декартовых координат x, y, z на поверхности эллипсоида (29). Они поэтому служат с присоединением тождеств (α) и (β) для разложения гармонических функций во внешнем, а также и во внутреннем пространстве относительно эллипсоида, которые на самой поверхности эллипсоида приводятся к целым рациональным функциям от x, y, z.

При помощи функций Ламе может быть разрешена проблема Стокса, решенная нами в главах IV и V, для двух- и трехосного эллипсоида. По этому довольно утомительному пути пошел Ами (Hamy) в 1890 г.

Функции Ламе были употреблены также Пуанкаре в 1901 г. и Рудзким в 1905 г. для получения зависимости между линейными отклонениями и аномалиями тяжести в отношении геоида и сфероида. При таком выводе не требуется больше, как мы это делали в главе VIII, ограничиваться рассмотрением эллипсоидов, мало отличающихся от сферы.

Ляпунов мог при помощи функций Ламе доказать существование для однородной жидкой планеты фигур равновесия, бесконечно мало отличающихся от эллипсоида вращения и от эллипсоидов Якоби (за исключением одного случая эллипсоидальной формы, не допускающей бесконечно мало отличающейся фигуры равновесия).

Глава одиннадцатая

ГОМОГРАФИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛАНЕТЫ. СЛУЧАИ ДИРИХЛЕ И РИМАНА

67. Общие уравнения гомографического движения жидкости, подверженной действию одной лишь тяжести[1]. Дирихле сделал в 1860 г. любопытное замечание, что любой из эллипсоидов Якоби может быть фигурой равновесия однородной несжимаемой жидкости, частички которой подвержены одному лишь ньютонианскому тяготению, не только в случае вращения с постоянной угловой скоростью как твердого тела, но и в случае особого нетвердого движения, при котором сохраняется форма и положение внешней поверхности. Исследование Дирихле и более позднее и общее исследование Римана относятся к случаю гомографического движения планеты. Такое движение определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\xi + m\eta + n\zeta, \\ y &= l'\xi + m'\eta + n'\zeta, \\ z &= l''\xi + m''\eta + n''\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где x, y, z — координаты относительно неподвижных осей для момента t частички, которая в начальный момент имела по отношению к тем же осям координаты ξ, η, ζ; l, m, ..., n'' являются функциями одного лишь времени, удовлетворяющими на основании условия несжимаемости следующему условию:

$$D = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = 1.$$

Применяя гидродинамические уравнения Лагранжа к настоящему случаю, немедленно получаем (§ 54):

$$\left.\begin{aligned} \xi\left[l\frac{d^2l}{dt^2}\right] + \eta\left[l\frac{d^2m}{dt^2}\right] + \zeta\left[l\frac{d^2n}{dt^2}\right] &= f\frac{\partial V}{\partial\xi} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\xi}, \\ \xi\left[m\frac{d^2l}{dt^2}\right] + \eta\left[m\frac{d^2m}{dt^2}\right] + \zeta\left[m\frac{d^2n}{dt^2}\right] &= f\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\eta}, \\ \xi\left[n\frac{d^2l}{dt^2}\right] + \eta\left[n\frac{d^2m}{dt^2}\right] + \zeta\left[n\frac{d^2n}{dt^2}\right] &= f\frac{\partial V}{\partial\zeta} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial\zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где для краткости положено

$$l\frac{d^2l}{dt^2} + l'\frac{d^2l'}{dt^2} + l''\frac{d^2l''}{dt^2} = \left[l\frac{d^2l}{dt^2}\right]$$

и аналогично для других сумм.

---

[1] Термин „гомографическое движение“ в русском языке не применялся, а вместо него иногда употреблялось выражение „движение с подобным изменением“. Мы сохраняем в переводе слово „omografico“ итальянского подлинника, как более компактное обозначение. (*Прим. пер.*).

Беря частные производные от (2) по ξ, η, , получим три соотношения вида:

$$\left[l\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right]=f\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}-\frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}, \tag{3}$$

и три других — вида:

$$\left[m\frac{d^2 n}{dt^2}\right]=\left[n\frac{d^2 m}{dt^2}\right]=f\frac{\partial^2 V}{\partial \eta\,\partial \zeta}-\frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial \eta\,\partial \zeta}. \tag{4}$$

Из этих последних выведем немедленно три интеграла вида:

$$m\frac{dn}{dt}-n\frac{dm}{dt}+m'\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dm'}{dt}+m''\frac{dn''}{dt}-n''\frac{dm''}{dt}=\mathrm{const}. \tag{5}$$

Четыре других интеграла получим, применяя теоремы сохранения площадей и живой силы. Положив

$$\int\limits_{\tau}\xi^2 k\,d\tau=X,\qquad \int\limits_{\tau}\eta^2 k\,d\tau=Y,\qquad \int\limits_{\tau}\zeta^2 k\,d\tau=Z$$

и предполагая, что в момент $t=0$ главные оси инерции тела совпадают с осями координат, получим из (1):

$$\int\limits_{\tau}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)k\,d\tau=$$

$$=X\left[l\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dl}{dt}\right]+Y\left[m\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dm}{dt}\right]+Z\left[n\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dn}{dt}\right]. \tag{6}$$

На основании теоремы сохранения площадей правая часть этого выражения должна быть постоянной. Два других интеграла площадей получатся круговой подстановкой букв

$$(l,\ l',\ l''),\quad (m,\ m',\ m''),\quad (n,\ n',\ n'').$$

Подобным же образом интеграл живых сил дает:

$$X\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right]+Y\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2\right]+Z\left[\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right]-k\int\limits_{\tau}V\,d\tau=\mathrm{const}, \tag{7}$$

где прямые скобки обозначают, как и выше, сумму.

68. Гомографическое движение эллипсоидальной массы. Рассмотрим, в частности, гомографическое движение жидкой однородной массы, ограниченной поверхностью эллипсоида, уравнение которого для момента $t=0$ таково:

$$\frac{\xi^2}{a_0^2}+\frac{\eta^2}{b_0^2}+\frac{\zeta^2}{c_0^2}=1. \tag{8}$$

Обозначая через λ, μ, ..., ν'' алгебраические дополнения элементов l, m, ..., n'' детерминанта D, получим из (1):

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z,\\ \eta&=\mu x+\mu' y+\mu'' z,\\ \zeta&=\nu x+\nu' y+\nu'' z.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Поверхность, ограничивающая массу в момент t, еще будет эллипсоидом, уравнение которого:

$$\frac{(\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z)^2}{a_0^2}+\frac{(\mu x+\mu' y+\mu'' z)^2}{b_0^2}+\frac{(\nu x+\nu' y+\nu'' z)^2}{c_0^2}=1.$$

Потенциальная функция V массы на точку (x, y, z) в момент t выражается через сумму некоторой постоянной и однородной функции второй степени относительно x, y, z. Исключая из такого выражения x, y, z при помощи (1), получим V выраженным в форме:

$$V=K-L\xi^2-M\eta^2-N\zeta^2-2L'\eta\zeta-2M'\zeta\xi-2N'\xi\eta, \tag{10}$$

где $L, M, \ldots, N'$ — функции одного лишь t. Подстановка в (2) показывает, что производные $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ и аналогичные должны быть линейными однородными функциями от ξ, η, ζ. Это требует, чтобы p (рассматриваемое как функция ξ, η, ζ и t) имело ту же форму, как и правая часть (10). Но это p должно быть постоянным на поверхности эллипсоида (8); следовательно, оно должно быть вида:

$$p=k\sigma\left(1-\frac{\xi^2}{a_0^2}-\frac{\eta^2}{b_0^2}-\frac{\zeta^2}{c_0^2}\right)+\bar{\omega} \tag{11}$$

где σ и $\bar{\omega}$ — функции одного лишь t. Вводя это выражение для p в (3) и (4), получим:

$$\left[l\frac{d^2l}{dt^2}\right]=f\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{2\sigma}{a_0^2}, \qquad \left[m\frac{d^2n}{dt^2}\right]=\left[n\frac{d^2m}{dt^2}\right]=f\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\,\partial\zeta} \tag{12}$$

и четыре других выражения, получаемых путем круговой подстановки букв

$$(l, m, n), \quad (\xi, \eta, \zeta), \quad (a_0, b_0, c_0).$$

Из (12) легко найдем диференциальные уравнения, определяющие $\frac{d^2l}{dt^2}$ и т. д. Для этого достаточно взять три уравнения, в которых фигурируют

$$\frac{d^2l}{dt^2}, \quad \frac{d^2l'}{dt^2}, \quad \frac{d^2l''}{dt^2},$$

помножить их на λ, μ, ν и сложить. Таким образом найдем:

$$\frac{d^2l}{dt^2}=f\left\{\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\mu\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta}+\nu\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right\}+2\sigma\frac{\lambda}{a_0^2}.$$

Но, так как λ, μ, ν зависят от одного лишь времени, то

$$\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\mu\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta}+\nu\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\lambda\frac{\partial V}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial V}{\partial\eta}+\nu\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right\}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2l}{dt^2}=f\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+2\sigma\frac{\lambda}{a_0^2}.\\
&\text{Подобным же образом найдем:}\\
&\frac{d^2l'}{dt^2}=f\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+2\sigma\frac{\lambda'}{a_0^2},\\
&\frac{d^2l''}{dt^2}=f\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)+2\sigma\frac{\lambda''}{a_0^2},\\
&\frac{d^2m}{dt^2}=f\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+2\sigma\frac{\lambda}{b_0^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2n''}{dt^2}=f\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)+2\sigma\frac{\nu''}{c_0^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Из этих новых уравнений можно получить выражение для σ. Умножая на λ 1-е, 4-е и 7-е (13) и складывая, получим:

$$\lambda\frac{d^2l}{dt^2}+\mu\frac{d^2m}{dt^2}+\nu\frac{d^2n}{dt^2}=f\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+2\sigma\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}+\frac{\mu^2}{b_0^2}+\frac{\nu^2}{c_0^2}\right).$$

Два другие аналогичные выражения получатся, если приписывать один и два штриха буквам l, m, n, λ, μ, ν и заменять x через y и z. Суммируя и вспоминая, что $\Delta_2 V=-4\pi k$, отсюда получим:

$$\left[\lambda\frac{d^2l}{dt^2}\right]+\left[\mu\frac{d^2m}{dt^2}\right]+\left[\nu\frac{d^2n}{dt^2}\right]=-4\pi fk+2\sigma\left[\frac{(\lambda)^2}{a_0^2}+\frac{(\mu)^2}{b_0^2}+\frac{(\nu)^2}{c_0^2}\right].$$

С другой стороны, беря два раза производные от детермината D, имеем тождественно:

$$\left[\lambda\frac{d^2l}{dt^2}\right]+\left[\mu\frac{d^2m}{dt^2}\right]+\left[\nu\frac{d^2n}{dt^2}\right]+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial l}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial m}{dt}\right]+\left[\frac{\partial\nu}{\partial t}\frac{\partial n}{\partial t}\right]=0,$$

откуда

$$2\sigma\left[\frac{(\lambda)^2}{a_0^2}+\frac{(\mu)^2}{b_0^2}+\frac{(\nu)^2}{c_0^2}\right]=4\pi fk-\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial l}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial m}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial\nu}{\partial t}\frac{\partial n}{\partial t}\right],\tag{14}$$

что выражает давление на поверхности через положение в момент t и действие движения.

В случае равномерного вращения с угловой скоростью ω детерминант D и ему сопряженный определяются ортогональной подстановкой, и (14) обращается в

$$2\sigma\left(\frac{1}{a_0^2}+\frac{1}{b_0^2}+\frac{1}{c_0^2}\right)=4\pi fk-2\omega^2.$$

Обозначая через G среднюю поверхностную тяжесть, S — поверхность, τ — полный объем эллипсоида, имеем (§ 28):

$$4\pi fk-2\omega^2=G\frac{S}{\tau},$$

откуда

$$\sigma=\frac{GS}{2\tau\left(\frac{1}{a_0^2}+\frac{1}{b_0^2}+\frac{1}{c_0^2}\right)}.$$

В предположении, что внешнее давление $\overline{\omega}$ равно нулю, σ, помноженное на k, даст давление p_0 в центре планеты. Для планеты, мало отличающейся от сферы, можно положить:

$$\frac{S}{\tau}=\frac{3}{a_0}, \qquad \frac{1}{a_0^2}+\frac{1}{b_0^2}+\frac{1}{c_0^2}=\frac{3}{a_0^2},$$

откуда

$$p_0=\frac{1}{2}kGa_0.$$

Обозначим через g_0 земную тяжесть на широте 45° и уровне моря, k_1 — нормальную плотность ртути, и, выражая давление в атмосферах, получим:

$$1\ am=0{,}76\,k_1g_0,$$

откуда

$$p_0=\frac{k}{2k_1}\frac{a_0}{0{,}76}\frac{G}{g_0}.$$

Если бы Земля была однородной жидкостью плотности $k=5{,}5$, мы имели бы, полагая $G=g_0$, $k_1=13{,}6$, $a_0=6\,380\,000\ м$:

$$p_0=1\,678\,000\ am.$$

69. Случай, когда остаются неизменными размеры осей внешней поверхности. Нетрудно продолжить общее исследование уравнения (13). Такое исследование облегчается разложением гомографического движения на движение с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения осей внешнего эллипсоида по отношению к неподвижным осям координат, и на гомографическое движение по отношению к указанным осям эллипсоида. Но мы ограничимся изучением случая, когда внешняя поверхность остается неизменной по форме и размерам (задача Римана).

Обозначим через x', y', z' прямоугольные оси координат, совпадающие для всех моментов с главными осями эллипсоида a, b, c. Между координатами x', y', z' точки и координатами x, y, z той же точки относительно неподвижных осей имеются соотношения вида:

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\\ y&=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\\ z&=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

где α, β, γ — коэфициенты ортогональной подстановки

Если, с другой стороны, положить

$$\left.\begin{aligned} x'&=L\xi+M\eta+N\zeta,\\ y'&=L'\xi+M'\eta+N'\zeta,\\ z'&=L''\xi+M''\eta+N''\zeta,\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

то удовлетворяются формулы (1), в которых

$$\left.\begin{aligned} l&=\alpha_1L+\alpha_2L'+\alpha_3L'',\\ l'&=\beta_1L+\beta_2L'+\beta_3L'',\\ l''&=\gamma_1L+\gamma_2L'+\gamma_3L'',\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

и аналогичные выражения имеют место для m, M, n, N.

Следовательно, движение, представляемое (1), может быть разложено на твердое движение (15) и на гомографическую деформацию (16), которую назовем ***внутренним движением***.

Детерминант подстановки (1) равен произведению детерминантов подстановок (15) и (16); поэтому должно быть:

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ L' & M' & N' \\ L'' & M'' & N'' \end{vmatrix} = 1. \tag{18}$$

Заметим еще, что если оси a, b, c внешней поверхности остаются неизменными и в момент t совпадают с осями x', y', z', то уравнение (8) должно подстановкой (16) тождественно обращаться в

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

для чего необходимо, чтобы существовали три соотношения вида:

$$\frac{L^2}{a^2} + \frac{L'^2}{b^2} + \frac{L''^2}{c^2} = \frac{1}{a^2},$$

и три других — вида:

$$\frac{LM}{a^2} + \frac{L'M'}{b^2} + \frac{L''M''}{c^2} = 0$$

(остальные получаются круговой подстановкой букв L, M, N в левых частях и a, b, c — в правых).

Эти соотношения показывают, что если положить

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = L, & \beta = \dfrac{b}{a} M, & \gamma = \dfrac{c}{a} N, \\ \alpha' = \dfrac{a}{b} L', & \beta' = M', & \gamma' = \dfrac{c}{b} N', \\ \alpha'' = \dfrac{a}{c} L'', & \beta'' = \dfrac{b}{c} M'', & \gamma'' = N'', \end{array}\right\} \tag{19}$$

то новые величины

$$\begin{array}{lllr} \alpha & \beta & \gamma & (X) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & (Y) \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & (Z) \end{array}$$

могут рассматриваться как направляющие косинусы некоторых воображаемых осей X, Y, Z относительно неподвижных осей x, y, z. Изучение движения, выражаемого соотношениями (16), с успехом приводится к рассмотрению движения таких воображаемых координат, поскольку коэфициенты $L, \ldots, N''$ такой деформации просто выражаются посредством (19), если известно для каждого момента направление этих осей.

70. Диференциальные уравнения для параметров движения. Обозначим через

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{L}' & \mathfrak{M}' & \mathfrak{N}' \\ \mathfrak{L}'' & \mathfrak{M}'' & \mathfrak{N}'' \end{array}$$

алгебраические дополнения элементов детерминанта (18). Получим:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L} = M'N'' - M''N' = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \alpha, \\ \mathfrak{L}' = M''N - MN'' = \dfrac{a}{b}(\beta''\gamma - \beta\gamma'') = \dfrac{a}{b}\alpha'. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Подобным же образом:

$$\mathfrak{L}'' = \frac{a}{c}\,\alpha'',$$

$$\mathfrak{M} = \frac{b}{a}\,\beta, \qquad \mathfrak{M}' = \beta', \qquad \mathfrak{M}'' = \frac{b}{c}\,\beta'',$$

$$\mathfrak{N} = \frac{c}{a}\,\gamma, \qquad \mathfrak{N}' = \frac{c}{b}\,\beta' \qquad \mathfrak{N}'' = \gamma''.$$

Между тем, уравнения (16), разрешенные относительно ξ, η, ζ, дают:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x' + \frac{a}{b}\,\alpha' y' + \frac{a}{c}\,\alpha'' z', \\ \eta &= \frac{b}{a}\,\beta x' + \beta' y' + \frac{b}{c}\,\beta'' z', \\ \zeta &= \frac{c}{a}\,\gamma x' + \frac{c}{b}\,\gamma' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Задача может быть поставлена различным образом. Можно, например задать по желанию в функциях времени параметры $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ равномерного вращения осей и попытаться найти, если это возможно, параметры $L, \ldots, N''$ внутреннего движения (16), или, что то же самое, закон движения воображаемых осей X, Y, Z. Чтобы получить необходимые диференциальные уравнения, достаточно подставить в основные уравнения (13) для l, m, n их выражения (17), где $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ принимаем за известные функции времени; таким путем нетрудно будет найти девять уравнений, выражающих вторые производные от $L, M, \ldots, N''$.

Быстрее можно достигнуть цели следующим образом. Возьмем уравнения гидродинамики в простейшем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{и т. д.}, \tag{22}$$

где x, y, z — координаты относительно неподвижных осей в момент t данной частицы жидкости. Умножая эти уравнения на α_1, β_1, γ_1, получим в силу (15):

$$\alpha_1\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_1\frac{d^2z}{dt^2} = f\frac{\partial V}{\partial x'} - \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x'}. \tag{23}$$

Левая часть этого уравнения есть не что иное, как проекция на ось x абсолютного ускорения рассматриваемой частицы. На основании теоремы Кориолиса она равна сумме трех величин, а именно:

1. Составляющей относительного ускорения, равной $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, или, на основании (16),

$$\xi\frac{d^2L}{dt^2} + \eta\frac{d^2M}{dt^2} + \zeta\frac{d^2N}{dt^2}.$$

2. Составляющей ускорения увлечения, или, согласно (15):

$$x'A_{11} + y'A_{12} + z'A_{13}, \tag{24}$$

где для краткости положено

$$A_{rs} = \alpha_r\frac{d^2\alpha_s}{dt^2} + \beta_r\frac{d^2\beta_s}{dt^2} + \gamma_r\frac{d^2\gamma_s}{dt^2}.$$

Принимая во внимание (16), выражение (24) может быть написано так:

$$\xi\,(A_{11}L + A_{12}L' + A_{13}L'') + \eta\,(\ldots) + \zeta\,(\ldots).$$

3. Составляющей сложного центробежного ускорения, равного

$$2\left(Q\frac{dz'}{dt} - R\frac{dy'}{dt}\right). \tag{25}$$

где P, Q, R обозначают компоненты по осям x', y', z' угловой скорости этих осей x', y', z' относительно неподвижных осей, т. е.

$$P = \alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3\frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt} \quad \text{и т. д.}$$

На основании (16) выражение (25) можно еще написать так:

$$2\xi\left(Q\frac{dL''}{dt} - R\frac{dL'}{dt}\right) + 2\eta(\ldots) + 2\zeta(\ldots).$$

Что касается правой части уравнения (23), заметим, что если полуоси эллипсоида неизменной длины, то

$$V = K - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2$$

где K, A, B, C — постоянные. Отсюда:

$$f\frac{\partial V}{\partial x'} = -2Afx = -2A\,(L\xi + M\eta + N\zeta)\,f.$$

Имеем, далее, припоминая выражение для p:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x'} = -2\sigma\left(\frac{\xi}{a^2}\frac{\partial\xi}{\partial x'} + \frac{\eta}{b^2}\frac{\partial\eta}{\partial x'} + \frac{\zeta}{c^2}\frac{\partial\zeta}{\partial x'}\right),$$

и припоминая (21):

$$\frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x'} = -2\sigma\left(\frac{\alpha\xi}{a^2} + \frac{\beta\eta}{ab} + \frac{\gamma\zeta}{ac}\right).$$

Подставляя найденные таким образом выражения в (23), мы должны получить равные коэфициенты при ξ, η, ζ в двух частях равенств. Приравнивая их друг другу, получим три соотношения, из которых первое таково:

$$\frac{d^2L}{dt^2} + A_{11}L + A_{12}L' + A_{13}L'' + 2Q\frac{dL''}{dt} - 2R\frac{dL'}{dt} = -2AfL + \frac{2\sigma\alpha}{a^2},$$

и два других, которые получаются переменой букв L на M и N и отношения $\frac{\alpha}{a}$ на $\frac{\beta}{b}$ и $\frac{\gamma}{c}$.

Вставляя вместо L, M, N их выражения (19) и умножая соответственно на a, b, c, получим:

$$a\frac{d^2\alpha}{dt^2} + aA_{11}\alpha + bA_{12}\alpha' + cA_{13}\alpha'' + 2cQ\frac{d\alpha''}{dt} - 2bR\frac{d\alpha'}{dt} = -2Afa\alpha + \frac{2\sigma\alpha}{a} \tag{26}$$

и два других выражения, получаемых переменой буквы α на β и γ.

Беря проекцию абсолютного ускорения на ось y', или умножая (22) на α_2, β_2, γ_2 и суммируя, получим подобным же образом уравнения:

$$b\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + aA_{21}\alpha + bA_{22}\alpha' + cA_{23}\alpha'' + 2aR\frac{d\alpha}{dt} - 2cP\frac{d\alpha''}{dt} = -2Bfb\alpha' + \frac{2\sigma\alpha'}{b} \tag{27}$$

и два других заменой буквы α на β и γ.

Наконец, проектируя на ось z', найдем уравнения:

$$c\frac{d^2\alpha''}{dt^2}+aA_{31}\alpha+bA_{32}\alpha'+cA_{33}\alpha''+2bP\frac{d\alpha'}{dt}-2aQ\frac{d\alpha}{dt}=-2Cfc\alpha''+\frac{2\sigma\alpha''}{c},\quad (28)$$

и два аналогичных.

Формулы (26), (27), (28) и аналогичные им являются искомыми диференциальными уравнениями, определяющими движение воображаемых осей X, Y, Z, если задано движение осей x', y', z', т. е. если задано движение поверхности жидкости.

Положим:

$$\pi=\sum\alpha''\frac{d\alpha'}{dt},\qquad \chi=\sum\alpha\frac{d\alpha''}{dt},\qquad \rho=\sum\alpha'\frac{d\alpha}{dt}$$

(где суммирование распространяется на три буквы α, β, γ),

$$B_{11}=\sum\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2},\qquad B_{12}=\sum\alpha\frac{d^2\alpha'}{dt^2},\qquad B_{13}=\sum\alpha\frac{d^2\alpha''}{dt^2},$$

$$B_{21}=\sum\alpha'\frac{d^2\alpha}{dt^2},\quad \ldots$$

и т. д., т. е. через π, χ, ρ, B_{rs} обозначены величины, имеющие относительно движения осей X, Y, Z то же значение, как P, Q, R, A_{rs} относительно движения осей x', y', z'.

Известная фо мула Пуассона, дающая производные девяти направляющих косинусов подвижных осей координат в функции составляющих угловой скорости дает без затруднения:

$$B_{11}=-(\chi^2+\rho^2),\qquad B_{12}=\pi\chi-\frac{d\rho}{dt},\qquad B_{13}=\pi\rho+\frac{d\chi}{dt},$$

$$B_{21}=\chi\pi+\frac{d\rho}{dt},\qquad B_{22}=-(\rho^2+\pi^2),\qquad B_{23}=\chi\rho-\frac{d\pi}{dt},$$

$$B_{31}=\rho\pi-\frac{d\chi}{dt},\qquad B_{32}=\rho\chi+\frac{d\pi}{dt},\qquad B_{33}=-(\pi^2+\chi^2).$$

Выражение (26) и два других, помноженные на α, β, γ и сложенные, затем — на α', β', γ' и, наконец, на α'', β'', γ'', дают:

$$\left.\begin{aligned}
&a(B_{11}+A_{11})+2cQ\chi+2bR\rho=-2fAa+\frac{2\sigma}{a},\\
&aB_{21}+bA_{12}-2cQ\pi=0,\\
&aB_{31}+cA_{13}-2bR\pi=0.
\end{aligned}\right\}\quad (29)$$

Подобным же образом из (27) и (28) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&bB_{12}+aA_{21}-2cP\chi=0,\\
&b(B_{22}+A_{22})+2aR\rho+2cP\pi=-2fBb+\frac{2\sigma}{b},\\
&bB_{32}+cA_{23}-2aR\chi=0,
\end{aligned}\right\}\quad (29')$$

$$\left.\begin{aligned}
&cB_{13}+aA_{31}-2bP\rho=0,\\
&cB_{23}+bA_{32}-2aQ\rho=0,\\
&c(B_{33}+A_{33})+2bP\pi+2aQ\gamma=-2fCc+\frac{2\sigma}{c}.
\end{aligned}\right\}\quad (29'')$$

Эта система формул не меняется, если величины P, Q, R, A_{rs} заменить через π, χ, ρ, B_{rs}.

Отсюда следует важная теорема: *если возможно гомографическое движение эллипсоидальной жидкой массы, при котором оси x', y', z' элли-*

псоида вращаются по некоторому закону L_1 и воображаемые оси X, Y, Z, от которых зависит внутреннее движение, — по некоторому закону L_2, то также возможно движение, при котором оси x', y', z' вращаются по закону L_2, а оси X, Y, Z — по закону L_1.

71. **Случай, в котором вращение внешней поверхности совершается вокруг одной из осей эллипсоида.** Предположим, что внешняя поверхность вращается вокруг оси c. Имеем. $P=Q=0$, $R\neq 0$, откуда

$$A_{11}=A_{22}=-\omega^2,\qquad A_{12}=-\frac{dR}{dt},\qquad A_{21}=\frac{dR}{dt}.$$

Все остальные A_{rs} равны нулю.

2-я, 3-я формулы (29), 1-я, 3-я формулы (29'), 1-я и 2-я формулы (29'') принимают вид:

$$a\left(\chi\pi+\frac{d\rho}{dt}\right)-b\frac{dR}{dt}=0, \tag{α}$$

$$a\left(\rho\pi-\frac{d\chi}{dt}\right)-2bR\pi=0, \tag{β}$$

$$b\left(\chi\pi-\frac{d\rho}{dt}\right)+a\frac{dR}{dt}=0, \tag{γ}$$

$$b\left(\rho\gamma+\frac{d\pi}{dt}\right)-2aR\chi=0, \tag{δ}$$

$$c\left(\pi\rho+\frac{d\chi}{dt}\right)=0, \tag{ε}$$

$$c\left(\rho\chi-\frac{d\pi}{dt}\right)=0. \tag{ζ}$$

Из (β), (ε) и (δ), (ζ) получаем:

$$a\rho\pi=bR\pi,$$
$$b\rho\chi=aR\chi.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить одним из следующих образов:

$$\text{I}\begin{cases}\pi=0\\ \chi=0\end{cases}\qquad \text{II}\begin{cases}\pi=0\\ \rho=R\dfrac{a}{b}\end{cases}\qquad \text{III}\begin{cases}\chi=0\\ \rho=R\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

Исключим случай эллипсоида вращения ($a=b$). Тогда в каждом из этих трех случаев (α) и (γ) требуют, чтобы было

$$\frac{d\rho}{dt}=0,\qquad \frac{dR}{dt}=0.$$

В случае (II), если принять R, а следовательно, и ρ, отличным от нуля, согласно (ζ) должно еще быть $\chi=0$, а в случае (III) $\pi=0$.

Итак, из трех величин π, χ, ρ две первые должны быть нулем, а третья постоянной. Поэтому оси (x', y', z') и (X, Y, Z) вращаются равномерно около оси z, с которой постоянно совпадают оси z' и Z. 1-я формула (29), 2-я формула (29') и 3-я формула (29'') дают тогда:

$$-a(R^2+\rho^2)+2bR\rho=-2fAa+\frac{2\sigma}{a},$$

$$-b(R^2+\rho^2)+2aR\rho=-2fBb+\frac{2\sigma}{b},$$

$$0=-2fCc+\frac{2\sigma}{c}.$$

Исключая отсюда σ, находим:

$$\left.\begin{aligned} a^2(\rho^2+R^2)-2R\rho ab &= 2f(Aa^2-Cc^2),\\ b^2(\rho^2+R^2)-2R\rho ab &= 2f(Bb^2-Cc^2) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

— соотношения между угловой скоростью ρ и ω и полуосями эллипсоида. Прежде чем рассматривать эти уравнения, посмотрим, каково будет в этом случае внутреннее движение, выражаемое формулами (16). Имеем для направляющих косинусов воображаемых осей X, Y, Z:

$$\begin{aligned} &\alpha=\cos\rho t, && \beta=\sin\rho t,\\ &\alpha'=-\sin\rho t, && \beta'=\cos\rho t,\\ &\alpha''=\beta''=\gamma=\gamma'=0, && \gamma''=1. \end{aligned}$$

Определяя L, M, N при помощи формул (19), приводим (16) к виду:

$$\begin{aligned} x'&=\xi\cos\rho t+\frac{a}{b}\eta\sin\rho t,\\ y'&=-\frac{b}{a}\xi\sin\rho t+\eta\cos\rho t \end{aligned} \qquad z'=\zeta, \tag{31}$$

между тем как твердое движение, выражаемое (18), определяется через

$$\begin{aligned} x&=x'\cos Rt-y'\sin Rt,\\ y&=x'\sin Rt+y'\cos Rt. \end{aligned} \qquad z=z'. \tag{32}$$

Вводя в (30) обозначения, употреблявшиеся в теории эллипсоидов Якоби.

$$\frac{c^2}{a^2}=u, \qquad \frac{c^2}{b^2}=t,$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho^2+R^2}{u}-\frac{2R\rho}{\sqrt{ut}}&=2f\left(\frac{A}{u}-C\right),\\ \frac{\rho^2+R^2}{t}-\frac{2R\rho}{\sqrt{ut}}&=2f\left(\frac{B}{t}-C\right), \end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

откуда

$$\begin{aligned} (\rho^2+R^2)\frac{t-u}{2fut}&=\frac{A}{u}-\frac{B}{t},\\ \frac{R\rho(t-u)}{f\sqrt{ut}}&=A-B-C(u-t), \end{aligned}$$

или же, вводя интегралы из § 61, обозначенные через $F(u, t)$ и $\Phi(u, t)$, т. е.

$$F(u,\ t)=\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{(1+ux)(1+tx)}-\frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{\Delta},$$

$$\Phi(u,\ t)=ut\int\limits_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+ux)(1+tx)\Delta},$$

где

$$\Delta=\sqrt{(1+ux)(1+tx)(1+x)},$$

предыдущие уравнения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho^2+R^2}{2\pi fk}&=\Phi(u,t),\\ \frac{2R\rho}{2\pi fk}&=-\sqrt{ut}\,F(u,t). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Полагая $\rho=0$, получаем равномерное вращательное движение, изученное Якоби. Наоборот, полагая $R=0$, имеем *гармоническое внутреннее движение*, рассмотренное Дирихле, в котором каждая частица движется согласно формулам:

$$x=\xi\cos\rho t+\frac{a}{b}\eta\sin\rho t,$$
$$y=-\frac{b}{a}\xi\sin\rho t+\eta\cos\rho t, \tag{34}$$

и описывает в плоскости, параллельной сечению (a,b) эллипс, подобный этому сечению (a,b), имеющий уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}.$$

В этом случае внешняя поверхность жидкости остается постоянной.

В общем случае, считая R и ρ отличными от нуля, спросим себя, можно ли, взяв произвольный эллипсоид, определить R и ρ так, чтобы (33) были удовлетворены. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$\Phi(u,t)>\sqrt{ut}\,[F(u,t)]. \tag{35}$$

Ясно, что для эллипсоидов, мало отличающихся от эллипсоидов Якоби, $F(u,t)$ близко к нулю, а $\Phi(u,t)$ больше нуля, и неравенство (35) удовлетворяется.

Но условие может быть поставлено и в другой форме. Положим:

$$P=2f\left(\frac{A}{u}-C\right),\quad Q=2f\left(\frac{B}{t}-C\right),$$

помножим (30′) соответственно на $\sqrt{u}$, $\sqrt{t}$, возведем в квадрат и вычтем, тогда найдем:

$$(\rho^2+\omega^2)^2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{t}\right)+4\omega^2\rho^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)=P^2u-Q^2t,$$

или же

$$(\rho^2+\omega^2)^2-4\omega^2\rho^2=\frac{ut}{t-u}(P^2u-Q^2t).$$

Для того, чтобы значения ρ и ω, полученные из (30), были действительными, необходимо и достаточно, чтобы P^2u-Q^2t было одного знака с $t-u$. Но

$$P=2f\pi k(1-u)\int_0^\infty\frac{x(1+tx)}{\Delta^3}\,dx,$$

$$Q=2f\pi k(1-t)\int_0^\infty\frac{x(1+ux)}{\Delta^3}\,dx.$$

Предположим, что $a>b$, откуда $u<t$, и допустим еще, что c — наименьшая из осей, так что u и t меньше единицы. Тогда P и Q положительны, и упомянутое условие приводится к тому, чтобы $P\sqrt{u}$ было больше $Q\sqrt{t}$. Это во всяком случае удовлетворяется, если

$$\sqrt{u}-u^{\frac{3}{2}}>\sqrt{t}-t^{\frac{3}{2}},$$

или если u и t заключаются между $\frac{1}{3}$ и 1, так как в этом интервале функция $\sqrt{x} - x^2$ убывает с x.

72. Случай эллипсоида вращения. В случае $a = b$ можно предположить, что вращение поверхности происходит вокруг оси, расположенной в экваториальном сечении (a, b), поскольку вращение вокруг оси c не меняет положения поверхности относительно неподвижных осей. С другой стороны, каждый экваториальный диаметр может рассматриваться как главный. Поэтому можно положить в формуле (29):

$$Q = R = 0, \qquad P \neq 0, \qquad a = b \neq c.$$

Так же как в предшествующем параграфе, найдем:

$$\chi = 0, \qquad \rho = 0, \qquad P = \cos t, \qquad \pi = \cos t,$$

другими словами, что равномерное твердое вращение вокруг оси a и гомографическая деформация происходят в плоскостях, перпендикулярных к этой оси. Это есть не что иное, как частный случай движения, рассмотренного в предыдущем случае. Общей осью обоих движений, как твердого вращения, так и гармонического движения, является один из экваториальных диаметров.

73. Другие исследования этого вопроса. Риман доказал, что, если наложено условие постоянства величины осей эллипсоида, то более общий случай гомографического движения жидкого эллипсоида получается, предполагая, что общее вращение поверхности совершается вокруг постоянной оси, расположенной в одной из главных диаметральных поверхностей эллипсоида.

Дирихле, который первый занимался этим вопросом, уже раньше рассмотрел два важных случая, а именно, рассмотренного нами внутреннего гармонического движения, и случай, когда оси эллипсоида сохраняют неизменное направление.

Стеклов произвел подробное исследование вопроса и нашел, что если поверхность жидкости должна сохранять в течение всего движения форму сжатого эллипсоида вращения, то единственный возможный случай движения соответствует второму из упомянутых случаев Дирихле. Если же, наоборот, должна сохраняться форма вытянутого эллипсоида вращения, то возможные движения те, которые указаны в § 72, когда сохраняется величииа осей, и это соответствует второму случаю Дирихле с неизменным направлением осей.

Для трехосного эллипсоида Стеклов исследовал и рассмотрел все случаи, когда для данного эллипсоида при движении, исследованном Риманом, остается неизменной величина осей. Таким образом он рассмотрел все случаи, в которых остаются неизменными направления осей, и доказал, что они сводятся к уже рассмотренным случаям Дирихле.

Глава двенадцатая

ЖИДКИЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛАНЕТЫ

74. Конфигурации равновесия. Назовем *конфигурацией* планеты совокупность геометрических данных, которые служат для определения поверхностей раздела слоев одинаковой плотности. При гипотезе, которую мы вообще примем в настоящей главе, что плотность меняется непрерывно, будем называть указанные поверхности *поверхностями равной плотности.*

Рассмотрим твердое движение неоднородной жидкой планеты, которое согласно сказанному в § 55 не может быть иным, как равномерным вращением. Пусть ω – угловая скорость, V — ньютонова потенциальная функция планеты на собственную точку. Функция

$$W = fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{1}$$

(если принять за ось вращения ось z) должна быть постоянной на каждой поверхности равной плотности в силу условия относительного равновесия (§ 54) С другой стороны, имеем:

$$\Delta_2 W = 2\omega^2 - 4\pi fk \tag{2}$$

(k — плотность в данной точке). Функция W, таким образом, связана условием:

$$\Delta_2 W = F(W).$$

Кроме того, она связана на внешней поверхности планеты условиями, вытекающими из теоремы Стокса (§ 14), если задана конфигурация или хотя бы одна лишь внешняя поверхность. Действительно, если дана эта поверхность, то теоретически определена за исключением лишь одного произвольного параметра (массы планеты) форма функции W вне планеты; *следовательно, определены значения на поверхности как W, так и ее производной по нормали* $\frac{\partial W}{\partial n}$[1].

Однако эти соображения не дают большой помощи в вопросе о нахождении возможных конфигураций равновесия, но дают лишь очень хороший отрицательный критерий для исключения некоторых родов конфигураций. Так, например, можно сразу исключить *сферические концентрические слои равной плотности.*

Действительно, согласно теореме, доказанной в конце § 6, если поверхность равновесия, бесконечно близкая к внешней сфере, есть тоже сфера, концентричная с последней, то сила тяжести g должна быть постоянной на этой сфере. Но в § 17 было доказано, что если одна из

[1] Заметим, что W и ее первые производные всюду непрерывны и поэтому *внешнее* значение $\frac{\partial W}{\partial n}$ тождественно с *внутренним* значением.

внешних уровенных поверхностей есть сфера, то g не может иметь на ней постоянного значения.

Итак, положим, что семейство поверхностей равной плотности задано в форме соотношения вида:

$$F(x, y, z) = C, \tag{3}$$

где левая часть не содержит других переменных, кроме x, y, z, причем C в правой части меняется лишь от одной поверхности семейства к другой. Согласно упомянутому условию равновесия можно рассматривать C как функцию одного лишь W, определяемого уравнением (1).

Обозначим через C', C'' первую и вторую производные от C по W. Нам, конечно, неизвестна форма этих выражений; мы знаем лишь, что это постоянные, равно как и C, на каждой поверхности семейства (2). Беря производные от (2) по x, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} C', \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 C'' + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} C',$$

откуда, исключая $\frac{\partial W}{\partial x}$, найдем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} C'^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 C'' + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} C'^3.$$

Суммируя это с двумя аналогичными выражениями, имеем:

$$C'^2 \Delta_2 F = C'' \Delta_1 F + C'^3 (2\omega^2 - 4\pi f k).$$

Последний член постоянен на всей поверхности равной плотности. Необходимое условие для того, чтобы рассматриваемая конфигурация соответствовала равновесию, заключается в том, чтобы можно было задать две величины A и B, постоянные или функции одного лишь C, так, чтобы бином

$$A\Delta_1 F + B\Delta_2 F \tag{3'}$$

был функцией одного лишь F; другими словами, если исключить из него при помощи (3), например, z, то чтобы он *обращался в функцию одного лишь C*.

Пример. При помощи этого критерия можно сразу доказать, что *семейство концентрических подобных эллипсоидов не может давать конфигурации равновесия*. Действительно, для концентрических подобных эллипсоидов можно положить

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = C,$$

где a, b, c — постоянные. Имеем отсюда:

$$\Delta_1 F = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \qquad \Delta_2 F = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

В этом случае второй член бинома (3') является функцией одного лишь C, но очевидно, что первый член не является таковой за исключением случая $a = b = c$, т. е. случая концентрических сфер, который мы уже рассмотрели.

75. Продолжение. Конфигурации равновесия. Для применений бывает удобнее предположить семейство поверхностей представленным в более общем виде, чем это было сделано в предыдущем параграфе. Допустим, что оно задано посредством формулы вида:

$$f(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0, \tag{4}$$

где a, b, c, ... обозначают параметры, постоянные для всей данной поверхности и вообще меняющиеся от одной поверхности к другой. Эти параметры мы можем рассматривать как неизвестные функции единственной переменной W, определенной уравнением (1). Беря частную производную от (4) по x, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

где для краткости положено $\frac{\partial f}{\partial W}$ вместо

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dW} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{dW} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dW}. \tag{6}$$

Беря вторую производную, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial W \partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

где $\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}$ обозначает производную выражения (6) по W, полученную, считая a, b, c как функции W. Исключая $\frac{\partial W}{\partial x}$ из (7) при посредстве (5) и умножая на $\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^2$, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial W \partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^3\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Суммируя это с двумя аналогичными выражениями и замечая, что

$$2\sum \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial W \partial x} = \frac{\partial}{\partial W}(\Delta_1 f),$$

получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^2 \Delta_2 f - \frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial}{\partial W}(\Delta_1 f) + \frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\Delta_1 f + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^3 (2\omega^2 - 4\pi f k) = 0. \tag{8}$$

Обозначая через T сумму трех первых членов правой части этого уравнения, видим, что отношение

$$\frac{T}{\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^3} \tag{9}$$

должно быть постоянным на каждой поверхности системы (4), т. е. если посредством уравнений (4) исключить из выражения (9) одну из координат, например z, то должны исчезнуть также и x и y.

Обратно, если возможно задать функции a, b, c, ... переменной W так, чтобы отношение (9) оказалось функцией одного лишь W, следовательно, постоянной на каждой поверхности з данного семейства, другими словами, чтобы потенциальная функция V распределения массы была такова, чтобы $\Delta_2 V = \frac{1}{f}(\Delta_2 W - 2\omega^2)$ была чистой постоянной на каждой поверхности системы (4) и, следовательно, этим же свойством обладала плотность k, то это и будет необходимым условием для относительного равновесия жидкости.

Когда задание указанных функций $a, b, c, \ldots$ теоретически возможно, то фактическое определение их зависит от интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений второго порядка. При интегрировании таких уравнений, или, лучше, при обсуждении существования интегралов этих уравнений, нужно принять во внимание предельные условия, вытекающие из теоремы Стокса и указанные в предыдущем параграфе. Действительно, величина силы тяжести дается выражением;

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2},$$

или же, принимая конфигурацию, выражаемую формулой (4):

$$g = \frac{\pm\sqrt{\Delta_1 f}}{\frac{\partial f}{\partial W}}. \tag{10}$$

Давая здесь $a, b, c, \ldots$ и их первым производным значения, принимаемые ими на внешней поверхности, получим выражение для g_s поверхностной силы тяжести. Это выражение должно быть тождественным с тем, которое дает теорема Стокса, и определяется геометрической природой внешней поверхности. Отсюда получаются соотношения между значениями $a, b, c, \ldots$ и их первыми производными по W для точки, лежащей в пределах интегрирования. Если возможно определить $a, b, c, \ldots$ в функциях параметра W таким образом, чтобы были удовлетворены условия на контуре и отношение (9) было постоянным на каждой поверхности семейства (4), то это (4) дает возможную конфигурацию относительного равновесия при вращении жидкости вокруг оси, подходящим образом выбранной. Найденные выражения $a, b, c, \ldots$ в функции W, будучи подставленными в (4) и (8), по исключении из этих двух уравнений W дают плотность жидкости k для каждой точки x, y, z.

76. Эллипсоидальные конфигурации вообще. Пусть поверхности равной плотности будут концентрическими эллипсоидами с совпадающими осями. Уравнение (4) может быть написано в виде:

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} + \frac{z^2}{2c^2} - \frac{1}{2} = 0, \tag{11}$$

где a, b, c — неизвестные функции параметра W. Обозначая через a', a'' первую и вторую производные от a по W и аналогично для b и c и полагая

$$E(a, x) + E(b, y) + E(c, z) = \sum E(a, x),$$

получим:

$$\Delta_1 f = \sum \frac{x^2}{a^4}, \qquad \Delta_2 f = \sum \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial W} = -\sum \frac{x^2 a'}{a^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} = -\sum \frac{x^2 a''}{a^3} + 3\sum \frac{x^2 a'^2}{a^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial W}(\Delta_1 f) = -4\sum \frac{x^2 a'}{a^5}.$$

Подставляя в (8) и полагая

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad z = 0$$

[что тождественно удовлетворяет (11)], то уравнение принимает вид:

$$A\cos^4\theta + B\sin^4\theta + C\sin^2\theta\cos^2\theta - (2\omega^2 - 4\pi fk)\left(\frac{a'}{a}\cos^2\theta + \frac{b'}{b}\sin^2\theta\right)^3 = 0, \qquad (12)$$

где A, B, C независимы от θ. Необходимо, чтобы это соотношение удовлетворялось при любом θ, при условии, конечно, что k независимо от θ. Это требует прежде всего, чтобы было $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Подобным же образом найдем $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, т. е. эллипсоиды должны быть подобными, — случай, который мы исключили в предыдущем параграфе.

Таким образом эллипсоидальное распределение невозможно.

77. Эллипсоидальная конфигурация со слоями конечной толщины. В предшествующем анализе предполагалось, что в любой части планетной массы изменение плотности непрерывно и притом таково, что существует в данной области $\Delta_2 V$. Этим не исключается возможность конфигураций *со слоями конечной толщины*. Но нетрудно доказать, что и такое распределение несовместимо с относительным равновесием, по крайней мере, если предположить, что плотность возрастает от поверхности к центру. Ограничимся случаем одного однородного слоя, заключенного между двумя эллипсоидами E_1 и E_2, который окружает однородную эллипсоидальную массу, ограниченную поверхностью E_2. Обозначив через k_1, k_2 две плотности, потенциальную функцию V планеты в любой точке можно рассматривать как сумму потенциальной функции массы M_1, ограниченной эллипсоидом E_1 плотности k_1, и потенциальной функции массы M_2, ограниченной эллипсоидом E_2 плотности $k_2 - k_1$.

В точке поверхности E_1 потенциальная функция массы M_1 есть целая рациональная функция координат, а массы M_2 — трансцендентная функция, *если только оба эллипсоида не являются софокусными*. Сумма $fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ может поэтому оставаться постоянной на поверхности E_1 только в этом последнем случае. Таким образом необходимым условием равновесия является требование, чтобы эллипсоиды E_1 и E_2 были софокусными.

При этом предположении пусть a, b, c — полуоси E_1 и

$$\alpha = \sqrt{a^2 - u}, \quad \beta = \sqrt{b^2 - u}, \quad \gamma = \sqrt{c^2 - u}$$

— полуоси E_2. Положив

$$\varphi(s) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{1}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}, \tag{13}$$

потенциальная функция массы M_1 на точку (x, y, z) поверхности E_1 будет:

$$V_1 = \pi k_1 abc \int_0^\infty \varphi(s)\, ds. \tag{14}$$

Потенциальная функция массы M_2 на ту же точку, в силу теоремы Лапласа о притяжении софокусных эллипсоидов, может быть написана так:

$$V_2 = \pi(k_2 - k_1)\alpha\beta\gamma \int_0^\infty \varphi(s)\, ds.$$

Положив

$$k_1 + (k_2 - k_1)\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = k,$$

получим:

$$V = V_1 + V_2 = \pi k abc \int_0^\infty \varphi(s)\, ds,$$

и условия равновесия на поверхности E_1 будут, как для случая однородного эллипсоида (§ 60):

$$\left(A - \frac{\omega^2}{2f}\right)a^2 = \left(B - \frac{\omega^2}{2f}\right)b^2 = Cc^2, \tag{a}$$

где

$$A = \pi k abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}}$$

и т. д.

Найдем еще условие равновесия на поверхности эллипсоида E_2. В точке последней (x, y, z) потенциальная функция массы M_1 еще выражается через (14). Что касается V_2, то оно выражается формулой:

$$V_2 = \pi(k_2 - k_1)\alpha\beta\gamma \int_0^\infty \psi(s)\, ds,$$

где $\psi(s)$ есть то, во что обращается $\varphi(s)$, когда a, b, c изменены на α, β, γ. Но, если s обращается в $s+u$, то a^2+s обращается в a^2+s, и предыдущая формула принимает вид:

$$V_2 = \pi(k_2 - k_1)\alpha\beta\gamma \int_{-u}^\infty \varphi(s)\, ds.$$

Таким образом потенциальная функция на рассматриваемую точку может быть выражена так:

$$V = V_1 + V_2 = \pi k abc \int_0^\infty \varphi(s)\, ds \quad \pi(k_2 - k_1)\alpha\beta\gamma \int_{-u}^0 \varphi(s)\, ds,$$

где k имеет предыдущее значение. Положим:

$$H=\pi(k_2-k_1)\alpha\beta\gamma,$$

$$\xi=H\int\limits_{-u}^{0}\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}},\quad \eta=H\int\limits_{-u}^{0}\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R_s}},\quad \zeta=H\int\limits_{-u}^{0}\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

Тогда найденное выражение для V может быть написано так:

$$V=K_1-(A+\xi)x^2-(B+\eta)y^2-(C+\zeta)z^2,$$

где K_1 независимо от x, y, z. Отсюда условие равновесия на поверхности E_2 будет:

$$\left(A+\xi-\frac{\omega^2}{2f}\right)\alpha^2=\left(B+\eta-\frac{\omega^2}{2f}\right)\beta^2=(C+\zeta)\gamma^2.$$

Исключая A, B посредством (a), эти соотношения легко приводятся к

$$\left.\begin{aligned} C\left(\frac{c^2}{a^2}\alpha^2-\gamma^2\right)&=\zeta\gamma^2-\xi\alpha^2,\\ C\left(\frac{c^2}{b^2}\beta^2-\gamma^2\right)&=\zeta\gamma^2-\eta\beta^2.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

Заменим α^2, β^2, γ^2 их выражениями a^2-u, b^2-u, c^2-u и подставим вместо ξ, η, ζ их выражения. Первая из этих формул может быть написана так:

$$C\frac{a^2-c^2}{a^2}u=H(c^2-a^2)\int\limits_{-u}^{0}\frac{(u+s)\,ds}{(a^2+s)(c^2+s)\sqrt{R_s}}.\qquad\text{(c)}$$

Поскольку s меняется от $-u$ до нуля, сумма $u+s$ положительна. Две части этого равенства имеют, следовательно, разные знаки (при гипотезе $k_2>k_1$), и первая из формул (b) не может существовать иначе, как если $a=c$. Подобным же образом вторая формула может существовать лишь при $b=c$. Итак, мы вернулись к случаю сферической конфигурации, которая уже исключена.

Если мы не хотим ограничиться гипотезой $k_2>k_1$, рассуждение может быть проведено так: (c) можно написать (при $a\neq c$) в виде:

$$\frac{Cu}{H}=-a^2\int\limits_{-u}^{0}\frac{(u+s)\,ds}{(a^2+s)(c^2+s)\sqrt{R_s}}.$$

Из второй формулы (b) получим аналогичное соотношение, в котором a заменено на b. Сравнивая обе формулы, мы сразу видим, что должно быть:

$$(a^2-b^2)\int\limits_{-u}^{0}\frac{(u+s)\,ds}{R_s^{\frac{3}{2}}}=0,$$

каковое выражение, так как все элементы интеграла положительны, может существовать лишь при $a=b$. Эллипсоиды E_1 и E_2 должны быть сфероидами вращения. Теория Маклорена определит сжатие эллипсоида E_1.

Формула (с) даст тогда отношение $\frac{(k_2 - k_1)}{k}$, а следовательно, и отношение $\frac{k_2}{k_1}$.

78. Эллипсоидальные слои как приближенная конфигурация равновесия. Если эллипсоидальная конфигурация не может *строго* удовлетворять условиям относительного равновесия, тем не менее она удовлетворяет им с приближением, которое можно назвать *степенью приближения Клеро*, т. е. пренебрегая второй степенью сжатия и произведением сжатия на ω^2. Положим:

$$a^2 = c^2(1 + e), \qquad b^2 = c^2(1 + h).$$

Пренебрегая членами с e^2, h^2, уравнение (4) семейства эллипсоидов может быть написано так:

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - ex^2 - hy^2 - c^2 = 0, \tag{15}$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial W} = -2cc' - e'x^2 - h'y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} = -e''x^2 - h''y^2 - 2c'^2 - 2cc'',$$

$$\Delta_1 f = 4(x^2 + y^2 + z^2) - 8ex^2 - 8hy^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial W}(\Delta_1 f) = -8e'x^2 - 8h'y^2,$$

$$\Delta_2 f = 6 - 2e - 2h.$$

Здесь через e', e'', h', h'' обозначены производные от e, h по параметру W. Подставляя в (8) и исключая z^2 посредством (15), уравнение (8) принимает вид:

$$A + Bx^2 + Cy^2 = 0,$$

что должно удовлетворяться бесконечным множеством независимых значений x и y, откуда должно быть:

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Выполняя указанную подстановку и пренебрегая степенями выше первой от e, h, e', h', e'', h'', первые два равенства принимают форму:

$$\frac{2 - e - h}{c} - \frac{c''}{c'^2} + c'(4\pi fk - 2\omega^2) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{c'e'}{c} + \left(\frac{c''}{c} + \frac{c'^2}{c^2}\right)e - \frac{e''}{2} + 6\pi fke'c'^2 = 0. \tag{17}$$

Третье получается из этого последнего заменой e на h.

Написанные здесь производные берутся по W. Примем теперь за независимую переменную c. Получим:

$$\frac{dW}{dc} = \frac{1}{c'}, \qquad \frac{d^2W}{dc^2} = -\frac{c''}{c'^3},$$

$$e' = c'\frac{de}{dc}, \qquad e'' = c''\frac{de}{dc} + c'^2\frac{d^2e}{dc^2}.$$

Выражения (16) и (17) принимают вид:

$$\frac{2-e-h}{c}\frac{dW}{dc}+\frac{d^2W}{dc^2}+4\pi fk-2\omega^2=0, \tag{A}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{de}{dc}-\frac{e}{c}\right)\frac{d^2W}{dc^2}+\left(\frac{1}{c}\frac{de}{dc}+\frac{e}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2e}{dc^2}\right)\frac{dW}{dc}+6\pi fk\frac{de}{dc}=0. \tag{B}$$

Нетрудно получить из (A) выражение $\frac{dW}{dc}$ без произвольной постоянной. Однако для подстановки в (B) нам нужны лишь выражения $\frac{dW}{dc}$ и $\frac{d^2W}{dc^2}$ с точностью до членов порядка e, h, ω^2. С этой степенью приближения $\frac{dW}{dc}$ выражает просто притяжение сферы переменной плотности k на точку P, находящуюся на расстоянии c от центра, т. е.

$$\frac{dW}{dc}=-\frac{4\pi f}{c^2}\int_0^c kc^2\,dc.$$

Положив

$$l=\int_0^c kc^2\,dc,$$

получим:

$$\frac{dW}{dc}=-\frac{4\pi kf}{c^2}l, \qquad \frac{d^2W}{dc^2}=\frac{8\pi f}{c^2}l-4\pi fk.$$

Подставляя это в (B) и умножая на $\frac{c^3}{2\pi fl}$, получаем:

$$\frac{d^2e}{dc^2}+\frac{2c^2k}{l}\frac{de}{dc}-ec\left(\frac{6}{c^3}-\frac{2k}{l}\right)=0. \tag{18}$$

Это есть знаменитое *уравнение Клеро*, которое, следуя Тодгентеру, назовем *первичным уравнением*; оно служит для определения закона изменения сжатия от одного эллипсоида к другому, в случае если задан закон изменения k с c.

Сам Клеро приходит к уравнению (18) гораздо более сложным путем, чем это сделали мы. Он вычисляет приближенным образом притяжение, которое оказывают эллипсоидальные слои на внутреннюю точку, и ставит условие, чтобы равнодействующая этого притяжения и центробежной силы была нормальна к поверхности эллипсоида, проходящего через данную точку.

Для величины h, от которой зависит сжатие главного сечения (b, c), получается такое же выражение, как и (18), путем замены e на h.

Итак, e и h, рассматриваемые как функции c, являются двумя решениями диференциального уравнения второго порядка. Докажем, что при пограничных условиях, вытекающих из теоремы Стокса, и припоминая положения § 74, эти два решения должны совпадать, и для всех значений c должно быть $e=h$.

79. Эллипсоиды равной плотности суть сфероиды вращения. Предположим, что вращение совершается вокруг оси c со скоростью ω. Обозначая через

C, E, H значения c, e, h для внешнего эллипсоида, выражение для поверхностной силы тяжести будет (§ 29):

$$g_s = G_0 \left\{ 1 + (E - 5\gamma) \frac{x^2}{2C^2} + (H - 5\gamma) \frac{y^2}{2C^2} \right\},$$

где G_0 и γ — положительные постоянные. С другой стороны, из (10) для формы (15) функции f получаем, пренебрегая вторыми степенями e, h, e', h':

$$g_s = \frac{\partial W}{\partial c_1} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2C} \left(\frac{de}{dc_1} + \frac{E}{C} \right) - \frac{y^2}{2C} \left(\frac{dh}{dc_1} + \frac{H}{C} \right) \right\},$$

где индексы 1, приписанные производным, указывают значения для $c = C$. Сравнивая два выражения для g_s, имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2E + C \frac{de}{dc_1} &= 5\gamma, \\ 2H + C \frac{dh}{dc_1} &= 5\gamma. \end{aligned} \right\} \qquad (19)$$

Рассмотрим теперь диференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2x^2 k}{I} \frac{df}{dx} - \frac{f}{x^2} \left(6 - \frac{2kx^3}{I} \right) = 0, \qquad (20)$$

где k — заданная функция x, а

$$I = \int_0^x kx^2\, dx,$$

и докажем, что f вполне определяется условиями: $f = 1$ при $x = C$ и f конечно вместе со своей первой производной в интервале от 0 до C для x. Действительно, пусть будут f и φ два решения уравнения (20), удовлетворяющие этим условиям. Из (20) и аналогичного уравнения для φ легко заключаем:

$$\varphi \frac{d^2 f}{dx^2} - f \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \left(\varphi \frac{df}{dx} - f \frac{d\varphi}{dx} \right) \frac{2x^2 k}{I}.$$

Интегрируя от x до C, согласно сделанным предположениям, что f и φ равны единице при $x = C$, найдем:

$$\log \left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \right)_C = \log \left(\varphi \frac{df}{dx} - f \frac{d\varphi}{dx} \right)_x - \int_x^C \frac{2x^2 k}{I}\, dx. \qquad (21)$$

Функцию $\frac{2x^2 k}{I}$ можно написать в форме $\frac{6k}{xk_m}$, где

$$\lim_{x=0} \frac{k}{k_m} = 1,$$

Она, следовательно, становится бесконечностью порядка $\frac{1}{x}$, когда x стремится к нулю. Отсюда интеграл в правой части (21) становится бесконечностью, оставаясь положительным, когда x стремится к нулю. Следовательно,

$$\log \left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \right)_C = -\infty,$$

что требует, чтобы было $\left(\frac{df}{dx}\right)_C = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_C$. Итак, f и φ должны совпадать во всем интервале интегрирования. Если не принимать условия, чтобы f равнялось единице для $x = C$, то f определяется при помощи (20) и условия регулярности за исключением постоянного фактора. Решения для e и h (18) и аналогичные для h будут, следовательно, вида:

$$e = Ef(c), \qquad h = Hf(c).$$

Вводя такие выражения в (19), мы видим, что должно быть $E = H$, и отсюда $e = h$ для всех значений c.

Таким образом доказано, что эллипсоиды являются сфероидами вращения.

80. Гипотеза, что плотность возрастает от поверхности к центру. Можно доказать, что при этой гипотезе e должно быть положительным, т. е. эллипсоиды должны быть сжатыми, и что сжатие должно уменьшаться от поверхности к центру.

Действительно, помножив первичное уравнение Клеро (18) на $c^3 I$, получим:

$$c^3 I \frac{d^2 e}{dc^2} + 2c^3 k \frac{de}{dc} - 6ceI + 2c^4 ke = 0. \tag{22}$$

Замечая, что $\left(\frac{dI}{dc}\right) = c^2 k$, сумму первых двух членов можно написать:

$$\frac{c^3}{I} \frac{d}{dc}\left(I^2 \frac{de}{dc}\right).$$

Что касается двух других членов, заметим, что можно положить

$$I = \frac{c^3}{3} k_m,$$

где k_m есть одно из значений, которые принимает k в интервале $(0, c)$. Вставляя это в третий член (22), находим:

$$\frac{c^3}{I} \frac{d}{dc}\left(I^2 \frac{de}{dc}\right) = 2c^4 e\,(k_m - k). \tag{22'}$$

Так как мы предположили, что плотность убывает с возрастанием c, то $k_m - k > 0$. Поэтому $I^2 \frac{de}{dc}$ будет возрастать или убывать при возрастании c в зависимости от того, будет ли e положительным или отрицательным. И так как эта функция обращается в нуль при $c = 0$ (вследствие обращения в нуль множителя I), то $\frac{de}{dc}$ имеет знак одинаковый со знаком e, и оба они или все время положительны, или все время отрицательны во всем интервале $(0, c)$. С другой стороны, первая формула (19) показывает, что E и $\frac{de}{dc_1}$ не могут быть оба отрицательны; следовательно, e и $\frac{de}{dc}$ должны быть оба положительными.

Итак, при гипотезе, что плотность возрастает с глубиной, эллипсоиды должны быть сжатыми, и сжатие должно уменьшаться от поверхности к центру.

Между тем, имеется верхний предел для величины E, который получим, замечая, что из первой формулы (19), так как $\frac{de}{dc_1}$ положительно, следует:

$$2E < 5\gamma.$$

Нижний предел мы найдем, замечая, что (§ 44) разность между моментом инерции Q относительно полярной оси и моментом P относительно экваториальной оси может быть выражена через наши величины так:

$$Q - P = \frac{1}{3} MC^2(E - \gamma), \tag{23}$$

где M — общая масса планеты.

В следующем параграфе мы докажем, что $Q > P$. Следовательно, $E > \gamma$. Итак, получаем:

$$\gamma < E < \frac{5}{2}\gamma,$$

т. е. сжатие внешней поверхности (которое с нашей степенью приближения может быть выражено через $\frac{E}{2}$) заключается между $\frac{\gamma}{2}$ и $\frac{5\gamma}{4}$. Первое значение мы имеем в случае, когда вся масса сосредоточена в центре (Гюйгенс), а второе значение в случае однородности всей массы (Ньютон).

Если обозначим через I_1 значение интеграла I при $c = C$, то масса M может быть выражена, пренебрегая сжатием, через $4\pi I_1$, и с нашей степенью приближения (23) может быть еще написано так:

$$Q - P = \frac{4}{3}\pi C^2 I_1 (E - \gamma). \tag{23'}$$

81. Разности между главными моментами инерции неоднородной эллипсоидальной массы. Моменты инерции однородного эллипсоида (a,b,c) с массой M относительно осей a и c соответственно равны:

$$p = \frac{M}{5}(b^2 + c^2),$$
$$q = \frac{M}{5}(b^2 + a^2),$$

откуда

$$q - p = \frac{M}{5}(a^2 - c^2).$$

Если эллипсоид — тело вращения и мы положим $a^2 = c^2(1 + e)$, то, опуская члены с e^2, получим:

$$q - p = \frac{4}{15}\pi k c^5 e.$$

Для слоя, заключенного между двумя эллипсоидами, бесконечно близкими, концентрическими и имеющими совпадающее направление осей, соответствующая разность выражается так:

$$d(q - p) = \frac{4}{15}\pi k\, d(c^5 e).$$

Отсюда для массы, составленной из эллипсоидальных слоев, рассмотренной нами в предшествующем параграфе, разность между главным моментом инерции Q относительно оси вращения и моментом P относительно экваториального диаметра равна[1]:

$$Q - P = \frac{4}{15}\pi \int_0^c k\, d(c^5 e). \tag{24}$$

Так как e возрастает с c, то ясно, что $Q - P > 0$, как это утверждалось в предыдущем параграфе.

Найдем еще с той же степенью приближения выражение для Q. Имеем, сохраняя прежние обозначения:

$$q = \frac{M}{5} 2c^2 (1 + e) = \frac{8}{15}\pi k c^5 (1 + 2e),$$

$$dq = \frac{8}{3}\pi k c^4\, dc + \frac{16}{15}\pi k\, d(ec^5),$$

откуда

$$Q = \frac{8}{3}\pi \int_0^c k c^4\, dc + \frac{16}{15}\pi \int_0^c k\, d(ec^5). \tag{25}$$

82. Преобразование Радо уравнения Клеро. Теоретическое выражение отношения $(Q - P):Q$. Для Земли наблюдение явления прецессии дает отношение $(Q - P):Q$. Однако полезно иметь и теоретическое выражение.

Положим:

$$\eta = \frac{c}{e}\frac{de}{dc}. \tag{26}$$

Согласно сказанному в § 80 это есть положительная переменная. Можно еще доказать, что $\eta < 3$. Действительно, из (22) легко вывести интегрированием по частям в интервале $(0, c)$:

$$c^2 I\left(3e - c\frac{de}{dc}\right) = \int_0^c k\, d(c^5 e).$$

И так как e возрастает с c, интеграл положителен, и

$$3e - c\frac{de}{dc} > 0,$$

откуда

$$\eta < 3.$$

Из (26) заключаем:

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{c}{e}\frac{d^2 e}{dc^2} - \frac{c}{e^2}\left(\frac{de}{dc}\right)^2 + \frac{1}{e}\frac{de}{dc}, \tag{27}$$

или иначе

$$\frac{c}{e}\frac{d^2 e}{dc^2} = \frac{d\eta}{dc} + \frac{\eta^2 - \eta}{c}.$$

[1] При помощи этого выражения для $Q - P$ нетрудно вывести формулу (23′) непосредственно из уравнения (18).

Выражение (18), помноженное на $\frac{c}{e^2}$, дает:

$$\frac{d\eta}{dc}+\frac{\eta^2-\eta}{c}+\frac{2c^2k}{I}(1+\eta)-\frac{6}{c}=0.$$

Помножив на c^2I, это можно написать так:

$$2\sqrt{1+\eta}\,\frac{d}{dc}(c^2\sqrt{1+\eta}\,I)=cI(10+5\eta-\eta^2). \tag{28}$$

Обозначим через η_1 значение η для $c=C$; в силу (19) найдем:

$$\eta_1=\frac{5\gamma}{E}-2. \tag{29}$$

Интегрируя (28) между 0 и C, после разделения на $2\sqrt{1+\eta}$ получим:

$$C^2\sqrt{1+\eta_1}\,I_1=\int\limits_0^C\frac{10+5\eta-\eta^2}{2\sqrt{1+\eta}}\,cI\,dc, \tag{30}$$

где I_1 имеет то же значение, как и в формуле (23). Правая часть (30) может быть написана так:

$$\frac{10+5\xi-\xi^2}{2\sqrt{1+\xi}}\int\limits_0^C cI\,dc,$$

где ξ есть некоторое среднее значение, принимаемое η в интервале $(0, C)$. Имеем, далее, интегрируя по частям:

$$\int\limits_0^C cI\,dc=\frac{C^2I_1}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^C kc^4\,dc,$$

или же, вспоминая выражение Q и пренебрегая членами с e:

$$\int\limits_0^C cI\,dc=\frac{C^2I_1}{2}-\frac{3}{16\pi}Q.$$

С другой стороны, уравнение (30), если положить

$$F=\frac{10+5\xi-\xi^2}{2\sqrt{1+\xi}}, \tag{31}$$

можно написать так:

$$C^2\sqrt{1+\eta_1}\,I_1=F\int\limits_0^C cI\,dc=\frac{F}{2}\left(C^2I_1-\frac{3}{8}\frac{Q}{\pi}\right),$$

откуда

$$Q=\left(1-\frac{2}{F}\sqrt{1+\eta_1}\right)C^2I_1\frac{8\pi}{3}.$$

Деля (23') на Q и вставляя для η его выражение (29), получаем окончательно:

$$\frac{Q-P}{Q}=\frac{\frac{1}{2}(E-\gamma)}{1-\frac{2}{F}\sqrt{\frac{5\gamma}{E}-1}}. \tag{32}$$

Если здесь найдем наибольшее значение функции F, определяемой (31), которое она получает при $\xi=\frac{1}{3}$, то получим 5,0037. Если приравнять этому функцию F в (32), правая часть получит наименьшую возможную величину.

Таким образом имеем:

$$\frac{Q-P}{Q}\geqslant\frac{E-\gamma}{2-\frac{4}{5{,}0037}\sqrt{\frac{5\gamma}{E}-1}}, \tag{33}$$

и эта формула может служить для получения верхнего предела для величины E, в случае если задано значение $(Q-P):Q$. Этот вывод принадлежит Радо.

83. Общее исследование конфигурации, мало отличающейся от концентрических сфер. Лаплас пытался доказать, что в случае жидкой планеты единственно возможная конфигурация равновесия есть эллипсоидальная конфигурация Клеро, рассмотренная в предшествующих параграфах, если наложено условие, что поверхности равной плотности настолько мало отличаются от концентрических сфер, что можно пренебречь квадратами отклонения от сферы и произведением этих отклонений на квадрат угловой скорости. Но доказательство Лапласа неудовлетворительно ввиду того, что оно основано на разложении потенциальной функции по положительным и отрицательным степеням радиуса-вектора, которое законно лишь в том случае, если поверхности равной плотности *в точности* сферы. Мы даем здесь в общих чертах доказательство, которое свободно от этого недостатка.

Обозначим вообще через

$$f=r-a-\alpha Y=0 \tag{34}$$

уравнение одной из поверхностей равной плотности, подразумевая, что a есть функция от W, а Y — функция от a, θ, υ, причем r, θ, υ — полярные координаты. Допустим, что можно пренебречь квадратом постоянной α и произведением ее на ω. Получим:

$$\Delta_1 f=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\right)^2,$$

$$\Delta_2 f=\frac{2}{r}-\alpha\Delta_2 Y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}=-\left(1+\alpha\frac{\partial Y}{\partial a}\right)a'$$

(здесь a' производная от a по W),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}=-\alpha\frac{\partial^2 Y}{\partial a^2}a'^2-\left(1+\alpha\frac{\partial Y}{\partial a}\right)a'',$$

и, отбрасывая члены с α^2:

$$\Delta_1 f = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial W}(\Delta_1 f) = 0, \qquad \Delta_2 f = \frac{2}{a} - \frac{2\alpha}{a^2} Y - \alpha\Delta_2 Y.$$

Положим:

$$Y = \sum_1^\infty h_n U_n,$$

где h_n — функция от a, и U_n — сферическая функция порядка n от θ и υ; имеем:

$$\Delta_2 Y = -\frac{1}{r^2}\sum_1^\infty n(n+1) h_n U_n.$$

Подставляя в (8) (§ 75) и приравнивая нулю сумму членов, не зависящих от θ и υ, получим:

$$\frac{2a'^2}{a} - a'' - a'^3(2\omega^2 - 4\pi fk) = 0. \tag{35}$$

Приравнивая затем нулю коэфициент при U_n, имеем:

$$\frac{a'^2}{a^2}(n^2+n-2)h_n + \left(\frac{4a'^2}{a} - a''\right)\frac{dh_n}{da} - a'^2\frac{d^2h_n}{da^2} - 3a'^3(2\omega^2 - 4\pi fk)\frac{dh_n}{da} = 0. \tag{36}$$

Обращая (как в § 78) производную, имеем:

$$\frac{dW}{da} = \frac{1}{a'}, \qquad \frac{d^2W}{da^2} = -\frac{a''}{a'^3},$$

так что (35) и (36), деленные на a'^3, могут быть написаны в виде:

$$\frac{2}{a}\frac{dW}{da} + \frac{d^2W}{da^2} = 2\omega^2 - 4\pi fk, \tag{35'}$$

$$\left(\frac{n^2+n-2}{a'}h_n - \frac{d^2h_n}{da^2} + \frac{4}{a}\frac{dh_n}{da}\right)\frac{dW}{da} + \frac{dh_n}{da}\frac{d^2W}{da^2} - 3(2\omega^2 - 4\pi fk)\frac{dh_n}{da} = 0. \tag{36'}$$

Интегрируя (35′), находим без затруднений:

$$\frac{dW}{da} = \frac{2}{3}\omega^2 a - \frac{4\pi f}{a^2}\int_0^a ka^2\,da.$$

Подставляя в (36′) и замечая, что членами с ω^2 можно пренебречь, это выражение напишем так:

$$(n^2+n-2)\frac{h_n}{a^2} - \frac{d^2h_n}{da^2} + \frac{2}{a}\left(1 - \frac{a^3k}{I}\right)\frac{dh_n}{da} = 0, \tag{36''}$$

где согласно обозначению, аналогичному § 78, положено

$$I = \int_0^a ka^2\,da.$$

Что касается условий, вытекающих из теоремы Стокса, упомянутых в § 74, заметим, что из общей формулы (10) в настоящем случае и с нашей степенью приближения имеем следующее выражение для поверхностной силы тяжести:

$$g_s = -\left(\frac{dW}{da}\right)_1 - \frac{fM\alpha}{A^2}\sum_1^{\infty} U_n\left(\frac{dh_n}{da}\right)_1, \tag{37}$$

где A — значение a на внешней поверхности, и индексы 1 обозначают значения производных для $a = A$. В правой части (37) положено (что законно с нашей степенью приближения) $\frac{fM}{A^2}$ вместо $\left(\frac{dW}{da}\right)_1$, где M — полная масса планеты. Из теории Стокса (глава VIII), с другой стороны, выводим, что когда внешняя поверхность равновесия удовлетворяет уравнению:

$$r = A - \alpha\sum_1^{\infty} H_n U_n$$

(где H_n — значение h_n для $a = A$), выражение для g_s может быть принято в форме:

$$g_s = \sum_0^{\infty} G_n,$$

где G_n — сферическая функция порядка n от 0 и 2 и где для $n > 2$ имеем:

$$G_n = \frac{fM\alpha}{A^3}(n-1)H_n U_n.$$

Сравнивая это выражение g_s с (37), получаем для $n > 2$:

$$\left(\frac{dh}{da}\right)_1 = -(n-1)\frac{H_n}{A} \tag{38}$$

— условие на контуре, с которым приходится считаться при рассмотрении вопроса о существовании решения уравнения (36).

Положим для этой цели

$$h_n = az, \quad H_n = AZ.$$

Уравнения (36″) и (38) принимают вид:

$$a\frac{d^2z}{da^2} + \frac{2a^3k}{I}\frac{dz}{da} - \left(n^2 + n - \frac{2a^3k}{I}\right)\frac{z}{a} = 0, \tag{37'}$$

$$A\left(\frac{dz}{da}\right)_1 = -nZ. \tag{38'}$$

Приемом, аналогичным употребленному для вывода (22′) (§ 80) из уравнения Клеро, можем написать (37′) в виде:

$$\frac{a^3}{I^2}\frac{d}{da}\left(I^2\frac{dz}{da}\right) = az\left(n^2 + n - \frac{2a^3k}{I}\right); \tag{39}$$

полагая $\frac{1}{3}a^3k_m$ вместо I, правую часть представим так:

$$az\left(n^2 + n - 6\frac{k}{k_m}\right),$$

где при обычном предположении, что плотность возрастает от поверхности к центру, имеем $k < k_m$, и для $n \geqslant 2$ величина в скобках положительна. Из (39) рассуждением, аналогичным примененному в § 80, можно, однако, доказать, что при $n > 2$ z и $\frac{dz}{da}$ должны быть одного знака, что несовместимо с условием (38′). Следовательно, должно быть $h_n = 0$ при $n > 0$. Это с нашей степенью приближения доказывает, что поверхности равной плотности должны быть эллипсоидами.

Глава тринадцатая

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЖИДКИХ ПЛАНЕТ К СЛУЧАЮ ЗЕМЛИ

84. Верхний предел сжатия Земли, выведенный из постоянной прецессии. Формулы, выведенные в предыдущей главе, имеют приложение к исследованию формы и внутреннего строения Земли, если допустить обычно принятую гипотезу, что наша планета однажды была в жидком состоянии, и другое, очень вероятное, предположение, что отвердение Земли мало изменило внутреннее распределение массы.

Начнем с применения к Земле формулы (33) § 82. Наблюдение дает для постоянной γ величину $\frac{1}{288,5}$ и для отношения $\frac{Q-P}{Q}$ значение $\frac{1}{305,6}$ (что выводится из механической теории вращения Земли и из наблюдения явления лунно солнечной прецессии); величина $\frac{E}{2}$ (которая с нашей степенью приближения равна сжатию внешнего сфероида) из геодезических измерений получается заключенной между $\frac{1}{293,5}$ и $\frac{1}{300}$. Формула (33) дает между тем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q-P}{Q} &= \frac{1}{300,7} \quad \text{для} \quad \frac{E}{2} = \frac{1}{293,5}, \\ \frac{Q-P}{Q} &= \frac{1}{309,0} \quad\ \ » \quad\ \ \frac{E}{2} = \frac{1}{300}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если задать для $\frac{Q-P}{Q}$ упомянутое значение $\frac{1}{305,6}$, то из (33) заключаем, что E не может превзойти предела $\frac{1}{297,4}$. Согласно этой теории и при указанных предположениях можно, следовательно, заключить, что *сжатие Кларка* $\left(\frac{1}{293,5}\right)$ *несовместимо со значением* $\frac{1}{305,6}$ *постоянной прецессии.* Не следует, однако, забывать, что в наших вычислениях отброшены малые второго порядка, и это обстоятельство может вызвать ошибку в несколько единиц в знаменателе вторых частей (1). Но не менее верно, что геодезические работы и измерения силы тяжести, столь быстро развивавшиеся в последние десятилетия, с большой долей вероятности показали, что сжатие Кларка (слишком поспешно принятое геодезическими службами некоторых государств) заметно превосходит истинное.

85. Гипотезы Лежандра относительно закона изменения плотности внутри Земли. Первичное уравнение Клеро (§ 78) дает закон, по которому изменяется сжатие эллипсоидов равной плотности, если задан закон изменения плотности, т. е. если дано k в функции от c. Мы ограничимся изучением закона Лежандра, выбранного с расчетом, чтобы облегчить интегрирование уравнения (18) (§ 78), но в то же время, как мы скоро убедимся, соответствующего достаточно правдоподобной гипотезе о степени сжимаемости жидкости.

Закон Лежандра, сохраняя обозначения предыдущей главы, может быть выражен так:

$$c^2 \frac{dk}{dc} = - m^2 I, \tag{2}$$

где m — постоянная. Припоминая что

$$\frac{dI}{dc} = c^2 k,$$

(2) дает:

$$c^2 \frac{d^2 k}{dc^2} + 2c \frac{dk}{dc} + m^2 k c^2 = 0,$$

или, по разделении на c:

$$\frac{d^2 (ck)}{dc^2} + m^2 ck = 0,$$

откуда после интегрирования:

$$ck = G \sin mc + H \cos mc$$

(G и H — произвольные постоянные). Так как k должно оставаться конечным при $c = 0$, то должно равняться нулю H, откуда

$$k = G \frac{\sin mc}{c}. \tag{3}$$

В частности, при $c = 0$ и при $c = C$, т. е. в центре и на внешней поверхности, мы имеем, соответственно:

$$k_0 = mG, \quad k_1 = G \frac{\sin mC}{C}.$$

Из (2) и (3) мы получаем:

$$I = - \frac{c^2}{m^2} \frac{dk}{dc} = \frac{G}{m^2} (\sin mc - mc \cos mc). \tag{4}$$

Первичное уравнение Клеро, помноженное на $c^3 I$, т. е.

$$c^3 I \frac{d^2 e}{dc^2} + 2 c^3 k \frac{de}{dc} - 6ceI + 2c^4 ke = 0,$$

после введения вместо e новой переменной y, определяемой так:

$$y = c^2 Ie, \tag{5}$$

дает:

$$c \frac{d^2 y}{dc^2} - 4 \frac{dy}{dc} - \frac{c^3}{I} \frac{dk}{dc} y = 0,$$

или на основании (2):

$$c \frac{d^2 y}{dc^2} - 4 \frac{dy}{dc} + m^2 cy = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет более общим образом функция:

$$y = (P + Qc + Rc^2) \cos mc + (P' + Q'c + R'c^2) \sin mc, \tag{6}$$

где постоянные интегрирования P, Q, R, P', Q', R' удовлетворяют четырем условиям:

$$6R + 2mQ' = 0, \qquad Q + mP' = 0,$$
$$6R' - 2mQ = 0, \qquad Q' - mP = 0,$$

откуда

$$Q = -mP', \quad Q' = Pm, \quad R = -\frac{1}{3}m^2P, \quad R' = -\frac{1}{3}m^2P'.$$

Подставляя это в (6), получим:

$$y = P\left\{\left(1-\frac{m^2c^2}{3}\right)\cos mc + mc\sin mc\right\} + P'\left\{\left(1-\frac{m^2c^2}{3}\right)\sin mc - mc\cos mc\right\}. \quad (7)$$

Для нахождения e нужно разделить y на c^2I, т. е

$$\frac{Gc^2}{m^2}(\sin mc - mc\cos mc). \qquad (8)$$

При $c=0$ коэфициент при P в (7) обращается в единицу, в то время как выражение (8) становится нулем. Если мы хотим, чтобы e, а следовательно, и y, оставались конечными при $c=0$, должно, следовательно, быть $P=0$. Поэтому имеем:

$$e = \frac{y}{c^2I} = H\frac{(3-m^2c^2)\sin mc - 3mc\cos mc}{m^2c^2(\sin mc - mc\cos mc)}, \qquad (9)$$

где через H обозначена постоянная $P'm^4 : 3G$. Для малых значений c числитель и знаменатель (9), разложенные в ряд, дают для первых членов разложения, соответственно,

$$\frac{1}{15}m^5c^5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}m^5c^5.$$

Отсюда значение e в центре равно $\frac{H}{5}$. Постоянные H и m находятся из условия, чтобы при $c=C$, т. е. на внешней поверхности, было:

$$e = E, \qquad 2E + C\left(\frac{de}{dc}\right)_1 = 5\gamma.$$

Второе из них, если для $\frac{de}{dc}$ внести выражение, полученное из (9), дает:

$$\frac{E}{5\gamma} = \frac{1}{2+\frac{C}{E}\left(\frac{de}{dc}\right)_1} = \frac{(m-\operatorname{tg} m)[3m+(m^2-3)\operatorname{tg} m]}{m^2[m^2+m\operatorname{tg} m+(m^2-2)\operatorname{tg}^2 m]}. \qquad (10)$$

В последней части мы приняли для простоты C за единицу (полярный радиус земного сфероида) Подставив в (10) для земного сжатия $\frac{E}{2}$ наиболее вероятное значение $\frac{1}{298{,}3}$ и решая (10) последовательными приближениями, имеем:

$$m = 2{,}53034 = 145^\circ\,41'.$$

Коэфициент H выведем из (9), полагая $c=1$, откуда

$$I = 0{,}256\,H.$$

Для нахождения G воспользуемся известным значением средней плотности Земли $k_m = 5{,}56$. Она выражается с точностью, достаточной для настоящего вычисления, через

$$k_m = 3\int_0^1 kc^2\,dc = 3I_1.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{G}{m^2}(\sin m - m\cos m) = \frac{k_m}{3}.$$

Полагая для k_m 5,56 и беря для m найденное значение, получаем:

$$G = 4{,}483.$$

Что касается плотности в центре и на поверхности, то

$$k_0 = mG = 11{,}34, \qquad k_1 = G\sin m = 2{,}57.$$

Отыщем, наконец, при помощи (23) (§ 80) числовое значение отношения $\frac{Q-P}{Q}$. Во второй части этой формулы положим $\frac{k_m}{3} = 1{,}853$ вместо I_1. Знаменатель Q вычислим по приближенной формуле (§ 81):

$$Q = \frac{8}{3}\pi\int_0^1 kc^4\,dc = \frac{8}{3}\frac{\pi G}{m^4}[(6m - m^3)\cos m + (3m^2 - 6)\sin m] = 0{,}9188\,\frac{8}{3}\pi,$$

и для E и γ возьмем полученные значения

$$\frac{2}{298{,}3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{288{,}5}.$$

Таким образом найдем:

$$\frac{Q-P}{Q} = \frac{1}{306{,}2}.$$

Это значение достаточно мало отличается от того, которое получается из наблюдений и теории лунно-солнечной прецессии.

86. Физический смысл гипотезы Лежандра. Лаплас допускает, что внутри жидкой планеты приращение плотности, соответствующее данному приращению давления, тем меньше, чем больше сама плотность. Это выражается формулой

$$dk = \frac{dp}{\varphi(k)}, \tag{11}$$

где $\varphi(k)$ — некоторая функция, которая возрастает вместе с k. Наиболее простая гипотеза состоит в предположении, что

$$dk = \frac{1}{h}\frac{dp}{k}, \tag{12}$$

где h - постоянная. С другой стороны, имеем (§ 54):

$$\int \frac{dp}{k} = W,$$

откуда

$$\frac{dW}{dc} = \frac{1}{k}\frac{dp}{dc} = h\frac{dk}{dc}.$$

Пренебрегая членами, зависящими от сжатия и центробежной силы (что можно сделать в этом грубом исследовании внутренней плотности планеты), можем положить (§ 78):

$$\frac{dW}{dc} = -\frac{4\pi f}{c^2}I.$$

Сравнивая эти два выражения для $\frac{dW}{dc}$, имеем:

$$c^2 \frac{dk}{dc} = -\frac{4\pi f}{h} l, \tag{13}$$

что и утверждается гипотезой Лежандра [формула (2)], которая имеет, таким образом, достаточно вероятную физическую основу. Из сравнения (2) с (13) следует:

$$h = \frac{4\pi f}{m^2}.$$

Вычислим согласно гипотезе Лежандра давление p_0 в центре Земли, предполагаемой жидкой. Интегрируя (12) от 0 до C и пренебрегая внешним давлением, имеем:

$$p_0 = \frac{h}{2}(k_0^2 - k_1^2) = \frac{2\pi f}{m^2}(k_0^2 - k_1^2).$$

Положим

$$m = \frac{2{,}53}{C}, \qquad 2\pi f = \frac{3g}{2k_m C},$$

где g — средняя поверхностная тяжесть, а k_m — средняя плотность Земли (5,5). Получим:

$$p_0 = 0{,}234\,(k_0^2 - k_1^2)\frac{gC}{k_m}. \tag{14}$$

Если мы хотим вычислить p_0 в атмосферах, заметим, что

$$1\ am = 0{,}76\,Dg, \tag{15}$$

где D — плотность ртути при 0°. Деля (14) на (15) и полагая $C = 6\,356\,000$, получаем приблизительно $p_0 = 3\,200\,000$.

87. Пределы Стильтьес-Радо для внутренней плотности Земли. Примем за единицу длины полярный радиус Земли, подобно тому как это сделано в § 85, и примем за известные:

1) поверхностную плотность

$$k_1 = 2{,}7, \tag{16}$$

2) интеграл

$$3\int_0^1 kc^2\,dc = \text{средней плотности} = 5{,}56 = \Delta, \tag{17}$$

3) интеграл

$$5\int_0^1 kc^4 dc = \Gamma = 4{,}74. \tag{18}$$

Что касается величины последнего интеграла, заметим, что постоянная прецессии дает отношение $\frac{Q-P}{Q}$, в то время как земное сжатие дает $Q - P$ (§ 81), откуда становится известным Q, которое с достаточным приближением может быть выражено через

$$Q = \frac{8}{3}\pi\int_0^1 kc^4\,dc = \frac{8}{15}\pi\Gamma.$$

С этими данными, допуская, что k всюду конечно, положительно и не возрастает при изменении c от 0 до 1, можно установить некоторые пределы для значения плотности внутри Земли.

Пусть $p = p(c)$ есть интегрируемая функция в интервале (0,1) и притом такая, что

$$3\int_0^1 pc^2\,dc = \Delta, \qquad 5\int_0^1 pc^4\,dc = \Gamma. \tag{19}$$

Функции k и p должны совпадать по крайней мере для двух значений c в интервале (0,1). Действительно, мы имеем:

$$\int_0^1 (k-p)\,c^2\,dc = 0, \tag{20}$$

$$\int_0^1 (k-p)\,c^4\,dc = 0, \tag{21}$$

откуда

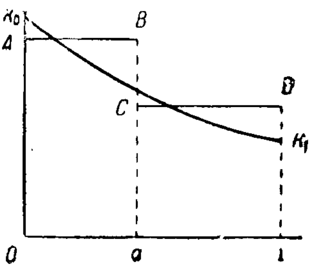
$$\int_0^1 (k-p)(1-c^2)\,c^2\,dc = 0.$$

Интеграл может равняться нулю только при условии, что $k-p$ меняет по крайней мере один раз знак в интервале интегрирования.

Допустим, что это происходит при $c = c_1$. Умножая (20) на c_1^2 и вычитая (21), получаем:

$$\int_0^1 (k-p)(c_1^2-c^2)\,c^2\,dc = 0. \tag{22}$$

Здесь множители $c_1^2 - c^2$ и $k - p$ одновременно меняют знаки при $c = c_1$. Множитель $c_1^2 - c^2$ не имеет других перемен знака; следовательно, необходимо, чтобы $k - p$ переменило еще раз знак в интервале интегрирования для того, чтобы (22) могло удовлетворяться.



Черт. 7.

Установив это, дадим функции p следующую форму:

$$\left.\begin{array}{lll} p = p_0 & \text{в интервале} & (0, \alpha),\ \alpha < 1, \\ p = p_1 < p_0 & \text{»} \quad \text{»} & (\alpha, 1). \end{array}\right\} \tag{23}$$

Скажем, что значение k при $c = \alpha$ заключено между p_0 и p_1. Действительно, если сделать графическое представление функций k и p, принимая значения c за абсциссы и k и p за ординаты, убеждаемся, что кривая k_0k_1, представляющая функцую $k = k(c)$, должна пересекать каждое из трех звеньев ломаной $ABCD$, которая представляет функцию $p = p(c)$.

Согласно гипотезе, сделанной относительно k, кривая k_0k_1 понижается вправо; она начинается выше B (черт. 7) и опускается ниже C;

согласно только что доказанной лемме она обязательно должна иметь две точки пересечения с ломаной $ABCD$. Значения p_0 и p_1 являются, следовательно, верхним и нижним пределом k при $c=\alpha$; эти последние получим, вводя гипотезу (23) в (19); таким образом, находим:

$$\left.\begin{aligned} p_0\alpha^3+p_1(1-\alpha^3)&=\Delta,\\ p_0\alpha^5+p_1(1-\alpha^5)&=\Gamma,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и, разрешая относительно p_0 и p_1:

$$p_0=\frac{(1-\alpha^5)\Delta-(1-\alpha^3)\Gamma}{\alpha^3-\alpha^5}=\Delta+(\Delta-\Gamma)\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha+\alpha^2}\right),$$

$$p_1=\frac{\Gamma-\Delta\alpha^2}{1-\alpha^2}=\Delta-\frac{\Delta-\Gamma}{1-\alpha^2}.$$

Оба эти предела уменьшаются при возрастании α. Нижний предел p_1 перестает быть применимым, когда он становится равным k_1. Это наступает при значении α, определяемом из

$$\alpha_m=\sqrt{\frac{\Gamma-k_1}{\Delta-k_1}}=0,844.$$

Вводя это определенное значение α в первую формулу (24) и заменяя там p_1 значением k_1, получаем соответствующую величину p_m из

$$p_m=k_1+\frac{\Delta-k_1}{\alpha_m^3}=k_1+\frac{(\Delta-k_1)^{\frac{5}{2}}}{(\Gamma-k_1)^{\frac{3}{2}}}=7,47.$$

Это p_m является также нижним пределом плотности в центре, так как, если сделаем $k_0<k_m$, то кривая k_0k_1 встретит единственный раз ломаную $ABCD$, соответствующую значениям

$$p_0=p_m \quad \text{и} \quad p_1=k_1.$$

В интервале $(\alpha_m, 1)$ можно принять для p_m за *нижний предел* k_1 и за *верхний предел* значение p_0', которое получается из второй формулы (24), полагая k_1 вместо p_1, т. е.

$$p_0'=k_1+\frac{\Gamma-k_1}{\alpha^5}. \tag{25}$$

Действительно, вторая формула (24) выражает, что кривая k_0k_1 встречает *по крайней мере единственный раз* ломаную $p=p_0$, $p=p_1$ и, в частности, ломаную $p=p_0'$, $p=k_1$. Если для $c=\alpha$ будет $k>p_0'$, то рисунок показывает, что не может иметь места ни одно пересечение.

Таким же рассуждением мы доказали бы, что, если задан верхний предел k_1 для данного значения $c=\alpha$, можно принять за верхний предел p_0, определяемый из первой формулы (24), полагая в ней k_1 вместо p_1. Но нетрудно убедиться в том, что таким образом мы получили бы более высокий предел, чем тот, который дается формулой (25).

Сделав числовые выкладки, мы найдем:

при $\alpha = 0{,}0$	нижний предел 4,74,	верхний предел ∞
„ $\alpha = 0{,}3$	„ „ 4,66	„ „ 38,0
„ $\alpha = 0{,}4$	„ „ 4,58	„ „ 19,8
„ $\alpha = 0{,}5$	„ „ 4,47	„ „ 13,2
„ $\alpha = 0{,}6$	„ „ 4,28	„ „ 10,2
„ $\alpha = 0{,}7$	„ „ 3,95	„ „ 8,64
„ $\alpha = 0{,}8$	„ „ 3,28	„ „ 7,73
„ $\alpha = 0{,}844$	„ „ 2,70	„ „ 7,47
„ $\alpha = 0{,}9$	„ „ 2,70	„ „ 6,16
„ $\alpha = 1{,}0$	„ „ 2,70	„ „ 4,74

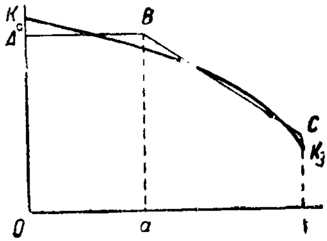
Если еще допустить другую гипотезу, а именно, что приращение плотности от поверхности к центру *становится все менее быстрым* при увеличении глубины (что равн сильно утверждению, что кривая k_0k_1 обращена вогнутостью к оси абсцисс), то можно найти более тесные пределы.

Ограничимся определением верхних пределов, отсылая читателя к оригинальной статье Радо („Bullet. Astron." 1890) за вычислением нижнего предела.

Вспомогательная функция p изображается двумя прямыми AB и BC, уравнения которых таковы:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_\alpha && \text{в интервале } (0,\ \alpha), \\ p &= p_1 + q_1(1-c) && \text{„ „ } (\alpha,\ 1), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

и которые имеют общую точку с абсциссой α и ординатой p_α, если полагать:



$0A = p_0$
$1D = p_1$.

Черт. 8.

$$p_\alpha = p_1 + q_1(1-\alpha). \tag{27}$$

Ясно, что согласно сделанной гипотезе кривая k_0k_1 не может встретить дважды ломаную ABC (черт. 8), если она подымается выше точки B. Таким образом p_1 (ордината B) есть верхний предел k при $c = \alpha$.

Вводя (26) в условные уравнения (19), получаем, принимая во внимание (27):

$$\left.\begin{aligned} 4\Delta &= (1-\alpha^4)\,q_1 + 4p_1, \\ 6\Gamma &= (1-\alpha^6)\,q_1 + 6p_1, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

откуда

$$q_1 = \frac{12(\Delta - \Gamma)}{1 - 3\alpha^4 + 2\alpha^6}, \qquad p_1 = \frac{3(1-\alpha^4)\Gamma - 2(1-\alpha^6)\Delta}{1 - 3\alpha^4 + 2\alpha^6}. \tag{29}$$

После вычисления p_1 и q_1 (27) дает искомый верхний предел для p_α. При $\alpha = 0$ (29) и (27) дают:

$$p_1{}^0 = 3{,}10, \qquad q_1{}^0 = 9{,}84, \qquad p_\alpha{}^0 = 12{,}94;$$

ломаная ABC обращается в одну нисходящую прямую; $p_\alpha{}^0$ есть верхний предел плотности в центре, и из черт. 8 легко вывести, что $p_1{}^0$ есть верхний предел поверхностной плотности.

При $\alpha = 0{,}55 = \alpha_m{}'$ наши формулы дают для p_1 значение $2{,}70 = k_1$; соответствующая величина $p_r{}' = 8{,}37$, и легко видеть, что это есть нижний предел плотности в центре; так как прямая AB ($p = p_\alpha$) лежит выше кривой kk, то не может быть больше одного пересечения этой кривой с ломаной ABC.

При $\alpha > 0{,}55$ (29) дает для p_1 значение, меньшее, чем k_1, а для p_α — значение слишком большое. В этом случае следует заменить систему двух прямых, из которых одна горизонтальная, а другая наклонна, системой двух наклонных прямых, имеющих общую точку с абсциссой $c = \alpha$, и из которых вторая проходит через точку с координатами $(1, k_1)$.

Поэтому положим

$$\left.\begin{array}{ll} p = p_0 - q_0 c & \text{в интервале } (0, \alpha), \\ p = k_1 + p_1(1 - c) & \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad (\alpha, 1), \end{array}\right\} \tag{30}$$

при условии

$$p_0 - q_0\alpha = k_1 + q_1(1 - \alpha).$$

Условия (19) дают тогда:

$$4(\Delta - k_1) = q_0\alpha^4 + q_1(1 - \alpha^4),$$
$$6(\Gamma - k_1) = q_0\alpha^6 + q_1(1 - \alpha^6).$$

Ордината общей точки двух прямых (30), или

$$p_\alpha = k_1 + q_1(1 - \alpha),$$

является верхним пределом k при $c = \alpha$.

Таким образом получаются следующие пределы для плотности:

c	Верхний предел	Нижний предел
0,00	12,94	8,37
0,10	11,96	8,27
0,20	11,01	8,37
0,30	10,03	8,87
0,40	9,33	8,35
0,50	8,66	7,89
0,60	7,78	7,03
0,70	6,60	6,05
0,80	5,43	5,07
0,90	4,26	3,96
1,00	3,10	2,70

Здесь вписаны против каждого верхнего предела и нижний предел, выведенный Радо при помощи кривой, охватывающей наклонную прямую $p = p_1 + q_1(1 - c)$ системы (26) и наклонную прямую $p = p_0 - q_0 c$ системы (30).

Приложения

1. ФОРМУЛЫ ГАУССА И ГРИНА

1. Формула Гаусса. Пусть в пространстве τ трех измерений, ограниченном одной или несколькими поверхностями, дана функция $F(x, y, z)$, конечная, непрерывная и однозначная для всех точек пространства и на контуре и имеющая первую производную по x $\frac{\partial F}{\partial x}$, конечную и интегрируемую. Допустим еще, что поверхность или все поверхности, ограничивающие объем, имеют касательную плоскость.

Рассмотрим интеграл

$$\int_\tau \frac{\partial F}{\partial x} d\tau,$$

где $d\tau$ есть элемент объема и интеграл распространен на все рассматриваемое пространство.

Заменим $d\tau$ через $dx\,dy\,dz$ и проинтегрируем по x; получим для каждой данной пары значений y и z:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = F_2 - F_1, \tag{1}$$

где F_1 и F_2 — значения F в точках P_1, P_2, в которых параллель к оси x, соответствующая данным значениям y и z, встречает контурную поверхность. Это будет в случае, если указанная параллель имеет только две общие точки с контуром; доказательство без труда распространяется и на случай любого четного числа точек пересечения. На основании (1) имеем:

$$\int_\tau \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \iiint \frac{\partial F}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint (F_2 - F_1)\,dy\,dz. \tag{2}$$

Обозначим через dS_1, dS_2 элементы поверхности на контуре, которые вырезает призма, параллельная оси x, имеющая основанием в плоскости yz прямоугольник $dy.\,dz$, и обозначим через n_1, n_2 ***внутренние*** нормали в точках P_1, P_2, лежащих внутри элементов ds_1, ds_2. Углы (n_1, x), (n_2, x), которые указанные внутренние нормали образуют с положительным направлением оси x, заключаются — первый между 0 и $\frac{\pi}{2}$, второй — между $\frac{\pi}{2}$ и π; поэтому

$$dy\,dz = \cos(n_1, x)\,dS_1 = -\cos(n_2, x)\,dS_2.$$

Подставляя в (2), получим:

$$\int_\tau \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = -\int_{S_1} F_1 \cos(n_1, x)\,dS_1 - \int_{S_2} F_2 \cos(n_2, x)\,dS_2,$$

где первый интеграл правой части распространен на все точки, аналогичные P_1 на контурной поверхности, а второй интеграл — на все точки, аналогичные P_2. Проще можно написать:

$$\int\limits_{\tau} \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = -\int\limits_{S} F \cos(n, x)\, dS, \tag{3}$$

где второй интеграл распространен на всю поверхность.

Это и есть *формула Гаусса*. Замечая, что $\frac{\partial x}{\partial n}$ согласно обычному значению символа частной производной выражает отношение приращения координаты x некоторой точки к перемещению ∂n этой же точки по внутренней нормали, можем еще написать (3) так:

$$\int\limits_{\tau} \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = -\int\limits_{S} F \frac{\partial x}{\partial n} dS. \tag{3'}$$

Замечание Доказательство сохраняет силу, если F в некоторой точке A (или в конечном числе точек) становится бесконечностью порядка $\frac{1}{r^n}$, где $n < 2$, а r есть расстояние текущей точки от A.

2. Лемма Грина. Рассмотрим часть пространства, ограниченную, как и в прошлом параграфе, и пусть U и V — две функции от x, y, z, конечные и непрерывные вместе со своими первыми производными и допускающие, вообще, конечные и интегрируемые вторые производные. Согласно (3') имеем:

$$\int\limits_{\tau} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\tau + \int\limits_{\tau} U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} d\tau = \int\limits_{\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) d\tau = -\int\limits_{S} U \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} dS.$$

Написав аналогичные выражения с заменой x на y и z и суммируя, положив еще

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

получим:

$$\int\limits_{\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = -\int\limits_{\tau} U \Delta_2 V d\tau - \int\limits_{S} U \frac{\partial V}{\partial n} dS. \tag{4}$$

3. Первая формула Грина. Поменяв местами в (4) U и V, поскольку левая часть от этого не меняется, получим:

$$\int\limits_{\tau} (U \Delta_2 V - V \Delta_2 U)\, d\tau = -\int\limits_{S} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) dS. \tag{5}$$

Особые случаи. 1. Положим $U = 1$. Имеем:

$$\int\limits_{\tau} \Delta_2 V d\tau = -\int\limits_{S} \frac{\partial V}{\partial n} dS. \tag{6}$$

2. Положим $U=V$ и примем обычное обозначение:

$$\Delta_1 V=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Формула (4) дает:

$$\int_\tau \Delta_1 V d\tau+\int_\tau V\Delta_2 V d\tau=-\int_S V\frac{\partial V}{\partial n}dS.$$

Замечание. Эти формулы, за исключением (6), имеют силу, если пространство τ есть неограниченное ***внешнее*** пространство по отношению к замкнутой поверхности S, при условии, что U и V обращаются в нуль на бесконечном расстоянии, так что, обозначая через R расстояние текущей точки x, y, z от постоянной точки O, произведения VR, UR оставались бы конечными при неограниченном возрастании R. Действительно, рассмотрим объем, заключенный между поверхностью S и сферой Σ радиуса R и с центром в O, лежащей полностью вне S. Применяя (4) к этому объему, мы должны прибавить к правой части член:

$$-\int_\Sigma U\frac{\partial V}{\partial n}d\Sigma, \tag{α}$$

где интеграл распространен на всю поверхность сферы Σ.

Обозначая через $d\Omega$ телесный угол с вершиной в точке O, можем положить $d\Sigma=R^2 d\Omega$. Поскольку произведения UR, VR остаются конечными при возрастании R, остается конечным и произведение $R^2\frac{\partial V}{\partial n}$, так что, обозначая через M, N некоторые конечные величины, можно положить для всех значений, бóльших некоторого предела:

$$U<\frac{M}{R}, \qquad \frac{\partial V}{\partial n}<\frac{N}{R^2}.$$

Поэтому интеграл (α) по абсолютной величине будет меньше, чем

$$\frac{MN}{R}\int d\Omega=\frac{4\pi MN}{R},$$

и следовательно, обращается в нуль при $R=\infty$. Формулы (4), а следовательно, и (5), остаются без изменения, если τ выражает внешний объем по отношению к поверхности S; только n в этом случае выражает нормаль, идущую от S к ***внешнему*** объему, т. е. ***внешнюю нормаль***.

Для случая (6) участие сферы Σ в поверхностном интеграле, вообще, не исчезает. Если допустим, что

$$\lim_{R=\infty} R^2\frac{\partial V}{\partial R}=M,$$

получим на Σ:

$$\lim_{R=\infty} R^2\frac{\partial V}{\partial n}=-M,$$

и указанное участие становится, при $R=\infty$, равным:

$$-\int_{\Sigma}\frac{M}{R^2}\,d\Sigma=-\int_{4\pi}M\,d\Omega=-4\pi M,$$

Формула (6) тогда принимает вид:

$$\int_{\tau}\Delta_2 V d\tau=-\int_{S}\frac{\partial V}{\partial n}\,dS+4\pi M,$$

где n обозначает вновь *внешнюю* нормаль.

4. Вторая формула Грина. Положим в (5) $U=\frac{1}{r}$, где r — расстояние текущей точки x, y, z от постоянной точки O внутри объема τ. Можем применить (5) к объему τ, исключая объем произвольно малой сферы Σ, имеющей центр в O. Обозначая через τ_1 ограниченное таким образом пространство и замечая, что

$$\Delta_2\frac{1}{r}=0,$$

напишем (5) в виде:

$$\int_{\tau_1}\frac{1}{r}\Delta_2 V d\tau=-\int_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS-\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right)d\Sigma, \qquad (5')$$

где последний интеграл распространен на поверхность сферы Σ. Заменим $d\Sigma$ через $r^2\,d\Omega$, где $d\Omega$ имеет то же значение, как и в прошлом параграфе. Тогда этот интеграл принимает вид:

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right)d\Sigma=r\int_{4\pi}\frac{\partial V}{\partial r}\,d\Omega+\int_{4\pi}V\,d\Omega.$$

Так как предполагается, что V и $\frac{\partial V}{\partial r}$ конечны и непрерывны во всех точках, то первый из интегралов правой части стремится к нулю вместе с r, а последний интеграл стремится к $4\pi V_0$, где V_0 — значение V в точке 0, от которой отсчитывается расстояние r. Отсюда (5′) обращается в

$$4\pi V_0=\int_{S}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS-\int_{\tau}\frac{1}{r}\Delta_2 V d\tau, \qquad (7)$$

откуда, если положить вместо $d\tau$ $r^2\,dr\,d\Omega$, сразу видно, что величина объемного интеграла, зависящего от малой сферы Σ, исчезает вместе с r.

Замечание I. Если точка, от которой отсчитывается расстояние r, находится *вне объема* τ, можно применять формулу (5), если положить $\frac{1}{r}$ вместо U и нуль вместо $\Delta_2 U$, так что (5) в этом случае обращается в

$$0=\int_{S}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS-\int_{\tau}\frac{1}{r}\Delta_2 V\,d\tau. \qquad (7')$$

Если, наконец, точка O находится *на поверхности* S и эта поверхность допускает в ней касательную плоскость, то рассуждение, аналогичное тому, которое послужило для установления (7), докажет, что в этом случае

$$2\pi V_0 - \int_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS - \int_\tau \frac{1}{r} \Delta_2 V \, d\tau. \qquad (7'')$$

Замечание II. Положив в (7), (7'), (7'') $V = -1$, получим *формулу Гаусса:*

$$\int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = 4\pi, \; 0, \; 2\pi,$$

в зависимости от того, будет ли точка O внутренней, внешней или на поверхности.

5. Выражение $\Delta_2 V$ в ортогональных криволинейных координатах. Можем дать как приложение формулы (6) выражение $\Delta_2 V$ в ортогональных криволинейных координатах. Пусть точки пространства отнесены к криволинейным координатам x_1, x_2, x_3, и пусть

$$dS^2 = a^2 dx_1^2 + b^2 dx_2^2 + c^2 dx_3^2$$

— квадрат линейного элемента. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2, x_3)$ и приложим формулу

$$\int_\tau \Delta_2 V \, d\tau = -\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS \qquad (6)$$

к бесконечно малому параллелепипеду, три пересекающихся ребра которого OA, OB, OC касательны к координатным линиям. Обозначим через GD, GE, GF ребра, параллельные и противоположные, соответственно, OA, OB, OC. Часть поверхностного интеграла, зависящая от грани $OAFB$, такова:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 ab \, dx_1 \, dx_2 = \frac{ab}{c} \left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)_1 dx_1 \, dx_2.$$

Часть интеграла, происходящая от противоположной грани, имеет аналогичное выражение, в котором dx_3 противоположного знака, а количества a, b, c, $\frac{\partial V}{\partial x_3}$ изменены подстановкой OC в качестве координатной линии x_3. Таким образом общее влияние двух противоположных граней $OAFB$, $GDCE$ в интеграле равно:

$$-dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{ab}{c} \frac{\partial V}{\partial x_3}\right).$$

Подобным образом вычисляется и часть интеграла, зависящая от прочих четырех граней.

Замечая, что элемент объема выражается через

$$d\tau = abc \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

и что для бесконечно малого объема $d\tau$ первая часть (6) может быть написана в виде $\Delta_2 V\, d\tau$, получим, опуская общий множитель $d\tau$:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{abc}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{ca}{b}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{ab}{c}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{8}$$

Пример. Полярные координаты. Пусть ρ, θ, υ — рассматриваемые полярные координаты (радиус-вектор, полярное расстояние, долгота) точки пространства.

Как уже отмечено, квадрат линейного элемента равен:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\upsilon^2.$$

Положив в выражении (8) вместо

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \quad a,\ b,\ c,$$

соответственно,

$$\rho\ \ \theta,\ \upsilon \qquad 1,\ \rho,\ \rho\sin\theta,$$

получим:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2},$$

что иначе может быть написано так.

$$\rho^2\Delta_2 V = \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho V) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2}.$$

6. Гармонические функции. Гармонической функцией для ограниченного пространства τ называется такая функция V, которая однозначна и конечна во всех точках, включая и контур, имеет конечные и непрерывные первые производные, конечные и интегрируемые вторые производные, удовлетворяющие уравнению $\Delta_2 V = 0$. Такая функция определена во всем пространстве τ, если даны ее значения для всех точек поверхностного контура S, ограничивающего пространство τ. Действительно, рассмотрим сферу Σ с центром в некоторой точке O внутри τ, радиусом r, целиком находящуюся внутри пространства τ. Применяя формулу (7) к объему, заключенному внутри Σ, получим:

$$-4\pi V_0 = \int\limits_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\Sigma.$$

Так как нормали совпадают с радиусами сферы, то

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

откуда

$$4\pi V_0 = \frac{1}{r_2}\int\limits_{\Sigma} V\, d\Sigma - \frac{1}{r}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial V}{\partial n}\, d\Sigma \tag{9}$$

Последний интеграл равен на основании (6) нулю Поэтому уравнение (9) может быть написано так:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\Sigma} V\, d\Sigma.$$

Таким образом имеем теорему Гаусса: гармоническая функция пространства τ имеет в каждой точке O этого пространства значение, равное среднему арифметическому из значений ее в точках поверхности сферы с центром O и полностью заключенной внутри τ. Отсюда ясно, что гармоническая функция не может иметь максимумов или минимумов в точках пространства τ, за исключением контурной поверхности. Поэтому, если такая функция равна нулю во всех точках этой поверхности, она должна быть нулем во всем пространстве. Мы видели, как из этого свойства доказывается, что гармоническая функция пространства τ определена, если даны ее значения для контура.

II. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ТЕЛА

7. Свойства потенциальной функции пространства. Рассмотрим некоторое тело C, конечная плотность которого в точке (x, y, z) есть k, пусть $d\tau$ есть элемент объема, окружающего эту точку, r — расстояние этой точки от некоторой фиксированной точки P. Интеграл

$$\int\limits_{\tau} \frac{k\,d\tau}{r} = V, \tag{10}$$

распространенный на весь объем, занятый телом, называется *потенциальной функцией* тела C на точку P.

Следующие свойства функции V доказываются с большей или меньшей строгостью во многих курсах анализа и математической физики:

1. V, рассматриваемая как функция координат x, y, z точки P, от которой измеряется расстояние r, должна быть конечной, непрерывной и однозначной.

2. Ее первые производные $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ также конечны, непрерывны и однозначны. Будучи помноженными на постоянную f ньютонианского тяготения, они выражают составляющие по осям координат притяжения, которое тело оказывает на единицу массы, сосредоточенной в точке $P(x, y, z)$.

3. Вторые производные $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ и т. д. конечны, непрерывны и однозначны во всем пространстве, внешнем относительно тела. Они существуют и конечны во всякой внутренней точке P, для которой отношение приращения плотности к расстоянию по любому направлению, исходящему из P, конечно.

4. Вне тела удовлетворяется уравнение:

$$\Delta_2 V = 0$$

(теорема Лапласа).

5. Внутри тела:

$$\Delta_2 V = -4\pi k$$

(теорема Пуассона).

6. На бесконечно большом расстоянии V обращается в нуль, причем, если R — расстояние точки $P(x, y, z)$ от некоторой фиксированной точки самого тела, то

$$\lim_{R=\infty} (RV) = M.$$

где M — масса тела. Это последнее свойство становится очевидным, если заметить, что в силу (10) V всегда заключается между

$$\frac{M}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{M}{R_2},$$

где R_1 и R_2 — наибольшее и наименьшее расстояния точек тела от точки P. Когда P удаляется в бесконечность, отношения $R_1:R$ и $R_2:R$ стремятся к единице.

Перечисленные свойства являются характеристическими и вполне определяют потенциальную функцию тела C.

8. Теорема Ньютона. *Однородный слой, заключенный между двумя концентрическими подобными эллипсоидами, не оказывает никакого притяжения на точку, лежащую внутри полости.*

Действительно, пусть E_1 и E_2 — два эллипсоида, ограничивающие слой. Пусть некоторая прямая c пересекает эллипсоид E_1 в точках A, B, а эллипсоид E_2 — в точках C, D. В таком случае:

$$AC = DB. \tag{11}$$

Действительно, диаметральная плоскость, сопряженная с направлением c относительно эллипсоида E_1, имеет то же свойство и относительно эллипсоида E_2 на основании подобия обеих фигур, и поэтому хорды AB и CD имеют одну и ту же среднюю точку.

Рассмотрим конус бесконечно малого отверстия с вершиной P в точке внутри внутреннего эллипсоида E_2. Этот конус вырежет из нашего слоя два конических отрезка равной высоты AC и DB. Обозначая через ρ расстояние текущей точки от P, через $d\Omega$ — угловое отверстие конуса, получим для элемента массы (предполагая плотность равной единице) $\rho^2\,d\rho\,d\Omega$ и для притяжения этого элемента на точку P $f\,d\rho\,d\Omega$. Отсюда притяжения со стороны двух конических отрезков будут:

$$f\,d\Omega \int_{PC}^{PA} d\rho = f\,d\Omega\,(AC),$$

$$f\,d\Omega \int_{PD}^{PB} d\rho = f\,d\Omega\,(DB).$$

На основании (11) эти притяжения равны и, будучи направленными в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются. Разделяя всю массу нашего слоя на бесконечно малые части при помощи конусов с вершиной в точке P, притяжения каждой пары таких частей взаимно уравновесятся, чем и доказывается теорема.

9. Теорема Айвори относительно софокусных эллипсоидов.

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{E}$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \tag{E_1}$$

— уравнения двух концентрических эллипсоидов E и E_1, имеющих общее направление осей, которые будем называть софокусными в случае, если будет:

$$a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2.$$

Пусть $A(x, y, z)$ — точка, лежащая на эллипсоиде E, которой соответствует на эллипсоиде E_1 точка A_1 с координатами:

$$x_1 = \frac{a_1}{a} x, \qquad y_1 = \frac{b_1}{b} y, \qquad z_1 = \frac{c_1}{c} z. \tag{12}$$

Пусть еще $B(X, Y, Z)$ и $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$ — две другие соответствующие точки, первая — на поверхности E, вторая — на E_1, связанные таким же соотношением (12).

Докажем, что

$$AB_1 = A_1B.$$

Действительно, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
(X_1 - x)^2 - (x_1 - X)^2 &= \left(\frac{a_1^2}{a^2} - 1\right)X^2 + \left(1 - \frac{a_1^2}{a^2}\right)x^2 = \frac{X^2 - x^2}{a^2}(a_1^2 - a^2),\\
(Y_1 - y)^2 - (y_1 - Y)^2 &= \frac{Y^2 - y^2}{b^2}(b_1^2 - b^2) = \frac{Y^2 - y^2}{b^2}(a_1^2 - a^2),\\
(Z_1 - z)^2 - (z_1 - Z)^2 &= \frac{Z^2 - z^2}{c^2}(c_1^2 - c^2) = \frac{Z^2 - z^2}{c^2}(a_1^2 - a^2).
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ввиду того, что как (x, y, z), так и (X, Y, Z) удовлетворяют уравнению (E), то будем иметь:

$$(AB_1)^2 = (A_1B)^2,$$

что и требовалось доказать.

10. Эллипсоидальные софокусные слои. Рассмотрим слой T, заключенный между двумя концентрическими софокусными бесконечно близкими эллипсоидами, полуоси которых соответственно равны (α, β, γ) и $(\alpha h, \beta h, \gamma h)$, где h бесконечно мало отличается от единицы. Пусть T_1 есть слой, заключенный между двумя концентрическими эллипсоидами с полуосями $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_1 h, \beta_1 h, \gamma_1 h)$, имеющими с предыдущими эллипсоидами общий центр и общее направление осей. Положим, что

$$\alpha_1^2 - \alpha^2 = \beta_1^2 - \beta^2 = \gamma_1^2 - \gamma^2,$$

т. е. оба слоя *софокусны*. Каждой точке (x, y, z) слоя T пусть соответствует точка (x_1, y_1, z_1) слоя T_1, определяемая посредством соотношений, аналогичных (12). Соответственные элементы объемов $d\tau$, $d\tau_1$ находятся в постоянном отношении:

$$d\tau : d\tau_1 = \alpha\beta\gamma : \alpha_1\beta_1\gamma_1. \tag{14}$$

Пусть M, M_1 — две соответственных точки на внешних поверхностях двух слоев, и пусть V, V_1 — соответствующие потенциальные функции слоя T на точку M_1 и слоя T_1 на точку M; получим:

$$V = \int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r}, \qquad V_1 = \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau_1}{r} = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha\beta\gamma} \int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r},$$

где на основании предыдущей теоремы r принимает во втором интеграле значения, равные значениям в первом интеграле. Отсюда:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha\beta\gamma}. \tag{15}$$

Пусть $a_1<a$, т. е. слой T_1 заключен внутри слоя T. По теореме Ньютона (§ 8) слой T не оказывает никакого притяжения на слой T_1; отсюда $V=\text{const}$. Из формулы (15) следует, что и $V_1=\text{const}$. Или: *потенциальная функция эллипсоидального слоя* (ограниченного двумя подобными бесконечно близкими эллипсоидами) *имеет постоянное значение во всех точках эллипсоида, софокусного данному слою.*

11 Внешняя потенциальная функция подобного эллипсоидального слоя Пусть

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}+\frac{Z^2}{\gamma^2}=1 \tag{E}$$

есть уравнение эллипсоида E, ограничивающего снаружи слой. Тогда

$$\frac{x^2}{\alpha^2+u}+\frac{y^2}{\beta^2+u}+\frac{z^2}{\gamma^2+u}=1 \tag{16}$$

будет уравнением эллипсоида, софокусного к E, и этот эллипсоид будет внешним по отношению к E, если $u>0$. Понятно, что (см. главу III, § 18) u должно быть большим корнем уравнения (16), в котором мы считаем данными x, y, z и неизвестным u. Результат, полученный в конце предыдущего параграфа, может быть выражен следующим образом: внешняя потенциальная функция слоя является *функцией одного лишь* u. Положим поэтому:

$$v=f(u).$$

С другой стороны, должно быть $\Delta_2 v=0$ или же

$$f''(u)\,\Delta_1 u+f'(u)\,\Delta_2 u=0. \tag{17}$$

Но мы имели (глава III, § 18):

$$\Delta_1 u=\frac{4}{P},\qquad \Delta_2 u=\frac{2}{P}\frac{d}{du}\log R_u,$$

где

$$(\alpha^2+u)(\beta^2+u)(\gamma^2+u)=R_u,$$

$$\frac{x^2}{(\alpha^2+u)^2}+\frac{y^2}{(\beta^2+u)^2}+\frac{z^2}{(\gamma^2+u)^2}=P.$$

Отсюда уравнение (17) дает:

$$\frac{f''(u)}{f'(u)}=-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log R_u,$$

откуда

$$f'(u)=-\frac{c}{\sqrt{u}}\qquad (c=\text{const}),$$

$$v=f(u)=c\int_u^\infty\frac{du}{\sqrt{u}}, \tag{18}$$

где для верхнего предела положено ∞ ввиду того, что v должно обращаться в нуль для бесконечно удаленных точек. v совпадает (за исключением постоянного множителя c) с функцией K, свойства которой были рассмотрены в § 18 главы III. Мы видели, что, обозначая через ρ радиус-вектор текущей точки, считаемый от внутренней неподвижной точки, должно быть:

$$\lim_{\rho=\infty} \rho \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{R_u}} = 2.$$

С другой стороны, если обозначить через m полную массу слоя, то

$$\lim_{\rho=\infty} \rho v = m.$$

Отсюда следует, что постоянная c в (18) равна $\frac{m}{2}$. Таким образом потенциальная функция рассмотренного бесконечно тонкого слоя для внешней точки выражается так:

$$v_e = \frac{m}{2} \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{(\alpha^2+u)(\beta^2+u)(\gamma^2+u)}}, \tag{19}$$

где u — положительный корень уравнения (16). На поверхности выражение для v мы получим, полагая $u=0$. С другой стороны, v изменяется непрерывно при удалении от поверхности. Отсюда на самой поверхности и внутри слоя потенциальная функция слоя выражается так:

$$v_i = \frac{m}{2} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(\alpha^2+u)(\beta^2+u)(\gamma^2+u)}}. \tag{20}$$

12. Потенциальная функция эллипсоидального тела, образованного из подобных слоев и, в частности, однородного эллипсоида.

I. *Случай внешней точки.* Пусть

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \tag{21}$$

есть уравнение внешней поверхности E тела. Уравнение подобного внутреннего эллипсоида может быть написано так:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 - h \qquad (0 \leqslant h \leqslant 1), \tag{22}$$

причем полуоси равны $a\sqrt{1-h} = \alpha$, $b\sqrt{1-h} = \beta$, $c\sqrt{1-h} = \gamma$. Пусть k (функция одного лишь h) есть плотность слоя, заключенного между двумя эллипсоидами, которым соответствуют значения h, равные h и $h+dh$. Масса такого слоя равна:

$$\frac{4}{3}\pi abc \left[(1-h)^{\frac{3}{2}} - (1-h-dh)^{\frac{3}{2}}\right] = 2\pi abc\,(1-h)^{\frac{1}{2}} dh \tag{23}$$

Потенциальная функция такого слоя на внешнюю точку (x, y, z) дается формулой (19), если положить в ней m равным (23) и α, β, γ равными $a\sqrt{1-h}$ и т. д. Заменим в (19) переменную интегрирования, полагая

$$u = s(1-h).$$

Уравнение (16), которое определяет u, может быть тогда написано так:

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1-h, \tag{24}$$

и выражение (19) принимает вид:

$$v_e = \pi kabc\, dh \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{R_s}}, \tag{25}$$

где

$$R_s = (a^2+s)(b^2+s)(c^2+s).$$

В формуле (25) нижний предел s интеграла является, конечно, положительным корнем уравнения (24).

Допустим, что k есть интегрируемая функция от h, и положим:

$$\int_0^h k\, dh = \varphi(h).$$

Получим потенциальную функцию V тела на внешнюю точку (x, y, z), интегрируя (25) от $h=0$ до $h=1$ Положим для этой цели

$$\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{R_s}} = I,$$

откуда

$$\frac{dI}{dh} = -\frac{1}{\sqrt{R_s}}\frac{ds}{dh}.$$

Находим:

$$V_e = \pi abc \int_0^1 I \frac{d\varphi}{dh} dh = \pi abc \left\{ \left| I\varphi \right|_{h=0}^{h=1} + \int_0^1 \frac{\varphi(h)}{\sqrt{R_s}}\frac{ds}{dh} dh \right\}.$$

Первый член в скобках обращается в нуль, так как при $h=0$ $\varphi(h)=0$ и при $h=1$ $s=\infty$, откуда $I=0$.

Во втором члене мы можем принять за переменную интегрирования s вместо h. Пределы интегрирования в таком случае будут λ и ∞, где λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1. \tag{26}$$

Отсюда, наконец, получаем:

$$V_e = \pi abc \int^\infty \varphi(h) \frac{ds}{\sqrt{R_s}},$$

где

$$h = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}.$$

В случае однородного эллипсоидального тела с плотностью k_0, мы имеем $\varphi(h) = k_0 h$. Отсюда:

$$V_0 = \pi abck_0 \int\limits_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{R_s}}. \tag{27}$$

2. Случай внутренней точки. Положив

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - H, \tag{28}$$

где x, y, z — координаты внутренней точки, уравнение (28) будет уравнением эллипсоида E_1, подобного E и проходящего через точку (x, y, z) с полуосями $a\sqrt{1-H}$, $b\sqrt{1-H}$, $c\sqrt{1-H}$.

Потенциальную функцию на точку (x, y, z) той части тела, которая заключена в эллипсоиде E_1, получим, интегрируя (25) по h в интервале $(H, 1)$, между тем как потенциальную функцию части тела, внешней относительно E_1, найдем аналогичным образом, интегрируя выражение подобное (25), в котором нижний предел интегрирования будет 0 вместо s. Положив

$$I_0 = \int\limits_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R_s}},$$

выразим, согласно сказанному, потенциальную функцию всей массы на внутреннюю точку так:

$$V_i = \pi abc \int\limits_0^H kI_0\, dh + \pi abc \int\limits_H^1 kI\, dh = \pi abc \left\{ I_0 \varphi(H) + \left| I\varphi \right|_H^1 + \int\limits_H^1 \frac{\varphi(h)}{\sqrt{R_s}} \frac{ds}{dh}\, dh \right\}.$$

Сравнение (28) с (24) показывает, что при $h = H$ $s = 0$; при $h = 1$ I обращается в нуль, как уже было сказано. Таким образом первые два члена в больших скобках последней формулы уничтожаются. Последний член преобразуем, как в предыдущем случае, принимая s за переменную интегрирования.

Таким путем получим окончательно:

$$V_i = \pi abc \int\limits_0^{\infty} \varphi(h) \frac{ds}{\sqrt{R_s}},$$

и для случая однородного эллипсоида:

$$V_i = \pi abck_0 \int\limits_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{R_s}}. \tag{29}$$

Формулы (27) и (29) являются хорошо известными выражениями для внешней и внутренней потенциальной функции однородного эллипсоида, которые называются именами Родригеца, Пуассона или Якоби.

Выкладки § 18 (глава III) легко проверить, так как функция (27) обладает всеми свойствами внешней потенциальной функции. Что касается V_i, то легко доказать, что она удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta_2 V_i = -4\pi k.$$

13. Случай сжатого эллипсоида вращения. Интегралы, стоящие в правых частях выражений (27) и (29), легко выражаются в конечном виде в случае, если две из полуосей a, b, c между собою равны.

Ограничимся рассмотрением сжатого однородного эллипсоида вращения. Обозначая его полуоси через a, b, положим:

$$i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}. \tag{30}$$

Заменим в интегралах (27) и (29) переменную, полагая

$$\eta = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + s}},$$

откуда

$$b^2 + s = \frac{a^2 - b^2}{\eta^2}, \qquad a^2 + s = \frac{(a^2 - b^2)(1 + \eta^2)}{\eta^2}, \qquad ds = -2(a^2 - b^2)\frac{d\eta}{\eta^3}.$$

Выражение (27) можем написать так:

$$V_e = \pi a^2 b k (\chi - \alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2),$$

где

$$\chi = \int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{R_s}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^E \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{2}{bi} \operatorname{arc\,tg} E,$$

$$\alpha = \beta = \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{R_s}} = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^E \frac{\eta^2\, d\eta}{(1 + \eta^2)^2} = \frac{1}{b^3 i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} E - \frac{E}{1 + E^2}\right),$$

$$\gamma = \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\sqrt{R_s}} = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^E \frac{\eta^2\, d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{2}{b^3 i^3}(E - \operatorname{arc\,tg} E).$$

Отсюда

$$V_e = \frac{2\pi a^2 bk}{bi} \operatorname{arc\,tg} E - \frac{\pi a^2 bk}{b^3 i^3}\left(\operatorname{arc\,tg} E - \frac{E}{1 + E^2}\right)(x^2 + y^2) - \frac{2\pi a^2 bk}{b^3 i^3}(E - \operatorname{arc\,tg} E)\, z^2.$$

Для случая внутренней точки достаточно положить 0 вместо λ и согласно (30) i вместо E. Заметим, что обыкновенный эксцентриситет e внешнего эллипсоида связан с i соотношением:

$$i = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

14. Компоненты притяжения. Для получения компонентов притяжения, которое однородное эллипсоидальное тело оказывает на внешнюю и внутреннюю точку, достаточно взять частные производные от выражений (27) и (29) по x, y, z. При этом нам придется принять во внимание, что λ является функцией x, y, z, определяемой (26). С другой стороны, заметим, что в силу той же формулы (26) подинтегральная функция в (27) обращается в нуль при $s=\lambda$. Поэтому производная правой части по λ равна нулю, так как при образовании первой частной производной по каждой координате можно поступать так, будто λ постоянно. Таким образом, если напишем (27) в форме:

$$V_e = K - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$

то компоненты притяжения будут (полагая равной единице постоянную притяжения):

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = -2Ax, \quad \frac{\partial V_e}{\partial y} = 2By, \quad \frac{\partial V_e}{\partial z} = -2Cz,$$

где

$$A = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R_s}}$$

и т. д.

Для случая внутренней точки (или на поверхности) имеют место те же выражения, в которых нижний предел интегрирования должен быть положен равным нулю вместо λ. Таким образом компоненты притяжения однородного эллипсоидального тела на внутреннюю точку изменяются пропорционально соответствующей координате этой точки.

Эта важная теорема была впервые выведена Маклореном (1742) для случая эллипсоида вращения и затем обобщена Лежандром (1785).